ppgmat

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

NILCILENE PEREIRA DOS SANTOS

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO HÍBRIDO

LONDRINA

2022

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

NILCILENE PEREIRA DOS SANTOS

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO HÍBRIDO

THE CONSTRUCTION OF THE CONCEPT OF FUNCTION THROUGH PROBLEM SOLVING IN BLENDED LEARNING

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campi* Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Andresa Maria Justulin

LONDRINA

2022

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

NILCILENE PEREIRA DOS SANTOS

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO HÍBRIDO

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 27 de Abril de 2022

Andresa Maria Justulin, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Rosilda Dos Santos Morais, Doutorado - Universidade Federal de São Paulo (Unifesp)

Dedico este trabalho a todos aqueles que almejam ter conhecimento e a provocar a construção do conhecimento.

AGRADECIMENTOS

Mais uma etapa da minha vida se encerra: MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA! E, mesmo depois de tantos desafios, muitos diferentes do “normal” durante um mestrado, pois vivenciamos a pandemia de COVID-19 e devido à qual muitos se foram, mesmo assim, só tenho a agradecer.

Obrigada meu DEUS pelo dom da vida e pela oportunidade de viver essas experiências sob Sua proteção.

Agradeço a minha Professora Orientadora Dra. Andresa Maria Justulin, que ajudou a desenvolver este trabalho, apresentando-me as possibilidades para a construção do conhecimento, pela paciência, pela compreensão... É admirável sua dedicação!

Agradeço aos professores da UTFPR, por me proporcionarem apresentações, debates, Didática, Saberes Docentes, Seminários, Metodologia e aparatos tecnológicos, caracterizando um arsenal enriquecedor para o aprendizado.

Obrigada às amizades que construí durante o mestrado e às amizades que tiveram conhecimento deste ciclo da minha vida. Ressalto um agradecimento muito especial a minha grande amiga, Sara. Amiga, traçamos esta caminhada juntas e a vencemos! Só nós sabemos tudo o que vencemos, e por tudo isso, e muito mais, admiro você!

Obrigado, também ao Colégio Cavanis, onde leciono, por permitir que eu levasse aos alunos o conhecimento que aprendi e aos alunos do 9° ano, por se empenharem nas atividades.

Não posso deixar de agradecer ao Professor André Luís Trevisan e à Professora Rosilda dos Santos Morais, que gentilmente aceitaram fazer parte da minha banca examinadora, colaborando com importantes provocações/sugestões.

Finalizando os agradecimentos, pois aqui me emociono ainda mais. De início obrigado a todos da minha família, pelo apoio. Em especial, ao esposo Uender; minha linda filha, Maria Helena e *In memorian* ao meu querido pai, que me incentivou, porém se foi meses antes de vivenciar esta minha conquista. Ele foi um grande “mestre de obras”, amante da Matemática. *“Pai, sou Mestre em Ensino de Matemática!”*.

A recompensa foi gratificante - por ter adquirido conhecimentos, experiências e amadurecer durante este processo. Segundo Albert Einstein, *podem tirar tudo de você, menos o seu conhecimento*.

A todos, minha eterna gratidão.

"Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção".

(FREIRE, 1996, p. 47)

SANTOS, Nilcilene Pereira. **A construção do conceito de função através Resolução de Problemas no Ensino Híbrido**. 2022. 133 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

RESUMO

Os objetivos desta pesquisa foram analisar como os alunos resolvem problemas potencializados pelo uso de uma tecnologia digital; investigar a construção do conceito de função através da Resolução de Problemas no ensino híbrido e apresentar um Produto Educacional que oriente o professor na introdução do conteúdo de função através da Resolução de Problemas. Para tanto, cinco problemas geradores foram propostos seguindo o roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Os participantes da pesquisa foram 22 alunos do 9° ano do Ensino Fundamental, de uma escola particular na cidade de Ortigueira/PR. A pesquisa teve abordagem qualitativa e os dados foram produzidos considerando episódios audiogravados na plataforma de ensino da escola, mensagens escritas e áudios enviados pelos participantes no aplicativo de mensagem *WhatsApp,* diário de campo da professora-pesquisadora e nas resoluções escritas postadas na ferramenta *Padlet.* Os resultados obtidos mostram que a construção do conceito de função pode ocorrer, pelos alunos, mediante a compreensão da ideia de relação entre duas grandezas (ou conjuntos); por meio da mobilização do pensamento covariacional; na passagem da linguagem corrente para a linguagem algébrica; na representação de uma função nas formas algébrica, gráficos, tabelas, esquemas e linguagem corrente; e no uso e ressignificação de conhecimentos matemáticos prévios. A pesquisa também proporcionou aos alunos a oportunidade de serem construtores do próprio conhecimento, no que tange ao conceito de função. A pesquisa gerou como produto educacional um material, destinado a professores, intitulado "*Padlet*: Uma possibilidade para a construção do conceito de função por meio da Resolução de Problemas". Nele, são disponibilizados os problemas geradores, referenciais sobre a Resolução de Problemas utilizados na pesquisa, bem como orientações gerais para os professores e sobre o uso do *Padlet*.

Palavras-chave: Educação Matemática. Resolução de Problemas. Função. Padlet. Ensino Fundamental.

SANTOS, Nilcilene Pereira. **The construction of the concept of function through Problem Solving in Blended Learning**. 2022. 133 p. Dissertation (Master's Degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

ABSTRACT

The objectives of this research were to analyze how students solve problems using digital technology; investigate the construction of the concept of functions through Problem Solving in blended learning and present an Educational Product that guides the teacher in the introduction of function content through Problem Solving. For that, five generating problems were proposed following the script of the Learning-Assessment Teaching Methodology of Mathematics through Problem Solving. The research participants were 22 students from the 9th grade in Elementary School, from a private school in the city of Ortigueira/PR. The research followed a qualitative approach, and the data were produced considering audio-recorded moments from the school's teaching platform, written and audio messages sent by the participants in the WhatsApp messaging application, the teacher-researcher's field diary and the written solutions posted in the Padlet tool. The results obtained show that the construction of the concept of functions can occur, from students, through the understanding of the idea of a relationship between two quantities (or sets); through the mobilization of covariational thinking; in the passage from current language to algebraic language; in the representation of a function in algebraic forms, graphs, tables, schemes, and common language; and in the use and resignification of previous mathematical knowledge. The research also provided students with the opportunity to be builders of their own knowledge, regarding the concept of functions. The research generated as an educational product a material, intended for teachers, entitled "Padlet: A possibility for the construction of the concept of functions through Problem Solving". In it, the generating problems, references on Problem Solving used in the research, as well as general guidelines for teachers regarding the use of Padlet are available.

Keywords: Mathematics Education. Problem solving. Function. Padlet. Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Isto é, em resumo, a minha esperança para a resolução de problemas. Se nós fizermos o nosso trabalho corretamente, talvez as escolas se tornem lugares onde os alunos realmente aprendam a pensar.
(ALAN SCHOENFELD)

Sabe-se que muitos são os desafios para o ensino da Matemática, visto que, além dos problemas conhecidos por todos, como a falta de estrutura das escolas, o excesso de alunos na sala de aula, a desvalorização dos educadores e tantos outros, ocorreram nos anos de 2020 e 2021 momentos de muita complexidade, de transformações políticas e sociais, devido à pandemia da COVID-19[1].Os alunos não puderam mais frequentar salas com carteiras enfileiradas, com quadros de giz, material didático e desfrutar do contato presencial, emergencialmente as aulas se tornaram remotas[2] e híbridas[3], mediadas pelas Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC)[4] ou Tecnologias de Aprendizagem e Conhecimento (TACS)[5].

Essas tecnologias se tornam praticamente o recurso padrão de comunicação e de obtenção de informação, possibilitando a aprendizagem. É esse contexto que todos os professores vivenciaram e nele foram inseridos, repentinamente, sem terem sido preparados e fazendo o necessário para manterem as aulas. Esse esforço permitiu que o aluno continuasse suas aulas, sem aproximação física, respeitando o distanciamento social. No entanto, tudo isso exigiu muito dos professores. Exigiu uma busca por metodologias e aparatos tecnológicos para chamar a atenção dos alunos para a aprendizagem, no caso deste trabalho, da Matemática. As

---

[1] Pandemia causada pelo Coronavírus ou SARS-CoV-2. No início do trimestre letivo de 2020, a suspensão das aulas presenciais tornou-se uma tentativa para conter a disseminação do vírus e reduzir o contágio entre os membros da comunidade escolar.
[2] Neste formato, as aulas são transmitidas em tempo instantâneo por sistemas de webconferências por meio de ferramentas de reuniões instantâneas, que permitem que professores e alunos tenham condições de realizar interações e organizarem seus tempos de aprendizagem.
[3] Os sistemas de ensino chamam de aula híbrida aquela que é oferecida nas modalidades presencial e remota. Os alunos puderam optar por uma das modalidades ou utilizá-las de modo intercalado. A coleta de dados da pesquisa ocorreu no contexto híbrido.
[4] O termo TDIC, utilizado no texto, refere-se a qualquer equipamento eletrônico que se conecte à Internet, ampliando as possibilidades de comunicabilidade de seus usuários (VALENTE, 2013).
[5] As TACS são utilizadas para a ministração de aulas remotas, tais como: *Google Forms, WhatsApp, Google Meet, Google Classroom, Youtube* e outras plataformas digitais. Nesta pesquisa, foi utilizada a plataforma de ensino adotada pelo colégio Cavanis, onde os dados foram produzidos.

aulas híbridas passaram a competir com muitas coisas que levam o aluno a se dispersar, sem que o professor percebesse.

Ademais, o cenário ocasionado pela pandemia da COVID-19 maximizou a preocupação, sobretudo no que tange às dificuldades demonstradas pelos alunos em compreender a Matemática. Várias perguntas incomodaram os professores: "É possível ensinar Matemática em um contexto híbrido?", "Como ensinar nesse formato e potencializar a interação?", "Será que os alunos vão compreender o conteúdo sem a modalidade presencial?", "Como chamar a atenção dos alunos para o conteúdo sem que eles se dispersem?"

Neste contexto, desenvolvo[6] o Mestrado Profissional, também de modo remoto, participando de aulas e de eventos *online*. Realmente não era isso que eu esperava quando ingressei no mestrado.

Ao participar do 2º Webinário[7] NUCEM (Núcleo de Educação Matemática da Universidade Federal de Uberlândia) em que a Profa. Dra. Norma Allevato discorreu sobre vários assuntos relacionado à Resolução de Problemas[8], fui provocada pela necessidade de desenvolver objetivos de natureza formativa e de aprendizagem Matemática - considerando o pensar do aluno e incentivando-o a evoluir, para que não se frustrasse ao participar de avaliações classificatórias que exigem raciocínio elevado. "E como fazer isso?" Foi na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas[9] que encontrei um caminho para tentar resolver tal problemática: *os alunos precisam aprender a pensar*. No entanto, somente propor a resolução de problemas para os alunos, após a explicação do professor, evidencia uma forma de aplicar a Matemática que pode levar o aluno a não construir uma compreensão, a partir da relação com seu conhecimento prévio.

Diante do exposto, na presente pesquisa, é utilizada a abordagem de ensinar através da Resolução de Problemas, conforme Schroeder e Lester (1989), valendo-se de problemas geradores que favoreçam aos estudantes a compreensão do conceito de função. Ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, em que o problema matemático é apresentado antes de se iniciar o conteúdo, leva o aluno, ao resolvê-lo, a construir um conceito que ainda não conhece, além de despertar o interesse (ONUCHIC, 1999).

---

[6] Em algumas partes do texto, será utilizada a escrita em primeira pessoa do singular por se tratar de experiências da autora.
[7] Webinar é uma palestra, ou aula, em formato de seminário, oferecida pela internet.
[8] No texto, é utilizada a expressão Resolução de Problemas (com iniciais em letras maiúsculas) ao tratá-la como metodologia de ensino.
[9] Emprega-se a sigla MEAAMARP ao se referir a essa metodologia ao longo do texto.

Assim, o conteúdo a ser explorado na parte empírica da pesquisa é o de função, cuja construção tem início no Ensino Fundamental, especificamente: na compreensão das funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica, e utiliza-se esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

A motivação para a pesquisa decorre da busca, por parte da professora-pesquisadora, que é docente da rede privada e pública e tem experiência com turmas de 9° ano, ao observar que alguns alunos mostram pouco interesse, baixo nível de raciocínio e espírito de investigação para compreender problemas, em especial os que envolvem compreensão dos conceitos matemáticos relacionados ao conteúdo de função e a seus diferentes tipos de representação.

Uma hipótese sobre os fatores que levam a essa realidade pode ser o ensino de Matemática *para* resolver problemas, conforme Schroeder e Lester (1989). Nessa concepção, o professor propõe exercícios e problemas após a explicação de um conteúdo, considerando que o problema deve ser utilizado como aplicação do conteúdo (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014). Essa prática pode evidenciar, de certa forma, a falta de protagonismo do aluno, característica de uma aula cujo centro é o professor.

Ressalta-se que, apesar das diversas metodologias existentes e aparatos tecnológicos, o professor tem o material didático[10] como principal subsídio para a explicação e a aplicação do conteúdo. O material oferecido pelo colégio onde a pesquisa foi implementada e que a professora-pesquisadora utiliza, ao ser analisado durante o planejamento docente, apresenta o conteúdo e, em seguida, propõe problemas para aplicar o conteúdo matemático. No entanto, é possível inverter essa sequência das atividades, trazendo os problemas presentes no material didático como problemas geradores ou "novos problemas" após os alunos terem construído as ideias principais, fazendo uso da MEAAMARP.

A busca é por uma aprendizagem que possibilite aos alunos desenvolverem diversos procedimentos de raciocínio na resolução de problemas[11] para a construção do conceito de função. Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – (BRASIL, 2018) enfatiza o desenvolvimento de competências relacionadas à função, desde os anos finais do Ensino Fundamental, na unidade temática Álgebra. A resolução e a formulação de problemas também são destacadas neste documento.

---

[10] "Material didático (MD) é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Portanto, MD pode ser um giz, uma calculadora, um filme, um livro, um quebra-cabeça, um jogo, uma embalagem, uma transparência, entre outros" (LORENZATO, 2012, p. 18).

[11] A resolução de problemas (com letras minúsculas) é usada para se referir à atividade de resolução de problemas.

Assim, os objetivos desta pesquisa são: analisar como os alunos resolvem problemas potencializados pelo uso de uma tecnologia digital; investigar a construção do conceito de função através da Resolução de Problemas no ensino híbrido e apresentar um Produto Educacional que oriente o professor na introdução do conteúdo de função através da Resolução de Problemas.

Neste sentido, buscou-se responder à seguinte questão de pesquisa: *Como ocorre a construção do conceito de função, no 9º ano do Ensino Fundamental, através da Resolução de Problemas no ensino híbrido com o auxílio do Padlet*[12]*?*

Para isso, a estrutura do texto da dissertação está organizada em seis seções, em que são apresentados os aspectos teóricos e metodológicos utilizados para o desenvolvimento da pesquisa, as análises e discussões acerca da aplicação dos problemas geradores, assim como os resultados e conclusões. O trabalho fundamenta-se na MEAAMARP e no ensino de funções.

Esta, a introdução do trabalho, se configura como a primeira seção e apresenta o tema abordado, as justificativas, bem como os objetivos e a estrutura da pesquisa.

Na segunda seção, são trazidos os referenciais teóricos da pesquisa sobre Resolução de Problemas, a definição de problema, o planejamento das aulas através da Resolução de Problemas, as conexões e o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e as recomendações da BNCC (BRASIL, 2018) sobre resolução de problemas.

Na seção 3, discorre-se sobre a Álgebra e o ensino de funções, bem como os elementos essenciais para o desenvolvimento do pensamento funcional, as habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) relacionadas e as representações possíveis de uma função.

Na quarta seção são explicitados os procedimentos metodológicos, os participantes da pesquisa e o método a ser utilizado para a análise dos dados. É realizado também um delineamento do produto educacional.

A quinta seção apresenta a descrição dos cinco problemas aplicados em uma turma de 22 alunos, de 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola privada, localizada em uma cidade da região dos Campos Gerais, no Estado do Paraná.

---

[12] O *Padlet* é um recurso colaborativo, *online*, que possibilita um ambiente virtual de aprendizagem, a integração entre professores, alunos e conteúdo. A ferramenta conta com um plano gratuito, além de oferecer um plano individual pago. A versão gratuita tem limitação de até três painéis e arquivos com tamanho máximo de 10MB. Disponível em: https://pt-br.padlet.com/.

A seção 6 traz as discussões dos dados, dispostas em seis eixos de análise, que trazem fragmentos de respostas dos participantes da pesquisa, individualmente ou dos grupos, e as percepções gerais da turma, registradas no caderno de campo da professora-pesquisadora, durante a resolução dos problemas propostos.

Por fim, são tecidas as considerações finais da pesquisa, seguidas das referências utilizadas e do anexo.

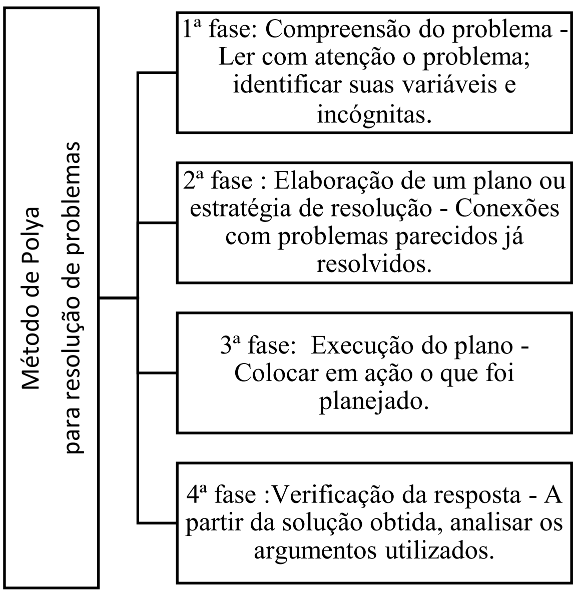
2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

2.1 PANORAMA HISTÓRICO

A resolução de problemas sempre esteve presente na história da humanidade como atividade do dia a dia, bem como faz parte da construção do conhecimento e do ensino de Matemática. Embora não fizesse parte dos currículos, enquanto conteúdo ou prática de sala de aula, a Resolução de Problemas remete a uma história recente, que remonta ao século XX.

A literatura apresenta que a resolução de problemas passou a ser discutida de forma mais sistemática a partir das ideias de George Polya[13], em um dos livros mais vendidos no mundo: *How To Solve it: a new aspect of mathematical method* (traduzido no Brasil como *A Arte de Resolver Problemas*) do ano de 1945. Neste livro, o autor apresenta um conjunto de quatro fases, elencadas na Figura 1.

Figura 1 – Método de Polya para resolução de problemas



Fonte: Autoria própria (2022).

