

PPGMAT- 2022

# DECOLAGEM E POUSO DE UM AVIÃO

EMBARQUE NESSE VOO COM  
DESTINO A UMA APLICAÇÃO DE  
NÚMEROS COMPLEXOS

CILIO JOSÉ VOLCE  
CLAUDETE CARGNIN

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

CILIO JOSÉ VOLCE  
CLAUDETE CARGNIN

**DECOLAGEM E POUSO DE UM AVIÃO:**  
EMBARQUE NESSE VOO COM DESTINO A UMA APLICAÇÃO DE NÚMEROS  
COMPLEXOS

**AIRPLANE TAKEOFF AND LANDING:**  
BOARD ON THIS FLIGHT TO A COMPLEX NUMBERS APPLICATION

PRODUTO EDUCACIONAL

LONDRINA  
2022



4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuem o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.  
Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

## AUTORES

### **CILIO JOSÉ VOLCE**

Mestre em Ensino de Matemática (2022) pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - PPGMAT/UTFPR. Especialista em Estatística (2008) e Licenciado em Matemática (2006) pela Universidade Estadual de Londrina — UEL. Bacharel em Engenharia Civil (2016) pela Faculdade Pitágoras de Londrina. Possui experiência em Tutorias para graduação em Educação a Distância — EaD, docência no Ensino Fundamental II, Ensino Médio, Cursinho Preparatório para Concursos Públicos, Ensino Técnico/Profissionalizante e Ensino Superior.

Contato: [cjvolceuel@yahoo.com.br](mailto:cjvolceuel@yahoo.com.br)

### **CLAUDETE CARGNIN**

Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática (2013) pela Universidade Estadual de Maringá. Mestre em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (2001). Especialista em Estatística e em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá. É licenciada em matemática pela Universidade Estadual de Maringá (1994). Atualmente é professora titular da carreira do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, com projetos de pesquisa voltados para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral e de matemática na educação básica (ênfase em recursos tecnológicos e interdisciplinaridade) e para estudantes com Transtorno do Espectro Autista. É professora do Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática da UTFPR- Câmpus Londrina/Cornélio Procópio.

Contato: [cargnin@utfpr.edu.br](mailto:cargnin@utfpr.edu.br)

## ILUSTRAÇÕES

As imagens utilizadas na capa e nas tarefas deste Produto Educacional são de uso livre e foram obtidas no *site Canva*. Disponível em: <https://www.canva.com/>. Acesso em 20 dez. 2021.

## VERSÃO DO ALUNO

No final desse Produto Educacional, está disponibilizada uma versão que pode ser impressa e entregue ao estudante.

# TERMO DE APROVAÇÃO

29/04/2022 19:23



Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Campus Londrina



CILIO JOSE VOLCE

## RECURSOS DIDÁTICOS PARA NÚMEROS COMPLEXOS NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 27 de Abril de 2022

Claudete Carginin, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Bruno Rodrigo Teixeira, Doutorado - Universidade Estadual de Londrina (UEL)

Sergio De Mello Arruda, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR, a partir dos dados da Ata de Defesa em 27/04/2022.

## APRESENTAÇÃO

Caros passageiros,

Sejam bem-vindos a bordo dessa aula.

Aqui vocês serão transportados por meio de uma sequência didática composta por quatro tarefas com foco nas representações algébricas e gráficas de Números Complexos.

O voo possui um destino interdisciplinar, com escalas nas disciplinas de Matemática e Física e conexões em outras áreas do conhecimento.

Acomodem os seus materiais nos compartimentos em cima ou embaixo de suas carteiras. Não é permitido ficar com dúvidas. Lembramos que o conhecimento é a capacidade humana de entender e compreender. Aprender é sensacional.

Em caso de emergência, chame pelo seu professor(a), que possui uma das mais nobres profissões com grande responsabilidade em contribuir com a sua formação e desenvolvimento enquanto indivíduo em uma sociedade.

A DECOLAGEM está autorizada. Desejamos a todos uma ótima aula!

Apertem os cintos e boa aprendizagem!

Cilio José Volce  
Claudete Carginin

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	7
2 TAREFA 1 .....	9
3 TAREFA 2 .....	13
4 TAREFA 3 .....	17
5 TAREFA 4 .....	26
REFERÊNCIAS .....	26

## Introdução

As tarefas temáticas que compõem este produto educacional foram concebidas no decorrer dos estudos e desenvolvimento da pesquisa de mestrado profissional intitulada “**Recursos Didáticos para Números Complexos na perspectiva da teoria dos Registros de Representação Semiótica**” disponível no endereço: <<<http://portal.utfpr.edu.br/cursos/coordenacoes/stricto-sensu/ppg-mat/producao-academica>>>. A sua estrutura foi pensada de modo a relacionar o conteúdo Números Complexos a um contexto real de aplicação, explorando as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, com foco nas representações algébricas e gráficas dessas operações. Ainda, buscamos sintetizar atividades com possibilidades de utilizá-las de forma interdisciplinar com a Física no quesito de vetores e forças. No decorrer das apresentações das tarefas, há soluções e curiosidades sobre o tema avião e orientações para o professor da disciplina de matemática.

Dessa forma, organizamos este material que contém quatro tarefas com abordagens que envolvem as etapas de ação, formulação, validação e institucionalização com inspirações na Teoria das Situações Didáticas – TSD (Guy Brousseau).

Com esse produto, pretende-se incentivar os alunos a estudarem, revisarem conteúdos e refletirem sobre as mudanças de registros. Acredita-se que os recursos interativos podem: auxiliar na compreensão dos conceitos, operações e representações dos Números Complexos; diminuir lacunas de aprendizagens; melhorar os fundamentos matemáticos dos estudantes; permitir uma participação ativa dos estudantes; e trazer dinamicidade para a sala de aula. O objetivo deste instrumento é contribuir com o ensino e a aprendizagem de números complexos. Os objetivos específicos de cada tarefa da sequência didática estão detalhados no Quadro 1 a seguir:

Quadro 1 - Organização da Sequência Didática

	Proposta	Descrição	Objetivos
<b>SEQUÊNCIA DIDÁTICA</b>	<b>Tarefa 1</b> <b>O que faz um avião voar?</b>	Nessa tarefa, faremos uma breve introdução aos estudos que nortearão nosso voo rumo à compreensão de conceitos matemáticos que nos ajudarão a compreender como atuam as forças que permitem que um avião voe.	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Conhecer alguns cálculos e princípios teóricos que explicam o que leva um avião a voar;</li> <li>✓ Apresentar o conjunto de Números Complexos, pois tal conhecimento ajuda a explicar conceitos da aerodinâmica e estes são fundamentais para compreendermos o que garante a sustentação de um avião no ar;</li> <li>✓ Apresentar algumas formas de representação dos Números Complexos, sendo as formas: algébrica, algébrica-trigonométrica e gráfica.</li> </ul>
	<b>Tarefa 2</b> <b>Números Complexos na Aerodinâmica</b>	Nessa tarefa, apresentaremos a expressão $z + \frac{1}{z}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Demonstrar a importância do estudo dos Números Complexos para a compreensão de conceitos da aerodinâmica;</li> <li>✓ Operar com números complexos na expressão <math>z + \frac{1}{z}</math>;</li> <li>✓ Representar graficamente números complexos a partir de sua forma algébrica.</li> </ul>
	<b>Tarefa 3</b> <b>Vetores e Forças</b>	Nessa tarefa, estudaremos alguns vetores e forças que atuam em um avião.	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Conceituar vetores e força;</li> <li>✓ Apresentar as principais forças presentes em um voo, sendo: Sustentação; Arrasto; Resultante; Tração da Hélice e Peso.</li> <li>✓ Resolver atividades algumas posições em que um avião pode se encontrar: voo ascendente; voo horizontal; voo descendente e voo em curva.</li> </ul>
	<b>Tarefa 4</b> <b>Caixas-Pretas</b>	Nessa tarefa, exploraremos equações do 2° e do 3° grau com raízes complexas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Representar graficamente números complexos dados em forma algébrica.</li> </ul>

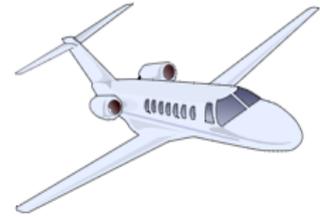
Fonte: o autor.

## Tarefa 1



Investigue quais disciplinas que você já estudou ou estuda na escola e que podem trazer conhecimentos para ajudar a explicar o que faz um avião voar.

Pesquise, discuta e compartilhe com os seus colegas e com o seu professor(a) algumas possíveis fórmulas, cálculos e princípios de teorias que podem ajudar a explicar os mistérios que fazem com que uma máquina tão pesada voe.




---

*Professor(a), nesse momento converse com os seus alunos e solicite que discutam com os colegas de sala sobre o que eles pensam a respeito das possíveis respostas para os questionamentos feitos e, em seguida, peça para que eles registrem as suas ideias para posterior discussão.*

*Na sequência, após as reflexões realizadas, apresente aos alunos a seguinte curiosidade que os ajudará a compreender e a responder parcialmente alguns dos questionamentos já feitos.*

---

## Curiosidade

### **Disciplinas que ajudam a explicar o voo de um avião**

A aviação está baseada nos princípios da matemática e da física. Alguns desses princípios são estudados na escola e podem auxiliar nas explicações do voo de um avião. Para que um avião voe, é necessário que algum tipo de força consiga vencer ou anular o seu peso. Ocorrem conceitos Físicos quando ele está em movimento, em particular, nas asas do avião, também chamadas de aerofólios. Os cálculos ficam por conta da matemática, com conceitos aritméticos, algébricos e geométricos.

*Esse breve texto está baseado em: O que faz um avião voar? UFRGS. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20031/Andre/>>. Acesso em: 15 dez. 2021.*

Possivelmente, ao responder os questionamentos anteriores sobre alguns cálculos que ajudam a explicar o que faz um avião voar, você possa ter observado algumas equações, muito utilizadas para ajudar a resolver exercícios e situações-problema encontrando soluções nos quais números não são conhecidos. Vamos relembrar uma possibilidade de resolução de equação do 2º grau, pois utilizaremos essa resolução para discutir raízes quadradas de números negativos.

Uma equação do 2º grau pode ser representada em sua forma completa por:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Para determinar suas raízes podemos utilizar, por exemplo, a fórmula resolutive de equação do 2º grau, conhecida como método de Bhaskara.

Vamos considerar a seguinte equação:  $x^2 + 4x + 5 = 0$ . **Vamos resolvê-la?**

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$$

$$\Delta = 16 - 20$$

$$\Delta = -4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1}$$

No conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ), sabemos que  $\sqrt{4} = 2$ , mas qual é  $\sqrt{-4}$ ?

E agora, como podemos continuar essa resolução? Existe raiz quadrada de números negativos?

**Professor(a)**, nesse momento proponha uma pesquisa aos seus alunos. Essa pesquisa pode ser por meio de livros ou da internet. Instigue os estudantes a procurarem possíveis respostas para o cálculo de raízes quadradas de números negativos. A partir daí, provavelmente, será possível associar  $\sqrt{-1}$  a um número imaginário representado pela letra  $i$ . Após determinar a solução, solicite que os estudantes façam a substituição de  $x_1$  e  $x_2$  na equação para verificar a validade dessas respostas. Aproveite essa oportunidade para apresentar e discutir com os seus alunos o conjunto dos **Números Complexos**.

A solução para o cálculo de raízes quadradas de números negativos surgiu com a criação dos números imaginários, cuja unidade imaginária representada pela letra  $i$ , é igual a  $\sqrt{-1}$ , ou seja,  $i^2 = -1$ .

