

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

ALFRED JAMES DIAS ALBON

A GEOMETRIA DO DISCO DE POINCARÉ

CURITIBA

2021

ALFRED JAMES DIAS ALBON

A GEOMETRIA DO DISCO DE POINCARÉ

POINCARÉ'S DISK GEOMETRY

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Licenciatura em Matemática da
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR), Campus Curitiba, para obtenção do título
de Licenciado em Matemática.
Orientador: Rudimar Luiz Nós

CURITIBA

2021

ALFRED JAMES DIAS ALBON

A GEOMETRIA DO DISCO DE POINCARÉ

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do título
de Licenciado em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 21/junho/2021

Rudimar Luiz Nós
Doutor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Márcio Rostirolla Adames
Doutor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Olga Harumi Saito
Doutora
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

CURITIBA

2021

Dedico este trabalho a todo o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba, corpo docente e discente.

AGRADECIMENTOS

- Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por sempre ter me mostrado o caminho certo ao longo dessa trajetória acadêmica para que eu conseguisse chegar até aqui, sem nunca desistir, mesmo diante das dificuldades que foram surgindo a cada etapa. Sem ele, nada disto seria possível.
- Sou grato também à minha família, em especial aos meus pais, por todo apoio que me deram ao longo desses anos na faculdade, por todo esforço investido na minha educação, por sempre terem confiado em mim e me incentivado a realizar os meus sonhos.
- Agradeço ao meu orientador, o Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós, por aceitar me conduzir neste trabalho, pelo incentivo, pelos conselhos, por ter tido bastante paciência comigo e, principalmente, pelas correções e melhorias no trabalho como um todo.
- Agradeço a Gabriel Plentz Motta, cujo trabalho embasou meu Trabalho de Conclusão de Curso.
- Agradeço aos meus colegas da universidade que tantas vezes compartilharam experiências, descobertas, conhecimento, e em especial, a amizade. Tudo isso teve impacto na minha formação acadêmica.
- E por último, mas não menos importante, quero agradecer à UTFPR e a todos os seus docentes, que sempre demonstraram estar comprometidos com a qualidade e a excelência do ensino e que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho.

Construí um estranho novo universo.

Janos Bolyai (1802-1860): matemático húngaro, um dos pais da geometria hiperbólica.

Provamos através da lógica, mas descobrimos a partir da intuição.

Jules Henri Poincaré (1854-1912): matemático, físico e filósofo francês; considerado o último matemático universalista.

O que eu crio na luz do dia é apenas um por cento do que eu vi na escuridão.

Maurits Cornelis Escher (1898-1972): artista gráfico holandês.

RESUMO

ALBON, A. J. D. **A geometria do disco de Poincaré**. 93 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2021.

Discorreremos neste trabalho sobre a história das geometrias não Euclidianas, enfatizando um modelo de geometria hiperbólica no plano: o disco de Poincaré. Relacionamos alguns resultados nessa geometria com resultados da geometria Euclidiana, tais como: a soma dos ângulos internos de um triângulo, a área de um triângulo, o teorema de Pitágoras e as leis dos senos e dos cossenos. Empregamos ainda um software de geometria dinâmica, o GeoGebra, para construir tesselações no disco de Poincaré. Concluimos que o GeoGebra é uma ferramenta eficiente à abordagem de geometrias hiperbólicas no plano.

Palavras-chave: Geometrias não Euclidianas; Geometria hiperbólica no plano; Tesselações; GeoGebra.

ABSTRACT

ALBON, A. J. D. **Poincaré's disk geometry**. 93 pg. Monograph - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2021.

In this work, we discuss the history of non-Euclidean geometries, emphasizing a model of hyperbolic geometry in the plane: the Poincaré disk. We relate some results in this geometry to results from Euclidean geometry, such as the sum of the internal angles of a triangle, the area of a triangle, the Pythagorean theorem and the laws of sines and cosines. We also use a dynamic geometry software, GeoGebra, to build tessellations on the Poincaré disk. We conclude that GeoGebra is an efficient tool to approach hyperbolic geometries in the plane.

Keywords: Non-Euclidean geometries; Hyperbolic geometry; Tessellations; GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Reta r definida pelos pontos A e B	15
Figura 1.2 – Semirreta com origem em A e que passa por B	15
Figura 1.3 – Reta definida pelos pontos colineares A , B e C	15
Figura 1.4 – Segmento de reta \overline{AB}	16
Figura 1.5 – Semirretas opostas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC}	16
Figura 1.6 – Retas r e s concorrentes em P	16
Figura 1.7 – Circunferência λ de centro O e raio $r = \overline{OP}$	17
Figura 1.8 – Ângulo α determinado pelas semirretas \overrightarrow{VA} e \overrightarrow{VB}	17
Figura 1.9 – Ângulos suplementares \widehat{ABC} e \widehat{CBD}	17
Figura 1.10 – Ângulo reto \widehat{CBD}	18
Figura 1.11 – Ângulos retos definidos pelas retas perpendiculares r e s	18
Figura 1.12 – Reta t transversal às retas r e s	19
Figura 1.13 – Giovanni Girolamo Saccheri	20
Figura 1.14 – O quadrilátero de Saccheri	21
Figura 1.15 – O quadrilátero de Saccheri com diferentes hipóteses para os ângulos de topo: (a) ângulo agudo; (b) ângulo reto; (c) ângulo obtuso	21
Figura 1.16 – Johann Heinrich Lambert	22
Figura 1.17 – Adrien Marie-Legendre	22
Figura 1.18 – Nicolai Ivanovitch Lobachevsky	23
Figura 1.19 – Investigações geométricas sobre a teoria das paralelas	23
Figura 1.20 – János Bolyai	24
Figura 1.21 – Apêndice explicando a absoluta verdadeira ciência do espaço	25
Figura 1.22 – Johann Carl Friedrich Gauss	25
Figura 1.23 – Georg Friedrich Bernhard Riemann	26
Figura 1.24 – Eugenio Beltrami	26
Figura 1.25 – Jules Henri Poincaré	27
Figura 1.26 – Disco de Poincaré \mathbb{D} e a fronteira \mathbb{F}	27
Figura 1.27 – Retas d-linhas no disco de Poincaré e pontos de fronteira	28
Figura 1.28 – Semi-plano de Poincaré	28
Figura 1.29 – Felix Christian Klein	29
Figura 1.30 – Hermann Minkowski	29
Figura 1.31 – Obras de Escher: (a) Círculo Limitado III; (b) Círculo Limitado IV (<i>Heaven and Hell</i>)	31
Figura 1.32 – Tesselação: (a) círculo limitado; (b) elementos de geometria hiperbólica dos modelos de Poincaré no plano	31
Figura 2.1 – Postulado das paralelas na geometria hiperbólica	34

Figura 2.2 – Disco de Poincaré \mathbb{D} e a fronteira \mathbb{F}	35
Figura 2.3 – (a) Retas d-linhas no disco de Poincaré e pontos de fronteira; (b) raio OP , tangente em P a uma d-linha no disco de Poincaré	36
Figura 2.4 – Retas paralelas à d-linha l no disco de Poincaré	38
Figura 2.5 – Retas ultraparalelas à d-linha l no disco de Poincaré	39
Figura 2.6 – Ângulo θ entre duas d-linhas que se intersectam no ponto P no disco de Poincaré	39
Figura 2.7 – Mapeamento 1	40
Figura 2.8 – Retas d-linhas que passam pelo ponto P no disco de Poincaré	40
Figura 2.9 – Mapeamento 2	41
Figura 2.10–Polígonos hiperbólicos no disco de Poincaré: (a) d-triângulo ideal; (b) d- quadrilátero; (c) d-pentágono; (d) d-octógono	42
Figura 2.11–(a) Triângulo hiperbólico ABC no disco de Poincaré; (b) triângulo hiperbó- lico ABC e triângulo Euclidiano $OB'C'$	43
Figura 2.12–(a) D-quadrilátero $ABCD$; (b) d-triângulos provenientes da divisão do d- quadrilátero	44
Figura 2.13–Triângulo triplamente assintótico no disco de Poincaré	44
Figura 2.14–Mapeamento 3	45
Figura 2.15–Construindo o d-triângulo DEF triplamente assintótico que contém o d- triângulo ABC	46
Figura 2.16–D-triângulo ABC contido no d-triângulo triplamente assintótico DEF em \mathbb{D}	47
Figura 2.17–(a) D-triângulo triplamente assintótico dividido em 6 d-triângulos singu- larmente assintóticos; (b) d-triângulo ABC singularmente assintótico em C	47
Figura 2.18–(a) D-triângulos singularmente assintóticos; (b) d-triângulos congruentes - áreas sombreadas	48
Figura 2.19–Mapeamento 4	49
Figura 2.20–(a) D-triângulo ABC de ângulo $\hat{A} = \alpha$; (b) d-triângulos duplamente assintóticos	50
Figura 2.21–D-triângulo ABC , retângulo em C , de lados a , b e c	52
Figura 2.22–Triângulo retângulo ABC no disco de Poincaré	54
Figura 2.23–D-triângulo retângulo $A'B'C'$	56
Figura 2.24–D-triângulo ABC , retângulo em C , no disco de Poincaré	59
Figura 2.25–D-triângulo WUV decomposto nos d-triângulos retângulos OUW e VOW	60
Figura 2.26–D-triângulo WUV , retângulo em V	62
Figura 2.27–D-triângulo UWV com lados de medidas a , b e c	64
Figura 2.28–Círculos hiperbólicos C e C' , de centros respectivamente O' e O'' , no disco de Poincaré	65
Figura 3.1 – Mosaico geométrico	66
Figura 3.2 – Obras de Escher: (a) Círculo Limitado I; (b) Círculo Limitado II	67

Figura 3.3 – Tesselações regulares: (a) triangular; (b) quadrangular; (c) hexagonal	68
Figura 3.4 – Tesselações semirregulares ou Arquimedianas	68
Figura 3.5 – Tesselações demirregulares	69
Figura 3.6 – Tesselações irregulares	69
Figura 3.7 – Tesselações: (a) periódica; (b) aperiódica	70
Figura 3.8 – Tesselações no disco de Poincaré: (a) usando triângulos, quadriláteros e pentágonos hiperbólicos; (b) usando quadriláteros e hexágonos hiperbólicos	70
Figura 3.9 – Tesselação regular com d-triângulos no disco de Poincaré	71
Figura 3.10–Ponto P^{-1} , inverso de P em relação ao círculo C	72
Figura 3.11–Ponto A^{-1} , inverso de A	73
Figura 3.12–Ponto A^{-1} , inverso de A em relação à C_1	73
Figura 3.13–Lugar geométrico m dos centros dos círculos ortogonais a C e que passam por A	74
Figura 3.14–Reta d-linha que passa por A e B , centrada no circuncentro do $\triangle ABA^{-1}$. .	74
Figura 3.15–Reta d-linha que passa por A e B , centrada no ponto $P = m \cap n$	75
Figura 3.16–Reta d-linha que passa por A e intersecta a d-linha γ	75
Figura 3.17–Tela do GeoGebra com as ferramentas hiperbólicas básicas	76
Figura 3.18–Tesselação com d-triângulos no disco de Poincaré	76
Figura 3.19–Recobrimo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 1	77
Figura 3.20–Recobrimo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 2	77
Figura 3.21–Recobrimo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 3	78
Figura 3.22–Recobrimo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 4	79
Figura 3.23–Recobrimo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 5	79
Figura 3.24–Recobrimo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 6	79
Figura 3.25–Recobrimo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 7	80
Figura 3.26–Recobrimo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 8	80
Figura 3.27–Recobrimo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 9	81
Figura 3.28–Tesselações Euclidianas: (a) Escher - Pegasus no. 105; (b) padrão pentagonal de um quasicristal observado em um microscópio eletrônico	82
Figura .1 – Círculos C_1 e C_2 ortogonais	87
Figura .2 – D-triângulo RPO e d-linha l	89
Figura .3 – D-triângulo retângulo WUV e o círculo τ gerador da d-linha que contém WV	90

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	História das geometrias não Euclidianas	13
1.1.1	Fundamentos da geometria Euclidiana	15
1.1.2	O quinto postulado de Euclides e as novas geometrias	19
1.2	Justificativa	30
1.3	Objetivos	32
1.3.1	Objetivo geral	32
1.3.2	Objetivos específicos	32
1.4	Procedimentos metodológicos	32
1.5	Estrutura do trabalho	32
2	O MODELO DO DISCO DE POINCARÉ	34
2.1	O disco de Poincaré	35
2.2	A reta hiperbólica	36
2.3	Paralelismo	38
2.4	Distância entre dois pontos	40
2.5	Polígonos hiperbólicos	42
2.6	Soma dos ângulos internos de um d-triângulo	43
2.7	Área de um d-triângulo	44
2.8	Teorema de Pitágoras hiperbólico	52
2.9	Trigonometria hiperbólica	55
2.10	Círculos hiperbólicos	64
3	TESSELAÇÕES	66
3.1	Definição	66
3.2	Tesselações no plano Euclidiano	67
3.2.1	Regulares	67
3.2.2	Semirregulares	68
3.2.3	Demirregulares	68
3.2.4	Irregulares	69
3.2.5	Periódicas	69
3.3	Tesselações no plano hiperbólico	70
3.4	Tesselações no disco de Poincaré	72
3.5	Construção de tesselações com o GeoGebra	76
3.5.1	Tesselação hiperbólica com triângulos	76
3.6	Aplicações	82

4	CONCLUSÕES	83
	REFERÊNCIAS	84
	APÊNDICE	87
	Índice	92

1 INTRODUÇÃO

Apresentamos neste capítulo um resumo histórico do surgimento das geometrias não Euclidianas, abordando as contribuições dos principais matemáticos que estudaram o tema (BARBOSA, 2012; BOYER; MERZBACH, 2011; BURTON, 2011; EVES, 2011; ROONEY, 2012). O resumo histórico é uma revisão do texto de Motta (2018).

1.1 HISTÓRIA DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

A civilização grega cooperou para a divulgação do conhecimento matemático de maneira singular. Muito do que sabemos atualmente sobre a matemática se deve a essa civilização, que nos disponibilizou autores e trabalhos eminentes à filosofia, à arte, à escrita e à ciência durante seus períodos iniciais, especialmente de 300-100 a.C.

Na geometria, destaca-se o matemático Euclides de Alexandria (em torno de 300 a.C.), honrosamente conhecido como "pai da Geometria". Infelizmente, pouco se sabe acerca da vida de Euclides. Contudo, vestígios históricos indicam que ele tenha sido um dos membros da equipe de líderes intelectuais convocados por Ptolomeu I para desenvolver as diversas áreas do saber na então primeira instituição de ensino de nível superior, o *Museu*. Segundo Burton (2011, p. 142):

[...] o Museu foi todavia um marco na história da ciência. Deveria ser um instituto de pesquisa e busca pelo conhecimento, ao invés de educação.

A quantidade e diversidade de manuscritos presentes na instituição Museu era tão grande que sua única concorrente em termos intelectuais era a Biblioteca de Alexandria, visto que na época essa possuía um acervo com aproximadamente 200.000 manuscritos (BURTON, 2011).

Possivelmente, a formação matemática de Euclides esteja relacionada à Escola Platônica de Atenas. Apesar de não se conhecer a data exata de seu nascimento, muito se conhece sobre sua principal obra, *Os elementos* (EUCLIDES, 2009).

A consistência e a coesão que existem na escrita são os principais motivos para haver tantas traduções e reimpressões de *Os elementos*. Escrita há mais de dois mil anos, a obra é considerada uma das mais influentes na matemática: é estudada e está presente de geração a geração, o que permite comparar seu prestígio com o da Bíblia. Apesar de antiga, tamanho são os aspectos lógico-dedutivos e formais de sua escrita e de suas demonstrações que levam Eves (2011, p. 179) a afirmar:

Tão grande foi a impressão causada pelo aspecto formal de *Os Elementos* de Euclides nas gerações seguintes que a obra se tornou um paradigma de demonstração matemática rigorosa.

Euclides desenvolveu e ampliou os estudos envolvendo aritmética e teoria dos números, bem como geometria plana e geometria espacial, estas consagradas e estudadas por gregos que viveram antes dele. Daí se reconhece o valor de Euclides ao se nomear tais geometrias como Euclidianas. Além disso, Burton (2011, p. 145) completa a afirmação anterior de Eves (2011) ao escrever que "o trabalho de Euclides em grande parte permanece como modelo supremo de um livro em matemática pura".

As 465 proposições apresentadas em *Os elementos* estão distribuídas em 13 livros. As proposições geométricas são demonstradas através de cinco postulados¹ e de noções comuns. É evidente que a genialidade de Euclides possa ser vista como surpreendente por ele ter definido de forma tão precisa e consistente as poucas noções e postulados para construir um trabalho repleto de proposições matemáticas.

As noções comuns de Euclides são, segundo a tradução de Bicudo (EUCLIDES, 2009):

1. as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si;
2. e, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais;
3. e, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais;
4. e, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais;
5. e os dobros da mesma coisa são iguais entre si;
6. e as metades da mesma coisa são iguais entre si;
7. e as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si;
8. e o todo é maior do que a parte;
9. e duas retas não contêm uma área.

Em particular, a noção 7 não é comumente aceita pelos matemáticos devido ao fato de que a sobreposição de figuras não justifica rigorosa ou precisamente a demonstração de algum teorema ou proposição. Além disso, a noção 8 pode ser confrontada com um conceito de análise matemática, a cardinalidade ou número de elementos de um conjunto. Exemplificando, o conjunto dos números naturais e o conjunto dos cubos perfeitos têm a mesma cardinalidade, uma vez que há uma função bijetiva da forma:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow M;$$

$$f(x) = x^3;$$

$$M = \{0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, \dots\},$$

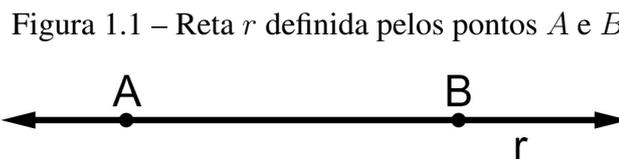
¹ Para a grande maioria dos matemáticos gregos antigos, havia uma distinção entre os termos *axioma* e *postulado*: o primeiro era uma suposição comum, tomada como verdade para toda e qualquer ciência, enquanto o segundo era uma verdade apenas para uma ciência específica em estudo.

que associa a todo número natural um cubo perfeito. Como $M \subset \mathbb{N}$, M é parte de \mathbb{N} . E como \mathbb{N} e M têm a mesma cardinalidade, o todo não é maior do que a parte.

1.1.1 FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Euclides fundamentou sua geometria em cinco postulados. Analisamos inicialmente os quatro primeiros, acompanhados de algumas definições, posto que o quinto foi investigado por diversos matemáticos durante séculos por ser considerado não evidente. O próprio Euclides utilizou o quinto postulado pela primeira vez somente na Proposição I 29 do Livro I de *Os elementos*. A axiomatização da geometria Euclidiana proposta por David Hilbert (1862-1943) na obra *Fundamentos da Geometria* (HILBERT, 2003), publicada em 1899, está fora do escopo desta seção.

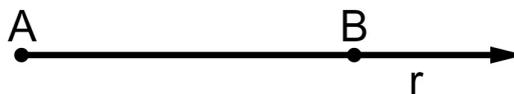
Postulado 1.1. *Dados dois pontos distintos A e B , existe uma única reta r que passa pelos dois pontos - Figura 1.1.*



Fonte: O Autor.

Definição 1.1. *Dados dois pontos distintos A e B , pertencentes a uma reta r , a semirreta AB , denotada por \overrightarrow{AB} , é a parte de r que tem origem no ponto A e que passa pelo ponto B - Figura 1.2.*

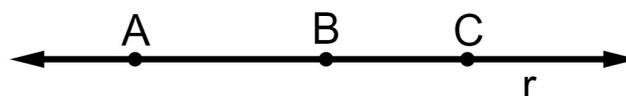
Figura 1.2 – Semirreta com origem em A e que passa por B



Fonte: O Autor.

Definição 1.2. *Sejam A , B e C pontos distintos quaisquer. Se há uma única reta r que passa pelos três pontos, então A , B e C são colineares - Figura 1.3.*

Figura 1.3 – Reta definida pelos pontos colineares A , B e C



Fonte: O Autor.

A Definição 1.2 pode ser estendida para mais do que três pontos.

Definição 1.3. Dados dois pontos distintos A e B , pertencentes a uma reta r , o segmento de reta AB , indicado por \overline{AB} , é a parte de r que tem como extremos os pontos A e B - Figura 1.4.

Figura 1.4 – Segmento de reta \overline{AB}



Fonte: O Autor.

Postulado 1.2. Todo e qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente.

O Postulado 1.2 abrange as Definições 1.1, 1.2 e 1.3.

Definição 1.4. Sejam A , B e C pontos distintos pertencentes a uma reta r . As semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são opostas se a intersecção de ambas for apenas a origem A - Figura 1.5.

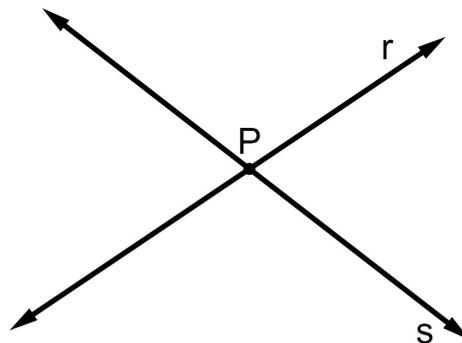
Figura 1.5 – Semirretas opostas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC}



Fonte: O Autor.

Definição 1.5. Se r e s são duas retas distintas com um único ponto P em comum, então r e s são retas concorrentes em P , sendo P o ponto de intersecção de ambas - Figura 1.6.

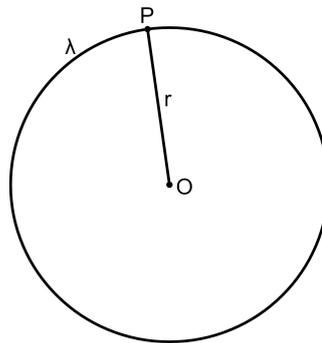
Figura 1.6 – Retas r e s concorrentes em P



Fonte: O Autor.

Definição 1.6. Dado um ponto O qualquer, o conjunto dos pontos P do plano que equidistam uma distância r de O , denominada raio, define uma figura geométrica chamada circunferência - Figura 1.7.

Figura 1.7 – Circunferência λ de centro O e raio $r = \overline{OP}$

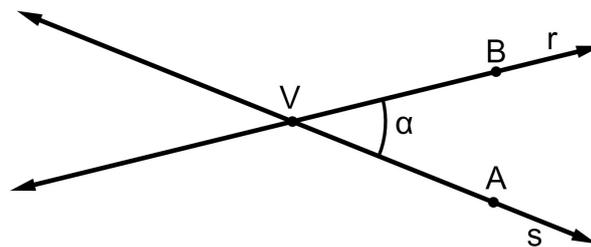


Fonte: O Autor.

Postulado 1.3. *Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.*

Definição 1.7. *Ângulo é a união de duas semirretas \overrightarrow{VA} e \overrightarrow{VB} de mesma origem V com a região α compreendida entre as semirretas.*

Figura 1.8 – Ângulo α determinado pelas semirretas \overrightarrow{VA} e \overrightarrow{VB}

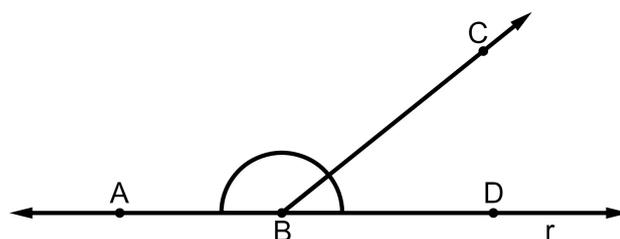


Fonte: O Autor.

Na Figura 1.8, o ponto V é o vértice e $\overrightarrow{VA} \subset r$ e $\overrightarrow{VB} \subset s$ são os lados do ângulo $A\hat{V}B$ (ou $B\hat{V}A$).

Definição 1.8. *Sejam A, B e D pontos pertencentes à reta r e \overrightarrow{BC} uma semirreta concorrente a r em B . O ângulo suplementar a $C\hat{B}D$ é a região determinada pelas semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} , isto é, $A\hat{B}C$ - Figura 1.9.*

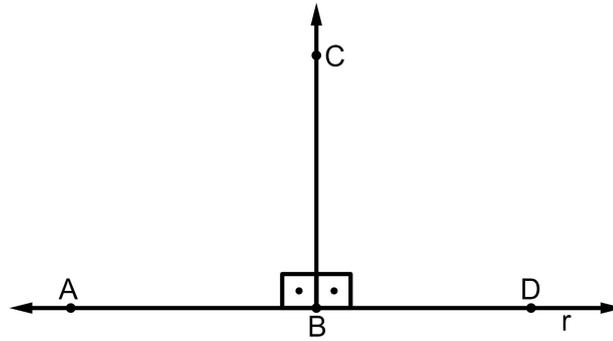
Figura 1.9 – Ângulos suplementares $A\hat{B}C$ e $C\hat{B}D$



Fonte: O Autor.

Definição 1.9. Sejam \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BD} semirretas opostas de origem B e \overrightarrow{BC} uma semirreta concorrente a ambas em B . Se o ângulo suplementar a \widehat{CBD} é congruente a ele, então \widehat{CBD} é um ângulo reto, ou seja, sua medida é 90° - Figura 1.10.

Figura 1.10 – Ângulo reto \widehat{CBD}



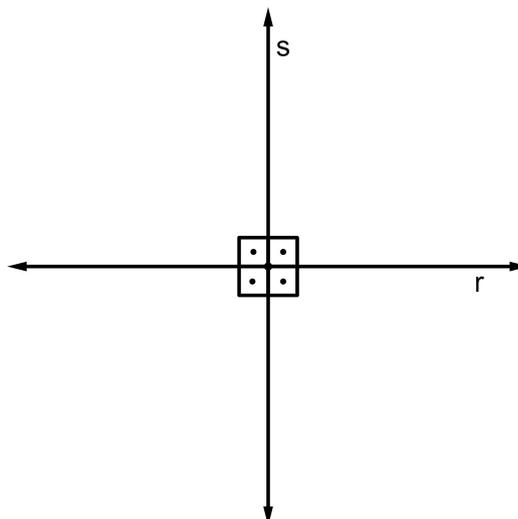
Fonte: O Autor.

Na Figura 1.10, \widehat{CBD} reto implica que \widehat{CBA} também é um ângulo reto.

Postulado 1.4. Todos os ângulos retos são congruentes entre si.

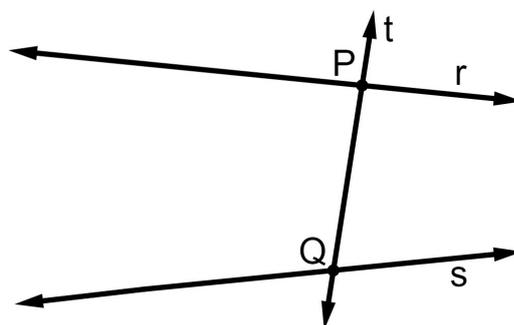
Duas retas r e s concorrentes segundo um ângulo reto, denominadas retas perpendiculares, definem quatro ângulos retos, como mostra a Figura 1.11.

Figura 1.11 – Ângulos retos definidos pelas retas perpendiculares r e s



Fonte: O Autor.

Definição 1.10. Sejam r e s duas retas distintas. Se uma reta t intersecta r e s em dois pontos distintos P e Q , com $P \in r$ e $Q \in s$, então t é transversal a r e s - Figura 1.12.

Figura 1.12 – Reta t transversal às retas r e s 

Fonte: O Autor.

1.1.2 O QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES E AS NOVAS GEOMETRIAS

Postulado 1.5 (das paralelas). *Se uma reta t corta duas outras retas r e s (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores de um mesmo lado de t é menor do que dois retos, então r e s , quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos (CARMO, 1987).*

Em outras palavras, o Postulado 1.5 estabelece que *se duas retas coplanares forem prolongadas indefinidamente e elas não se intersectarem em ponto algum, então elas são paralelas*. John Playfair (1748-1819) estabeleceu uma versão equivalente para o postulado das paralelas (BURTON, 2011): *por um ponto, fora de uma reta dada, apenas uma paralela pode ser traçada em relação à reta dada*². Há outras formas equivalentes para enunciar o quinto postulado (ÁVILA, 1988). Algumas delas são:

1. se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes;
2. a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos;
3. existe um par de retas equidistantes;
4. se três dos ângulos de um quadrilátero convexo são retos, então o quarto ângulo também é reto;
5. por qualquer ponto dentro de um ângulo menor que dois terços de um ângulo reto, pode-se traçar uma reta que corta os dois lados do ângulo.