As ideias de George Polya sobre Resolução de Problemas contribuíram de forma significativa para que a resolução de problemas fosse se espalhando/constituindo como uma

---

[13] Apesar dessa referência à Polya como o pioneiro no estudo da resolução de problemas, o livro *The New Methods in Arithmetic*, de Thorndike (1921), publicado em português no Brasil pela livraria do Globo, em 1936, com o título "A nova metodologia da Aritmética", já trazia etapas para resolução de problemas (MORAIS, 2015).

base teórica para o mundo todo. Porém, houve contraposições e mudanças. Uma extensa revisão de literatura sobre Resolução de Problemas foi feita por Jeremy Kilpatrick, em 1967, e nessa revisão ele observou que a RP ganhou novas roupagens como a "Abordagem de Problemas abertos[14]", explorada no Japão (ONUCHIC; ALLEVATO, 2014).

Outras abordagens no ensino de Matemática se sucederam, já mencionadas, como o Movimento da Matemática Moderna (MMM) nos anos 1960, vieram sufocar as ideias sobre Resolução de Problemas. Porém, esse movimento não teve bom resultado em termos de aprendizagem. Deixou implementada a linguagem universal da Matemática e a Teoria dos Conjuntos e, a partir disso, por quase 20 anos, foi proposta como "espinha dorsal do currículo de Matemática" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 26) e o desempenho dos estudantes, comprovado por testes, ficou distante do esperado. Diante do fracasso do MMM (KLINE, 1973), houve um movimento de retorno às práticas de memorização de regras e conceitos, de modo mecânico.

Como esse movimento não atingiu os resultados esperados, há um apelo ao "ensino por compreensão", na tentativa de melhorar o rendimento dos alunos americanos. Por meio do documento "Uma Agenda para ação", criado pelo NCTM[15] (*National Council of Teachers of Mathematics*), a Resolução de Problemas se torna o foco do ensino escolar da Matemática na década de 1980, nos Estados Unidos, conforme Onuchic (1999). Segundo essas recomendações, os educadores matemáticos dirigiram seus esforços para o desenvolvimento de tal habilidade, "cujas ideias apoiavam-se, especialmente, nos fundamentos do construtivismo e na teoria sociocultural, que tem Vygotsky como principal teórico" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 78).

Somadas a essas recomendações, ocorreram diferentes interpretações por parte dos professores a respeito de como trabalhar a resolução de problemas em sala de aula, de forma que ela fosse realmente o foco da Matemática escolar. A pesquisa desenvolvida por Schroeder e Lester (1989) apresenta três maneiras utilizadas para abordar a resolução de problemas: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar Matemática para resolver problemas e ensinar Matemática via (através da) resolução de problemas.

De acordo com Justulin (2014):

---

[14] Abordagem metodológica em que os problemas matemáticos são formulados para terem múltiplas respostas corretas "incompletas" ou "com fins abertos" (*open-ended*). Resumidamente, a *open-ended approach* nasce como abordagem metodológica para o ensino de Matemática, primeiramente no Japão, em 1976, sendo incorporada, mais tarde, em outros países do Oriente, como na China. (SHIMADA, 1977 apud NCTM, 1997).

[15] O NCTM é uma organização profissional, sem fins lucrativos.

> • Ensinar sobre resolução de problemas: baseia-se no modelo de Polya (1978), ou alguma variação dele, em que são ensinados os passos que um bom resolvedor de problemas deve seguir. A Resolução de Problemas deve, nessa forma de trabalho, ser tratada como uma nova disciplina.
> • Ensinar Matemática para resolver problemas: centra-se na importância de como a Matemática pode ser aplicada. Esse paradigma é denominado por Van de Walle (2009) por "ensinar-então-praticar". Nele, a aprendizagem matemática fica separada do fazer Matemática e a resolução de problemas está separada do processo de aprendizagem matemática.
> • Ensinar Matemática através da resolução de problemas: O ponto de partida desse processo é a situação-problema e novo conhecimento matemático é construído durante a resolução do problema. Esse modo é visto, no início da década de 1990, como uma metodologia de ensino (JUSTULIN, 2014, p. 57).

Ensinar Matemática *via* resolução de problemas difere do ensinar *através*, embora tenha se iniciado a abordagem de ensino via resolução de problemas. Contudo, *via* implica usar um problema como um mero recurso. Já ensinar Matemática *através* da resolução de problemas é uma forma de ir além de fazer Matemática, conscientizando que o aluno é protagonista de seu conhecimento – motivando o aluno a pensar ser capaz de fazer, pois o que aprendeu vai continuar usando.

O NCTM impulsionou a reforma revolucionária em Educação Matemática, "não só nos Estados Unidos, mas também em todo o mundo" (VAN DE WALLE, 2009, p. 20), destacando aspectos essenciais para o ensino da Matemática de 1989 a 2000. Nesse cenário, os principais documentos foram:

- *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (Padrões curriculares e de avaliação para Matemática escolar), em 1989;
- *Professional Standards for Teaching Mathematics* (Padrões profissionais para o ensino de Matemática), em 1991;
- *Assessment Standards for School Mathematics* (Padrões de avaliação para a Matemática escolar), em 1995;
- *Principles and Standards for School Mathematics* (Princípios e padrões para a Matemática escolar), em 2000.

Os Princípios e padrões recomendados para o trabalho com a matemática escolar referem-se a: Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia. Também apresentam cinco Padrões de Conteúdo: Números e Operações; Álgebra; Geometria; Medida; e Análise de Dados e Probabilidade, que explicitamente descrevem o conteúdo que os estudantes devem aprender. Os outros cinco padrões são referentes aos Padrões de Processo: Resolução de Problemas; Raciocínio e Prova; Comunicação; Conexões e Representação, que realçam os caminhos para se adquirir e usar o conhecimento de conteúdo.

Acompanhando esses movimentos, também o Brasil renova suas orientações curriculares por meio de documentos oficiais e de grupos de pesquisa - o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP) desenvolve suas atividades no departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista (Unesp) *campus* Rio Claro, desde 1992, coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de La Rosa Onuchic, tendo como foco a MEAAMARP (ANDRADE; ONUCHIC, 2017).

A palavra Ensino-Aprendizagem-Avaliação, escrita na forma composta, foi criada e utilizada para indicar que o ensino, a aprendizagem e a avaliação podem ocorrer concomitantemente. A proposta consiste em “um caminho para ensinar Matemática e não apenas para ensinar a resolver problemas” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009, p. 8). De tal modo, entende-se que enquanto o professor ensina, o aluno aprende como participante ativo, e a avaliação se realiza por ambos. O aluno analisa os seus próprios métodos e soluções obtidas para o problema, visando à construção do conhecimento, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Nesta metodologia, a avaliação é realizada durante a resolução de problemas, “integrando – se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p. 139). Processos relevantes para a aprendizagem da Matemática escolar

Para Allevato e Vieira (2016), a forma de incorporar a Resolução de Problemas nas aulas, a fim de promover a aprendizagem efetiva da Matemática, ainda não é bem compreendida pelos professores. Os autores afirmam também que a resolução de problemas não é algo que se implementa da noite para o dia e não apresenta resultados imediatos na aprendizagem dos alunos. Contudo, vale ressaltar que o professor pesquisador deve conhecer e cartografar seus alunos, pensando nas propostas a partir da sua imersão, ou seja, em quais problemas geradores são viáveis para aquela escola e nos conhecimentos prévios dos alunos para resolvê-los.

Nesse sentido, Onuchic (1999) propõe um roteiro[16] aos professores para que a Metodologia seja implementada nas aulas de Matemática. Esse roteiro foi desenvolvido e aplicado em trabalhos acadêmicos do GTERP e sua versão mais recente foi publicada em Allevato e Onuchic (2014).

[16] Esse roteiro é descrito na seção 2.3.

2.2 DEFINIÇÃO DE PROBLEMA

Dentre os diversos autores e trabalhos já publicados sobre Resolução de Problemas, são encontradas muitas definições para o termo problema. Nesse sentido, Van de Walle (2001) adverte que, muitas vezes, se fala em trabalhar com problemas para ensinar Matemática sem que haja clareza do que seja um problema.

Dante (2011) define que um problema é "qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la" (DANTE, 2011, p. 9). Esse autor, no entanto, estabelece uma diferenciação entre exercícios e problemas. O "exercício, como o próprio nome diz, serve para exercitar, para praticar determinado algoritmo ou procedimento. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas" (DANTE, 2011, p.30). Em contrapartida, problema, "de maneira genérica, pode-se dizer que é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo" (DANTE, 2011, p. 9).

Para Van de Walle (2009, p. 57), "um problema é qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método 'correto' específico de solução".

Para Onuchic (1999, p. 215), problema "[...]é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em resolver". Além disso, "um problema se configura na relação com o resolvedor, de tal modo que, se ele já conhece ou tem memorizados tais métodos de resolução ou não está interessado na atividade, não será para ele um problema" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 44).

Concordando com essas definições, nesta pesquisa, assume-se que uma situação só será um problema se o aluno ainda não conhece os meios necessários à resolução, mas está desafiado, motivado e interessado em resolvê-la.

Hashimoto e Becker (1999), Van de Walle (2001) e Allevato (2014) consideram que os problemas a serem utilizados nas aulas, quando o professor pretende realizar explorações matemáticas, devem ser os "problemas abertos". Dessa maneira:

> [...] os problemas são abertos quando: o processo é aberto (são explorados múltiplos caminhos para a solução), o final é aberto (há múltiplas respostas corretas a serem descobertas), a formulação de novos problemas é aberta (os alunos exploram novos problemas relacionados ao problema dado) (ALLEVATO, 2014, p. 44).

Bustamante, Ribeiro e Navarro (2015), bem como Vieira e Allevato (2016) recomendam o trabalho com problemas abertos, que "[...] partem de enunciados menos estruturados, permitem a formulação de diversos tipos de questões e possibilitam a realização de explorações em diferentes direções” (VIEIRA; ALLEVATO, 2016, p. 122).

Antes mesmo de se propor um novo conteúdo, o trabalho do professor inicia-se com a cuidadosa seleção do (s) problema (as). O problema será o ponto de partida, o elemento gerador de toda a atividade matemática que será desencadeada em aula. Assim, Vieira e Allevato (2016) ressaltam que:

> Cabe ao professor selecionar, ou mesmo elaborar, um problema que seja interessante, no sentido de propiciar aos alunos a oportunidade de resolvê-lo e de aprender Matemática a partir dele. Por se tratar de um problema, a sua resolução não é evidente; em contrapartida, não é recomendável propor aos alunos um problema cuja resolução se revelará demasiadamente complexa, ou mesmo inalcançável. O desejável é pensar num problema que permita aos alunos, a partir da mobilização dos conhecimentos que já possuem e da discussão sobre as diferentes estratégias que possam ser empregadas durante o momento da resolução, acessar o conteúdo matemático em questão (VIEIRA; ALLEVATO, 2016, p. 123-124).

Ancorados na literatura apresentada, os problemas abertos consideram as competências e habilidades que os alunos já possuem. Em síntese, é importante que sejam estabelecidas conexões entre o conteúdo novo e os conhecimentos prévios dos alunos. Esses problemas podem ser de autoria do professor ou pode ser realizada uma adaptação de problemas convencionais de livros didáticos ou de outras fontes. Na presente pesquisa, são utilizadas as duas opções.

2.3 PLANEJAMENTO E DESENVOLVIMENTO DA AULA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Onuchic (1999, 2012) salienta que, ao utilizar a Resolução de Problemas em uma perspectiva metodológica, o processo de ensino-aprendizagem começa com um problema que conduz à construção de conceitos programados para aquela aula. Para a pesquisadora, os problemas não têm como foco a aplicação mecanizada de uma fórmula ou procedimento operatório.

Onuchic e Allevato (2011) reiteram que o uso da Resolução de Problemas como proposta de ensino exige do professor planejamento, ou seja, preparar ou escolher problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Além disso, o docente deixa de ser o centro, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem. Os alunos, por sua vez, “devem entender e assumir essa responsabilidade” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Segundo Justulin (2014), apoiada em Van de Walle (2009), o professor deve escolher cuidadosamente o problema que proporá aos seus alunos, almejando a aprendizagem da Matemática que atenda três características:

> a primeira é que ele deve considerar os conhecimentos que os alunos têm e deve partir deste ponto; a segunda característica relaciona-se ao conteúdo que se quer que os alunos aprendam, tendo cuidado para que questões secundárias não desviem o foco da Matemática que se quer trabalhar em determinado problema; por fim, o problema deve exigir justificativas e explicações para as respostas e métodos apresentados (JUSTULIN, 2014, p.61).

Van de Walle (2009, p. 57) considera a resolução de problemas como a principal estratégia de ensino da Matemática. Por meio dela, é possível que o professor ensine "[...] a maioria, senão todos, os conceitos e procedimentos matemáticos [...]". Para o autor, os alunos "[...] devem resolver problemas não para aplicar Matemática, mas para aprender nova Matemática". Na Resolução de Problemas, o ensino é centrado no aluno, considerado como ser ativo, capaz de criar ideias, produzir conhecimentos, ele se envolve em situações que exigem o pensar e possibilitam o desenvolvimento da Matemática que de fato é importante aprender e posteriormente, quando necessário, fará conexões.

A relevância de aprender nesta perspectiva vai além de colocar o aluno no papel de construtor do conhecimento, ela possibilita ao professor avaliar conhecimentos, pois "as indicações de que um estudante entende, interpreta mal ou não entende ideias matemáticas específicas surgem com frequência, quando ele resolve um problema" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 47).

Trabalhar com a Resolução de Problemas requer tempo e pesquisa do professor, o qual precisa "[...] preparar ou escolher problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir", fazendo o seu planejamento. Além disso, o professor deixa de ser o centro das atividades, como em aulas tradicionais, "[..] passando para os alunos a responsabilidade pela aprendizagem que pretende atingir" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

O roteiro de atividades a serem desenvolvidas pelo professor, em uma aula fazendo uso da MEAAMARP, após diversas pesquisas produzidas pelo Grupo de Trabalhos e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), é apresentado por Allevato e Onuchic (2021) e abarca as seguintes ações:

1. Proposição do problema: momento em que o professor cria ou adapta um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema inicial é chamado problema gerador, cuja resolução deve fazer conexões com os conhecimentos prévios dos alunos.

2. Leitura individual: o professor disponibiliza uma cópia do problema, individualmente para cada aluno, e solicita que seja feita a leitura. Nessa etapa, espera-se que o aluno desenvolva sua própria compreensão do problema.

3. Leitura em conjunto: os alunos se reúnem em pequenos grupos e fazem nova leitura. Nesta etapa, o professor pode auxiliar na compreensão.

4. Resolução do problema: os alunos, em seus grupos, iniciam a resolução do problema, utilizando seus conhecimentos prévios – num trabalho colaborativo e cooperativo.

5. Observar e incentivar: o professor age observando o trabalho dos alunos, incentivando-os a trocar ideias e a utilizar técnicas operatórias já conhecidas. O professor não age mais como transmissor do conhecimento, mas como mediador.

6. Registro de resoluções na lousa: representantes dos grupos são convidados a colocar na lousa como resolveram o problema, sem medo de erros ou julgamentos.

7. Plenária: diante desse "painel de múltiplas soluções", todos os alunos são convidados a explicarem suas soluções, a justificar suas ideias, a defenderem seus pontos de vista com relação ao problema que foi resolvido e compará-los com os demais.

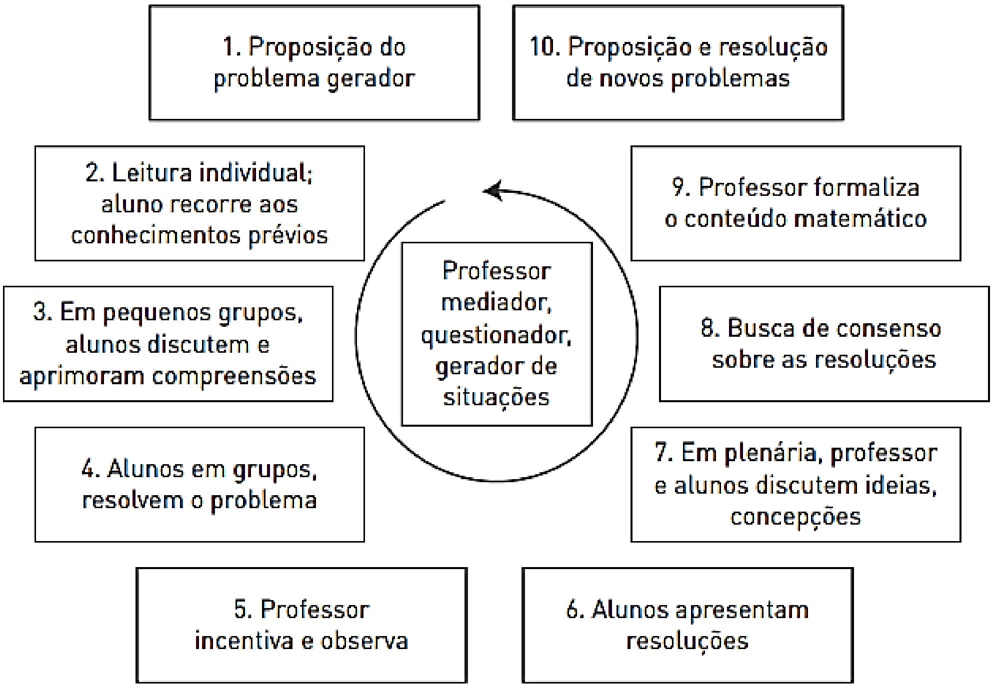
8. Busca por consenso: os alunos, em conjunto com o professor, tentam chegar a um consenso sobre a solução correta, dentro das que foram apresentadas, na busca pela construção do conhecimento.

9. Formalização do conteúdo: em concordância com as discussões, o professor formaliza o conteúdo, apresentando aos alunos os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias. Se for o caso, ele pode apresentar as representações que estão no material didático sobre conteúdo.

10. Proposição e resolução de novos problemas: nesta etapa, o professor propõe a seus alunos a resolução de novos problemas relacionados ao mesmo conteúdo do problema gerador. Os alunos também podem propor novos problemas.

Allevato e Onuchic (2021) sintetizam o roteiro da MEAAMARP, conforme Figura 2:

Figura 2 – Esquema da metodologia



Fonte: Allevato e Onuchic (2021, p. 51).

Onuchic e Allevato (2011) comentam que a referida metodologia tem favorecido significativos avanços na compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos, ao desenvolver:

> [...] a capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos. (...) desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Sugerem Onuchic e Allevato (2014) uma proposta da inversão, tanto na organização do planejamento das aulas, bem como na sala de aula em si e no papel do professor e aluno. O professor passa a criar um ambiente matemático motivador, estimulante e desafiador em que o aluno é colocado no centro do processo de ensino-aprendizagem, estabelecendo assim uma relação dialógica na sala de aula, envolvendo o aluno a produzir Matemática, baseado no que já conhece, de forma colaborativa. Para Justulin (2014, p. 68), "é importante destacar que a diversidade de estudantes pode ser contemplada em uma aula de Matemática através da Resolução de Problemas. Dessa maneira, grupos cooperativos heterogêneos podem ser formados".

Portanto, novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula são exigidas tanto dos alunos, ao assumirem a responsabilidade pela aprendizagem, como do professor em relação ao trabalho em sala de aula - principalmente quando se pretende ensinar Matemática enquanto se resolvem problemas (SANTOS; JUSTULIN, 2020).