Voltando para a equação anteriormente mencionada, temos:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4 \cdot i^2} = 2 \cdot i$$

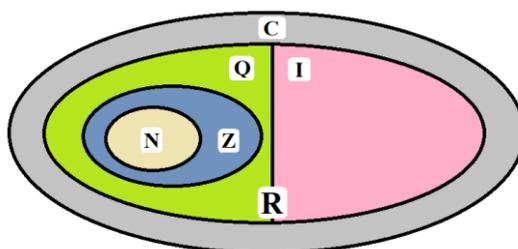
$$x = \frac{-4 \pm 2 \cdot i}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2 \cdot i}{2} = -2 + i$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2 \cdot i}{2} = -2 - i$$

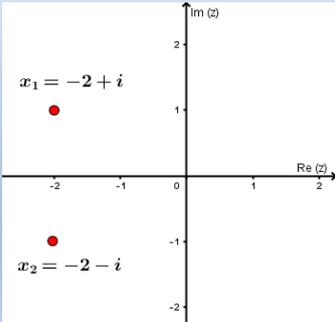
Portanto, obtemos:  $S = \{x_1 = -2 + i ; x_2 = -2 - i\}$ .

Os números complexos surgem a partir de equações em que as resoluções possuem raízes de números negativos, o que, até então, não era possível de resolver trabalhando com os números reais. Na imagem a seguir, observamos que o conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ) é um subconjunto do conjunto dos números complexos ( $\mathbb{C}$ ).



Fonte: o autor.

Os números complexos podem ser representados por meio de alguns registros, entre eles: registro algébrico; registro algébrico-trigonométrico; e registro gráfico. Veja a seguir essas possíveis maneiras de representações para as raízes da equação  $x^2 + 4x + 5 = 0$  que calculamos anteriormente.

<p><b>Registro Algébrico</b> Representado na forma <math>z = a + bi</math>, composta por uma parte real <u>a</u> e uma parte imaginária <u>b</u>. <math>x_1 = -2 + i</math>, <math>x_2 = -2 - i</math></p>	<p><b>Registro Algébrico - Trigonométrico</b> Representado na forma <math>z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)</math> <math>x_1 \cong \sqrt{5}(\cos 153^\circ + i \cdot \text{sen} 153^\circ)</math> <math>x_2 \cong \sqrt{5}(\cos 207^\circ + i \cdot \text{sen} 207^\circ)</math></p>	<p><b>Registro Gráfico</b> Representado no plano de Argand-Gauss</p> 
--	--	--

---

**Professor(a)**, o tema apresentado nas tarefas pode ser interessante tanto para os meninos, quanto para as meninas. Utilize a curiosidade a seguir para conversar com os alunos sobre a participação das mulheres em profissões que historicamente possuem a predominância masculina no exercício da profissão. Mostre para eles que tanto homens quanto mulheres podem fazer parte das mais diversas profissões.

Ainda, aproveite também essa oportunidade para lembrar os alunos e explorar o conteúdo de porcentagem presente no texto.

---

## Curiosidade

### Participação das mulheres na força aérea

De acordo com a Força Aérea Brasileira – FAB, há mais de 10 mil mulheres em funções como pilotos de combate e comandantes de organização militar. Historicamente, as mulheres eram exceções na aviação civil. No entanto, a presença de mulheres na FAB já é uma realidade em praticamente todos os setores. Dados da FAB mostram que “desde 2003, houve um aumento de 277% da participação feminina. Hoje são 10.160 mulheres na FAB, o equivalente a 14,55% do efetivo de militares”.

Em relação aos Terceiros-Sargentos formados na Escola de Especialistas de Aeronáutica (EEAR) nos últimos sete anos, 5.739 são homens e 3.057, mulheres.

*Esse breve texto está baseado em:* Força aérea também é lugar de mulher. **FAB**. Disponível em: <<https://www.fab.mil.br/noticias/mostra/21673>>. Acesso em: 15.02.2021.

---

**Fechamento da tarefa 1:** o que faz um avião voar? Até aqui vimos algumas possibilidades de disciplinas que podem ajudar a explicar o que faz um avião voar, por exemplo: **Matemática** e **Física**. No entanto, essa questão ainda não foi respondida completamente e você pode estar se perguntando: o que isso tem a ver com o que faz um avião voar? Nada a ver? É o que você está achando? Então vamos fazer as **tarefas 2 e 3**, pois com elas teremos mais embasamentos para compreender o voo de um avião.

---

## Tarefa 2



A **aerodinâmica** é uma parte da mecânica dos fluidos que estuda os gases em movimento, e em particular o movimento relativo entre o ar e os corpos sólidos. Ao construir um avião, os engenheiros se fundamentaram nos princípios da aerodinâmica, principalmente na elaboração do aerofólio. Um aerofólio é projetado para causar certa variação da velocidade de um fluido, acarretando uma diferença de pressão. Nas aeronaves, os aerofólios se encontram nas asas e no leme, proporcionando a sustentação e direção do avião, logo o mantendo no ar, cuja explicação está na conservação de energia enunciada pelo Princípio de Bernoulli (PORTOLAN, 2017).

***E quanto aos números complexos? Há alguma contribuição desses números na aerodinâmica?*** Estudos como os de Camata (2015), Pereira (2017) e Novais (2020) dizem que há contribuições dos números complexos na aerodinâmica e destacam ainda o cientista russo Nicolai Egorovich Joukowski (1847-1921).

Camata (2015) descreve que Joukowski (1906), utilizando transformações geométricas, construiu uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil de uma asa de avião (aerofólio de Joukowski) e, usando o princípio de Bernoulli (1738) e a teoria das funções complexas, calculou a força de levantamento responsável pela sustentação do corpo. Ainda, ressalta que os números complexos permitiram uma explicação matemática capaz de definir as características do perfil aerodinâmico da asa do avião, colaborando com o progresso aeronáutico.

Pereira (2017) comenta que não se pode deixar de destacar a grande contribuição dos números complexos para várias áreas, como para a Dinâmica dos Fluidos e Aerodinâmica, onde Nikolai Joukowski desenvolveu um método que possibilitou que engenheiros aeronáuticos fizessem estudos sobre aerofólios e sua influência na sustentação de aviões (construção das asas).

Novais (2020) ressalta que esse cientista foi responsável por demonstrar que a imagem de uma circunferência de raio unitário no  $z$  – plano é mapeada<sup>1</sup> dentro de uma curva de formato de um aerofólio no  $w$  – plano, semelhante a uma asa de avião. Ao estudar a função  $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ , deduziu uma função de variável complexa dada por:

$$F(z) = z + \frac{1}{z}.$$

Essa transformação ficou conhecida como transformação de Joukowski, que propõe um aproveitamento da conhecida solução analítica para um escoamento potencial ao redor de um cilindro com circulação e conclui que “se os fluxos aerodinâmicos” para um fluxo em torno de um círculo são conhecidos, então suas imagens sob o mapeamento  $w = f(z)$  será o fluxo aerodinâmico para um fluxo em torno do aerofólio (NOVAIS, 2020).

---

*Professor(a), é evidente que o estudo de variáveis complexas exige conceitos matemáticos que estão além da matemática básica estudada até o Ensino Médio. Como sugestão de tarefa 2 para os alunos, seguiremos Novais (2020): Proponha a seus alunos um estudo da expressão  $z + \frac{1}{z}$ . Atribua arbitrariamente alguns valores para  $z$  em sua forma algébrica ( $z = a + bi$ ) e solicite o resultado dessa expressão.*

*Explore os conceitos de conjugado, de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de Números Complexos. A representação gráfica poderá ser visualizada utilizando o Software GeoGebra.*

---

### **Questão da tarefa 2:**

Após conhecermos a importante expressão  $z + \frac{1}{z}$  estudada por Joukowski que, segundo alguns estudos, explica matematicamente a força de levantamento responsável pela sustentação do voo de um avião, determine o seu valor para  $z_1, z_2, z_3$ , e  $z_4$  apresentados a seguir e represente-os graficamente. Se considerar necessário, utilize o *Software Geogebra*.

---

<sup>1</sup> Mais informações em: <https://biztechbrz.wordpress.com/2011/02/06/deducoes-sobre-o-aerofolio-de-joukowski/>. **Deduções sobre o aerofólio de Joukowski**. Acesso em 10/01/2022.

$$z_1 = 5 + 2i$$

Solução:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} &= \frac{1}{5 + 2i} \cdot \frac{5 - 2i}{5 - 2i} \\ &= \frac{5 - 2i}{25 - 10i + 10i - 4i^2} \\ &= \frac{5 - 2i}{25 - 4i^2} \\ &= \frac{5 - 2i}{25 - 4 \cdot (-1)} \\ &= \frac{5 - 2i}{25 + 4} \\ &= \frac{5 - 2i}{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 + \frac{1}{z_1} &= \frac{5 + 2i}{1} + \frac{5 - 2i}{29} \\ &= \frac{145 + 58i + 5 - 2i}{29} \\ &= \frac{150 + 56i}{29} \end{aligned}$$

$$z_2 = 5 - 2i$$

Solução:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{5 - 2i} \cdot \frac{5 + 2i}{5 + 2i} \\ &= \frac{5 + 2i}{25 + 10i - 10i - 4i^2} \\ &= \frac{5 + 2i}{25 - 4i^2} \\ &= \frac{5 + 2i}{25 - 4 \cdot (-1)} \\ &= \frac{5 + 2i}{25 + 4} \\ &= \frac{5 + 2i}{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 + \frac{1}{z_2} &= \frac{5 - 2i}{1} + \frac{5 + 2i}{29} \\ &= \frac{145 - 58i + 5 + 2i}{29} \\ &= \frac{150 - 56i}{29} \end{aligned}$$

$$z_3 = -5 + 2i$$

Solução:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_3} &= \frac{1}{-5 + 2i} \cdot \frac{-5 - 2i}{-5 - 2i} \\ &= \frac{-5 - 2i}{25 + 10i - 10i - 4i^2} \\ &= \frac{-5 - 2i}{25 - 4i^2} \\ &= \frac{-5 - 2i}{25 - 4 \cdot (-1)} \\ &= \frac{-5 - 2i}{25 + 4} \\ &= \frac{-5 - 2i}{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 + \frac{1}{z_3} &= \frac{-5 + 2i}{1} + \frac{-5 - 2i}{29} \\ &= \frac{-145 + 58i - 5 - 2i}{29} \\ &= \frac{-150 + 56i}{29} \end{aligned}$$

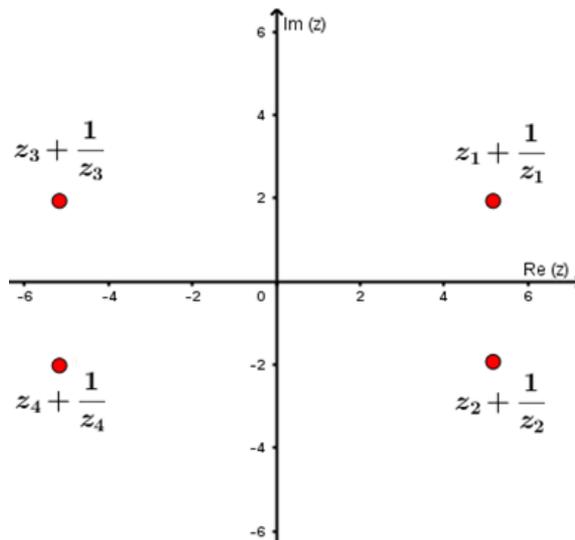
$$z_4 = -5 - 2i$$

Solução:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_4} &= \frac{1}{-5 - 2i} \cdot \frac{-5 + 2i}{-5 + 2i} \\ &= \frac{-5 + 2i}{25 + 10i - 10i - 4i^2} \\ &= \frac{-5 + 2i}{25 - 4i^2} \\ &= \frac{-5 + 2i}{25 - 4 \cdot (-1)} \\ &= \frac{-5 + 2i}{25 + 4} \\ &= \frac{-5 + 2i}{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4 + \frac{1}{z_4} &= \frac{-5 - 2i}{1} + \frac{-5 + 2i}{29} \\ &= \frac{-145 - 58i - 5 + 2i}{29} \\ &= \frac{-150 - 56i}{29} \end{aligned}$$

Representação gráfica de  $z_1, z_2, z_3, e z_4$ .



