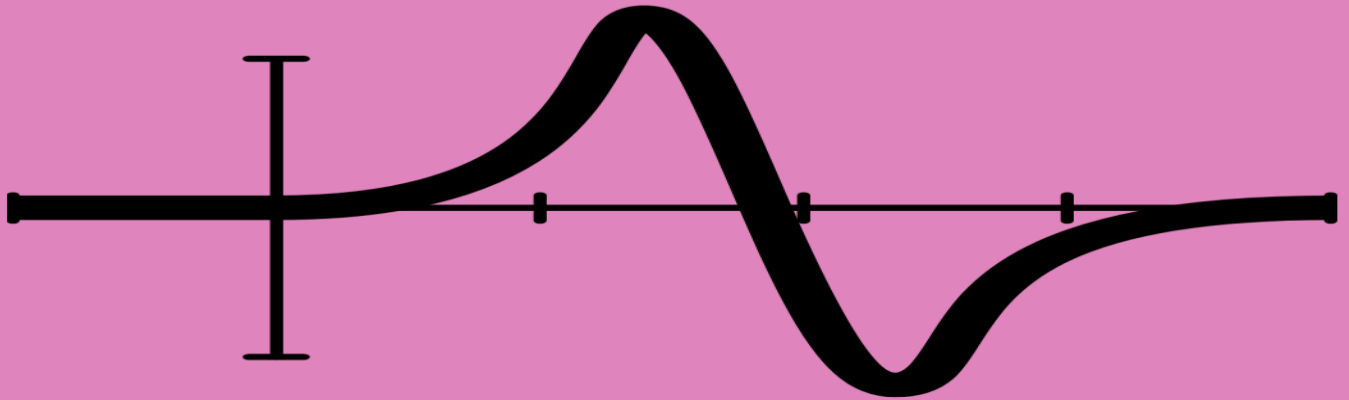


PROMOVENDO DISCUSSÕES MATEMÁTICAS



Algumas Ações do Professor em Sala de Aula

MARCIO ALEXANDRE VOLPATO

ANDRÉ LUIS TREVISAN

MARCIO ALEXANDRE VOLPATO

**PROMOVENDO DISCUSSÕES MATEMÁTICAS
ALGUMAS AÇÕES DO PROFESSOR EM SALA DE AULA**

**PROMOTING MATHEMATICAL DISCUSSIONS
SOME ACTIONS OF THE TEACHER IN CLASSROOM**

Produto Educacional apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Multicampus Londrina e Cornélio Procópio.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

LONDRINA
2022



Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



MARCIO ALEXANDRE VOLPATO

**AÇÕES DO PROFESSOR PARA PROMOÇÃO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM
MOMENTOS DE DISCUSSÃO COLETIVA EM AULAS DE CÁLCULO**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 29 de Março de 2022

Prof. André Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Prof. a Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Prof. a Marcia Aguiar, Doutorado - Universidade Federal do ABC.

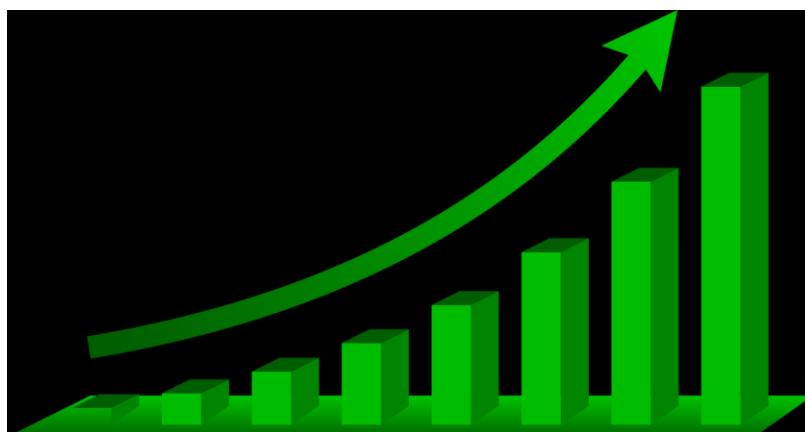
Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em
29/03/2022.

Apresentação

A Matemática, nos diversos níveis de escolaridade, ainda é tradicionalmente ensinada como um assunto pronto e acabado: apresentam-se definições, regras e algoritmos aos estudantes a partir dos quais se espera que eles realizem reproduções mecânicas de listas de exercícios. Apesar das discussões a respeito da importância de o estudante assumir um papel ativo em seu processo de aprendizagem, em especial no contexto de disciplinas matemáticas de cursos superiores, tem-se ainda muitos professores que ministram suas aulas no método tradicional, ou seja, aquela aula com o quadro, giz e um professor que expõe o conteúdo e depois apresenta listas de exercícios a serem resolvidas, em geral, mecanicamente.

Nesse contexto, o “aluno é apenas o ouvinte, [e] a maior participação sua em aula é na hora de resolver os exercícios” (MACICIESKI; FRIZZARINI; HENNING, 2018, p. 4). Há, também, outros professores que, embora procurem utilizar metodologias diferenciadas, acabam priorizando a exposição do conteúdo matemático, fazendo com que os alunos sejam ouvintes e meros reprodutores de listas de exercícios.

Para que essa perspectiva se modifique, é necessário que os professores mudem a forma de ensinar e que tenham como objetivo fazer com que os estudantes desenvolvam modos de raciocinar matematicamente. São várias as pesquisas (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018; ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019; TREVISAN; MENDES, 2018) realizadas na Educação Matemática no intuito de buscar respostas que tratam do ensino e aprendizagem matemática e a relação professor e aluno em todo processo de construção do saber.



Faz-se necessário trabalhar com tarefas que estimulem o raciocínio matemático, que possibilitem ao aluno compreender como os conceitos se relacionam uns com os outros e como estes podem ser usados na resolução dos problemas, atribuam significado aos procedimentos e entendam a razão por que funcionam. Assim, “a articulação entre tarefas com diferentes níveis de exigência e de desafio é essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes” (MATA-PEREIRA, 2018, p.17). Além disso, as ações do professor de convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar (PONTE;, MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59) em um momento de discussão coletiva desenvolvidas em sala de aula, são essenciais para o desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno.



Este produto educacional é resultante da dissertação do primeiro autor, intitulada “Ações do professor para promoção do raciocínio matemático em momentos de discussão coletiva em aulas de Cálculo”. Trata-se de um caderno com orientações ao professor sobre a promoção de discussões matemáticas, na qual são trazidos alguns trechos da análise realizada na dissertação, como forma de ilustrar ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Embora a dissertação tenha disso desenvolvimento no contexto de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), a proposta aqui apresentada pode ser desenvolvimento em diferentes níveis de escolaridade, da Educação Básica ao Ensino Superior.



