UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MARCIO ALEXANDRE VOLPATO

AÇÕES DO PROFESSOR PARA PROMOÇÃO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM MOMENTOS DE DISCUSSÃO COLETIVA EM AULAS DE CÁLCULO

LONDRINA
2022

MARCIO ALEXANDRE VOLPATO

AÇÕES DO PROFESSOR PARA PROMOÇÃO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM MOMENTOS DE DISCUSSÃO COLETIVA EM AULAS DE CÁLCULO

TEACHER ACTIONS TO PROMOTE MATHEMATICAL REASONING IN MOMENTS OF COLLECTIVE DISCUSSION IN CALCULUS CLASSES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

LONDRINA

2022

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

MARCIO ALEXANDRE VOLPATO

AÇÕES DO PROFESSOR PARA PROMOÇÃO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM MOMENTOS DE DISCUSSÃO COLETIVA EM AULAS DE CÁLCULO

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 29 de Março de 2022

Prof. André Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Prof. a Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Prof. a Marcia Aguiar, Doutorado - Universidade Federal do ABC.

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 29/03/2022.

Dedico a todos que não perdem os seus sonhos
e lutam por eles, especialmente **EU**.

AGRADECIMENTOS.

Nos caminhos percorridos neste mestrado, gostaria de agradecer a algumas pessoas que me acompanharam e foram fundamentais para a realização de mais este sonho.

Primeiramente, agradeço a minha mãe Páscoa e minhas irmãs Elizabeth, Maria Helena, Márcia e Maria Cristina pela compreensão, ao serem privados em muitos momentos da minha companhia e atenção, e pelo profundo apoio, me estimulando nos momentos mais difíceis. Obrigado por desejarem sempre o melhor para mim, pelo esforço que fizeram para que eu pudesse superar cada obstáculo em meu caminho e chegar aqui e, principalmente, pelo amor imenso que vocês têm por mim.

Minha gratidão especial ao Prof. Dr. André Luis Trevisan, meu orientador, pela pessoa e profissional que é. Obrigado por sua dedicação, que o fez, por muitas vezes, deixar de lado seus momentos de descanso para me ajudar e me orientar. E, principalmente, obrigado por sempre ter acreditado e depositado sua confiança em mim ao longo desses anos de trabalho.

Um obrigado especial aos colegas de Mestrado em Ensino de Matemática da UTFPR turma de 2019, pelos momentos felizes que tivemos sejam eles nas aulas ou até na "sorveteria". Em especial a minha colega de orientação Roberta que se fez presente também na coleta dos dados.

Agradeço também as professoras Drª. Elaine Maria de Oliveira Araman e Drª. Marcia Aguiar, membros da banca de Qualificação e Defesa de Mestrado, pelos conselhos, sugestões e interesse em contribuir para o desenvolvimento deste projeto.

Por fim, o agradecimento mais importante: agradeço a Deus por ter me dado mais essa oportunidade em minha vida.

VOLPATO, Marcio Alexandre. **Ações do professor para promoção do raciocínio matemático em momentos de discussão coletiva em aulas de Cálculo**. 2022. 55f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

RESUMO

No intuito de aprofundar investigações acerca do raciocínio matemático no âmbito do Ensino Superior, o objetivo geral deste trabalho é investigar as ações do professor na condução das discussões coletivas, no contexto do trabalho com tarefas de natureza exploratória em aulas de Cálculo Diferencial e Integral, e seu papel na promoção de processos do raciocínio matemático. Desenhado como uma pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo, o estudo considera dados provenientes de um primeiro ciclo de intervenção realizado com uma turma de estudantes ingressantes em um curso de Engenharia de uma universidade pública, que cursavam essa disciplina. Como resultados, destacamos que foram oportunizados aos alunos momentos para se expressarem (em geral, pelas ações de convidar e guiar/apoiar), elaborarem justificativas e refletirem sobre aspectos nos quais não haviam pensado anteriormente (pela ação de desafiar), "estimulando" sua criatividade e, consequentemente, fortalecendo seu raciocínio. Tais momentos ampliaram a capacidade dos alunos de raciocinar matematicamente, fazendo-os pensar, compreender ideias matemáticas e aplicá-las.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Discussões Matemáticas. Ações do Professor. Raciocínio matemático.

VOLPATO, Marcio Alexandre Volpato. **Teacher actions to promote mathematical reasoning in moments of collective discussion in Calculus classes.** 2022. 50f. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

ABSTRACT

In order to deepen investigations about mathematical reasoning in the context of Higher Education, the general objective of this work is to investigate the actions of the teacher in the conduct of collective discussions, in the context of working with tasks of an exploratory nature in Differential and Integral Calculus classes, and its role in promoting mathematical processes. Designed as a qualitative and interpretive research, the study considers data from a first cycle of intervention carried out with a group of students an Engineering course at a public university, who were studying this discipline. As a result, we emphasize that students were given opportunities to express themselves (in general, through the actions of inviting and guiding/supporting), elaborating justifications and reflecting on aspects they had not previously thought about (through the action of challenging), "stimulating" their creativity and, consequently, strengthening your reasoning. Such moments expanded the student's ability to reason mathematically, making them think, understand mathematical ideas and apply them.

Keywords: Teaching Mathematics. Teaching Differential and Integral Calculus. Mathematical Discussions. Teacher Actions. Mathematical reasoning.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática, nos diversos níveis de escolaridade, ainda é tradicionalmente ensinada como um assunto pronto e acabado: apresentam-se definições, regras e algoritmos aos estudantes a partir dos quais se espera que eles realizem reproduções mecânicas de listas de exercícios. Apesar das discussões a respeito da importância de o estudante assumir um papel ativo em seu processo de aprendizagem, em especial no contexto de disciplinas matemáticas de cursos superiores, tem-se ainda muitos professores que ministram suas aulas no método tradicional, ou seja, aquela aula com o quadro, giz e um professor que expõe o conteúdo e depois apresenta listas de exercícios a serem resolvidas, em geral, mecanicamente.

Nesse contexto, o "aluno é apenas o ouvinte, [e] a maior participação sua em aula é na hora de resolver os exercícios" (MACICIESKI; FRIZZARINI; HENNING, 2018, p. 4). Há, também, outros professores que, embora procurem utilizar metodologias diferenciadas, acabam priorizando a exposição do conteúdo matemático, fazendo com que os alunos sejam ouvintes e meros reprodutores de listas de exercícios.

Para que essa perspectiva se modifique, é necessário que os professores mudem a forma de ensinar e que tenham como objetivo fazer com que os estudantes desenvolvam modos de raciocinar matematicamente. São várias as pesquisas (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018; ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019; TREVISAN; MENDES, 2018) realizadas na Educação Matemática no intuito de buscar respostas que tratam do ensino e aprendizagem matemática e a relação professor e aluno em todo processo de construção do saber. Tais pesquisas apontam que o indivíduo aprende quando envolvido em situações que provoquem sua curiosidade, aprendendo na ação (PONTES, 2018).

Faz-se necessário trabalhar com tarefas que estimulem o raciocínio matemático, que possibilitem ao aluno compreender como os conceitos se relacionam uns com os outros e como estes podem ser usados na resolução dos problemas, atribuam significado aos procedimentos e entendam a razão por que funcionam. Assim, "a articulação entre tarefas com diferentes níveis de exigência e de desafio é essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes" (MATA-PEREIRA, 2018, p.17).

No contexto do Ensino Superior também se faz necessário organizar situações em sala de aula que propiciem ao aluno o desenvolvimento do raciocínio matemático. As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) dos Cursos de Graduação em Engenharia (Parecer CNE/CES nº 1/2019, publicado no DOU de 23 de abril de 2019) apontam que o perfil dos estudantes ingressantes seja o de:

> I. Ter visão holística e humanista, ser crítico, reflexivo, criativo, cooperativo e ético e com forte formação técnica;
> II. Estar apto a pesquisar, desenvolver, adaptar e utilizar novas tecnologias, com atuação inovadora e empreendedora;
> III. Ser capaz de reconhecer as necessidades dos usuários, formular, analisar e resolver, de forma criativa, os problemas de Engenharia;
> IV. Adotar perspectivas multidisciplinares e transdisciplinares em sua prática;
> V. Considerar os aspectos globais, políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e de segurança e saúde no trabalho;
> VI. Atuar com isenção e comprometimento com a responsabilidade social e com o desenvolvimento sustentável. (BRASIL, 2019, s.p.)

Destaca-se dessas Diretrizes que os cursos de graduação em Engenharia devem proporcionar aos seus egressos, ao longo da formação, o desenvolvimento de competências mais "técnicas", que apresentam interface direta com orientações resultantes das pesquisas em Educação Matemática acerca do desenvolvimento do raciocínio matemático, como por exemplo:

> I. Formular e conceber soluções desejáveis de engenharia, analisando e compreendendo os usuários dessas soluções e seu contexto:
> a. Ser capaz de utilizar técnicas adequadas de observação, compreensão, registro e análise das necessidades dos usuários e de seus contextos sociais, culturais, legais, ambientais e econômicos;
> b. Formular, de maneira ampla e sistêmica, questões de engenharia, considerando o usuário e seu contexto, concebendo soluções criativas, bem como o uso de técnicas adequadas;
> II. Analisar e compreender os fenômenos físicos e químicos por meio de modelos simbólicos, físicos e outros, verificados e validados por experimentação:
> a. Ser capaz de modelar os fenômenos, os sistemas físicos e químicos, utilizando as ferramentas matemáticas, estatísticas, computacionais e de simulação, entre outras;
> b. Prever os resultados dos sistemas por meio dos modelos;
> c. Conceber experimentos que gerem resultados reais para o comportamento dos fenômenos e sistemas em estudo;
> d. Verificar e validar os modelos por meio de técnicas adequadas. (BRASIL, 2019, s.p.).

As Diretrizes apontam também o desenvolvimento de competências mais amplas, envolvendo aspectos relacionados à comunicação, trabalho em equipes e atitude investigativa:

> III. Comunicar-se eficazmente nas formas escrita, oral e gráfica:
> a. Ser capaz de expressar-se adequadamente seja na língua pátria ou em idioma diferente do Português, inclusive por meio do uso consistente das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs), mantendo-se sempre atualizado em termos de métodos e tecnologias disponíveis;
> IV. Trabalhar e liderar equipes multidisciplinares:
> a. Ser capaz de interagir com as diferentes culturas, mediante o trabalho em equipes presenciais ou à distância, de modo que facilite a construção coletiva;

b. Atuar, de forma colaborativa, ética e profissional em equipes multidisciplinares, tanto localmente quanto em rede;
c. Gerenciar projetos e liderar, de forma proativa e colaborativa, definindo as estratégias e construindo o consenso nos grupos;
d. Reconhecer e conviver com as diferenças socioculturais nos mais diversos níveis em todos os contextos em que atua (globais/locais);
e. Preparar-se para liderar empreendimentos em todos os seus aspectos de produção, de finanças, de pessoal e de mercado;

[...]

V. Aprender de forma autônoma e lidar com situações e contextos complexos, atualizando-se em relação aos avanços da ciência, da tecnologia e aos desafios da inovação:
a. Ser capaz de assumir atitude investigativa e autônoma, com vistas à aprendizagem contínua, à produção de novos conhecimentos e ao desenvolvimento de novas tecnologias.
b. Aprender a aprender. (BRASIL, 2019, s.p.)

Como podemos observar, tanto competências mais técnicas quanto outras mais gerais devem ser propiciadas no âmbito de cursos de Graduação em Engenharia; assim, faz-se necessário que o professor consiga intervir no processo de aprendizagem do aluno para que essas competências sejam alcançadas. A investigação deste trabalho está pautada em ações do professor em momentos de discussão que contribuam para a promoção de tais competências, atreladas ao desenvolvimento do raciocínio matemático. As ações do professor de convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013) em um momento de discussão coletiva desenvolvidas em sala de aula, são essenciais para o desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno.

Em geral, na literatura a respeito do tema raciocínio matemático, os estudos envolvem o trabalho com a disciplina de Matemática na Educação Básica. Assim, no intuito de aprofundar essas discussões no âmbito do Ensino Superior, o objetivo geral deste trabalho é *investigar as ações do professor na condução das discussões coletivas, no contexto do trabalho com tarefas de natureza exploratória em aulas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), e seu papel na promoção de processos do raciocínio matemático.*

Para tal, consideram-se dados oriundos de aulas de CDI em um curso superior de Engenharia de Produção, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, sob responsabilidade do orientador desta dissertação, no 1º semestre de 2019. No desenvolvimento das duas tarefas aqui analisadas, os estudantes estavam organizados em grupos de três a quatro integrantes que, em um primeiro momento, trabalharam de forma autônoma, com intervenções pontuais do professor. Na continuidade, houve uma discussão coletiva, mediada pelo professor a partir das resoluções dos estudantes, sendo esse momento o foco da investigação que deu origem a esta dissertação.

No próximo capítulo, após apresentar algumas considerações sobre a aprendizagem matemática e desenvolvimento do raciocínio matemático, são discutidas ações do professor para promoção desse raciocínio. Na continuidade, estão os capítulos de procedimentos metodológicos da pesquisa, de análise e discussão dos dados, e por fim, das considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Aprendizagem E Desenvolvimento Do Raciocínio Matemático

> A promoção do raciocínio matemático é possível por meio da constituição de um ambiente de aprendizagem colaborativa com discussões eficazes envolvendo toda a turma. Muitas pesquisas são necessárias para estabelecer uma pedagogia sólida para facilitar esse tipo de ensino (BRODIE, 2010, p. 72, tradução nossa).

Os estudos envolvendo o ensino e a aprendizagem da Matemática têm demonstrado preocupação, nos últimos anos, em compreender a capacidade de raciocinar matematicamente dos alunos, fazendo-os pensar, compreender ideias matemáticas e aplicá-las, permitindo assim que a Matemática "faça sentido". Para isso, professores e pesquisadores têm questionado como conceituar a aprendizagem matemática, e em especial o raciocínio matemático dos alunos, bem como ações possíveis a fim de promovê-lo.

Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) relatam que a proficiência matemática requer o desenvolvimento de competências como:

1. Entendimento conceitual: compreensão de conceitos, operações e relações matemáticas;
2. Fluência processual: habilidade na execução de procedimentos de maneira flexível, precisa, eficiente e adequadamente;
3. Competência estratégica: capacidade de formular, representar, e resolver problemas matemáticos;
4. Raciocínio adaptativo: capacidade de pensamento lógico, reflexão, explicação e justificação;
5. Disposição produtiva: orientação para ver a matemática como sensata, útil, que vale a pena, razoável e que qualquer pessoa pode raciocinar para entender as ideias matemáticas.

Brodie (2010), por sua vez, defende que a aprendizagem matemática envolve habilidades como:

- Comunicar-se adequadamente, usando descrições em palavras, gráficos, símbolos, tabelas e diagramas;
- Identificar e resolver problemas de forma criativa e crítica;
- Organizar, interpretar e gerenciar atividades autênticas que demonstram responsabilidade e sensibilidade a problemas pessoais e sociais;

- Trabalhar em colaboração em equipes e grupos para aprimorar a compreensão matemática;
- Coletar, analisar e organizar dados quantitativos para avaliar e criticar as conclusões obtidas;
- Envolver-se com responsabilidade em argumentos quantitativos relacionados a assuntos locais, nacionais e globais.

A autora sugere o desenvolvimento de regras básicas bem diferentes daquelas nas salas de aula tradicionais:

1.1. Os estudantes são chamados a justificar todo o seu raciocínio, não apenas o raciocínio equivocado;

1.2. Os estudantes devem ouvir e desenvolver as ideias uns dos outros e desafiá-las sempre que necessário;

1.3. Os estudantes podem e devem desafiar o professor, e o professor deve justificar seu pensamento matemático – mudança de autoridade.

Para que tais habilidades e competências sejam desenvolvidas, faz-se necessário que os professores proponham, em suas aulas, tarefas que ofereçam ao estudante oportunidades para investigar, analisar, explicar, conjeturar, justificar e interagir. O termo tarefa é aqui utilizado como uma atividade em sala de aula, destinada a concentrar a atenção dos alunos em uma ideia matemática específica (STEIN; SMITH, 2009).

É necessário, assim, propor situações que os alunos sejam capazes de justificar e explicar ideias, a fim de tornar seu raciocínio claro, aprimorar suas habilidades de raciocínio e melhorar sua compreensão conceitual (BRODIE, 2010). Nessa direção, surgem então alguns questionamentos sobre os desafios do ensino da Matemática para promoção do raciocínio, relatados por Brodie (2010):

a) Como os alunos respondem às tarefas escolhidas para promover seu raciocínio matemático?
b) Como os professores podem interagir com os alunos em torno de tarefas para “pôr para fora” seu raciocínio matemático?
c) Como os professores podem ensinar a desenvolver proficiência matemática?
d) Como a conversa colaborativa entre alunos e professores promove o raciocínio matemático?
e) Que tipos de práticas, perguntas e movimentos de ensino ajudam a incentivar e sustentar o raciocínio matemático dos alunos?

f) Que tipos de dilemas os professores experimentam ao ensinar raciocínio matemático?
g) O que os professores podem fazer em resposta à resistência a novas formas de ensino?

Com objetivo de aprofundar algumas dessas questões (em especial a segunda delas, considerando o objetivo geral da pesquisa), a seguir são apresentadas ações do professor na condução de discussões matemáticas que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio.

2.2 Processos De Raciocínio Matemático

Segundo Mata-Pereira e Ponte (2017), o desenvolvimento do raciocínio matemático é um dos objetivos do ensino de Matemática nas escolas em todos os níveis de escolaridade. Para Oliveira (2008) a expressão raciocínio matemático denomina um conjunto de processos mentais dos quais se obtêm novas afirmações (conhecimento novo) a partir de afirmações conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio).

Lannin, Ellis e Elliot (2011) afirmam que o raciocínio matemático, baseado em um processo evolutivo, inclui processos como conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar, refutar caso necessário, desenvolver e avaliar argumentos. Consideramos neste trabalho três processos centrais do raciocínio, a constar, a conjectura, a generalização e a justificação.

Lannin, Ellis e Elliot (2011) destacam que as conjecturas são oriundas de relações matemáticas desenvolvidas de afirmações para se tornarem verdadeiras, mas que são desconhecidas. Para Morais, Serrazina e Ponte (2018, p.555), conjecturar consiste em "um processo que envolve raciocínio sobre relações matemáticas, desenvolvendo declarações, nomeadas como conjecturas, que requer maior exploração para verificar se são verdadeiras ou não verdadeiras". As conjecturas servem de ponto de partida para determinadas atividades matemáticas e o raciocínio matemático (PÓLYA,1954 *apud* MATA-PEREIRA, 2012). Pode-se entender que o processo de conjecturar então envolve a formulação de uma hipótese sobre uma relação matemática geral, baseando-se em evidências incompletas.

Para Mata-Pereira e Ponte (2017) as generalizações permitem o reconhecimento de que uma propriedade válida para um conjunto de objetos também é válida para uma variedade mais ampla de objetos, sendo vista pela ciência como base para a construção matemática. Carraher, Martinez e Schliemann (2008) ressaltam a promoção e compreensão da transição entre as generalizações, baseadas em observações empíricas e casos particulares e as generalizações baseadas em coerências lógicas. Para formular generalizações, faz-se necessário a utilização de situações exploratórias associadas a propostas passíveis de generalizar a conjuntos dados mais amplos. (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008).

A justificação, apoiada em procedimentos, propriedades e definições é vista como um ponto central no desenvolvimento do raciocínio matemático. O papel do professor é o de propiciar situações que promovam justificações, tendo como base o "porquê" os alunos chegaram a uma conclusão de determinada situação. Nesse sentido, promover o raciocínio significa propiciar intervenções que levem os alunos a dar sentido a justificações já existentes, contemplando o poder matemático. Sendo assim a justificação associada com o conceito de demonstração, por terem contextos próximos tem o papel de validar e compreender resultados, propiciando a legitimidade da atividade matemática (MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018; OLIVEIRA, 2008).

2.3 Ações Do Professor Para A Promoção Do Raciocínio Matemático

As ações do professor em sala de aula têm um papel central na promoção do raciocínio matemático. Logo, é importante que o professor tenha bem definido qual o seu papel nessa prática, sabendo quais tarefas selecionar e como agir para propiciar momentos de discussão, seja com pequenos grupos de alunos, ou com toda a turma, que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio matemático. A seguir, são trazidos alguns aspectos apontados na literatura a respeito dessa prática.

Lampert (1990) sugere uma sala de aula dinâmica, diferente da tradicional controlada pelo professor, onde a participação efetiva dos alunos possa ocorrer na apresentação de suas soluções, nas estratégias de resolução e no questionamento das resoluções dos colegas.

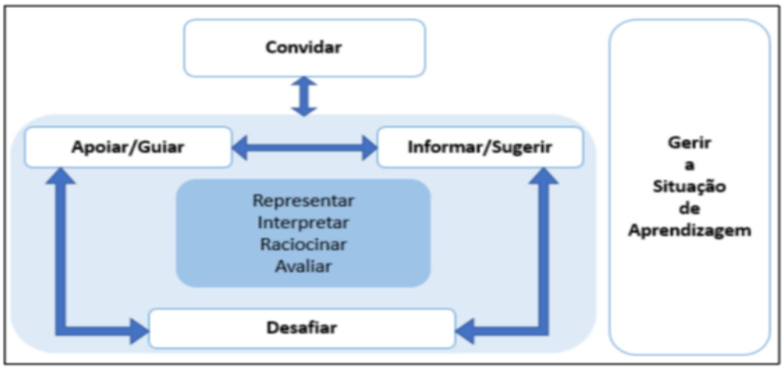
De acordo com Stein et al. (2008) o professor precisa saber usar as ideias dispersas, incompletas e mal formuladas dos alunos numa discussão coletiva, transformando-as em ideias matemáticas mais precisas e poderosas para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Sugerem um modelo para a preparação e realização das discussões que contemplam ações de: antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões entre respostas dos alunos.

Como relata Brodie (2010), o professor encontra dificuldade de envolver os alunos em discussões para promover o raciocínio matemático, e assim deve ter a preocupação de:

- Estar ciente dos diferentes níveis envolvidos nas tarefas;
- Dar aos alunos uma maior variedade de tarefas;
- Aceitar as respostas dos alunos sejam certas ou erradas;
- Ajudar os alunos fazendo perguntas focadas para que eles vejam algo novo, em invés de apenas dizer se a resposta está ou não correta;
- Fazer observações, conectando várias representações matemáticas;
- Ouvir o que os alunos estão dizendo durante a discussão para ter um significado mais claro da sua compreensão;
- Acompanhar o trabalho escrito dos alunos com a discussão de seus significados nas aulas;
- Apoiar os alunos a justificar suas ideias matemáticas;
- Explicar e justificar afirmações feitas, oportunizando a compreensão conceitual;

Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) também propõem um modelo com a finalidade de conduzir discussões matemáticas entre professor e estudantes, no qual são apresentadas quatro ações que devem ser trabalhadas dentro da sala de aula para o desenvolvimento do raciocínio do aluno (Figura 1).

Figura 1 – Modelo para Analisar as Ações do Professor.



Fonte: Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013, p. 59).

A ação de *convidar* dá início à discussão coletiva quando o professor solicita e incentiva os estudantes a participar, apresentando suas resoluções e elegendo até mesmo um aluno como interlocutor. Também recorre ainda a outros três tipos de ações.

- *Apoiar/guiar*: o professor procura conduzir os estudantes a apresentar a resolução e conclusão do grupo na tarefa, e em explorar ideias matemáticas incompletas e/ou mal formuladas apresentadas na resolução dos alunos visando um melhor entendimento na discussão coletiva; preocupa-se também em interagir e explorar as resoluções apresentadas pelo grupo que não foram compreendidas pelos demais alunos e presta atenção filtrando as ideias dos alunos, privilegiando as ideias fundamentais da tarefa.
- *Informar/sugerir:* o professor preocupa-se em disponibilizar novas informações e em validar o que foi apresentado pelo grupo, corrigindo respostas apresentadas pelos estudantes a fim de dar coerência aos resultados.
- *Desafiar:* a preocupação do professor nessa categoria é a de fazer o aluno ir além (expandir) do seu conhecimento prévio, propondo desafios.

Quadro 1 – Categorias e características de ações do professor no modelo TMSSR.

AÇÕES DO PROFESSOR	**CARACTERÍSTICA**
Movimentos de baixo potencial	
Eliciando resposta	Fazer uma pergunta para obter a resposta para uma determinada tarefa.
Eliciar fatos ou procedimentos	Solicitar que os alunos recitem fatos ou procedimentos conhecidos.
Pedindo esclarecimentos	Fazer uma pergunta para esclarecer o significado do aluno.
Explicitar o raciocínio do aluno	Tentar entender a solução, explicação ou raciocínio de um aluno.
Verificando a compreensão	Fazer uma pergunta para avaliar a compreensão dos alunos sobre ideias matemáticas em discussão.
Movimentos de alto potencial	
Eliciando ideias	Fazer uma pergunta ou perguntas para obter explicações dos alunos para uma solução, estratégia ou uma ideia matemática.
Eliciando compreensão	Avaliar o que os alunos entendem e tentar identificar a natureza do raciocínio dos alunos.
Pressionando por explicação	Pedir aos alunos que elaborem seu pensamento, expliquem e compartilhem seu raciocínio.

Fonte: Ellis, Özgür e Reiten (2018), adaptado pelo autor.

Outro modelo é o TMSSR (*Teacher Moves for Supporting Student Reasoning*) de Ellis, Özgür e Reiten (2018), desenvolvido especificamente para o raciocínio matemático, que assume que “as discussões em sala de aula devem concentrar-se tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos por meio de processos comunicativos” (ELLIS; ÖZGÜR; REITEN, 2018, p. 2). O TMSSR também divide as ações do professor em categorias, que podem ser observados no Quadro 1.

Neste modelo, podemos identificar algumas ações e interações em movimentos pedagógicos que o professor pode desempenhar no processo de aprendizagem no momento das discussões coletivas em suas aulas. Nos movimentos de baixo potencial, percebemos que as ações do professor estão concentradas em incentivar que os alunos apresentem as suas justificativas e conclusões a respeito da tarefa, enquanto que nos movimentos de alto potencial as ações se voltam para a elucidação do pensamento desenvolvido.

Quadro 2 – Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático.

CATEGORIAS	AÇÕES
Convidar	Solicita respostas para questões pontuais. Solicita relatos de como fizeram.
Guiar/Apoiar	Fornece pistas aos alunos. Incentiva a explicação. Conduz o pensamento do aluno. Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. Encoraja os alunos e redizerem suas respostas. Encoraja os alunos a reelaborarem suas respostas.
Informar/Sugerir	Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. Reelabora respostas fornecidas pelos alunos. Fornece informações e explicações. Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.
Desafiar	Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). Propõe desafios. Encoraja a avaliação. Encoraja a reflexão. Pressiona para a precisão. Pressiona para a generalização

Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019, p. 476).

Baseados nos modelos de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e Ellis, Özgür e Reiten (2018) apresentados anteriormente, Araman, Serrazina e Ponte (2019) organizaram um quadro de análise que descreve as ações de docentes que apoiam o raciocínio matemático, que será base para nossa análise, mostrado no Quadro 2. Tanto as ações como as práticas que o professor realiza em momentos de discussão coletiva de uma tarefa visam o desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno, propiciando que os alunos questionem, respondam, justifiquem e estabeleçam suas conclusões a respeito do conteúdo proposto. Tais ações possibilitam o desenvolvimento de ambientes desafiadores no processo de aprendizagem dos alunos. Assim,

> Para criar oportunidades para que os alunos desenvolvam o raciocínio matemático, os professores precisam repensar as normas estabelecidas em sala de aula, criando ambientes que proporcionem oportunidades para pensar em vez de estabelecer regras e procedimentos padronizados (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p. 469).

As categorias propostas no modelo são: convidar (convidar/iniciar a discussão); guiar/apoiar (conduzir a discussão); informar/sugerir (validar as respostas) e desafiar (ir além do conteúdo). As ações, por sua vez, mostram caminhos ou meios para o desenvolvimento das categorias.