Contudo, o quinto postulado de Euclides foi considerado controverso por muitos matemáticos. Eves (2011, p. 539) explica:

² A proposição I 31 do Livro I de *Os elementos* garante a existência de uma única paralela passando por um ponto qualquer não pertencente a uma reta dada.

Esse postulado carece da concisão e da compreensibilidade simples dos demais, além de, em hipótese alguma, possuir a característica de ser "autoevidente". Na verdade ele é o recíproco da Proposição I 17 e para os gregos antigos parecia mais uma proposição do que um postulado [...] Assim, era natural ter a curiosidade de saber se esse postulado era realmente necessário e cogitar que talvez ele pudesse ser deduzido, como teorema, dos outros nove "axiomas" e "postulados" ou, pelo menos, ser substituído por um equivalente mais aceitável.

Dentre os matemáticos que tentaram demonstrar o quinto postulado como um teorema citamos: Proclus (412-485), Nasiradin (1201-1274), John Wallis (1616-1703), Girolamo Saccheri (1667-1733), John H. Lambert (1728-1777), Adrien M. Legendre (1752-1833), Louis Bertrand (1731-1812) e Carl F. Gauss (1777-1855). Estes matemáticos deixaram em suas obras referências relevantes sobre o assunto.

Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), ilustrado na Figura 1.13, nasceu na cidade italiana de San Remo. Ele entrou para a ordem dos jesuítas em 1685 e posteriormente se tornou padre em 1694, lecionando filosofia na Universidade de Turim até 1697. A partir daí, foi professor de teologia, matemática e filosofia na Universidade de Pádua, até a sua morte em 1733, mesmo ano em que publicou um livro chamado *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides livre de toda imperfeição) (BIANCONI, 2018; BOYER; MERZBACH, 2011).

No decorrer de sua vida, Saccheri também publicou outros livros, tais como: *Quaesita Geometrica* (1693), uma coleção de problemas de geometria e sua solução; um tratado de lógica, a *Lógica Demonstrativa* (1697), e *Neo-Statica*, um tratamento geométrico de problemas de estática e dinâmica, publicado em 1708.

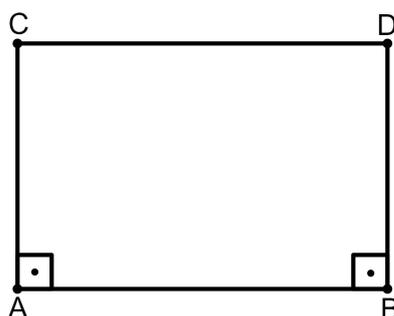
Saccheri fez um esforço elaborado para provar o postulado das paralelas. Por ter lido *Os elementos*, aplicou, ainda quando lecionava no Colégio Jesuíta de Milão, a mesma forma de demonstração que Euclides utilizou, a *reductio ad absurdum*, ou redução ao absurdo (EVES, 2011). Saccheri iniciou seus questionamentos acerca do postulado das paralelas com um quadrilátero $ABCD$, ilustrado na Figura 1.14, hoje conhecido como quadrilátero de Saccheri. Nesse quadrilátero, os lados \overline{AC} e \overline{BD} são congruentes e ambos perpendiculares à base \overline{AB} . Saccheri conjecturou sobre três possibilidades para os ângulos \hat{C} e \hat{D} : (1) a hipótese do ângulo agudo - Figura 1.15(a); (2) a hipótese do ângulo reto - Figura 1.15(b); (3) a hipótese do ângulo obtuso - Figura 1.15(c).

Figura 1.13 – Giovanni Girolamo Saccheri



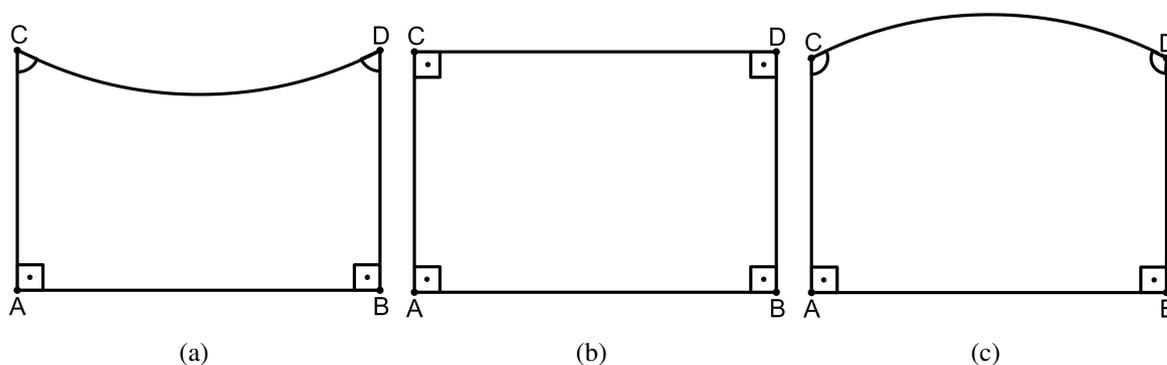
Fonte: Gelfert (2017a).

Figura 1.14 – O quadrilátero de Saccheri



Fonte: O Autor.

Figura 1.15 – O quadrilátero de Saccheri com diferentes hipóteses para os ângulos de topo: (a) ângulo agudo; (b) ângulo reto; (c) ângulo obtuso



Fonte: O Autor.

Segundo Boyer e Merzbach (2011, p. 404), "caso Saccheri conseguisse mostrar que as hipóteses (1) e (3) levavam a absurdos, então ele pensava estabelecer por raciocínio indireto que a hipótese (2) é uma consequência necessária dos postulados de Euclides com o das paralelas excluído". Da hipótese (1), Saccheri derivou teorema após teorema sem encontrar dificuldades. Sabemos agora que ele estava construindo uma geometria não Euclidiana perfeitamente consistente. Porém, Saccheri estava tão completamente convencido de que a geometria de Euclides era a única válida que permitiu que esse preconceito interferisse em sua lógica. Onde não havia contradição ele torceu o raciocínio até pensar que a hipótese (1) levava a um absurdo, concluindo em sua obra "Euclides livre de toda imperfeição"³: "A hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa; porque é repugnante à natureza das linhas retas" (ROONEY, 2012, p. 116). Devido a isso, Saccheri deixou de fazer o que teria sido a descoberta mais importante do século XVIII. Assim, seu nome permaneceu desconhecido por mais de um século, pois a importância de sua obra não foi reconhecida pelos que o seguiram.

O trabalho de Saccheri sobre a hipótese do ângulo agudo tornou-se o prelúdio para a concretização da geometria não Euclidiana que hoje denominamos hiperbólica. Assim, felizmente,

³ Esta obra foi publicada em 1733 em Milão, apenas alguns meses após a sua morte.

a afirmação de Saccheri sobre essa hipótese não colocou um ponto final na história das novas geometrias.

Figura 1.16 – Johann Heinrich Lambert



Fonte: Desciclopedia (2013).

Johann Heinrich Lambert (1728-1777), matemático suíço ilustrado na Figura 1.16, também questionou o quinto postulado de Euclides. Semelhantemente a Saccheri, Lambert iniciou com um quadrilátero, esse com três ângulos retos, assumindo três hipóteses possíveis para o quarto ângulo. Ele analisou, então, a soma dos ângulos internos desse quadrilátero como sendo menor, igual ou maior que quatro ângulos retos. Lambert descartou o caso do ângulo obtuso, associando-o à geometria esférica. Já para o caso do ângulo agudo, ele considerou a possibilidade deste equivaler a uma esfera de raio imaginário (EVES, 2011). Infelizmente, não houve concretização para este caso, assim como na tentativa de Saccheri.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matemático francês ilustrado na Figura 1.17, também tentou desbravar o quinto postulado seguindo hipóteses semelhantes às dos matemáticos anteriores. Novamente, a hipótese do ângulo agudo não foi concretizada, porém tampouco descartada (EVES, 2011). Legendre possivelmente tenha sido o último matemático a não alcançar resultados reveladores, o que tornava o drama das paralelas, gradativamente, uma história sem fim.

Entretanto, conforme menciona Burton (2011, p. 584), a situação foi contornada:

Até um certo ponto, matemáticos começaram a compreender que as constantes falhas na busca por uma prova do problemático postulado não era devido à falta alguma de ingenuidade de suas partes, mas sim à independência do quinto postulado dos outros quatro. Isso significou que seria possível, ao substituir por um axioma contrário sobre paralelas, desenvolver uma geometria companheira à de Euclides, igualmente válida.

E Eves (2011, p. 541) complementa:

[...] a geometria desenvolvida a partir de uma coleção de axiomas compreendendo um conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo agudo é tão consistente quanto a geometria Euclidiana desenvolvida a partir do mesmo conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo reto, isto é, o postulado das paralelas é independente dos demais postulados e devido a isso não pode ser deduzido dos demais.

Figura 1.17 – Adrien Marie-Legendre



Fonte: Gelfert (2017b).

Três matemáticos trataram o quinto postulado como independente dos demais. Mais especificamente, o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1792-1856) e o húngaro János Bolyai (1802-1860). No que se tornou uma espécie de corrida armamentista, esses matemáticos se dedicaram fielmente à tentativa de finalmente resolver as pendências deixadas por Saccheri, Lambert e Legendre, o que resultaria no surgimento de uma nova geometria.

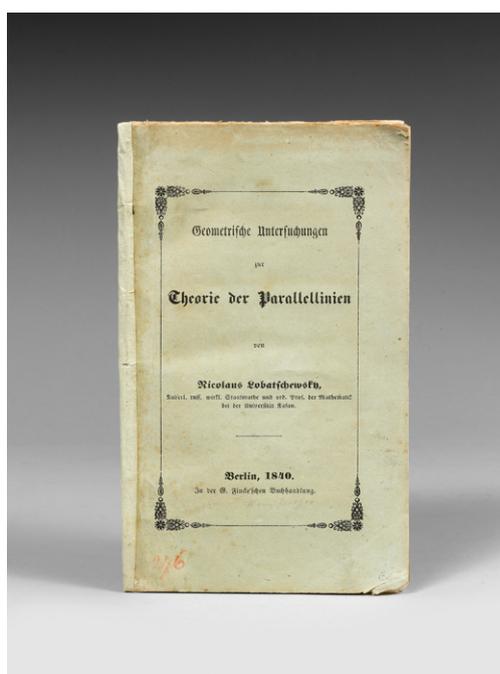
Figura 1.18 – Nicolai Ivanovitch Lobachevsky



Fonte: Wikipédia (2017h).

Certamente Bolyai e Lobachevsky merecem a honra por desenvolverem, principalmente, as consequências lógicas desta nova geometria, visto que publicaram as descobertas de seus trabalhos oficialmente. Em especial Lobachevsky, ilustrado na Figura 1.18, que foi o primeiro a publicar em 1830 uma obra sobre o assunto no boletim da Universidade de Kazan. Contudo, pela dificuldade da disseminação das ideias e pela língua russa ser pouco conhecida pelos matemáticos Europa afora, Lobachevsky decidiu publicar em 1840 seu trabalho em alemão, cuja capa está ilustrada na Figura 1.19, intitulado *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Investigações geométricas sobre a teoria das paralelas) (EVES, 2011).

Figura 1.19 – Investigações geométricas sobre a teoria das paralelas



Fonte: Librairie (2017).

Em 1873, o matemático britânico William Kingdon Clifford (1845-1879) comparou as

descobertas de Lobachevsky com a teoria heliocêntrica proposta por Copérnico no século XVI, causando uma revolução científica. Ele afirmou: "*What Vesalius was to Galen, what Copernicus was to Ptolemy, that was Lobachevsky to Euclid*" ("O que Vesálio foi para Galeno⁴, o que Copérnico foi para Ptolomeu, Lobachevsky foi para Euclides") (BURTON, 2011).

O húngaro János Bolyai, ilustrado na Figura 1.20, filho do grande matemático húngaro Farkas Wolfgang Bolyai (1775-1856), recebeu instruções de seu pai desde a tenra idade, mostrando precocidade para um exímio raciocínio matemático, tanto que substituía seu pai nas aulas que ele lecionava na Universidade de Göttingen. Wolfgang era amigo de longa data de Gauss (EVES, 2011), por terem estudado juntos em Göttingen e desde então terem discussões sobre ideias matemáticas. Assim, pela capacidade e potencialidade na matemática de János Bolyai, Wolfgang tentou enviá-lo em 1816 para receber instruções e treinamento de seu amigo alemão Gauss, mas não obteve resposta a seu pedido, feito através de uma carta. János seguiu então outro caminho, sendo admitido em 1817 na Academia Imperial de Engenharia de Viena, construindo sua reputação na matemática por 10 anos.

Figura 1.20 – János Bolyai



Fonte: Wikipedia (2017g).

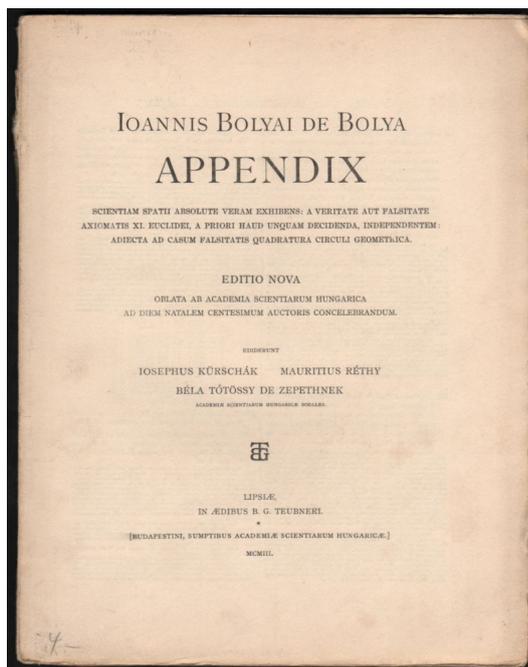
As instruções de Wolfgang não incentivaram János a desenvolver suas ideias sobre o postulado das paralelas, pois quando buscou ajuda de seu pai ao ver a real natureza do problema, este mandou uma carta a ele dizendo:

Não perca tempo com este problema. Não levará a resultado algum; apenas será um veneno para sua vida. . . Acredito que eu já tenha investigado todas as ideias possíveis sobre o assunto (BURTON, 2011, p. 589).

Contudo, isso não impediu o jovem matemático de persistir em novas descobertas. Diversas vezes János enviou suas ideias a seu pai, mas apenas depois, assim como Gauss e Lobachevsky, percebeu o postulado das paralelas como independente dos demais. Contrariamente ao conselho de seu pai, em 1829 avisou-o após suas descobertas: "construí um estranho novo universo". Em resposta, seu pai, surpreendido, aconselhou-o a publicar o trabalho o quanto antes possível, evitando assim que outra pessoa se apropriasse dele. Três anos mais tarde, as descobertas de János apareceram em 24 páginas da obra intitulada *Appendix Scientiam Spatii Absolute Veram Exhibens* (Apêndice explicando a absoluta verdadeira ciência do espaço) (BURTON, 2011), cuja capa está ilustrada na Figura 1.21.

⁴ Aelius Galenus (130-210), médico grego que influenciou o desenvolvimento da anatomia baseada na teoria do humorismo. Essa ideia foi disseminada na Europa até 1543, quando o médico belga Andreas Vesalius (1514-1564) publicou sua obra *De humani corporis fabrica* sobre dissecações humanas.

Figura 1.21 – Apêndice explicando a absoluta verdadeira ciência do espaço



Fonte: Books (2017).

Figura 1.22 – Johann Carl Friedrich Gauss



Fonte: Wikipédia (2017b).

Há indícios de que Gauss, ilustrado na Figura 1.22, tenha sido o primeiro a desenvolver os trabalhos sobre esta nova geometria, antes mesmo de János Bolyai e Lobachevsky, visto que ele era amigo de Wolfgang Bolyai. Suas anotações em diários pessoais sugerem isto também, porém a ausência de qualquer publicação oficial sua sobre o assunto é condição suficiente para considerar isto até os dias de hoje como apenas uma possibilidade (ROONEY, 2012).

Outros quatro grandes matemáticos deram atenção ao postulada das paralelas e contribuíram para o desenvolvimento de novas geometrias. Um deles desenvolveu uma própria, enquanto os outros

três expandiram as ideias de Lobachevsky e Bolyai. Tais matemáticos foram os alemães Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) e Felix Christian Klein (1849-1925), o francês Jules Henri Poincaré (1854-1912) e o italiano Eugenio Beltrami (1835-1900).

A percepção de Riemann, ilustrado na Figura 1.23, foi importante à construção de uma geometria não Euclidiana distinta à de Lobachevsky. Riemann analisou o postulada das paralelas considerando as retas como ilimitadas, e não mais infinitas como nos trabalhos pioneiros. Segundo ele:

Na extensão das construções espaciais para o imensuravelmente grande, devemos fazer a distinção entre o ilimitado e o infinito; o primeiro pertence às relações de grandeza e o segundo, às relações de medida (BURTON, 2011, p. 599).

Figura 1.23 – Georg Friedrich Bernhard Riemann



Fonte: Wikipédia (2017a).

Esta afirmação apareceu pela primeira vez em uma palestra que Riemann proferiu em 1854 sobre sua obra *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sobre as hipóteses que formam a base da geometria). Tal obra é considerada um marco na história da matemática moderna. A noção de ilimitado é fundamental para a compreensão de superfícies esféricas. Assim, a geometria de Riemann se baseou na inexistência de paralelas por um ponto fora de uma reta dada, ideia totalmente oposta à geometria de Lobachevsky, contudo consistente como a geometria de Euclides (BURTON, 2011). A geometria esférica é uma particularidade da geometria de Riemann.

Figura 1.24 – Eugenio Beltrami



Fonte: Wikipédia (2017c).

os atuais denominados *Modelo de Beltrami-Klein*, *Disco de Poincaré* e *Semiplano de Poincaré* (ROONEY, 2012).

Eugenio Beltrami, ilustrado na Figura 1.24, apresentou em sua obra *Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea* (Ensaio sobre a interpretação da geometria não Euclidiana), de 1868, uma prova básica e concreta do que deveria ser, na verdade, um postulado de paralelas. Beltrami deu continuidade às ideias de Lobachevsky, desenvolvendo-as e tornando-as mais consistentes, apresentando a noção do que chamou de pseudoesfera. O trabalho do italiano tornou "real" o que é "imaginário" na geometria de Lobachevsky, matematicamente falando, sendo, como a geometria de Riemann, tão consistente quanto a de Euclides (BURTON, 2011). Além da pseudoesfera, Beltrami desenvolveu os primeiros modelos para

Poincaré, ilustrado na Figura 1.25, considerado o último universalista, contribuiu significativamente à matemática, visto que desenvolveu estudos em quase todas as suas áreas, especialmente equações diferenciais, com uma notória reputação em seu país de origem, a França.

Poincaré nasceu em Nancy, cidade que iria abrigar bom número de grandes matemáticos no século XX. A família conquistou proeminência de várias maneiras: seu primo Raymond

Figura 1.25 – Jules Henri Poincaré



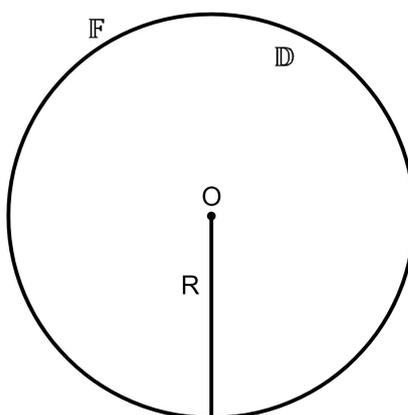
Fonte: Wikipédia (2017e).

foi presidente da França durante a Primeira Grande Guerra. Poincaré era desajeitadamente ambidestro e sua incompetência em exercícios físicos era lendária. Tinha vista fraca e era muito distraído, mas, como Euler e Gauss, tinha notável capacidade para exercícios mentais em todos os aspectos do pensamento matemático. Poincaré graduou-se na École Polytechnique em 1875 e obteve em 1879 um diploma em engenharia de minas, departamento no qual permaneceu pelo resto de sua vida. Em 1879, doutorou-se em ciências matemáticas na Universidade de Paris, onde, até sua morte em 1912, teve vários postos de professor de matemática e ciência (BOYER; MERZBACH, 2011).

Quanto às geometrias não Euclidianas, Poincaré forneceu os modelos denominados *disco de Poincaré* e *semiplano de Poincaré* (BURTON, 2011), especificados nas Definições 1.11 e 1.12.

Definição 1.11. *Seja o plano Euclidiano E . Fixado um ponto O e um valor unitário para o raio R , o disco de Poincaré \mathbb{D} é o conjunto de todos os pontos pertencentes ao plano Euclidiano que são interiores à circunferência \mathbb{F} de centro O e raio unitário, munido de uma métrica hiperbólica, ou seja, de uma definição de distância.*

A Figura 1.26 ilustra o disco de Poincaré.

Figura 1.26 – Disco de Poincaré \mathbb{D} e a fronteira \mathbb{F} 

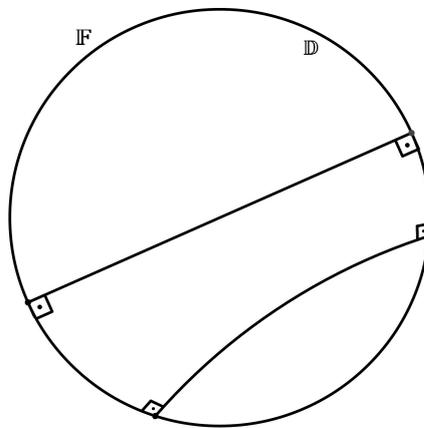
Fonte: O Autor.

Assim, o modelo do disco de Poincaré é o disco \mathbb{D} de centro $O = (0, 0)$ definido pelos pontos z que estão a uma distância de O menor do que a medida do raio unitário ($R = 1$) de \mathbb{D} , isto é,

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}.$$

Os pontos do disco \mathbb{D} são pontos do plano hiperbólico, enquanto os pontos da circunferência \mathbb{F} , denominada horizonte hiperbólico, são pontos ideais. Nesse modelo, os diâmetros de \mathbb{D} e os arcos de circunferência contidos em \mathbb{D} e ortogonais ao horizonte hiperbólico são as retas hiperbólicas, denominadas *d-linhas*, como ilustra a Figura 1.27.

Figura 1.27 – Retas d-linhas no disco de Poincaré e pontos de fronteira

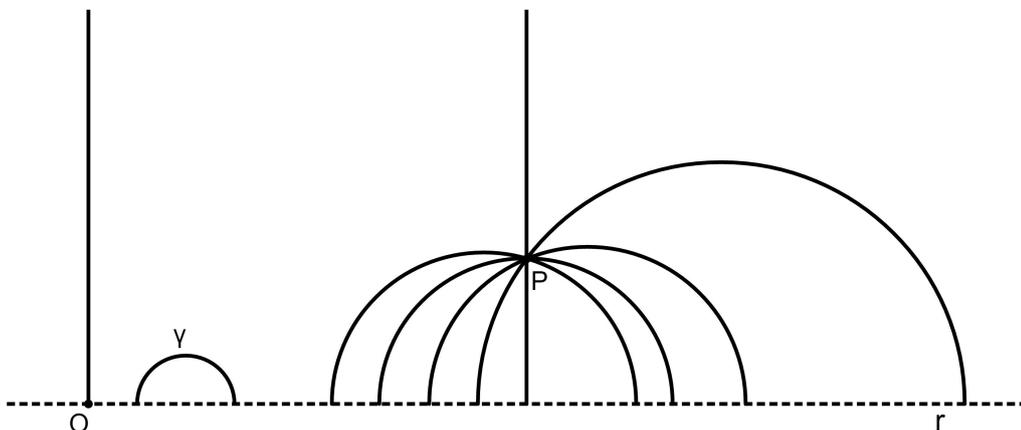


Fonte: O Autor.

Definição 1.12. *Seja o plano Euclidiano E . Fixada uma reta r horizontal no plano, esta divide \mathbb{R}^2 em dois semiplanos. Um destes semiplanos, excluindo-se a reta r e munido de uma métrica hiperbólica, é o semiplano de Poincaré.*

A Figura 1.28 ilustra o semiplano de Poincaré.

Figura 1.28 – Semi-plano de Poincaré



Fonte: O Autor.

Dessa forma, o modelo do semiplano de Poincaré é o conjunto dos pontos \mathbb{H} de \mathbb{R}^2 que estão acima da reta r , ou seja,

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}.$$

Nesse modelo, \mathbb{H} é o plano hiperbólico e uma reta é uma semicircunferência ortogonal à reta r ou um conjunto da forma $\{(x_0, y); y \geq 0\}$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}$.

Figura 1.29 – Felix Christian Klein



Fonte: Wikipédia (2017d).

Klein, ilustrado na Figura 1.29, nasceu em 25 de abril de 1849 na cidade de Dusseldorf, na Alemanha. Filho de Elise Sophie Kayser e de Caspar Klein, oficial do governo, estudou em Dusseldorf até 1865, ano em que foi para Universidade de Bonn para estudar matemática e física. Nessa universidade, tornou-se assistente de Julius Plucker e doutorando-se em 1868 sob a supervisão de Plucker e Rudolf Lipschitz. Em 1870, em Paris, conheceu Sophus Lie, com quem estudou a então recente teoria dos grupos. Pouco depois, regressou à atual Alemanha devido à Guerra Franco-Prussiana, tornando-se professor em Gottingen em 1871. No ano seguinte, Klein obteve um lugar em Erlangen, onde estabeleceu o chamado *Erlanger Programm* (Programa de Erlangen) (RODRIGUES, 2018).

A contribuição de Klein ao desenvolvimento das geometrias não Euclidianas foi a união de teoria de grupos e geometria, como em seu trabalho *Erlanger Programm*, de 1872. A disseminação das ideias dessas novas geometrias ocorreu, principalmente, ao publicar duas monografias *Über die Sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (Sobre a chamada geometria não Euclidiana), em 1871 e 1873 (BURTON, 2011).

Klein também nomeou as novas geometrias como são conhecidas atualmente: à de Lobachevsky, *geometria hiperbólica* e à de Riemann, *geometria elíptica*. Denominou também a geometria Euclidiana como *geometria parabólica* (EVES, 2011).

Figura 1.30 – Hermann Minkowski



Fonte: Wikipédia (2017f).

Além dessas três, há outras geometrias não Euclidianas. No final do século XIX, Herman Minkowski (1864-1909), ilustrado na Figura 1.30, matemático alemão conhecido por trabalhos sobre geometria e teoria dos números, desenvolveu a *geometria do taxista* (ou do táxi), na qual a noção de distância entre dois pontos não é a mesma da geometria de Euclides (BURTON, 2011).

Nessa geometria, as retas têm direção e orientação apenas vertical ou horizontal. Assim, não há segmentos de reta oblíquos. Um fato curioso da geometria do taxista é que o valor

similar à constante π é um número racional igual a 4, diferentemente do valor irracional na geometria Euclidiana.

1.2 JUSTIFICATIVA

A geometria Euclidiana não é suficiente para explicar o nosso mundo, muito menos o universo que o cerca. Assim, o estudo de geometrias não Euclidianas no plano e no espaço tridimensional é um tema pertinente à formação do professor de matemática.

Ainda, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática da Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED) estabelecem parâmetros para o ensino de geometrias não Euclidianas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

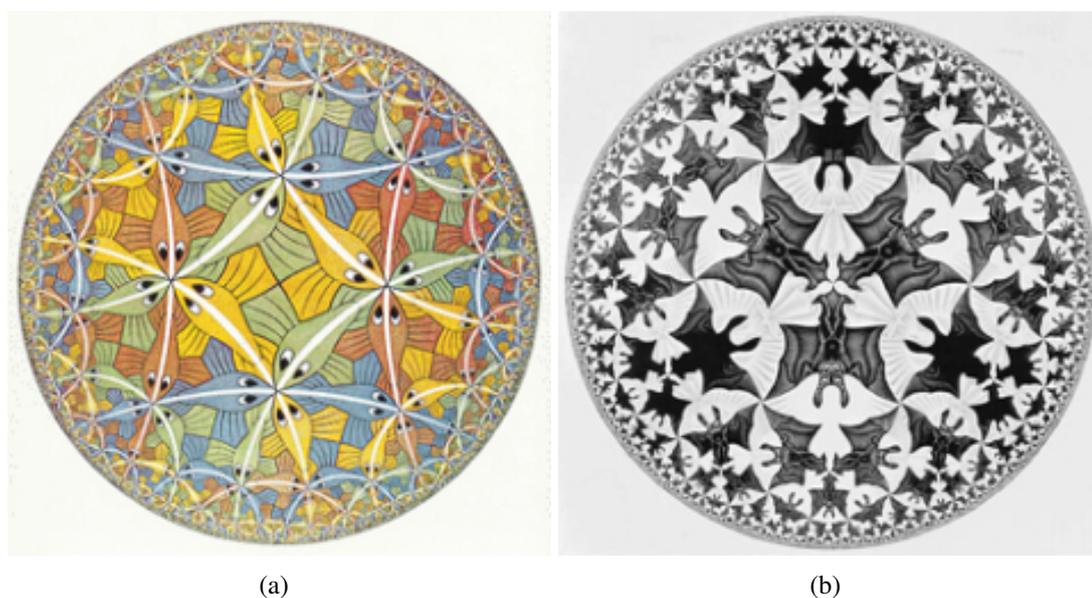
O Conteúdo Estruturante Geometrias, no Ensino Fundamental, tem o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos para, então, representá-lo. Neste nível de ensino, o aluno deve compreender: noções de geometrias não Euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais (PARANÁ, 2008, p. 56).