Os dados aqui trazidos são provenientes de uma intervenção realizada no 1º semestre de 2019, em uma turma de estudantes ingressantes em um curso de Engenharia, que cursaram a disciplina de CDI (sob responsabilidade do segundo autor e orientador da pesquisa), na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus de Londrina. Ao longo daquele semestre, foram realizados diversos encontros de 3 aulas de 50 minutos, na qual os estudantes eram organizados primeiramente em grupos menores (3 a 4 integrantes) para a discussão e realização das tarefas, e em seguida ocorria uma plenária com toda a turma para a discussão de suas resoluções (nosso foco de discussão). Aqui, são considerados trechos de discussões que ocorreram em torno de uma dessas tarefas, proposta nas primeiras aulas da turma, detalhada mais a frente neste material.



O que dizem os documentos?

De acordo com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) (BRASIL, 2018), a área de Matemática e suas Tecnologias deve promover ações que ampliem o letramento matemático, onde “novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos” (BRASIL, 2018, p. 528)



Para que isso se concretize os estudantes devem desenvolver habilidades para **investigar, construir modelos e resolver problemas, mobilizando** seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, “com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados” (BRASIL, 2018, p. 529) e em interação com colegas e professores, investigar, explicar e justificar suas as soluções para os problemas propostos.

Na BNCC são apresentadas algumas competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.



Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 531).

No item item 5 observamos que deve ser desenvolvida uma competência específica que é foco deste material, que “pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo” (BRASIL, 2018, p. 540).

O aluno pode investigar e estabelecer conjecturas envolvendo diferentes conceitos e propriedades matemáticas, por meio de diferentes estratégias e recursos (observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias). Utilizando-se de investigações, devem buscar contraexemplos para refutar conjecturas e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las, tendo importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão do que é a Matemática e possam desenvolver o raciocínio hipotético-dedutivo.

No contexto do Ensino Superior também se faz necessário organizar situações em sala de aula que propiciem ao aluno o desenvolvimento do raciocínio matemático. As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) dos Cursos de Graduação em Engenharia (Parecer CNE/CES nº 1/2019, publicado no DOU de 23 de abril de 2019) apontam que o perfil dos estudantes ingressantes seja o de:





I. I. ter visão holística e humanista, ser crítico, reflexivo, criativo, cooperativo e ético e com forte formação técnica;

I. II. estar apto a pesquisar, desenvolver, adaptar e utilizar novas tecnologias, com atuação inovadora e empreendedora;

III. ser capaz de reconhecer as necessidades dos usuários, formular, analisar e resolver, de forma criativa, os problemas de Engenharia;

IV. adotar perspectivas multidisciplinares e transdisciplinares em sua prática;

V. considerar os aspectos globais, políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e de segurança e saúde no trabalho;

VI. atuar com isenção e comprometimento com a responsabilidade social e com o desenvolvimento sustentável. (BRASIL, 2019, s.p.)

Destaca-se dessas Diretrizes que os cursos de graduação em Engenharia devem proporcionar aos seus egressos, ao longo da formação, o desenvolvimento de competências mais “técnicas”, que apresentam interface direta com orientações resultantes das pesquisas em Educação Matemática acerca do desenvolvimento do raciocínio matemático, como por exemplo:

I. formular e conceber soluções desejáveis de engenharia, analisando e compreendendo os usuários dessas soluções e seu contexto:

a) ser capaz de utilizar técnicas adequadas de observação, compreensão, registro e análise das necessidades dos usuários e de seus contextos sociais, culturais, legais, ambientais e econômicos;

b) formular, de maneira ampla e sistêmica, questões de engenharia, considerando o usuário e seu contexto, concebendo soluções criativas, bem como o uso de técnicas adequadas;

II) analisar e compreender os fenômenos físicos e químicos por meio de modelos simbólicos, físicos e outros, verificados e validados por experimentação:

a) ser capaz de modelar os fenômenos, os sistemas físicos e químicos, utilizando as ferramentas matemáticas, estatísticas, computacionais e de simulação, entre outras.

b) prever os resultados dos sistemas por meio dos modelos;

c) conceber experimentos que gerem resultados reais para o comportamento dos fenômenos e sistemas em estudo.

d) verificar e validar os modelos por meio de técnicas adequadas. (BRASIL, 2019, s.p).



As Diretrizes apontam também o desenvolvimento de competências mais amplas, envolvendo aspectos relacionados à comunicação, trabalho em equipes e atitude investigativa:

III. comunicar-se eficazmente nas formas escrita, oral e gráfica:

a) ser capaz de expressar-se adequadamente, seja na língua pátria ou em idioma diferente do Português, inclusive por meio do uso consistente das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs), mantendo-se sempre atualizado em termos de métodos e tecnologias disponíveis;



IV) trabalhar e liderar equipes multidisciplinares:

a) ser capaz de interagir com as diferentes culturas, mediante o trabalho em equipes presenciais ou a distância, de modo que facilite a construção coletiva;

b) atuar, de forma colaborativa, ética e profissional em equipes multidisciplinares, tanto localmente quanto em rede;

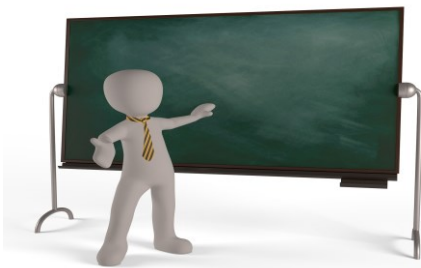


c) gerenciar projetos e liderar, de forma proativa e colaborativa, definindo as estratégias e construindo o consenso nos grupos;

d) reconhecer e conviver com as diferenças socioculturais nos mais diversos níveis em todos os contextos em que atua (globais/locais);

e) preparar-se para liderar empreendimentos em todos os seus aspectos de produção, de finanças, de pessoal e de mercado;

[...]



V) aprender de forma autônoma e lidar com situações e contextos complexos, atualizando-se em relação aos avanços da ciência, da tecnologia e aos desafios da inovação:

a) ser capaz de assumir atitude investigativa e autônoma, com vistas à aprendizagem contínua, à produção de novos conhecimentos e ao desenvolvimento de novas tecnologias;

b) aprender a aprender. (BRASIL, 2019, s.p.)