2.4 Ensino De CDI, O Trabalho Com Tarefas E A Promoção Do Conhecimento.

Professores de CDI muitas vezes deparam-se com estudantes oriundos do Ensino Médio que não tiveram a oportunidade de elaborar uma sólida base matemática, apresentando dificuldades em compreender e operar com conceitos próprios da disciplina. Na tentativa de “remediar” tal situação, “muitos professores de Cálculo fazem um exaustivo trabalho focado apenas em técnicas algébricas antes de iniciar o conteúdo do curso propriamente dito” (ORFALI, 2018, p 132).

Em contrapartida, deve-se pensar situações que promovam a elaboração do raciocínio matemático em estudantes que cursam CDI, permitindo que façam inferências justificadas, sendo que essas advêm da exploração de conceitos e ideias matemáticas em níveis práticos e intuitivos (GALBRAIT, 1995). As discussões matemáticas mostram-se como momentos de trabalho na sala de aula com potencialidades para a promoção do raciocínio matemático, ao favorecerem o envolvimento dos estudantes “na apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados para os seus raciocínios quando trabalham com tarefas matematicamente significativas” (RODRIGUES; MENEZES; PONTE, 2018, p. 399).

Um modelo de aula que valoriza as discussões matemáticas envolve o trabalho com episódios de resolução de tarefas (TREVISAN; MENDES, 2017; 2018). São momentos não precedidos da apresentação de definições ou exemplos similares, nas quais os estudantes, em grupos, trabalham com tarefas que possibilitam a exploração intuitiva de ideias matemáticas e sua posterior sistematização, a partir de discussões entre estudantes e professor.

Depois de estabelecer seus objetivos de aprendizagem o professor pode usar de tarefas que permitam os tipos de pensamento com as quais ele gostaria que os alunos se envolvessem. Brodie (2010) estabelece alguns tipos de tarefas:

- Tarefas que requerem memorização: para memorizar fatos e procedimentos matemáticos;
- Tarefas de procedimentos sem conexão: produção correta de soluções em vez de desenvolver o conhecimento matemático;
- Tarefas de procedimentos com conexão: uso de procedimentos a fim de levar ao desenvolvimento de níveis mais profundos de compreensão de conceitos e ideias matemáticas;
- Tarefas de nível elevado (executar tarefas matemáticas): os alunos precisam analisar as restrições das tarefas e encontrar criativamente suas próprias soluções.

Nesta proposta de trabalho, contexto em que são coletados os dados analisados nesta dissertação, foram consideradas tarefas que possam ser realizadas por meio de explorações em pequenos grupos, seguidas da discussão com toda a turma.

Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 788) destacam alguns princípios de design das tarefas que contribuem à promoção do raciocínio matemático:

a. Propor tarefas de natureza diversa, com ênfase em tarefas que incluam questões exploratórias e/ou problemas;
b. Propor tarefas que incluam questões que incitem a formulação de generalizações;
c. Propor tarefas que incluam questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução;
d. Propor tarefas que incluam questões com diferentes graus de desafio.

Portanto, o foco dessa investigação então está nas ações do professor, nas tarefas propostas aos estudantes que proporcionem o desenvolvimento do raciocínio matemático, na discussão coletiva, que tem potencial para promover a aprendizagem (PONTE, 2005) e também no desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes, cabendo ao professor articular respostas e promover discussões mais aprofundadas das ideias matemáticas envolvidas (STEIN *et al.*, 2008).

Mata-Pereira e Ponte (2018) apresentam os princípios de design que o professor deve seguir, na condução das tarefas para promover o raciocínio matemático:

i. Acompanhar a resolução da tarefa, dando apenas as indicações necessárias, com o intuito de não reduzir de modo significativo o desafio da tarefa;

ii. Solicitar a explicação do "porquê" e justificações alternativas, tanto durante a resolução da tarefa, quanto nos momentos de discussão coletiva;
iii. Destacar ou solicitar aos estudantes que identifiquem justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida;
iv. Propor demonstrações sempre que estas forem pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos estudantes;
v. Encorajar a partilha de ideias nos momentos de discussão coletiva;
vi. Aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique;
vii. Desafiar os estudantes a ir além da tarefa quer pela formulação de novas questões, quer pela formulação de generalizações.

No que diz respeito ao conteúdo matemático das tarefas que aqui serão analisadas, destaca-se que o conceito de função é um dos mais importantes na Matemática e essencial para se compreender conceitos do CDI. Uma função relaciona-se a um conceito matemático que descreve como duas ou mais quantidades variam uma em relação à outra. Tal relação pode ser descrita por palavras, símbolos matemáticos e representações, como gráficos ou tabelas.

No estudo do CDI explora-se o estudo de duas quantidades que variam, bem como do modo como variam. Mestre (2014, p. 71) defende que a "gênese do pensamento funcional acontece quando o estudante se envolve numa atividade, escolhe prestar atenção às quantidades que variam e começa a focar-se na relação entre essas quantidades". Pesquisadores têm chamado o raciocínio utilizado para interpretar as relações entre variáveis de Raciocínio Covariacional (RC) (ZIEFFLER; GARFIELD, 2009; THOMPSON; CARLSON, 2017).

O RC entendido como o raciocínio utilizado para interpretar relações entre duas variáveis traz as ideias de variação e covariação, necessárias para que se desenvolva um conceito aplicável e eficiente sobre função que é a base na elaboração de conceitos do CDI (ZIEFFLER; GARFIELD, 2009). Cabe ao professor proporcionar ações que desenvolvam e estimulem esse raciocínio.

3 METODOLOGIA

Este trabalho é recorte de uma pesquisa maior, desenvolvida no âmbito de um projeto de investigação sob coordenação do orientador do trabalho, intitulado “Conceitos mobilizados por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral no trabalho em episódios de resolução de tarefas de aprendizagem”, com fomento da Fundação Araucária, na modalidade de Bolsa de Produtividade em Pesquisa e Desenvolvimento Tecnológico. Encontram-se em desenvolvimento, no âmbito desse projeto e sob supervisão do orientador, entre os anos de 2019 e 2022, quatro dissertações do PPGMAT (incluindo esta) e duas teses do Programa de Doutorado em Ensino e Tecnologia do campus Ponta Grossa. Esses trabalhos estão respaldados pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UTFPR, por meio de um projeto que agrega diversos docentes e pesquisadores do PPGMAT que atuam em disciplinas matemáticas no campus Londrina, sob o Parecer de número 3.318.427.

Esta dissertação, em especial, foi desenhada como uma pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994), e considera dados provenientes de um primeiro ciclo de intervenção realizado no 1º semestre de 2019, em uma turma de estudantes ingressantes em um curso de Engenharia, que cursavam a disciplina de CDI (sob responsabilidade do orientador da pesquisa), na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus de Londrina. Ao longo daquele semestre, foram realizados diversos encontros, conforme disposto no quadro 3, de 3 aulas de 50 minutos, na qual os estudantes eram organizados primeiramente em grupos menores (3 a 4 integrantes) para a discussão e realização das tarefas, e em seguida ocorria uma plenária com toda a turma para a discussão de suas resoluções (nosso foco de discussão).

Quadro 3 – Cronograma dos encontros

ENCONTRO 1	Apresentação do professor e do plano de ensino. **Realização, em grupos, da tarefa das empresas.**
ENCONTRO 2	**Discussão da tarefa das empresas**. Sistematização do conceito de sequências numéricas.
ENCONTRO 3	Sequência de diferenças. Realização, em grupos, de tarefa investigativa envolvendo convergência de sequências numéricas.
ENCONTRO 4	Sistematização do conceito de sequências numéricas.
ENCONTRO 5	Realização, em grupos, de tarefas investigativas envolvendo relações entre grandezas (incluindo a **tarefa do boato**).
ENCONTRO 6	Discussão das tarefas envolvendo relações entre grandezas (incluindo a **tarefa do boato**). Sistematização do conceito de funções reais de uma variável real.

Fonte: próprio autor.

Aqui, são consideradas as discussões que ocorreram em torno de duas tarefas, propostas logo nas primeiras aulas da turma, cujos enunciados são apresentados nas Figuras 2 e 3. Destaca-se que tais tarefas já foram utilizadas em trabalhos anteriores desenvolvidos no âmbito do grupo de pesquisa que o orientador integra e, portanto, já foram validados (a primeira, em Fonseca (2017), e Ramos (2017), e a segunda em Trevisan et al. (2019)). Este trabalho considera um aspecto que pouco se sabia a respeito do desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes: o papel das ações do professor durante esses episódios.

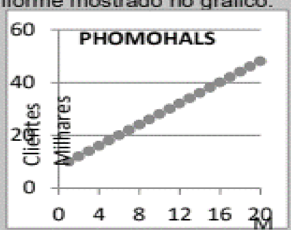
Para a organização das tarefas, levou-se em consideração um conjunto de ideias do RC que poderiam ser mobilizadas nas tarefas propostas, como por exemplo: constituir quantidades envolvidas na situação (reconhecer atributos de uma situação passível de medição); imaginar medidas de quantidades variando continuamente; coordenar duas quantidades que variam juntas, reconhecendo como as quantidades se relacionam. Visto que esses estudantes já haviam tido contato com uma definição formal de função em seu Ensino Médio, o objetivo, por meio da realização dessas tarefas, era que (re) significassem esse conceito. Em todas elas, buscou-se mobilizar a articulação entre múltiplas representações (linguagem natural, tabular, gráfica e algébrica), no intuito de coordenar a variação das quantidades envolvidas, reconhecendo a existência de taxas de variação e eventuais mudanças nessas taxas.

Vale aqui destacar que o modo como as tarefas foram organizadas tinha a intenção de que os estudantes lidassem com as situações sem a necessidade de tomar/adotar valores específicos para as grandezas envolvidas, ou seja, imaginassem medidas de quantidades variando continuamente.

Figura 2 – Tarefa das empresas

A empresa COMPUNET fornece conexões de Internet para seus atuais 10.000 consumidores. A COMPUNET está interessada na contratação de uma agência de publicidade para desenvolver uma campanha, para aumentar o número de consumidores. A empresa tem três agências de publicidade diferentes para escolher: PROMOHALS, H & G publicidade e SCHLEICH & Co. Cada empresa garante um aumento do lucro para COMPUNET, mas em ritmos diferentes. Seu trabalho é investigar qual agência é melhor para COMPUNET.

A campanha desenvolvida pela PROMOHALS promete um crescimento nos negócios, conforme mostrado no gráfico.



H & G Adversiting
A campanha da Agência de publicidade H & G Adversiting promete um crescimento mensal a uma taxa 10%. Ou seja, o lucro de cada mês é 10% maior que do mês anterior.

Schleich & Co promete o crescimento mostrado na Tabela.

Tempo (meses)	Clientes (Milhares)
1	10
2	15
3	19
4	23
5	27
6	30
7	32
8	34
9	36
10	38
11	39
12	40
13	41
14	42
15	42
16	43
17	43
18	44
19	44

Fonte: material do grupo de pesquisa.

Figura 3 – Tarefa do boato

Quando surge um boato em uma pequena cidade, inicialmente, o número de pessoas que ouviram começa crescendo lentamente e, conforme mais pessoas começam a saber e comentar, espalha-se rápido, até quando o número de pessoas que sabe chegar no limite de pessoas na região. Represente um gráfico que relacione a quantidade de pessoas que sabe do boato com o tempo.

Fonte: material do grupo de pesquisa.

O papel do autor desta dissertação foi o de observar e gravar os encontros do professor da disciplina, para futura análise dos dados. A recolha de dados da pesquisa maior envolveu: (i) os protocolos dos estudantes na resolução das tarefas; (ii) coleta do áudio de discussão nas equipes e (iii) filmagem em vídeo da discussão coletiva envolvendo toda a turma, mediada pelo professor. Considerando nosso foco em analisar as ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio dos estudantes no momento da plenária, este trabalho considera como instrumento a filmagem de dois momentos de discussão coletivas, que foram transcritas integralmente. Após, baseando-se nas etapas presentes no modelo de Powell, Francisco e Maher (2004), identificaram-se momentos significativos que foram separados em trechos, e depois analisados.

Posterior a isso, o autor desta dissertação iniciou a análise dos dados individualmente categorizando cada fala do áudio transcrito, utilizando diferentes cores para categorizações das ações do professor. Em um segundo momento, reuniu-se com o orientador da pesquisa para discutir e validar as categorizações. Por fim, realizou sua análise, detalhada no capítulo seguinte.

Na análise da discussão coletiva entre professor e os estudantes (indicados por A1, A2,...) foram separados trechos das transcrições da aula conduzida pelo orientador dessa dissertação. Entre colchetes, há o número do trecho e o número da fala ([1.3] - onde lemos trecho 1, fala 3) e ao final de cada frase destaca-se a identificação da categoria de ação - conforme o Quadro 2, associada a fala do professor na interação com os estudantes.

Como resultado desta dissertação, foi desenvolvido um produto educacional, um caderno com orientações ao professor sobre a promoção de discussões matemáticas, na qual são trazidos alguns trechos da análise detalhada no próximo capítulo, como forma de ilustrar ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio matemático em diferentes níveis de escolaridade, da Educação Básica ao Ensino Superior.

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

A apresentação e a análise de dados são feitas considerando cada tarefa em separado. Para cada uma delas, subdividiu-se a discussão em trechos, utilizando o modelo proposto por Araman, Serrazina e Ponte (2019) para categorização das ações do professor.

4.1 Tarefa Das Empresas

No trecho 1, integrantes de um dos grupos responderam ao convite feito pelo professor para compartilhar com a turma o que haviam pensado sobre a situação. Nos trechos 2 e 3, a discussão foi conduzida no intuito de detalhar as estratégias utilizadas por esse e outros grupos. Nos trechos 4 a 6, por sua vez, aprofundaram-se aspectos relacionados às representações gráficas. Por fim, nos trechos 7 e 8, é discussão foi focada na ideia de taxa de crescimento, e no estabelecimento de conexões das ideias dessa tarefa com conceitos vistos pelos estudantes na Educação Básica.