**Fechamento da tarefa 2:** observe que os resultados das operações propostas estão um em cada quadrante na representação gráfica. Isso se deve ao fato de que ora usamos  $a > 0$ , ora  $a < 0$ , assim como ora  $b > 0$ , ora  $b < 0$ .

### Curiosidade

**Santos Dumont:** Já que estamos no assunto aviação, um personagem não pode ficar de fora: Santos Dumont! Você sabia que ele, antes mesmo de ser conhecido por seus feitos na aviação, já era um dos pioneiros das corridas de automóvel na França? Pois é! Mesmo antes de inventar o avião, ele já era recebido como herói no Brasil, graças a seus feitos como piloto. Em Petrópolis - RJ, tem um museu só para ele, que se chama: Museu Casa de Santos Dumont. Nele, há muita coisa bacana sobre o talento, a criatividade e os feitos deste grande brasileiro. Para conhecer um pouco mais sobre a vida e a obra de Santos Dumont, faça um tour virtual em seu museu.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=y39qLjd03EA>. Duração: 26 minutos. Acesso em: 01.07.2021.



Fonte da imagem: <https://adslatin.com/conheca-a-historia-do-14-bis/>. Acesso em: 03.07.2021.

### Tarefa 3



Alguns dos conteúdos básicos da Física são os estudos de vetores e forças. Os **vetores** representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido. O módulo é o valor numérico do vetor seguido da unidade de medida que define a grandeza vetorial. A direção é a reta onde o vetor está localizado, e as direções possíveis são: diagonal, horizontal e vertical.

**Força** é o agente da dinâmica responsável por alterar o estado de repouso ou movimento de um corpo. Quando se aplica uma força sobre um corpo, esse pode desenvolver uma aceleração, como estabelecem as leis de Newton, ou se deformar.

#### INDICAÇÃO DE LEITURAS E VÍDEOS

Para a realização da tarefa 3, se necessário, sugerimos as seguintes leituras:

##### Números Complexos

Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/vc/vc01.htm>. Acesso em: 27.12.2021.

##### Números Complexos e polinômios

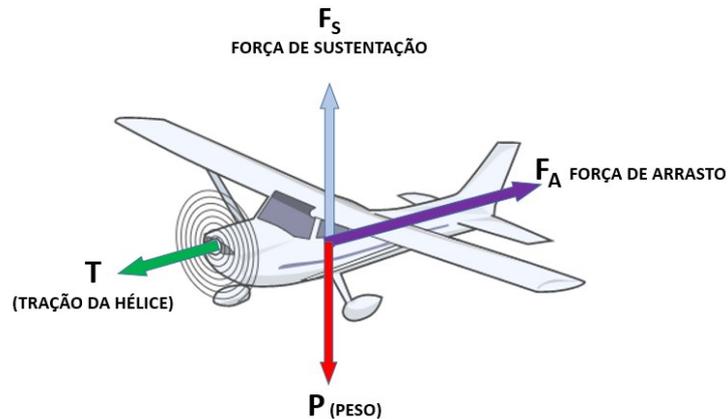
Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~oliveira/ComplexosCap1.pdf>. Acesso em: 27.12.2021.

**O que são números imaginários?; O que são números complexos?; O plano complexo; Soma e subtração de números complexos; Multiplicação de números complexos; Conjugados complexos e divisão de números complexos; Valor absoluto e ângulo de números complexos; Distância e ponto médio de números complexos; Forma polar de números complexos; Multiplicação e divisão de números complexos na forma polar; Problemas envolvendo números complexos**

Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers>. Acesso em: 27.12.2021.

Uma das possibilidades para visualizar os números complexos é por meio de vetores. Vamos ver como os vetores agem aqui. A seguir apresentaremos algumas forças vetoriais que atuam no avião:

## ALGUMAS FORÇAS QUE ATUAM EM UM AVIÃO



Fonte: o autor.

### Força de Sustentação ( $F_s$ )

Força de Sustentação ( $F_s$ ) é a componente da força aerodinâmica perpendicular à direção do movimento do voo (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

### Força de Arrasto ( $F_A$ )

Força de Arrasto ( $F_A$ ), essencialmente uma força de atrito, é a componente da força aerodinâmica paralela à direção de voo (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

### Tração da Hélice ( $T$ )

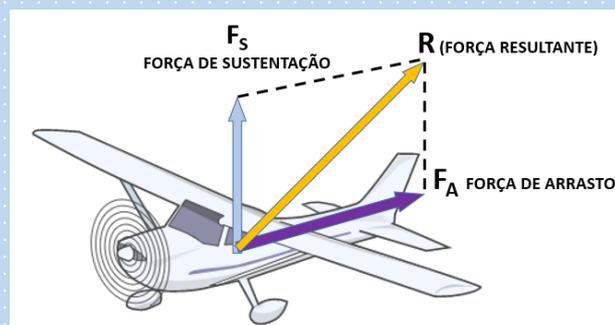
Tração da Hélice ( $T$ ) é a força produzida pelo motor e é dirigida ao longo do eixo longitudinal do avião (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

### Peso ( $P$ )

Peso ( $P$ ) é a força da gravidade ( $P = m \cdot g$ ) atuando sobre o avião e dirigida para o centro da Terra (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

### Força Resultante ( $R$ )

Surge em virtude do diferencial de pressão entre o intradorso e o extradorso do aerofólio e tende a empurrá-lo para cima, auxiliada ainda pela reação do ar (Terceira Lei de Newton). Ela é representada, de maneira didática e para melhor compreensão do estudante, como um vetor que, quando decomposto, dá origem a duas forças componentes. A componente da força resultante perpendicular (ou normal) à direção do fluxo é chamada de sustentação; a componente da força resultante ao longo da direção do fluxo é chamada de arrasto. Disponível em: <https://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/presar.html>. Acesso em: 10.01.2022.



Fonte: o autor.

## CONTROVÉRSIAS SOBRE A FORÇA DE SUSTENTAÇÃO

Quando o assunto é a força aerodinâmica conhecida como **sustentação**, não há uma explicação simples para esse tema, assim como não há consenso entre cientistas e algumas teorias, de forma a explicar completamente a força de sustentação, o que deixa uma situação intrigante no ponto de vista físico.

Segundo Regis (2020), há duas teorias concorrentes que comumente são propostas para explicar a sustentação aerodinâmica: Teorema de Bernoulli e Terceira Lei de Newton. É sobre essas duas teorias que se trata o Quadro 2 a seguir:

Quadro 2 – Breve descrição sobre o Teorema de Bernoulli e Terceira Lei de Newton

Teorema de Bernoulli	Terceira Lei de Newton
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Considerado o mais popular para explicar a sustentação aerodinâmica, diz que a pressão de um fluido diminui à medida que sua velocidade aumenta, e vice-versa;</li> <li>- O Teorema de Bernoulli considera a sustentação como uma consequência da superfície superior curva de um aerofólio (nome técnico de uma asa de avião). Por causa dessa curvatura, o ar viajando através do topo da asa se move mais rápido do que o ar se movendo na superfície inferior da asa, que é plana;</li> <li>- O aumento da velocidade no topo da asa está associado a uma região de menor pressão, o que faz gerar a sustentação.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Princípio newtoniano de ação e reação;</li> <li>- Explica a sustentação como um impulso para cima na asa com o ar em movimento abaixo dela;</li> <li>- O ar tem massa. Portanto, a terceira lei de Newton estabelece que o impulso para baixo da asa resulta em uma igualdade e o oposto dessa situação empurra de volta para cima;</li> <li>- Este relato newtoniano de sustentação aplica-se a asas de qualquer formato, curvas ou planas, simétricas ou não, e vale para aeronaves voando invertidas ou de lado (o recurso crítico é um ângulo de ataque adequado).</li> </ul>
Críticas à Teoria	Críticas à Teoria
<p>O teorema por si só não explica por que a velocidade superior no topo da asa traz pressão mais baixa junto com ela ou, o por que, na prática, um avião com asas que possuem superfície superior curva - ou mesmo superfícies planas na parte superior e inferior é capaz de voar invertido, desde que o aerofólio encontre o vento que se aproxima em um ângulo apropriado.</p>	<p>O princípio de ação e a reação ainda não consegue explicar a mais baixa pressão no topo da asa, independentemente de o aerofólio ser curvado ou não.</p>

**Fonte:** Adaptado de Regis (2020) – tradução nossa.

Cada uma dessas teorias está correta dentro de seus próprios contextos, e nenhuma delas contradiz a outra. O problema é que nenhuma delas produz uma explicação completa que leva em consideração todas as forças básicas e demais fatores físicos que regem o levantamento aerodinâmico, sem deixar problemas inexplicados. Ainda, nem as duas teorias juntas fornecem uma explicação completa de sustentação. Uma explicação completa deve explicar todas as forças e fatores que agem na asa, sem nenhum problema, maior ou menor (REGIS, 2020).

## POSIÇÕES DO AVIÃO

Nessa seção, vamos considerar algumas posições em que um avião pode se encontrar: repouso; voo ascendente; voo horizontal; voo descendente e voo em curva.

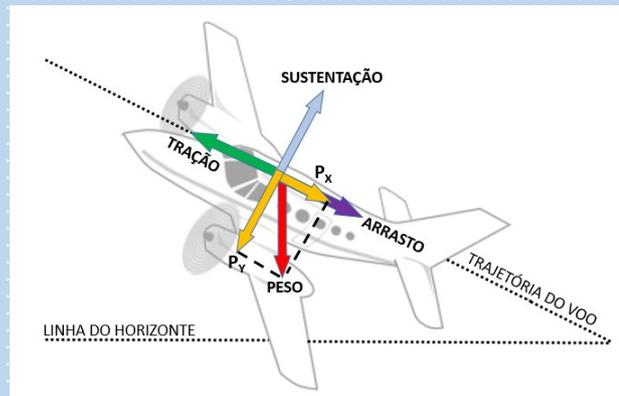
### AERONAVE EM REPOUSO

Das forças que atuam sobre a aeronave em repouso (parada), a única força a se destacar é o peso (**P**). Quando o motor passa a funcionar, gera a tração (**T**) e o avião começa a mover-se para frente, com isso surge o Arrasto. A tração deve ser maior do que o Arrasto para que o avião ganhe velocidade. Com o aumento de velocidade, surge nas asas a Força de Sustentação. Quando essa força for plena, o avião estará em condições de decolar. Agindo nos controles de voo o piloto faz com que o avião suba.

## VOO ASCENDENTE

Forças envolvidas:

- Força de tração da Hélice: inclinada para cima suportando parcialmente o peso.
- Força de Sustentação: perpendicular ao vento relativo.
- Peso da aeronave: decomposto em duas forças, uma oposta a sustentação a outra oposta a tração.
- Força de Arrasto: oposta a Tração.



Fonte: o autor.

**Questão:** Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo ascendente que apresenta uma Força de Tração de 1500 N representando 25% maior do que as forças opostas a ela (Força Peso decomposta no eixo x e a Força de Arrasto). Sabendo que a Força Peso é igual a 980 N e que o ângulo formado entre a Força Peso e sua respectiva componente no eixo y é de  $30^\circ$ , determine:

- Componente da Força Peso no eixo x.
- Força de Arrasto.
- Força Resultante da Sustentação com o Arrasto.