Como podemos observar, tanto competências mais técnicas quanto outras mais gerais devem ser propiciadas no âmbito de cursos de Graduação em Engenharia; assim, faz-se necessário que o professor consiga intervir no processo de aprendizagem do aluno para que essas competências sejam alcançadas. A investigação deste trabalho está pautada em ações do professor em momentos de discussão que contribuam para a promoção de tais competências, atreladas ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

SOBRE DISCUSSÕES E RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Segundo Mata-Pereira e Ponte (2017), o desenvolvimento do raciocínio matemático é um dos objetivos do ensino de Matemática nas escolas em todos os níveis de escolaridade. Para Oliveira (2008) a expressão raciocínio matemático denomina um conjunto de processos mentais dos quais se obtêm novas afirmações (conhecimento novo) a partir de afirmações conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio). Lannin, Ellis e Elliot (2011) afirmam que o raciocínio matemático, baseado em um processo evolutivo, inclui processos como conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar, refutar caso necessário, desenvolver e avaliar argumentos.

As ações do professor em sala de aula têm um papel central no desenvolvimento do raciocínio matemático. Logo, é importante que o professor tenha bem definido qual o seu papel nessa prática, sabendo quais tarefas selecionar e como agir para propiciar momentos de discussão, seja com pequenos grupos de alunos, ou com toda a turma, que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Alguns modelos nos ajudam a entender como realizar esse trabalho.

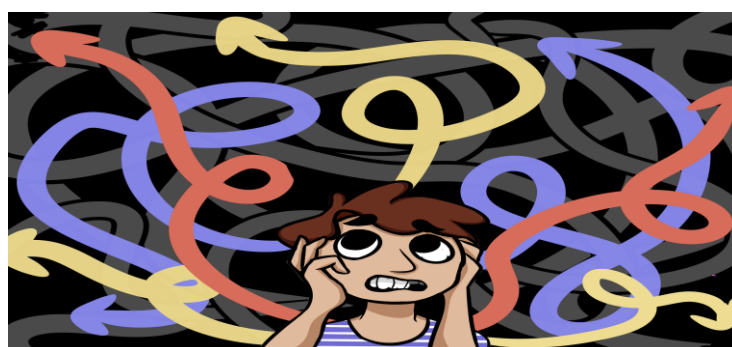
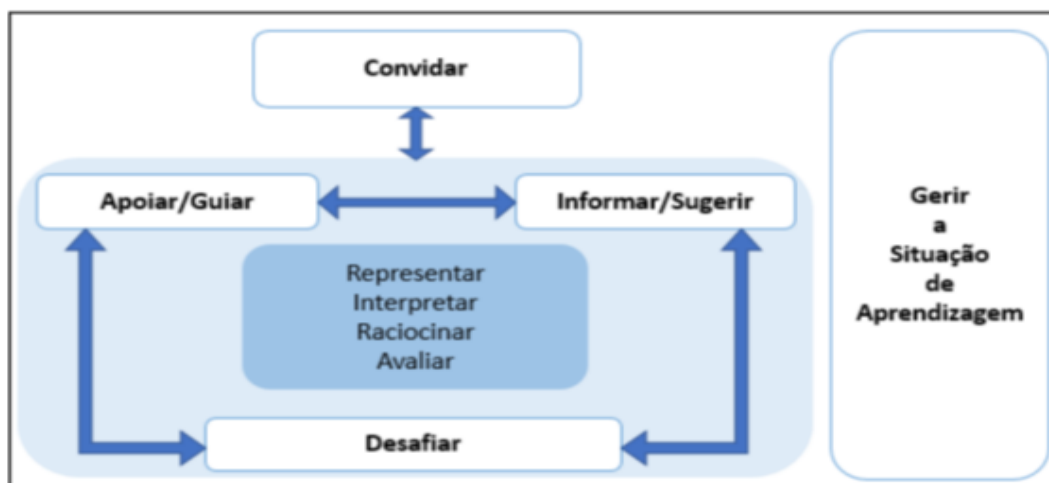


Figura 1 – Modelo para Analisar as Ações do Professor.



Fonte: Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013, p. 59)

Nesse modelo proposto por Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), a ação de *convidar* dá início à discussão coletiva quando o professor solicita e incentiva os estudantes a participar, apresentando suas resoluções e elegendo até mesmo um aluno como interlocutor. A seguir, mobiliza outros três tipos de ações.

Apoiar/guiar: o professor procura conduzir os estudantes a apresentar a resolução e conclusão do grupo na tarefa, e em explorar ideias matemáticas incompletas e/ou mal formuladas apresentadas na resolução dos alunos visando um melhor entendimento na discussão coletiva; preocupa-se também em interagir e explorar as resoluções apresentadas pelo grupo que não foram compreendidas pelos demais alunos e presta atenção filtrando as ideias dos alunos, privilegiando as ideias fundamentais da tarefa.

Informar/sugerir: o professor preocupa-se em disponibilizar novas informações e em validar o que foi apresentado pelo grupo, corrigindo respostas apresentadas pelos estudantes a fim de dar coerência aos resultados.

Desafiar: a preocupação do professor nessa categoria é a de fazer o aluno ir além (expandir) do seu conhecimento prévio, propondo desafios;

Outro modelo é o TMSSR (*Teacher Moves for Supporting Student Reasoning*) de Ellis, Özgür e Reiten (2018), desenvolvido especificamente para o raciocínio matemático, que assume que “as discussões em sala de aula devem concentrar-se tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos por meio de processos comunicativos” (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018, p. 2). O TMSSR também divide as ações do professor em categorias, que podem ser observados no Quadro 1.

Neste modelo, podemos identificar algumas ações e interações em movimentos pedagógicos que o professor pode desempenhar no processo de aprendizagem no momento das discussões coletivas em suas aulas. Nos movimentos de baixo potencial, percebemos que as ações do professor estão concentradas em incentivar que os alunos apresentem as suas justificativas e conclusões a respeito da tarefa, enquanto que nos movimentos de alto potencial as ações se voltam para a elucidação do pensamento desenvolvido.

Quadro 1 – Categorias e características de ações do professor no modelo TMSSR.

AÇÕES DO PROFESSOR	CARACTERÍSTICA
Movimentos de baixo potencial	
Eliciando resposta	Fazer uma pergunta para obter a resposta para uma determinada tarefa.
Eliciar fatos ou procedimentos	Solicitar que os alunos recitem fatos ou procedimentos conhecidos.
Pedindo esclarecimentos	Fazer uma pergunta para esclarecer o significado do aluno.
Explicitar o raciocínio do aluno	Tentar entender a solução, explicação ou raciocínio de um aluno.
Verificando a compreensão	Fazer uma pergunta para avaliar a compreensão dos alunos sobre ideias matemáticas em discussão.
Movimentos de alto potencial	
Eliciando ideias	Fazer uma pergunta ou perguntas para obter explicações dos alunos para uma solução, estratégia ou uma ideia matemática.
Eliciando compreensão	Avaliar o que os alunos entendem e tentar identificar a natureza do raciocínio dos alunos.
Pressionando por explicação	Pedir aos alunos que elaborem seu pensamento, expliquem e compartilhem seu raciocínio.