Canavarro (2017) e Onuchic e Allevato (2019) afirmam que o ensino-aprendizagem por meio da resolução de problemas deve considerar o problema como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos. Assim, os alunos são os coconstrutores de seu próprio conhecimento, e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo.

Nessa direção, várias pesquisas apontam que a Resolução de Problemas pode auxiliar na construção do conhecimento matemático.

Para Cordeiro, Oliveira e Cunha (2020):

> [...] a resolução de problemas é uma tendência metodológica que tem como finalidade principal melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem dos conteúdos matemáticos. É uma metodologia que possibilita ao aluno a utilização dos conhecimentos já dominados, a modificação e ampliação de seus conhecimentos, a aquisição de habilidades para lidar com as informações disponíveis, o aperfeiçoamento de procedimentos matemáticos, a ampliação da visão que possui da Matemática e da realidade em geral, e o desenvolvimento da criatividade e da autoconfiança em aprender por si mesmo (CORDEIRO; OLIVEIRA; CUNHA, 2020, p. 125).

Van de Walle (2009) sugere que as aulas não se constituam em uma mera transmissão de conteúdo, em que os alunos obtenham informação do livro ou do professor, mas sim que sejam propostas atividades que levem os estudantes a construírem suas próprias ideias usando seus conhecimentos prévios. O autor sugere uma organização da aula em três momentos, conforme Figura 3.

Figura 3 – Organização em três momentos de uma aula através da Resolução de Problemas

Fase ANTES Preparando os alunos	Fase DURANTE Alunos trabalhando	Fase DEPOIS Alunos debatendo
• Verificar se o problema foi compreendido. • Ative os conhecimentos prévios úteis. • Estabeleça espectativas claras para os produtos.	• Deixe os alunos construirem seu conhecimento. Evite antecipações desnecessárias. • Escute cuidadosamente. • Forneça sugestões adequadas. • Observe e avalie.	• Encoraje a formação de uma Cominidade de Estudantes. • Escute/Aceite soluções dos estudantes sem julgá-las. • Sintetize as principais ideias e indentifique futuros problemas.

Fonte: Van de Walle (2009, p. 62).

Van de Walle (2009) ainda propõe um planejamento, considerando as decisões de conteúdo e de tarefas e as decisões pedagógicas, para a elaboração de um plano completo da aula, de acordo com Figura 4.

Figura 4 – Planejamento do professor para uma aula através da Resolução de Problemas

Decisões de conteúdo e de tarefas	Decisões pedagógicas	Plano completo
1. Determine a matemática.	5. Articule as responsabilidades dos alunos.	9. Escreva o plano: • Objetivos de matemática; • Tarefas e expectativas; • Atividades ANTES; • Dicas e extensões da fase DURANTE; • Formato da fase DEPOIS; • Anotações de avaliações.
2. Pense no que seus alunos trazem de matemática.	6. Planeja as atividades da fase ANTES.	
3. Estabeleça ou selecione uma tarefa.	7. Planeje as sugestões e extensões da fase DURANTE.	
4. Antecipe as abordagens dos alunos para encontrar uma solução.	8. Planeje as discussões da fase DEPOIS	

Fonte: Van de Walle (2009, p. 83).

Conforme Van de Walle (2009), na fase antes, o professor apresenta um problema, a partir de um conteúdo que deseja construir, organiza os alunos em grupo e se certifica de que todos leram e compreenderam o problema; na fase durante, o professor acompanha os raciocínios dos alunos, mediante o problema proposto, porém não interfere. Cuidadosamente, oferece sugestões adequadas, baseadas nas ideias dos estudantes e nos seus modos de pensamento, e na fase depois, o professor sintetiza ideias, aceitando todas, certas ou erradas, e formaliza o conteúdo.

Sendo assim, o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas possibilita relacionar os conhecimentos prévios dos alunos aos novos conhecimentos a serem construídos, já que, nesse processo, o aluno utiliza os conhecimentos anteriores que detém e o professor o auxilia a construir novos conhecimentos relacionados ao problema proposto. Ocorre uma investigação do padrão e da ordem, que são características da Matemática. Ao investigar, é possível utilizar-se de desenhos, tecnologia, esquemas, tabelas, gráficos, entre outros recursos, o que torna essa metodologia bastante abrangente.

Segundo Onuchic (2004, p. 5-6):

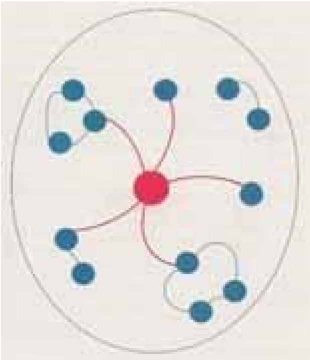
> Resolver problemas significa engajar-se numa tarefa para a qual o método de solução não é conhecido de saída. Para achar a solução de um problema os estudantes precisam

> buscar recursos em seu conhecimento e, através desse processo, frequentemente desenvolvem novas compreensões matemáticas. Ao aprender a resolver problemas, os alunos devem adquirir modos de pensar; hábitos de persistência e curiosidade; e confiança dentro de situações não familiares que lhes servirão quando fora da sala de aula de Matemática.

Onuchic e Allevato (2019, p. 4) "destacam que algumas ideias são catalizadoras de conexões", o que possibilita que professores e alunos, ao longo da resolução de problemas, estabeleçam conexões de diversas naturezas, e não só entre os diversos ramos da Matemática.

Com base nas ideias do construtivismo e da psicologia cognitiva, Van de Walle (2009) apresenta um diagrama, conforme Figura 5, e explica que "nós usamos as ideias que já temos (pontos azuis) para construir uma nova ideia (ponto vermelho), desenvolvendo neste processo uma rede de conexões entre elas. Quanto mais ideias forem usadas e mais conexões forem formadas, melhor a nossa compreensão" (VAN DE WALLE, 2009, p. 43).

Figura 5 - Conexões entre as ideias



Fonte: Van de Walle (2009, p. 43).

Allevato e Onuchic (2019, p. 6) esclarecem que as conexões entre o conhecimento prévio e o que está sendo proposto pelo professor permitem aos alunos dar sentido à Matemática.

2.4 RECOMENDAÇÕES DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A BNCC "é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (BRASIL, 2018, p. 7). Na área de conhecimento de Matemática, a BNCC propõe unidades temáticas correlacionadas, que orientam o desenvolvimento de competências habilidades a serem desenvolvidas ao longo dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental. Em todas as unidades temáticas, os objetos de conhecimento e as habilidades são retomadas, ampliadas e aprofundadas a cada ano.

A proposta da BNCC (BRASIL, 2018) enfatiza a importância do conhecimento matemático para todos os alunos da Educação Básica e evidencia que o aluno faça uso desse conhecimento em sua vida pessoal e social, bem como amplie as formas de pensar matematicamente para além dos cálculos numéricos. De tal maneira, a responsabilidade do professor não deve ser apenas a de ensinar a calcular, mas também a de auxiliar os alunos a pensarem e a construírem seu próprio conhecimento, percebendo relações, conceitos e procedimentos. Para "[...] a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática" (BRASIL, 2018, p. 299).

A BNCC propõe processos ligados às formas de ensinar Matemática, pois são, ao mesmo tempo, objetos e estratégias para a aprendizagem, tais como: resolução de problemas, investigação, desenvolvimento de projetos e modelagem. "Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional" (BRASIL, 2018, p. 266).

Em relação ao modo como a resolução de problemas é trazida na BNCC, identifica-se, em diversas partes do documento, sua menção a competências e a habilidades a serem desenvolvidas a partir dos diversos componentes curriculares. Não há uma definição clara sobre o que é considerado um problema ou sobre o que abarca a resolução de problemas. Segundo Andreata e Allevato (2018) na:

> [...] competência geral aparece o termo "resolver problemas" que está muito direcionado a uma concepção de "preparar" o aluno para resolver problemas diante das diversas situações e contextos das ciências. E as inserções da RP nas competências específicas matemática estão voltadas à perspectiva de aprender matemática para resolver problemas e não resolver problemas para aprender matemática (ANDREATA; ALEVATTO, 2018, p. 8 - 9).

Essa abordagem pode ser compreendida como ensinar matemática *para* resolver problemas (SCHROEDER; LESTER, 1989), em que, após a apresentação do conteúdo, os professores propõem problemas aos alunos. No entanto, "[...] um perigo dessa concepção é que ela configure a resolução de problemas como uma atividade que os alunos só podem realizar após a introdução de um novo conceito, ou após o treino de alguma habilidade ou de um algoritmo" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 38).

Em síntese, o documento também orienta a articulação entre os diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade – e que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e "[...] desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações" (BRASIL, 2018, p. 265). A BNCC destaca também ser "[...] importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido" (BRASIL, 2018, p. 299). Desse modo, os alunos poderão desenvolver a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los, bem como refletir sobre o que ocorreria se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto.

Na presente pesquisa, a perspectiva considerada está em direção a um ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. Assim, como metodologia de ensino, é possibilitado ao aluno que ele construa seu conhecimento a partir de relações com o que ele já conhece. A Matemática é construída enquanto o aluno resolve o problema.

3 ÁLGEBRA E FUNÇÕES NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A Álgebra constitui um dos cinco padrões de conteúdo propostos nos Princípios e Padrões do NCTM e uma das cinco unidades temáticas da BNCC. Entretanto, pesquisas educacionais, como a realizada por Botta (2010), Tinoco (2009, 2011), Araujo (2013) e Justulin (2019) mostram que o desenvolvimento das habilidades necessárias para a compreensão da Álgebra ainda é incipiente, principalmente no que se refere à passagem da linguagem aritmética para algébrica e a questão dos significados das letras ("incógnitas" ou "variáveis").

Botta (2010, p. 87) considera que "a Álgebra é uma linguagem para descrever ações sobre quantidades e relações entre quantidades". A autora afirma que os alunos podem apresentar dificuldades com a linguagem da álgebra (variáveis e as expressões) ou na tradução de uma linguagem para outra (problemas literais para equações).

Para Fiorentini *et al*. (1993, p.88), o pensamento algébrico é "um tipo especial de pensamento [...] que pode ser expressado através da linguagem: natural, aritmética, geométrica ou através da criação de uma linguagem específica, de natureza estritamente simbólica". As grandes ideias do pensamento algébrico, segundo NCTM (2000), envolvem a representação, o raciocínio proporcional, o significado de variáveis e a análise da mudança em diversas situações (estudo da variação) - padrões e funções.

Para Calado (2020) e Brasil (2018), as ideias base do conceito de função iniciam-se nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, durante o desenvolvimento do pensamento algébrico, enquanto a formalização do estudo de funções, em suas diferentes representações, deve acontecer no 9º ano, momento em que o aluno já desenvolveu as habilidades e competências que subsidiarão tal formalização.

Para Tinoco (2009, p. 45), "as ideias essenciais à construção do conceito de função devem ser introduzidas aos poucos e gradativamente à medida em que os conteúdos trabalhados oferecem oportunidades". A autora destaca que "[...] é interessante explorar o fato de que, conhecendo-se uma das grandezas, pode-se obter o valor correspondente da outra, multiplicando-se o valor da grandeza conhecida por uma constante" (TINOCO, 2009, p. 46). Assim, se x e y são duas grandezas proporcionais, existe um número real fixo $k > 0$, de modo que $y = kx$. No entanto, atenta para o fato de que nem sempre uma função vem de uma proporcionalidade e há necessidade de exemplificar bem isso, por exemplo, ao analisar o "peso das crianças".

Araujo (2013, p. 2) relata sobre sua experiência ao introduzir, no Ensino Fundamental, primeiramente o conceito intuitivo e, depois, o conceito formal de função, que leva o aluno a "perceber onde, como e por que usa essa ferramenta da Matemática". Ao acompanhar alguns desses alunos no Ensino Médio, a autora verificou que a compreensão deles era superior à dos demais que não haviam passado por esse processo.

Sobre as dificuldades dos alunos iniciantes em Álgebra, Tinoco (2011, p. 51) afirma que "[...] é na passagem da linguagem corrente para a algébrica que reside a maior dificuldade [...]". E ela é decorrente da familiarização do aluno com a linguagem simbólica, ao mesmo tempo em que constrói diversos outros conceitos matemáticos. Essa autora ressalta a importância de permitir que o aluno utilize e compreenda a simbologia matemática, manipulando os símbolos corretamente, atribuindo a eles significados e podendo aplicá-los e justificá-los quando necessário.

Justulin *et.al.* (2019) chamam a atenção para as dificuldades apresentadas por estudantes do Ensino Médio acerca do conteúdo de função e seus conceitos, suas representações e aplicações - parte delas ocorre devido à falta de compreensão dos conceitos matemáticos relacionados e na mudança de um registro para outro.

Para Souza e Souza (2018), saber articular os diferentes tipos de representação como a escrita, a língua natural, a escrita algébrica, as tabelas e as figuras, possibilita a compreensão do conceito matemático. A articulação desses registros constitui uma condição de acesso à compreensão Matemática, e não deve haver a exploração de cada representação de modo isolado.

Para Gonçalves (2018, p.15), "[...] transitamos por um conceito "formal" de funções (que, em pouco – ou nada, "carrega" a essência desse conceito: o aspecto covariacional das grandezas envolvidas)". O raciocínio covariacional é utilizado:

> [...] quando podemos relacionar variações entre grandezas. A título de exemplo, uma grandeza x altera (podemos entender altera no sentido de crescimento ou decrescimento) com o passar do tempo e uma grandeza y altera também com o passar do tempo (tempo passando igual para ambas). Se, por via de alguma relação e/ou representação, conseguirmos relacionar essas duas variações, dizemos então que na situação as grandezas estão covariando (GONÇALVES (2018, p. 29).

O referido autor considera que, para os alunos, "[...] o modo como lhes são apresentados os conceitos, por meio de definições, seguidas de exemplos e resolução de "exercícios modelo", contribui para que, muitas vezes, essa dificuldade na compreensão seja potencializada" (GONÇALVES, 2018, p. 14).

Thompson e Carlson (2017) acrescentam que o raciocínio covariacional deve ser mobilizado em aulas de Matemática. Para os autores, o cerne do raciocínio covariacional é pensar em como variáveis se alteram e em como elas se comportam em relação às outras variáveis e, consequentemente, na elaboração do conceito de função.

Portanto, segundo Usiskin (1995), há diferentes concepções da álgebra: aritmética generalizada, a álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, a álgebra como estudo de relações entre grandezas e a álgebra como estudo das estruturas. Essa classificação será aprofundada na próxima subseção.

3.1 ÁLGEBRA E SUAS CONCEPÇÕES

Para uma compreensão das diferentes concepções da álgebra e a relação com os diferentes usos das variáveis foi elaborado o Quadro 1, com base nas ideias de Usiskin (1995):

Quadro 1 – Síntese das concepções da Álgebra e o uso das variáveis

Concepções da Álgebra	Uso das variáveis
Aritmética Generalizada	Generalizadora de modelos Traduzir – Generalizar
Meio de resolver certo problemas	Incógnitas, constantes Resolver - Simplificar
Estudo das Relações	Argumentos, parâmetros Relacionar – Gráficos
Estrutura	Sinais arbitrários no papel Manipular - Justificar

Fonte: Usiskin (1995, p. 20).

Na primeira concepção, as "variáveis" são utilizadas como generalizadoras de modelos. Dentro dessa concepção, as ações abarcam traduzir e *generalizar*. Desse modo, as generalizações e uma compreensão de variáveis e do simbolismo são ambas desenvolvidas ao mesmo tempo.

Dentro da segunda concepção, a Álgebra é usada como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas. O problema é traduzido para a linguagem algébrica, em que as variáveis são incógnitas ou constantes, e as instruções-chave são *simplificar* e *resolver*. O aluno, nessa concepção, também precisa ter habilidades em manejar matematicamente essas equações até obter a solução. A letra aparece não como algo que varia, mas como uma incógnita, isto é, um valor a ser encontrado.

A álgebra como estudo de relações entre grandezas faz parte da terceira concepção e difere da segunda por se ocupar de modelos e leis funcionais que descrevem ou representam as relações entre duas ou mais grandezas variáveis. “Uma variável é um argumento (isto é, representa os valores do domínio de uma função) ou um parâmetro (isto é, um número do qual dependem outros números)” (BOTTA, 2010 p. 83).

Na quarta concepção, a Álgebra vem como estudo de estruturas, reconhecidas na Educação Básica entre as propriedades atribuídas às operações com Números Reais e Polinômios. Aqui a variável é um símbolo arbitrário que não se classifica como função ou relação; a variável não é um argumento; e não há qualquer equação a ser resolvida, de modo que a variável não atua como incógnita. Também não há nenhum modelo aritmético a ser generalizado.

3.1.1 A BNCC e as recomendações sobre a Álgebra no Ensino Fundamental

A unidade temática Álgebra da BNCC tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento, o algébrico “[...] que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos” (BRASIL, 2018, p. 270). Ainda, orienta que, para esse desenvolvimento, os alunos identifiquem as regularidades, os padrões em sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas.

O documento recomenda que, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, os estudos de Álgebra sejam aprofundados e ampliados levando em consideração o que os alunos aprenderam nos anos iniciais. A compreensão de cada habilidade demanda a compreensão de que ela se conecta com habilidades desenvolvidas em anos anteriores. Nessa fase, os alunos devem:

> Compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmo (BRASIL, 2018, p. 271).

Outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra também pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos - ao serem capazes de identificar padrões, traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, lei de formação, tabelas e gráficos e vice-versa. No Quadro 2, são apresentadas as habilidades propostas na BNCC, para a Álgebra do 6° ao 9° Anos do Ensino Fundamental.

Quadro 2 – Habilidades propostas para a Álgebra na BNCC, do 6° ao 9° Ano

Ano	Objetos de Conhecimento	Habilidades
6°	Propriedades da igualdade	(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
7°	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
	Equações polinomiais do 1° grau	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1° grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.
	Valor numérico de expressões algébricas	(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1° grau a uma reta no plano cartesiano	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1° grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1° grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1° grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

8º	Equação polinomial de 2° grau do tipo $ax^2 = b$	(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2° grau do tipo $ax^2 = b$.
	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica, e representá-la no plano cartesiano. (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas
9°	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica, e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
	Razão entre grandezas de espécies diferentes	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras
	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis. Resolução de equações polinomiais do 2° grau por meio de fatorações	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2° grau.

Fonte: autoria própria (2022), com base na BNCC (BRASIL, 2018).

Conforme a BNCC (2018), são elencados os objetos de conhecimento a serem trabalhados em Álgebra, mas não se apresentam maiores informações sobre como desenvolver o pensamento algébrico.

3.2 FUNÇÕES

3.2.1 Aspectos históricos

O conceito de função surgiu de forma intuitiva a partir da necessidade do homem de resolver problemas práticos do dia a dia com dependência entre duas grandezas distintas. De acordo com Caraça (1963, p.125), “[...] conceitos matemáticos surgem uma vez que sejam postos problemas de interesse capital, prático ou teórico [...]” e envolvem a necessidade da contagem. Na busca de entender, explicar e, principalmente, prever fenômenos, surge o conceito de função, um dos mais importantes na Matemática.