[...] Também, no Ensino Médio, aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não Euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica. [...] Para abordar os conceitos elementares da geometria hiperbólica, uma possibilidade é através do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudoesfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos). Já na apresentação da geometria elíptica, fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésia; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto à medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: polos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (PARANÁ, 2008, p. 57).

Infelizmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) não estabelece parâmetros para o ensino de geometrias não Euclidianas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Dessa forma, as diretrizes da SEED para o ensino de geometrias não Euclidianas na Educação Básica no Estado do Paraná e também a pequena quantidade de referências em português abordando geometrias hiperbólicas no plano nos motivaram a pesquisar sobre o tema. Além disso, o mesmo permite explorar aplicações interessantes nas obras de Escher (Maurits Cornelis Escher (1898-1972): artista gráfico holandês) (ESCHER, 2019). A Figura 1.31 ilustra duas obras de Escher.

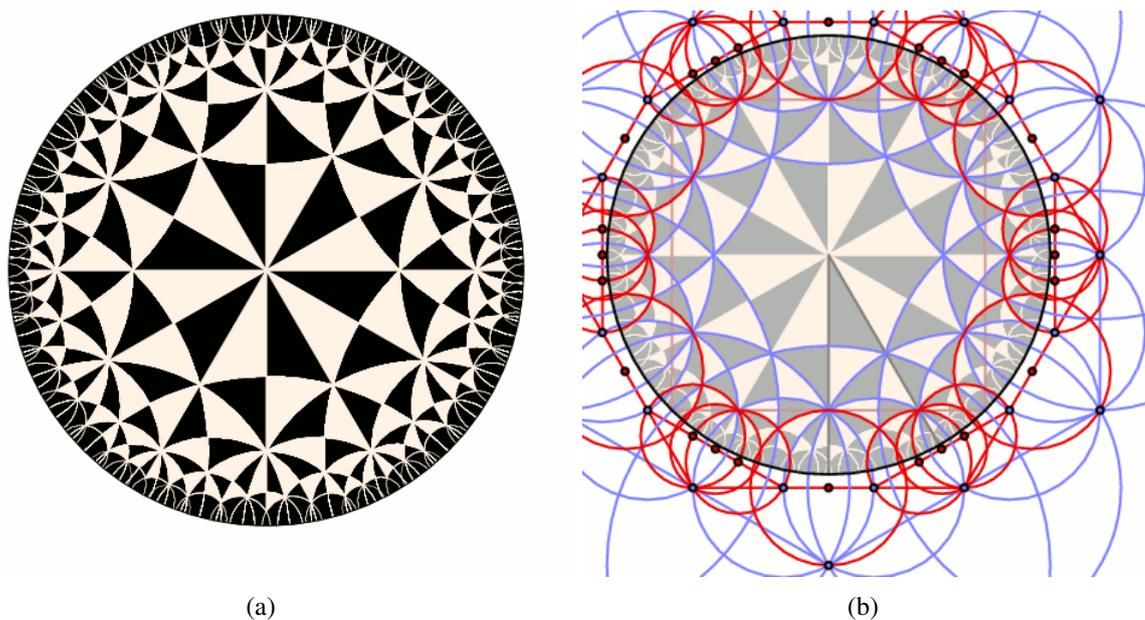
Figura 1.31 – Obras de Escher: (a) Círculo Limitado III; (b) Círculo Limitado IV (*Heaven and Hell*)



Fonte: ECO/UFRJ (2013).

Uma dessas aplicações consiste na identificação dos elementos do disco de Poincaré na construção de tesselações⁵, como o círculo limitado ilustrado na Figura 1.32.

Figura 1.32 – Tesselação: (a) círculo limitado; (b) elementos de geometria hiperbólica dos modelos de Poincaré no plano



Fonte: AMS (2010).

⁵ Recobrimento de uma superfície bidimensional com uma ou mais formas geométricas que se repetem, sem sobreposições e sem espaços entre elas.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GERAL

Complementar o trabalho de Motta (2018) elaborando um texto introdutório sobre um dos modelos de geometria hiperbólica no plano propostos por Poincaré, o disco de Poincaré, que possa ser utilizado na disciplina Geometria B do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Câmpus Curitiba.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar algumas aplicações das geometrias hiperbólicas no plano.
- Organizar material didático para os professores de matemática da Educação Básica e para os estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática.
- Explorar softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, na construção de figuras geométricas bidimensionais e de tesselações.
- Contribuir à organização de um livro sobre geometrias hiperbólicas no plano e geometria esférica.

1.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os procedimentos metodológicos que adotamos são os seguintes:

- estudo da história das geometrias não Euclidianas (BOYER; MERZBACH, 2011; BURTON, 2011; EVES, 2011; ROONEY, 2012);
- estudo do modelo do disco de Poincaré (ANDRADE, 2013; BRANNAN; ESPLIN; GRAY, 2012; DORIA, 2019);
- emprego de um software de geometria dinâmica, como o GeoGebra (GEOGEBRA, 2021), para construir figuras geométricas planas;
- elaboração de material didático;
- uso do overleaf para a escrita do texto em latex (OVERLEAF, 2019).

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está organizado em quatro capítulos e um apêndice: no primeiro capítulo, apresentamos a justificativa, os objetivos, os procedimentos metodológicos e dissertamos sobre a história das geometrias não Euclidianas, enfatizando o problema que originou as mesmas; no

segundo capítulo, discorreremos sobre o disco de Poincaré, um modelo de geometria hiperbólica no plano, comparando conceitos e relações nessa geometria com a geometria Euclidiana; no terceiro capítulo, construímos tesselações no disco de Poincaré empregando o GeoGebra; no quarto capítulo, fazemos as considerações finais; no apêndice, complementamos o referencial teórico pertinente ao segundo capítulo.

2 O MODELO DO DISCO DE POINCARÉ

Apresentamos neste capítulo o disco de Poincaré, um modelo de geometria hiperbólica no plano, e discutimos nele conceitos e relações geométricas, tais como a distância entre dois pontos, o paralelismo de retas, a soma dos ângulos internos, a área de um triângulo e o teorema de Pitágoras. Nossas referências neste capítulo são *Geometry* (BRANNAN; ESPLÉN; GRAY, 2012) e *Introdução à geometria hiperbólica - o modelo de Poincaré* (ANDRADE, 2013), e, no desenvolvimento do mesmo, os teoremas são acompanhados de suas respectivas demonstrações, as quais exigem transformações hiperbólicas e conceitos preliminares.

A geometria Euclidiana está fundamentada em cinco postulados, sendo o quinto postulado de Euclides o postulado das paralelas.

Postulado 2.1 (Postulado das paralelas - Versão equivalente de Playfair¹). *Dados uma reta l e um ponto P que não pertence à l , há uma única reta m que passa por P e é paralela à l .*

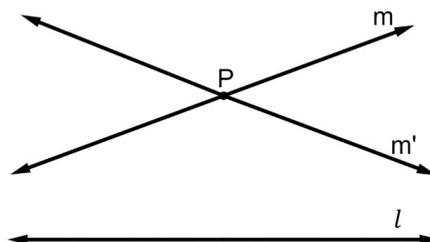
As geometrias não Euclidianas, como a geometria hiperbólica e a geometria elíptica, da qual a geometria esférica é um caso particular, são oriundas da negação do Postulado 2.1. Lobachevsky, que aprofundou os trabalhos desenvolvidos por Saccheri, foi o primeiro a publicar oficialmente seus resultados sobre uma geometria não Euclidiana, sendo considerado, juntamente com János Bolyai, “pai” da geometria hiperbólica.

Na geometria hiperbólica, derivada do caso do ângulo agudo no quadrado de Saccheri, o Postulado 2.1 é substituído pelo Postulado 2.2, também denominado postulado de Lobachevsky ou postulado hiperbólico das paralelas.

Postulado 2.2 (Hiperbólico das paralelas). *Dados uma reta l e um ponto P que não pertence à l , há pelo menos duas retas m que passam por P e são paralelas à l .*

A Figura 2.1 ilustra a concepção do Postulado 2.2.

Figura 2.1 – Postulado das paralelas na geometria hiperbólica



Fonte: O Autor.

¹ A prova da versão equivalente de Playfair pode ser encontrada em Ávila (1988).

Na geometria Euclidiana, o Postulado 2.1 permite estabelecer que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Na geometria hiperbólica, esse resultado precisa ser revisto.

Há vários modelos para a geometria hiperbólica, como, por exemplo, o modelo em três dimensões (a pseudoesfera) de Beltrami, e os modelos de Klein e de Poincaré, ambos no plano. Na sequência, analisamos, de maneira introdutória, conceitos e relações na geometria hiperbólica através de um dos modelos idealizados pelo matemático francês Henri Poincaré: o disco de Poincaré.

2.1 O DISCO DE POINCARÉ

Este modelo de geometria hiperbólica é representado em uma região do plano delimitada por uma circunferência (disco) unitária, munida de uma métrica hiperbólica. Mais especificamente, o modelo é o disco \mathbb{D} , de centro $O = (0, 0)$, definido pelos pontos $z \in \mathbb{C}$ que estão a uma distância de O menor do que a medida do raio unitário ($R = 1$) de \mathbb{D} , isto é,

$$\mathbb{D} = \{z; |z| < 1\}, \quad (2.1)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}.$$

No disco unitário (2.1), os pontos que equidistam de $O = (0, 0)$, ou seja, que estão a uma distância unitária de O , constituem os pontos da fronteira \mathbb{F} de \mathbb{D} . Estes pontos são denominados *pontos ideais* ou *pontos assintóticos*. Assim:

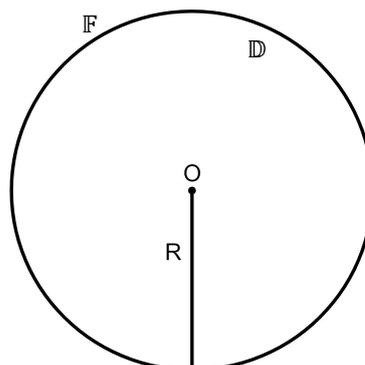
$$\mathbb{F} = \{z; |z| = 1\}, \quad (2.2)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbb{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}.$$

A Figura 2.2 ilustra o disco de Poincaré \mathbb{D} e sua fronteira \mathbb{F} .

Figura 2.2 – Disco de Poincaré \mathbb{D} e a fronteira \mathbb{F}



Fonte: O Autor.

O conjunto dos pontos de fronteira (2.2) de \mathbb{D} é uma circunferência unitária de centro $O = (0, 0)$. No disco de Poincaré, os pontos da fronteira \mathbb{F} estão no infinito.

Estabelecida a concepção do modelo de geometria hiperbólica, precisamos agora definir o que é uma reta nessa geometria.

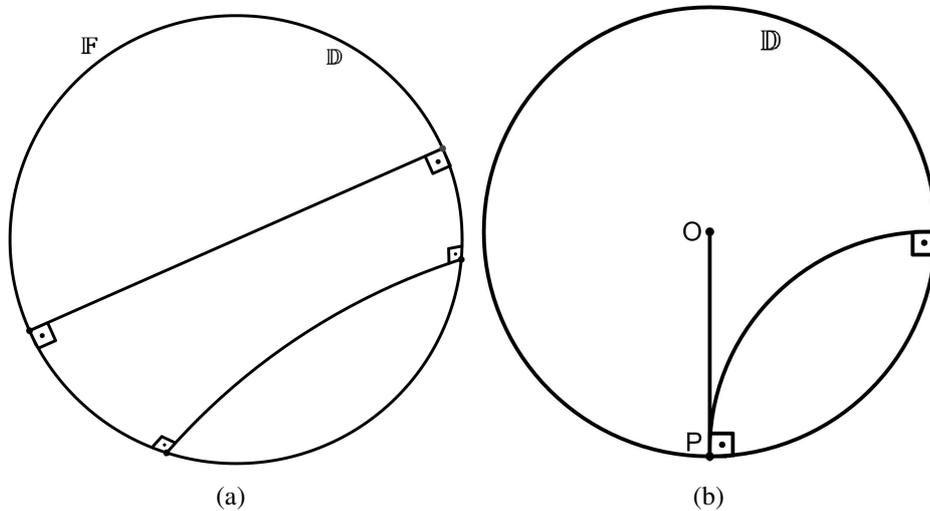
2.2 A RETA HIPERBÓLICA

No modelo do disco de Poincaré, algumas retas são curvilíneas (arcos de circunferências), enquanto outras são segmentos de reta Euclidianos. Essas retas são denominadas *geodésicas* ou *d-linhas*.

Definição 2.1. *Uma d-linha é uma parte de uma circunferência Euclidiana contida no disco \mathbb{D} e que intersecta a fronteira \mathbb{F} de \mathbb{D} em dois pontos distintos, determinando nesses pontos de fronteira dois ângulos retos.*

Segundo a Definição 2.1, todo diâmetro de \mathbb{D} , um segmento de reta Euclidiano, também é uma d-linha. A Figura 2.3(a) ilustra d-linhas no disco de Poincaré.

Figura 2.3 – (a) Retas d-linhas no disco de Poincaré e pontos de fronteira; (b) raio OP , tangente em P a uma d-linha no disco de Poincaré



Fonte: O Autor.

Toda d-linha, distinta de um diâmetro de \mathbb{D} , não passa pelo centro O de \mathbb{D} . Se essa d-linha tem um extremo em P , então ela é tangente ao raio OP de \mathbb{D} em P , como ilustra a Figura 2.3(b).

As d-linhas no disco de Poincaré podem ser descritas analiticamente. De acordo com Brannan et al. (2012), há duas equações para descrevê-las.

Teorema 2.1. *Se l é uma d-linha de \mathbb{D} , então l é descrita por*

$$ax + by = 0, \text{ com } a, b \neq 0, \quad (2.3)$$

ou por

$$x^2 + y^2 + fx + gy + 1 = 0, \quad \text{com } f^2 + g^2 > 4, \quad (2.4)$$

onde $a, b, f, g \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja \mathbb{D} o disco de Poincaré, de centro O . Se l é parte de uma reta Euclidiana que passa pelo centro de \mathbb{D} , temos que a sua equação é da forma

$$ax + by = 0, \quad \text{onde } a, b \neq 0.$$

A outra possibilidade é que l seja parte de uma circunferência Euclidiana C que intersecta a fronteira \mathbb{F} de \mathbb{D} segundo ângulos retos. Assim, a equação de C tem a forma

$$x^2 + y^2 + fx + gy + h = 0,$$

sendo $f, g, h \in \mathbb{R}$.

Inicialmente, segue do teste da Ortogonalidade (Apêndice) que a circunferência com equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$ é ortogonal a \mathbb{D} se, e somente se,

$$f \cdot 0 + g \cdot 0 = 2(h + (-1)) \Rightarrow 0 = 2h - 2 \Rightarrow h = 1.$$

Portanto, a equação de C tem a forma

$$x^2 + y^2 + fx + gy + 1 = 0,$$

para algum f e g .

Ademais, o centro $\left(-\frac{f}{2}, -\frac{g}{2}\right)$ de C não pertence a \mathbb{D} . Logo:

$$\left(-\frac{f}{2}\right)^2 + \left(-\frac{g}{2}\right)^2 > 1 \Rightarrow \frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4} > 1 \Rightarrow f^2 + g^2 > 4.$$

Finalmente, para determinar C é preciso que

$$1 + r > d(C, O), \quad (2.5)$$

sendo r o raio de C .

Para $h = 1$, podemos escrever (2.5) como sendo:

$$1 + \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4} - 1} > \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4}}. \quad (2.6)$$

Considerando $\frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4} = t$ e sabendo que $\sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4}} > 1$, podemos reescrever (2.6) como:

$$1 + \sqrt{t - 1} > \sqrt{t},$$

sempre que $t > 1$.

Seja então $F(t) = 1 + \sqrt{t-1} - \sqrt{t}$. Desta forma, temos que:

$$F(1) = 1 + \sqrt{0} - 1 = 0. \quad (2.7)$$

Derivando $F(t)$, obtemos:

$$F'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t-1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t-1}}{2\sqrt{t-1}\sqrt{t}} > 0, \quad (2.8)$$

pois $t > 1$.

De (2.7) e (2.8), decorre que $F(t) > F(1) = 0$, para $t > 1$, e, portanto, a desigualdade (2.6) é verdadeira.

□

A equação (2.3) descreve um diâmetro de \mathbb{D} ; a equação (2.4), um arco de circunferência Euclidiana.

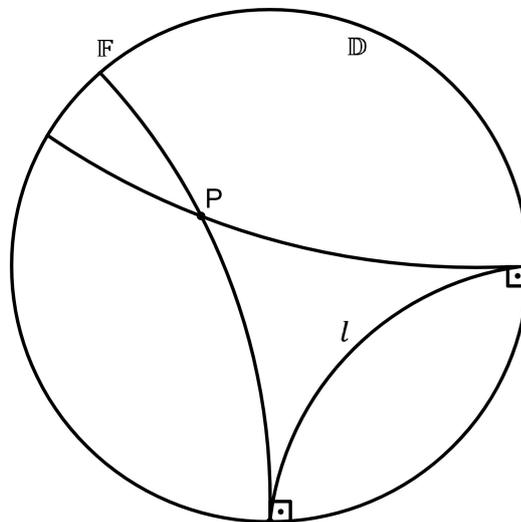
Caracterizada a reta no disco de Poincaré, precisamos agora estabelecer a condição para o paralelismo de retas.

2.3 PARALELISMO

Definição 2.2. *Duas d-linhas são paralelas se não se intersectam em \mathbb{D} e se as circunferências Euclidianas das quais são uma parte se intersectam em um ponto de \mathbb{F} .*

A Figura 2.4 ilustra duas retas paralelas à reta l no disco de Poincaré.

Figura 2.4 – Retas paralelas à d-linha l no disco de Poincaré

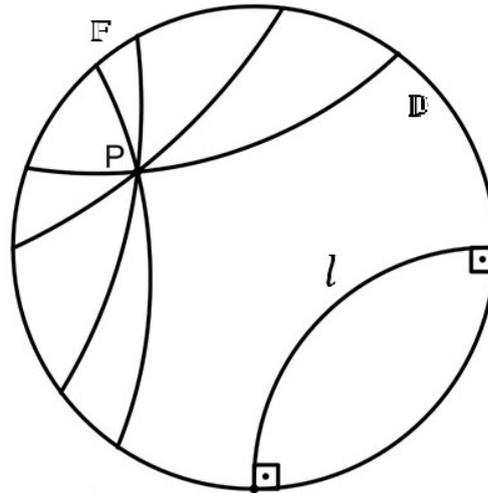


Fonte: O Autor.

Definição 2.3. Duas d -linhas são ultraparalelas se não se intersectam em \mathbb{D} e se as circunferências Euclidianas das quais são uma parte não se intersectam em \mathbb{F} .

A Figura 2.5 ilustra ultraparalelas à d -linha l , que passam pelo ponto P , no disco de Poincaré.

Figura 2.5 – Retas ultraparalelas à d -linha l no disco de Poincaré



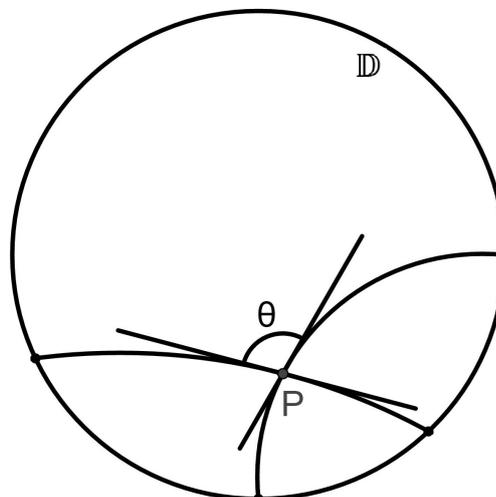
Fonte: O Autor.

Duas d -linhas não paralelas determinam um ângulo quando se intersectam.

Definição 2.4. O ângulo hiperbólico entre duas d -linhas distintas que se intersectam no ponto $P \in \mathbb{D}$ é o ângulo Euclidiano θ determinado pelas tangentes às d -linhas em P .

A Figura 2.6 mostra o ângulo θ determinado por duas d -linhas que se intersectam.

Figura 2.6 – Ângulo θ entre duas d -linhas que se intersectam no ponto P no disco de Poincaré



Fonte: O Autor.

2.4 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Na geometria Euclidiana, por um ponto passam infinitas retas, e há uma única reta que passa por dois pontos distintos (postulado de determinação). No disco de Poincaré, essas noções permanecem.

Teorema 2.2. *Se P é um ponto pertencente a \mathbb{D} , então há infinitas d-linhas que passam por P .*

Demonstração. Se P é o centro de \mathbb{D} , cada um dos infinitos diâmetros de \mathbb{D} passa pelo centro, e cada um desses diâmetros é uma d-linha.

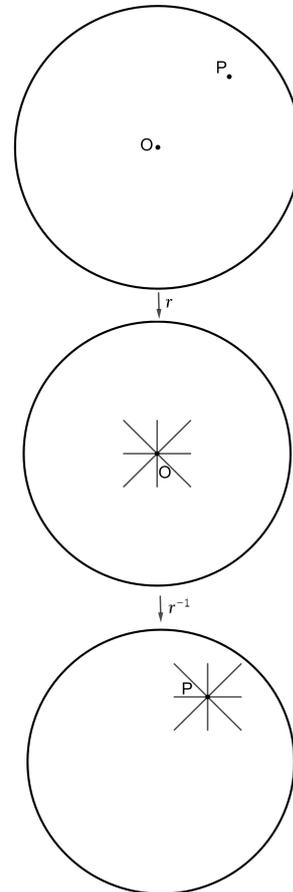
Se P não é o centro O de \mathbb{D} , então pelo lema da Origem (Apêndice) há uma transformação hiperbólica r que mapeia P até O , no qual passam infinitas d-linhas, todas diâmetros de \mathbb{D} .

Como r^{-1} também é uma transformação hiperbólica, segue que as imagens desses diâmetros também são d-linhas e passam por P . A Figura 2.7 ilustra as transformações hiperbólicas r e r^{-1} .

□

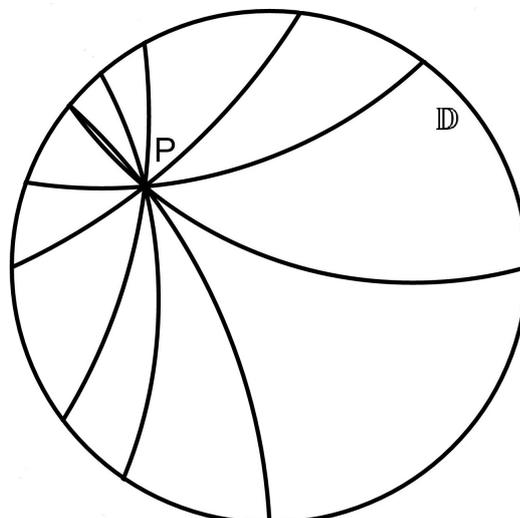
A Figura 2.8 mostra várias d-linhas que passam por $P \in \mathbb{D}$.

Figura 2.7 – Mapeamento 1



Fonte: O Autor.

Figura 2.8 – Retas d-linhas que passam pelo ponto P no disco de Poincaré



Fonte: O Autor.

Analizamos agora o equivalente do postulado de determinação Euclidiano no disco de Poincaré.

O Teorema 2.3 estabelece essa equivalência.

Teorema 2.3. *Se P e Q são dois pontos distintos pertencentes a \mathbb{D} , então existe uma única d-linha que passa por P e Q .*

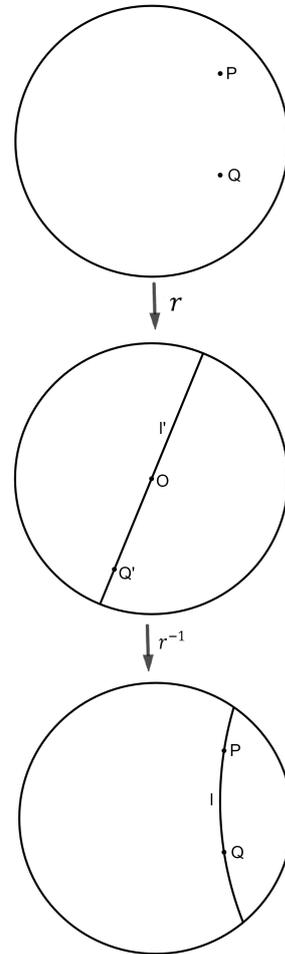
Demonstração. (Existência) Pelo lema da Origem (Apêndice), há uma transformação hiperbólica r que mapeia P até o centro O de \mathbb{D} . Assim, seja o ponto Q' a imagem de Q sob r em \mathbb{D} .

Há uma única d-linha l' (um diâmetro de \mathbb{D}) que passa por O e Q' . Como r^{-1} também é uma transformação hiperbólica, segue que $l = r^{-1}(l')$ também é uma d-linha e passa por P e Q .

(Unicidade) Suponha que l_1 seja outra d-linha que passa por P e Q . Então, $r(l_1)$ é uma d-linha que passa por O e Q' . Segue que $r(l_1) = l'$. Logo, $l_1 = r^{-1}(l_1) = l$. A Figura 2.9 ilustra as transformações hiperbólicas r e r^{-1} (BRANNAN; ESPLÉN; GRAY, 2012).

□

Figura 2.9 – Mapeamento 2



Fonte: O Autor.

Precisamos agora determinar a distância entre dois pontos distintos que definem uma única d-linha em \mathbb{D} . Para tanto, devemos considerar \mathbb{D} no plano complexo, ou seja, $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, onde \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos. Neste conjunto, um número z é representado na forma algébrica como sendo $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a = \text{Re}(z)$ é a parte real de z , $b = \text{Im}(z)$ é a parte imaginária de z , $i = \sqrt{-1}$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo de z e $\bar{z} = a - bi$ é o conjugado de z . Dessa forma, a distância Euclidiana d entre dois pontos complexos distintos (PALIOURAS, 1975) $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é dada por:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = d(\bar{z}_1, \bar{z}_2). \quad (2.9)$$

No disco de Poincaré, a distância (2.9) é definida por uma transformação hiperbólica.

Definição 2.5. *A distância hiperbólica $d(z_1, z_2)$ entre os pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ é dada por*

$$d(z_1, z_2) = \tanh^{-1} \left(\left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| \right), \quad (2.10)$$

onde \tanh é a função tangente hiperbólica definida por $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$, sendo $\sinh x$ e $\cosh x$ as funções seno e cosseno hiperbólicos, respectivamente, no conjunto dos números reais.

Na Definição 2.5, se um dos pontos for a origem do plano complexo, como por exemplo $z_1 = 0$, então a distância $d(z_1, z_2)$ é dada por $d(0, z_2) = \tanh^{-1}(|z_2|)$.

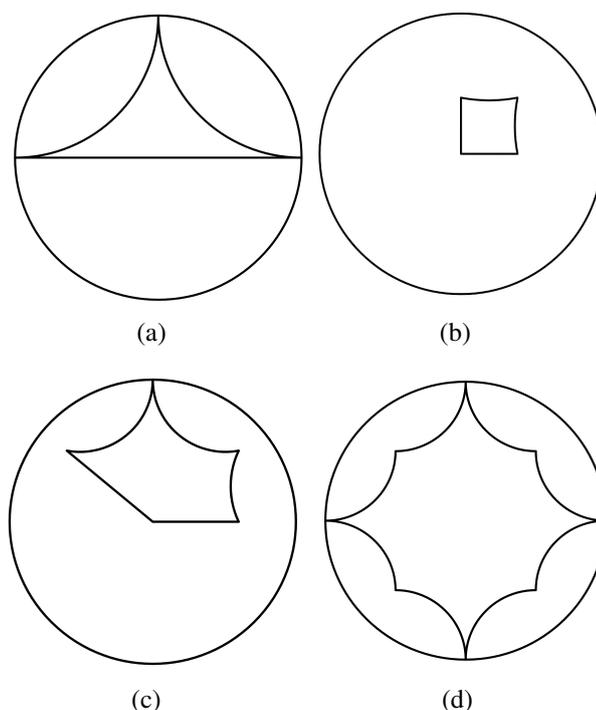
A distância entre dois pontos distintos de \mathbb{D} define a medida do lado de um polígono contido em \mathbb{D} . Essa medida é importante à caracterização de triângulos hiperbólicos, denominados *d-triângulos*, e à determinação da soma dos ângulos internos desses triângulos.