Fonte: Ellis, Özgür e Reiten (2018), adaptado pelo autor.

Baseados nos modelos de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e Ellis, Özgür e Reiten (2018) apresentados anteriormente, Araman, Serrazina e Ponte (2019) organizaram um quadro de análise que descreve as ações de docentes que apoiam o raciocínio matemático, que será base para nossa análise, mostrado no Quadro 2. Tanto as ações como as práticas que o professor realiza em momentos de discussão coletiva de uma tarefa visam o desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno, propiciando que os alunos questionem, respondam, justifiquem e estabeleçam suas conclusões a respeito do conteúdo proposto. Tais ações possibilitam o desenvolvimento de ambientes desafiadores no processo de aprendizagem dos alunos.

Assim, “para criar oportunidades para que os alunos desenvolvam o raciocínio matemático, os professores precisam repensar as normas estabelecidas em sala de aula, criando ambientes que proporcionem oportunidades para pensar em vez de estabelecer regras e procedimentos padronizados do conteúdo” (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p. 469). As ações, por sua vez, mostram caminhos ou meios para o desenvolvimento das categorias, mostradas no Quadro 2.

Quadro 2 – Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático.

C A T E G O R I A S	Convidar	Solicita respostas para questões pontuais. Solicita relatos de como fizeram.	A Ç Õ E S
	Guiar/Apoiar	Fornece pistas aos alunos. Incentiva a explicação. Conduz o pensamento do aluno. Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. Encoraja os alunos e redizerem suas respostas. Encoraja os alunos a reelaborarem suas respostas.	
	Informar/Sugerir	Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. Reelabora respostas fornecidas pelos alunos. Fornecer informações e explicações. Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.	
	Desafiar	Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). Propõe desafios. Encoraja a avaliação. Encoraja a reflexão. Pressiona para a precisão. Pressiona para a generalização	

Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019, p. 476).

Um exemplo de tarefa



Para a organização da tarefa, levamos em consideração um conjunto de ideias matemáticas que poderiam ser mobilizadas, como por exemplo: constituir quantidades envolvidas na situação (reconhecer atributos de uma situação passível de medição); imaginar medidas de quantidades variando continuamente; coordenar duas quantidades que variam juntas, reconhecendo como as quantidades se relacionam.

Buscamos mobilizar a articulação entre múltiplas representações (linguagem natural, tabular, gráfica e algébrica), no intuito de coordenar a variação das quantidades envolvidas, reconhecendo a existência de taxas de variação e eventuais mudanças nessas taxas.

A tarefa que trazemos como exemplo, nesse material, foi utilizada em trabalhos anteriores desenvolvidos no âmbito do grupo de pesquisa como Fonseca (2017), Ramos (2017) e Trevisan *et al.* (2019). Aqui, pretendemos ilustrar possibilidades do professor orquestrar discussões matemáticas, por meio de diferentes ações.



Figura 2 – Tarefa das empresas

A empresa COMPUNET fornece conexões de Internet para seus atuais 10.000 consumidores. A COMPUNET está interessada na contratação de uma agência de publicidade para desenvolver uma campanha, para aumentar o número de consumidores. A empresa tem três agências de publicidade diferentes para escolher: PROMOHALS, H & G publicidade e SCHLEICH & Co. Cada empresa garante um aumento do lucro para COMPUNET, mas em ritmos diferentes. Seu trabalho é investigar qual agência é melhor para COMPUNET.

A campanha desenvolvida pela PROMOHALS promete um crescimento nos negócios, conforme mostrado no gráfico.

H & G Adversiting
A campanha da Agência de publicidade H & G Adversiting promete um crescimento mensal a uma taxa 10%. Ou seja, o lucro de cada mês é 10% maior que do mês anterior.

Schleich & Co promete o crescimento mostrado na Tabela.

Tempo (meses)	Clientes (Milhares)
1	10
2	15
3	19
4	23
5	27
6	30
7	32
8	34
9	36
10	38
11	39
12	40
13	41
14	42
15	42
16	43
17	43
18	44
19	44

Fonte: material do grupo de pesquisa.

INICIANDO A DISCUSSÃO

No trecho destacado a seguir, integrantes de um dos grupos responderam ao convite feito pelo professor para compartilhar com a turma o que haviam pensado sobre a primeira tarefa.

Professor: Queria ver um pouco de vocês o que vocês pensaram sobre a situação. Alguma equipe se propõe a iniciar? **(Convidar)**.

A1: A gente inicia

Professor: Pode ser então. Conte para a gente o que vocês pensaram. **(Guiar/ apoiar)**.

A1: Primeiro a gente fez análise do Promohouse pelo gráfico. Os primeiros cinco meses 5.000 clientes, então no segundo mês 50.000 clientes aí no total ele recebeu 40.000 clientes novos aí a gente foi para o HIG. Pode falar a conclusão ou faz assim (indicando continuidade da explicação)?