No Quadro 3 é apresentada uma trajetória do desenvolvimento histórico desse conceito, com os consensos e discordâncias entre os pensadores desde o século XVII sobre “[...] problemas que entravam em discussão no meio matemático exigindo definições cada vez mais precisas, que contemplassem todos os casos e que realmente expressassem a essência do objeto matemático em questão” (SOUZA; SOUZA, 2018, p. 128).

Quadro 3 – Aspectos históricos do desenvolvimento do conceito de função

Período	Ideias relacionadas ao conceito de função
Final do século XVII	Surgimento da noção de função no final do séc. XVII, os primórdios do Cálculo Infinitesimal.
Viète (1540 -1603)	O conceito primitivo de função teve origem na medida em que problemas do mundo físico foram surgindo**.** Entretanto, outros elementos foram essenciais para a formação desse conceito, como a moderna notação algébrica.
Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665)	Representação geométrica, que proporcionava uma base intuitiva fundamental, possível devido à Geometria Analítica.
Newton (1642-1727)	Publicou em 1736 o livro *The Method* of *Fluxions* a*nd Infinite Series (O Método de Fluxões e Séries Infinitas)*, e, nesse material, embora não tenha usado a palavra função, ele considerava a relação de dependências entre variáveis (*relata quantitas*) e as chamava de variáveis independentes (*fluentes*).
Leibniz(1646-1716)	Foi o primeiro a utilizar termo “função” para indicar quantidades que variavam ao longo de uma curva.
Johann Bernoulli (1667-1748)	Define função de uma grandeza variável, utilizou a notação para uma função se aproximando de $f(x)$.
Euler(1707-1783)	Aperfeiçoou a definição de Bernoulli, em 1748. Mencionou que função é uma expressão analítica, porém não a definiu. Deve-se a ele a notação f(x) para designar uma função de x.
Meados do século XVIII	O problema das cordas vibrantes ocasionou discussões elementos a respeito do conceito de função.
Lagrange (1736-1813)	Obteve uma solução para equação, se aproximando do desenvolvimento de uma dada função em série trigonométrica.
Metade do século XIX	Dirich l et definiu função em uma concepção moderna, como correspondência entre dois conjuntos de números. Porém, foi com Cantor, após desenvolvimento da teoria dos conjuntos, que função passou a ser definida como pares ordenados.
Grupo Nicolas Bourbaki século XX	Até hoje influencia o estudo das funções, e apresentou o conceito de função como um certo subconjunto do produto cartesiano $E\ x\ F$.

Fonte: Autoria própria (2022), com base em Souza e Souza (2018).

Da análise histórica do conceito de função, Silva e Rezende (1999) consideram que os matemáticos, ao definirem esse conceito, utilizaram três ideias básicas: (1) função como relação entre quantidades variáveis, pois o cerne do conceito de função refere-se à ideia de duas grandezas que variam em dependência uma da outra; (2) função como relação entre conjuntos, em que cada elemento x de um conjunto A se associa a um único elemento $f(x)$ de um conjunto B; e (3) função como transformação, considerando a ideia de que a função f transforma o elemento x no valor $f(x)$.

3.2.2 Conhecimentos prévios e a ideia de Função

Van de Walle (2009) afirma que alunos, ao utilizarem as ideias que já possuem para construir uma nova, apresentam maior compreensão. "As ferramentas que usamos para construir compreensão são nossas ideias existentes, o conhecimento que já temos" (MORAIS, 2008, p. 35). Esses conhecimentos podem ser os apreendidos na escola ou aqueles que fazem parte da vivência do aluno.

A BNCC (BRASIL, 2018, p. 810) acentua que "no Ensino Fundamental – anos finais, a expectativa é a de que o estudante amplie e aprofunde os conhecimentos matemáticos tratados nos anos anteriores". O Quadro 4 traz as habilidades da BNCC, relacionadas ao conteúdo de função, trabalhadas até o 9° ano do Ensino Fundamental e, a partir delas, os alunos podem estabelecer uma rede de conexões.

Quadro 4 – Habilidades que se relacionam com o conteúdo de função

Ano	Objetos de Conhecimento	Habilidades
6°	Propriedades da igualdade	(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

7°	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
	Equações polinomiais do 1° grau	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1° grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.
8º	Valor numérico de expressões algébricas	(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1° grau a uma reta no plano cartesiano	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1° grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1° grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1° grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
	Equação polinomial de 2° grau do tipo $ax^2 = b$	(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2° grau do tipo $ax^2 = b$.
	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica, e representá-la no plano cartesiano. (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas

Fonte: autoria própria (2022), com base na BNCC (BRASIL, 2018).

Orientadas por essas habilidades que se relacionam com conteúdo de função e os que alunos trazem, de certa forma, como conhecimentos prévios, os problemas foram organizados almejando que os alunos os utilizem para tecer rede de ideias explicáveis. “Com relação aos estágios de desenvolvimento das ideias, as conexões poderão ser constituídas baseando-se em conhecimentos prévios” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2019, p. 6). Caso algum aluno, no entanto, não conte com os conhecimentos prévios elencados pela professora-pesquisadora, surge um problema secundário, que pode ser de várias naturezas: “[...] notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 84). Nesse caso, na ação “Observar e Incentivar”, do roteiro proposto na seção 2.3, a professora-pesquisadora fará os esclarecimentos necessários, a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

3.2.3 Função e conceitos relacionados

Nesta subseção, são destacados o conceito de função, bem como outros a ele relacionados, que fundamentam a sequência dos problemas construídos para serem implementados na pesquisa. Considera-se que “[...] ao trabalhar com o conceito de função é necessário apontar sua definição, assim como as definições dos elementos que a acompanham” (SOUZA, 2016, p. 20).

Souza (2016) afirma que o conteúdo função é introduzido começando com relações entre elementos de dois conjuntos e, em seguida, expõe-se a definição formal de função. Contudo, pouco se fala “[...] da relação de dependência entre variáveis, mostrando que quando uma cresce/decresce a outra segue o mesmo caminho, ou um caminho inverso” SOUZA (2016, p. 23-24). A noção de função, nessa abordagem, não é estabelecida no contexto da “variabilidade”, mas em termos de uma correspondência entre as variáveis. Na mesma direção, Lima (2006) pondera que, ao definir uma função como um subconjunto do produto cartesiano x e y, “[...] esta definição apresenta o inconveniente de ser formal, estática e não transmitir a ideia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza em função da outra) ou resultado de movimento” (LIMA, 2006, p. 81).

A BNCC (BRASIL, 2018) sugere que as noções intuitivas de função sejam exploradas por meio da ideia de variação proporcional direta entre duas grandezas. Para isso, é necessário propor problemas que desencadeiem a interpretação e a análise de variação de quantidades. Tais problemas possibilitam que os alunos possam expressar suas ideias, escrita, conjecturas ou representações, gráficos, desenhos, tabelas, expressões, entre outros. Além disso, “É necessário

(...) que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação" (BRASIL, 2018, p. 271).

Souza e Souza (2018) afirmam que a correspondência ou associação mental de dois entes exige que haja um ponto de partida e um ponto de chegada; o pensar no ponto de partida evoca o pensar no ponto de chegada, a chamada lei de correspondência. Pode-se dizer que uma função f é um objeto matemático constituído por três partes: *Domínio A*: conjunto de partida ou conjunto em que a função está definida; *Contradomínio B:* conjunto de chegada ou conjunto em que a função toma valores; *Lei de correspondência* $f(x)$*:* é a maneira pela qual o elemento do domínio desperta o elemento do contradomínio. Quando a função é numérica, tanto o domínio quanto o contradomínio são conjuntos numéricos e, nesse caso, a lei de correspondência será dada por uma expressão analítica.

Caraça (1963, p. 129) apresenta a seguinte definição de função: "Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números, diz-se que y é função de x e escreve-se y = f(x) se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido de x → y. A x chama-se variável independente e a y variável dependente".

Lima *et al* (2006) trazem a seguinte definição para função:

> Dados os conjuntos X, Y, uma função f: X→Y:(lê-se: "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento x ∈ X um elemento Y = f (x) ∈ Y. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada x ∈ X, o elemento f(x) ∈ Y chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto x ∈ X. Escreve-se x → f(x) para indicar que f transforma (ou leva) x em f(x) (LIMA *et al.*, 2006, p. 38).

Botta (2010) destaca que a definição de função como uma relação entre conjuntos, que aparece em muitos livros didáticos, não explora a riqueza do conceito de função de um modo significativo. Para ajudar os estudantes a construírem uma conceitualização mais completa, é preciso trazer exemplos de uma variedade de outras funções, bem como de relações não funcionais.

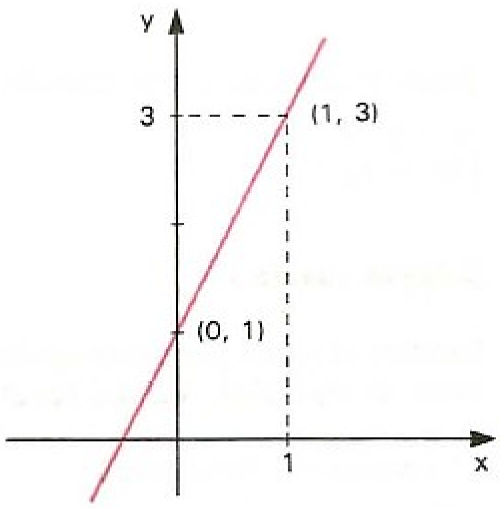
Considerando o caso particular da relação de dependência envolvendo duas grandezas proporcionais, "[...] chegamos a uma função de 1º grau. De modo geral, uma função de 1º grau é expressa por uma lei de formação do tipo f(x) = $ax + b$, em que a e b são constantes, sendo $a \neq 0$. Uma função de 1º grau é chamada de Função Afim "[...] quando existem constantes $a, b \in R$ tais que f(x) = $ax + b$ para todo $x \in R$" (LIMA *et al.*, 2006, p. 82).

A função pode ser classificada com base no valor de seu coeficiente "a": quando $a = 0$, a função se reduz a $f(x) = b$, ou seja, a uma função constante" (SÃO PAULO, 2009, p. 20).

> O número a chama a chama-se a *inclinação*, *ou coeficiente angular*, dessa reta (em relação a reta OX). Quanto maior o valor de a mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente (quando se caminha para a direita) e quando $a < 0$, a reta é descendente (LIMA *et al*., 2006, p. 90).

Sendo assim, a função é denominada crescente se a > 0, ou seja, "[...] para valores maiores de x, obtemos valores maiores para f(x). Isto é, a função cresce conforme aumenta o valor de x". (CHEVITARESE; ANTUNES[17], 2020, p. 336). A Figura 6 traz o exemplo de uma função em que $a = 2$.

Figura 6 – Exemplo de uma função crescente: $g(x) = 2x + 1$

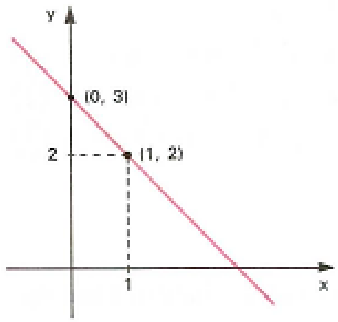


Fonte: Iezzi e Murakami (2013, p. 101).

Se o coeficiente a for menor que zero, a função será decrescente. A Figura 7 apresenta um exemplo de função decrescente, $y = -x + 3$, em que $a = -1$. "A função $F: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é *decrescente* no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1, com $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) < f(x_2)$" (IEZZI; MURAKAMI, 2013, p. 111).

[17] Autores do material didático utilizado nas aulas de Matemática pelos participantes da pesquisa.

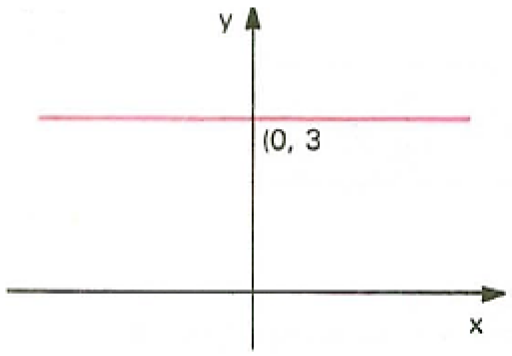
Figura 7 – Exemplo de uma função decrescente: y $= -x + 3$



Fonte: Iezzi e Murakami (2013, p. 102).

A função é constante se $a = 0$, ou seja, $f(x) = b$. Assim, para todo x a função assume um valor constante para y. A Figura 8 é um exemplo de função constante em que $f(x) = 3$.

Figura 8 – Exemplo de uma função constante: $f(x) = 3$



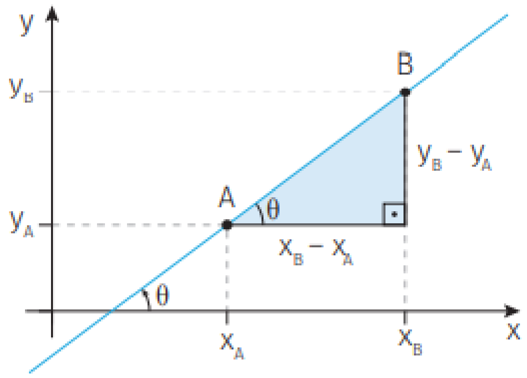
Fonte: Iezzi e Murakami (2013, p. 97).

Dado o gráfico de uma função de 1º grau, pode-se determinar sua lei de formação a partir de seus coeficientes "a" e "b". Como já mencionado, o coeficiente "a" é chamado de angular, já que caracteriza a inclinação da reta em relação ao eixo das abcissas (Ox) e pode ser determinado por meio de dois pontos ($x1$ e $x2$) distintos e arbitrários do gráfico:

> [...] Com efeito conhecidos
> $$f(x1) = ax1 + b$$
> $$f(x2) = ax2 + b,$$
> obtemos $f(x1)$ - $f(x2) = a(x1 - x2)$, portanto $a = \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$. Dados $x, x + h \in R$, com $h \neq 0$, o número $a = [f(x + h) - f(\text{x})]/h$ chama-se a *taxa de crescimento* (ou taxa de variação) da função f no intervalo de extremos $x, x + h$ (LIMA *et al.*, 2006, p. 88).

Outra maneira de se obter o coeficiente angular de uma função é descrita na Figura 9. Considerando os pontos A e B e o triângulo retângulo construído, cujos valores dos catetos são as variações em y (eixo das ordenadas) e em x (eixo das abcissas), o coeficiente a é dado pela tangente do ângulo θ , ou seja: $a = \ tg\theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Figura 9 – Coeficiente Angular e Inclinação da reta tangente



Fonte: Chevitarese e Antunes (2020, p. 335).

O coeficiente b da função $y = ax + b$ é denominado *coeficiente linear*. Esse valor é a ordenada do ponto de intersecção entre a reta e o eixo vertical. Após encontrar o valor de a, o valor do coeficiente b poderá ser determinado ao substituir o resultado de a em uma das igualdades.

3.2.4 Possíveis representações de funções

Souza e Souza (2018) destacaram a importância da pluralidade de representações e elencaram três aspectos que devem ser utilizados em atividades que visem à iniciação dos alunos no conteúdo de função:

1. Introduzir o conceito de função como uma relação entre quantidades variáveis para, posteriormente, defini-lo como relação entre conjuntos - partir do entendimento da noção de variação, de dependência e da percepção de regularidades, a interpretação de função como relação entre conjuntos;

2. Apresentar o conceito de função dentro de diferentes contextos que requeiram máxima transformação do conhecimento adquirido - não só em contextos livrescos, mas em atividades concretas, em que toda terminologia relacionada ao conceito surja como uma ferramenta prática para lidar com problemas com referência na realidade;

3. Recorrer à pluralidade de representações do conceito de função, ou seja, atividades em que os alunos tenham a oportunidade de trabalhar com tabelas, lei de formações e gráficos,

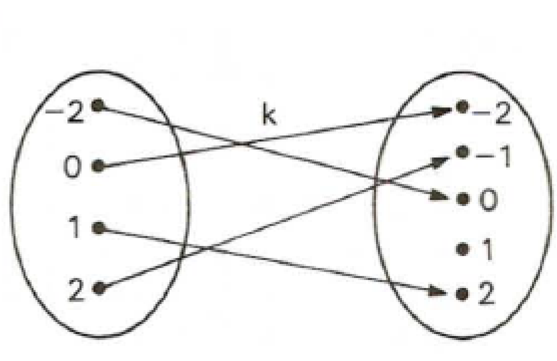
para que possam entender que essas representações são diferentes fontes de informação sobre um mesmo objeto.

Segundo Van de Wale (2009), as cinco representações de funções são: (1) o próprio padrão concreto ou contexto; (2) o quadro ou tabela; (3) a equação simbólica; (4) o gráfico e (5) a linguagem. Para o autor, cada uma das representações mostra as mesmas relações funcionais e recursivas e pode ser usada para qualquer função. Assim, “[...] cada representação é um modo de olhar para a função e, ainda, que cada uma fornece um modo diferente de olhar ou pensar sobre a função” (VAN DE WALLE, 2009, p. 303).

O desenvolvimento das ideias de variável, dependência, regularidade e generalização é feito por atividades ligada ao dia a dia dos alunos, com as quais se familiarizam e também aos distintos tipos de representações. Segundo Tinoco (2009), as representações são: (1) verbais – ao registrar uma determinada situação que representa uma função por meio de palavras, oralmente ou por escrito; (2) gráficas – ao utilizar gráficos formais e informais, tabelas, etc., para expressar uma função e (3) analítica – ao escrever uma função por meio de expressões matemáticas.

Considerando a representação gráfica, pode-se considerar o uso do Diagrama de Venn[18] que “[...] possibilita a visualização de propriedades e de relações entre um número finito de conjuntos” (SOUZA, 2016, p. 22). Por meio de linhas fechadas, desenhadas sobre um plano, o Diagrama de Venn representa os conjuntos, seus elementos e as diferentes relações entre eles.

Figura 10 – Representação de uma função por meio do diagrama de Venn



Fonte: Iezzi e Murakami (2013, p. 91).

Se “[...] todos os elementos de A têm somente um elemento de B, podemos afirmar que

[18] O diagrama de Venn é uma representação gráfica de conjuntos. Ele é formado por linhas fechadas e em seu interior são colocados seus elementos a partir de determinadas relações ou proposições.

f é uma função de A em B. Chamamos o conjunto A de domínio da função e o conjunto B de contradomínio da função" (CHEVITARESE; ANTUNES, 2020, p. 323). O autor afirma que, "para definirmos uma função, todos os elementos do domínio precisam ser associados a algum elemento do contradomínio. Porém, os autores afirmam que nem todos os elementos do contradomínio necessitam estar associados a algum elemento do domínio" (CHEVITARESE; ANTUNES, 2020, p. 323). O subconjunto de elementos do contradomínio que estão associados ao domínio é chamado de imagem.

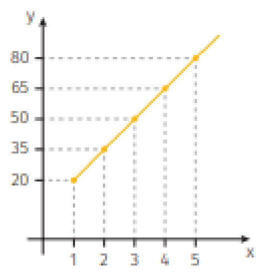
Outras formas de representações gráficas de funções são a tabela e o gráfico. As Figuras 11 e 12 mostram essas representações da função $Y = 15.x + 5$.