TRECHO 1

[1.1] Professor: Queria ver um pouco de vocês o que vocês pensaram sobre a situação. Alguma equipe se propõe a iniciar? **(Convidar).**
[1.2] A1: A gente inicia
[1.3] Professor: Pode ser então. Conte para a gente o que vocês pensaram. **(Guiar/ apoiar).**
[1.4] A1: Primeiro a gente fez análise do Promohouse pelo gráfico. Os primeiros cinco meses 5.000 clientes, então no segundo mês 50.000 clientes aí no total ele recebeu 40.000 clientes novos aí a gente foi para o HIG. Pode falar a conclusão ou faz assim (indicando continuidade da explicação)?
[1.5] Professor: Conta como é que vocês foram encaminhando? **(Guiar/ apoiar).**
[1.6] A1: A gente foi usando a fórmula de juros compostos, mas gente analisou mês a mês para conseguir comparar com as duas empresas. Depois a terceira empresa a gente olhou também aquela tabela de 5 em 5 meses e aí a gente concluiu que a Promohouse não se tornou vantajosa em nenhum momento e, a terceira empresa ela se tornou vantajosa no período de até 16 meses, depois quem ficou melhor foi a HIG.
[1.7] Professor: Então vocês não concluíram por uma empresa única de algum modo? **(Guiar/apoiar).**
[1.8] A2: [inaudível]
[1.9] A1: [inaudível]
[1.10] Professor: O que poderia querer me fazer com que esse número de clientes aumentasse muito rápido? **(Guiar/apoiar)** Pensando na situação, o que eu poderia tá querendo que o número de clientes aumente muito rápido? **(Desafiar)**
[1.11] A2: Talvez porque o seu faturamento seja suficiente naquele período.

[1.12] Professor: Eu poderia estar disposto há esperar um tempo maior para ter esse aumento de clientes? **(Guiar/apoiar)**
[1.13] A2: Depende bastante da disponibilidade da tua empresa. Porque dependendo se você estiver no vermelho você precisa de um aumento de clientes muito rápido, mas se você estiver tranquilo e eles tiveram a oportunidade de esperar um pouco mais por mais clientes, por que não?
[1.14] Professor: Então quer dizer que dentro dessas possibilidades alguma empresa se faz mais interessante num caso do que em outro? **(Desafiar)**
[1.15] A2: Sim.

No trecho 1, observa-se que as ações do professor estão centradas em três categorias: Convidar, Guiar/apoiar e Desafiar. Como se observou, a categoria convidar ocorreu quando o professor, em [1.1] chamou alguma equipe para compartilhar como pensaram e resolveram a tarefa apresentada. Em determinados trechos o professor fez perguntas com o intuito de incentivar a explicação da resolução da tarefa, observados em [1.3], [1.5], [1.7], [1.10] e [1.12] ações da categoria guiar/apoiar. Essas ações, da categoria Guiar/Apoiar têm por intenção possibilitar que os estudantes explicitem e detalhem o modo como pensaram, sem a intenção, nesse momento, de julgar se a estratégia estava ou não correta. Ações da categoria desafiar, presentes em [1.10] e [1.14], mostram que o professor encorajou os alunos à reflexão, solicitando que elaborassem algumas conjecturas frente ao que era solicitado na tarefa. No primeiro caso, o aluno fornece uma resposta [1.11], porém a outra questão não atingiu seu objetivo, visto que apenas um dos alunos disse "sim" [1.15].

TRECHO 2

[2.1] Professor: Então está bem, vocês construíram tabelas? Vocês fizeram fórmulas? Que tipo de recursos vocês utilizaram para analisar? **(Guiar/apoiar)**.
[2.2] A1: A gente analisou um por um, fez umas tabelas e no final a gente fez uma tabela da fórmula dos juros e as tabelas.
[2.3] Professor: E essas tabelas vocês fizeram manualmente? Alguém pensou ou usou uma estratégia que acha que é diferente do que eles relataram? Ou todo mundo fez tabela manual chegou a mesma conclusão? **(Guiar/apoiar)**
[2.4] A2: A gente fez gráfico no Excel, a gente fez gráfico.
[2.5] Professor: Como é que vocês fizeram o gráfico? **(Guiar/apoiar)**
[2.6] A3: Jogou o período selecionado e cruzou o número de clientes e cruzamos as linhas então em curto período tenho a empresa e o período do outro.
[2.7] Professor: Traz aqui para gente ver que vocês fizeram **(Guiar/apoiar)**
[2.8] A3: [compartilhando com o projetor o arquivo em Excel – Figura 4] O que acontece a gente pegou, a gente fez o comparativo a análise do primeiro gráfico então o fato é que promete o crescimento conforme o gráfico então a análise dele começa em 10.000 clientes e termina próximo a 50.000. O próximo a HIG ela promete crescimento de 10% em cima do número de clientes anterior.

[2.9] Professor: Deixa eu pegar uma coisa da anterior, você falou próximo a 50.000. Alguém conseguiu ter uma garantia um pouco mais firme que é 50.000 ou todo mundo trabalhou com aproximação? **(Desafiar)**
[2.10] A2: [inaudível]
[2.11] Professor: Como é que vocês chegaram nesse valor? **(Guiar/apoiar)**
[2.12] A2: Através de uma função.
[2.13] Professor: Qual função? **(Guiar/apoiar)**
[2.14] A1: $f(x) = 2x + 10$.
[2.15] Professor: Mas como é que vocês chegaram nesses números aí nessa fórmula que você falou? **(Guiar/apoiar)**
[2.16] A1: A gente usou análise dos dados da tabela.
[2.17] Professor: Por exemplo, eu estou olhando a tabela; ali para mim está meio no "chutômetro". Como é que eu sei? **(Guiar/apoiar)**
[2.18] A1: [inaudível]
[2.19] Professor: Será que tem como a gente buscar alguma ferramenta que forneça isso sem depender de uma aproximação? **(Desafiar)**
[2.20] A1: Busquei ali os dados da tabela.

Figura 4 – Projeção da resolução da equipe

Fonte: material do grupo de pesquisa.

Nesse trecho, pode-se observar que o professor se preocupou inicialmente em *guiar/apoiar*. Nas falas [2.1], [2.3], [2.5] e [2.7], [2.11], [2.13], [2.15] e [2.17] conduziu e incentivou os estudantes A1, A2 e A3 a detalharem o modo como seu grupo havia pensado, focando a atenção em alguns aspectos específicos da tarefa (no caso, o uso da planilha como recurso, e a necessidade ou não de se trabalhar com valores aproximados). Ações da categoria *desafiar* apareceram em [2.9], em que o professor propôs aos alunos refletir mais sistematicamente a respeito de uma suposta aproximação que haviam assumido em sua resolução, organizando assim uma justificativa com conceitos matemáticos (no caso, o uso do conceito de função [2.14]). Também em [2.19], com o professor solicitando aos alunos que reflitam se existe uma "ferramenta" que determine os números apresentados no gráfico, de forma exata, porém o aluno apenas responde que usou a tabela de dados, sem justificar como foi feito esse uso [2.19]. A discussão prosseguiu, agora com a participação de um integrante (A4) de outro grupo.

TRECHO 3

[3.1] Professor: Ah sem usar de meios ilícitos! Coloca o cursor em cima de algum desses pontos aí. Ali, em termo de informação precisa, se você posicionar o cursor você vai ter o valor exato **(Informar/sugerir)**. Alguém tinha feito isso? **(Guiar/apoiar)**
[3.2] A4: [inaudível]
[3.3] Professor: Mas segue lá o que você estava falando. **(Guiar/apoiar)**
[3.4] A4: Então a gente pegou. Nós fizemos uma fórmula para encontrar qual seria o ganho de clientes durante o período de 19 meses da empresa dois. Então ela com 19 meses ela colocaria 61159 clientes.
[3.5] Professor: Explica para gente como é que você construiu esse programa. **(Guiar/apoiar)**
[3.6] A4: Ela pega a quantidade de clientes multiplica por 10% e saio somando 10% de cada célula sucessivamente a cada mês contabilizando.
[3.7] Professor: Está bem. Então vamos pensar nas possibilidades da gente fazer isso. Essa segunda empresa tem a proposta de aumentar o número de clientes em 10% e 10% do que? **(Desafiar).**
[3.8] A4: 10% que já tem.
[3.9] Professor: 10% do que já tem **(Informar/sugerir)**. Então se eu partir do que eu já tenho como é que eu descubro quanto eu vou ter no mês seguinte? **(Desafiar).**
[3.10] A4: 10% em cima de 10.000.
[3.11] Professor: Isso manualmente pode ser feito de alguma maneira? **(Desafiar).**
[3.12] A4: Você tem que fazer uma equação em que o termo inicial de 10 mais a taxa de variação que é o número do a1 elevado ao número de meses.
[3.13] Professor: Explique para a gente o que está por trás disso que você está falando. **(Guiar/apoiar)**
[3.14] A4: Por ser juros compostos, toda vez vai ser multiplicado pela mesma taxa de 1,1.
[3.15] Professor: Então se eu quiser saber quanto eu vou ter depois de 15 meses, sem fazer os 14 anteriores como é que eu posso pensar? **(Guiar/apoiar).**
[3.16] A4: Faz 1,1 elevado a quinze.
[3.17] Professor: O que significa fazer 1,1 elevado a 15? Que eu estou multiplicando esse 1,1 quinze vezes **(Informar/sugerir)**. Da onde veio esse 1? **(Guiar/apoiar).**
[3.18] A4: É o valor inicial mais a taxa de 10%.

[3.19] Professor: O valor inicial é 10.000? **(Guiar/apoiar)**
[3.20] A4: [inaudível]... o 0,1 a 10%
[3.21] Professor: Beleza. A ideia desse 1,1 é porque seria uns 10.000 no início o meu 100%. Eu vou acrescentar com 10.000 multiplicado por 0,1 então na verdade eu tenho uma quantidade mais 0,1, e por isso que vem esse 1,1 enquanto escrita mais abreviada desse processo. **(Informar/sugerir).** Vocês usaram essa ideia para construir a fórmula? Como é que vocês pensaram? **(Guiar/apoiar)**
[3.22] A4: A gente usou essa ideia. A gente jogou na fórmula basicamente pegando cada valor e multiplicando ele por mais 10% e jogando na célula seguinte.
[3.23] Professor: Tá.
[3.24] A4: Na terceira empresa ela tem uma tabela simples com a quantidade de meses distribuídos e os clientes em milhares, então basicamente a gente montou uma planilha e juntou os dados em função do tempo. Então a gente pode ver que a empresa 3 por exemplo, ela dá melhor o número de clientes inicialmente, porém a longo prazo e que depois dos 15 meses a empresa 2 passa a ter uma melhor viabilidade.

A categoria guiar/apoiar pode ser observada ao final de [3.1], em que o professor fornece explicações aos alunos quando pede para "posicionar o cursor", referindo-se ao gráfico apresentado no computador pelos alunos. Em [3.3], [3.5], [3.13], [3.15], [3.17] e [3.19] a categoria guiar/apoiar também se faz presente, onde podemos observar que o professor incentivou que os alunos detalhem determinados aspectos da resolução do grupo, explicitando suas conjecturas. Na maior parte desses trechos, o professor conduz o pensamento do aluno, e procurar focalizar sua fala no detalhamento do procedimento para o cálculo do número de clientes da empresa cujo crescimento é exponencial, ou seja, evidenciando as justificativas. Em especial, em [3.15] o foco foi levar A4 a explicitar um procedimento que permitisse determinar o total de clientes como uma função do tempo, sem a necessidade de considerar cálculos realizados mês a mês, o que pode ser reconhecido como uma generalização. Em [3.1], [3.9], [3.17] e [3.21], reconhecemos uma ação da categoria informar/sugerir, quando o professor fornece explicações aos alunos e pede para "posicionar o cursor" [3.1], referindo-se ao gráfico construído na planilha, quando valida uma resposta correta fornecida pelo aluno [3.9] ou quando fornece explicação sobre o cálculo de potenciação [3.17], ações que buscaram levar A4 a refletir sobre o significado os procedimentos que seu grupo havia utilizado, possivelmente de forma mais automatizada, em sua resolução, contribuindo assim para uma compreensão das ideias matemáticas associadas ao crescimento exponencial. Ações da categoria desafiar presentes em [3.9] e [3.11] destacam-se quando o professor solicitou do estudante uma explicação mais detalhada referente aos 10% [3.9] "*… Então se eu partir do que eu já tenho como é que eu descubro quanto eu vou ter no mês seguinte?*" e a deduzir uma expressão matemática para o cálculo do número de clientes como uma função do tempo, o que reconhecemos como um processo de generalização.

TRECHO 4

[4.1] Professor: O quê que vocês acham desses gráficos que ele colocou? Vocês acham que tá de acordo com o que vocês pensaram? **(Convidar)**
[4.2] A5: [inaudível]
[4.3] Professor: Por quê? **(Guiar/apoiar)**
[4.4] A5: É porque se a gente comparar com o gráfico inicial, a gente tem uma planilha. É um gráfico em reais.
[4.5] Professor: Onde é que está o conjunto de dados da primeira empresa? **(Guiar/apoiar)**
[4.6] A5: Empresa 1 ta aqui. É porque eu só peguei dois meses 5, 10, 15 e 19, eu não peguei, então é por isso os valores. Eu não alimentei ele de 0 a 19 horas entendeu.
[4.7] Professor: Vocês acham que se ele tivesse feito mês a mês estaria alinhado se ele pegar valores? **(Guiar/apoiar)**
[4.8] A5: Ia estar mais próximo de uma reta.
[4.9] Professor: Esses valores batem? Como que vocês encontraram no tempo 0 tem 10 mil, no tempo 2 tem 15 mil. Essa é a primeira empresa? **(Guiar/apoiar)**
[4.10] A5: Sim porque a gente aproveitou os pontos.
[4.11] Professor: Aqui tem algum problema na digitação, o que é que está acontecendo? Por que o formato que eu encontrei aqui na primeira empresa é uma reta? O fato de ela ser uma reta me diz o que? **(Desafiar).**
[4.12] A5: Taxa de crescimento.
[4.13] A6: A taxa é uma constante.
[4.14] Professor: Uma taxa constante? Essa taxa é quanto? **(Guiar/apoiar)**
[4.15] A5: [inaudível]
[4.16] A6: 10.
[4.17] Professor: Tem algum problema na tabela onde você colocou embaixo, por que em 2 meses deveria ter quanto? **(Informar/sugerir)**
[4.18] A5: 14.
[4.19] Professor: Muda ali. **(Informar/sugerir)**
[4.20] A5: O número mais próximo de 14 seria o 15.
[4.21] Professor: Não nesse caso. Ali exato pode ser esse mesmo. **(Informar/sugerir).**
[4.22] A5: Uma taxa variável.
[4.23] Professor: Qual delas? A primeira, a segunda ou a terceira? **(Guiar/apoiar)**
[4.24] A5: [inaudível]

No início deste trecho [4.1] pode-se observar que o professor fez uso da categoria convidar, na medida em que "chamou" novamente os alunos à discussão, solicitando que relatem que se o que fizeram está de acordo com a explicação do grupo anterior. O aluno A5 "aceita" o convite, e assim um terceiro grupo passa a participar da discussão. A categoria guiar/apoiar surgiu em [4.3], [4.5], [4.7], [4.9], [4.14] e [4.23], trechos da discussão em que o professor incentivou a explicitação de conjecturas elaboradas pelos alunos, e conduziu e focalizou seu pensamento fatos importantes, como o de saber se é uma taxa constante [4.14], e incentivou a elaboração de justificativas sobre qual das empresas tem uma taxa variável [4.23]. Em [4.11], por sua vez, o professor encorajou a turma a elaborar uma generalização, no caso da primeira empresa, cuja representação gráfica era uma reta (categoria desafiar). Após um pequeno trecho de diálogo que é inaudível, o professor prosseguiu buscando uma justificativa a respeito do alinhamento dos pontos.