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

**Solução:**

- Para calcular a componente da Força Peso no eixo x, podemos utilizar a seguinte relação:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{P_x}{980}$$

$$P_x = 980 \cdot \text{sen } 30^\circ$$

$$P_x = 490 \text{ N}$$

b) Para calcular a Força de Arrasto, podemos utilizar a seguinte relação:

$$\text{Força de Tração} = (P_x + \text{Força de Arrasto}) \cdot 1,25$$

$$1500 = (490 + \text{Força de Arrasto}) \cdot 1,25$$

$$1200 = 490 + \text{Força de Arrasto}$$

$$\text{Força de Arrasto} = 1200 - 490$$

$$\text{Força de Arrasto} = 710 \text{ N}$$

c) A Força de Sustentação é igual ao módulo de  $P_y$ , ou seja, vale 980 N.

Para calcular a Força Resultante, podemos utilizar o teorema de Pitágoras:

$$R^2 = 980^2 + (490 + 710)^2$$

$$R^2 = 980^2 + 1200^2$$

$$R = \sqrt{980^2 + 1200^2}$$

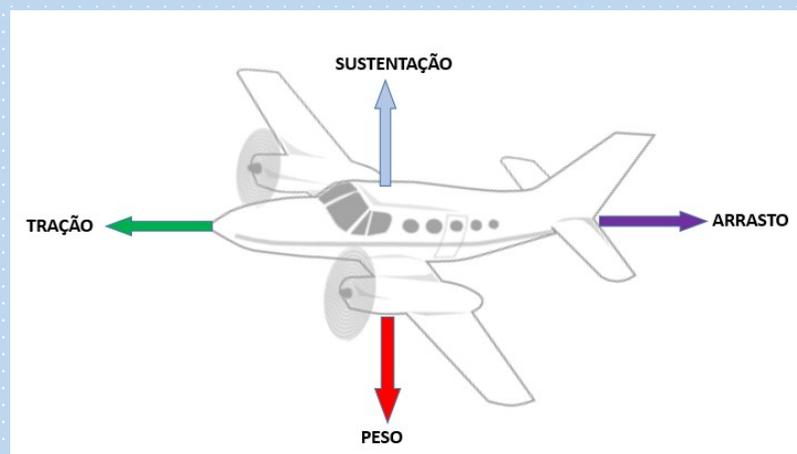
$$R \cong 1549,32 \text{ N}$$

## VOO HORIZONTAL

No voo Horizontal o avião se desloca horizontalmente

Forças envolvidas:

- A Força de Sustentação deve ser igual ao peso.
- A tração deve ser maior que o Arrasto, pois o avião precisa de uma alta velocidade aerodinâmica para continuar voando.



Fonte: o autor.

**Questão:** Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo horizontal que apresenta uma Força Resultante de 1200 N entre a Sustentação e o Arrasto. Sabendo que a Força Peso desse avião é de 980N e que a Força de Tração da Hélice possui 20% a mais do que o valor da Força de arrasto, determine:

- a) Força de Sustentação.
- b) Força de Arrasto.
- c) Força de Tração da Hélice.

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

**Solução:**

- a) A Força de Sustentação é de 980 N, pois em um voo horizontal a Força de Sustentação deve ser igual a Força Peso (em módulo).
- b) Para calcular a Força de Arrasto, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}1200^2 &= 980^2 + F_A^2 \\F_A^2 &= 1200^2 - 980^2 \\F_A &= \sqrt{1200^2 - 980^2} \\F_A &\cong 692,53 \text{ N}\end{aligned}$$

- c) Para calcular Força de Tração da Hélice, basta aumentar 20% na Força de Arrasto.

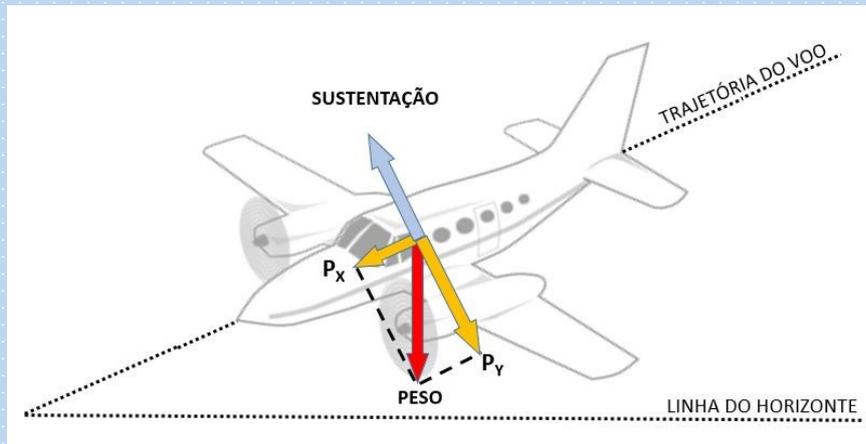
$$T = 692,53 \cdot 1,20 = 831,036 \text{ N}$$

## VOO DESCENDENTE

Na descida, o avião usa a própria ação da gravidade para planar por um determinado tempo.

Forças envolvidas:

- A sustentação é menor que o peso.
- Decompondo a força Peso temos uma componente com o mesmo sentido da Tração auxiliando o avião a planar.



Fonte: o autor.

**Questão:** Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo descendente que apresenta Força de Sustentação de 1082,53 N; Força Peso ( $P_x$ ) decomposta de 625 N. Determine a Força Peso desse avião.

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

**Solução:**

A força de Sustentação é igual a Força Peso decomposta ( $P_y$ ). Dessa forma, podemos determinar a Força Peso por meio do Teorema de Pitágoras:

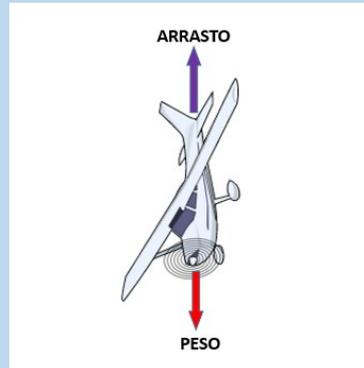
$$P^2 = 625^2 + 1082,53^2$$

$$P = \sqrt{(625^2 + 1082,53^2)}$$

$$P \cong 1250 \text{ N}$$

## Curiosidade

**AVIÃO DE ACROBACIA** - Quando o avião forma um ângulo de  $90^\circ$  com a linha do horizonte, a Força de Sustentação é nula e a aceleração é dada pelo peso do avião. Com o aumento da velocidade, o arrasto aumenta até se igualar ao peso – teremos aí a velocidade final.



Fonte: o autor.

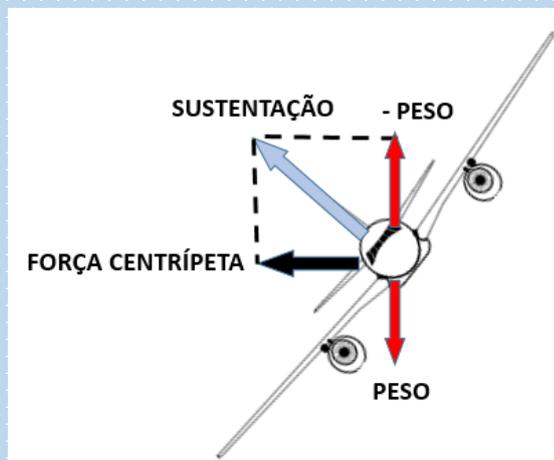
## VOO EM CURVA

Forças envolvidas:

Para o estudo da curva, podemos decompor a sustentação em duas forças: a força centrípeta e a força chamada de **-P**, que deve se opor ao peso.

Como se pode deduzir desse gráfico, a força de sustentação deve ser maior que o Peso já que uma de suas componentes, a força **-P**, tem a mesma intensidade que o Peso.

A sustentação deve ter um valor tal que a sua componente vertical chamada de **-P** seja igual o Peso. Para que isso aconteça devemos ter um ângulo de inclinação correto de acordo com a situação.



Fonte: o autor.

**Questão:** Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo em curva que apresenta Força de Sustentação igual a 2500 N. Determine a Força Peso desse avião, sabendo que o ângulo formado entre a força de sustentação e a força centrípeta ( $F_c$ ) é de  $30^\circ$ .

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

**Solução:**

O ângulo formado entre a força de sustentação e a força  $-P$  é de  $60^\circ$ .

$$\cos 60^\circ = \frac{P_y}{2500}$$

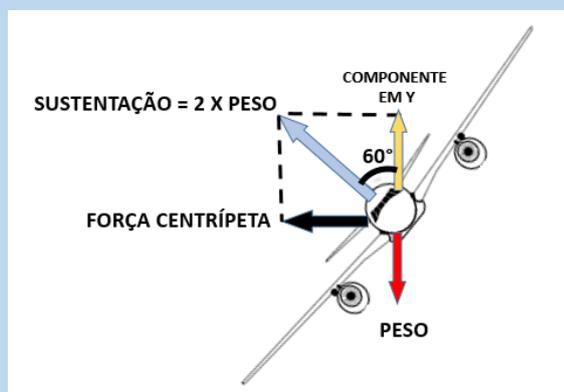
$$P_y = 2500 \cdot \cos 60^\circ$$

$$P_y = 1250 \text{ N}$$

### Curiosidade

#### VOO EM CURVA DE $60^\circ$

Em uma curva de  $60^\circ$ , a sustentação deve ser igual ao dobro do peso para que sua resultante vertical seja igual e oposta ao peso.



Fonte: o autor.

**Fechamento da tarefa 3: Professor(a)**, aproveite a Tarefa 3 para explorar a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Física em um contexto real de aplicação dos Números Complexos em sua forma vetorial. Ainda, reflita, relembre e discuta com os estudantes o conceito de módulo e argumento de vetores complexos presente nas questões. Solicite que seus alunos elaborem uma produção de texto dissertativo-argumentativo ou um mapa conceitual abordando os temas já estudados. A argumentação e exposição dos conceitos poderá ser utilizada como um indicador de aprendizagem.

## Tarefa 4



Antes de apresentar a questão proposta nessa Tarefa 4, recomendamos a leitura da curiosidade a seguir:

### Curiosidade

#### Caixas-Pretas

As caixas-pretas não são pretas, mas laranjas, com a finalidade de, em casos de acidentes, facilitar a sua localização entre os destroços.

#### História

A primeira caixa-preta, criada em 1939, era um tipo de câmera e gravava apenas imagens. Como toda câmera, tinha o interior totalmente escuro – uma explicação possível para seu nome.

#### Quantidade

São duas. Uma unidade grava os sons na cabine de comando. A outra registra os dados de voo, como a rota, as sucessivas mudanças de altitude e até quais botões foram apertados no painel da aeronave.

#### Duração

As caixas gravam as duas horas mais recentes de voo. Os registros mais antigos são apagados automaticamente.

#### Materiais

Envoltas em camadas de sílica, alumínio e titânio, as placas de memória podem resistir a choques, temperaturas de até 1.000 °C e submersão a até 6 mil metros de profundidade.

#### Localização

As duas caixas-pretas ficam na cauda, a parte menos atingida em impactos. As informações são enviadas para lá a partir de microfones e outros dispositivos instalados no cockpit (espaço onde se aloja o piloto nos aviões).

#### Alerta

Um cilindro localizado junto às caixas-pretas é responsável por emitir um alarme, que dura 30 dias. Depois disso, a caixa tem de ser encontrada à moda antiga: a olho nu.

Essas informações pertencem ao site da revista **Super interessante**.