Figura 11 – Representação da função $Y = 15.x + 5$ por meio de tabela

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{Y = 15.x + 5}$
1	Y = 15. 1+ 5 ➡ y = 20
2	Y = 15. 2+ 5 ➡ y = 35
3	Y = 15. 3+ 5 ➡ y = 50
4	Y = 15. 4+ 5 ➡ y = 65
5	Y = 15. 5+ 5 ➡ y = 80

Fonte: Chevitarese e Antunes (2020, p. 325).

Figura 12 – Representação da função *Y = 15.x + 5* por meio de gráfico



Fonte: Chevitarese e Antunes (2020, p. 326).

Considerando a representação analítica de função, pode-se fazer uso da lei de formação da função, ou seja, escrever uma expressão matemática para indicá-la. A Figura 13 traz um problema envolvendo função de 1º grau e sua respectiva lei de formação.

Figura 13 – Representação de uma função através de uma lei de formação

“Claudio vende sorvetes por encomenda. Ele cobra R$ 15,00 por quilograma do produto mais R$ 5,00 pela taxa de entrega. Assim, podemos associar que o preço (y) da encomenda é função da massa (x) do sorvete, em quilograma”.

Expressamos essa relação pela seguinte maneira:

$$Y = 15.x + 5$$

Nesse caso, $\boldsymbol{x}$ *é um número real positivo.*

Fonte: Chevitarese e Antunes (2020, p. 324).

Souza (2016) ressalta que, apesar dos alunos terem acesso às distintas formas de representações de uma função, não há uma considerável conexão entre elas. Mostra-se necessária uma contextualização ou problematização do conceito, para que este não pareça um conteúdo “estático”, que relaciona dados (pares ordenados) que, quando colocados no plano cartesiano, formam uma reta.

Tinoco (2009), em suas pesquisas, conclui que ensino atual de Funções tem duas características marcantes: a identificação com expressão analítica e a introdução como conjunto de pares ordenados e um caso particular de relação, mas em ambas se ignora a origem para analisar fenômenos de variação. “Uma alternativa para ressignificar esse conceito na Educação Básica é considerar que uma função representa como duas ou mais quantidades variam uma em relação à outra” (TREVISAN *et al.*, 2020, p. 283).

Sendo assim, o trabalho com funções não deve se restringir somente ao uso da lei de formação e sua representação gráfica, mas analisando o papel assumido pelas variáveis (variável dependente ou independente), como elas variam uma em relação à outra e suas múltiplas representações.

3.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Buscaram-se, nos bancos da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, trabalhos referentes ao tema “Construção do Conceito de Função por meio da Resolução de Problemas”, foram encontrados 66 trabalhos, principalmente dissertações. Ao refiná-los, usando “Construção do Conceito de

Função”, foram reportados 20 trabalhos. Porém, 14 não utilizavam a Resolução de Problemas como metodologia de ensino. Dos 6 trabalhos que contemplavam o critério de busca, três foram realizados com alunos do Ensino Fundamental (cuja etapa escolar também é foco da presente pesquisa): Souza (2016), Assunção (2015) e Dias (2015). As outras três pesquisas: Zatti (2010), Santos (2013) e Botta (2010) foram realizados com alunos do Ensino Médio.

A pesquisa de Souza (2016) teve por objetivo a construção do conceito de função por meio da metodologia de Resolução de Problemas. Essa pesquisa se assemelha a este trabalho no que se refere à justificava e turma a ser aplicada, bem como nas dificuldades observadas nas diversas etapas do processo de aprendizagem do conteúdo função através da metodologia de Resolução de Problemas - construindo aprendizagem sobre os elementos que fundamentam o conceito de função: Relação de Dependência, Domínio, Contradomínio, Imagem, Diagrama de Venn e as diferentes maneiras de representar uma função, assim como a Lei de Formação. Pela análise dos dados coletados e das atividades realizadas, a pesquisadora constatou que, através da Resolução de Problemas associada a situações do dia a dia, os alunos se mostraram interessados e seguros – contribuindo para a aprendizagem e a formalização do conceito.

Assunção (2015) investigou a Resolução de Problemas como metodologia de ensino no conteúdo de funções afins, fundamentada na teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, com alunos do 9º ano, e concluiu que os discentes desenvolveram habilidades e competências a partir das ações e operações com a estratégia de resolução de problemas.

Dias (2015) pesquisou sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de função através da Resolução de Problemas, com um estudo para desenvolver noções básicas inerentes ao conceito, em classes do Ensino Fundamental, descrevendo que nas escolas a abordagem desse conteúdo não favorece a compreensão, sendo enfatizados símbolos e procedimentos técnicos. Por outro lado, observaram-se vantagens da utilização da Resolução de Problemas no ensino de Matemática. A interpretação dos dados evidenciou que o ambiente de resolução de problemas, elaborado para evocar as noções básicas do conceito de função, favoreceu a discussão. Tal estudo gerou um produto educacional com a descrição de algumas atividades realizadas, destinada a professores de Matemática.

Contudo, essas pesquisas se diferem da presente pesquisa no que tange ao uso do roteiro de Allevato e Onuchic (2014) e da MEAAMARP. Nos trabalhos de Zatti (2010) e de Santos (2013), esse roteiro é implementado, mas a aplicação foi no Ensino Médio.

Zatti (2010) investigou as contribuições que a Resolução de Problemas, como metodologia de ensino, pode trazer para o ensino-aprendizagem do conceito de função a alunos do Ensino Médio. Pautada em Onuchic (1999), a pesquisa concluiu que a Resolução de

Problemas é uma estratégia eficaz no ensino-aprendizagem da Matemática, tanto como método de ensino a ser utilizado pelo professor em sala de aula quanto para motivação na resolução de outros problemas e no gosto pela Matemática que se aprende na escola. Outro aspecto positivo mostrado pelos alunos foi a forma de resolução, porque não estavam acostumados a ler atentamente um problema, a interpretar e a extrair os dados do enunciado, bem como de gráficos e tabelas.

Para Santos (2013), as contribuições da Metodologia de Resoluções de Problemas, aliada ao uso do aplicativo *Winplot* para a construção do conceito de função e suas transformações gráficas no 1º ano do Ensino Médio e fazendo uso do roteiro proposto por Allevato e Onuchic (2008), vêm ao encontro de explorar os conhecimentos prévios dos alunos, apesar das dificuldades apresentadas sobre o conteúdo de função estudado em anos anteriores. Um dos resultados mais significativo desse trabalho diz respeito ao envolvimento dos alunos com os recursos tecnológicos e a motivação.

Botta (2010) pautou sua pesquisa no ensino e na aprendizagem do conceito de função, no Ensino Fundamental e Médio, fazendo uso da MEAAMARP, verificando que, quanto mais cedo os estudantes se familiarizarem com o estudo de função, ainda de forma intuitiva, melhor darão sentido a esse importante conceito.

Nesse cenário, a presente pesquisa apresenta o desenvolvimento de atividades de Resolução de Problemas - problemas geradores - propostos antes de se iniciar o conteúdo de função a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. O intuito é possibilitar aos estudantes a compreensão de noções básicas do conceito função: variáveis, a dependência, diferentes tipos representações, caracterização a relação funcional e o raciocínio covariacional, cuja construção tem início no Ensino Fundamental e sua aplicação ocorre durante o Ensino Médio.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA

Nesta seção, são apresentados a abordagem de pesquisa, os participantes, os instrumentos, os procedimentos para a produção e coleta dos dados e os métodos utilizados na análise. Todos esses elementos foram definidos tendo como orientação a pergunta da pesquisa "*Como ocorre a construção do conceito de função, no 9º ano do Ensino Fundamental, através da Resolução de Problemas no ensino híbrido com o auxílio do Padlet?"*

Esta pesquisa teve seu cadastro realizado na Plataforma Brasil, na Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), sob número de protocolo 3755021.2.0000.5547 e sob parecer favorável, com número de parecer 4.638.594, emitido em 08/04/2021.

Trata-se de pesquisa de natureza qualitativa, pois conforme Ollaik e Ziller (2012, p. 233), os objetivos de uma pesquisa dessa natureza são de "[...] descrever, analisar, e buscar compreender". Além disso, os "métodos qualitativos, em geral, enfatizam as particularidades de um fenômeno em termos de seu significado para o grupo pesquisado" (BORBA et al., 2018, p. 45). No caso da presente pesquisa, o grupo estudado é formado por alunos de 9º ano do Ensino Fundamental.

Segundo Pope e Mays (2005), a pesquisa qualitativa se caracteriza pelo desenvolvimento conceitual, de fatos, ideias ou opiniões e do entendimento indutivo ou interpretativo a partir dos dados encontrados. Estes dados são "[...] descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes" (LÜDKE; ANDRÉ, 2014, p. 14). Outro aspecto distinto e forte da pesquisa qualitativa é o estudo das pessoas em seus ambientes naturais e não em ambientes artificiais ou experimentais (POPE; MAYS, 2005).

Bogdan e Biklen (1994) definem cinco características da investigação qualitativa, as quais são:

1) A fonte direta de coleta de dados é o ambiente natural: o pesquisador tem contato direto com o local de sua pesquisa, produz seus dados, observa, anota e os registra por meio de áudio e vídeo.

2) A pesquisa é descritiva: os dados coletados devem ser transcritos e apresentados sob a forma narrativa, no sentido de dar coerência aos dados, avistando aspectos relevantes, respeitando sempre as falas e os pontos de vista dos sujeitos envolvidos na pesquisa.

3) O interesse maior da pesquisa é pelo processo em relação aos resultados ou produtos: o pesquisador deve ouvir os silêncios, enxergar as expressões banais, os sentidos, os sentimentos e as expectativas sem esquecer-se do objetivo de sua pesquisa.

4) Os dados são analisados de forma indutiva: situação em que o pesquisador não recolhe os dados na tentativa de comprovação de hipóteses, e sim a partir das abstrações construídas previamente, ou seja, “[...] o investigador qualitativo planeja utilizar parte do estudo para perceber quais são as questões mais importantes” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 50).

5) O significado como fator de grande importância na abordagem qualitativa: a compreensão de como os participantes interpretam determinados fatos e por que os interpretam daquela maneira. Contudo, “[...] ao apreender as perspectivas dos participantes, a investigação qualitativa faz luz sobre a dinâmica interna das situações, dinâmica esta que é frequentemente invisível para o observador exterior” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51).

Articulando essas características com a presente pesquisa, a implementação do projeto foi na sala de aula presencial e remota, em que a professora se fez também pesquisadora. Como pesquisadora, buscou-se analisar os dados contidos em arquivos físicos e digitais, no diário de campo produzido pela professora-pesquisadora, nas gravações das aulas, nas discussões registradas nos grupos do *WhatsApp* e nas produções disponibilizadas pelos grupos no *Padlet*, durante a resolução de cada problema gerador.

4.1 PARTICIPANTES

Os alunos participantes da pesquisa foram os da turma do 9° ano do período vespertino, de uma escola privada, localizada em uma cidade da região dos Campos Gerais, no Estado do Paraná. A turma contava com tinha 22 alunos, mas somente 20 alunos participaram da pesquisa, dos quais são 08 meninos e 12 meninas de idade aproximadamente entre 13 e 14 anos. Essa turma foi escolhida, convenientemente, por serem alunos da professora-pesquisadora.

Para a identificação individual, cada aluno foi representado pela palavra “Aluno” ou “Aluna” junto com um número (Por exemplo: Aluno 1, Aluno 2, Aluna 3, Aluno 4, Aluno 5, de cada grupo). Para os grupos, foi utilizada a palavra “Grupo” com os respectivos nomes estabelecidos pelos integrantes: “Class Experts”, “Quarteto Fantástico”, “Matemágicas”, “JRJ” e “MTSD”.

4.2 INSTRUMENTO DE PESQUISA

Para a construção do instrumento de pesquisa, que também foi um material de ensino com o intuito de oportunizar a construção do conceito de função pelos alunos, apoiou-se em Van de Walle (2009 p. 49), para quem “[...] uma chave importante para conseguir que os estudantes sejam reflexivos é envolvê-los em problemas que os forcem a usar suas ideias enquanto procuram soluções e criam novas ideias nesse processo”. Nesse sentido, foram elaborados/adaptados cinco problemas geradores, contemplando a etapa *Proposição do problema,* do roteiro da MEAAMARP, conforme Allevato e Onuchic (2014).

4.2.1 Problema 1: Pastorio de ovelhas

Decisões pedagógicas: No grupo de *WhatsApp* da turma fazer o convite para participação na pesquisa; fornecer as orientações sobre o novo formato de aula, utilizando o celular ou o notebook; disponibilizar o *link* do *Padlet* em que consta o problema e propor que os alunos façam a leitura do seguinte problema:

Número de aulas: Duas aulas de 50 minutos cada – presencial e remota, fazendo uso do *WhatsApp* e do *Padlet.*

Conteúdo: Função.

Objetivos: Compreender a relação entre os elementos dos conjuntos (domínio, contradomínio e imagem) e as formas de representá-la fazendo uso do diagrama de Venn.

Conceitos relacionados: Conjuntos numéricos; grandezas; plano cartesiano.

Habilidade envolvida: (EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.

Habilidade a ser trabalhada: (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Respostas esperadas:

1.a) Cada ovelha seria igual à representação de uma pedra.

1.b) Conjunto dos números Inteiros positivos.

1.c) Significaria que uma ovelha morreu ou desapareceu.

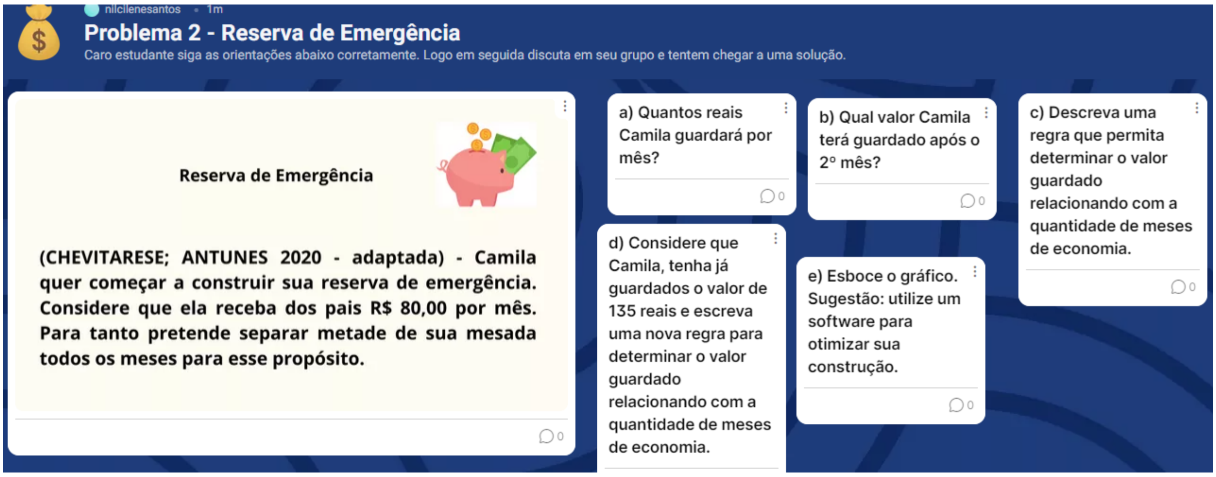
1.d) Cercadinho ou um quadro representando ovelhas e as pedras.

1.e) Esquema ou desenho, ligando cada ovelha a uma pedra.

Formalização: Domínio; contradomínio; imagem e diagrama de Venn.

4.2.2 Problema 2: Reserva de Emergência

Decisões pedagógicas: Antes da aula, disponibilizar no grupo de *WhatsApp* da turma o *link* do *Padlet* em que consta o problema e propor que os alunos façam a leitura.



Número de aulas: Duas aulas de 50 minutos cada – presencial e remota, via *WhatsApp* e *Padlet*.

Conteúdo: Função Polinomial do 1º grau.

Objetivos: Construir o conceito de função.

Conceitos relacionados: Equação, variável, grandezas diretamente e inversamente proporcionais e incógnita.

Habilidade envolvida: (EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

Habilidade a ser trabalhada: (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Respostas esperadas:

2.a) Observar as relações entre a quantidade recebida de mesada a cada mês.

2.b) Usar um pensamento multiplicativo: $40 \,.\, 2 \;=\; 80$ reais

2.c) Usar uma representação algébrica: $y = 40.x$

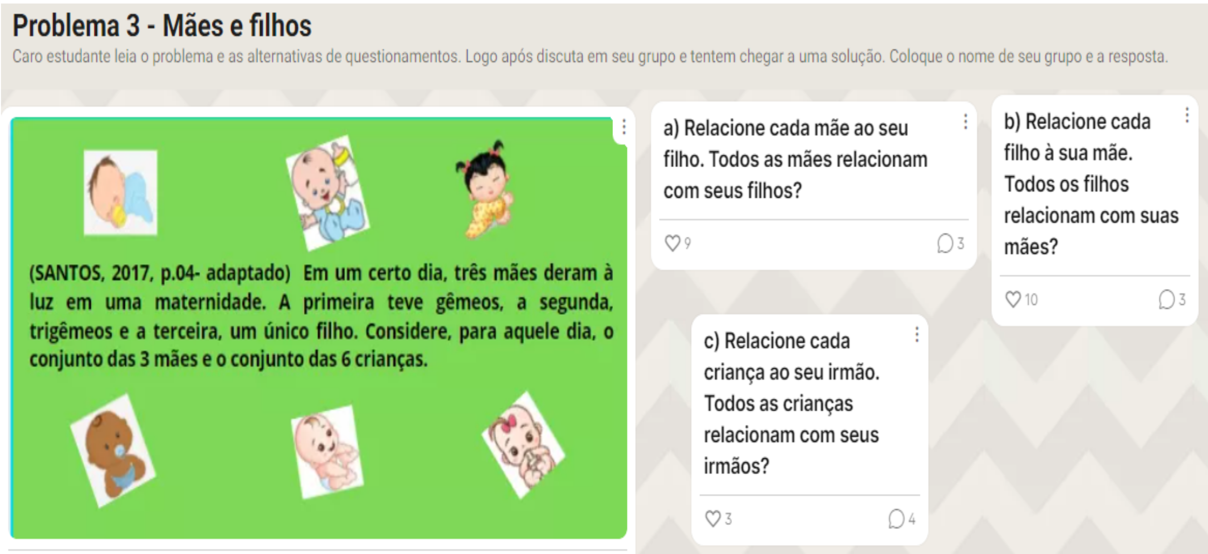
2.d) Utilizar a representação algébrica construída no *item c* acrescida do valor que já tenha guardado (135), $y = 40.x + 135$ (correspondência);

2.e) Construção manual, ou utilizando o Geogebra[19], do gráfico da função no plano cartesiano.

Formalização: Definição de função do primeiro grau; lei de formação da função e construção gráfica.

4.2.3 Problema 3: Mães e filhos

Decisões pedagógicas: Antes da aula, disponibilizar no grupo de *WhatsApp* da turma o *link* do *Padlet* em que consta o problema e propor que os alunos façam a leitura.