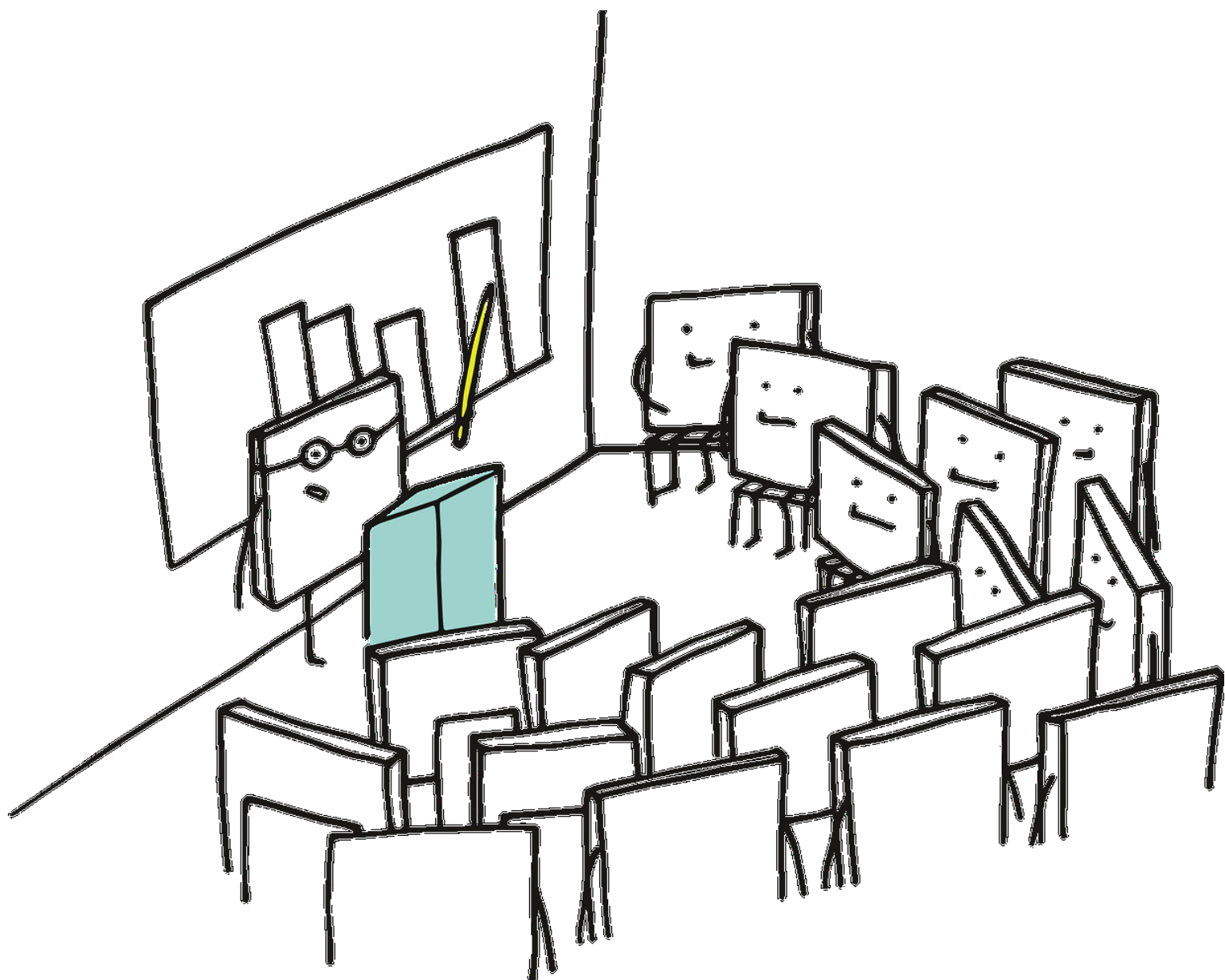
Professor: Conta como é que vocês foram encaminhando? **(Guiar/ apoiar)**.

A1: A gente foi usando a fórmula de juros compostos, mas gente analisou mês a mês para conseguir comparar com as duas empresas. Depois a terceira empresa a gente olhou também aquela tabela de 5 em 5 meses e aí a gente concluiu que a Promohouse não se tornou vantajosa em nenhum momento e, a terceira empresa ela se tornou vantajosa no período de até 16 meses, depois quem ficou melhor foi a HIG

Professor: Pensando na situação, o que eu poderia tá querendo que o número de clientes aumente muito rápido? **(Desafiar)**

A2: Talvez porque o seu faturamento seja suficiente naquele período.

Observa-se que as ações do professor estão centradas em três categorias: Convidar, Guiar/apoiar e Desafiar. Como se observou, a categoria convidar ocorreu quando o professor, em [1.1] chamou alguma equipe para compartilhar como pensaram e resolveram a tarefa apresentada. Em determinados trechos o professor fez perguntas com o intuito de incentivar a explicação da resolução da tarefa, ações da categoria guiar/apoiar, que têm por intenção possibilitar que os estudantes explicitem e detalhem o modo como pensaram, sem a intenção, nesse momento, de julgar se a estratégia estava ou não correta. Ações da categoria desafiar, mostram que o professor encorajou os alunos à reflexão, solicitando que elaborassem algumas conjecturas frente ao que era solicitado na tarefa.



A DISCUSSÃO PROSSEGUE

Professor: O quê que vocês acham desses gráficos que ele colocou? **(Convidar)**. Vocês acham que está de acordo com o que vocês pensaram? Por quê? **(Guiar/apoiar)**

A5: É porque se a gente comparar com o gráfico inicial, a gente tem uma planilha. É um gráfico em reais.

Professor: Onde é que está o conjunto de dados da primeira empresa? **(Guiar/apoiar)**

A5: Empresa 1 ta aqui. É porque eu só peguei dois meses 5, 10, 15 e 19, eu não peguei, então é por isso os valores. Eu não alimentei ele de 0 a 19 horas entendeu.

Professor: Vocês acham que se ele tivesse feito mês a mês estaria alinhado se ele pegar valores? **(Guiar/apoiar)**

A5: Ia estar mais próximo de uma reta.

Professor: Esses valores batem? Como que vocês encontraram no tempo 0 tem 10 mil, no tempo 2 tem 15 mil. Essa é a primeira empresa? **(Guiar/apoiar)**

A5: Sim porque a gente aproveitou os pontos.

Professor: Aqui tem algum problema na digitação, o que é que está acontecendo? Por que o formato que eu encontrei aqui na primeira empresa é uma reta? O fato de ela ser uma reta me diz o que? **(Desafiar)**.

A5: Taxa de crescimento.

A6: A taxa é uma constante.

Professor: Uma taxa constante? Essa taxa é quanto? **(Guiar/apoiar)**

A6: 10.

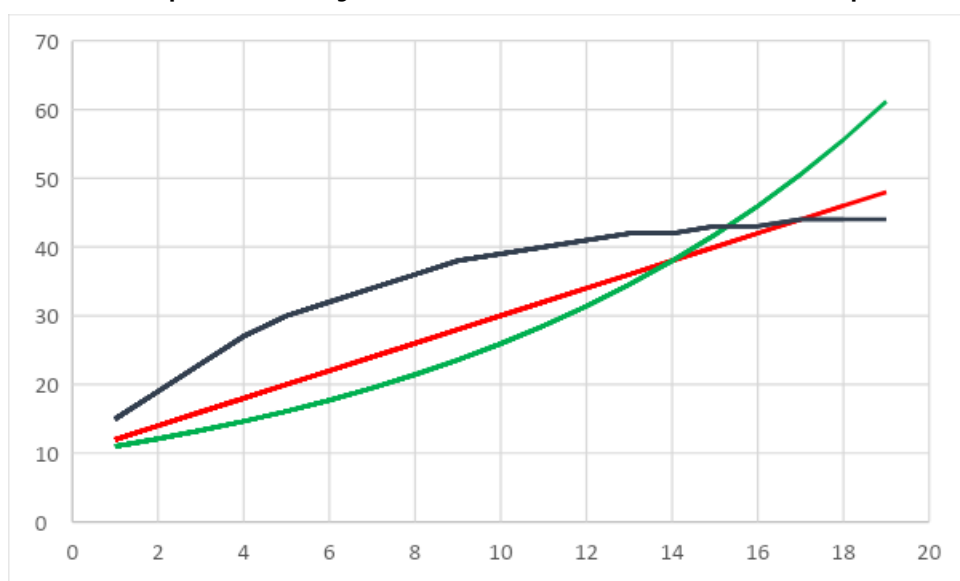
No início deste trecho pode-se observar que o professor fez uso da categoria convidar, na medida em que “chamou” novamente os alunos à discussão, solicitando que relatem que se o que fizeram está de acordo com a explicação do grupo anterior. O aluno A5 “aceita” o convite, e assim um terceiro grupo passa a participar da discussão. A categoria guiar/apoiar surgiu em em trechos da discussão em que o professor incentivou a explicitação de conjecturas elaboradas pelos alunos, e conduziu e focalizou seu pensamento fatos importantes, como o de saber se é uma taxa constante. O professor encorajou a turma a elaborar uma generalização, no caso da primeira empresa, cuja representação gráfica era uma reta (categoria desafiar). Após um pequeno trecho de diálogo que é inaudível, o professor prosseguiu buscando uma justificativa a respeito do alinhamento dos pontos.