2.5 POLÍGONOS HIPERBÓLICOS

Definição 2.6. Um polígono hiperbólico é uma região aberta de \mathbb{D} limitada por um número finito de segmentos geodésicos (partes de *d-linhas*), denominados lados. Um polígono hiperbólico é denominado *ideal* se todos os vértices pertencem à fronteira \mathbb{F} de \mathbb{D} ; é denominado *regular* se todos os lados hiperbólicos são congruentes.

A Figura 2.10 ilustra alguns polígonos hiperbólicos no disco de Poincaré.

Figura 2.10 – Polígonos hiperbólicos no disco de Poincaré: (a) *d*-triângulo ideal; (b) *d*-quadrilátero; (c) *d*-pentágono; (d) *d*-octógono



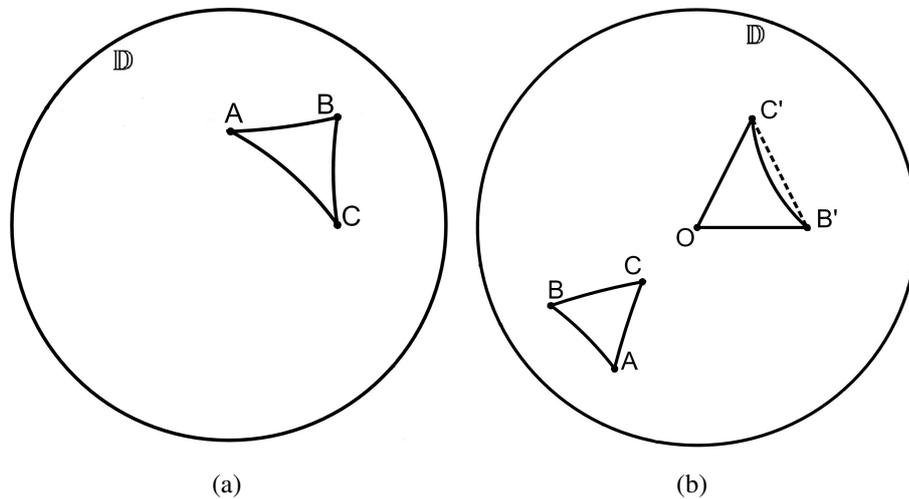
Fonte: O Autor.

2.6 SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM D-TRIÂNGULO

Definição 2.7. Um triângulo hiperbólico ou um d -triângulo é uma região aberta de \mathbb{D} limitada por três segmentos geodésicos (partes de d -linhas).

Segundo a Definição 2.7, um triângulo hiperbólico ou um d -triângulo é determinado por três pontos distintos de \mathbb{D} que não pertencem simultaneamente à mesma d -linha. Esses três pontos, os vértices do d -triângulo, definem, dois a dois, três arcos de circunferências Euclidianas, os quais têm, dois a dois, um extremo comum. Esses arcos são os lados do d -triângulo. A Figura 2.11(a) ilustra um d -triângulo no disco de Poincaré.

Figura 2.11 – (a) Triângulo hiperbólico ABC no disco de Poincaré; (b) triângulo hiperbólico ABC e triângulo Euclidiano $OB'C'$



Fonte: O Autor.

Teorema 2.4. A soma dos ângulos internos de um d -triângulo é menor do que π .

Demonstração. Pelo lema da Origem (Apêndice), podemos mapear o d -triângulo ABC em um d -triângulo $OB'C'$ por qualquer transformação hiperbólica que leve A ao centro O de \mathbb{D} . Como as transformações hiperbólicas preservam ângulos, as somas dos ângulos dos dois d -triângulos são iguais.

Assim, OB' e OC' são segmentos de reta Euclidianos, enquanto $B'C'$ é um segmento geodésico, ou seja, é um arco de uma circunferência Euclidiana. Logo, os ângulos em B' e C' do d -triângulo $OB'C'$ são menores que os ângulos correspondentes do triângulo Euclidiano $OB'C'$, e os ângulos de ambos os triângulos em O são iguais, como ilustra a Figura 2.11(b).

Como a soma dos ângulos do triângulo Euclidiano $OB'C'$ é π , segue que a soma dos ângulos do d -triângulo $OB'C'$ é (estritamente) menor do que π .

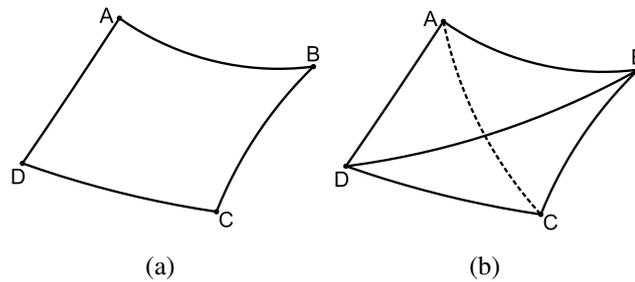
□

O Teorema 2.4 nos possibilita provar outros teoremas, como a soma dos ângulos internos de um d-quadrilátero contido em \mathbb{D} .

Teorema 2.5. *A soma dos ângulos internos de um d-quadrilátero é menor do que 2π .*

Demonstração. Todo d-quadrilátero pode ser dividido em dois d-triângulos (não sobrepostos) por qualquer uma das duas d-linhas que passam por vértices alternados - Teorema 2.3, como ilustra a Figura 2.12.

Figura 2.12 – (a) D-quadrilátero $ABCD$; (b) d-triângulos provenientes da divisão do d-quadrilátero



Fonte: O Autor.

Como a soma dos ângulos de cada um dos d-triângulos é menor do que π , e os dois d-triângulos compõem o d-quadrilátero, disto resulta que a soma dos ângulos do d-quadrilátero é menor do que 2π .

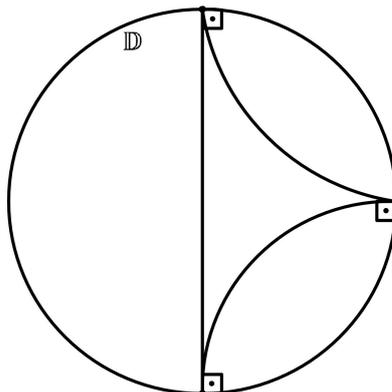
□

2.7 ÁREA DE UM D-TRIÂNGULO

Definição 2.8. *Um d-triângulo é ideal ou triplamente assintótico quando seus três vértices pertencem à fronteira \mathbb{F} de \mathbb{D} .*

A Figura 2.13 mostra um d-triângulo triplamente assintótico em \mathbb{D} .

Figura 2.13 – Triângulo triplamente assintótico no disco de Poincaré



Fonte: O Autor.

Podemos demonstrar que todos os triângulos triplamente assintóticos em \mathbb{D} são congruentes. Essa propriedade é demonstrada no Teorema 2.6.

Teorema 2.6. *Todos os d-triângulos triplamente assintóticos são congruentes entre si.*

Demonstração. É suficiente provar que d-triângulos triplamente assintóticos são congruentes ao d-triângulo triplamente assintótico com vértices em $-1, 1$ e i .

Assim, seja ABC um d-triângulo triplamente assintótico qualquer, onde, por conveniência, assumimos que os vértices A, C e B estão no sentido horário em \mathbb{F} . Sejam ainda: l a d-linha AB ; D um ponto qualquer de l em \mathbb{D} .

Pelo lema da Origem (Apêndice), podemos mapear \mathbb{D} em si mesmo e D no centro O de \mathbb{D} por uma transformação de Möbius² M_1 . Segue que M_1 mapeia AB em um diâmetro de \mathbb{D} , como ilustra a Figura 2.14.

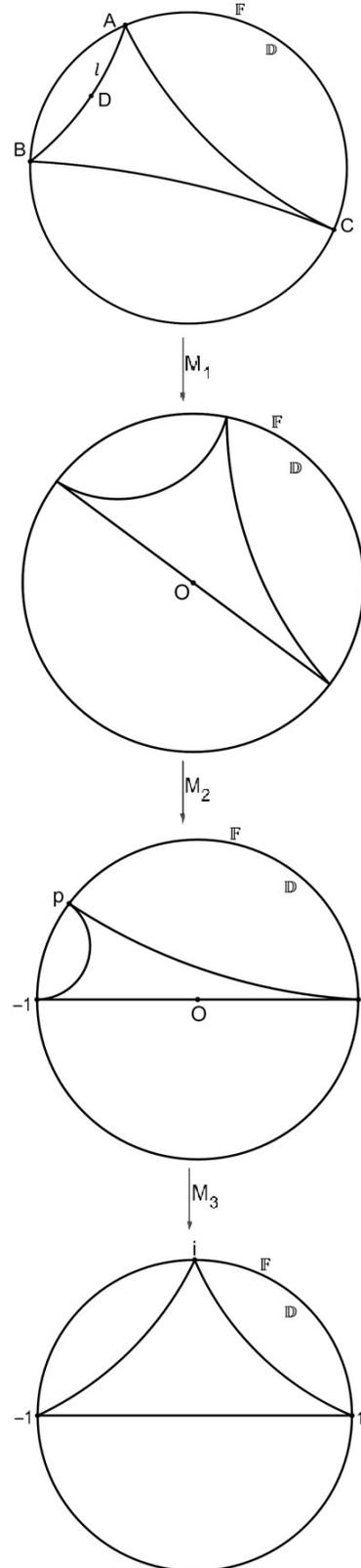
Podemos então mapear \mathbb{D} em si mesmo por outra transformação de Möbius M_2 , que gira o disco sobre o centro O e mapeia A e B em -1 e 1 , respectivamente. Uma vez que as transformações de Möbius são transformações hiperbólicas, a orientação dos pontos é preservada. Logo, podemos supor que a imagem de C sob $M_2 \circ M_1$ está em algum complexo com afixo em p na metade superior de \mathbb{F} .

Agora, para qualquer número real $m \in (-1, 1)$, a transformação de Möbius

$$M_3(z) = \frac{z - m}{1 - mz} \quad (2.11)$$

mapeia \mathbb{D} em \mathbb{D} , \mathbb{F} em \mathbb{F} , -1 em -1 , 1 em 1 , e as metades superiores de \mathbb{D} e \mathbb{F} em si mesmas. A transformação (2.11) também mapeia p em i se m for escolhido de modo que $i = \frac{p - m}{1 - mp}$, que podemos reescrever na forma

Figura 2.14 – Mapeamento 3



Fonte: O Autor.

² August Ferdinand Möbius (1790-1868): matemático e astrônomo alemão.

$$m = \frac{p - i}{1 - ip}. \quad (2.12)$$

Então, usando os fatos de que $|p| = 1$ e $Im(p) > 0$, podemos verificar que a equação (2.12) realmente fornece um valor de m que é real e está estritamente entre -1 e 1 .

Compondo as três transformações de Möbius que empregamos, a transformação composta $M_3 \circ M_2 \circ M_1$ mapeia o d-triângulo triplamente assintótico ABC no d-triângulo triplamente assintótico com vértices -1 , 1 e i . Portanto, os dois d-triângulos triplamente assintóticos têm a mesma área, ou seja, são congruentes.

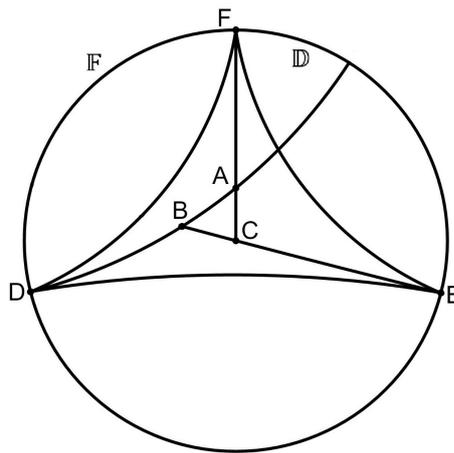
□

Vamos agora provar que todo d-triângulo está contido em um d-triângulo triplamente assintótico - Teorema 2.7, e que a medida da área de um d-triângulo triplamente assintótico é um número finito - Teorema 2.8.

Teorema 2.7. *Se ABC é um d-triângulo, então existe um d-triângulo triplamente assintótico DEF que contém ABC .*

Demonstração. Inicialmente, construímos um triângulo triplamente assintótico DEF da seguinte maneira: prolongamos AB para além de B até intersectar \mathbb{F} em D , BC para além de C até intersectar \mathbb{F} em E , e CA para além de A até intersectar \mathbb{F} em F . Em seguida, traçamos o triângulo triplamente assintótico DEF , como ilustra a Figura 2.15.

Figura 2.15 – Construindo o d-triângulo DEF triplamente assintótico que contém o d-triângulo ABC



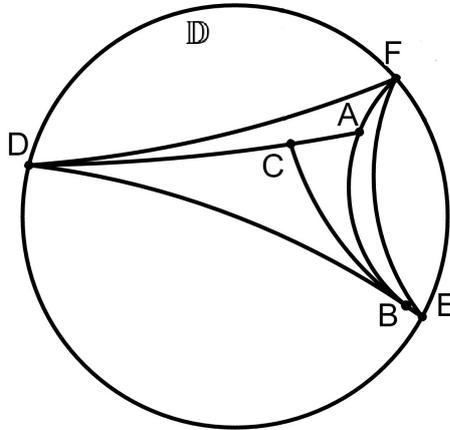
Fonte: O Autor.

Desta forma, a d-linha que passa pelos pontos A , B e D intersecta \mathbb{F} de modo a deixar as d-linhas que passam por D e F e por D e E em lados opostos a ela. Assim, os d-triângulos DAF e ABC , EBD e ABC , FCE e ABC , DAF , EBD e FCE , não se sobrepõem. Disto resulta que o d-triângulo ABC está contido no d-triângulo triplamente assintótico DEF .

□

A Figura 2.16 ilustra um d-triângulo contido em um d-triângulo triplamente assintótico.

Figura 2.16 – D-triângulo ABC contido no d-triângulo triplamente assintótico DEF em \mathbb{D}

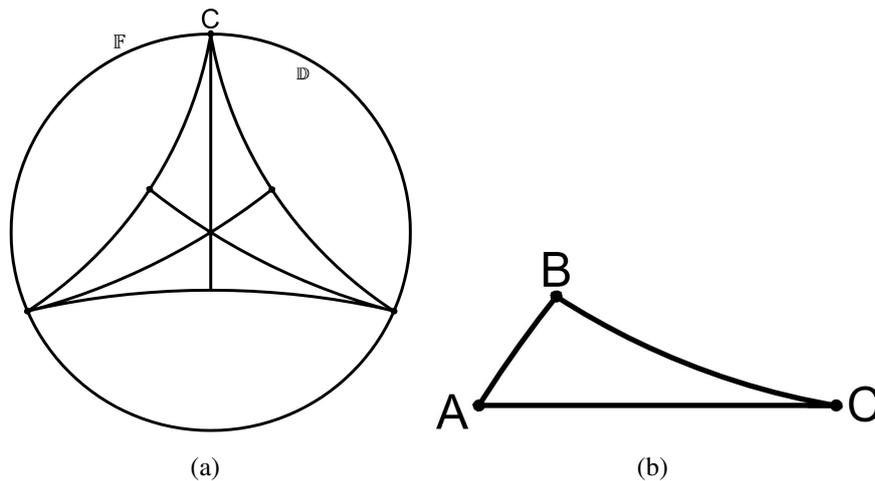


Fonte: O Autor.

Teorema 2.8. A área de um d-triângulo triplamente assintótico em \mathbb{D} é um número finito.

Demonstração. Podemos dividir um dado d-triângulo triplamente assintótico em 6 d-triângulos singularmente assintóticos, isto é, d-triângulos com apenas um dos vértices em \mathbb{F} , como mostra a Figura 2.17(a).

Figura 2.17 – (a) D-triângulo triplamente assintótico dividido em 6 d-triângulos singularmente assintóticos; (b) d-triângulo ABC singularmente assintótico em C

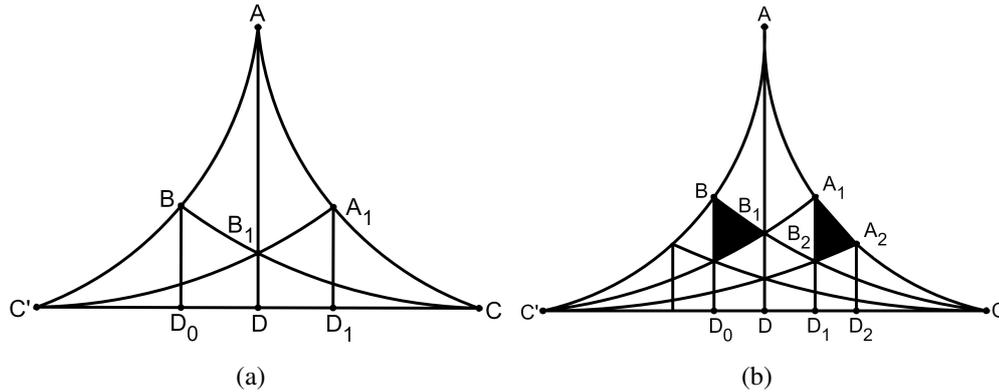


Fonte: O Autor.

Seja ABC um d-triângulo singularmente assintótico, com $C \in \mathbb{F}$. Inicialmente, prolongamos AB até intersectar \mathbb{F} no ponto C' e dividimos o ângulo $B\hat{A}C$ por AD , onde D é um ponto em CC' . Logo após, refletimos hiperbolicamente o ângulo $B\hat{A}C$ em AD . Como AB possui comprimento hiperbólico finito e AC tem comprimento hiperbólico infinito, pois C está em \mathbb{F} , essa reflexão mapeia B para algum ponto A_1 em AC . Além disso, a reflexão deve mapear BC para A_1C' , e, por simetria, BC e A_1C' devem se intersectar em algum ponto B_1 em AD .

Em seguida, dividimos o ângulo $C'\hat{B}C$ por BD_0 , sendo que $D_0 \in C'C$, e também dividimos o ângulo $C'\hat{A}_1C$ por A_1D_1 , onde $D_1 \in C'C$. Desta forma, o d-pentágono $AA_1D_1D_0B$ está contido em \mathbb{D} , como ilustra a Figura 2.18(a).

Figura 2.18 – (a) D-triângulos singularmente assintóticos; (b) d-triângulos congruentes - áreas sombreadas



Fonte: O Autor.

Nossa estratégia de prova agora é a seguinte: adicionando os segmentos geodésicos B_1D_0 e B_1D_1 , podemos dividir o d-pentágono $AA_1D_1D_0B$ em oito d-triângulos, sendo que cada d-triângulo tem área finita e, portanto, o d-pentágono tem área finita. Mostraremos que o d-triângulo BAC pode ser seccionado e remontado iterativamente dentro do d-pentágono, tendo assim uma área menor ou igual à área do d-pentágono.

Agora repetimos com o triângulo B_1A_1C a estratégia adotada com o triângulo BAC : refletimos hiperbolicamente o ângulo $B_1\hat{A}_1C$ em A_1D_1 , o que mapeia B_1 para algum ponto A_2 em A_1C e em algum ponto em A_2C' , a qual intersecta B_1C em algum ponto B_2 em A_1D_1 .

O d-triângulo $B_2A_1A_2$ é congruente a vários d-triângulos no d-pentágono $AA_1D_1D_0B$. Por conveniência, escolhemos o d-triângulo sombreado com dois vértices em B e B_1 , ilustrado na Figura 2.18(b). Nesta figura, os dois d-triângulos sombreados são congruentes: um está no d-triângulo BAC e o outro no d-pentágono $AA_1D_1D_0B$. Em seguida, repetimos o processo para o triângulo B_2A_2C : dividimos o triângulo segundo A_2D_2 , onde D_2 é um ponto em $C'C$.

Continuando o processo de partição indefinidamente, dividimos com reflexões hiperbólicas o d-triângulo $B_{n+1}A_{n+1}C$ como dividimos o d-triângulo B_nA_nC , obtemos dois novos d-triângulos no d-triângulo BAC e dois novos d-triângulos no d-pentágono $AA_1D_1D_0B$. Esses d-triângulos são congruentes devido à sequência de reflexões hiperbólicas nas d-linhas $A_{n+1}D_{n+1}, A_nD_n, \dots, A_1D_1$ e AD .

Dessa maneira, remontamos o d-triângulo assintótico dentro do d-pentágono. Portanto, o d-triângulo assintótico tem área finita. Disto decorre que o d-triângulo triplamente assintótico tem área finita.

□

Dos Teoremas 2.7 e 2.8 decorre que a área de um d -triângulo em \mathbb{D} é um número finito.

A medida dessa área é dada pelo Teorema 2.10, cuja demonstração depende do Teorema 2.9.

Teorema 2.9. *Se ABC é um d -triângulo duplamente assintótico, então a área de ABC depende apenas do ângulo no vértice em \mathbb{D} .*

Demonstração. Sejam ABC um d -triângulo duplamente assintótico em \mathbb{D} , isto é, com dois vértices em \mathbb{F} , onde A é o vértice do d -triângulo que não está em \mathbb{F} , e $\alpha = \angle BAC$.

Assim, há uma transformação de Möbius M que mapeia \mathbb{D} em si mesmo, mapeia \mathbb{F} em si mesmo e mapeia o vértice A no centro O do disco. Consideremos que M mapeia B e C para B' e C' , respectivamente. Logo, M mapeia o d -triângulo duplamente assintótico ABC em outro d -triângulo duplamente assintótico $OB'C'$. Como a transformação de Möbius preserva ângulos, temos que $\angle B'OC' = \alpha$.

Qualquer outro d -triângulo duplamente assintótico, cujo ângulo no vértice em \mathbb{D} é α , também pode ser mapeado por uma transformação de Möbius adequada em um d -triângulo duplamente assintótico que tem um ângulo de medida α no centro O do disco. Em seguida, este d -triângulo pode ser mapeado no d -triângulo duplamente assintótico $OB'C'$ através de uma rotação adicional, a qual também é uma transformação de Möbius.

Portanto, todo d -triângulo duplamente assintótico, cujo ângulo no vértice em \mathbb{D} é α , é congruente ao d -triângulo $OB'C'$, ou seja, tem a mesma área que o d -triângulo $OB'C'$. Dessa forma, concluímos que a área de um d -triângulo duplamente assintótico depende apenas do ângulo no vértice em \mathbb{D} .

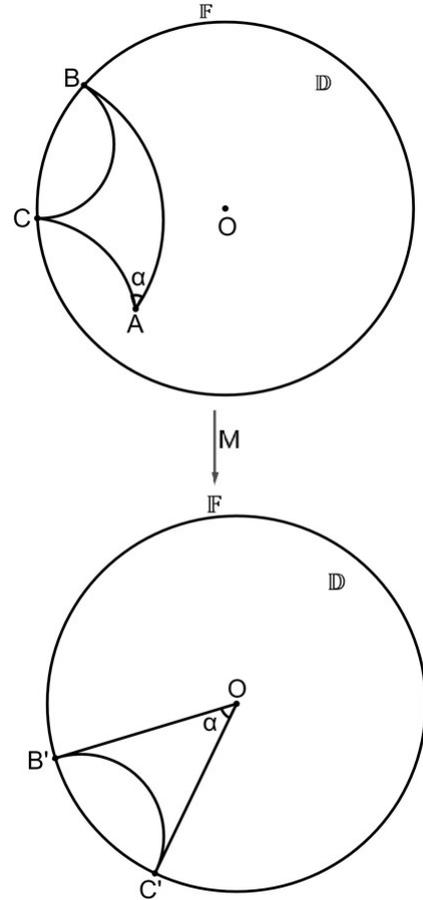
□

Teorema 2.10. *Se ABC é um d -triângulo, com ângulos internos α, β e γ , então a área \mathcal{A} de ABC é dada por*

$$\mathcal{A}(ABC) = K [\pi - (\alpha + \beta + \gamma)], \tag{2.13}$$

onde $K = \frac{k}{\pi}$ é uma constante comum a todos os d -triângulos.

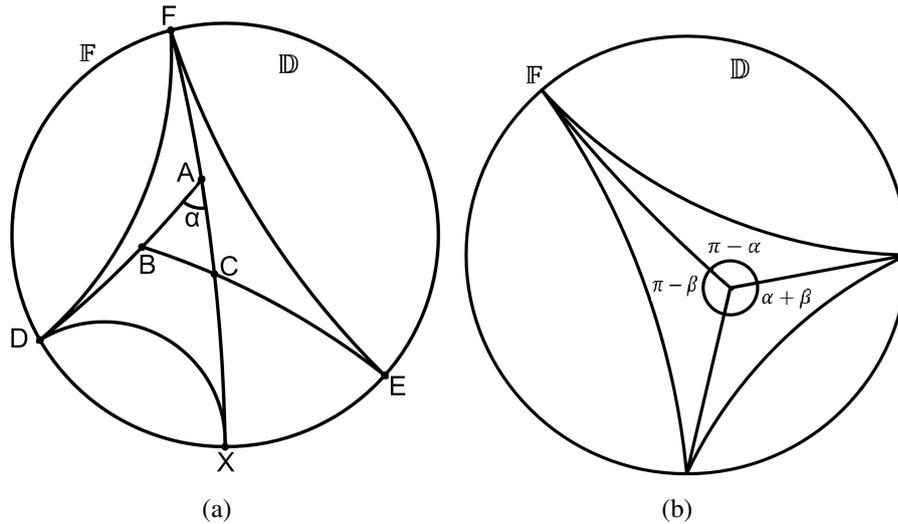
Figura 2.19 – Mapeamento 4



Fonte: O Autor.

Demonstração. Seja ABC um d-triângulo com ângulos internos α , β e γ nos vértices A , B e C , respectivamente. Prolongamos o segmento geodésico AB até o ponto D em \mathbb{F} , o segmento geodésico BC até o ponto E em \mathbb{F} e o segmento geodésico CA até o ponto F em \mathbb{F} , como ilustrado na Figura 2.20(a). Dado que o d-triângulo DEF é triplamente assintótico, ele tem, segundo o Teorema 2.8, uma área finita.

Figura 2.20 – (a) D-triângulo ABC de ângulo $\hat{A} = \alpha$; (b) d-triângulos duplamente assintóticos



Fonte: O Autor.

Agora, temos pelo Teorema 2.9 que qualquer d-triângulo duplamente assintótico tem uma área que depende apenas do ângulo no vértice em \mathbb{D} e, portanto, depende apenas do ângulo externo do triângulo no vértice em \mathbb{D} . Assim, definimos uma função f tal que a área de qualquer d-triângulo duplamente assintótico com ângulo externo θ em \mathbb{D} seja $f(\theta)$. Desta forma, é evidente que no d-triângulo DAF esse ângulo externo é α - Figura 2.20(a), e, então, a área hiperbólica desse d-triângulo é $f(\alpha)$.

Se prolongarmos o segmento geodésico FAC até o ponto X em \mathbb{F} - Figura 2.20(a), o d-triângulo DXF será triplamente assintótico e composto pelos d-triângulos duplamente assintóticos FAD e DAX . Logo, denotando a área de cada d-triângulo triplamente assintótico (como DXF) por k e percebendo que, a partir da definição de f , a área do d-triângulo DAX é $f(\pi - \alpha)$ (o ângulo externo em A é $\pi - \alpha$), temos que:

$$k = f(\alpha) + f(\pi - \alpha). \quad (2.14)$$

Precisamos agora, usando a equação (2.14), determinar uma fórmula explícita para f .