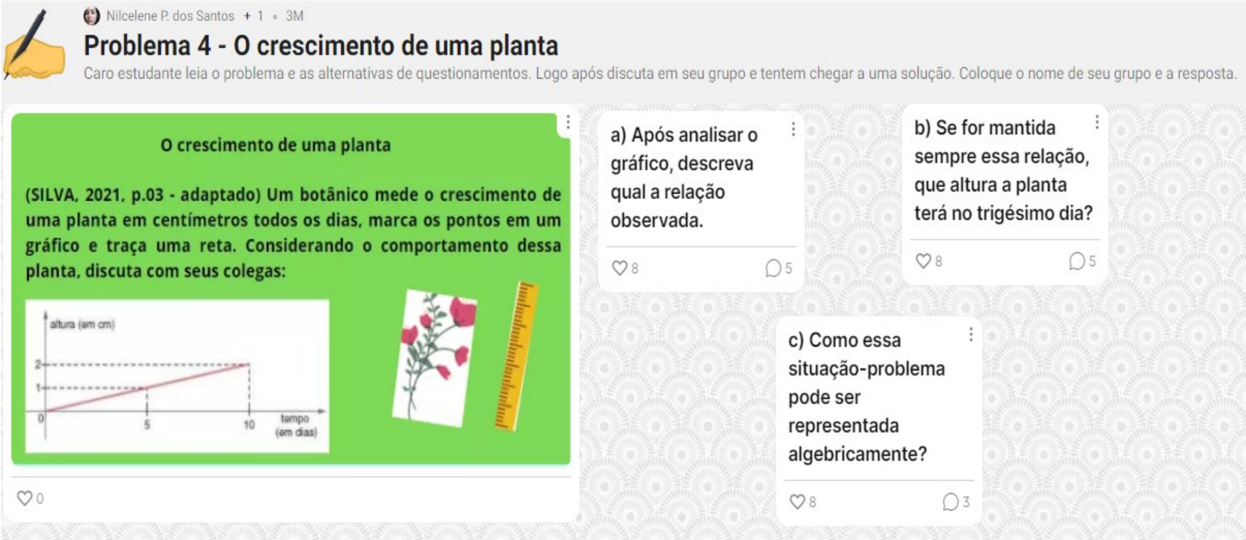


[19] Os alunos já conheciam o Geogebra e tinham o *app* baixado em seus celulares, devido a seu uso em atividades anteriores nas aulas de Matemática.

Número de aulas: Duas aulas de 50 minutos cada – presencial e remota, via *WhatsApp* e *Padlet*
Conteúdo: Função.
Objetivos: Diferenciar relações e funções.
Conceitos relacionados: Os elementos de uma função.
Habilidade envolvida: (EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).
Habilidade a ser trabalhada: (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
Respostas esperadas:
3.a) Por meio do uso do diagrama de Venn, relacionando mães e filhos, o aluno deve concluir que uma mãe se relaciona com mais de um filho.
3.b) Por meio do uso do diagrama de Venn, relacionando cada filho a sua mãe, o aluno deve concluir que mais de um filho se relaciona com uma mãe.
3.c) Por meio do uso do diagrama de Venn, relacionando crianças e irmãos, o aluno deve concluir que uma criança se relaciona com mais de um irmão.
Formalização: Função e Relação.

4.2.4 Problema 4: O crescimento de uma planta

Decisões pedagógicas: Antes da aula, disponibilizar no grupo de *WhatsApp* da turma o *link* do *Padlet* em que consta o problema e propor que os alunos façam a leitura.



Número de aulas: Duas aulas de 50 minutos cada - presencial e remota, via *WhatsApp* e *Padlet*

Conteúdo: Função Polinomial do 1º grau.

Objetivos: Identificar os elementos presentes no gráfico (domínio, contradomínio e imagem) de uma função, e os coeficientes angular e linear; analisar o crescimento de uma função.

Conceitos relacionados: Interpretação gráfica.

Habilidades envolvidas: (EF06MA31) Ler, interpretar e identificar, em tabelas e em diferentes tipos de gráficos, as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas); (EF07MA15) Utilizar e compreender a simbologia/linguagem algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas; (EF08MA07) Identificar e associar uma equação linear do 1.º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

Habilidade a ser trabalhada: (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Respostas esperadas:

4. a) Conforme passa tempo a planta fica mais alta.

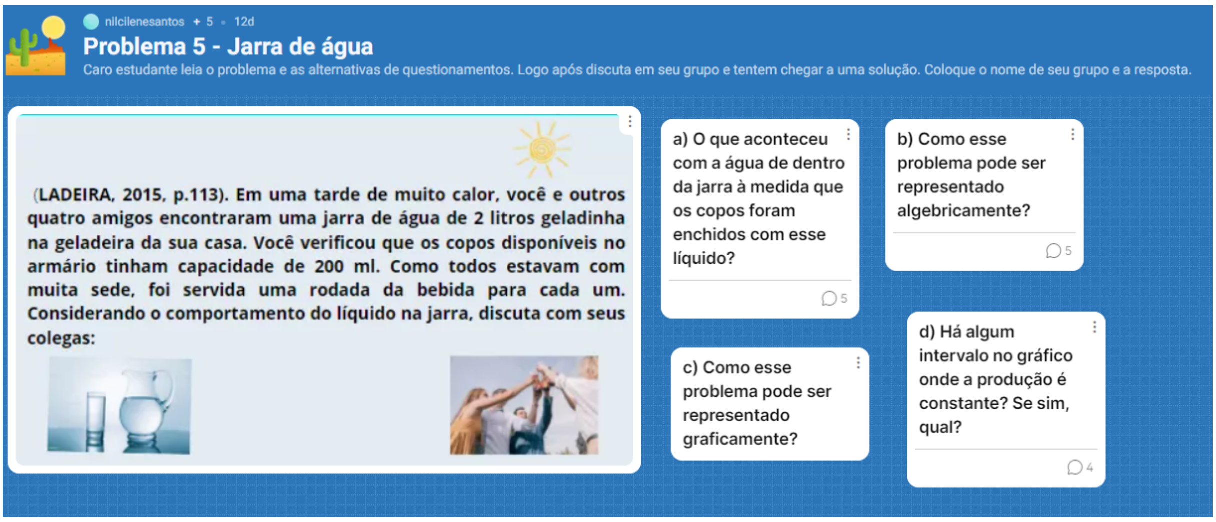
4. b) Por meio da análise do gráfico, o aluno pode concluir que a resposta é 6 cm.

4. c) O gráfico indica um crescimento de 1 cm após o quinto dia e de 2 cm, após o décimo dia. Dessa maneira, é possível concluir que a planta cresce 0,2 cm por dia. Então $y = 0,2.x$.

Formalização: Coeficiente angular; taxa de variação; Função Polinomial do 1º grau crescente.

4.2.5 Problema 5: Jarra de água

Decisões pedagógicas: Antes da aula, disponibilizar no grupo de *WhatsApp* da turma, o *link* do *Padlet* em que consta o problema e propor que os alunos façam a leitura.



Número de Aulas: Duas aulas de 50 minutos cada – presencial e remoto, via *WhatsApp* e *Padlet*

Conteúdo: Função Polinomial do 1º grau.

Objetivos: Identificar uma Função Polinomial decrescente por meio da associação de conteúdos matemáticos com situações cotidianas; identificar uma função constante.

Conceitos relacionados: Relação entre grandezas, unidades de medida, representação dessas medidas nos eixos ordenados.

Habilidades envolvidas: (EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em diferentes contextos, inclusive os oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.

Habilidades a ser trabalhada: (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Respostas esperadas:

5.a) O nível de água na jarra vai diminuindo à medida que os copos são enchidos com esse líquido.

5.b) $y = 200 - 2x$

5.c) Construção do gráfico manualmente.

Formalização: Função Polinomial do 1º grau decrescente e função constante.

4.3 PROCEDIMENTOS DE PRODUÇÃO DE DADOS

A aplicação da pesquisa ocorreu no segundo semestre do período letivo de 2021, devido à escola ter um calendário bimestral e o conteúdo de função (explorado na pesquisa) ser iniciado no terceiro bimestre. Para tanto, o convite foi feito em sala de aula e pelo grupo de *WhatsApp* da turma, visto que as aulas nesse período ocorreram de modo híbrido, ou seja, com alunos nos modos presencial e remoto, respeitando as orientações e restrições da Secretaria de Saúde. Foram entregues a eles o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), o termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) e o Termo de Consentimento para Utilização de Imagem, Som e Voz (TCUISV). Caso concordassem em participar da pesquisa, os alunos e seus responsáveis deveriam assinar os documentos e devolver uma cópia para a professora-pesquisadora.

Após a autorização da direção da escola e a concordância dos alunos e dos seus responsáveis, assinando os devidos termos, a coleta de dados foi iniciada. A pesquisa foi desenvolvida durante 10 aulas de Matemática, por meio do uso de cinco problemas geradores do conteúdo de função (apresentados na subseção 3.2) e do uso do *Padlet*. Na primeira aula, os alunos foram organizados em equipes de quatro a cinco alunos, de forma heterogênea, e foi explicada como seria a dinâmica das aulas.

Em meio ao cenário causado pela COVID-19, o ensino emergencial fez nascer uma nova realidade educacional – as aulas híbridas, com aulas remotas, que acontecem em tempo real, nas quais o professor e o aluno interagem - e aulas presenciais.

Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015, p. 52) definem o Ensino Híbrido como:

> […] um programa de educação formal no qual um aluno aprende por meio do ensino on-line, com algum elemento de controle do estudante sobre o tempo, o lugar, o modo e/ou o ritmo do estudo, e por meio do ensino presencial, na escola (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015, p. 52).

Destaca-se que as escolas entendem o Ensino Híbrido como uma junção dos ensinos presencial e remoto, já que não houve um programa de educação formal. Configura-se na combinação entre estudos no espaço físico das escolas e fora dela, utilizando como ferramenta, essencial e indispensável a esse processo, a tecnologia. Por meio do Parecer CNE/CP n. 11, de 7 de julho de 2020, as atividades pedagógicas presenciais foram autorizadas a retornarem de forma gradual, com as devidas medidas de segurança sanitária. Os retornos ocorreram com autorização dos responsáveis pelos alunos.

Em sala de aula híbrida, foi utilizada a MEAAMARP, adaptada diante dos protocolos sanitários de distanciamento no formato presencial. Os grupos optaram por estabelecer nomes fictícios: Primeiro grupo Class Experts com 05 integrantes, com 04 alunos no modo presencial e um aluno no modo remoto; segundo grupo Quarteto Fantástico com 05 alunos, todos participando presencialmente; terceiro grupo Matemágicas com 04 integrantes, inicialmente todos no formato presencial, mas ocorreu de 01 aluno participar remotamente na resolução do segundo problema, devido a um resfriado; quarto grupo JRJ com 03 integrantes, inicialmente todos de modo presencial no primeiro problema e, no segundo problema, com 01 aluno remotamente; e quinto grupo MTSD com 03 integrantes, 02 alunos no formato presencial e 01 no remoto. Vale dizer que esse último grupo, ao resolver o terceiro problema, 01 estava presencialmente e dois no formato remoto.

Após esse momento de definições de nomes dos grupos e dos formatos de participação, aconteceram outros combinados, tais como: criação de subgrupos no *WhatsApp* para que os alunos, que optaram por participar das aulas de forma remota, participassem das discussões e também para que não ocorresse a quebra no distanciamento entre as carteiras de 1,5 metros por conta da COVID-19; a fim de baixar o aplicativo *Padlet*; foi dado ao aluno um tempo de 10 minutos para resolver cada item[20]; solicitou-se que, preferencialmente, as discussões fossem escritas no grupo do *WhatsApp*.

Cada problema gerador foi previamente disponibilizado na plataforma *Padlet*, para leitura individual antes da aula. Cada participante realizou a leitura individual do problema e buscou algumas estratégias para resolvê-lo. Assim, foram feitas as discussões no *WhatsApp* (em grupos menores), a plenária, a busca do consenso e a formalização do conteúdo função foram feitas nos formatos presencial e via *online*, com alunos presentes no horário da aula por meio da plataforma de ensino utilizada pelo Colégio. Para apresentar a resolução do grupo, um representante fez o registro escrito no *Padlet.*

Para a coleta de dados, foram utilizados o registro escrito feito pelos participantes no *Padlet,* o caderno de campo da pesquisadora, bem como seus diálogos e expressões obtidos por meio das gravações de áudio e vídeo das aulas em que a Resolução de Problemas foi trabalhada.

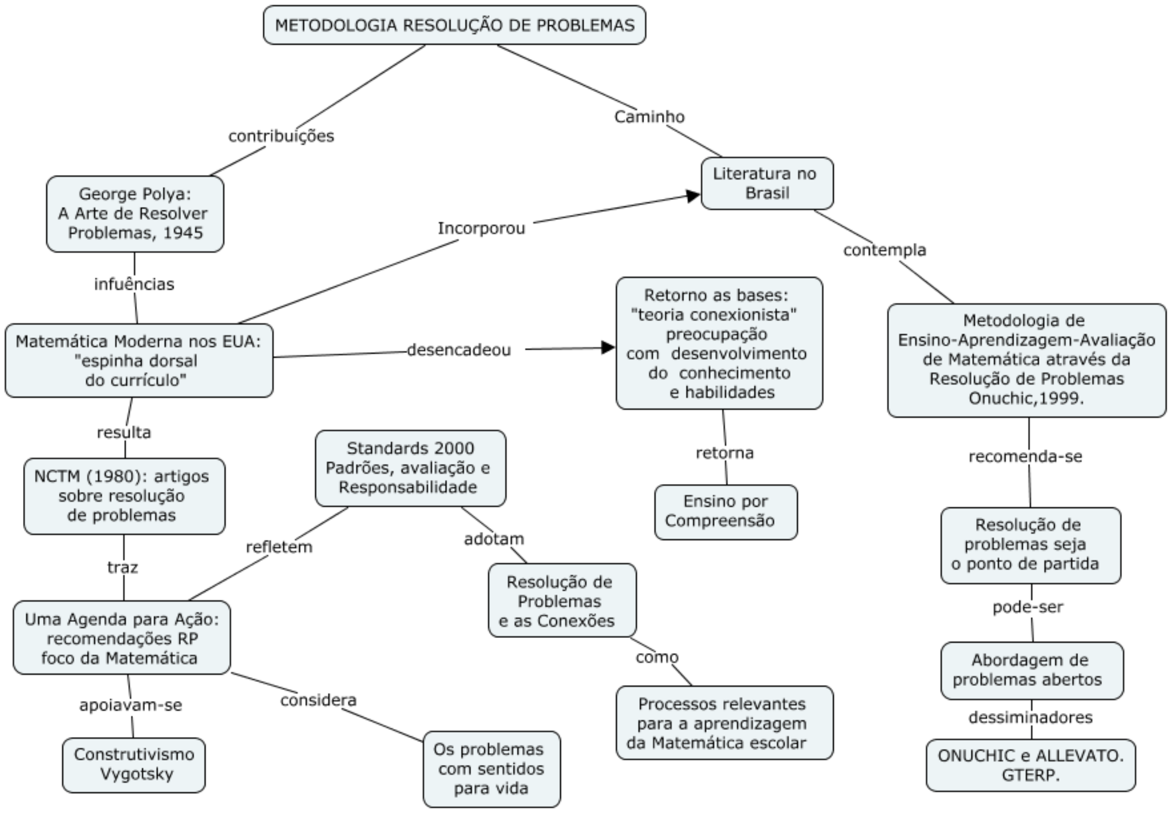
---

[20] O tempo considerado foi este para que fosse possível concluir a discussão do problema no tempo de 02 aulas (50 minutos cada), disponibilizando 10 minutos para a finalização da discussão de cada item do problema e início da discussão de um novo. Os alunos tinham acesso ao próximo item, porém a professora incentivou, acompanhou e questionou as resoluções dos alunos e, por isso, a turma deveria resolver os itens ou problemas após a autorização da docente.

4.3.1 Planejamento das aulas através da Resolução de Problemas

Para o planejamento das aulas, considerou-se o referencial teórico adotado e foi criado, inicialmente, um cenário da Resolução de Problemas. O mapa conceitual de autoria própria (Figura 14) auxiliou a pesquisadora a identificar sua abordagem de ensino-aprendizagem a ser adotada em sala de aula. Esse mapa e suas ligações fazem correspondências com a trajetória da Resolução de Problemas, exposta na seção 2.1.

Figura 14 – Cenário da Resolução de Problemas



Fonte: Autoria própria (2021).

Para a construção da sequência de aulas sobre funções, considerou-se o planejamento proposto por Van de Walle (2009). O autor apresenta três ações necessárias ao planejar uma aula com Resolução de Problemas: as decisões de conteúdos e tarefas, as decisões pedagógicas e a elaboração do plano completo. O Quadro 5 traz uma[21] das sequências construídas pela professora-pesquisadora sobre problema Reserva de Emergência.

[21] As demais sequências constam no Produto Educacional.

Quadro 5 – Exemplo do planejamento de uma das aulas

<table>
<tr><th>Decisões de conteúdos e tarefas</th><th>Decisões pedagógicas</th><th>Plano completo</th></tr>
<tr><td>1.Conteúdo: Função</td><td>5. Trabalho em grupo;
Leitura individual no Padlet e inserção da resposta do grupo para o problema gerador.</td><td rowspan="4">9. Objetivos da aula:
- Construir o conceito de função.
(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
Por meio do problema gerador, espera-se que os alunos obtenham uma expressão algébrica ou façam uma tabela e/ou gráfico.
<u>Materiais:</u> celular, computador, acesso ao Padlet e material do aluno.
<u>Procedimentos:</u> Leitura no Padlet pensar sobre problema individualmente e em grupo - resolver o problema e apresentá-lo à turma, participar da plenária e da busca do consenso;
Formalização do conteúdo envolvido no problema pelo professor.
Feedback da resposta do grupo apresentada no Padlet e da participação em aula.</td></tr>
<tr><td>2. Uso do Padlet e formação de grupo.</td><td>6. Antes da aula fornecer orientações sobre novo formato de aula: propor que os alunos façam a leitura dos problemas que estão no Padlet. Os alunos irão fazer a leitura individualmente do problema.</td></tr>
<tr><td>3. Problema gerador adaptado sobre “Reserva de Emergência”, disponível no material do aluno. (CHEVITARESE; ANTUNES, 2021, p. 349).</td><td>7. Durante a aula, deve-se fazer a leitura em grupo e a resolução do problema.</td></tr>
<tr><td>4. As possíveis abordagens dos alunos para encontrar a solução poderão ser:
- Observar as relações entre a quantidade recebida de mesada a cada mês acrescida do valor que já tenha guardado (correspondência e covariação);
- Usar o pensamento multiplicativo;
- Elaborar uma tabela;
- Escrever uma expressão algébrica.
- Fazer esquemas ou gráfico.</td><td>8. Ainda na aula, um representante do grupo escreverá a resposta na lousa, será feita a busca do consenso e ocorrerá a formalização do conteúdo.</td></tr>
</table>

Fonte: Autoria própria (2022).

Além desse planejamento das sequências de aula, houve a elaboração de um cronograma (Quadro 6), estabelecendo os 05 dias letivos, de 02 aulas de 50 minutos cada, e o problema a ser proposto em cada data.