**Fonte:** <https://super.abril.com.br/tecnologia/os-misterios-da-caixa-preta/>. Acesso em: 29.12.2021.

---

**Professor(a)**, na questão que será apresentada a seguir, temos uma situação de conflito entre a impossibilidade de calcular a raiz quadrada de um número negativo no conjunto dos números reais e a demanda de se conciliar os conhecimentos instituídos no mundo da Matemática com a solução concreta e real de um problema.

---

**Questão:** Um avião possui duas caixas-pretas, uma delas, caixa 1, com uma parte em forma de cubo e outra, caixa 2, com uma parte em forma de um paralelepípedo reto retangular.

A parte em forma de cubo na caixa 1 possui aresta  $x$  e a parte em forma de paralelepípedo reto retangular na caixa 2 possui as dimensões  $x$ ,  $2$  e  $x+3$ , conforme a figura a seguir:



**Fonte:** Adaptado de Super Interessante (2020). Disponível em: <https://super.abril.com.br/tecnologia/os-misterios-da-caixa-preta/>. Acesso em: 29 dez. 2021

As unidades de medidas de ambas as caixas estão em decímetros ( $dm$ ).

Leia atentamente cada um dos itens a seguir e faça o que se pede:

- a) A área da base ( $A_c$ ) da parte em forma de cubo da caixa preta 1 é  $11 \text{ dm}^2$  menor do que a área da base ( $A_p$ ) da parte em forma de paralelepípedo da caixa preta 2. Escreva a equação que represente essa situação.

$$A_c = A_p - 11$$

$$x^2 = 2 \cdot (x + 3) - 11$$

$$x^2 = 2 \cdot x + 6 - 11$$

$$x^2 = 2 \cdot x - 5$$

$$x^2 - 2 \cdot x + 5 = 0$$

- b) Calcule os valores de  $x$  que satisfaçam a situação descrita no item anterior e **represente-os graficamente**. Se considerar necessário, utilize o *Software GeoGebra*.

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Portanto, temos:

$$S = \{x_1 = 1 + 2i ; x_2 = 1 - 2i\}.$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2}$$

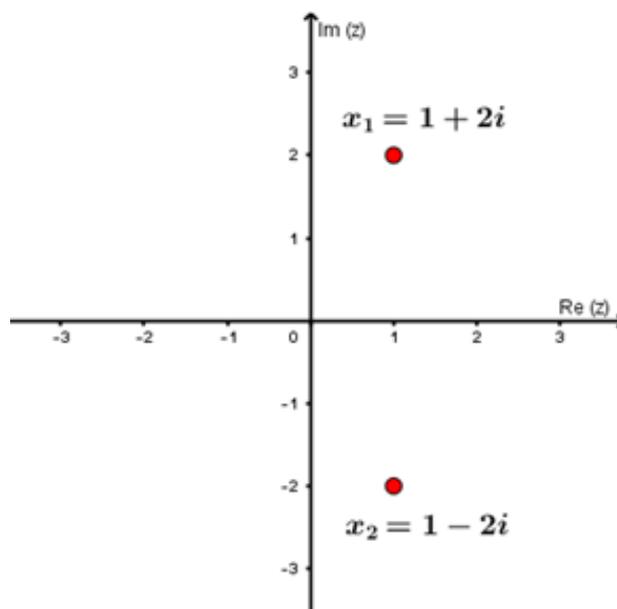
$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{16 \cdot i^2}}{2}$$

$$x = \frac{+2 \pm 4 \cdot i}{2}$$

$$x_1 = \frac{+2 + 4 \cdot i}{2} = 1 + 2 \cdot i$$

$$x_2 = \frac{+2 - 4 \cdot i}{2} = 1 - 2 \cdot i$$

### Representação gráfica



Fonte: o autor.

- c) O volume ( $V_c$ ) da parte cúbica da caixa preta 1 é  $8 \text{ dm}^3$  maior do que o volume ( $V_p$ ) da parte em forma de paralelepípedo caixa preta 2. Escreva a equação que represente essa situação.

$$V_c = V_p + 8$$

$$x^3 = 2 \cdot x \cdot (x + 3) + 8$$

$$x^3 = 2x^2 + 6x + 8$$

$$x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$$

- d) Verifique diretamente na equação do item anterior que  $x = 4$  é uma raiz real.

$$4^3 - 2 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 - 8 = 0$$

e) Determine as outras raízes da equação e **represente-as graficamente**. Se considerar necessário, utilize o *Software GeoGebra*.

Conhecendo umas das raízes, uma possibilidade de resolução para determinar as outras raízes da equação  $x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$  é por meio do **Teorema do fator**, que afirma que “Se  $c$  é uma raiz de um polinômio  $p(x)$ , de grau  $n > 0$ , então  $(x - c)$  é um fator de  $p(x)$ ” (DANTE, 2016, p. 213).

Ainda, pelo **teorema de D’Alembert**<sup>2</sup>, da divisão de  $p(x)$  por  $(x - c)$  resulta um quociente  $q(x)$  e um resto  $p(c)$  tal que:

$$p(x) = (x - c)q(x) + p(c)$$

Se  $c$  é uma raiz de  $p(x)$ , então  $p(c) = 0$  e temos:

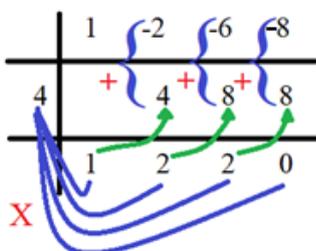
$$p(x) = (x - c)q(x)$$

Portanto,  $(x - c)$  é um fator de  $p(x)$ .

Para efetuar a divisão de  $x^3 - 2x^2 - 6x - 8$  por  $x - 4$ , podemos utilizar o Método da chave, conforme mostraremos a seguir:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 6x - 8 & x - 4 \\ \underline{-x^3 + 4x^2} & x^2 + 2x + 2 \\ 2x^2 - 6x - 8 & \\ \underline{-2x^2 + 8x} & \\ 2x - 8 & \\ \underline{-2x + 8} & \\ 0 & \end{array}$$

Outra possibilidade de efetuar a divisão de  $x^3 - 2x^2 - 6x - 8$  por  $x - 4$  é utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, que permite efetuar as divisões por polinômios do tipo  $(x - a)$ .



<sup>2</sup>Teorema de D’Alembert: “O resto da divisão de um polinômio  $p(x)$  por  $(x - a)$  é  $p(a)$ ” (DANTE, 2016, p. 212).

Após aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini, podemos reescrever a equação  $x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$  da seguinte maneira:  $(x - 4)(x^2 + 2x + 2) = 0$ . Para encontrar as demais raízes, podemos determinar as soluções do polinômio  $x^2 + 2x + 2$ .

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot i^2}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2 \cdot i}{2}$$

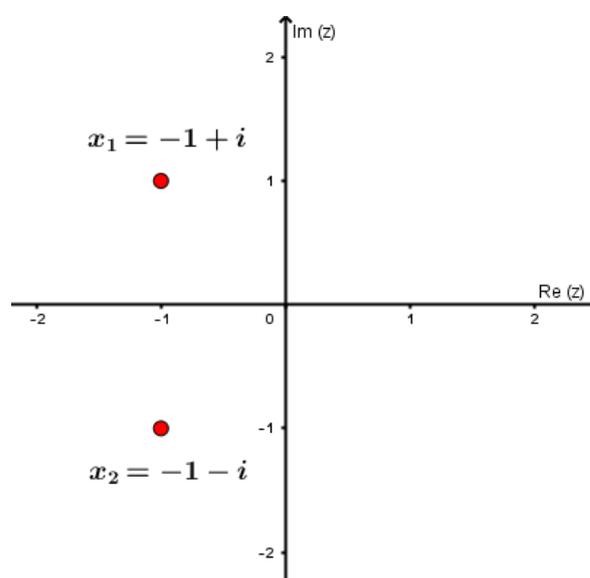
$$x_1 = \frac{-2 + 2 \cdot i}{2} = -1 + i$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2 \cdot i}{2} = -1 - i$$

Portanto, temos:

$$S = \{x_1 = -1 + i ; x_2 = -1 - i\}.$$

### Representação gráfica



Fonte: o autor.

---

**Professor(a)**, talvez os estudantes encontrem dificuldades para determinar as raízes de uma equação de terceiro grau. Como sugestão, indicamos o estudo do **Teorema de D' Alembert** e do **Teorema do fator**. Ainda, recomendamos o **Teorema das Raízes Racionais** para o caso de não se conhecer previamente uma das raízes, ou ainda, o estudo das **Relações de Girard**. Além disso, para efetuar as divisões, pode-se explorar o **Método da chave** ou o **dispositivo de Briot-Ruffini**.

---

f) As conclusões que você chegou nos itens b) e e) são válidas para o problema das caixas pretas do avião? **Justifique sua resposta apresentando seus argumentos a respeito da relação entre números complexos e medidas.**

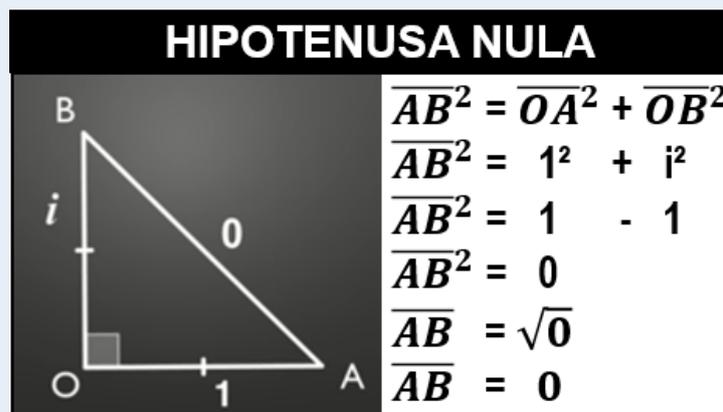
Espera-se que os estudantes argumentem que não há ordem nos números complexos, portando as soluções encontradas nos itens b) e e) não são válidas para o problema das caixas-pretas do avião.

### Curiosidade

Vídeo com aplicação do **Teorema de Pitágoras** em um triângulo retângulo. Por meio desse vídeo, pode-se enriquecer a discussão de que os números complexos não possuem ordem e, portanto, não devem ser utilizados como medidas de comprimento. Cabe ainda discutir a medida da hipotenusa ser ZERO, ou seja, uma medida nula, que não existe enquanto comprimento.

O vídeo encontra-se disponível em:

[https://www.youtube.com/watch?v=JsCvu4DIHi8&ab\\_channel=YvanMonka](https://www.youtube.com/watch?v=JsCvu4DIHi8&ab_channel=YvanMonka) e tem a duração 02min.10seg. Acesso em: 14.05.2021.



Fonte: o autor.

---

**Fechamento da tarefa 4: Professor(a)**, aproveite essa oportunidade para explorar a interpretação do enunciado do problema e discutir com os seus alunos que no conjunto dos números complexos não existe ordem e que esse é um dos motivos para não se estabelecer um número complexo como medida. Medir é comparar, e para o caso específico dessa tarefa não é possível fazer uma comparação e analisar qual dimensão da caixa é maior do que a outra quando se utiliza um número complexo.

Utilize essa situação de conflito para discutir que existem possibilidades de resolver equações propostas no mundo da matemática e no campo das ideias, no entanto, resolver um problema real exige uma solução que se adeque a realidade.

É importante que os alunos possam pensar e refletir no que eles estão fazendo. **Nem tudo é fazer contas!** Além dos cálculos, é preciso dar uma resposta adequada em relação ao problema. O aluno precisa estar ciente de qual é a pergunta central que ele precisa responder. Retorne ao enunciado e desenvolva essa rica discussão com os seus alunos.