ARTICULANDO REPRESENTAÇÕES

Com a intenção de levar a turma a associar informações acerca da taxa de crescimento das funções que representam o número de clientes das três empresas, em relação ao tempo, com suas representações gráficas (que estavam apresentadas em um mesmo plano cartesiano, com três cores diferentes, conforme solução de um dos grupos, projetada para toda turma) (Figura 3), a discussão continuou.

Figura 3 – Representação simultânea das três empresas



Fonte: material do grupo de pesquisa.

Professor: Vamos tentar explorar um pouco mais esses gráficos aqui. Como que olhando para esses gráficos, considerando esse gráfico vermelho que teve algum probleminha na tabela. É ele não deveria ter essa mudança aqui não. Como é que vocês reconheceriam qual empresa que se refere a qual gráfico olhando para eles? **(Desafiar)**

A6: Da azul é a 3.

Professor: Por que é que eu sei que o gráfico azul é da empresa 3? **(Desafiar)**

A6: Crescimento decrescente.

Professor: Crescimento decrescente está relacionado com o que naquele gráfico? **(Guiar/Apoiar)**

A7: No começo ele tem a melhor, tem o melhor ganho de clientes.

Professor: O que que o gráfico azul tem de diferente do gráfico verde, por exemplo? **(Guiar/apoiar)**

A6: Tem que ele formar uma linha horizontal acho.

Professor: E essa linha horizontal está relacionada com o quê? **(Guiar/apoiar)**

A7: Estagnação de crescimento.

Professor: Eu tenho um crescimento cada vez menor, e quando chega lá nos últimos meses que ele me forneceu esse crescimento não é expressivo. **(Informar/sugerir)**. E esse gráfico verde não tem esse tipo de comportamento? **(Guiar/apoiar)**

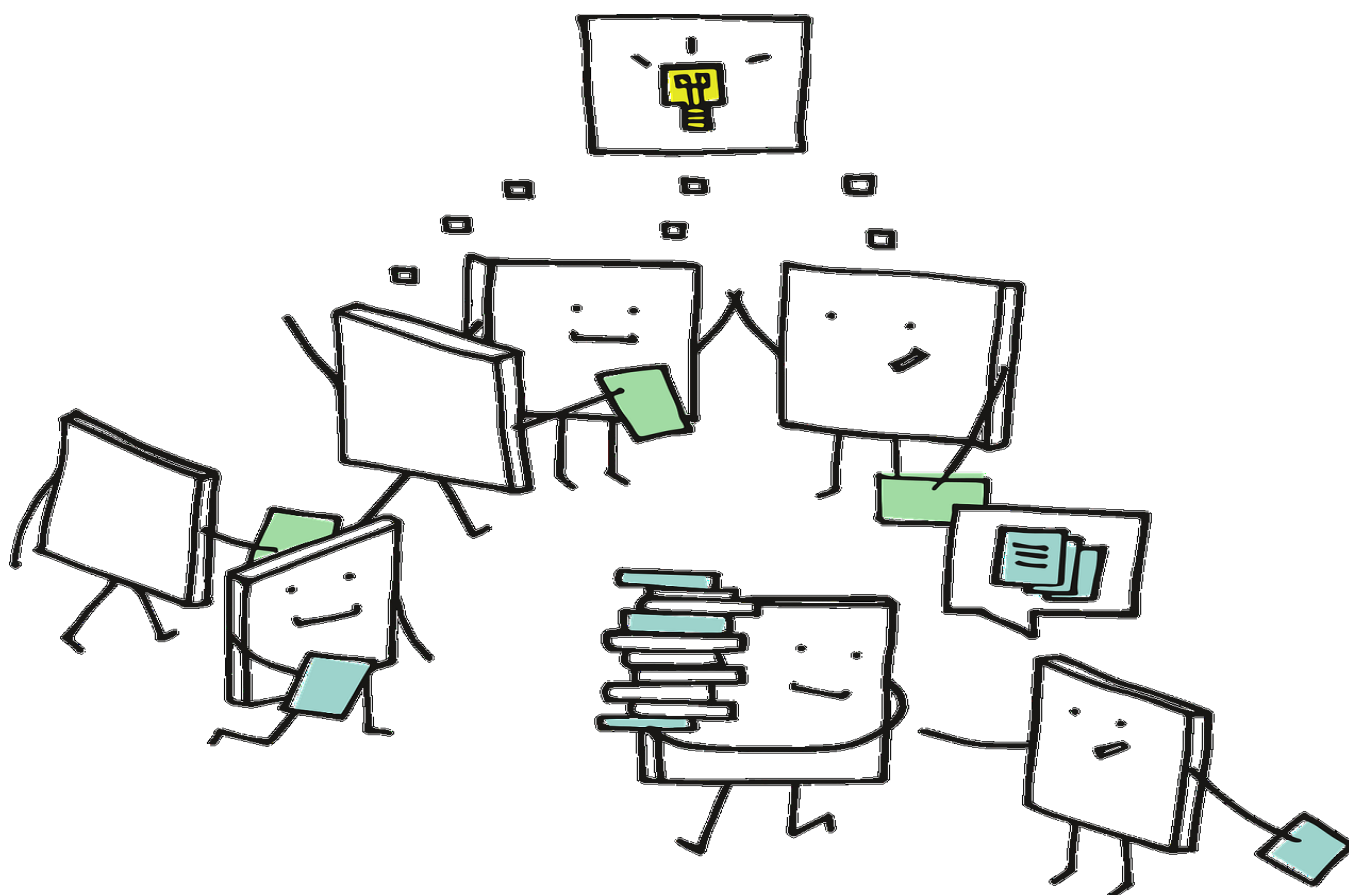
A6: Porque é contrário, quanto maior tempo mais a linha tende a ficar vertical.