Para tanto, consideremos um d-triângulo triplamente assintótico qualquer, como na Figura 2.20(b). Traçando os segmentos geodésicos com um extremo no centro do d-triângulo e o outro extremo em \mathbb{F} , dividimos o d-triângulo triplamente assintótico em três d-triângulos duplamente assintóticos. Denotando os ângulos no centro do d-triângulo triplamente assintótico

por $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ e $\alpha + \beta$, como na Figura 2.20(b), obtemos que:

$$k = f(\alpha) + f(\beta) + f(\pi - (\alpha + \beta)). \quad (2.15)$$

Por intermédio da equação (2.14), deduzimos que:

$$f(\pi - (\alpha + \beta)) = k - f(\alpha + \beta). \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) em (2.15), obtemos que:

$$f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha + \beta). \quad (2.17)$$

Da equação (2.17) decorre que f é linear. Assim,

$$f(\alpha) = \lambda\alpha, \quad (2.18)$$

para alguma constante real λ . Empregando (2.18) em (2.14), temos que:

$$\begin{aligned} k &= \lambda(\alpha) + \lambda(\pi - \alpha); \\ k &= \lambda\alpha + \lambda\pi - \lambda\alpha; \\ \lambda &= \frac{k}{\pi}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

De (2.18) e (2.19), concluímos que:

$$f(\alpha) = \frac{k}{\pi}\alpha. \quad (2.20)$$

Voltando ao d-triângulo original ABC , a área desse d-triângulo é igual à área do d-triângulo triplamente assintótico DEF menos a soma das áreas dos três d-triângulos duplamente assintóticos FAD , DBE e ECF . Portanto:

$$\mathcal{A}(ABC) = k - (f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)). \quad (2.21)$$

Utilizando (2.20), podemos reescrever (2.21) como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABC) &= k - \left(\frac{k}{\pi}\alpha + \frac{k}{\pi}\beta + \frac{k}{\pi}\gamma \right) \\ &= k - \frac{k}{\pi}(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Considerando $\frac{k}{\pi} = K$ em (2.22), concluímos que:

$$\mathcal{A}(ABC) = K(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)).$$

□

Na relação (2.13), é usual considerar $K = 1$, sendo a expressão $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ a *deficiência* do d-triângulo ABC , isto é, o quanto a soma dos ângulos internos de ABC fica aquém de π .

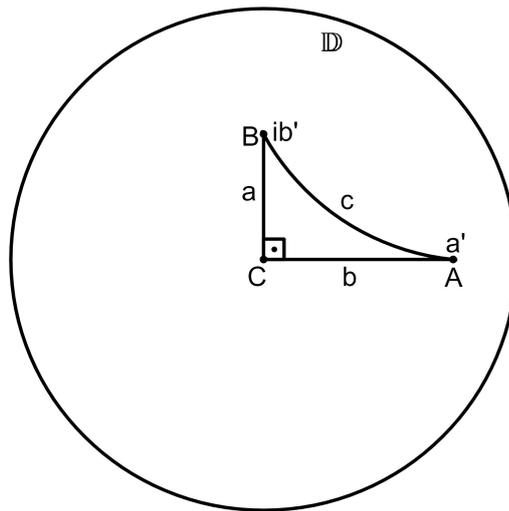
2.8 TEOREMA DE PITÁGORAS HIPERBÓLICO

Teorema 2.11 (Teorema de Pitágoras hiperbólico). *Se ABC é um d -triângulo, retângulo no vértice C e de lados a , b e c , com c oposto a \hat{C} , então*

$$\cosh(2c) = \cosh(2a)\cosh(2b). \quad (2.23)$$

Demonstração. Para provar o Teorema de Pitágoras no disco de Poincaré usando o lema da Origem (Apêndice), podemos assumir que o ponto C está no centro de \mathbb{D} , o ponto A está em a' no diâmetro horizontal e o ponto B está em ib' no diâmetro vertical, com $a', b' \in \mathbb{R}_+$, como ilustra a Figura 2.21.

Figura 2.21 – D -triângulo ABC , retângulo em C , de lados a , b e c



Fonte: O Autor.

Da relação (2.10) para o cálculo da distância hiperbólica, temos que:

$$a = \tanh^{-1}(b'); \quad (2.24)$$

$$b = \tanh^{-1}(a'). \quad (2.25)$$

Agora mapeamos \mathbb{D} em \mathbb{D} pela transformação hiperbólica

$$M(z) = \frac{z - a'}{1 - a'z}. \quad (2.26)$$

Pela transformação (2.26), A é mapeado para o centro de \mathbb{D} , que denominaremos aqui de A' , B é mapeado para o ponto B' , com coordenadas complexas

$$b'' = \frac{ib' - a'}{1 - ia'b'}, \quad (2.27)$$

e C é mapeado para o ponto C' , com coordenadas $-a'$. Como a transformação hiperbólica preserva comprimentos, o comprimento hiperbólico c de AB é igual ao comprimento hiperbólico de $A'B'$. Assim, para determinar c calculamos inicialmente o módulo de b'' em (2.27).

$$\begin{aligned}
 b'' &= \frac{(ib' - a')(1 + ia'b')}{(1 - ia'b')(1 + ia'b')} = \frac{ib' - a'b'^2 - a' - ia'^2b'}{1 + a'^2b'^2} \\
 &= \frac{-(a' + a'b'^2) + i(b' - a'^2b')}{1 + a'^2b'^2} = \frac{-a'(1 + b'^2) + ib'(1 - a'^2)}{1 + a'^2b'^2} \\
 |b''| &= \sqrt{\left(\frac{a' + a'b'^2}{1 + a'^2b'^2}\right)^2 + \left(\frac{b' - a'^2b'}{1 + a'^2b'^2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{a'^2 + 2a'b'^2 + a'^2b'^4 + b'^2 - 2a'^2b'^2 + a'^4b'^2}{(1 + a'^2b'^2)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{a'^2 + b'^2 + a'^2b'^2(b'^2 + a'^2)}{(1 + a'^2b'^2)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{(a'^2 + b'^2)(1 + a'^2b'^2)}{(1 + a'^2b'^2)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{a'^2 + b'^2}{1 + a'^2b'^2}}. \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

Logo, de (2.10) e (2.28), obtemos que:

$$c = \tanh^{-1}(|b''|) = \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{a'^2 + b'^2}{1 + a'^2b'^2}}\right). \tag{2.29}$$

Usando a relação (BRANNAN; ESPLÉN; GRAY, 2012)

$$\cosh(2\tanh^{-1}(x)) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2},$$

temos, a partir das equações (2.24), (2.25) e (2.29), que:

$$\cosh(2a) = \cosh(2\tanh^{-1}(b')) = \frac{1 + b'^2}{1 - b'^2}; \tag{2.30}$$

$$\cosh(2b) = \cosh(2\tanh^{-1}(a')) = \frac{1 + a'^2}{1 - a'^2}; \tag{2.31}$$

$$\cosh(2c) = \cosh\left(2\tanh^{-1}\sqrt{\frac{a'^2 + b'^2}{1 + a'^2b'^2}}\right) = \frac{1 + \frac{a'^2 + b'^2}{1 + a'^2b'^2}}{1 - \frac{a'^2 + b'^2}{1 + a'^2b'^2}}. \tag{2.32}$$

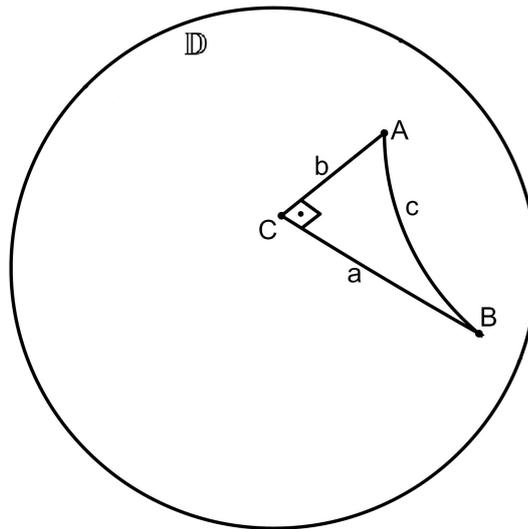
A partir da equação (2.32) concluímos, usando as equações (2.30) e (2.31), que:

$$\begin{aligned}
\cosh(2c) &= \frac{1 + a'^2 b'^2 + a'^2 + b'^2}{1 + a'^2 b'^2 - a'^2 - b'^2} \\
&= \frac{1 + a'^2 b'^2}{1 + a'^2 b'^2 - a'^2 - b'^2} \\
&= \frac{1 + a'^2 + b'^2 + a'^2 b'^2}{1 - a'^2 - b'^2 + a'^2 b'^2} \\
&= \frac{1 + b'^2}{1 - b'^2} \left(\frac{1 + a'^2}{1 - a'^2} \right) \\
&= \cosh(2a) \cosh(2b).
\end{aligned}$$

□

A Figura 2.22 ilustra um d-triângulo ABC , retângulo em C , no disco de Poincaré.

Figura 2.22 – Triângulo retângulo ABC no disco de Poincaré



Fonte: O Autor.

Podemos demonstrar que a relação (2.23) se aproxima do caso Euclidiano quando consideramos em \mathbb{D} um d-triângulo retângulo de lados muito pequenos.

Corolário 2.1. *Se ABC é um d-triângulo, retângulo em C , e de lados a , b e c , com c oposto a \hat{C} , então a relação*

$$\cosh(2c) = \cosh(2a) \cosh(2b) \quad (2.33)$$

tende ao caso Euclidiano, ou seja, $c^2 = a^2 + b^2$, quando consideramos a , b e c muito pequenos.

Demonstração. Toda função $f(x) \in C^\infty$ (infinitamente diferenciável) pode ser expandida em uma série de Taylor (STEWART, 2006), da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n,$$

a qual se reduz a uma série de Maclaurin quando $a = 0$.

A série de Maclaurin da função $\cosh(x)$ é dada por (STEWART, 2007):

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots \quad (2.34)$$

Expandindo $\cosh(2c)$, $\cosh(2a)$ e $\cosh(2b)$ em série de Maclaurin por intermédio de (2.34), obtemos, respectivamente:

$$\cosh(2c) = 1 + \frac{(2c)^2}{2!} + \frac{(2c)^4}{4!} + \frac{(2c)^6}{6!} + \frac{(2c)^8}{8!} + \dots; \quad (2.35)$$

$$\cosh(2a) = 1 + \frac{(2a)^2}{2!} + \frac{(2a)^4}{4!} + \frac{(2a)^6}{6!} + \frac{(2a)^8}{8!} + \dots; \quad (2.36)$$

$$\cosh(2b) = 1 + \frac{(2b)^2}{2!} + \frac{(2b)^4}{4!} + \frac{(2b)^6}{6!} + \frac{(2b)^8}{8!} + \dots \quad (2.37)$$

Considerando a , b e c muito pequenos, podemos desprezar em (2.35), (2.36) e (2.37) as potências com expoente maior do que dois, pois estas são muito menores do que a , b e c . Assim, podemos reescrever (2.35), (2.36) e (2.37), respectivamente, como:

$$\cosh(2c) \approx 1 + \frac{(2c)^2}{2!}; \quad (2.38)$$

$$\cosh(2a) \approx 1 + \frac{(2a)^2}{2!}; \quad (2.39)$$

$$\cosh(2b) \approx 1 + \frac{(2b)^2}{2!}. \quad (2.40)$$

Substituindo (2.38), (2.39) e (2.40) em (2.33), obtemos:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{(2c)^2}{2!} &\approx \left(1 + \frac{(2a)^2}{2!}\right) \left(1 + \frac{(2b)^2}{2!}\right); \\ 1 + \frac{(2c)^2}{2!} &\approx 1 + \frac{(2a)^2}{2!} + \frac{(2b)^2}{2!} + 4a^2b^2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Em (2.41), a^2b^2 também é muito menor do que a , b e c . Dessa forma, concluímos que:

$$\begin{aligned} (2c)^2 &\approx (2a)^2 + (2b)^2 \\ c^2 &\approx a^2 + b^2. \end{aligned}$$

□

2.9 TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA

Teorema 2.12 (Fórmula de Lobachevski). *Se ABC é um d -triângulo, retângulo no vértice C , e de lados a , b e c , com c oposto a \hat{C} e a oposto a \hat{A} , então*

$$\tan(\hat{A}) = \frac{\tanh(2a)}{\sinh(2b)}. \quad (2.42)$$

Demonstração. Procedemos, como na prova do Teorema 2.11, mapeando o d-triângulo ABC , retângulo em C , com vértices em a' , ib' e 0 , respectivamente, pela transformação hiperbólica $M(z) = \frac{z - a'}{1 - a'z}$ no d-triângulo com vértice no centro de \mathbb{D} . Assim:

$$b'' = \frac{-a'(1 + b'^2) + ib'(1 - a'^2)}{1 + a'^2 b'^2}; \quad (2.43)$$

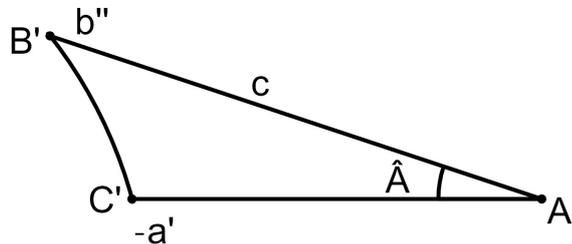
$$b = \tanh^{-1}(a') \Rightarrow a' = \tanh(b); \quad (2.44)$$

$$a = \tanh^{-1}(b') \Rightarrow b' = \tanh(a). \quad (2.45)$$

Esse mapeamento também envia o ângulo \hat{A} no d-triângulo ABC para um ângulo congruente, também denotado por \hat{A} (aqui um leve abuso de notação), no centro de \mathbb{D} . Como o triângulo com vértices em 0 , b'' e $-a'$ tem um ângulo reto em $-a'$ - Figura 2.23, e $\tan(\hat{A}) = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}$, segue de (2.43) que:

$$\tan(\hat{A}) = \frac{b'(1 - a'^2)}{a'(1 + b'^2)} = \frac{1 - a'^2}{a'} \left(\frac{b'}{1 + b'^2} \right). \quad (2.46)$$

Figura 2.23 – D-triângulo retângulo $A'B'C'$



Fonte: O Autor.

Usando (2.44) e identidades trigonométricas hiperbólicas (ANDRADE, 2013; DORIA, 2019), podemos reescrever $\frac{1 - a'^2}{a'}$ como:

$$\begin{aligned} \frac{1 - a'^2}{a'} &= \frac{1 - \tanh^2(b)}{\tanh(b)} = \frac{1 - \frac{\sinh^2(b)}{\cosh^2(b)}}{\frac{\sinh(b)}{\cosh(b)}} = \frac{\cosh^2(b) - \sinh^2(b)}{\cosh^2(b)} \left(\frac{\cosh(b)}{\sinh(b)} \right) \\ &= \frac{\cosh^2(b) - \sinh^2(b)}{\sinh(b)\cosh(b)} = \frac{1}{\frac{\sinh(2b)}{2}} \\ &= \frac{2}{\sinh(2b)}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Da mesma forma, utilizando (2.45) e identidades trigonométricas hiperbólicas (AN-

DRADE, 2013; DORIA, 2019), podemos reescrever $\frac{b'}{1+b'^2}$ como:

$$\begin{aligned} \frac{b'}{1+b'^2} &= \frac{\tanh(a)}{1+\tanh^2(a)} = \frac{\frac{\sinh(a)}{\cosh(a)}}{1+\frac{\sinh^2(a)}{\cosh^2(a)}} = \frac{\sinh(a)}{\cosh(a)} \left(\frac{\cosh^2(a)}{\cosh^2(a)+\sinh^2(a)} \right) \\ &= \frac{\sinh(a)\cosh(a)}{\cosh^2(a)+\sinh^2(a)} = \frac{\sinh(2a)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh(2a)}{\cosh(2a)} \right) \\ &= \frac{\tanh(2a)}{2}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Substituindo (2.47) e (2.48) em (2.46), concluímos que:

$$\tan(\hat{A}) = \frac{\tanh(2a)}{\sinh(2b)}.$$

□

Podemos provar que a relação (2.42) se aproxima do caso Euclidiano quando consideramos em \mathbb{D} um d-triângulo retângulo de lados muito pequenos.

Corolário 2.2. *Se ABC é um d-triângulo, retângulo em C , e de lados a , b e c , com c oposto a \hat{C} e a oposto a \hat{A} , então a relação*

$$\tan(\hat{A}) = \frac{\tanh(2a)}{\sinh(2b)} \quad (2.49)$$

tende ao caso Euclidiano, ou seja, $\tan(\hat{A}) = \frac{a}{b}$, quando consideramos a , b e c muito pequenos.

Demonstração. De acordo com (STEWART, 2007), a série de Maclaurin para as funções $\sinh(x)$ e $\cosh(x)$ é dada, respectivamente, por:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad (2.50)$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (2.51)$$

Usando (2.50) e (2.51) para expandir $\sinh(2a)$, $\sinh(2b)$ e $\cosh(2a)$ em série de Maclaurin, obtemos, respectivamente, que:

$$\sinh(2a) = 2a + \frac{(2a)^3}{3!} + \frac{(2a)^5}{5!} + \frac{(2a)^7}{7!} + \frac{(2a)^9}{9!} + \dots; \quad (2.52)$$

$$\sinh(2b) = 2b + \frac{(2b)^3}{3!} + \frac{(2b)^5}{5!} + \frac{(2b)^7}{7!} + \frac{(2b)^9}{9!} + \dots; \quad (2.53)$$

$$\cosh(2a) = 1 + \frac{(2a)^2}{2!} + \frac{(2a)^4}{4!} + \frac{(2a)^6}{6!} + \frac{(2a)^8}{8!} + \dots. \quad (2.54)$$

Considerando a , b e c muito pequenos, podemos desprezar em (2.52), (2.53) e (2.54) as potências com expoente maior do que dois, pois estas são muito menores do que a , b e c . Assim, podemos reescrever (2.52), (2.53) e (2.54), respectivamente, como:

$$\sinh(2a) \approx 2a; \quad (2.55)$$

$$\sinh(2b) \approx 2b; \quad (2.56)$$

$$\cosh(2a) \approx 1 + 2a^2. \quad (2.57)$$

Substituindo agora (2.55), (2.56) e (2.57) em (2.49), obtemos:

$$\begin{aligned} \tan(\hat{A}) &= \frac{\tanh(2a)}{\sinh(2b)} \\ &= \frac{\sinh(2a)}{\cosh(2a)} \left(\frac{1}{\sinh(2b)} \right) \\ &\approx \frac{2a}{1 + 2a^2} \left(\frac{1}{2b} \right) \\ &\approx \frac{a}{b} \left(\frac{1}{1 + 2a^2} \right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Em (2.58), $1 + 2a^2$ é aproximadamente 1 para um a pequeno. Dessa forma, concluímos que:

$$\tan(\hat{A}) \approx \frac{a}{b}.$$

□

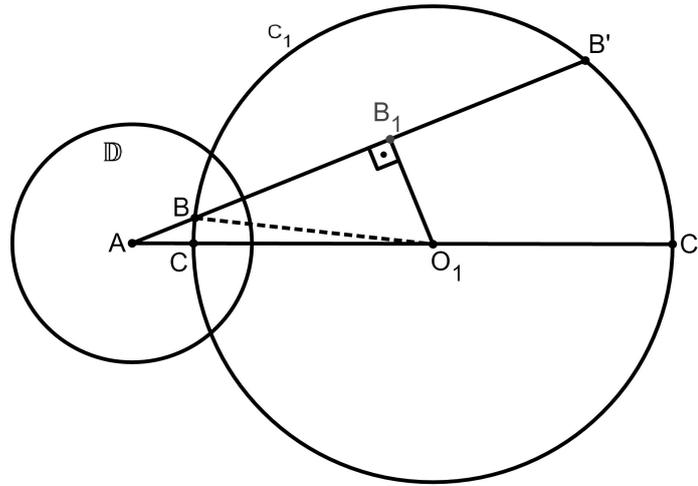
Teorema 2.13 (Fórmula do seno). *Se ABC é um d -triângulo, retângulo no vértice C , e de lados a , b e c , com a oposto a \hat{A} e b oposto a \hat{B} , então*

$$\sen(\hat{B}) = \frac{\sinh(2b)}{\sinh(2c)}. \quad (2.59)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o ponto A está no centro O do disco de Poincaré. Os lados AB e AC do d -triângulo ABC são segmentos de reta Euclidianos, enquanto o lado BC é um arco da circunferência C_1 , centrada em O_1 e ortogonal a \mathbb{D} . Sejam B' e C' pontos de intersecção de AB e AC com a circunferência centrado em O_1 , respectivamente, e B_1 a projeção ortogonal de O_1 sobre AB' , como ilustra a Figura 2.24.

Uma vez que o disco de Poincaré \mathbb{D} e a circunferência C_1 são ortogonais, a potência de $A \equiv O$ com relação à C_1 é igual à 1 (que é igual ao raio do disco de Poincaré). Portanto, a distância Euclidiana OB satisfaz a relação

$$OB \cdot OB' = 1 \Rightarrow OB' = \frac{1}{OB}. \quad (2.60)$$

Figura 2.24 – D-triângulo ABC , retângulo em C , no disco de Poincaré

Fonte: O Autor.

Também sabemos que

$$OB = \tanh(c). \quad (2.61)$$

Assim, empregando (2.60), (2.61) e identidades trigonométricas hiperbólicas (ANDRADE, 2013; DORIA, 2019), obtemos que:

$$\begin{aligned} BB' &= OB' - OB \\ &= \frac{1}{OB} - OB \\ &= \frac{1}{\tanh(c)} - \tanh(c) \\ &= \frac{\cosh(c)}{\sinh(c)} - \frac{\sinh(c)}{\cosh(c)} = \frac{\cosh^2(c) - \sinh^2(c)}{\sinh(c)\cosh(c)} \\ &= \frac{1}{\sinh(c)\cosh(c)} = \frac{2}{2\sinh(c)\cosh(c)} \\ &= \frac{2}{\sinh(2c)}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Analogamente, como $OC = \tanh(b)$, temos que:

$$CC' = \frac{2}{\sinh(2b)}. \quad (2.63)$$

O ângulo \hat{B} é o ângulo entre a tangente a C_1 em B e a d-linha OB . Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \hat{A}BC &\equiv B\hat{O}_1B_1; \\ \text{sen}(\hat{B}) &= \text{sen}(\hat{O}_1); \\ \text{sen}(\hat{B}) &\stackrel{\Delta BO_1B_1}{=} \frac{BB_1}{O_1B} = \frac{BB'}{O_1C} = \frac{BB'}{\frac{CC'}{2}} = \frac{BB'}{CC'}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Substituindo (2.62) e (2.63) em (2.64), concluímos que:

$$\operatorname{sen}(\hat{B}) = \frac{\operatorname{senh}(2b)}{\operatorname{senh}(2c)}.$$

□

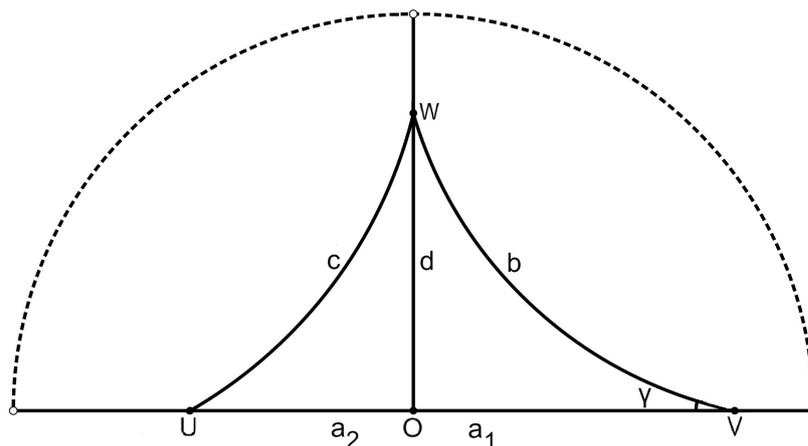
Analogamente à prova de (2.59), podemos demonstrar que $\operatorname{sen}(\hat{A}) = \frac{\operatorname{senh}(2a)}{\operatorname{senh}(2c)}$. Podemos também mostrar que a relação (2.59) se aproxima do caso Euclidiano, ou seja, $\operatorname{sen}(\hat{B}) = \frac{b}{c}$, quando consideramos em \mathbb{D} um d-triângulo retângulo de lados muito pequenos.

Teorema 2.14 (Lei dos cossenos hiperbólica). *Se ABC é um d-triângulo de ângulos internos α , β e γ opostos, respectivamente, aos lados a , b e c , então*

$$\operatorname{cosh}(c) = \operatorname{cosh}(a)\operatorname{cosh}(b) - \operatorname{senh}(a)\operatorname{senh}(b)\cos(\gamma). \quad (2.65)$$

Demonstração. Seja WUV um d-triângulo em \mathbb{D} , com lados de medidas a , b e c , opostos respectivamente aos vértices W , U e V . A menos de uma isometria³, podemos supor que o lado UV está contido em $(-1, 1)$, que a altura baixada do vértice W está contida no diâmetro imaginário e que a ordenada de W é positiva. Consideremos esse d-triângulo decomposto nos d-triângulos retângulos OUW e VOW , ilustrados na Figura 2.25.

Figura 2.25 – D-triângulo WUV decomposto nos d-triângulos retângulos OUW e VOW



Fonte: O Autor.

Sejam ainda d a medida hiperbólica do lado comum OW , a_1 a medida hiperbólica do cateto OV e a_2 a medida hiperbólica do cateto OU . Como o pé da altura O está entre U e V e a distância no disco de Poincaré é aditiva, podemos escrever a medida hiperbólica do cateto

³ Bijeção de um espaço métrico sobre outro que preserva medidas (LIMA, 2007).

OU como $a_2 = a - a_1$. Pelo teorema de Pitágoras hiperbólico 2.11 e pelo lema da Projeção (Apêndice), temos as seguintes identidades:

$$\cosh(d) = \frac{\cosh(b)}{\cosh(a_1)}; \quad (2.66)$$

$$\cosh(d) = \frac{\cosh(c)}{\cosh(a - a_1)}; \quad (2.67)$$

$$\tanh(a_1) = \tanh(b)\cosh(\gamma). \quad (2.68)$$

Substituindo (2.66) em (2.67), obtemos que:

$$\cosh(c) = \cosh(a - a_1) \frac{\cosh(b)}{\cosh(a_1)}. \quad (2.69)$$

Empregando (2.68) e identidades trigonométricas hiperbólicas (ANDRADE, 2013; DORIA, 2019 em (2.69), concluímos que:

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= (\cosh(a)\cosh(-a_1) + \sinh(a)\sinh(-a_1)) \frac{\cosh(b)}{\cosh(a_1)} \\ &= \cosh(a)\cosh(a_1) \frac{\cosh(b)}{\cosh(a_1)} - \sinh(a)\sinh(a_1) \frac{\cosh(b)}{\cosh(a_1)} \\ &= \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\cosh(b)\tanh(a_1) \\ &= \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\tanh(b)\cosh(\gamma)\cosh(b) \\ &= \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a) \frac{\sinh(b)}{\cosh(b)} \cosh(\gamma)\cosh(b) \\ &= \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)\cosh(\gamma). \end{aligned}$$

□

De maneira análoga à prova do Teorema 2.14, podemos demonstrar que:

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \cosh(b)\cosh(c) - \sinh(b)\sinh(c)\cosh(\alpha); \\ \cosh(b) &= \cosh(a)\cosh(c) - \sinh(a)\sinh(c)\cosh(\beta). \end{aligned}$$

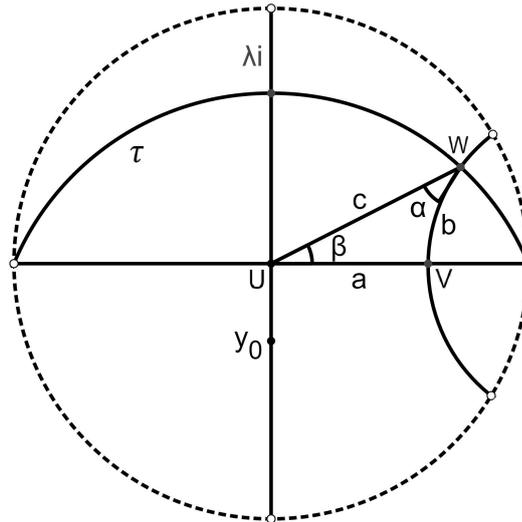
Para demonstrar a lei dos senos hiperbólica, precisamos provar antes o Lema 2.1.

Lema 2.1. *Se WUV é um d -triângulo retângulo com lados de medidas a , b e c e ângulos opostos a esses lados de medidas respectivamente iguais a α , β e $\gamma = \frac{\pi}{2}$, então*

$$\frac{\sinh(a)}{\sen(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sen(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Demonstração. Seja WUV um d-triângulo em \mathbb{D} , retângulo em V , com lados de medidas a , b e c , opostos respectivamente aos vértices W , U e V . A menos de uma isometria, podemos supor que o d-triângulo retângulo tem vértices em $U = (0, 0)$ e $V = \left(\tanh\left(\frac{a}{2}\right), 0\right)$, e que a ordenada de W é positiva. Seja ainda τ a curva equidistante à reta hiperbólica $(-1, 1)$ e que passa pelo vértice W , como ilustra a Figura 2.26.

Figura 2.26 – D-triângulo WUV , retângulo em V



Fonte: O Autor.