TRECHO 5

[5.1] Professor: O problema aqui é mais questão de visualização. Como eu usei um marcador bem grandão parece que ele dá uma leve desalinhada, mas não é não os dados. Se eu tivesse colocado um marcador um pouco mais sutil a gente perceberia que eles estão alinhados **(Informar/Sugerir)**. O fato que eles estarem alinhados significa o quê? **(Guiar/apoiar)**
[5.2] A5: a taxa de crescimento constante.
[5.3] Professor: Taxa de crescimento constante? Que é taxa de crescimento constante? Pensando em termos menos técnicos digamos assim: o que significa falar que a taxa de crescimento é constante? **(Desafiar)**
[5.4] A2: A variação não muda.
[5.5] A6: Todo mês cresce a mesma coisa.
[5.6] Professor: Todo mês cresce a mesma coisa **(Informar/sugerir)**. Isso acontece com as três empresas? **(Guiar/apoiar)**
[5.7] A6: Não
[5.8] Professor: O que vocês diriam sobre a taxa de crescimento da segunda empresa? **(Desafiar)**
[5.9] A6: Que ela é exponencial.
[5.10] Professor: Faz de conta que eu nunca ouvi essa palavra. Tentam me explicar com outra linguagem. **(Guiar/apoiar)**
[5.11] A2: Cada vez mais o crescimento.
[5.12] A3: Quanto maior o tempo maior o crescimento.
[5.13] Professor: Quanto maior o tempo maior o crescimento. **(Informar/sugerir)**
[5.14] A2: Comparado crescimento inicial.
[5.15] A6: O professor, o crescimento cresce.
[5.16] Professor: Vocês acham que faz sentido essa frase: O crescimento cresce. **(Guiar/apoiar)**
[5.17] A2: Pra ele provavelmente faz sentido.
[5.18] A7: Quanto mais você cresce, mais você cresce.
[5.19] Professor: Eu acho que com pessoas não é muito assim não, depende da faixa etária. O crescimento cresce. O que é que vocês entendem nessa frase? **(Guiar/apoiar)**
[5.20] A3: Quanto maior o tempo, o período, maior o lucro com o tempo.
[5.21] Professor: Com o número de clientes nesse caso, que vai ser o lucro. Mas aqui a gente está medindo o número de clientes. Quanto mais tempo maior o número de clientes. **(Informar/sugerir)**. Ué mais na primeira empresa quanto mais tempo maior o número de clientes. **(Guiar/apoiar)**
[5.22] A3: Mas quanto na segunda quanto maior o número de clientes, maior o ganho de clientes.

A categoria guiar/apoiar se fez presente em [5.1], [5.6], [5.10], [5.16], [5.19] e [5.21], com o professor conduzindo o pensamento dos alunos, encorajando-os a compartilharem suas conjecturas e incentivando a formulação de justificativas. Em especial, destacamos como estratégia do professor a fala do trecho [5.10], *"Faz de conta que eu nunca ouvi essa palavra. Tentam me explicar com outra linguagem"*, que busca mobilizar algum processo de generalização. A3 então responde *"Quanto maior o tempo maior o crescimento"*, e A6 completa que *"O crescimento cresce"*. Em [5.1], [5.6], [5.13] e [5.21] podemos observar a categoria informar/sugerir, pois o professor forneceu informações e explicações, validando e/ou complementando assim algumas das justificativas trazidas pelos alunos. A categoria desafiar esteve presente em [5.3] e [5.8], com o professor encorajando para a generalização, quando perguntou sobre o que é taxa de crescimento constante [5.3], e questionou sobre o tipo de crescimento da segunda empresa [5.8].

TRECHO 6

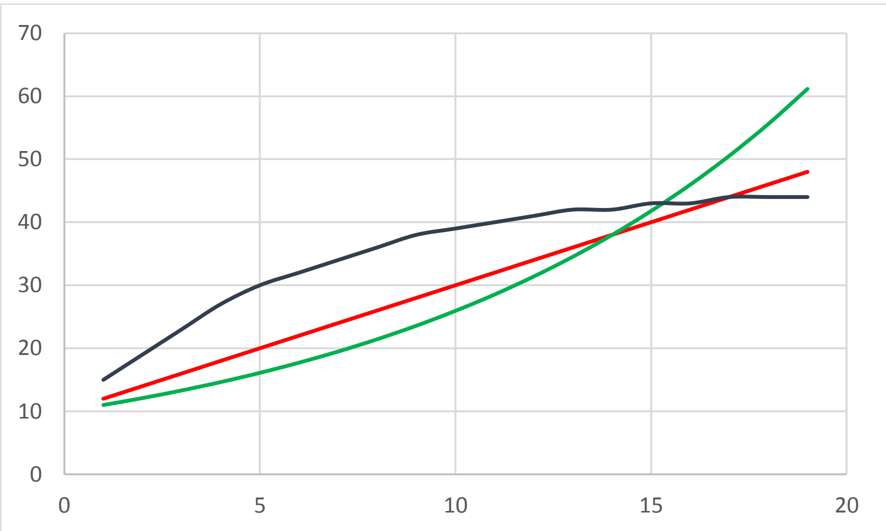
[6.1] Professor: Então quer dizer que falar que ela cresce, como é que vocês falaram? **(Guiar/apoiar)**
[6.2] A6: O crescimento cresce.
[6.3] Professor: O crescimento crescente que quer dizer que o ganho está aumentando. **(Informar/sugerir)**
[6.4] A7: A taxa de aumento está crescendo.
[6.5] Professor: E a terceira empresa tem isso também como característica? **(Guiar/apoiar)**
[6.6] A6: Não.
[6.7] A6: Não porque a taxa de crescimento diminuiu.
[6.8] Professor: A taxa de crescimento diminui **(Informar/sugerir)**. O que é que significa dizer que a taxa de crescimento diminui? **(Guiar/apoiar)**
[6.9] A6: O ganho de clientes começa a se estabilizar.
[6.10] Professor: Os gráficos estão ali. Tem alguma outra coisa que tem algum valor que ficou diferente que deveria ser **(Guiar/apoiar).** Não era para dar essa quebrada aqui não, mas enfim, a ideia do que a gente tá querendo tá ali **(Informar/sugerir)**. Volta os gráficos para gente. Em termos da decisão que vocês tomaram dos gráficos que eles fizeram estão coerentes com vocês enquanto como consultores passariam como opção? **(Guiar/apoiar)**
[6.11] A6: Depende da necessidade da empresa.
[6.12] Professor: Me passa as opções, você conhece da questão técnica e eu não sei nada; eu só quero ter dinheiro. **(Desafiar)**
[6.13] A6: A empresa está no vermelho?
[6.14] Professor: Tá a empresa está no vermelho. **(Guiar/apoiar)**
[6.15] A6: Então eu indico pra você a terceira empresa por que consegue o número de clientes mais rápido, uma outra coisa que você pode fazer também é nos 15 primeiros meses usar empresa 3 porque nesse período de 15 meses ela oferece maior crescimento. Após o décimo quinto mês você troca para empresa dois, se você tiver a opção de sair de uma empresa e mudar para outra porque 10% como se você tivesse atingido 42, 44 mil consumidores aí a sua taxa de 10% vai ser bem maior.

[6.16] Professor: Então você está me sugerindo que eu fique com a terceira até o 15º mês? **(Guiar/apoiar)**
[6.17] A6: [inaudível]
[6.18] Professor: O que é que a outra está me oferecendo? **(Desafiar)**
[6.19] A6: [inaudível]
[6.20] Professor: A então o mês anterior vai ser 40 e pouco mil? **(Desafiar)**
[6.21] A6: [inaudível]

Podemos observar a presença da categoria guiar/apoiar em [6.1], [6.5], [6.8], [6.10], [6.14] e [6.16] na condução do pensamento do aluno e incentivando a elaboração de conjecturas e justificativas sobre qual empresa seria mais vantajosa. Em [6.10], em especial, *"Em termos da decisão que vocês tomaram dos gráficos que eles fizeram estão coerentes com vocês enquanto como consultores passariam como opção?"*, o professor encoraja a turma a focar nas representações gráficas. A categoria informar/sugerir se apresentou em [6.3], [6.8] e [6.10], nas primeiras falas validando as conjecturas dos alunos, e na última corrigindo respostas incorretas apresentadas pelos alunos sobre valores errados que haviam utilizado em sua resolução, o que levou a uma "quebra" no gráfico que haviam construído. Já categoria desafiar esteve presente em [6.12], [6.18] e [6.20] em que o professor solicitou que os alunos reelaborassem suas conjecturas, utilizando uma linguagem mais coloquial, menos "técnica".

A discussão prosseguiu, com a intenção de levar a turma a associar essas informações acerca da taxa de crescimento das funções que representam o número de clientes das três empresas, em relação ao tempo, com suas representações gráficas (que estavam apresentadas em um mesmo plano cartesiano, com três cores diferentes, conforme solução de um dos grupos, projetada para toda turma) (Figura 5).

Figura 5 – Representação simultânea das três empresas



Fonte: material do grupo de pesquisa.

TRECHO 7

[7.1] Professor: Vamos tentar explorar um pouco mais esses gráficos aqui. Como que olhando para esses gráficos, considerando esse gráfico vermelho que teve algum probleminha na tabela. É ele não deveria ter essa mudança aqui não. Como é que vocês reconheceriam qual empresa que se refere a qual gráfico olhando para eles? Como é que eu sei qual gráfico que é da empresa um [vermelho]? Da empresa dois [verde]? E da empresa três [azul]? Quando eu olho para esses gráficos.... **(Desafiar)**
[7.2] A6: [inaudível]
[7.3] A6: [inaudível]
[7.4] Professor: Por que é que eu sei que o gráfico azul é da empresa 3? **(Desafiar)**
[7.5] A6: Crescimento decrescente.
[7.6] Professor: Crescimento decrescente está relacionado com o que naquele gráfico? **(Guiar/Apoiar)**
[7.7] A6: [inaudível]
[7.8] A7: Ele falou.
[7.9] Professor: Não vamos entrar nesse mérito não. Vamos tentar ficar mais na descrição do gráfico. **(Guiar/apoiar)**
[7.10] A7: No começo ele tem a melhor, tem o melhor ganho de clientes.
[7.11] A6: [inaudível]
[7.12] Professor: O que o gráfico azul tem de diferente do gráfico verde, por exemplo? **(Guiar/apoiar)**
[7.13] A6: Tem que ele formar uma linha horizontal acho.
[7.14] Professor: E essa linha horizontal está relacionada com o quê? **(Guiar/apoiar)**
[7.15] A7: Estagnação de crescimento.
[7.16] Professor: Eu tenho um crescimento cada vez menor, e quando chega lá nos últimos meses que ele me forneceu esse crescimento não é expressivo. **(Informar/sugerir)**
[7.17] A6: [inaudível]
[7.18] Professor: E esse gráfico verde não tem esse tipo de comportamento? **(Guiar/apoiar)**
[7.19] A6: Porque é contrário, quanto maior tempo mais a linha tende a ficar vertical.
[7.20] Professor: Se ela ficar mais na vertical. **(Guiar/apoiar)**
[7.21] A6 e A7: Não.
[7.22] Aluno: Ela vai ter uma inclinação que pouco a pouco vai se tornar perceptível.
[7.23] Professor: O que seria essa inclinação? **(Guiar/apoiar)**
[7.24] A7: Limite.
[7.25] Professor: Termos técnicos não. Tenta explicar a ideia que a gente tá entendendo por estar ficando... **(Guiar/apoiar)**
[7.26] A7: Crescimento ... [inaudível]
[7.27] Professor: Crescimento máximo. Vocês diriam que essas representações que eu tenho aqui são situações de crescimento ou decrescimento? **(Guiar/apoiar)**
[7.28] A7: Crescimento.
[7.29] Professor: Por que crescimento? **(Guiar/apoiar)**
[7.30] A6: Porque às vezes ... [inaudível]
[7.31] Professor: E esse crescimento não ocorre da mesma maneira? **(Guiar/apoiar)**
[7.32] A6: Não
[7.33] Professor: Então quer dizer que, não basta falar que está crescendo, quer dizer tem que olhar o modo como ela está crescendo. **(Informar/sugerir)**
[7.34] A6: Sim.
[7.35] A6: Exatamente.