**Professor(a)**, se você considerar que não vale a pena aplicar essa questão, pode deixá-la de fora do conjunto de tarefas, no entanto, entendemos que é importante o aluno analisar as respostas dos cálculos que ele faz em relação ao problema.

---

## REFERÊNCIAS

- DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. Disponível em: [https://saber.com.br/obras/Aplicacoes/Edocente/plugins/pdfjs-sem-download-e-print/web/viewer.html?file=https://saber.com.br/obras/PNLD/PNLD\\_2018/MatematicaContAplic/3o%20Ano/MatematicaContAplic\\_3\\_MP\\_0008P18023\\_PNLD2018.pdf](https://saber.com.br/obras/Aplicacoes/Edocente/plugins/pdfjs-sem-download-e-print/web/viewer.html?file=https://saber.com.br/obras/PNLD/PNLD_2018/MatematicaContAplic/3o%20Ano/MatematicaContAplic_3_MP_0008P18023_PNLD2018.pdf). Acesso em: 28 dez. 2021.
- CAMATA, J. G. **Análise das Raízes Complexas de uma Equação Quadrática e Estudo de Números Complexos no Ensino Médio**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2015.
- NOVAIS, R. P. B. **O decolar de um avião: uma proposta didática sobre números e funções complexas**. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2020.
- PEREIRA, G. G. **Uma proposta didática para o ensino de funções de variável complexa no ensino médio usando planilha eletrônica**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal de Rio Grande, Rio Grande, 2017.
- PORTOLAN, J. **A importância do ensino de números complexos no ensino médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região oeste do Paraná**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.
- REGIS, E. The enigma of aerodynamic lift. **Scientific American**, v. 322, n. 2, p. 44-51, 2020.
- STUDART, N.; DAHMEN, S. R. A física do voo na sala de aula. **Física na escola**. Vol. 7, n. 2 (out. 2006), p. 36-42, 2006.
- VOLCE, C. J. **Recursos Didáticos para Números Complexos na perspectiva da teoria dos Registros de Representação Semiótica**. 2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

## Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. *ACTIO*, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

<b>Instituição de Ensino Superior</b>	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<b>Programa de Pós-Graduação</b>	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
<b>Título da Dissertação</b>	Recursos didáticos para números complexos na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica
<b>Título do Produto/Processo Educacional</b>	Decolagem e pouso de um avião: embarque nesse voo com destino a uma aplicação de números complexos
<b>Autores do Produto/Processo Educacional</b>	<b>Discente:</b> Cílio José Volce
	<b>Orientador/Orientadora:</b> Claudete Cargnin
	<b>Outros (se houver):</b>
<b>Data da Defesa</b>	27/04/2022

### FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)

Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.

**Aderência:** avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação.

\*Apenas um item pode ser marcado.

Linhas de Pesquisa do PPGMAT:

*L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das

( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

( x ) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

<p>potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);</p> <p><i>L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).</p>	
<p><b>Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade:</b> refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p> <p>A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis:</p> <p>1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado;</p> <p>2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo;</p> <p>3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação.</p> <p>Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.</p>	<p>( x ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa.</p> <p>( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade.</p> <p>( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p> <p>( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p>
<p><b>Abrangência territorial:</b> refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u></p>	<p>( ) Local</p> <p>( ) Regional</p> <p>( ) Nacional</p> <p>( x ) Internacional</p> <p>Justificativa: Todo o material elaborado estará disponível no portal EDUCAPES, que possui acesso internacional.</p>
<p><b>Impacto:</b> considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho).</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p>( x ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto).</p> <p>( ) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.</p>

<p><b>Área impactada</b></p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p><input type="checkbox"/> Econômica;</p> <p><input type="checkbox"/> Saúde;</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Ensino;</p> <p><input type="checkbox"/> Cultural;</p> <p><input type="checkbox"/> Ambiental;</p> <p><input type="checkbox"/> Científica;</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Aprendizagem.</p>												
<p><b>Complexidade:</b> compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE.</p> <p><u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u></p>	<p><input checked="" type="checkbox"/> O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação.</p> <p><input type="checkbox"/> Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.</p>												
<p><b>Inovação:</b> considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.</p>	<p><input checked="" type="checkbox"/> PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito).</p> <p><input type="checkbox"/> PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos).</p> <p><input type="checkbox"/> PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).</p>												
<p><b>Membros da banca examinadora de defesa</b></p>													
<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="209 1783 986 1827">Nome</th> <th data-bbox="986 1783 1422 1827">Instituição</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="209 1827 986 1872">Dra. Claudete Cargin</td> <td data-bbox="986 1827 1422 1872">UTFPR-CM</td> </tr> <tr> <td data-bbox="209 1872 986 1917">Dr. Sergio de Mello Arruda</td> <td data-bbox="986 1872 1422 1917">UTFPR/UEL</td> </tr> <tr> <td data-bbox="209 1917 986 1962">Dr. Bruno Rodrigo Teixeira</td> <td data-bbox="986 1917 1422 1962">UEL</td> </tr> <tr> <td data-bbox="209 1962 986 2007"> </td> <td data-bbox="986 1962 1422 2007"> </td> </tr> <tr> <td data-bbox="209 2007 986 2033"> </td> <td data-bbox="986 2007 1422 2033"> </td> </tr> </tbody> </table>	Nome	Instituição	Dra. Claudete Cargin	UTFPR-CM	Dr. Sergio de Mello Arruda	UTFPR/UEL	Dr. Bruno Rodrigo Teixeira	UEL					
Nome	Instituição												
Dra. Claudete Cargin	UTFPR-CM												
Dr. Sergio de Mello Arruda	UTFPR/UEL												
Dr. Bruno Rodrigo Teixeira	UEL												

**VERSÃO DO ESTUDANTE  
PRODUTO EDUCACIONAL I**

PPGMAT- 2022

# DECOLAGEM E POUSO

DE UM AVIÃO

EMBARQUE NESSE VOO COM  
DESTINO A UMA APLICAÇÃO DE  
NÚMEROS COMPLEXOS

**CILIO JOSÉ VOLCE**  
**CLAUDETE CARGNIN**

## APRESENTAÇÃO

Caros passageiros,

Sejam bem-vindos a bordo dessa aula.

Aqui vocês serão transportados por meio de uma sequência didática composta por quatro tarefas com foco nas representações algébricas e gráficas de Números Complexos.

O voo possui um destino interdisciplinar, com escalas nas disciplinas de Matemática e Física e conexões em outras áreas do conhecimento.

Acomodem os seus materiais nos compartimentos em cima ou embaixo de suas carteiras. Não é permitido ficar com dúvidas. Lembramos que o conhecimento é a capacidade humana de entender e compreender. Aprender é sensacional.

Em caso de emergência, chame pelo seu professor(a), que possui uma das mais nobres profissões com grande responsabilidade em contribuir com a sua formação e desenvolvimento enquanto indivíduo em uma sociedade.

A DECOLAGEM está autorizada. Desejamos a todos uma ótima aula!

Apertem os cintos e boa aprendizagem!

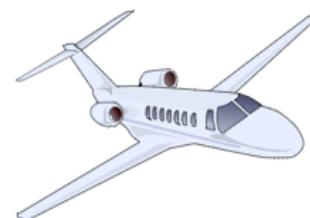
Cilio José Volce  
Claudete Cargnin

## Tarefa 1



Investigue quais disciplinas que você já estudou ou estuda na escola e que podem trazer conhecimentos para ajudar a explicar o que faz um avião voar.

Pesquise, discuta e compartilhe com os seus colegas e com o seu professor(a) algumas possíveis fórmulas, cálculos e princípios de teorias que podem ajudar a explicar os mistérios que fazem com que uma máquina tão pesada voe.



## Tarefa 2



A **aerodinâmica** é uma parte da mecânica dos fluidos que estuda os gases em movimento, e em particular o movimento relativo entre o ar e os corpos sólidos. Ao construir um avião, os engenheiros se fundamentaram nos princípios da aerodinâmica, principalmente na elaboração do aerofólio. Um aerofólio é projetado para causar certa variação da velocidade de um fluido, acarretando uma diferença de pressão. Nas aeronaves, os aerofólios se encontram nas asas e no leme, proporcionando a sustentação e direção do avião, logo o mantendo no ar, cuja explicação está na conservação de energia enunciada pelo Princípio de Bernoulli (PORTOLAN, 2017).

***E quanto aos números complexos? Há alguma contribuição desses números na aerodinâmica?*** Estudos como os de Camata (2015), Pereira (2017) e Novais (2020) dizem que há contribuições dos números complexos na aerodinâmica e destacam o cientista russo Nicolai Egorovich Joukowski (1847-1921).

Camata (2015) descreve que Joukowski (1906), utilizando transformações geométricas, construiu uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil

de uma asa de avião (aerofólio de Joukowski) e, usando o princípio de Bernoulli (1738) e a teoria das funções complexas, calculou a força de levantamento responsável pela sustentação do corpo. Ainda, ressalta que os números complexos permitiram uma explicação matemática que possibilitou definir as características do perfil aerodinâmico da asa do avião, colaborando com o progresso aeronáutico.

Pereira (2017) comenta que não se pode deixar de destacar a grande contribuição dos números complexos para várias áreas, como para a Dinâmica dos Fluidos e Aerodinâmica, onde Nikolai Joukowski desenvolveu um método que possibilitou que engenheiros aeronáuticos fizessem estudos sobre aerofólios e sua influência na sustentação de aviões (construção das asas).

Novais (2020) ressalta que esse cientista foi responsável por demonstrar que a imagem de uma circunferência de raio unitário no  $z$  – plano é mapeada<sup>3</sup> dentro de uma curva de formato de um aerofólio no  $w$  – plano, semelhante a uma asa de avião. Ao estudar a função  $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ , deduziu uma função de variável complexa dada por:  $F(z) = z + \frac{1}{z}$ .

Essa transformação ficou conhecida como transformação de Joukowski, que propõe um aproveitamento da conhecida solução analítica para um escoamento potencial ao redor de um cilindro com circulação e conclui que “se os fluxos aerodinâmicos” para um fluxo em torno de um círculo são conhecidos, então suas imagens sob o mapeamento  $w = f(z)$  será o fluxo aerodinâmico para um fluxo em torno do aerofólio (NOVAIS, 2020).

### Questão da tarefa 2:

Após conhecermos a importante expressão  $z + \frac{1}{z}$  estudada por Joukowski que, segundo alguns estudos, explica matematicamente a força de levantamento responsável pela sustentação do voo de um avião, determine o seu valor para  $z_1, z_2, z_3, e z_4$  apresentados a seguir e represente-os graficamente. Se considerar necessário, utilize o *Software Geogebra*.

a)  $z_1 = 5 + 2i$

c)  $z_3 = -5 + 2i$

b)  $z_2 = 5 - 2i$

d)  $z_4 = -5 - 2i$

---

<sup>3</sup> Mais informações em: <https://biztechbrz.wordpress.com/2011/02/06/deducoes-sobre-o-aerofolio-de-joukowski/>. **Deduções sobre o aerofólio de Joukowski**. Acesso em 10/01/2022.

### Tarefa 3



Alguns dos conteúdos básicos da Física são os estudos de vetores e forças. Os **vetores** representam as grandezas vetoriais e indicam seu módulo, direção e sentido. O módulo é o valor numérico do vetor seguido da unidade de medida que define a grandeza vetorial. A direção é a reta onde o vetor está localizado, e as direções possíveis são: diagonal, horizontal e vertical. **Força** é o agente da dinâmica responsável por alterar o estado de repouso ou movimento de um corpo. Quando se aplica uma força sobre um corpo, esse pode desenvolver uma aceleração, como estabelecem as leis de Newton, ou se deformar.