Com essas condições, a equação cartesiana do círculo gerador de τ é

$$z\bar{z} - 2y_0\text{Im}(z) = 1. \quad (2.70)$$

Se λi é a interseção de τ com o eixo imaginário, então $\lambda = \tanh\left(\frac{b}{2}\right)$ e o centro Euclidiano do círculo gerador de τ é $y_0 i$, onde

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \right) \\ &= \frac{\tanh^2\left(\frac{b}{2}\right) - 1}{2\tanh\left(\frac{b}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2\cosh\left(\frac{b}{2}\right)\sinh\left(\frac{b}{2}\right)} = -\frac{1}{\sinh(b)}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Como $W \in \tau$ e $\|w\| = \tanh\left(\frac{c}{2}\right)$, temos que:

$$\text{Im}(w) = \tanh\left(\frac{c}{2}\right)\text{sen}(\beta), \quad (2.72)$$

onde w é o afixo de UW .

Sabendo que $z\bar{z} = |z|^2$, ao substituirmos (2.71) e (2.72) em (2.70), obtemos que:

$$\tanh^2\left(\frac{c}{2}\right) + \frac{2}{\sinh(b)} \tanh\left(\frac{c}{2}\right) \operatorname{sen}(\beta) = 1. \quad (2.73)$$

Empregando identidades trigonométricas hiperbólicas (ANDRADE, 2013; DORIA, 2019) em (2.73), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\sinh(b)} &= \frac{1 - \tanh^2\left(\frac{c}{2}\right)}{2 \tanh\left(\frac{c}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{c}{2}\right) \cosh\left(\frac{c}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sinh(c)}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Da equação (2.74), concluímos que:

$$\frac{\sinh(b)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \sinh(c) = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Para mostrar a outra igualdade, podemos assumir, a menos de uma isometria, que o d-triângulo retângulo WUV tem vértices em $W = (0, 0)$ e $V = \left(\tanh\left(\frac{b}{2}\right), 0\right)$, e que a ordenada de U é positiva. De maneira análoga, concluímos que:

$$\frac{\sinh(a)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \sinh(c) = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

□

Teorema 2.15 (Lei dos senos hiperbólica). *Se ABC é um d-triângulo de ângulos internos α , β e γ opostos, respectivamente, aos lados a , b e c , então*

$$\frac{\sinh(a)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\operatorname{sen}(\gamma)}. \quad (2.75)$$

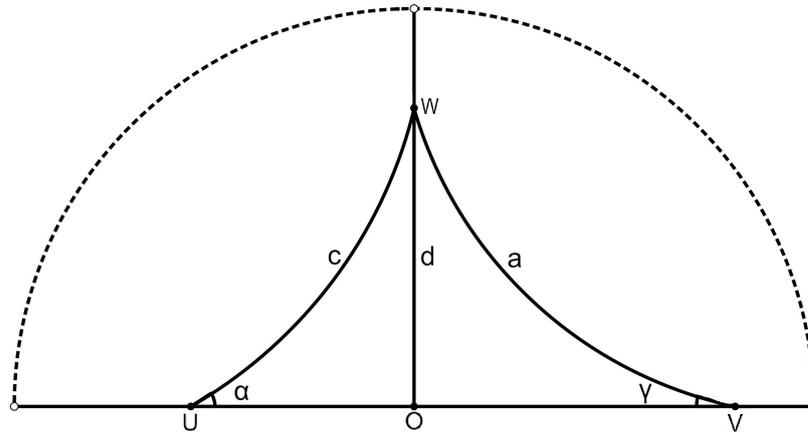
Demonstração. Seja UWV um d-triângulo em \mathbb{D} , com lados de medidas a , b e c , opostos respectivamente aos vértices U , W e V . A menos de uma isometria, podemos supor que o lado UV está contido no diâmetro real, que a altura baixada do vértice W está contida no diâmetro imaginário e que a ordenada de W é positiva. Consideremos os d-triângulos retângulos UOW e VOW . Seja ainda d a medida lado comum OW , como ilustrado na Figura 2.27.

Sendo assim, pelo Lema 2.1, temos no d-triângulos UOW e VOW , respectivamente, que:

$$\sinh(c) = \frac{\sinh(d)}{\sinh(\alpha)}; \quad (2.76)$$

$$\sinh(a) = \frac{\sinh(d)}{\sinh(\gamma)} \Rightarrow \sinh(d) = \sinh(a) \sinh(\gamma). \quad (2.77)$$

Figura 2.27 – D-triângulo UWV com lados de medidas a , b e c



Fonte: O Autor.

Substituindo (2.77) em (2.76), concluímos que:

$$\frac{\sinh(c)}{\sen(\gamma)} = \frac{\sinh(a)}{\sen(\alpha)}.$$

Procedendo de maneira análoga, agora com as alturas baixadas dos vértices U e V , estabelecemos as demais igualdades da relação (2.75).

□

Podemos mostrar que as relações (2.65) e (2.75) se aproximam dos casos Euclidianos quando consideramos em \mathbb{D} um d-triângulo de lados muito pequenos.

2.10 CÍRCULOS HIPERBÓLICOS

Por analogia com os círculos Euclidianos, definimos um círculo hiperbólico como o lugar dos pontos que estão a uma distância hiperbólica fixa de um ponto dado, que também é fixo.

Definição 2.9. *O círculo hiperbólico com raio hiperbólico r e centro hiperbólico em C é o conjunto definido por*

$$\{z : d(C, z) = r, z \in \mathbb{D}\}.$$

No caso de um círculo hiperbólico com raio r centrado na origem, é apenas o conjunto de pontos dado por

$$\{z : d(0, z) = r, z \in \mathbb{D}\},$$

isto é, o conjunto

$$\{z : \tanh^{-1}(|z|) = r, z \in \mathbb{D}\},$$

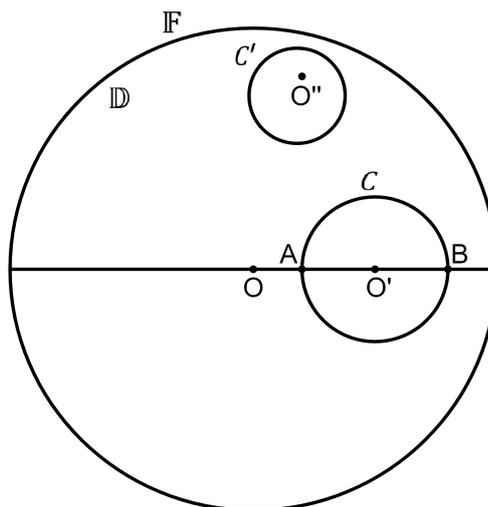
ou

$$\{z : |z| = \tanh(r), z \in \mathbb{D}\}. \quad (2.78)$$

O conjunto de pontos definido em (2.78) é um círculo Euclidiano com raio $\tanh(r)$ centrado na origem.

Um fato notável é que todo círculo hiperbólico é um círculo Euclidiano (BRANNAN; ESPLÉN; GRAY, 2012). A Figura 2.28 ilustra dois círculos hiperbólicos no disco de Poincaré.

Figura 2.28 – Círculos hiperbólicos C e C' , de centros respectivamente O' e O'' , no disco de Poincaré



Fonte: O Autor.

A Figura 2.28 foi construída com as ferramentas hiperbólicas do GeoGebra. Observa-se que o centro O'' de C' está deslocado. Isto ocorre quando o círculo hiperbólico está próximo da fronteira \mathbb{F} de \mathbb{D} .

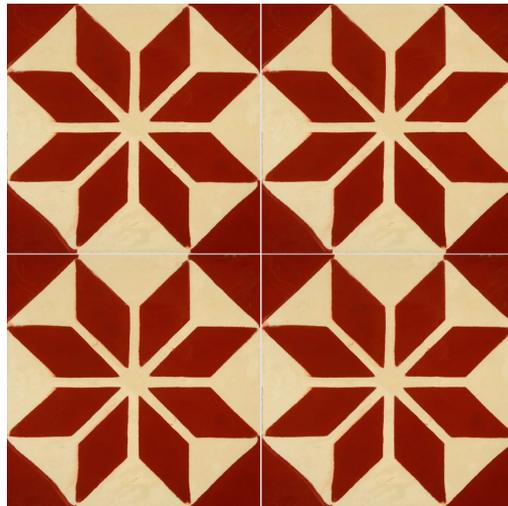
3 TESSELAÇÕES

Apresentamos neste capítulo noções básicas sobre tesselações, destacando tesselações hiperbólicas no plano construídas com elementos do disco de Poincaré. Empregamos como referências básicas neste capítulo *Geometry* (BRANNAN; ESPLEN; GRAY, 2012), *Tesselações pentagonais e mosaicos de Penrose* (SMIGLY, 2017), *Tesselações no plano hiperbólico* (ANTUNES; QUEIROZ, 2017), *Tesselações no ensino de geometria Euclidiana* (LEITÃO, 2015), *Tesselações hiperbólicas com régua e compasso* (MURARI; LAZARI, S.d.) e *Non-Euclidean geometry* (CHRISTERSSON, 2018).

3.1 DEFINIÇÃO

O termo *tesselar* significa "fit together exactly a number of identical shapes, leaving no spaces"¹ (BRANNAN, 2012, p. 408). Dessa forma, tesselar, cujos sinônimos são ladrilhar, pavimentar ou construir mosaicos, consiste em recobrir uma superfície bidimensional, finita ou infinita, empregando como unidades básicas polígonos ou outras figuras, congruentes ou não, de maneira que não existam espaços entre as unidades básicas de recobrimento e/ou sobreposições das unidades básicas de recobrimento. A Figura 3.1 ilustra uma tesselação geométrica.

Figura 3.1 – Mosaico geométrico



Fonte: Google (2021).

Encontram-se tesselações desde a arquitetura antiga até a arte moderna. Quanto à esta última, destacam-se as obras de Maurits Cornelis Escher (1898-1972), artista gráfico holandês mundialmente famoso por suas xilogravuras² e litografias³ que brincam com o preenchimento regular do plano Euclidiano, exploram concepções do infinito (principalmente no disco), e usam

¹ Encaixar exatamente um número de formas idênticas, sem deixar espaços.

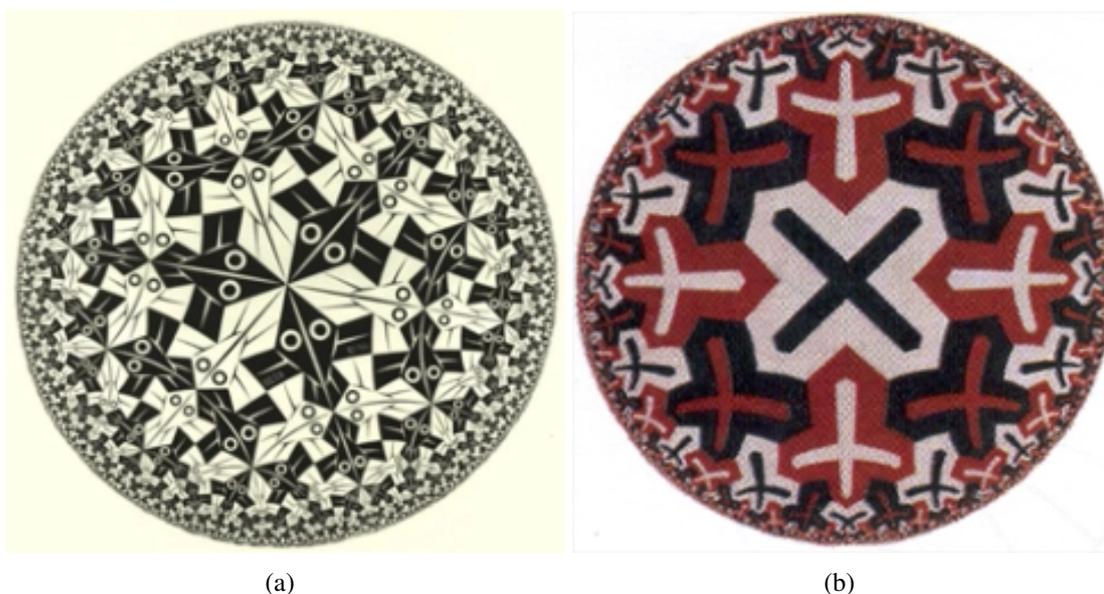
² Xilografia é a arte de entalhar em madeira para obter reproduções em papel.

³ Litografia é a arte de desenhar e escrever em pedra para obter reproduções em papel.

transformações geométricas, tais como isometrias (LIMA, 2007). A Figura 3.2 ilustra duas das quatro tesselações hiperbólicas de Escher da série *Limites do círculo*⁴. Nessas tesselações,

[...] Escher concluiu que a multiplicação infinita de figuras dentro de um círculo representa a eternidade do universo, pois sua borda nunca é alcançada (ECO/UFRJ, 2013).

Figura 3.2 – Obras de Escher: (a) Círculo Limitado I; (b) Círculo Limitado II



Fonte: ECO/UFRJ (2013).

3.2 TESSELAÇÕES NO PLANO EUCLIDIANO

Nessas tesselações, o plano Euclidiano, ou parte dele, é recoberto por polígonos regulares ou irregulares. Há várias classes dessas tesselações (ANTUNES; QUEIROZ, 2017; LEITÃO, 2015; SMIGLY, 2017). Apresentamos a seguir algumas delas.

3.2.1 REGULARES

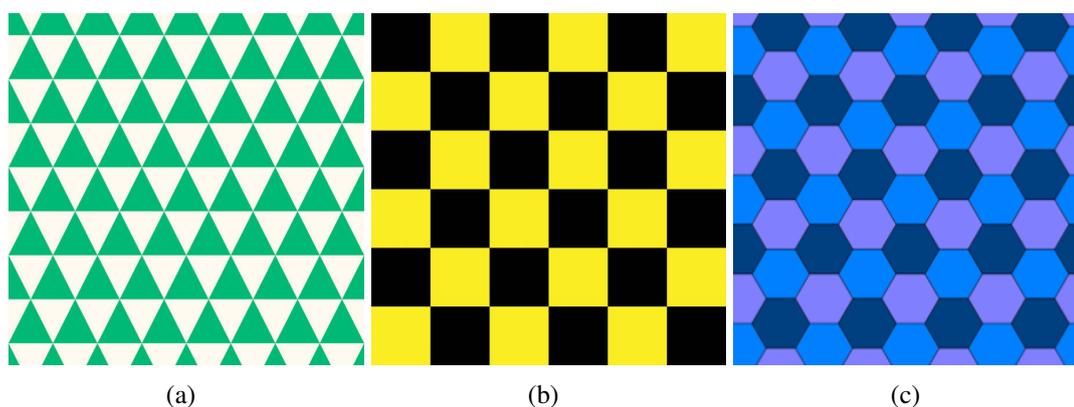
São tesselações que recobrem o plano Euclidiano repetindo um único polígono regular. Existem apenas três tesselações regulares: com triângulos equiláteros; com quadrados; com hexágonos regulares. A Figura 3.3 ilustra as três tesselações regulares possíveis.

Denotamos uma tesselação regular por $\{p, q\}$, onde q é o número de polígonos regulares, com p lados, que se encontram em cada nó (vértice) da tesselação. Podemos mostrar (LEITÃO, 2015) que, em uma tesselação regular $\{p, q\}$, p e q satisfazem a equação

$$(p - 2)(q - 2) = 4. \quad (3.1)$$

⁴ Limite Circular III e Limite Circular IV foram apresentadas no Capítulo 1.

Figura 3.3 – Tesselações regulares: (a) triangular; (b) quadrangular; (c) hexagonal



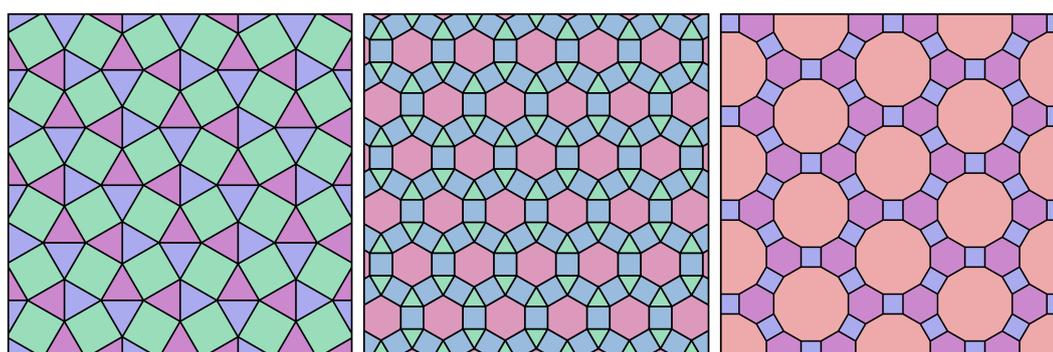
Fonte: GettyImages (2021).

Como $p, q \in \mathbb{N}$, há apenas três duplas de números naturais que satisfazem a equação (3.1). Assim, as tesselações regulares são formadas por triângulos equiláteros ($\{3, 6\}$), por quadrados ($\{4, 4\}$) ou por hexágonos regulares ($\{6, 3\}$).

3.2.2 SEMIRREGULARES

As tesselações semirregulares, também denominadas Arquimedianas, são construídas com dois ou mais tipos de polígonos regulares. Nessas tesselações, a configuração em cada nó deve ser a mesma. Há oito padrões possíveis para essas tesselações. A Figura 3.4 ilustra três desses padrões.

Figura 3.4 – Tesselações semirregulares ou Arquimedianas

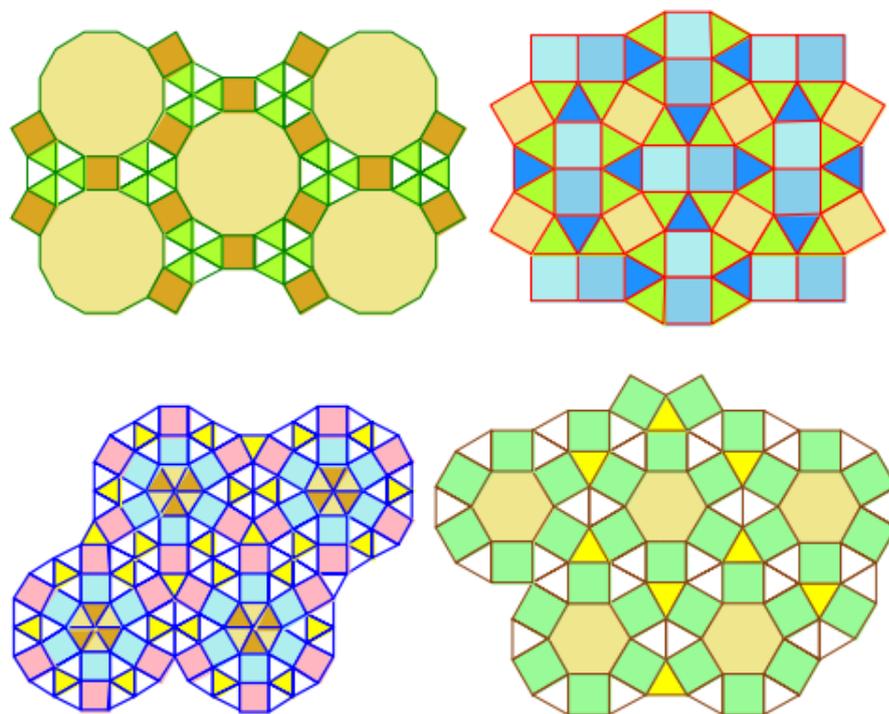


Fonte: Smigly (2017).

3.2.3 DEMIRREGULARES

São tesselações construídas com dois ou mais tipos de polígonos regulares, sendo que a configuração em cada nó não é constante. Existem catorze padrões possíveis, sendo quatro deles ilustrados na Figura 3.5.

Figura 3.5 – Tesselações demirregulares

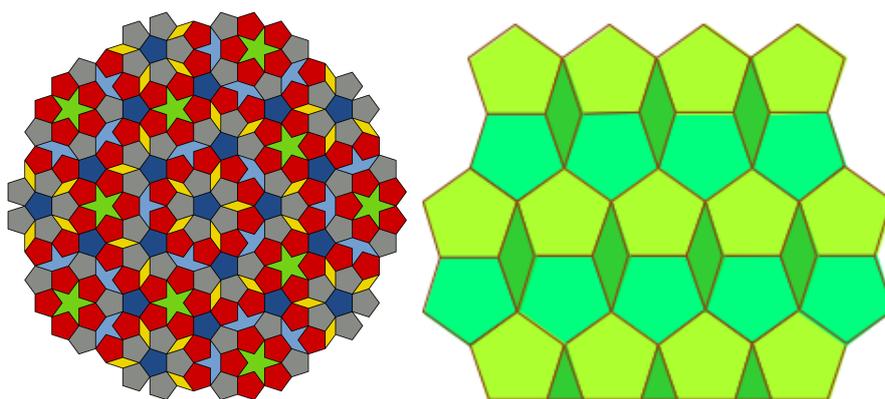


Fonte: Smigly (2017).

3.2.4 IRREGULARES

Tesselações construídas com dois ou mais polígonos, regulares e irregulares. A Figura 3.6 ilustra duas tesselações irregulares.

Figura 3.6 – Tesselações irregulares

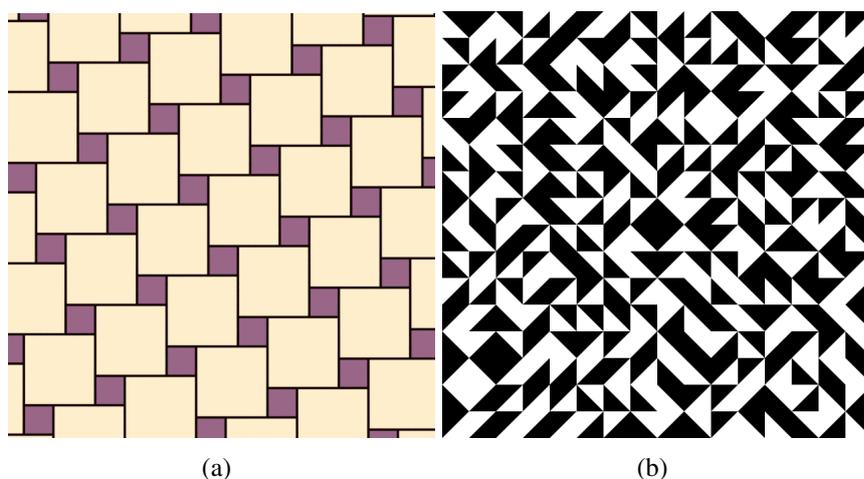


Fonte: Smigly (2017).

3.2.5 PERIÓDICAS

São tesselações que possuem padrões que se repetem. As tesselações que não apresentam padrões que se repetem são denominadas aperiódicas ou não periódicas. A Figura 3.7 ilustra tesselações periódicas e aperiódicas.

Figura 3.7 – Tesselações: (a) periódica; (b) aperiódica

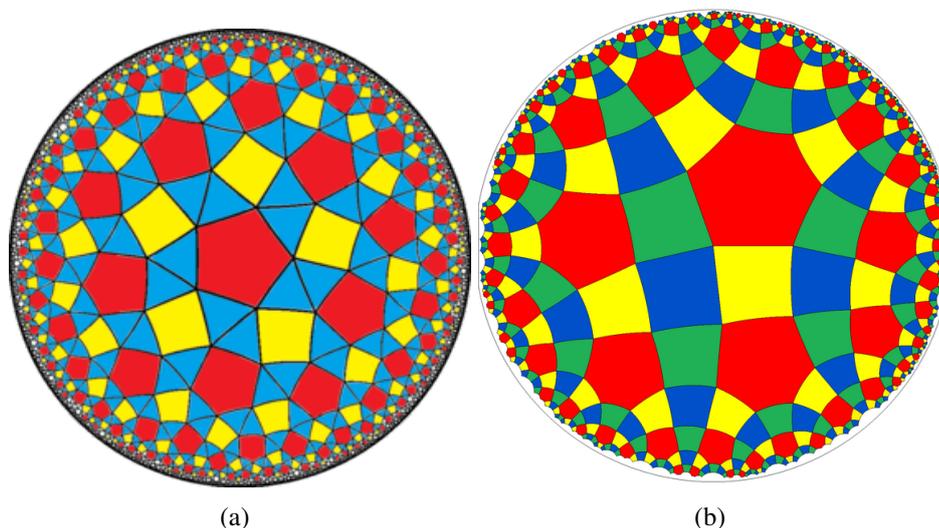


Fonte: Smigly (2017).

3.3 TESSELAÇÕES NO PLANO HIPERBÓLICO

Uma tesselação no plano hiperbólico é uma decomposição deste em polígonos hiperbólicos, de maneira que os polígonos cubram o plano hiperbólico e tenham em comum somente vértices e lados. A Figura 3.8 ilustra duas tesselações no disco de Poincaré.

Figura 3.8 – Tesselações no disco de Poincaré: (a) usando triângulos, quadriláteros e pentágonos hiperbólicos; (b) usando quadriláteros e hexágonos hiperbólicos



Fonte: Fisher (2020).

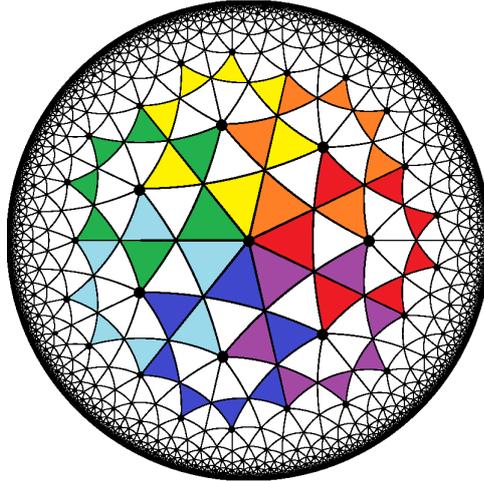
As tesselações no plano hiperbólico podem ser classificadas em:

1. *regulares*: empregam um único polígono hiperbólico regular para recobrir o plano hiperbólico;

2. *semirregulares*: utilizam dois ou mais polígonos hiperbólicos regulares para recobrir o plano hiperbólico;
3. *irregulares*: utilizam polígonos hiperbólicos irregulares para recobrir o plano hiperbólico.

A Figura 3.9 ilustra uma tesselação regular no disco de Poincaré empregando triângulos hiperbólicos regulares.

Figura 3.9 – Tesselação regular com d-triângulos no disco de Poincaré



Fonte: Wikipedia (2020).

Como provado no Capítulo 2, a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor do que π . Assim, uma tesselação regular $\{p, q\}$ no plano hiperbólico satisfaz a inequação $\frac{2\pi}{p} + \frac{2\pi}{q} < \pi$, ou, equivalentemente, a $(p-2)(q-2) > 4$.

Teorema 3.1. *Existe uma tesselação regular no plano hiperbólico com polígonos de p lados, onde q polígonos se encontram em cada nó (vértice) do recobrimento, se*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}. \quad (3.2)$$

Demonstração. Temos que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor que π e a soma dos ângulos internos de um polígono hiperbólico de p lados é menor que $(p-2)\pi$. Seja α um ângulo interno de um polígono hiperbólico em um recobrimento. Assim:

$$\frac{(p-2)\pi}{p} \cdot q > \alpha \cdot q = 2\pi. \quad (3.3)$$

De (3.3) decorre que:

$$(p-2)(q-2) > 4. \quad (3.4)$$

Desenvolvendo a inequação (3.4), concluímos que:

$$pq - 2p - 2q + 4 > 4 \Rightarrow 2p + 2q < pq \Rightarrow p + q < \frac{pq}{2} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}.$$

□

A inequação (3.2), tese do Teorema 3.1, tem uma infinidade de soluções. Portanto, existem infinitas tesselações regulares no plano hiperbólico e, conseqüentemente, no disco de Poincaré.

3.4 TESSELAÇÕES NO DISCO DE POINCARÉ

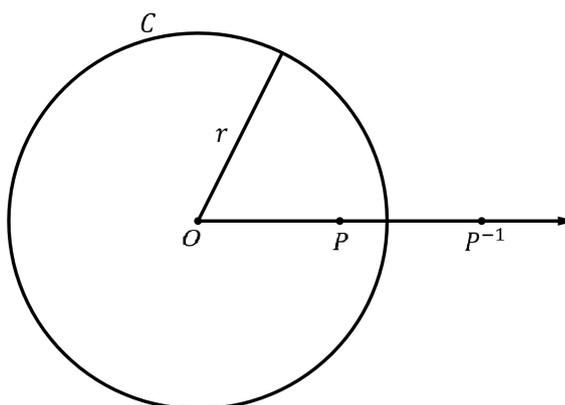
O processo de construção de tesselações no disco de Poincaré começa com a construção da unidade básica de recobrimento, que depois será replicada para pavimentar o disco. Esse processo depende de construções elementares (MURARI; LAZARI, S.d.), como a inversão de um ponto em relação a um círculo, e o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais a um círculo dado e que passam por um ponto deste círculo. Essas e outras construções elementares são descritas a seguir.