[7.36] A6: Não vai ficar vertical, porque ... [inaudível]

A discussão, no início desse trecho, teve como foco levar a turma a conjecturar qual gráfico representa cada uma das empresas e informar as justificativas, com ações da categoria desafiar, presentes em [7.1] e [7.4]. Ao longo desse trecho de discussão, em diversos momentos o professor reelaborou conjecturas e justificativas apresentadas pelos estudantes, no intuito de complementá-las com explicações mais precisas, ou buscando utilizar termos mais adequados, ações essas da categoria informar/sugerir. Há, também, momentos em que sua fala teve por objetivo guiar/apoiar, conduzindo o pensamento do estudante, e focalizando a discussão para fatos importantes. Em um desses momentos, [7.20], há uma hipótese de A2 de que o gráfico que representa o número de clientes da empresa cujo crescimento é exponencial, "vai ficar vertical". Não parece ter ficado claro para esse estudante porque isso é falso, e ele retomou essa questão. O professor então aproveita esse questionamento e discute com a turma a ideia de concavidade do gráfico da função, procurando associá-la ao tipo de crescimento do número de clientes de cada empresa (crescente, decrescente ou constante), conforme transcrição a seguir.

TRECHO 8

[8.1] Professor: Não vai acontecer com essa daqui. Existem alguns tipos de situação que sim, o gráfico conforme eu vou me aproximando de um certo valor assume o formato vertical para essa daqui não, eu to sempre aumentando 10% do que eu tinha anteriormente então eu sempre vou ter algum ganho. Diz que vai fazer com que isso que a gente chama de concavidade permaneça. Tecnicamente a gente tem como diferença do gráfico azul e verde que serão das empresas 1 e 3 o fato de que um deles é côncavo para baixo e o outro é côncavo para cima. **(Informar/sugerir)**. Qual deles que é côncavo para cima? **(Guiar/apoiar)**
[8.2] Alunos: Terceiro.
[8.3] Professor: E o que na situação da empresa representada pelo gráfico verde me diz que essa concavidade é para cima? **(Guiar/apoiar)**
[8.4] A6: A taxa de crescimento é constante.
[8.5] A7: Crescimento constante.
[8.6] Professor: Crescimento constante. Ele está crescendo constante? **(Guiar/apoiar)**
[8.7] A6: Não.
[8.8] Professor: Por que é que não está crescendo constante? **(Desafiar)**
[8.9] A7: Porque é uma variação né.
[8.10] Professor: Veja que o número de clientes não aumenta de um mês para o outro. **(Informar/sugerir)** Do primeiro para o segundo mês aumentou quantos clientes na segunda empresa? **(Guiar/apoiar)**
[8.11] A6: 2000 e ... [inaudível]
[8.12] A6: Na segunda empresa.
[8.13] Professor: Na segunda empresa? **(Guiar/apoiar)**

[8.14] Professor: Aumentou 1000, 10% dos 10.000. **(Informar/sugerir)**. E depois para o mês seguinte foi pra quanto? **(Guiar/apoiar)**
[8.15] A6: [inaudível]
[8.16] Professor: 1.100, ou seja, o aumento não é o mesmo **(Informar/sugerir)**. Está aumentando? **(Guiar/apoiar)**
[8.17] A6: [inaudível]
[8.18] Professor: Já quando eu olho na terceira empresa o aumento está diminuindo então um aspecto importante aqui faz com que a gente consiga relacionar o formato do gráfico com o tipo de crescimento que está acontecendo. Tem a ver com olhar como é que de uma linha para outra na tabela, como é que de um mês para o outro tá variando o número de clientes? Se vocês quiserem nomes técnicos a gente estava falando aqui de um gráfico que a gente chama assíntota horizontal, a gente tá falando aqui de uma ideia que a gente vai chamar de derivada. Derivada vai ser a ferramenta técnica aqui que vai permitir aqui analisar o modo como funções crescem ou decrescem. Só que aqui a gente não tá trabalhando com o conceito mais amplo de derivada a gente tá trabalhando com um caso muito particular. **(Informar/sugerir).** Se fosse para relacionar com conceitos matemáticos que talvez vocês já tenham visto na Educação Básica essa situação que eu trouxe aqui remete ao quê? O que é que eu posso associar com coisas que vocês já tenham estudado? **(Desafiar)**
[8.19] Alunos: Função.
[8.20] A7: PA e PG.
[8.21] Professor: O que é PA e o que é PG? **(Guiar/apoiar)**
[8.22] A7: Progressão aritmética e progressão geométrica.
[8.23] Professor: E o que é cada um desses bichos? **(Guiar/apoiar)**
[8.24] A7: Taxa de crescimento constante.
[8.25] A7: Função crescente e função decrescente.
[8.26] Professor: Eu tenho função crescente, função constante e função decrescente. O que seria uma função crescente? **(Informar/sugerir)**
[8.27] A6: [inaudível]
[8.28] Professor: Se eu olhar para a esquerda, para a direita, o significa isso? Como é que se comportam os dados da tabela que dá origem a isso? **(Guiar/apoiar)**
[8.29] A6: Quanto maior for.
[8.30] Professor: Por função crescente eu vou entender que quando eu aumento uma das coisas do tempo, outra coisa no caso o número de clientes também aumenta. **(Informar/sugerir)**
[8.31] A7: Constante.
[8.32] Professor: Constante **(Informar/sugerir)**. O que seria uma função constante? **(Guiar/apoiar)**
[8.33] A6: [inaudível]
[8.34] Professor: Função constante é uma função que tem seus os seus valores fixos. Número de clientes da empresa no mês 1, 10.000. Número de clientes da empresa no mês 2, os mesmos 10.000. No mês 3 os mesmos 10.000, o tempo está passando e o número de clientes não está mudando. **(Informar/sugerir)**
[8.35] A7: Seria uma função constante.
[8.36] Professor: Aqui a gente não tem função constante nem decrescente. O número de clientes não está diminuindo em nenhuma delas. Vamos puxar um pouco mais a história de PA e PG para casos particulares de uma sequência que a gente chama de sequência numérica. Então nosso objeto de trabalho para começar o estudo de cálculo são as chamadas sequências numéricas. O que é uma sequência? **(Informar/sugerir)**
[8.37] A7: Sequência é uma ordem.

[8.38] Professor: O que está determinado por uma certa ordem, algo que obedece a uma certa regra. Eu poderia trabalhar com sequências de outras coisas que não fossem números, sequência de letras, sequência de cores de um mapa. A gente vai trabalhar com sequência numérica. Uma lista de números que em matemática a gente chama de reais. **(Informar/sugerir).**

Nesse trecho final da discussão da tarefa, a categoria guiar/apoiar se fez presente em diversos momentos, com o professor conduzindo a elaboração de conjecturas e incentivando a justificá-las. Também há momentos em que incentiva a generalização, como por exemplo o conceito de "crescimento constante", em [8.10] e [8.16], na qual pergunta: *"Do primeiro para o segundo mês aumentou quantos clientes na segunda empresa?" e "Está aumentando?"*. Já a categoria de informar/sugerir se fez presente nos trechos em que o professor forneceu explicações e informações acerca dos conceitos matemáticos que apareceram nas conjecturas e justificativas da turma a respeito do crescimento dos gráficos apresentados pelos grupos. Em [8.8] e [8.18] a categoria desafiar apareceu quando o professor faz questionamentos sobre *"Por que é que não está crescendo constante?"*, pretendendo que os alunos justifiquem o comportamento da variação do gráfico, ou buscando que relacionem as explicações e discussões anteriores com conteúdos que aprenderam no Ensino Médio *"O que eu posso associar com coisas que vocês já tenham estudado?"*. Finaliza assim a discussão acerca da tarefa, e prossegue a aula com a sistematização de conceitos como reta real, sequências numéricas e funções.

4.2 Tarefa Do Boato

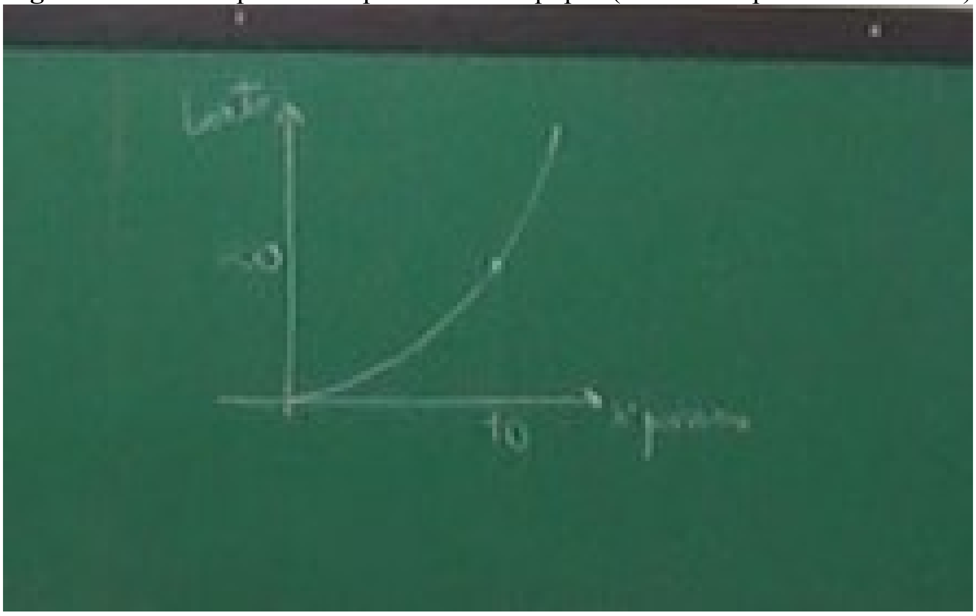
No trecho 1, a discussão gira em torno do gráfico construído por uma das equipes (Figura 6). Já no trecho 2, outros três gráficos são trazidos ao quadro por outras equipes (Figura 7), e o professor conduz a discussão no intuito de esclarecer o modo como cada equipe pensou, avaliar qual (is) deles atende(m) o enunciado da tarefa, e estabelecer comparações, determinando semelhanças e diferenças. Nos trechos 3 e 4, são explorados aspectos relacionados a dois dos gráficos, com foco na comparação entre suas taxas de variação, e sua relação com a concavidade.

TRECHO 1

[1.1] Professor: Alguém quer começar compartilhando o que fez? **(Convidar)**

[1.2] A1: A gente colocou que o boato, ele aumenta exponencialmente de acordo com o número de pessoas que vai ouvindo ele.
[1.3] Professor: Certo **(Informar/sugerir)**
[1.4] A1: Entendeu de forma crescente, quanto mais pessoas estão me acompanhando, quanto mais pessoas houvessem, mais rápido se propagava o boato e aumentava o número de pessoas exponencialmente. Aí chegava seu limite.
[1.5] Professor: Você tem um gráfico? **(Guiar/apoiar)**
[1.6] A1: Esse aqui foi um resumo, a gente pegou o que já tinha.
[1.7] Professor: Eu vou copiar o seu gráfico aqui para a gente discutir [Figura 6]. O gráfico que a partir do que você me falou que vocês construíram foi este. O que vocês colocaram aqui [eixo x]? **(Guiar/apoiar)**
[1.8] A1: A gente colocou o número de pessoas e aqui em cima o boato.
[1.9] Professor: E aí vocês desenharam esse aqui? **(Guiar/apoiar)**
[1.10] A1: Isso.
[1.11] Professor: Então se eu pegar um ponto aqui nesse gráfico por exemplo: 10 **(Informar/sugerir)**. Fala o número aqui para você que faça sentido. **(Guiar/apoiar)**
[1.12] A1: A gente não chegou achar um número.
[1.13] Professor: Não, só para a gente poder tentar entender se seu gráfico está coerente. **(Informar/sugerir)**
[1.14] A1: 20.
[1.15] Professor: 20. **(Informar/sugerir)**
[1.16] Aluno: 20%.
[1.17] Professor: E que seriam esses números? O que eles significam para vocês? 10 pessoas 20 boatos? Como é que é a ideia ali? O que vocês estão tentando apresentar aqui, cadê o seu grupo para ajudar? **(Guiar/apoiar)**
[1.18] A2: Professor quanto mais pessoas, a gente pensou assim, quanto mais pessoas mais vezes o boato seria repetido entre eles.
[1.19] Professor: Então está bem **(Informar/sugerir)**. Se fosse para tentar identificar o que esse 10 e esse 20 representam, seriam 10 pessoas? **(Guiar/apoiar)**
[1.20] A1: [inaudível] ...
[1.21] Professor: A velocidade? O que vocês acham? Vocês trabalharam com essas legendas? Pensaram em outras coisas como legenda? **(Guiar/apoiar)**
[1.22] A3: É trabalhamos com o número de pessoas ao longo do tempo.
[1.23] Professor: O número de pessoas ao longo do tempo? **(Guiar/apoiar)**
[1.24] A3: [inaudível]
[1.25] Professor: O que vocês colocaram nesse eixo? **(Guiar/apoiar)**
[1.26] A3: Tempo.
[1.27] Professor: E nesse eixo? **(Guiar/apoiar)**
[1.28] A3: Pessoas.
[1.29] Professor: E como é que vocês pensaram para construir esse gráfico? **(Guiar/apoiar)**
[1.30] A3: Mesma curva.
[1.31] Professor: Mesma curva? **(Guiar/apoiar)**
[1.32] A3: Em um certo ponto dela, uma vez lá para frente ela estabiliza, na parte superior dela ela estabilizaria.

Figura 6 – Gráfico produzido por uma das equipes (número de pessoas x “boato”)



Fonte: material do grupo de pesquisa.