Quadro 6 – Cronograma da implementação dos problemas

Data	Duração (50 min cada aula)	Problema trabalhado
27 de julho de 2021	2	Pastorio de ovelhas.
28 de julho de 2021	2	Reserva de emergência.
03 de agosto de 2021	2	Mães e filhos.
04 de agosto de 2021	2	O crescimento de uma planta.
10 de agosto de 2021	2	Jarra de água.

Fonte: Autoria própria (2022).

Concomitantemente ao planejamento das aulas, também houve a construção e configuração do *Padlet*. A professora-pesquisadora inseriu os problemas nesse ambiente virtual que os alunos fizeram uso durante as aulas.

Este recurso possibilita aos usuários curtirem, comentarem e avaliarem as postagens de materiais publicados no mural, além de compartilhar materiais com os demais usuários ou grupos, para visualização ou edição do mesmo. O *Padlet* configura-se, assim, como ferramenta bastante funcional nas práticas remota e presencial, em que o professor assume o papel de mediador e facilitador, e o aluno se torna o protagonista na construção do conhecimento incutido em um trabalho colaborativo.

4.4 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS

Para a construção dos eixos de análise inspirou-se nas etapas da análise de conteúdo de Bardin (1977). Primeiramente, foi realizada a descrição de cada grupo, considerando as transcrições das conversas nos grupos de *WhatsApp* e em sala de aula presencial, bem como as resoluções dos problemas apresentadas no *Padlet.* Em seguida, em triangulação com o referencial teórico, foram estabelecidos os seguintes eixos de análise:

(1) A construção da ideia de relação;

(2) O pensamento covariacional;

(3) A passagem da linguagem corrente para a linguagem algébrica (lei de formação da função);

(4) As formas de representação de uma função;

(5) O uso e a ressignificação de conhecimentos matemáticos prévios.

No eixo *a construção da ideia de relação* foram identificados resoluções, registros e diálogos de cada um dos cinco grupos/alunos. Esse eixo contempla aspectos que mostram a compreensão por parte do aluno da relação entre os elementos dos conjuntos, como uma associação entre um elemento de um conjunto A com um elemento do conjunto B.

O segundo eixo *o pensamento covariacional* evidencia os registros e diálogos revelados pelos cinco grupos/alunos, identificando as noções intuitivas e a construção do conceito de função por meio da ideia de variação entre grandezas. Nesse sentido, os alunos mostram o uso do pensamento covariacional.

No terceiro eixo referente *à passagem da linguagem corrente para a linguagem algébrica (lei de formação da função)*, são trazidos os registros dos diálogos que mostram a explicação das estratégias utilizadas pelos cinco grupos/alunos para escrever o problema em linguagem algébrica, ao fazer uso de letras como variáveis ou para generalizar algo.

No quarto eixo, *as formas de representação de uma função* são evidenciadas as várias representações usadas pelos alunos para uma função. Nas respostas e conversas dos participantes e nos registros das resoluções dos problemas, são observadas representações de diversas naturezas como algébrica, gráfica ou o uso da Língua Materna.

Por fim, no último eixo *o uso e a ressignificação de conhecimentos matemáticos prévios*, são apresentados diálogos ou resoluções dos alunos/equipes que trazem conhecimentos prévios utilizados na resolução dos problemas geradores. O uso e a ressignificação desses conhecimentos são considerados também nesse eixo.

4.5 DELINEAMENTO DO PRODUTO EDUCACIONAL

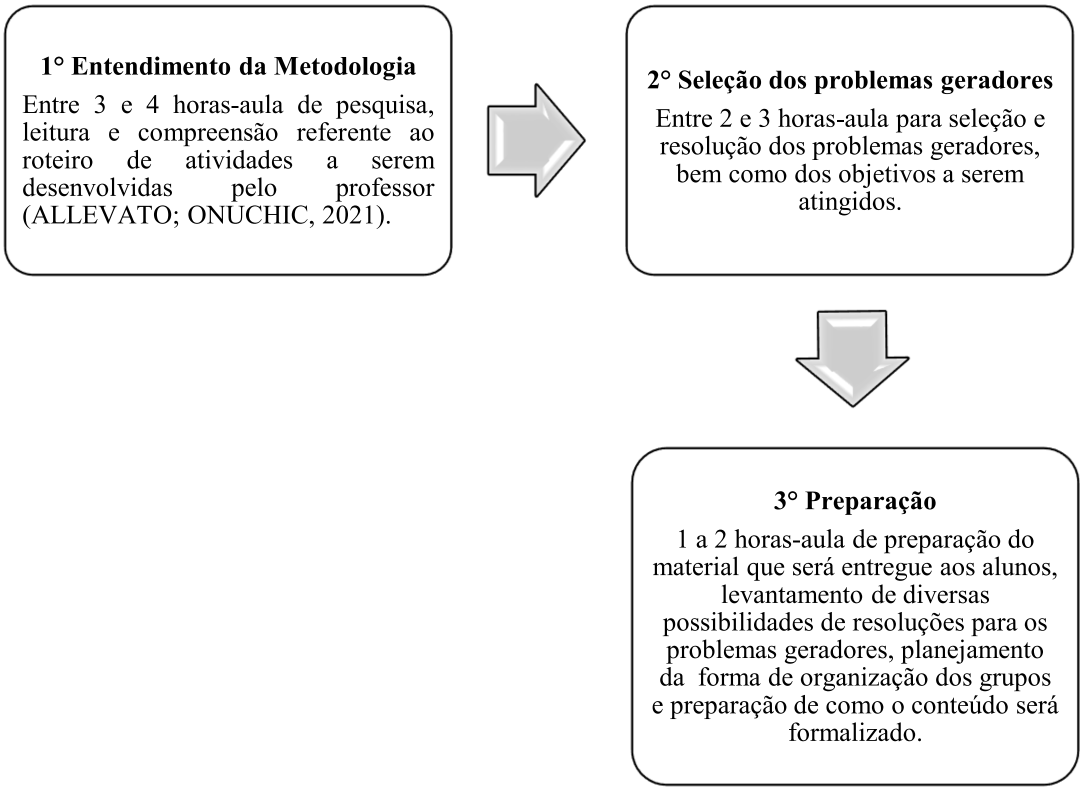
Para além da construção ou da seleção de problemas geradores para implementação nas aulas, seguindo os embasamentos teóricos adotados nesta pesquisa aliados às habilidades sugeridas pela BNCC (BRASIL, 2018), propõe-se a apresentação de um material que auxilie a prática docente do Ensino Fundamental e contribuições para o ensino de função. Esse material se configura como o Produto Educacional intitulado "*Padlet*: Uma possibilidade para a construção do conceito de função por meio da Resolução de Problemas". Nele, são disponibilizados os problemas geradores, bem como orientações para uso do *Padlet* e os referenciais sobre a Resolução de Problemas utilizados na pesquisa para professores.

O material se justifica, primeiro, por servir como: "um caminho para ensinar Matemática e não apenas para ensinar a resolver problemas" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009, p. 8). Segundo, a abordagem busca incentivar um trabalho autônomo e colaborativo por parte do aluno e a construção de conhecimento que faça sentido a ele.

Para tanto, trabalhar com a Resolução de Problemas requer tempo e pesquisa por parte do professor, que precisa preparar ou escolher problemas apropriados ao conteúdo e ao conceito que pretende construir. Ele também deixa de ser o protagonista em sala de aula, como ocorre em aulas tradicionais, passando para os alunos a responsabilidade pela aprendizagem (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Com isso, o tempo de preparação das aulas fazendo uso da MEAAMARP, em um primeiro momento, pode ser maior. Ao longo do tempo e com a prática, as horas de trabalho tendem a diminuir uma vez que o professor vai, aos poucos, se adaptando e colecionando problemas geradores que podem ser utilizados, de acordo com seus objetivos, em diferentes momentos e anos escolares. Na Figura 15, apresenta-se uma estimativa do tempo[22] de preparação das atividades de cada encontro (em hora-aula) para uso da MEAAMARP. Essa estimativa foi baseada na experiência da professora-pesquisadora para fazer seu planejamento e a seleção dos problemas geradores, utilizando como fontes de pesquisa o material didático adotado pelo colégio e sites da internet.

Figura 15 – Estimativa de tempo de preparação para a sequência de aulas através da Resolução de Problemas



Fonte: Autoria própria (2022).

Ressalta-se que a professora-pesquisadora não havia trabalhado anteriormente essa Metodologia com seus alunos. Dentro desse tempo citado na Figura 15, foram selecionados e adaptados problemas geradores utilizados para cada um dos encontros. Assim, como foram realizados 5 encontros, a estimativa de tempo total investido pela professora-pesquisadora foi de 9 horas-aula para preparar suas dez aulas de Matemática, utilizando 5 problemas.

---

[22] Essa é uma estimativa de tempo considerada para uma primeira aproximação com a temática. Um aprofundamento exigirá mais envolvimento e tempo de professores que forem buscar problemas geradores em diferentes fontes ou adaptá-los.

Os problemas selecionados integram o Produto Educacional. Esses problemas foram resolvidos pelos participantes, validados e, em alguns casos, sofreram pequenos ajustes, a fim de melhorar a compreensão do enunciado ou a ordem do que foi solicitado. Uma das alterações foi na ordem dos problemas – com a indicação de que o problema “Mães e filhos” seja trabalhado antes do problema “Reserva de Emergência” com o objetivo de, primeiramente, diferenciar relações e funções.

Vale destacar que, como o Produto Educacional se organiza pela BNCC (BRASIL, 2018), ele pode ser utilizado por professores de Matemática no Brasil, tendo uma abrangência nacional, bem como ser utilizado com outros propósitos no Ensino Médio, tais como a exploração das propriedades da função. Softwares matemáticos também podem ser utilizados, caso seja um dos objetivos da aula, para analisar o comportamento de uma função ao considerar valores distintos para coeficiente angular ou fazer alguma restrição no domínio. Antes do 9º ano não é recomendado o uso deste Produto Educacional, pois a BNCC (BRASIL, 2018) recomenda a exploração do conteúdo de função a partir deste ano. No entanto, caso o professor queira trabalhar problemas relacionados a grandezas e medidas, ou conteúdos anteriores ao 9º ano, o Produto Educacional traz problemas com esse foco.

No que se refere aos aspectos que poderiam ser ampliados, o Produto cita, o uso de softwares gráficos e relações com aspectos sociais, por exemplo. Isso exigiria o uso de uma quantidade maior de aulas, bem como a redução de itens do problema para otimizar o tempo e as discussões, focando no objetivo do professor.

Ressalta-se que a implementação dos problemas tem potencial de replicabilidade, considerando a possibilidade de mudança de alguns pontos. Um deles é a preocupação com o tempo (hora-aula) para a aplicação e a resolução de cada problema, o que limita ou interrompe as discussões. Outro, é uso de uma quantidade menor de itens em cada problema, pois isso poderia otimizar o tempo. Reitera-se que o foco do referido material é inspirar os professores a ensinar Matemática através da Resolução de Problemas e não apenas ensinar a resolver problemas.

5 DESCRIÇÃO DOS DADOS

Mas, nós não podemos simplesmente pregar um grande cartaz escrito PENSE e esperar que as crianças reflitam sobre o novo pensamento. O desafio é conseguir que elas se empenhem mentalmente (VAN DE WALLE, 2009, p. 49).

Ao longo desta seção são descritas e analisadas as resoluções e discussões dos cinco problemas geradores[23] apresentados pelos alunos do 9° ano, participantes da pesquisa. Esses problemas também compõem o Produto Educacional: "*Padlet*: Uma possibilidade para a construção do conceito de Função por meio da Resolução de Problemas".

Com base nos referenciais teóricos abordados e nas opções metodológicas de análise adotadas, buscou-se responder à seguinte pergunta de pesquisa: "*Como ocorre a construção do conceito de função, no 9º ano do Ensino Fundamental, através da Resolução de Problemas no ensino híbrido com o auxílio do Padlet?"*

Para a descrição dos problemas, consideram-se o roteiro da MEAAMARP e o ensino de Funções como norteadores. Para a análise dos dados, são considerados os cinco eixos temáticos: a construção da ideia de relação; o pensamento covariacional; a passagem da linguagem corrente para a linguagem algébrica (lei de formação da função); as formas de representação de uma função e o uso e a ressignificação de conhecimentos matemáticos prévios.

Por meio da descrição e análise dos dados, buscou-se evidenciar a construção do conceito de função, bem como foram tecidas considerações sobre o envolvimento da turma presencial e remota nos grupos do aplicativo de mensagem *WhatsApp* e na ferramenta *Padlet*.

[23] Considerou-se, ao longo da descrição e análise de dados, a ordem em que os problemas foram aplicados. A inversão do Problema 2 com o Problema 3 foi sugerida apenas no Produto Educacional.

5.1 PROBLEMA 1: PASTORIO DE OVELHAS

O pastorio de ovelhas é uma atividade humana muito antiga. Diferentemente do que ocorre hoje em dia, houve um tempo em que os pastos não eram cercados, nem existia a marcação eletrônica de animais. Ainda assim, tal como hoje, não era desejável perdê-los. Uma estratégia utilizada pelos antigos pastores para verificar se todas as ovelhas haviam voltado após pastarem era, no momento de soltura dos animais, associar cada ovelha a uma pedra. Esta, por sua vez, era deixada em um buraco ou em um monte. Ao reunir as ovelhas novamente, para cada uma que retornasse, uma pedra era retirada do buraco ou do monte.

a) Explique qual era associação realizada pelo pastor.
b) A qual conjunto numérico pertence essa situação? Justifique sua resposta.
c) O que significaria o fato de ter sobrado uma pedra após o rebanho ser reunido?
d) Faça um esquema ou desenho para relacionar a quantidade de ovelhas com as pedras.
e) Como você relacionaria a quantidade de ovelhas com as pedras?

(CHEVITARESE; ANTUNES, 2020, p. 322, adaptado)

Um dia antes da sequência de duas aulas, foi postado o problema do Pastorio das ovelhas para leitura individual. Durante a aula, os alunos presentes, e os conectados já se mostravam motivados para as discussões por meio de mensagens no *WhatsApp*, pois já falavam sobre o problema, o que demonstrava que a leitura individual havia sido feita.

Após realizarem a leitura em conjunto, apenas no grupo Matemágicas surgiu uma dúvida em relação a uma palavra do problema:

> *Aluna 1- Pessoal, o que significa associação?*
> *Aluna 2 -Deve ser o trabalho do pastor!*
> *Aluna 3- Galera acho que não é um trabalho!!*
> *- é sim!! (As demais alunas digitaram)*

Essa dúvida revela um problema secundário, que foi apresentado por uma das integrantes do grupo e resolvido pelas demais. Após essa interação, o grupo deu início à resolução do problema.

Nesse momento, a professora-pesquisadora acompanhou as discussões via *WhatsApp, presencialmente* e aguardou para incentivar ou até mesmo fazer outros questionamentos. Após as discussões no grupo, ela fez uma intervenção: *"Leiam de novo o problema com calma. O que o dicionário fala sobre a definição de associação?"* A Aluna 2 exclamou: *"Não sabia que podíamos pesquisar!"*

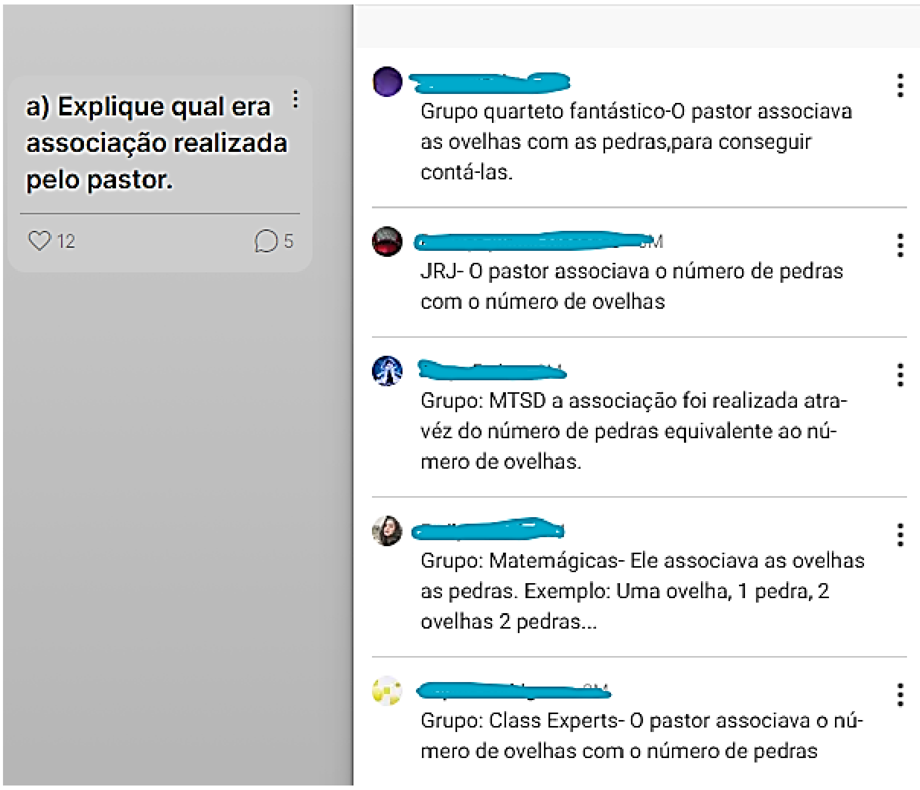
Então, a professora-pesquisadora esclareceu que podia fazer parte do combinado, ou seja, toda palavra desconhecida poderia ser consultada no dicionário. Todos concordaram, presencial ou remotamente, em pesquisar as palavras que não compreendessem.

Logo a professora-pesquisadora chamou a atenção para que chegassem à solução, pois o tempo estava no limite do acordado (10 minutos por item do problema).

Após as referidas discussões, ainda no grupo Matemágicas, a Aluna 2 expôs sua interpretação sobre o que seria "associação": *"Pessoal, associação é o trabalho do pastor de ter ovelhas e pedras!"* Todos concordaram, mas o que a aluna quis dizer é que associação é a relação entre pedras e ovelhas.

Os grupos MTS, Quarteto Fantástico, JRJ e Class Experts também chegaram à referida relação. A professora-pesquisadora, enquanto mediadora, solicitou que fizessem o registro na lousa, ou seja, no *Padlet*, não se preocupando com certo ou errado. Assim, as resoluções foram postadas, conforme Figura 16, pelos grupos no *Padlet*.

Figura 16 – Registro das resoluções do Problema 1a



Fonte: Dados da pesquisa.

Após compartilhar com a turma as resoluções do grupo, a professora-pesquisadora solicitou que um membro da equipe apresentasse a resposta do seu grupo e justificasse.

Os grupos discutiram sobre as respostas e pontuaram que todos tinham pensado na mesma direção. Assim, para eles, essa realmente seria a solução para atividade e *"[...] o problema é bem fácil de resolver"* (aluna 4, grupo Quarteto Fantástico).

A professora-pesquisadora solicitou que elegessem, dentre as postagens, qual responde ao problema. Com isso, os grupos visualizaram e elegeram a resposta da *equipe Quarteto Fantástico como a mais "direta", e a professora-pesquisadora concordou.*

*Após a discussão do primeiro item, os alunos foram orie*ntados pela professora-pesquisadora para pensarem sobre o item "b" do problema. Ele gerou mais debates e os alunos precisaram de mais tempo do que foi estipulado no começo. Foram utilizados 12 minutos para a resolução desse item.