Definição 3.1. *Dados um círculo C , de centro O , e um ponto P , distinto de O , o inverso de P , relativamente a O , é o ponto P^{-1} pertencente à semirreta com origem em O e que passa por P tal que o produto das distâncias de O a P e de O a P^{-1} é igual ao quadrado da medida do raio r de C , ou seja,*

$$OP \cdot OP^{-1} = r^2.$$

A Figura 3.10 ilustra a estratégia de inversão de um ponto, segundo a Definição 3.1, no GeoGebra.

Figura 3.10 – Ponto P^{-1} , inverso de P em relação ao círculo C



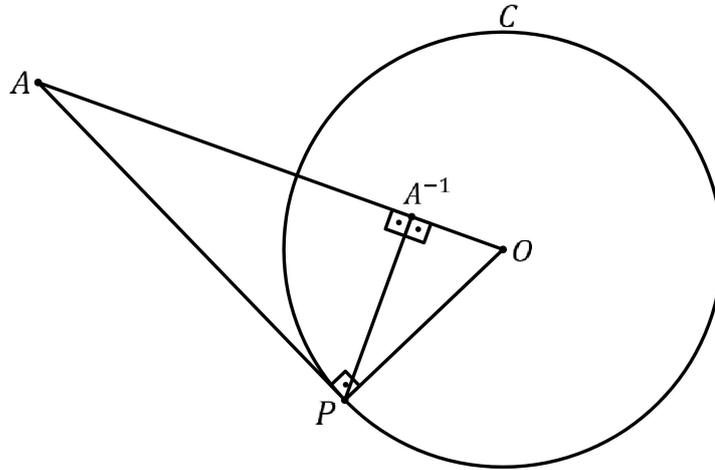
Fonte: O Autor.

1. Dados um círculo C , de centro O , um ponto A , exterior a C , e um ponto P de C que também é ponto do círculo centrado no ponto médio de \overline{OA} , determinar o ponto A^{-1} , inverso de A .

Construção: por inspeção, o círculo centrado em A e que passa por P , é ortogonal a C .

Determinar a projeção ortogonal A^{-1} do ponto P sobre o segmento \overline{OA} . O ponto A^{-1} é o inverso de A , como ilustra a Figura 3.11.

Figura 3.11 – Ponto A^{-1} , inverso de A

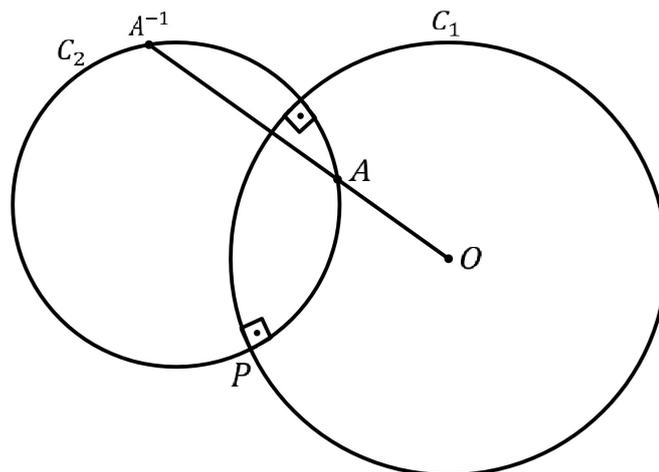


Fonte: O Autor.

2. Dados dois círculos C_1 e C_2 , ortogonais, e um ponto A pertencente à fronteira de C_2 , construir o inverso de A em relação a C_1 .

Construção: traçar a semirreta \overrightarrow{OA} , onde O é o centro de C_1 . A intersecção de \overrightarrow{OA} com C_2 é o ponto A^{-1} , inverso de A em relação a C_1 , como ilustra a Figura 3.12.

Figura 3.12 – Ponto A^{-1} , inverso de A em relação a C_1

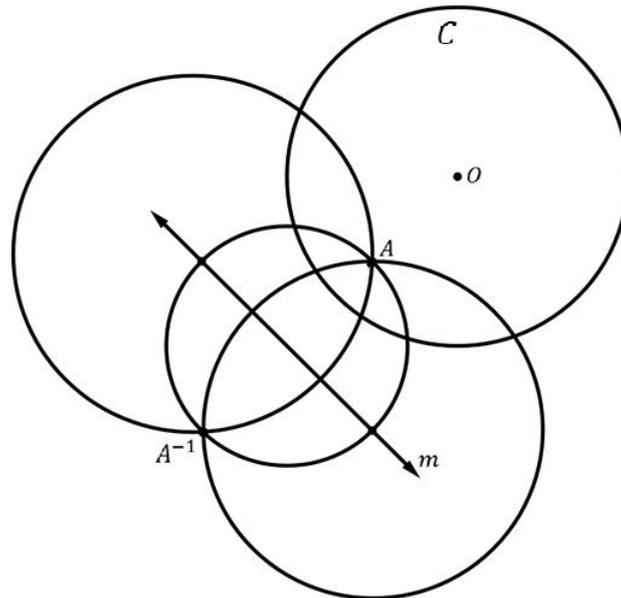


Fonte: O Autor.

3. Dados um círculo C , de centro O , e um ponto A , interior à C , traçar o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais a C e que passam por A .

Construção: determinar o ponto A^{-1} , inverso de A em relação a C , e traçar a mediatriz m do segmento $\overline{AA^{-1}}$, como ilustra a Figura 3.13.

Figura 3.13 – Lugar geométrico m dos centros dos círculos ortogonais a C e que passam por A

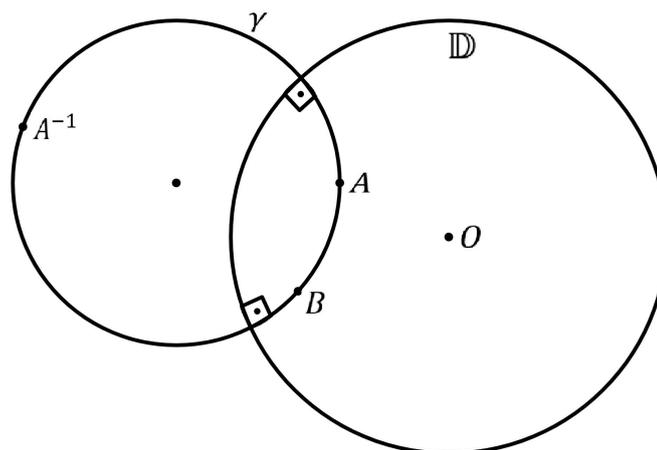


Fonte: O Autor.

4. Dados o disco de Poincaré \mathbb{D} , de centro O , e os pontos A e B do disco, traçar a d-linha que passa por A e B .

Construção: inverter o ponto A , obtendo A^{-1} . Determinar o circuncentro do triângulo ABA^{-1} e traçar o arco com extremos na fronteira de \mathbb{D} e que passa por A e B , centrado no circuncentro do $\triangle ABA^{-1}$, como ilustra a Figura 3.14.

Figura 3.14 – Reta d-linha que passa por A e B , centrada no circuncentro do $\triangle ABA^{-1}$

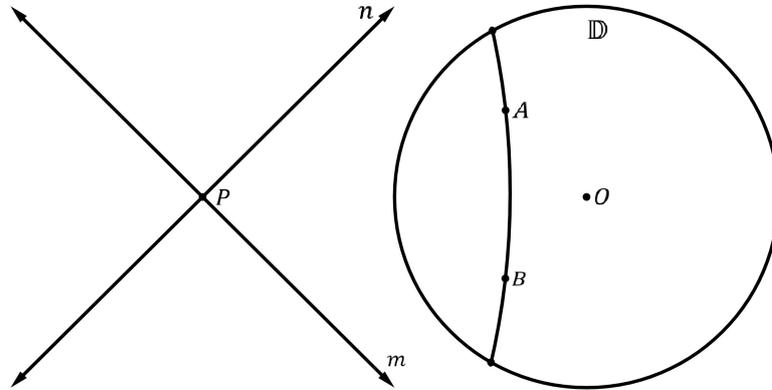


Fonte: O Autor.

5. Dados os pontos A e B no disco de Poincaré \mathbb{D} , de centro O , e os lugares geométricos m e n dos centros dos círculos ortogonais a \mathbb{D} e que passam, respectivamente, por A e B , traçar a d-linha que passa por A e B .

Construção: identificar o ponto $P = m \cap n$ e traçar o arco com extremos na fronteira de \mathbb{D} e que passa por A e B , centrado em P , como ilustra a Figura 3.15.

Figura 3.15 – Reta d-linha que passa por A e B , centrada no ponto $P = m \cap n$

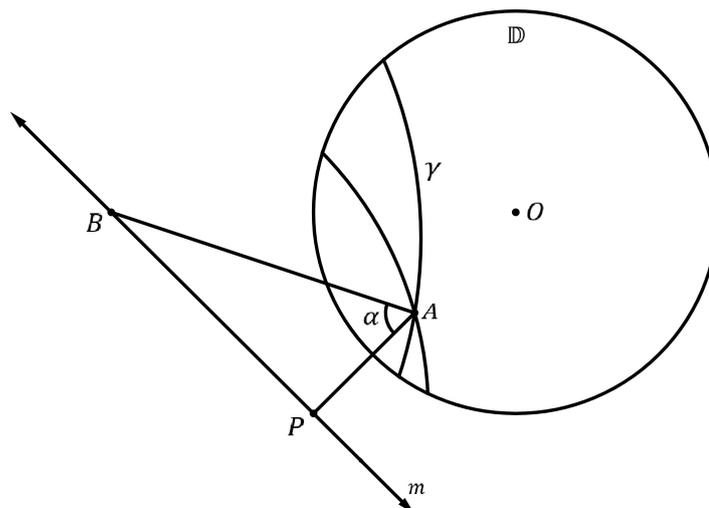


Fonte: O Autor.

6. Dados uma d-linha γ do disco de Poincaré \mathbb{D} , o ponto $A \in \gamma$ e um ângulo Euclidiano α , traçar a d-linha que intersecta γ em A segundo um ângulo α .

Construção: determinar a reta m , lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais a \mathbb{D} e que passam por A , e o ponto $B \in m$, centro da d-linha γ . Em seguida, rotacionar o segmento \overline{AB} segundo o ângulo α , obtendo o segmento \overline{AP} , com $P \in m$. Com centro em P e raio \overline{PA} , traçar a d-linha com extremos na fronteira de \mathbb{D} e que passa por A , como ilustra a Figura 3.16.

Figura 3.16 – Reta d-linha que passa por A e intersecta a d-linha γ

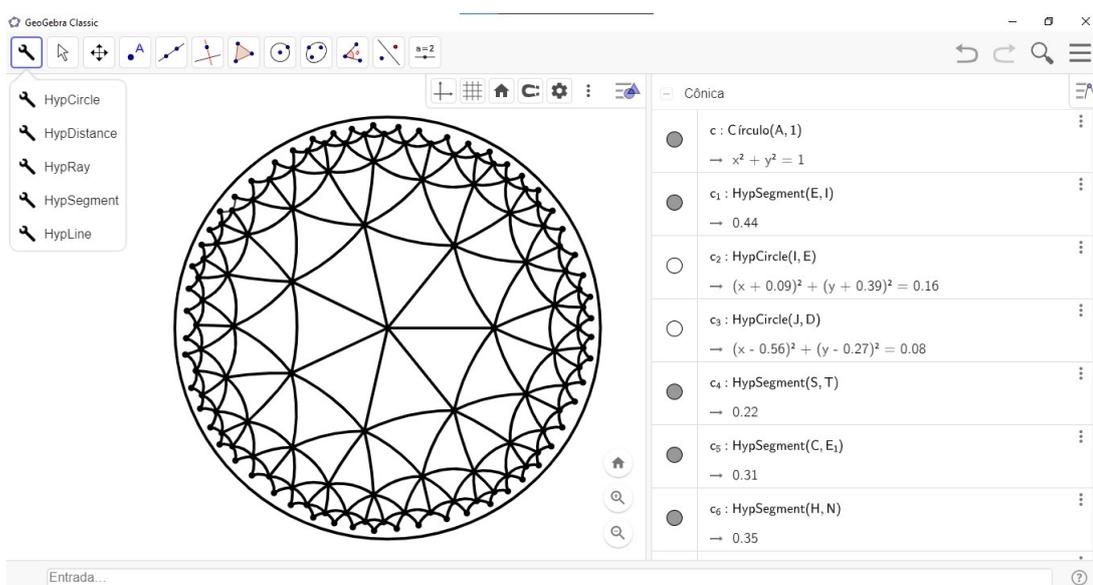


Fonte: O Autor.

3.5 CONSTRUÇÃO DE TESSELAÇÕES COM O GEOGEBRA

A seguir, detalhamos o passo a passo da construção de uma tesselação hiperbólica no GeoGebra (CHRISTERSSON, 2018). Ressaltamos que é necessário que o programa possua previamente as ferramentas hiperbólicas básicas, de modo a deixar o procedimento de construção mais prático e iterativo, como ilustrado na Figura 3.17. Com essas ferramentas, vamos recobrir o disco de Poincaré com polígonos hiperbólicos.

Figura 3.17 – Tela do GeoGebra com as ferramentas hiperbólicas básicas

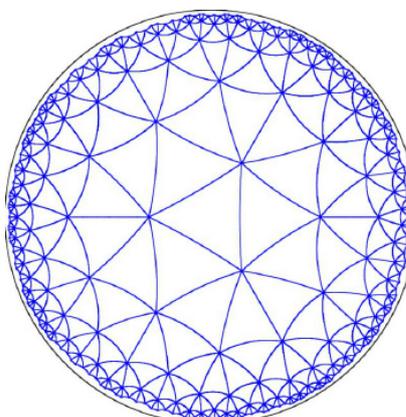


Fonte: O Autor.

3.5.1 TESSELAÇÃO HIPERBÓLICA COM TRIÂNGULOS

Com as ferramentas hiperbólicas do GeoGebra, detalhamos a seguir as etapas da construção da tesselação com d-triângulos ilustrada na Figura 3.18.

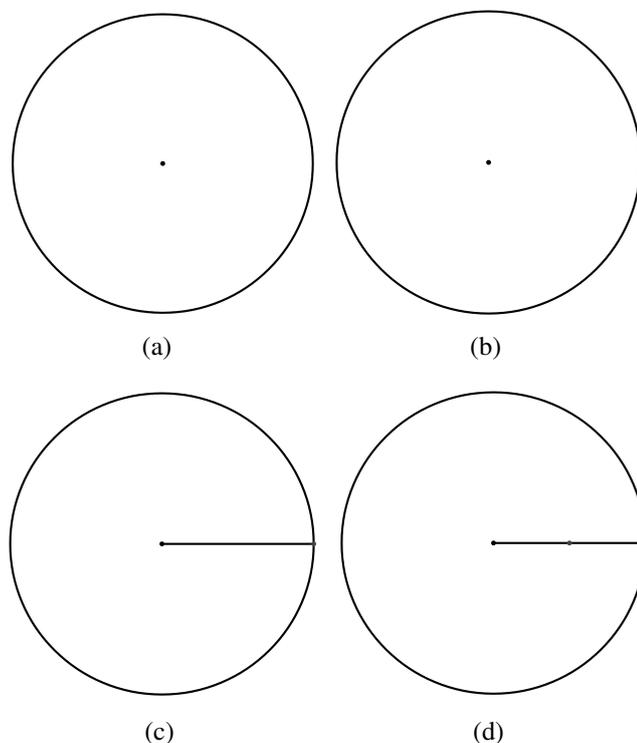
Figura 3.18 – Tesselação com d-triângulos no disco de Poincaré



Fonte: Lopez (2021).

Passo 1: No disco de Poincaré, marcar o ponto central. A seguir, marcar um ponto na fronteira e traçar um segmento Euclidiano, obtendo assim um raio do disco, conforme ilustra a Figura 3.19(c). Para finalizar este passo, marcar o ponto médio do segmento - Figura 3.19(d).

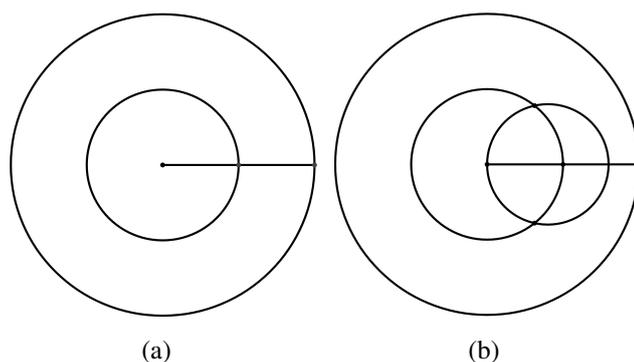
Figura 3.19 – Recobrimo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 1



Fonte: O Autor.

Passo 2: Com a ferramenta *hyperbolic circle* (círculo hiperbólico), marcar o ponto central do disco e depois o ponto médio do raio, obtendo a circunferência circuncêntrica ao disco e de raio igual à metade do raio do disco - Figura 3.20(a). Repetir em seguida o procedimento, porém invertendo a ordem de marcação dos pontos: primeiro o ponto médio do segmento e, depois, o centro do disco. Dessa forma, obtemos outra circunferência, como ilustra a Figura 3.20(b). As duas circunferências traçadas têm dois pontos de intersecção, que devem ser marcados.

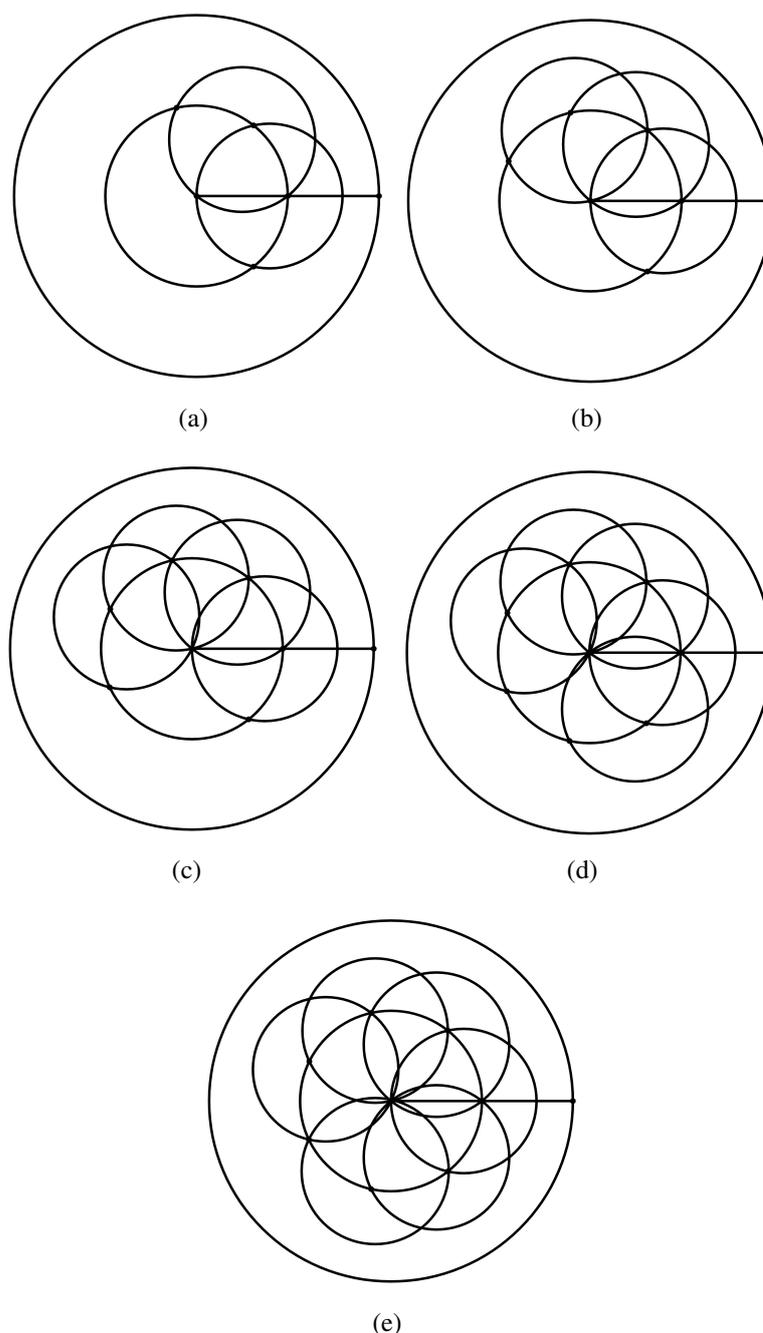
Figura 3.20 – Recobrimo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 2



Fonte: O Autor.

Passo 3: A partir dos pontos de intersecção com a circunferência concêntrica ao disco, utilizamos a ferramenta *hyperbolic circle* para traçar outras circunferências - Figura 3.21, e ir marcando os sete (7) pontos de intersecção ao longo da circunferência central. Estes pontos estão igualmente espaçados nessa circunferência, como mostra a Figura 3.22(a).

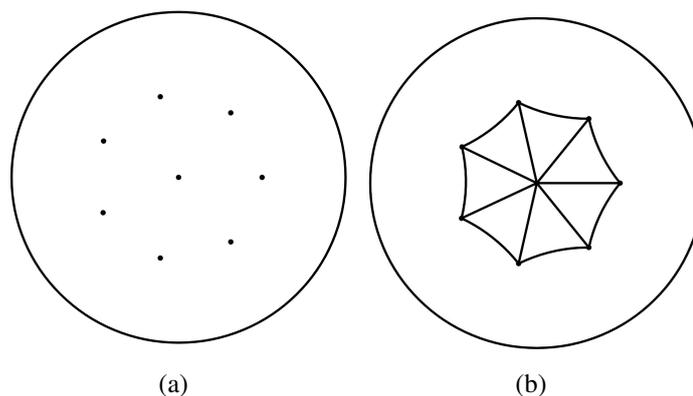
Figura 3.21 – Recobrindo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 3



Fonte: O Autor.

Passo 4: Após marcar os sete pontos, ocultar todas as circunferências e o raio inicial. Depois disso, com a ferramenta *hyperbolic segment* (segmento hiperbólico), ligar todos os pontos definindo os triângulos hiperbólicos, conforme ilustra a Figura 3.22(b).

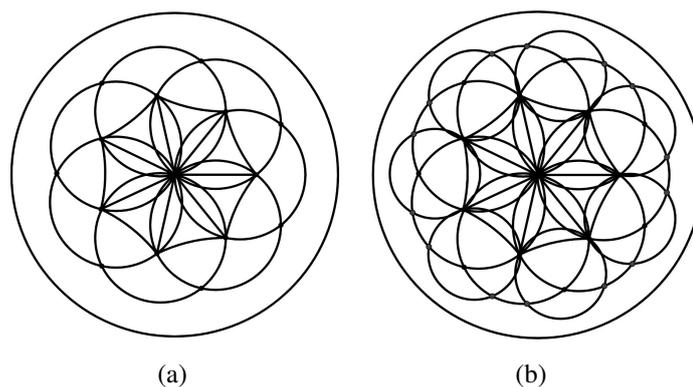
Figura 3.22 – Recobrindo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 4



Fonte: O Autor.

Passo 5: A partir dos sete vértices, usando novamente a ferramenta *hyperbolic circle*, desenhar as circunferências marcando os pontos de intersecção - Figura 3.23.

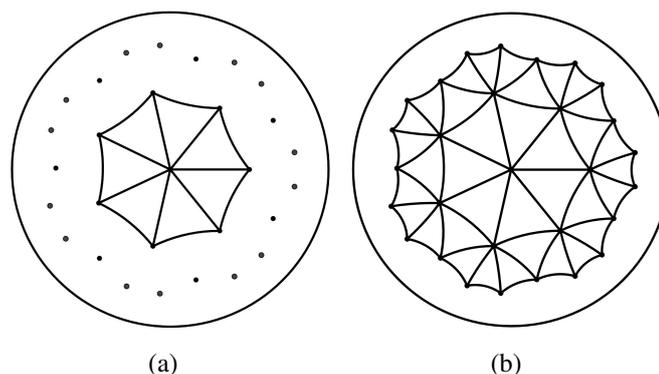
Figura 3.23 – Recobrindo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 5



Fonte: O Autor.

Passo 6: Ocultar novamente todas as circunferências traçadas, mantendo os vinte e um (21) pontos de intersecção visíveis - Figura 3.24(a). Em seguida, ligar todos os pontos para traçar os triângulos hiperbólicos, conforme ilustra a Figura 3.24(b).

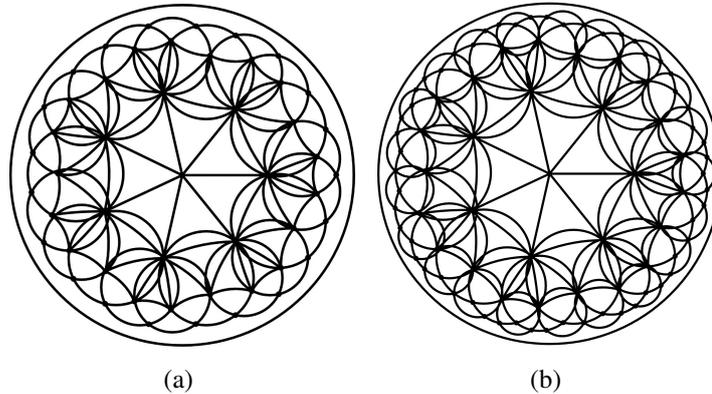
Figura 3.24 – Recobrindo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 6



Fonte: O Autor.

Passo 7: Novamente, a partir dos vinte e um vértices determinados no passo 6, traçar as circunferências e marcar os pontos de intersecção - Figura 3.25, sempre utilizando a ferramenta *hyperbolic circle*.

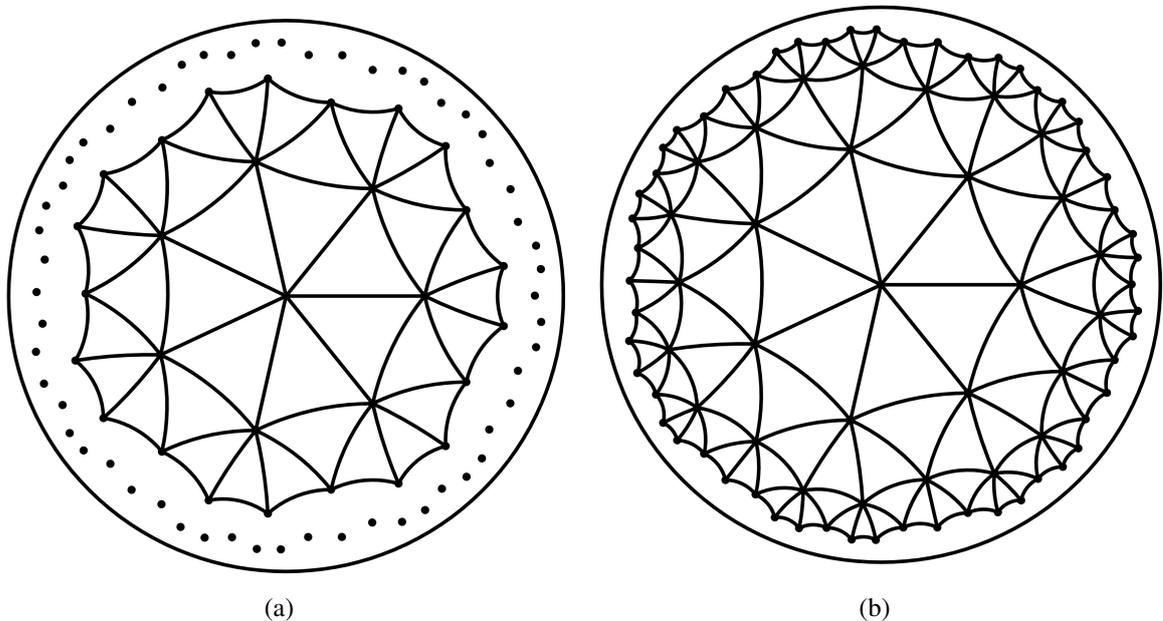
Figura 3.25 – Recobrimo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 7



Fonte: O Autor.

Passo 8: Ocultar todas as circunferências traçadas no passo 7, mantendo os cinquenta e seis (56) pontos de intersecção marcados - Figura 3.26(a). Depois, com a ferramenta *hyperbolic segment*, ligar todos os pontos para definir os triângulos hiperbólicos, conforme ilustra a Figura 3.26(b).