#### INDICAÇÃO DE LEITURAS E VÍDEOS

Para a realização da tarefa 3, se necessário, sugerimos as seguintes leituras:

##### Números Complexos

Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/vc/vc01.htm>. Acesso em: 27.12.2021.

##### Números Complexos e polinômios

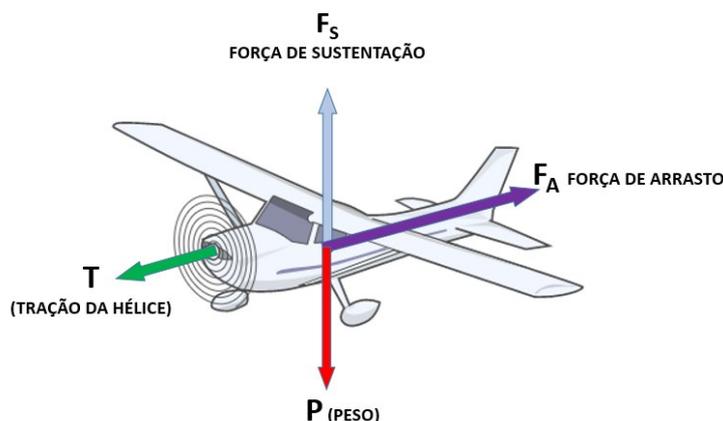
Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~oliveira/ComplexosCap1.pdf>. Acesso em: 27.12.2021.

**O que são números imaginários?; O que são números complexos?; O plano complexo; Soma e subtração de números complexos; Multiplicação de números complexos; Conjugados complexos e divisão de números complexos; Valor absoluto e ângulo de números complexos; Distância e ponto médio de números complexos; Forma polar de números complexos; Multiplicação e divisão de números complexos na forma polar; Problemas envolvendo números complexos**

Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers>. Acesso em: 27.12.2021.

Uma das possibilidades para visualizar os números complexos é por meio de vetores. Vamos ver como os vetores agem aqui. A seguir apresentaremos algumas forças vetoriais que atuam no avião:

## ALGUMAS FORÇAS QUE ATUAM EM UM AVIÃO



Fonte: o autor.

### Força de Sustentação ( $F_S$ )

Força de Sustentação ( $F_S$ ) é a componente da força aerodinâmica perpendicular à direção do movimento do voo (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

### Força de Arrasto ( $F_A$ )

Força de Arrasto ( $F_A$ ), essencialmente uma força de atrito, é a componente da força aerodinâmica paralela à direção de voo (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

### Tração da Hélice ( $T$ )

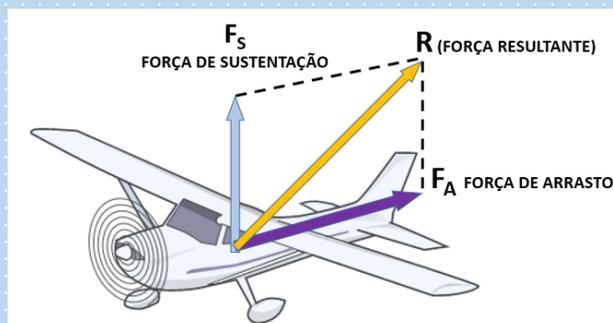
Tração da Hélice ( $T$ ) é a força produzida pelo motor e é dirigida ao longo do eixo longitudinal do avião (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

### Peso ( $P$ )

Peso ( $P$ ) é a força da gravidade ( $P = m \cdot g$ ) atuando sobre o avião e dirigida para o centro da Terra (STUDART; DAHMEN, 2006, p. 36).

### Força Resultante ( $R$ )

Surge em virtude do diferencial de pressão entre o intradorso e o extradorso do aerofólio e tende a empurrá-lo para cima, auxiliada ainda pela reação do ar (Terceira Lei de Newton). Ela é representada, de maneira didática e para melhor compreensão do estudante, como um vetor que, quando decomposto, dá origem a duas forças componentes. A componente da força resultante perpendicular (ou normal) à direção do fluxo é chamada de sustentação; a componente da força resultante ao longo da direção do fluxo é chamada de arrasto. Disponível em: <https://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/presar.html>. Acesso em: 10.01.2022.



Fonte: o autor.

## CONTROVÉRSIAS SOBRE A FORÇA DE SUSTENTAÇÃO

Quando o assunto é a força aerodinâmica conhecida como **sustentação**, não há uma explicação simples para esse tema, assim como não há consenso entre cientistas e algumas teorias, de forma a explicar completamente a força de sustentação, o que deixa uma situação intrigante no ponto de vista físico.

Segundo Regis (2020), há duas teorias concorrentes que comumente são propostas para explicar a sustentação aerodinâmica: Teorema de Bernoulli e Terceira Lei de Newton. É sobre essas duas teorias que se trata o Quadro 2 a seguir:

Quadro 2 – Breve descrição sobre o Teorema de Bernoulli e Terceira Lei de Newton

Teorema de Bernoulli	Terceira Lei de Newton
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Considerado o mais popular para explicar a sustentação aerodinâmica, diz que a pressão de um fluido diminui à medida que sua velocidade aumenta, e vice-versa;</li> <li>- O Teorema de Bernoulli considera a sustentação como uma consequência da superfície superior curva de um aerofólio (nome técnico de uma asa de avião). Por causa dessa curvatura, o ar viajando através do topo da asa se move mais rápido do que o ar se movendo na superfície inferior da asa, que é plana;</li> <li>- O aumento da velocidade no topo da asa está associado a uma região de menor pressão, o que faz gerar a sustentação.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Princípio newtoniano de ação e reação;</li> <li>- Explica a sustentação como um impulso para cima na asa com o ar em movimento abaixo dela;</li> <li>- O ar tem massa. Portanto, a terceira lei de Newton diz que o impulso para baixo da asa resulta em uma igualdade e o oposto dessa situação empurra de volta para cima;</li> <li>- Este relato newtoniano de sustentação aplica-se a asas de qualquer formato, curvas ou planas, simétricas ou não, e vale para aeronaves voando invertidas ou de lado (o recurso crítico é um ângulo de ataque adequado).</li> </ul>
Críticas à Teoria	Críticas à Teoria
<p>O teorema por si só não explica por que a velocidade superior no topo da asa traz pressão mais baixa junto com ela ou, o por que, na prática, um avião com asas que possuem superfície superior curva - ou mesmo superfícies planas na parte superior e inferior é capaz de voar invertido, desde que o aerofólio encontre o vento que se aproxima em um ângulo apropriado.</p>	<p>O princípio de ação e a reação ainda não consegue explicar a mais baixa pressão no topo da asa, independentemente de o aerofólio ser curvado ou não.</p>

Fonte: Adaptado de Regis (2020) – tradução nossa.

Cada uma dessas teorias está correta dentro de seus próprios contextos, e nenhuma delas contradiz a outra. O problema é que nenhuma delas produz uma explicação completa que leva em consideração todas as forças básicas e demais

fatores físicos que regem o levantamento aerodinâmico, sem deixar problemas inexplicados. Ainda, nem as duas teorias juntas fornecem uma explicação completa de sustentação. Uma explicação completa deve explicar todas as forças e fatores que agem na asa, sem nenhum problema, maior ou menor (REGIS, 2020).

## POSIÇÕES DO AVIÃO

Nessa seção, vamos considerar algumas posições em que um avião pode se encontrar: repouso; voo ascendente; voo horizontal; voo descendente e voo em curva.

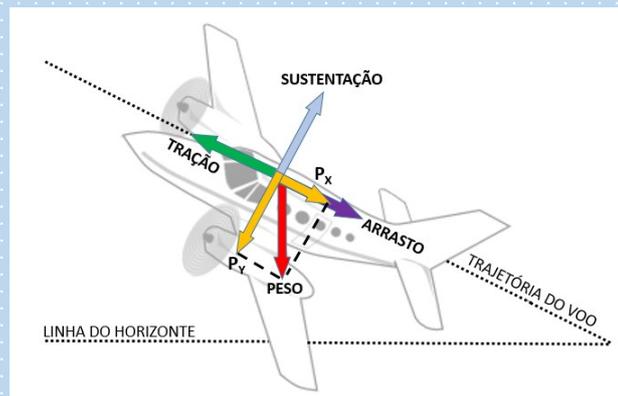
### AERONAVE EM REPOUSO

Das forças que atuam sobre a aeronave em repouso (parada), a única força a se destacar é o peso (**P**). Quando o motor passa a funcionar gera a tração (**T**) e o avião começa a mover-se para frente, com isso surge o Arrasto. A tração deve ser maior do que o Arrasto para que o avião ganhe velocidade. Com o aumento de velocidade surge nas asas a Força de Sustentação. Quando essa força for plena o avião estará em condições de decolar. Agindo nos controles de voo o piloto faz com que o avião suba.

## VOO ASCENDENTE

### Forças envolvidas:

- Força de tração da Hélice: inclinada para cima suportando parcialmente o peso.
- Força de Sustentação: perpendicular ao vento relativo.
- Peso da aeronave: decomposto em duas forças, uma oposta a sustentação a outra oposta a tração.
- Força de Arrasto: oposta a Tração.



Fonte: o autor.

**Questão 1:** Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo ascendente que apresenta uma Força de Tração de 1500 N representando 25% maior do que as forças opostas a ela (Força Peso decomposta no eixo x e a Força de Arrasto). Sabendo que a Força Peso é igual a 980 N e que o ângulo formado entre a Força Peso e sua respectiva componente no eixo y é de  $30^\circ$ , determine:

- Componente da Força Peso no eixo x.
- Força de Arrasto.
- Força Resultante da Sustentação com o Arrasto.

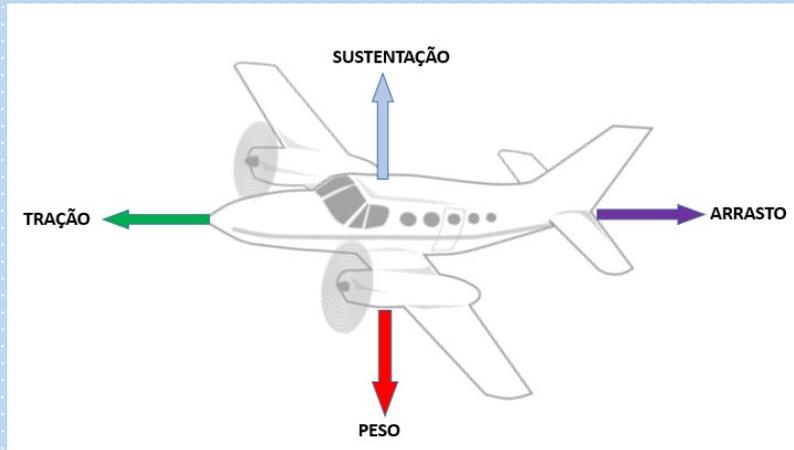
Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

## VOO HORIZONTAL

No voo Horizontal o avião se desloca horizontalmente

### Forças envolvidas:

- A Força de Sustentação deve ser igual ao peso.
- A tração deve ser maior que o Arrasto, pois o avião precisa de uma alta velocidade aerodinâmica para continuar voando.



Fonte: o autor.

**Questão 2:** Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo horizontal que apresenta uma Força Resultante de 1200 N entre a Sustentação e o Arrasto. Sabendo que a Força Peso desse avião é de 980N e que a Força de Tração da Hélice possui 20% a mais do que o valor da Força de arrasto, determine:

- a) Força de Sustentação.
- b) Força de Arrasto.
- c) Força de Tração da Hélice.