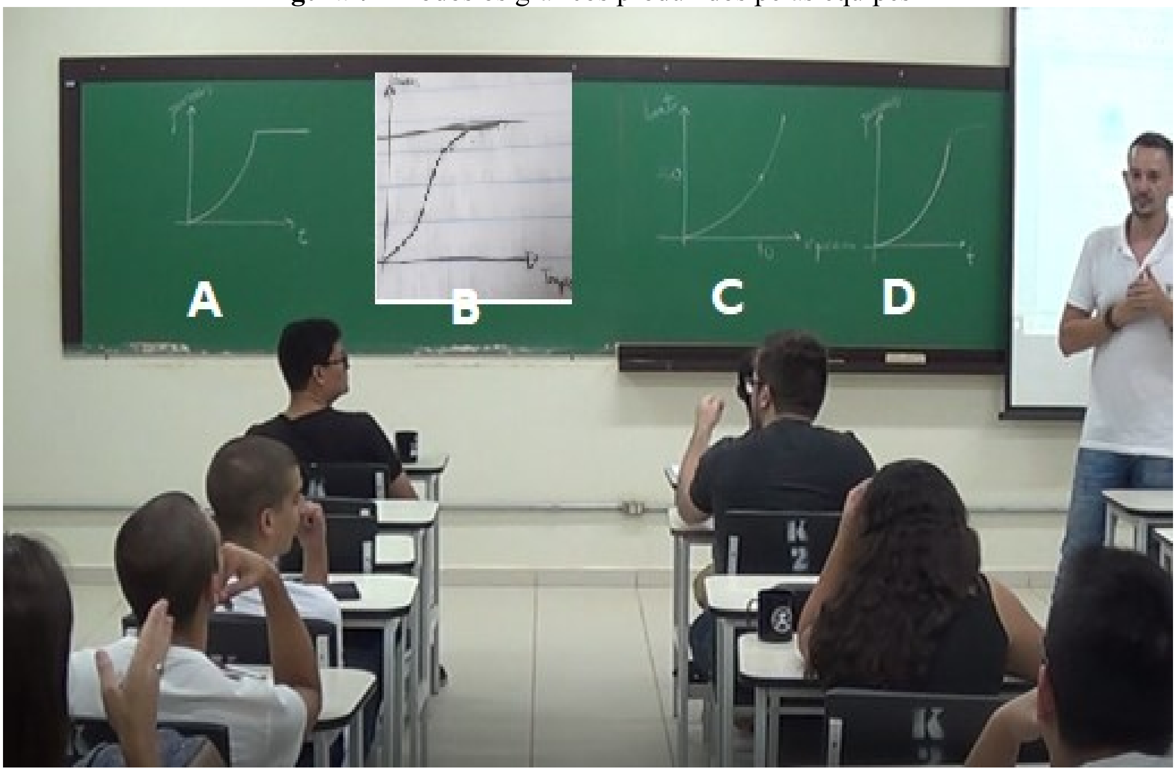
No início da discussão dessa tarefa, percebemos a ação do professor de convidar [1.1], em que ele introduz a tarefa e solicita relatos dos alunos sobre a tarefa. Já logo em seguida percebemos a ação de guiar/apoiar esteve presente em [1.5], [1.7], [1.9], [1.11], [1.17], [1.19], [1.21], [1.23], [1.25], [1.27], [1.29] e [1.31], trechos nos quais pode-se observar o professor conduzindo e incentivando a explicitação de conjecturas dos alunos (por exemplo, *“O que vocês colocaram nesse eixo?”*) e focalizando o pensamento do aluno para fatos importantes (por exemplo, *“O que vocês estão tentando apresentar aqui”*). Aparece também a ação de informar/sugerir em [1.3], [1.11], [1.13], [1.15], [1.17], [1.19], [1.21] e [1.23], com o professor reelaborando e validando respostas fornecidas pelos alunos, sejam conjecturas ou justificativas.

TRECHO 2

[2.1] A4: Professor a gente fez diferente.
[2.2] Professor: O que vocês fizeram? **(Guiar/apoiar)**
[2.3] A4: A gente colocou o número de pessoas, mas o gráfico não ficou assim
[2.4] Professor: Você consegue explicar para a gente, ou você quer vir colocar ele aqui [Figura 7]? O que fica mais fácil? Coloca ele aqui para gente fazendo um favor. Vai lá, é mais fácil do que tentar explicar. **(Guiar/apoiar)**
[2.5] Professor: E você falou mais alguma coisa aqui. **(Guiar/apoiar)**
[2.6] A3: A região final dele ao invés...
[2.7] A4: Eu não sei se está certo.

[2.8] Professor: Nenhum deles eu falei que está. Desenha o que vocês pensaram. **(Guiar/apoiar)**
[2.9] A3: Isso a região final dele. Ao invés de continuar crescendo ele estabiliza porque vai chegar um momento que não tem mais pessoas para saber o boato.
[2.10] Professor: E como é que se estabiliza? Aparece no desenho? **(Guiar/apoiar)**
[2.11] A3: O número de pessoas vai estabilizar, e começa que se estabiliza, isso nesse desenho aqui está assim.
[2.12] Professor: Alguém fez diferente desses que estão no quadro [até o momento, gráficos B, C e D da Figura 7]? **(Guiar/apoiar)**

Figura 7 – Todos os gráficos produzidos pelas equipes



Fonte: material do grupo de pesquisa.

[2.13] A1: Acho que não.
[2.14] A5: O gráfico estabiliza dessa forma. O nosso a diferença que ele não estabiliza de forma que ele estabiliza de uma vez. Ele forma um ângulo de 90 graus na estabilização [Figura 7]. Cresce a mesma curva no tempo só que ele estabiliza de uma vez porque ele chega no limite de pessoas e se torna diferente desses [Professor desenha o gráfico A da Figura 7].
[2.15] A4: Professor é que só para explicar, não sei se está certo. A gente pensou que o número de pessoas, conforme o tempo passa, ele cresce lentamente. Seria aquela primeira parte [Gráfico B] e depois ele cresce mais e conforme vai passando o tempo o número de pessoas que têm na cidade vai acabar. Então vai estabilizar e conforme passa o tempo o mesmo número de pessoas vai saber, entendeu?
[2.16] Professor: Essa ideia de vocês fez com que essa "viradinha" aqui [referindo-se ao ponto de inflexão do gráfico B], vamos dizer. **(Guiar/apoiar)**
[2.17] A4: Não foi uma coisa abrupta.
[2.18] Professor: Temos três gráficos, quatro deles têm algo em comum. O que é? **(Informar/sugerir)**
[2.19] A3: Exponencial.

[2.20] Professor: Qual que vocês estão chamando de exponencial? **(Guiar/apoiar)**
[2.21] A3: Não seria o tanto de pessoas e o tempo?
[2.22] Professor: Esses [A, B, D] têm como legenda dos eixos tempo e o número de pessoas. Esse daqui [C] o número de pessoas e boato **(Informar/sugerir)**. Dentro do que foi solicitado qual que está mais próximo ali? Em termos das escolhas da legenda dos eixos? **(Guiar/apoiar)**
[2.23] A4: Professor eu acho que o quarto [D].
[2.24] Professor: Não, só na escolha das legendas. **(Informar/sugerir)**
[2.25] A5: Todos menos o terceiro [C].
[2.26] Professor: O terceiro? Eu acho que ainda não captei bem a ideia de vocês. O que poderia ser esse 10 e esse 20 aqui? Talvez uma porcentagem das pessoas, mas de qualquer maneira me parece que é pessoas. E pessoas vocês estão tentando relacionar pessoas com pessoas. O número de pessoas que está falando e pessoas que estão ouvindo o boato. Poderia ser alguma coisa assim, até seriam variáveis possíveis. **(Informar/sugerir)**. Ah como é que eu relaciono o número de pessoas falando e o número de pessoas ouvindo? Mas dentro do que a gente pediu aqui a gente criou o tema então por conta de vocês terem escolhido rótulos diferentes a gente não vai usar ele aqui para seguir. Vamos trabalhar com o primeiro, segundo e o quarto. Se eu entendi bem o segundo [B] e o quarto [D] estão iguais e o primeiro está diferente deles e o que diferencia esse desse [A]? **(Desafiar)**
[2.27] A5: [Em A] O crescimento máximo é atingido, daí ocorre o número máximo de pessoas. É nesse mesmo instante ele para de crescer ele estabiliza. No segundo [B], conforme pega o crescimento máximo ele começa a decair depois ele vai atingir.
[2.28] A2:
[2.29] Professor: Tecnicamente falando, decair o crescimento o que significa dizer que o crescimento? **(Desafiar)**
[2.30] A3: Decaiu o crescimento.
[2.31] Professor: O que significa dizer que decaiu o crescimento? **(Desafiar)**
[2.32] A2: Ele cresce mais.

A categoria guiar/apoiar está presente nos trechos [2.2], [2.4], [2.5], [2.8], [2.10], [2.12], [2.16], [2.18], [2.20] e [2.22], em que o professor conduziu o pensamento do aluno sobre conjecturas acerca do ponto de estabilização dos gráficos, com questões da forma *"O que vocês fizeram?", "E como é que se estabiliza? Aparece no desenho?"*. Também, em momentos na qual focalizou para fatos importantes, como *"Aí vocês também deram essa viradinha no gráfico pensaram como?"* ou *"Temos quatro gráficos, três deles têm algo em comum, o que é?"*. Já a ação de informar/sugerir aparece em [2.22], [2.24] e [2.26], momentos em que o professor forneceu informações e explicações, por exemplo apresentando uma possível interpretação do gráfico C. Temos também a ação de desafiar em [2.26], [2.29] e [2.31], em que o professor questiona os alunos como relacionar o número de pessoas falando e o número de pessoas ouvindo, incentivando assim a uma generalização, ou ainda levando-os a justificar o que diferenciava os gráficos A e B. Também no momento em que questionou *"o que significa dizer que decaiu o crescimento?"*. A discussão então prosseguiu.

TRECHO 3

[3.1] Professor: Então vamos pensar. Você tinha uma pessoa que começou a fofoca, ela chega para outras duas, que chega para outras 4 e isso vai se propagando de uma maneira que quando eu to chegando próximo do limite. **(Informar/sugerir).** O que está acontecendo? **(Guiar/apoiar)**
[3.2] A4: Menos pessoas estão sabendo em razão do tempo.
[3.3] Professor: Como assim, menos pessoas? **(Guiar/apoiar).**
[3.4] A4: Que vai chegar um momento que algumas pessoas da cidade não vão saber e para notícia chegar nessas pessoas vai demorar mais tempo, isso seria essa curva suave.
[3.5] Professor: Você explicou a curva. Acha que o que ele falou faz sentido? Explica de novo para ela. **(Guiar/apoiar).**
[3.6] A4: É que a curva começa a subir, então poucas pessoas sabem no começo, daí quando começa a subir quer dizer que muitas pessoas estão sabendo, a notícia está chegando a mais pessoas em menos tempo, e depois quando tá chegando perto do limite da população o número de pessoas que sabem que ouvem a notícia em relação ao tempo começa a diminuir.
[3.7] Professor: O número de pessoas começa a diminuir? **(Guiar/apoiar).**
[3.8] A2: Na verdade não tem como a pessoa "des-saber".
[3.9] Aluno: O número de pessoas para que a notícia chega começa a ser menor do que antes.
[3.10] A2: O professor, espero que seja assim vamos supor que eu sei o que aconteceu, aí tem 20 pessoas no começo aí eu vou contar para essas 20 pessoas. Ninguém vai ficar sabendo ainda, então vão ser mais 20, depois de um tempo só em 20 pessoas quando eu contar com ser 15 pessoas já sabem então vão ser cinco novas pessoas.
[3.11] Professor: Tem menos pessoas para saber? **(Guiar/apoiar).**
[3.12] A2: Eu imaginei isso.
[3.13] Professor: Se a gente pensar em termos de velocidade de espalhamento do boato, como é que a sua velocidade seria? **(Guiar/apoiar).**
[3.14] A4: Ela cresce depois ela freia.
[3.15] Professor: Ela não regride, mas ela desacelera. **(Informar/sugerir)**
[3.16] A2: É o número de pessoas não tem como diminuir só que ele vai crescendo. Quando ele vai ser constante quando não vai ter mais pessoas para contar.
[3.17] A4: E a velocidade seria maior. A velocidade sempre varia, é um pouquinho menor.
[3.18] Professor: Qual dos dois dá uma ideia de que vou ter um certo desaceleramento dessa velocidade? **(Guiar/apoiar).**
[3.19] A4: O 2 e o 4.
[3.20] Professor: Se a gente comparar essa situação por exemplo com uma das anteriores que foi essa aqui ó. Quando se faz um depósito bancário a quantia depositada na conta cresce lentamente no início. A medida que o saldo vai aumentando a quantia em dinheiro cresce mais rapidamente, visto que a conta vai recebendo juros sobre os novos juros e também sobre a quantia original **(Informar/sugerir).** O que essa situação tem de diferente da situação do boato? **(Guiar/apoiar).**
[3.21] A5: [inaudível]
[3.22] Professor: Ela não desacelera. Então quanto mais dinheiro eu tenho mais juros vão sendo acumulados sobre ele, então chega um momento que essa taxa de aumento de juros vai desacelerando. Já no do boato isso acontece? **(Informar/sugerir).**
[3.23] A5: Se você jogar no esquema piramidal acontece aquele do primeiro. Tipo, se uma pessoa conta para três ai essas três contam para nove e essas pessoas conta para três novas. Então vai chegar no momento que todo mundo é só que aí ... [inaudível]
[3.24] Professor: O que vai acontecer então? **(Desafiar).** Chega uma hora que vai ter um monte de gente querendo contar a fofoca, mas não tem tanta gente para ouvir, ou seja, não é

todo mundo que vai estar sabendo do boato que vai conseguir falar para outras pessoas. Não tem gente suficiente para ouvir num certo momento.
[3.25] A5: Mas isso não impede que o ritmo de crescimento seja mais rápido.
[3.26] Professor: Mas para que haja essa ideia de estabilidade o ritmo vai diminuindo. O que é o que vocês tinham falado antes? **(Informar/sugerir).**
[3.27] A5: Eu só to tentando justificar essa curva brusca.
[3.28] A4: Depende da condição que o sujeito fornece e se for por exemplo que eu vou cara só pode contar para uma pessoa que não sabe então no final vai ter 100 pessoas que sabe o outro não sabe mesmo assim a velocidade O que uma pessoa falar para outra por ela mesma
[3.29] Professor: Exatamente **(Informar/sugerir).** Veja que situação não fecha para gente. Se isso está acontecendo ou não no final então se eu interpretar que a ocorre no momento em que começa a desacelerar essa propagação do boato, essa desaceleração indicaria para mim o gráfico correto é qual? **(Guiar/apoiar).**
[3.30] A4: Dois.
[3.31] Professor: Agora não eu vou assumir que ocorreu essa desaceleração que o negócio ta propagando, propagando, chega uma hora que acabou o número de pessoas. Estabiliza, mas não houve essa desaceleração **(Informar/sugerir)**. O gráfico seria qual? **(Guiar/apoiar)**
[3.32] A5: O primeiro.
[3.33] Professor: Na verdade os dois poderiam ser considerados válidos. (**Informar/sugerir)** Para este modelo que eu vou projetar aqui ó qual seria o gráfico adequado? **(Guiar/apoiar)**
[3.34] A4: O 2.
[3.35] Professor: Vamos ver de novo para esse modelo que eu coloquei aqui então o gráfico de cada seria? **(Guiar/apoiar)**
[3.36] A4: O 2 e o 4.
[3.37] Professor: então aqui ó agora sim **(Informar/sugerir)**
[3.38] A5: a gente tem que considerar as pessoas que estão envolvidas no boato.