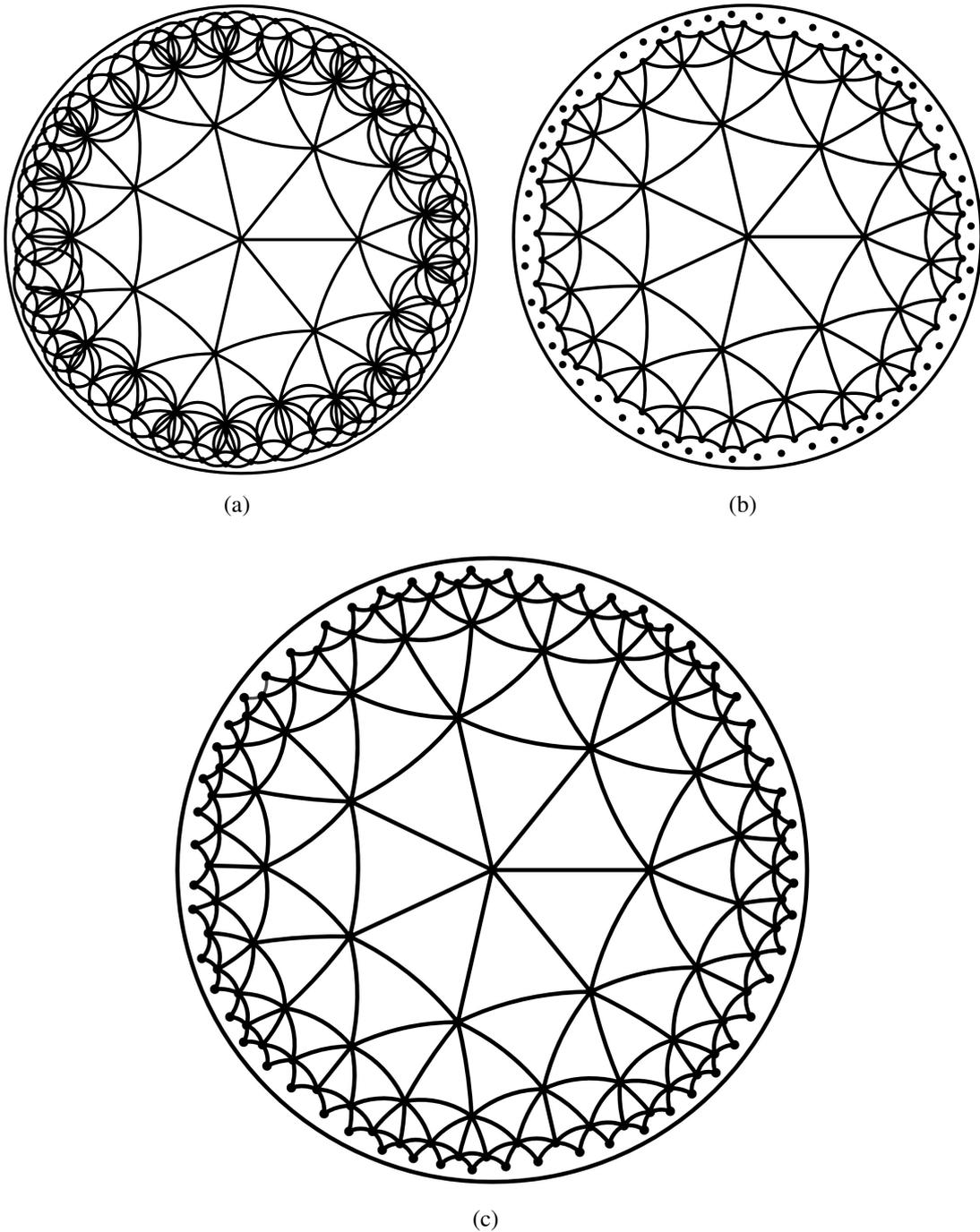
Figura 3.26 – Recobrimo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 8



Fonte: O Autor.

Passo 9: Aplicar o processo iterativo dos passos anteriores, marcando todos os pontos de intersecção das circunferências, ocultando as mesmas e ligando os pontos, conforme ilustra a Figura 3.27(c).

Figura 3.27 – Recobrindo o disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos: Passo 9



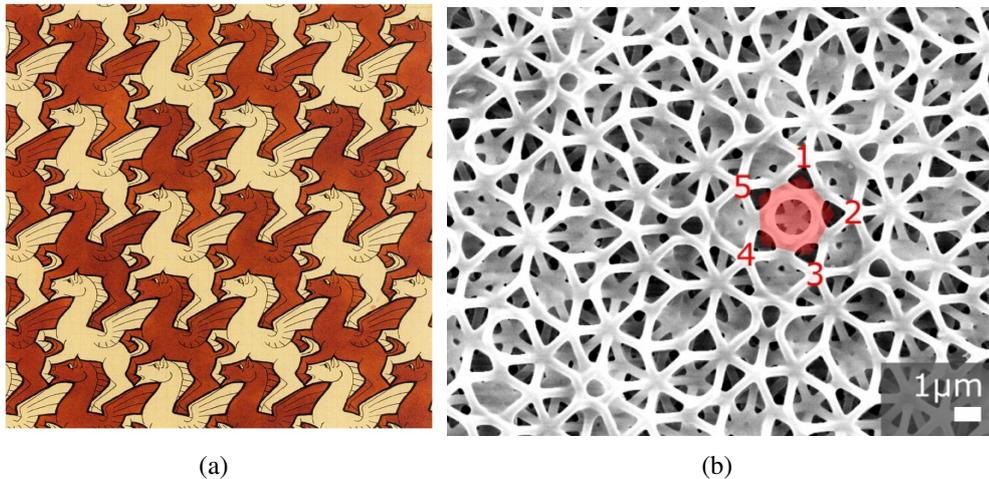
Fonte: O Autor.

Prosseguindo com o processo iterativo descrito nos passos anteriores, os triângulos hiperbólicos ficarão cada vez menores e cada vez mais próximos da fronteira do disco de Poincaré.

3.6 APLICAÇÕES

As tesselações Euclidianas estão presentes nas artes e na cristalografia. Quanto à primeira, citamos novamente as obras de Escher, como ilustra a Figura 3.28(a); quanto à segunda, a disposição dos átomos em um quasicristal pode ocorrer de forma periódica, como ilustra a Figura 3.28(b). Neste caso, o padrão de repetição é elemento de estudo das propriedades físicas e químicas desses materiais (SMIGLY, 2017).

Figura 3.28 – Tesselações Euclidianas: (a) Escher - Pegasus no. 105; (b) padrão pentagonal de um quasicristal observado em um microscópio eletrônico



Fonte: Smigly (2017).

Quanto às tesselações hiperbólicas, as aplicações estão relacionadas à codificação de d-linhas e à transmissão e às técnicas de processamento digital de sinais (ANTUNES; QUEIROZ, 2017).

4 CONCLUSÕES

Apresentamos neste trabalho um breve relato da história das geometrias não Euclidianas, enfatizando o problema que deu origem às mesmas, assim como um modelo de geometria hiperbólica no plano: o disco de Poincaré. Neste modelo, associamos alguns resultados com resultados clássicos da geometria Euclidiana: a soma dos ângulos internos de um triângulo, a área de um triângulo, o teorema de Pitágoras e algumas relações trigonométricas, como as leis dos senos e dos cossenos. Estudamos ainda algumas aplicações no disco de Poincaré, como a construção de tesselações empregando o software de geometria dinâmica GeoGebra.

O presente trabalho foi organizado para complementar o trabalho de Motta (2018), cujo foco foi geometria esférica. Muitas das demonstrações do Capítulo 2 exigem transformações hiperbólicas, tema não abordado e que constitui uma lacuna a ser preenchida com trabalhos futuros. Além das demonstrações, a construção de figuras com o GeoGebra também revelou-se um desafio, obrigando o autor a aperfeiçoar suas concepções sobre o uso do software.

Organizamos este trabalho com o intuito de atender à legislação do Estado do Paraná sobre a abordagem de geometrias não Euclidianas em disciplinas obrigatórias nos Cursos de Licenciatura em Matemática. Esperamos assim que este trabalho seja útil aos estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Câmpus Curitiba.

REFERÊNCIAS

- AMS, A. M. S. **How did Escher do it?** 2010. Disponível em: <<http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-circle-limit>>. Acesso em: 05 nov. 2019. 31
- ANDRADE, P. F. **Introdução à geometria hiperbólica - o modelo de Poincaré**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 32, 34, 56, 57, 59, 61, 63, 87, 91
- ANTUNES, A. K. L.; QUEIROZ, C. R. O. Q. Tesselações no plano hiperbólico. **Sigmae**, n. 6(2), p. 69–77, 2017. 66, 67, 82
- ÁVILA, G. Legendre e o postulado das paralelas. **Revista do Professor de Matemática**, n. 22, 1988. 19, 34
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 13
- BIANCONI, R. **Resumo do livro *Euclidis ab omni naevo vindicatus de Saccheri***. 2018. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~mat/0230/saccheri.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2019. 20
- BOOKS, F. **Apêndice explicando a absoluta verdadeira ciência do espaço**. 2017. Disponível em: <<https://www.foldvaribooks.com/pages/books/85/ioannis-bolyai-janos-de-bolya-johannes/appendix-scientiam-spatii-absolute-veram-exhibens-a-veritate-aut-falsitate-axiomatis-xi>>. Acesso em: 02 nov. 2017. 25
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **A history of mathematics**. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011. 13, 20, 21, 27, 32
- BRANNAN, D. A.; ESPLIN, M. F.; GRAY, J. J. **Geometry**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 32, 34, 36, 41, 53, 65, 66, 87
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. MEC/SEB/CNE, Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2021. 30
- BURTON, D. M. **The history of mathematics: an introduction**. 7. ed. New York: McGraw-Hill, 2011. 13, 14, 19, 22, 24, 26, 27, 29, 32
- CARMO, M. P. do. Geometrias não-euclidianas. **Matemática Universitária**, n. 6, p. 25–48, 1987. 19
- CHRISTERSSON, M. **Non-Euclidean geometry**. 2018. Disponível em: <<http://www.malinc.se/noneuclidean/en/index.php>>. Acesso em: 24 maio 2021. 66, 76
- DESCICLOPEDIA. **Johann Heinrich Lambert**. 2013. Disponível em: <http://desciclopedia.org/wiki/Johann_Heinrich_Lambert>. Acesso em: 19 out. 2019. 22
- DORIA, C. M. **Geometrias: Euclidiana, esférica e hiperbólica**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019. 32, 56, 57, 59, 61, 63
- ECO/UFRJ. **Escher: quebrando as barreiras entre arte e matemática**. 2013. Disponível em: <<https://comunicacaoart20122.wordpress.com/2013/02/19/escher-quebrando-as-barreiras-entre-arte-e-matematica/>>. Acesso em: 07 nov. 2019. 31, 67

- ESCHER, M. C. **The official website**. 2019. Disponível em: <<https://mcescher.com/>>. Acesso em: 05 nov. 2019. 30
- EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Unesp, 2009. 13, 14
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011. 13, 14, 19, 20, 22, 23, 24, 29, 32
- FISHER, G. **Hyperbolic surface tilings woven with beads and thread**. 2020. Disponível em: <<http://gwenbeads.blogspot.com/2014/05/hyperbolic-surface-tilings-woven-with.html>>. Acesso em: 25 mar. 2021. 70
- GELFERT, K. **Geometria Não Euclidiana**. 2017a. Disponível em: <<http://www.im.ufrj.br/~gelfert/cursos/2017-1-GeoNEuc/2017-1-GeoNEuc.pdf>>. Acesso em: 19 out. 2019. 20
- GELFERT, K. **Geometria Não Euclidiana**. 2017b. Disponível em: <<http://www.im.ufrj.br/~gelfert/cursos/2017-1-GeoNEuc/2017-1-GeoNEuc.pdf>>. Acesso em: 19 out. 2019. 22
- GEOGEBRA. **GeoGebra - Aplicativos matemáticos**. 2021. Disponível em: <https://www.geogebra.org/?lang=pt_BR>. Acesso em: 31 mar. 2021. 32
- GETTYIMAGES. **Tesselação**. 2021. Disponível em: <<https://www.istockphoto.com/br/search/2/image?mediatype=illustration&phrase=tessela%C3%A7%C3%A3o>>. Acesso em: 23 mar. 2021. 68
- HILBERT, D. **Fundamentos da geometria**. 1. ed. Portugal: Gradiva, 2003. 15
- LEITÃO, M. R. **Tesselações no ensino de geometria Euclidiana**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 2015. 66, 67
- LIBRAIRIE, C. S. **Geometrische untersuchungen zur theorie der parallellinien**. 2017. Disponível em: <<https://camillesourget.com/en-210-lobachevski-geometrische-untersuchungen-zur-theorie-der--rare-edition-originale-de-ce-.html>>. Acesso em: 02 nov. 2017. 23
- LIMA, E. L. **Isometrias**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 60, 67
- LOPEZ, J. H. **ResearchGate - Tessellation on the Poincare disk**. 2021. Disponível em: <https://www.researchgate.net/figure/3-7-tessellation-on-the-Poincare-disk_fig1_258601480>. Acesso em: 04 jun. 2021. 76
- MOTTA, G. P. **Geometrias não Euclidianas no plano e geometria esférica**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — UTFPR, Câmpus Curitiba, 2018. 13
- MURARI, C.; LAZARI, H. **Tesselações hiperbólicas com régua e compasso**. S.d. Disponível em: <<https://miltonborba.org>>. Acesso em: 23 mar. 2021. 66, 72
- OVERLEAF. **Latex, evoluído**. 2019. Disponível em: <<https://pt.overleaf.com/>>. Acesso em: 29 mar. 2019. 32
- PALIOURAS, J. D. **Complex variables for scientists and engineers**. 1. ed. New York: Macmillan Publishing Co., 1975. 41

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática**. Governo do Paraná/SEED/DEB, Curitiba, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2021. 30

RODRIGUES, P. R. S. **Felix Klein**. 2018. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/b_fklein/>. Acesso em: 27 out. 2019. 29

ROONEY, A. **A história da matemática**. 1. ed. São Paulo: M. Books, 2012. 13, 21, 25, 26, 32

SMIGLY, D. de A. **Tesselações pentagonais e mosaicos de Penrose**. 2017. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~dsmigly/ensino/palestras/Tessela%C3%A7%C3%B5es%20pentagonais%20e%20mosaicos%20de%20Penrose.pdf>>. Acesso em: 23 mar. 2021. 66, 67, 68, 69, 70, 82

STEWART, J. **Cálculo 1**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. 54

STEWART, J. **Cálculo 2**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2007. 55, 57

WIKIPÉDIA. **Bernhard Riemann**. 2017a. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann>. Acesso em: 02 nov. 2017. 26

WIKIPÉDIA. **Carl Friedrich Gauss**. 2017b. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss>. Acesso em: 19 out. 2019. 25

WIKIPÉDIA. **Eugenio Beltrami**. 2017c. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Eugenio_Beltrami>. Acesso em: 02 nov. 2017. 26

WIKIPEDIA. **Felix klein**. 2017d. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Klein>. Acesso em: 02 nov. 2017. 29

WIKIPÉDIA. **Henri Poincaré**. 2017e. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincaré>. Acesso em: 02 nov. 2017. 27

WIKIPÉDIA. **Hermann Minkowski**. 2017f. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Hermann_Minkowski>. Acesso em: 02 nov. 2017. 29

WIKIPEDIA. **János Bolyai**. 2017g. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/János_Bolyai>. Acesso em: 02 nov. 2017. 24

WIKIPEDIA. **Nicolai Ivanovitch Lobachevsky**. 2017h. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Lobachevsky>. Acesso em: 02 nov. 2017. 23

WIKIPEDIA. **Order-7 heptagrammic tiling**. 2020. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Order-7_heptagrammic_tiling>. Acesso em: 23 mar. 2021. 71

APÊNDICE

Apresentamos neste apêndice três resultados fundamentais que foram utilizados em algumas das demonstrações presentes no Capítulo 2. São eles: o teste da ortogonalidade, o lema da origem e o lema da projeção. Estes resultados estão acompanhados de suas respectivas demonstrações. Nossas referências neste apêndice são *Geometry* (BRANNAN; ESPLEN; GRAY, 2012) e *Introdução à geometria hiperbólica - o modelo de Poincaré* (ANDRADE, 2013).

TESTE DA ORTOGONALIDADE

Teorema .1. *Dois círculos intersectantes C_1 e C_2 , descritos pelas equações*

$$x^2 + y^2 + f_1x + g_1y + h_1 = 0 \quad (1)$$

e

$$x^2 + y^2 + f_2x + g_2y + h_2 = 0, \quad (2)$$

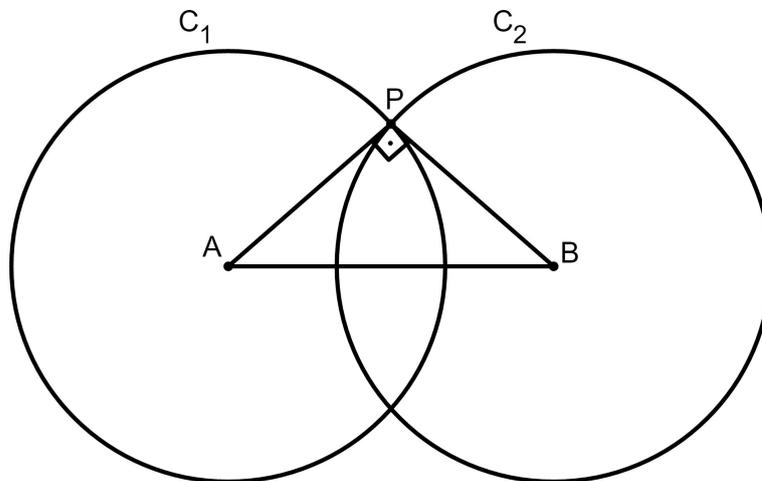
respectivamente, são ortogonais se, e somente se,

$$f_1f_2 + g_1g_2 = 2(h_1 + h_2),$$

com $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja P um dos pontos de intersecção dos círculos C_1 e C_2 , com centros nos pontos A e B , respectivamente, como ilustrado na Figura .1.

Figura .1 – Círculos C_1 e C_2 ortogonais



Fonte: O Autor.

Temos que o círculo C_1 tem centro no ponto A e raio r_1 , dados respectivamente, a partir da equação (1), por:

$$A = \left(-\frac{1}{2}f_1, -\frac{1}{2}g_1 \right);$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{4}f_1^2 + \frac{1}{4}g_1^2 - h_1}. \quad (3)$$

Da mesma forma, temos que o círculo C_2 tem centro no ponto B e raio r_2 , dados respectivamente, da equação (2), por:

$$B = \left(-\frac{1}{2}f_2, -\frac{1}{2}g_2 \right);$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{4}f_2^2 + \frac{1}{4}g_2^2 - h_2}. \quad (4)$$

Como os círculos são ortogonais (hipótese), C_1 e C_2 se intersectam segundo ângulos retos. Assim, a reta \overleftrightarrow{AP} é tangente ao círculo C_2 em P e, portanto, é perpendicular à reta \overleftrightarrow{BP} em P . Logo, o triângulo ABP é retângulo em P . Aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo, obtemos:

$$AP^2 + BP^2 = AB^2. \quad (5)$$

Os segmentos \overline{AP} e \overline{BP} são os raios r_1 e r_2 dos círculos C_1 e C_2 , respectivamente. Dessa forma, de (3) e (4), temos respectivamente que:

$$AP^2 = r_1^2 = \frac{1}{4}f_1^2 + \frac{1}{4}g_1^2 - h_1; \quad (6)$$

$$BP^2 = r_2^2 = \frac{1}{4}f_2^2 + \frac{1}{4}g_2^2 - h_2. \quad (7)$$

Além disso, calculando a distância entre os pontos A e B obtemos:

$$AB^2 = \left(\frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_2 \right)^2 + \left(\frac{1}{2}g_1 - \frac{1}{2}g_2 \right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}f_1^2 - \frac{1}{2}f_1f_2 + \frac{1}{4}f_2^2 \right) + \left(\frac{1}{4}g_1^2 - \frac{1}{2}g_1g_2 + \frac{1}{4}g_2^2 \right). \quad (8)$$

Substituindo (6), (7) e (8) em (5), concluímos que:

$$\frac{1}{4}f_1^2 + \frac{1}{4}g_1^2 - h_1 + \frac{1}{4}f_2^2 + \frac{1}{4}g_2^2 - h_2 = \frac{1}{4}f_1^2 - \frac{1}{2}f_1f_2 + \frac{1}{4}f_2^2 + \frac{1}{4}g_1^2 - \frac{1}{2}g_1g_2 + \frac{1}{4}g_2^2;$$

$$-h_1 - h_2 = -\frac{1}{2}(f_1f_2 + g_1g_2);$$

$$f_1f_2 + g_1g_2 = 2(h_1 + h_2). \quad (9)$$

Por outro lado, se (9) for válida (tese), então o triângulo ABP é retângulo em P e os círculos C_1 e C_2 se intersectam segundo ângulos retos.

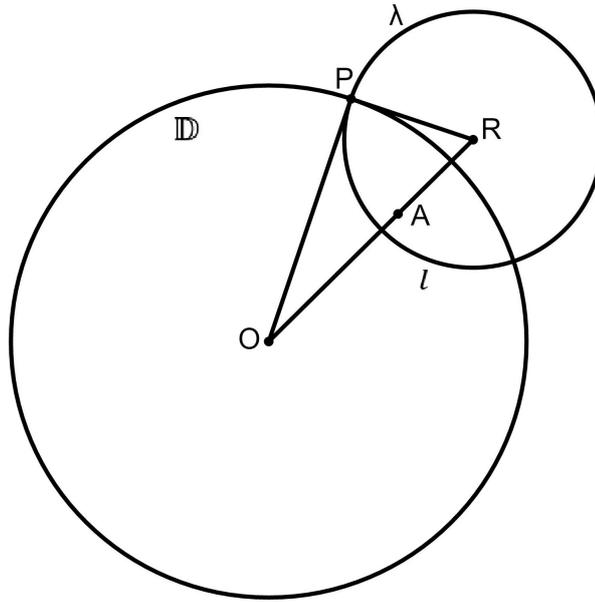
□

LEMA DA ORIGEM

Lema .1. *Se A é um ponto do disco \mathbb{D} de Poincaré, diferente do centro O , então existe uma d-linha l tal que a reflexão hiperbólica em l mapeia A para O .*

Demonstração. Sejam: o disco \mathbb{D} de Poincaré, de centro O ; o ponto $A \in \mathbb{D}$; a d-linha l , parte do círculo Euclidiano λ de centro R ; o ponto P , interseção de λ e \mathbb{D} , como ilustra a Figura .2.

Figura .2 – D-triângulo RPO e d-linha l



Fonte: O Autor.

A condição para que a inversão mapeie A para O é dada por

$$RO \cdot RA = RP^2, \quad (10)$$

sendo \overline{RP} o raio do círculo λ que queremos determinar.

A condição para que parte do círculo λ seja uma d-linha é que o triângulo RPO seja retângulo em P . Aplicando o teorema de Pitágoras a esse triângulo, temos que:

$$RP^2 + PO^2 = RO^2. \quad (11)$$

Como $OP = 1$, podemos reescrever (11) como

$$RP^2 = RO^2 - 1. \quad (12)$$

Substituindo (10) em (12), deduzimos que:

$$\begin{aligned} RO \cdot RA &= RO^2 - 1; \\ RO^2 - RO \cdot RA &= 1; \\ RO(RO - RA) &= 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Temos que $RO - RA = AO$. Portanto, de (13), concluímos que:

$$\begin{aligned} RO \cdot AO &= 1; \\ OA \cdot OR &= 1. \end{aligned} \tag{14}$$

A equação (14) mostra que o círculo de centro R é determinado invertendo-se o ponto A dado no círculo limite λ . □

LEMA DA PROJEÇÃO

Lema .2. Se UVW é um triângulo retângulo hiperbólico de ângulos internos α, β e $\gamma = \frac{\pi}{2}$ opostos, respectivamente, aos lados de medidas hiperbólicas a, b e c , então

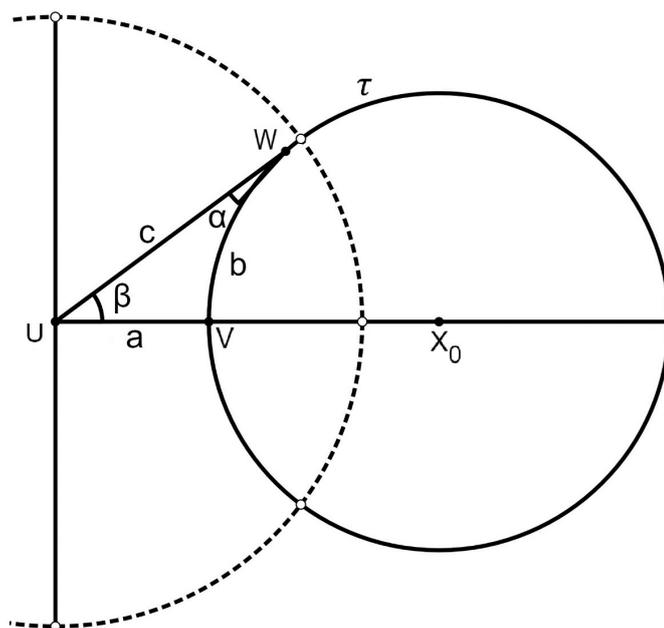
$$\tanh(a) = \tanh(c)\cos(\beta) \tag{15}$$

e

$$\tanh(b) = \tanh(c)\cos(\alpha). \tag{16}$$

Demonstração. Seja WUV um d-triângulo em \mathbb{D} , retângulo em V , com lados de medidas a, b e c , opostos respectivamente aos vértices W, U e V . A menos de uma isometria, podemos supor que o d-triângulo retângulo tem vértices em $U = (0, 0)$ e $V = \left(\tanh\left(\frac{a}{2}\right), 0\right)$, e que a ordenada de W é positiva. Seja ainda τ o círculo gerador da d-linha que contém o lado WV , como ilustra a Figura .3.

Figura .3 – D-triângulo retângulo WUV e o círculo τ gerador da d-linha que contém WV



Fonte: O Autor.

Com essas hipóteses, a abcissa x_0 do centro e o raio Euclidiano r_0 do círculo τ são, respectivamente:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \tanh^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{a}{2}\right)} \right); \\ r_0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \tanh^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{a}{2}\right)} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Dessa forma, a equação cartesiana do círculo τ é dada por:

$$z\bar{z} - 2x_0\operatorname{Re}(z) = -1. \quad (18)$$

Como $W \in \tau$ e $\|w\| = \tanh\left(\frac{c}{2}\right)$, temos que:

$$\operatorname{Re}(w) = \|w\| \cos(\beta) = \tanh\left(\frac{c}{2}\right) \cos(\beta), \quad (19)$$

onde w é o afixo de UW .

Substituindo (17) e (19) em (18), obtemos que:

$$\tanh^2\left(\frac{c}{2}\right) - \left(\frac{1 + \tanh^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{a}{2}\right)} \right) \tanh\left(\frac{c}{2}\right) \cos(\beta) = -1,$$

ou equivalentemente,

$$\left(\frac{1 + \tanh^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{a}{2}\right)} \right) \cos(\beta) = \frac{1 + \tanh^2\left(\frac{c}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{c}{2}\right)}. \quad (20)$$

Empregando a identidade trigonométrica (ANDRADE, 2013)

$$\tanh(2a) = \frac{2\tanh(a)}{1 + \tanh^2(a)},$$

podemos reescrever (20) como

$$\tanh(c)\cos(\beta) = \tanh(a),$$

o que comprova a identidade (15).

A demonstração da identidade (16) é análoga. Para efetuá-la, basta considerar o d-triângulo retângulo em outra posição. A menos de uma isometria, podemos considerar W no centro do disco, o lado WV contido no diâmetro e a ordenada de U positiva.

□

ÍNDICE

- D-linhas, 36
- D-triângulo
 - duplamente assintótico, 49
 - singularmente assintótico, 47
 - triplamente assintótico, 44
- Escher, 30, 66
- Geometrias hiperbólicas
 - disco de Poincaré, 27, 35
 - semiplano de Poincaré, 28
- Isometria, 60
- Matemáticos
 - Beltrami, 26
 - Bolyai, 24
 - Euclides, 13
 - Gauss, 25
 - Klein, 29
 - Lambert, 22
 - Legendre, 22
 - Lobachevsky, 23
 - Möbius, 45
 - Playfair, 19
 - Poincaré, 26
 - Riemann, 25
 - Saccheri, 20
- Polígono hiperbólico
 - ideal, 42
 - regular, 42
- Pontos assintóticos, 35
- Postulado
 - das paralelas, 19, 34
 - hiperbólico das paralelas, 34
- Quadrilátero de Saccheri, 20
- Série
 - de Maclaurin, 55
 - de Taylor, 54
- Teorema
 - de Lobachevski, 55
 - de Pitágoras hiperbólico, 52
 - lei dos cossenos hiperbólica, 60
 - lei dos senos hiperbólica, 63
 - tesselação hiperbólica regular, 71
- Tesselações, 31, 66
- Transformação hiperbólica, 40, 41, 45, 52