Professor: Se ela ficar mais na vertical. **(Guiar/apoiar)**

A6 e A7: Não.

Aluno: Ela vai ter uma inclinação que pouco a pouco vai se tornar perceptível.

A discussão, no início desse trecho, teve como foco levar a turma a conjecturar qual gráfico representa cada uma das empresas e informar as justificativas, com ações da categoria desafiar. Ao longo desse trecho de discussão, em diversos momentos o professor reelaborou conjecturas e justificativas apresentadas pelos estudantes, no intuito de complementá-las com explicações mais precisas, ou buscando utilizar termos mais adequados, ações essas da categoria informar/sugerir. Há, também, momentos em que sua fala teve por objetivo guiar/apoiar, conduzindo o pensamento do estudante, e focalizando a discussão para fatos importantes. Em um desses momentos, há uma hipótese de A2 de que o gráfico que representa o número de clientes da empresa cujo crescimento é exponencial, "vai ficar vertical". Não parece ter ficado claro para esse estudante porque isso é falso, e ele retomou essa questão.



SISTEMATIZANDO CONCEITOS

Professor: Se fosse para relacionar com conceitos matemáticos que talvez vocês já tenham visto na Educação Básica essa situação que eu trouxe aqui remete ao quê? O que é que eu posso associar com coisas que vocês já tenham estudado? **(Desafiar)**

Alunos: Função.

A7: PA e PG.

Professor: O que que é PA e o que que é PG? **(Guiar/apoiar)**

A7: Progressão aritmética e progressão geométrica.

Professor: E o que que é cada um desses bichos? **(Guiar/apoiar)**

A7: Taxa de crescimento constante.

A7: Função crescente e função decrescente.

Professor: Eu tenho função crescente, função constante e função decrescente. O que seria uma função crescente? **(Informar/sugerir)**. Se eu olhar para a esquerda, para a direita, o significa isso? Como é que se comportam os dados da tabela que dá origem a isso? **(Guiar/apoiar)**

A6: Quanto maior for.

Professor: Por função crescente eu vou entender que quando eu aumento uma das coisas do tempo, outra coisa no caso o número de clientes também aumenta. **(Informar/sugerir)**

A7: Constante.

Professor: Constante (**Informar/sugerir**). O que seria uma função constante? Função constante é uma função que tem seus os seus valores fixos. Número de clientes da empresa no mês 1, 10.000. Número de clientes da empresa no mês 2, os mesmos 10.000. No mês 3 os mesmos 10.000, o tempo está passando e o número de clientes não está mudando. (**Informar/sugerir**)

A7: Seria uma função constante.

Professor: Aqui a gente não tem função constante nem decrescente. O número de clientes não está diminuindo em nenhuma delas. Vamos puxar um pouco mais a história de PA e PG para casos particulares de uma sequência que a gente chama de sequência numérica. Então nosso objeto de trabalho para começar o estudo de cálculo são as chamadas sequências numéricas.

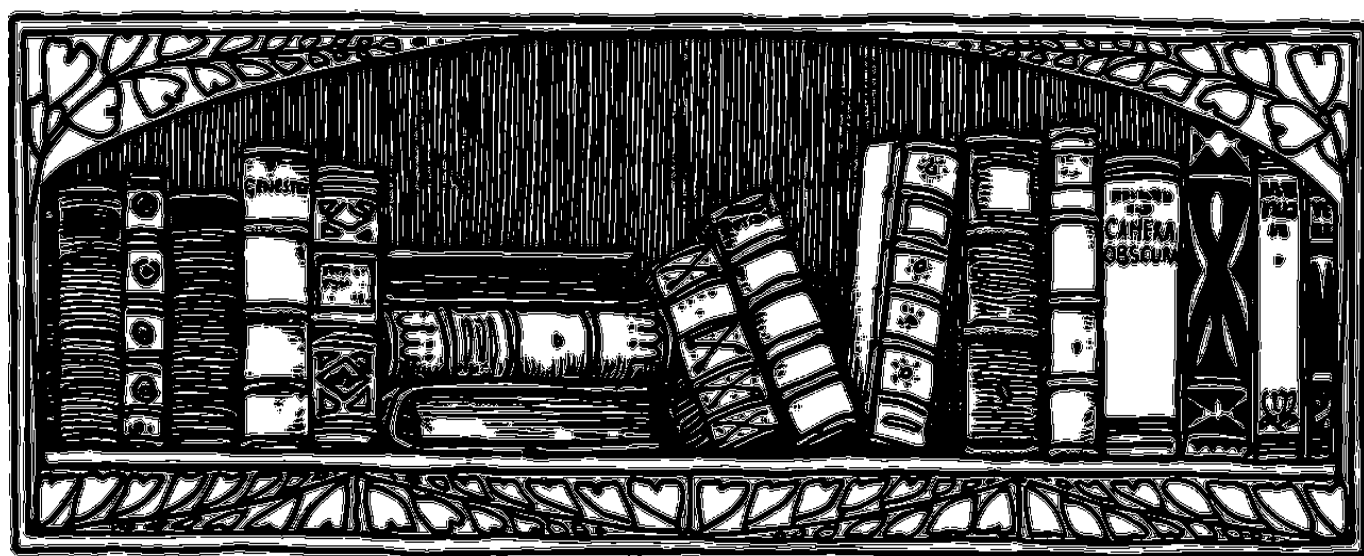
Nesse trecho final da discussão da tarefa, a categoria guiar/apoiar se fez presente em diversos momentos, com o professor conduzindo a elaboração de conjecturas e incentivando a justificá-las. Também há momentos em que incentiva a generalização, como por exemplo o conceito de "crescimento constante" na qual pergunta: "*Do primeiro para o segundo mês aumentou quantos clientes na segunda empresa?*" e "*Está aumentando?*". Já a categoria de informar/sugerir se fez presente nos trechos em que o professor forneceu explicações e informações acerca dos conceitos matemáticos que apareceram nas conjecturas e justificativas da turma a respeito do crescimento dos gráficos apresentados pelos grupos. A categoria desafiar apareceu quando o professor faz questionamentos sobre "*Por que é que não está crescendo constante?*", pretendendo que os alunos justifiquem o comportamento da variação do gráfico, ou buscando que relacionem as explicações e discussões anteriores com conteúdos que aprenderam no Ensino Médio "*O que que eu posso associar com coisas que vocês já tenham estudado?*". Finaliza assim a discussão acerca da tarefa, e prossegue a aula com a sistematização de conceitos como reta real, sequências numéricas e funções.