Podemos observar [3.1], [3.3], [3.5], [3.7], [3.11], [3.13], [3.18], [3.20], [3.29] e [3.35], nos mostra a categoria de guiar/apoiar, onde a preocupação em conduzir a elaboração e explicitação de conjecturas sobre a desaceleração do gráfico, por meio de perguntas como: *"Você explicou a curva, acha que o que ele falou faz sentido? Explica de novo para ela"* e *"Tem menos pessoas para saber?"*. Já a categoria informar/sugerir aparece em [3.1], [3.15], [3.20], [3.22], [3.26], [3.29], [3.31], [3.33] e [3.37], em que o professor valida e corrige conjecturas dos alunos, reelaborando-as. Por exemplo, "Ela não regride, mas ela desacelera". Em [3.24] encontramos presente a categoria desafiar, com o professor encorajando a reflexão sobre a fala anterior do aluno onde esse descreve como se propagaria o boato *"Se você jogar no esquema piramidal acontece aquele do primeiro. Tipo, se uma pessoa conta para três ai essas três contam para nove e essas pessoas conta para três novas"* e o professor pergunta: *"O que vai acontecer então?"* tentando assim fazer com que reflitam e conjecturem sobre como ocorre o boato.

TRECHO 4

[4.1] Professor: Veja que quem respondeu o que eu estou assumindo aqui, que não é o único possível. Essa ideia de que em algum momento começa a desacelerar o ritmo do boato propagado leva a uma mudança na tendência que vinha acontecendo no gráfico **(Informar/sugerir)**. Essa mudança pode ser descrita como? Graficamente o que aconteceu? Se fosse para você descrever esse gráfico para alguém como você explicaria? **(Desafiar).**
[4.2] A6: Que o crescimento desacelerou.
[4.3] Professor: Mas em termos de representação gráfica, como é o traço que fica no papel, que características que ele tem? **(Desafiar).**
[4.4] A7: Ele tem duas curvas
[4.5] Professor: Quais duas curvas seriam essas? O que diferencia uma da outra? **(Desafiar).**
[4.6] A6: Uma converge para um ponto e a outra diverge para esse ponto uma vai para cá.
[4.7] Professor: Essa ideia de converge seria isso aqui? **(Informar/sugerir).**
[4.8] A6: Não é divergente
[4.9] Professor: Tem algo que está aumentando está se afastando, mas chega uma hora que isso muda e aí há uma mudança no comportamento de modo que isso aqui vai se estabilizar **(Informar/sugerir).** Um gráfico que tenha esse tipo de comportamento até a primeira metade do gráfico é um gráfico que a gente diz o que é a propriedade que ele tem? **(Desafiar).**
[4.10] A6: Exponencial
[4.11] Professor: E aqui ó então o que é que aconteceu aqui no meio do caminho? **(Desafiar)**
[4.12] A6: Concavidade.
[4.13] Professor: A mudança de concavidade o que a gente tem aqui é uma situação que no modelo que eu estou propondo que não é muito possível. Isso aqui também faria sentido mas pra esse modelo que corre uma desaceleração faz com que haja uma mudança na concavidade do gráfico, ou seja, o gráfico começa côncavo para cima indicando algo que está crescendo lentamente. Depois vai acelerando mas no meio do caminho começa a desacelerar. Vai desacelerando de modo a se estabilizar, então a concavidade vinha para cima tem uma mudança e a concavidade passa a ficar para baixo. E ai essa mudança de concavidade é chamada de ponto de inflexão. **(Informar/sugerir).**
[4.14] A7: Professor deixa eu perguntar um negócio. Interfere com uma quantidade certa de pessoas, cem pessoas na cidade, cem pessoas que estabilizam no centro que sabiam então seria um limite porque o limite atende.
[4.15] Professor: O limite pode ser um valor que a função assume. **(Informar/sugerir).**
[4.16] A7: Pode ser um valor exato.

Nesse trecho final, a categoria informar/sugerir aparece em [4.1], [4.7], [4.9], [4.13] e [4.15] em momentos que o professor forneceu informações e explicações, como por exemplo *"A mudança de concavidade o que a gente tem aqui é uma situação que no modelo que eu estou propondo que não é muito possível"* e *"O limite pode ser um valor que a função assume"*. E a categoria bastante presente nesse trecho, desafiar, aparecendo em [4.1], [4.3], [4.5], [4.9] e [4.11], em que o professor encorajou os alunos a justificar e pressiona para a generalização *"E aqui ó então o que aconteceu aqui no meio do caminho?"* e *"Quais duas curvas seriam essas? O que diferencia uma da outra?"*. Finalizando, o professor procura sistematizar alguns conceitos matemáticos importantes (informar/sugerir), como a fato de que, pelo contexto, a curva não deveria ser contínua, ou ainda destacando a existência de um ponto de inflexão no gráfico B. Também destaca a formação de um “bico” no gráfico D, e relaciona esses conceitos com o futuro estudo de derivadas.

5 DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo investigou ações do professor na condução das discussões coletivas, no contexto do trabalho com tarefas de natureza exploratória em aulas de CDI. As ações do professor de convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar, tiveram um papel central no desenvolvimento do raciocínio matemático, promovendo a participação efetiva dos alunos, na apresentação de suas soluções, nas estratégias de resolução e no questionamento das resoluções dos colegas (LAMPERT, 1990).

Destaca-se que a constituição de um ambiente de aprendizagem colaborativa, com discussões eficazes envolvendo toda a turma (BRODIE, 2010), a partir das tarefas propostas e da condução do professor nestas, estimularam o raciocínio dos alunos, na medida em que as intervenções eram feitas pelo professor, permitindo observar como os conceitos abordados se relacionam (funções, progressões, taxas de crescimento), bem como a compreensão dos procedimentos, a razão por que funcionam (MATA-PEREIRA, 2018).

O contexto da discussão, a partir das diferentes ações do professor, ofereceu oportunidades aos alunos para investigar, analisar, explicar, conjeturar, justificar e interagir (STEIN; SMITH, 2009).

Nas ações presentes na análise dos dados podemos observar a condução do professor nas discussões com o intuito de fortalecer o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes. Foram oportunizados aos alunos momentos para se expressarem (em geral, pelas ações de convidar e guiar/apoiar) e também elaborarem justificativas e refletirem sobre aspectos nos quais não haviam pensado anteriormente (pela ação de desafiar), fomentando sua criatividade e consequentemente fortalecendo seu raciocínio (PONTES, 2018). Tais momentos ampliaram a capacidade de raciocinar matematicamente dos alunos, como exemplo quando o professor fornece informações para entender como se comportavam os gráficos (crescimento ou decrescimento) fazendo estes pensar, a compreender ideias matemáticas e aplicá-las, permitindo assim que a Matemática "faça sentido".

No que diz respeito aos processos de raciocínio matemático (LANNIN; ELLIOTT; ELLIS, 2011), ações de guiar/apoiar contribuem para a explicitação de conjecturas que haviam sido inicialmente elaboradas em pequenos grupos, e também para a formulação de novas conjecturas no momento de discussão coletiva. Ações da categoria desafiar são importantes para o processo de justificar, e também contribuem na formulação de generalizações. Ações de informar/sugerir têm o papel de reformular, completar e sistematizar essas conjecturas, justificativas e generalizações.

Os alunos puderam comunicar, usando descrições em palavras, gráficos símbolos, tabelas e linguagem algébrica; trabalhar em colaboração em equipes e grupos para aprimorar a compreensão matemática; coletar, analisar e organizar dados quantitativos para avaliar e criticar as conclusões obtidas; envolver-se na elaboração de argumentos quantitativos relacionados a assuntos de sua futura área de atuação (BRODIE, 2010). Também se propiciou o entendimento conceitual: compreensão de conceitos, operações e relações matemáticas; competência estratégica: capacidade de formular, representar, e resolver problemas matemáticos (KILPATRICK; SWAFFORD; FINDELL, 2001).

O raciocínio mobilizado durante as discussões permitiu interpretar relações entre variáveis envolvidas na situação, oportunizando que se desenvolvesse um conceito aplicável e eficiente sobre função, base na elaboração de conceitos do CDI (ZIEFFLER; GARFIELD, 2009) Dos dados analisados, observou-se um movimento crescente das ações do professor durante a condução da plenária, com o aprofundamento das discussões a partir de elementos trazidos pelos próprios alunos, e das oportunidades que se criam para a elaboração de conhecimento matemático nesse processo (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019).

O professor utilizou ideias dispersas, incompletas e mal formuladas dos alunos, transformando-as em ideias matemáticas mais precisas e poderosas para o desenvolvimento do raciocínio matemático (STEIN et al., 2008). Em síntese, os resultados obtidos por este estudo evidenciam o potencial da proposta de trabalho com tarefas exploratórias, aliada às ações do professor na condução de discussões matemáticas a partir dessas tarefas, para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ARAMAN, E. M. O. SERRAZINA, M. L., PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.21, n.2, 466-490, 2019.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Alegre: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRODIE, K. **Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms**. New York: Springer, 2010.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM,** v.40, n.1, p.3-22, 2008.

ELLIS, A., ÖZGÜR, Z., REITEN, L. Teacher moves for supporting student reasoning. **Mathematics Education Research Journal**, v. 30, n. 2, p. 1-26, jun. 2018.

FONSECA, M. O. S. **Proposta de tarefas para um estudo inicial de derivadas**. 2017. 100 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017

GALBRAIT, P. Mathematics as reasoning. **The Mathematics Teacher**, v. 88, n. 5, p. 412-417, 1995.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J.; FINDELL, B. (Eds). **Adding it up**: helping children learn mathematics. National Academy Press, Washington, DC, 2001.

LAMPERT, M. When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. **American Educational Research Journal**, v. 27, n. 1, p. 29–63, 1990.

LANNIN, J.K.; ELLIOTT, R.; ELLIS, A.B. Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8. Reston, VA: **National Council of Teachers of Mathematics**, 2011.

MACICIESKI, G.; FRIZZARINI, S. T.; HENNING, E. O ensino de funções na Educação Básica: uma experiência em duas vias. **Anais...** COLBEDUCA, 4. Braga, Portugal, 2018.

MATA-PEREIRA, J. F. D. G. da. **Ações de professores para promover o raciocínio matemático.** Tese (Doutorado em Educação, especialidade de Didática da Matemática). Universidade de Lisboa, Lisboa, 2018.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Enhancing students’ mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 2, p. 1 – 18, 2017.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promoting Students' Mathematical Reasoning: a design-based research. **Bolema**, v. 32, n. 62, p. 781-801, 2018.

MESTRE, C. M. M. V. **O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: uma experiência de ensino**. 379 f. Tese (Doutorado em Educação, especialidade de Didática da Matemática). Universidade de Lisboa, 2014.

MORAIS, C,; SERRAZINA, L; PONTE, J.P. Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. **Acta Scientiae**, Canoas, v.20, n.4, p.552-570, 2018.

OLIVEIRA, P. O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. **Educação e Matemática**, 100, p. 3-9, 2008.

ORFALI, F. **A conciliação das ideias do cálculo com o currículo da educação básica**: **o raciocínio covariacional**. 2017. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, p. 11-34, 2005.

PONTE, J. P. Gestão curricular em matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante,** vol. XXII, n. 2, p. 55-81, 2013.

PONTES, E. A. S. A arte de ensinar e aprender Matemática na educação básica: um sincronismo ideal entre professor e aluno. **Revista Psicologia & Saberes**, 2018.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. **Bolema**, v. 17, n. 21, p. 81-140, 2004.

RAMOS, N. S. **Sequências numéricas como desencadeadoras do conceito de convergência**: episódio de resolução de tarefas. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina-PR., 2017.

RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P. Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: os casos de dois professores. **Bolema**, v. 12, n. 61, p. 398-418, 2018.

STEIN, M. H.; SMITH, M.S. Tarefas matemáticas como quadro para reflexão. **Educação e Matemática**, n.105, p. 22-28, 2009.

STEIN, M. K. et al. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, Adingdon, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.

THOMPSON, P. W.; CARLSON, M. P. Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In CAI, J. (Ed.). **Compendium for research in**

mathematics education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2017, p. 421-456.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo Integral. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, n. 3, p. 353-373, 2017.

TREVISAN; A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia**, v. 11, n. 1, p. 209-227, 2018.

TREVISAN, A. T.; SILVA, D. D. L; VOLPATO, M. A.; ALVES, R. M.A.; OLIVEIRA, P. B. O raciocínio matemático em um episódio de resolução de tarefas de Cálculo. In XLVII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, Fortaleza, 2019. **Anais...** Cobenge, 47. Fortaleza: Associação Brasileira de Educação em Engenharia, 2019, p. 1-10.

ZIEFFLER, A. S.; GARFIELD, J. B. Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. **Statistics Education Research Journal**. v. 8, n. 1, p. 7-31, 2009.

ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral em tarefas exploratórias
Título do Produto/Processo Educacional	Promovendo discussões matemáticas - algumas ações do professor em sala de aula
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Márcio Alexandre Volpato
	Orientador/Orientadora: André Luis Trevisan
	Outros (se houver):
Data da Defesa	29.03.2022

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)

Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.

Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); *L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática* (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (x) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *Apenas um item pode ser marcado. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	( ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (x) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.	( ) Local ( ) Regional (x) Nacional ( ) Internacional Justificativa (*obrigatória*): Pode ser utilizado em contextos diversos, como cursos de formação inicial e continuada de professores, e em diferentes níveis da Educação Básica e do Ensino Superior.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). *Apenas um item pode ser marcado.	(x) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). ( ) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada *Apenas um item pode ser marcado.	( ) Econômica; ( ) Saúde; (x) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; ( ) Aprendizagem.

Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.	(x) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (x) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. ( ) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. ( ) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (x) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	Instituição
André Luis Trevisan	UTFPR
Eliane Maria de Oliveira Araman	UTFPT
Marcia Aguiar	UFABC