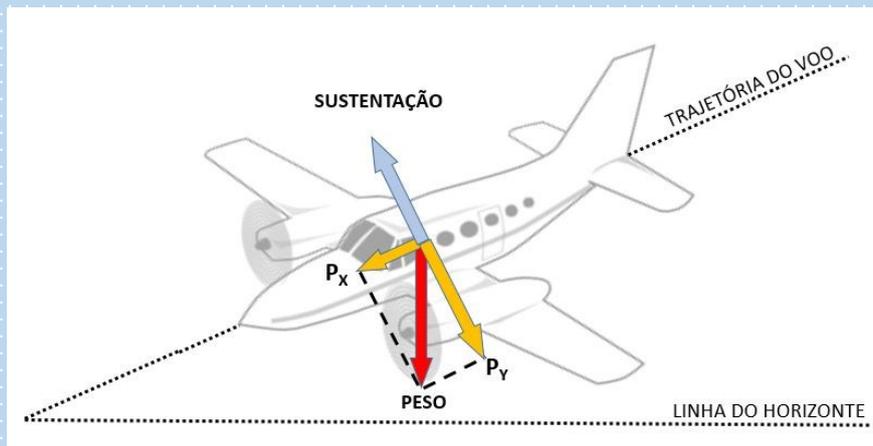
Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

## VOO DESCENDENTE

Na descida, o avião usa a própria ação da gravidade para planar por um determinado tempo.

### Forças envolvidas:

- A sustentação é menor que o peso.
- Decompondo a força Peso temos uma componente com o mesmo sentido da Tração auxiliando o avião a planar.



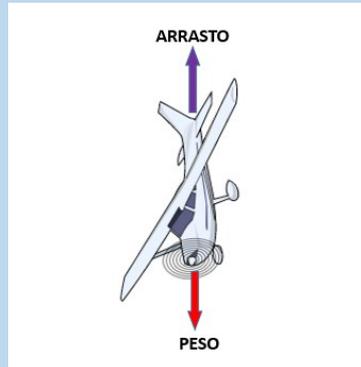
Fonte: o autor.

**Questão 3:** Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo descendente que apresenta Força de Sustentação de 1082,53 N; Força Peso ( $P_x$ ) decomposta de 625 N. Determine a Força Peso desse avião.

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

## Curiosidade

**AVIÃO DE ACROBACIA** - Quando o avião forma um ângulo de  $90^\circ$  com a linha do horizonte, a Força de Sustentação é nula e a aceleração é dada pelo peso do avião. Com o aumento da velocidade, o arrasto aumenta até se igualar ao peso – teremos aí a velocidade final.



Fonte: o autor.

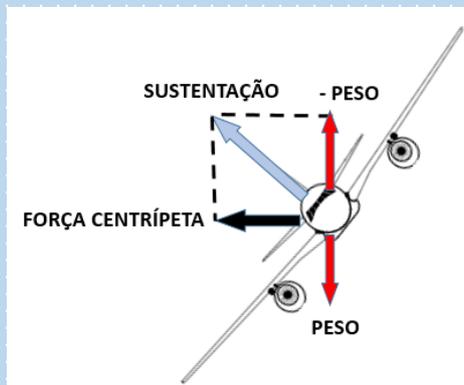
## VOO EM CURVA

### Forças envolvidas:

Para o estudo da curva podemos decompor a sustentação em duas forças: a força centrípeta e a força chamada de **-P**, que deve se opor ao peso.

Como se pode deduzir desse gráfico, a força de sustentação deve ser maior que o Peso já que uma de suas componentes, a força **-P** tem a mesma intensidade que o Peso.

A sustentação deve ter um valor tal que a sua componente vertical chamada de **- P** seja igual o Peso. Para que isso aconteça devemos ter um ângulo de inclinação correto de acordo com a situação.



Fonte: o autor.

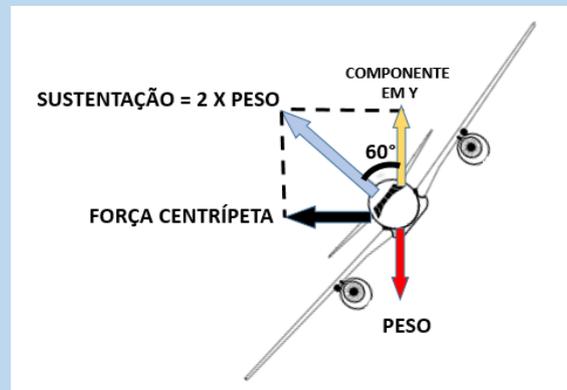
**Questão 4:** Considere um avião de pequeno porte em condições normais em voo em curva que apresenta Força de Sustentação igual a 2500 N. Determine a Força Peso desse avião, sabendo que o ângulo formado entre a força de sustentação e a força centrípeta ( $F_c$ ) é de  $30^\circ$ .

Obs: os valores em Newton atribuídos aos vetores são fictícios.

### Curiosidade

#### VOO EM CURVA DE $60^\circ$

Em uma curva de  $60^\circ$ , a sustentação deve ser igual ao dobro do peso para que sua resultante vertical seja igual e oposta ao peso.



Fonte: o autor.

## Tarefa 4



Antes de apresentar a questão proposta nessa Tarefa 4, recomendamos a leitura da curiosidade a seguir:

### Curiosidade

#### Caixas-Pretas

As caixas-pretas não são pretas, mas laranjas, com a finalidade de, em casos de acidentes, facilitar a sua localização entre os destroços.

#### História

A primeira caixa-preta, criada em 1939, era um tipo de câmera e gravava apenas imagens. Como toda câmera, tinha o interior totalmente escuro – uma explicação possível para seu nome.

#### Quantidade

São duas. Uma unidade grava os sons na cabine de comando. A outra registra os dados de voo, como a rota, as sucessivas mudanças de altitude e até quais botões foram apertados no painel da aeronave.

#### Duração

As caixas gravam as duas horas mais recentes de voo. Os registros mais antigos são apagados automaticamente.

#### Materiais

Envoltas em camadas de sílica, alumínio e titânio, as placas de memória podem resistir a choques, temperaturas de até 1.000 °C e submersão a até 6 mil metros de profundidade.

#### Localização

As duas caixas-pretas ficam na cauda, a parte menos atingida em impactos. As informações são enviadas para lá a partir de microfones e outros dispositivos instalados no cockpit (espaço onde se aloja o piloto nos aviões).

#### Alerta

Um cilindro localizado junto às caixas-pretas é responsável por emitir um alarme, que dura 30 dias. Depois disso, a caixa tem de ser encontrada à moda antiga: a olho nu.

Essas informações pertencem ao site da revista **Super interessante**.

**Fonte:** <https://super.abril.com.br/tecnologia/os-misterios-da-caixa-preta/>. Acesso em: 29.12.2021.

**Questão:** Um avião possui duas caixas-pretas, uma delas, caixa 1, com uma parte em forma de cubo e outra, caixa 2, com uma parte em forma de um paralelepípedo reto retangular.

A parte em forma de cubo na caixa 1 possui aresta  $x$  e a parte em forma de paralelepípedo reto retangular na caixa 2 possui as dimensões  $x$ ,  $2$  e  $x+3$ , conforme a figura a seguir:



**Fonte:** Adaptado de Super Interessante (2020). Disponível em: <https://super.abril.com.br/tecnologia/os-misterios-da-caixa-preta/>. Acesso em: 29 dez. 2021

As unidades de medidas de ambas as caixas estão em decímetros ( $dm$ ).

Leia atentamente cada um dos itens a seguir e faça o que se pede:

- A área da base ( $A_c$ ) da parte em forma de cubo da caixa preta 1 é  $11 \text{ dm}^2$  menor do que a área da base ( $A_p$ ) da parte em forma de paralelepípedo da caixa preta 2. Escreva a equação que represente essa situação.
- Calcule os valores de  $x$  que satisfaçam a situação descrita no item anterior e **represente-os graficamente**. Se considerar necessário, utilize o *Software GeoGebra*.
- O volume ( $V_c$ ) da parte cúbica da caixa preta 1 é  $8 \text{ dm}^3$  maior do que o volume ( $V_p$ ) da parte em forma de paralelepípedo caixa preta 2. Escreva a equação que represente essa situação.
- Verifique diretamente na equação do item anterior que  $x = 4$  é uma raiz real.
- Determine as outras raízes da equação e **represente-as graficamente**. Se considerar necessário, utilize o *Software GeoGebra*.

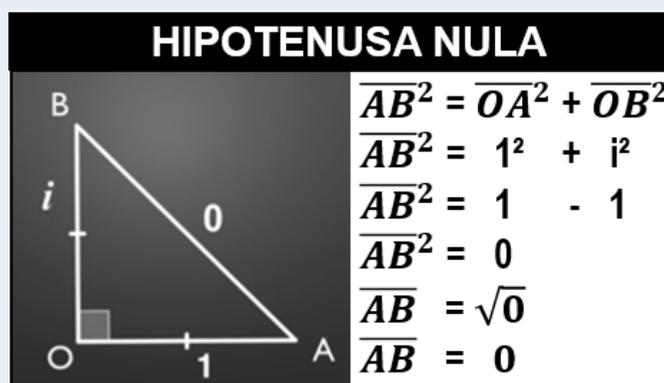
f) As conclusões que você chegou nos itens b) e e) são válidas para o problema das caixas pretas do avião? **Justifique sua resposta apresentando seus argumentos a respeito da relação entre números complexos e medidas.**

### Curiosidade

Vídeo com aplicação do **Teorema de Pitágoras** em um triângulo retângulo. Por meio desse vídeo, pode-se enriquecer a discussão de que os números complexos não possuem ordem e, portanto, não devem ser utilizados como medidas de comprimento. Cabe ainda, discutir a medida da hipotenusa ser ZERO, ou seja, uma medida nula, que não existe enquanto comprimento.

O vídeo encontra-se disponível em:

[https://www.youtube.com/watch?v=JsCvu4DIHi8&ab\\_channel=YvanMonka](https://www.youtube.com/watch?v=JsCvu4DIHi8&ab_channel=YvanMonka) e tem a duração 02min.10seg. Acesso em: 14.05.2021.



Fonte: o autor.

### REFERÊNCIAS

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. Disponível em: [https://saber.com.br/obras/Aplicacoes/Edocente/plugins/pdfjs-sem-download-e-print/web/viewer.html?file=https://saber.com.br/obras/PNLD/PNLD\\_2018/MatematicaContAplic/3o%20A no/MatematicaContAplic\\_3\\_MP\\_0008P18023\\_PNLD2018.pdf](https://saber.com.br/obras/Aplicacoes/Edocente/plugins/pdfjs-sem-download-e-print/web/viewer.html?file=https://saber.com.br/obras/PNLD/PNLD_2018/MatematicaContAplic/3o%20A no/MatematicaContAplic_3_MP_0008P18023_PNLD2018.pdf). Acesso em: 28 dez. 2021.

CAMATA, J. G. **Análise das Raízes Complexas de uma Equação Quadrática e Estudo de Números Complexos no Ensino Médio**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2015.

NOVAIS, R. P. B. **O decolar de um avião: uma proposta didática sobre números e funções complexas**. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2020.

PEREIRA, G. G. **Uma proposta didática para o ensino de funções de variável complexa no ensino médio usando planilha eletrônica**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Programa de Pós-

Graduação em Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal de Rio Grande, Rio Grande, 2017.

PORTOLAN, J. **A importância do ensino de números complexos no ensino médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região oeste do Paraná.** 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

REGIS, E. The enigma of aerodynamic lift. **Scientific American**, v. 322, n. 2, p. 44-51, 2020.

STUDART, N.; DAHMEN, S. R. A física do voo na sala de aula. **Física na escola**. Vol. 7, n. 2 (out. 2006), p. 36-42, 2006.

VOLCE, C. J. **Recursos Didáticos para Números Complexos na perspectiva da teoria dos Registros de Representação Semiótica.** 2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.