Considerações finais

Este material apresentou possibilidades de ações do professor na condução das discussões matemáticas, usando como exemplo o contexto do trabalho com tarefas de natureza exploratória em aulas de CDI. As ações do professor de convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar, tiveram um papel central no desenvolvimento do raciocínio matemático, promovendo a participação efetiva dos alunos, na apresentação de suas soluções, nas estratégias de resolução e no questionamento das resoluções dos colegas (LAMPERT, 1990).

Destaca-se que a constituição de um ambiente de aprendizagem colaborativa, com discussões eficazes envolvendo toda a turma (BRODIE, 2010), a partir das tarefas propostas e da condução do professor nestas, estimularam o raciocínio dos alunos, na medida que as intervenções eram feitas pelo professor, permitindo observar como os conceitos abordados se relacionam (funções, progressões, taxas de crescimento), bem como a compreensão dos procedimentos, a razão por que funcionam (MATA-PEREIRA, 2018).

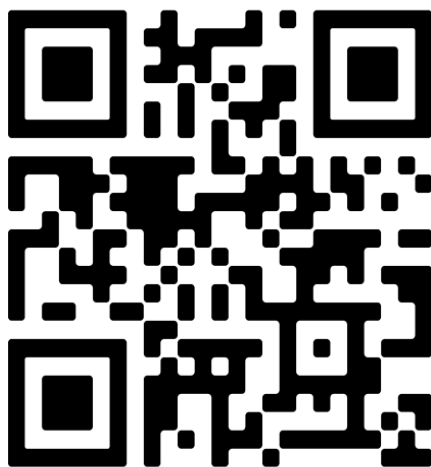
O contexto da discussão, a partir das diferentes ações do professor, ofereceu oportunidades aos alunos para investigar, analisar, explicar, conjecturar, justificar e interagir (STEIN; SMITH, 2009). Os alunos puderam comunicar, usando descrições em palavras, gráficos símbolos, tabelas e linguagem algébrica; trabalhar em colaboração em equipes e grupos para aprimorar a compreensão matemática; coletar, analisar e organizar dados quantitativos para avaliar e criticar as conclusões obtidas; envolver-se na elaboração de argumentos quantitativos relacionados a assuntos de sua futura área de atuação (BRODIE, 2010). Também se propiciou o entendimento conceitual: compreensão de conceitos, operações e relações matemáticas; competência estratégica: capacidade de formular, representar, e resolver problemas matemáticos (KILPATRICK; SWAFFORD; FINDELL, 2001).



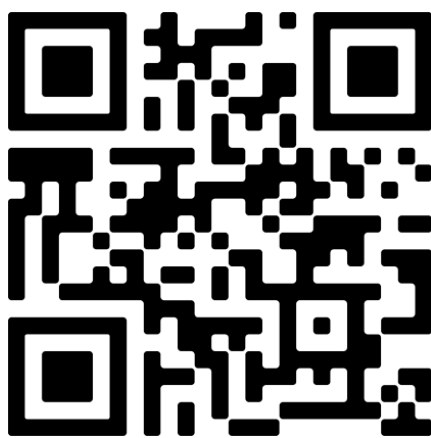
Referências

- ARAMAN, E. M. O. SERRAZINA, M. L., PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.21, n.2, 466-490, 2019.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Superior. Resolução no 2, de 24 de abril de 2019. **Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia**, Brasília (Brasil), 26 abr. 2019. Edição 89. Seção 1, p. 43.
- BRODIE, K. **Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms**. New York: Springer, 2010.
- ELLIS, A., ÖZGÜR, Z., REITEN, L. Teacher moves for supporting student reasoning. **Mathematics Education Research Journal**, v. 30, n. 2, p. 1-26, jun. 2018.
- FONSECA, M. O. S. **Proposta de tarefas para um estudo inicial de derivadas**. 2017. 100 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017
- KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J.; FINDELL, B. (Eds). **Adding it up: helping children learn mathematics**. National Academy Press, Washington, DC, 2001.
- LAMPERT, M. When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. **American Educational Research Journal**, v. 27, n. 1, p. 29–63, 1990.
- LANNIN, J.K.; ELLIOTT, R.; ELLIS, A.B. Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8. Reston, VA: **National Council of Teachers of Mathematics**, 2011.
- MACICIESKI, G.; FRIZZARINI, S. T.; HENNING, E. O ensino de funções na Educação Básica: uma experiência em duas vias. **Anais... COLBEDUCA**, 4. Braga, Portugal, 2018.
- MATA-PEREIRA, J. F. D. G. da. **Ações de professores para promover o raciocínio matemático**. Tese (Doutorado em Educação, especialidade de Didática da Matemática). Universidade de Lisboa, Lisboa, 2018.
- MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Enhancing students’ mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 2, p. 1 – 18, 2017.
- MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promoting Students’ Mathematical Reasoning: a design-based research. **Bolema**, v. 32, n. 62, p. 781-801, 2018.
- OLIVEIRA, P. O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. **Educação e Matemática**, 100, p. 3-9, 2008.
- PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, vol. XXII, n. 2, p. 55-81, 2013.
- RAMOS, N. S. **Sequências numéricas como desencadeadoras do conceito de convergência**: episódio de resolução de tarefas. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina- PR., 2017.
- STEIN, M. H.; SMITH, M.S. Tarefas matemáticas como quadro para reflexão. **Educação e Matemática**, n.105, p. 22-28, 2009.
- STEIN, M. K. et al. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, Adingdon, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.
- TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia**, v. 11, n. 1, p. 209-227, 2018.
- TREVISAN, A. T.; SILVA, D. D. L; VOLPATO, M. A.; ALVES, R. M. A.; OLIVEIRA, P. B. O raciocínio matemático em um episódio de resolução de tarefas de Cálculo. In XLVII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, Fortaleza, 2019. **Anais... Cobenge**, 47. Fortaleza: Associação Brasileira de Educação em Engenharia, 2019, p. 1-10.

IMAGENS DISPONÍVEIS NO TEXTO ENCONTRADAS EM



www.pixabay.com



www.canva.com

ppgmat PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENSINO
DE MATEMÁTICA

*Programa de Pós-Graduação em Ensino
de Matemática (PPGMAT)*

Câmpus Cornélio Procópio e Londrina

portal.utfpr.edu.br/site/ppgmat

ppgmat-ld@utfpr.edu.br

*Secretaria do Programa de Pós-Graduação
em Ensino de Matemática (PPGMAT)*

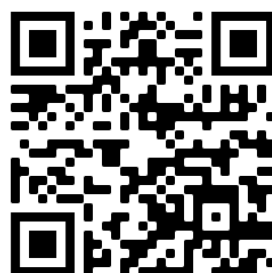
(43) 3315- 6130

Av. dos Pioneiros, 3131

Jardim Morumbi

Londrina - PR

CEP: 86036-370



ppgmat PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENSINO
DE MATEMÁTICA

UTFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