Os alunos demonstraram a necessidade de retomar a leitura do problema. Analisando o debate do grupo Quarteto Fantástico, nota-se também a utilização dos conhecimentos prévios na resolução do problema.

> *Aluna 3: Meninas, será grupo dos Racionais?*
> *Aluna 1: Acho que não, porque nesse conjunto tem números não inteiros!!*
> *Aluna 4: Vamos ler de novo!!*

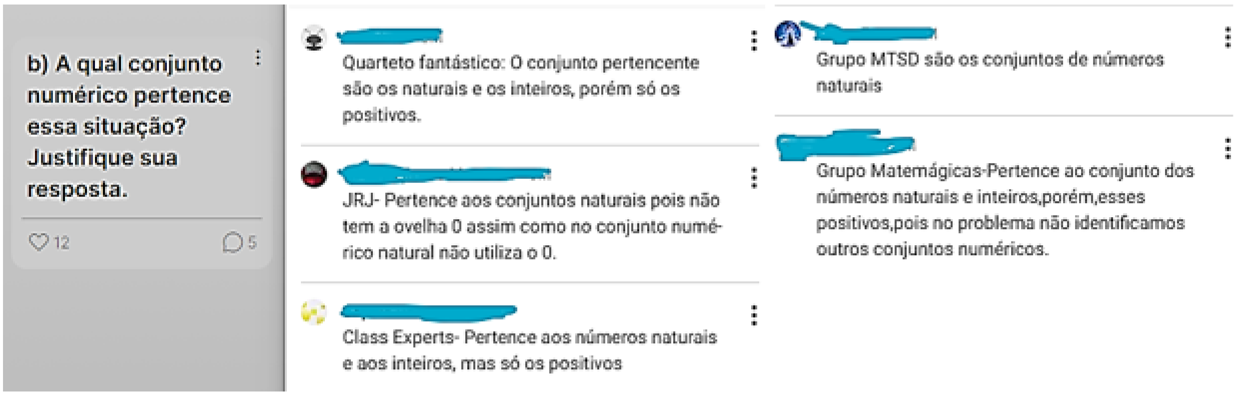
A professora-pesquisadora, observando as trocas de ideias nos grupos, resolveu incentivar os alunos que estavam presentes e também os que estavam de modo remoto: *"Pensem no contexto do problema!"* Desse modo, houve uma rápida discussão entre os alunos na sala de aula: *"Acho que eles não conheciam todos os números e conjuntos na época de pastorio!"* (Aluna 3, grupo Quarteto Fantástico). O aluno 3 do grupo JRJ salienta: *"Acho que zero também não entra neste contexto!"* A professora-pesquisadora e demais alunos perguntaram por que esse número não entra e o aluno justificou: *Porque zero é nada de ovelha, o pastor para ser pastor teria que ter ovelha!"* Os demais grupos tinham digitados suas conclusões, porém concordaram com os pensamentos do colega.

Após várias postagens de discussões e até mesmo conversa presencial, os grupos chegaram à conclusão. Houve momentos de debates entre os grupos sobre a solução. A aluna 1 do grupo Quarteto Fantástico expôs: *"Então, é conjunto dos Inteiros!"* e o Aluno 3, do grupo JRJ refutou: *"Não. Porque seria uma resposta só!"*

Após os colegas questionarem a ele o porquê desse raciocínio, ele justifica que os inteiros compreendem números positivos e negativos, bem como o zero.

Após esses debates terem envolvido todos os alunos presentes na aula, a professora-pesquisadora pede que façam os debates em seus grupos de *WhatsApp* e não com os demais alunos da sala. Essa discussão entre os grupos aconteceria durante a plenária, após todos terem registrado no *Padlet* as suas conclusões. A Figura 17 apresenta o consenso de cada grupo.

Figura 17- Registro das resoluções do Problema 1b



Fonte: Dados da pesquisa.

Após cada grupo ler sua resolução, eles justificaram o porquê e também visualizaram seus erros, antes mesmo de a professora-pesquisadora solicitar que entrassem em um consenso de qual seria a resposta que atenderia o enunciado do problema.

O grupo MTSD questionou o grupo JRJ sobre se o conjunto dos Números Naturais não contém o zero. Os alunos lembraram que estudaram em anos anteriores e no material escolar contemplava o zero no conjunto dos Naturais. E com isso o grupo identificou seu erro.

A partir disso, chegaram ao consenso de que a resposta do grupo Matemáticas seria a melhor solução, porque, segundo os grupos, o referido grupo descrevia os dois conjuntos: Naturais e Inteiros, e citava que para os inteiros seriam somente os positivos.

Na fala dos alunos, nota-se que eles relembram conceitos estudados e discutem o item “b” com base no conhecimento prévio sobre conjuntos numéricos. Após o consenso da resposta do item “b”, os alunos foram orientados pela professora-pesquisadora para pensarem sobre o item “c” do problema.

Após a leitura, os alunos debateram, demonstrando que tinham compreendido o que o item pedia. Em todos os grupos, as postagens eram referentes ao porquê da sobra da pedra durante a contagem ao retornarem as ovelhas.

> *Aluno 4 (Grupo Class Experts): “Se sobra pedras, é porque falta ovelhas!”*
> *Aluna 3(Grupo Matemágicas): “Se sobra pedra é porque faltou ovelha, o que futuramente será representado por -1”.*

E os demais membros concordaram.

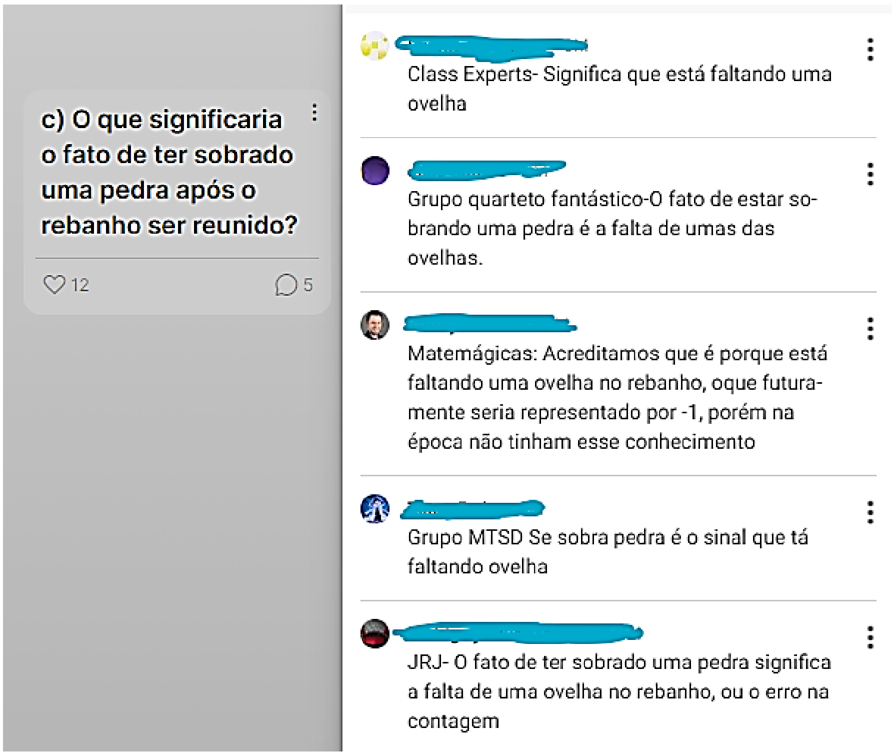
O aluno 1 (Grupo JRJ) perguntou à professora-pesquisadora se podia usar *emoji*[24] para justificar a resposta. A professora-pesquisadora respondeu com o seguinte questionamento: *"O que o seu grupo acha disso?"*, ou seja, a maneira como o grupo justifica a resposta é um consenso entre seus membros e a professora-pesquisadora não iria interferir. A professora-pesquisadora reforçou que isso faz parte do trabalho colaborativo[25].

Os debates do grupo JRJ foram em torno de que poderia ser um erro do pastor ao fazer a relação de pedras e ovelhas.

Os grupos Class Experts, Matemágicas, MTSD, Quarteto Fantástico, bem como JRJ chegaram à mesma conclusão, ao aferir que se sobra pedra é porque faltou uma ovelha, mas não justificaram o porquê dessa falta, conforme a professora-pesquisadora tinha pensado como possível resposta.

A Figura 18 traz o painel das resoluções dos grupos. Vale ressaltar que cada item foi digitado por um dos integrantes de cada grupo.

Figura 18 – Registro das resoluções do Problema 1c



Fonte: Dados da pesquisa.

---

[24] *Emoji* é um pictograma ou ideograma, ou seja, uma imagem que transmite a ideia de uma palavra ou frase completa. O termo *emoji* é de origem japonesa, composto pela junção dos elementos ***e*** (imagem) e *moji* (letra).
[25] Discussão em grupo das ideias do problema, que deve ser de concordância e envolvimento de todos os integrantes.

A pedido da professora-pesquisadora, um representante apresentou e defendeu a ideia do grupo e, logo após, a turma entrou em um consenso de que a resposta do grupo Matemágicas seria a mais organizada. Porém, o grupo usou uma linguagem informal e não a que a professora-pesquisadora esperava, em torno de relacionar com as grandezas envolvidas no problema. Vale ressaltar que, devido ao cenário das aulas, bem como o tempo estipulado, a professora-pesquisadora não conseguiu fazer múltiplos questionamentos para que os alunos chegassem à conclusão esperada.

Como nos itens anteriores, os alunos foram orientados pela pesquisadora para trabalharem sobre o item “d” do problema 1. Neste item, os alunos utilizaram desenhos (ou *emoji*) para apresentar suas respostas.

Após a leitura, os alunos debateram, demonstrando que tinham compreendido o que o item solicitava. A professora-pesquisadora respondeu perguntas das equipes de forma geral, ou até mesmo na própria equipe. Todas, nesse momento, foram sobre “se podia usar qualquer desenho” e a professora-pesquisadora incentivou que “os membros da equipe é quem decidiriam”.

Diante da pergunta do aluno 1 do grupo JRJ sobre o uso de *emojis* no item “c”, os demais grupos discutiram no *WhatsApp* qual *emoji* seria utilizado, se alguém iria desenhar ou se iriam colocar a resposta por escrito também. Após decidirem a maneira de representar o problema, os alunos o resolveram e um representante escreveu a resolução no *Padlet,* conforme Figura 19.

Figura 19 – Registro das resoluções do Problema 1d

Fonte: Dados da pesquisa.

Cada membro escolhido pelo grupo fez a apresentação da resolução relacionando pedras a ovelhas. O grupo JRJ justificou que o seu desenho continha o mesmo número de ovelhas expostas na figura ilustrativa do problema e, para eles, teria que ser iguais. Os demais grupos cogitaram sobre ser imagens figurativas e a professora-pesquisadora concordou. Houve perguntas no sentido de que se o pastor tivesse muitas ovelhas, ele teria que ter um monte de pedras e não apenas carregar em um saco.

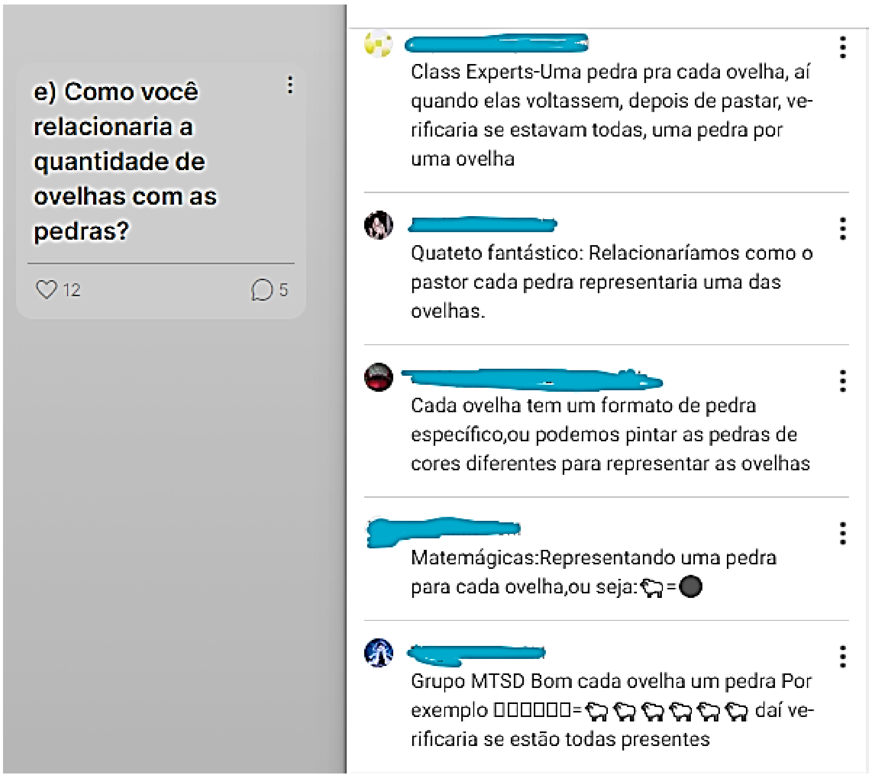
Como conclusões para o item “d”, os grupos Quarteto Fantástico, MTSD e JRJ fizeram representações da resposta, por *emoji*, e por meio da escrita (linguagem informal). Após a professora-pesquisadora e os alunos analisarem as respostas na lousa, chegaram ao consenso de que a resposta da equipe Class Experts seria adequada ao problema. Ou seja, a relação seria entre ovelhas e pedras, e as últimas seriam ferramentas em um dos métodos de contagem da época.

Na sequência, os grupos foram orientados a fazer a leitura em conjunto do item “e” que teve desenvolvimento e compreensão rápida pelos alunos.

A dúvida, para esse item, foi apresentada pelo grupo MTS, a professora-pesquisadora os auxiliou: *“Professora, essa é igual a “d”?” (Aluno 1).* Ela, então, pediu para que os alunos fizessem novamente a leitura para que identificassem a diferença entre os enunciados. Então, o Aluno 2 (Grupo MTS) comentou: *“A diferença é que no item “d” já pedia um desenho ou esquema, e o item “e” está aberto”.*

Todos os grupos descreveram sobre a relação entre ovelhas e pedras, conforme Figura 20, porém não no sentido que a professora-pesquisadora esperava como resposta. Contudo, esperava-se que durante a plenária isso surgisse. Cada grupo, representado por seu respectivo membro, escreveu suas respostas no *Padlet.*

Figura 20 – Registro das resoluções do Problema 1e



Fonte: Dados da pesquisa.

Cada membro apresentou e defendeu a resposta do grupo, de modo informal. Os grupos Matemágicas e MTSD utilizaram *emoji* para fazer a relação. Os grupos Class Experts e o Quarteto Fantástico não fizeram esquemas de relação, só a descreveram. O grupo JRJ cogitou pintar as pedras, mas os demais acharam improvável essa atitude para um pastor da época.

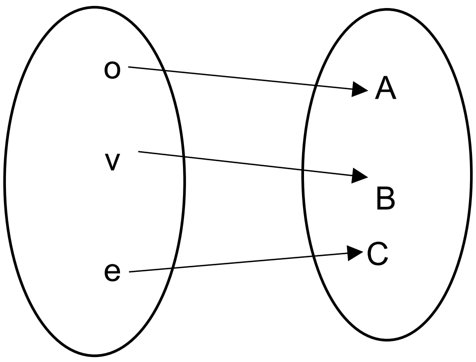
Os grupos entraram no consenso de que todas as respostas se pareciam e debateram sobre ter muitas ovelhas e, com isso, a necessidade de se utilizar muitas pedras para relacionar.

Após esse debate, a professora-pesquisadora perguntou aos alunos o que acharam da atividade, e todos responderam ser fácil e legal. O problema, na verdade, foi condizente aos problemas prévios dos alunos e foi feita uma análise das estratégias corretas apresentadas pelos grupos, pois todos acertaram. Nesse sentido, Vieira e Allevato (2016) não recomendam propor aos alunos um problema cuja resolução seja complexa, mas aquele que o aluno resolva a partir da mobilização dos conhecimentos que já possuem.

A professora-pesquisadora comentou que existe um conteúdo matemático envolvido nos tópicos trabalhados no problema, iniciando a formalização. Vale destacar que o problema escolhido também buscou motivar os alunos a pensar e, de certa forma, levá-los a perceber que são capazes de fazer Matemática.

Na formalização do conteúdo, foi retomado que o problema aborda associações entre elementos de dois conjuntos (quantidade de ovelhas e quantidade de pedras). Os alunos recordaram que o conjunto numérico envolvido é o dos Números Inteiros Positivos, ou seja, $\mathbb{Z}_*^+ = \{1,2,3,4 \ldots\}$, os primeiros números usados pela humanidade para contagem. Foi nomeado pela professora-pesquisadora de *domínio* a quantidade de ovelhas, e, de *contradomínio, a* quantidade de pedras. Uma representação possível seria construir um diagrama de Venn, conforme Figura 21, relacionando o *domínio* com os animais, as pedras com o *contradomínio* e com a imagem. O problema envolvia grandezas diretamente proporcionais, pois a quantidade de animais está diretamente relacionada à quantidade de pedras, e se o número de animais diminui, a quantidade de pedras também diminui.

Figura 21 – Diagrama de Venn representando associações entre elementos de dois conjuntos (quantidade de ovelhas e quantidade de pedras)



Fonte: Autoria própria (2022).

A professora-pesquisadora enfatizou que função é “algo pode ser calculado, analisado e pensado em função de outra” e existe uma relação de dependência entre as grandezas. Sendo assim, de início, a partir das discussões geradas neste problema, função foi definida “[...]como uma regra que associa exclusivamente os elementos de um conjunto com elementos de outro conjunto”. (VAN DE WALLE, 2009 p. 303).

Logo após essas considerações, houve a proposição de novos problemas como tarefa, utilizando os que estavam no material didático. A professora-pesquisadora também orientou que os alunos fizessem a leitura individual do próximo problema, previamente, para discussão na aula seguinte.

5.2 PROBLEMA 2: RESERVA DE EMERGÊNCIA

Camila quer começar a construir sua reserva de emergência. Considere que ela receba dos pais R$ 80,00 por mês. Para tanto pretende separar metade de sua mesada todos os meses para esse propósito.

Caros estudantes, sigam as orientações abaixo. Logo após discuta em seu grupo e tentem chegar a uma solução.

a) Quantos reais Camila guardará por mês?
b) Qual valor Camila terá guardado após o 2º mês?
c) Descreva uma regra que permita determinar o valor guardado relacionando com a quantidade de meses de economia.
d) Considere que Camila, tenha já guardados o valor de 135 reais e escreva uma nova regra para determinar o valor guardado relacionando com a quantidade de meses de economia.
e) Esboce o gráfico. Sugestão: utilize um software para otimizar sua construção.

(CHEVITARESE; ANTUNES, 2020. p. 349- adaptada)

Na aula seguinte, foi aplicado o segundo problema e foram reafirmados os combinados feitos para problema 1: o tempo de discussão para cada item do problema seria de, no máximo, 10 minutos e os debates deveriam ser por meio do grupo de *WhatsApp.*

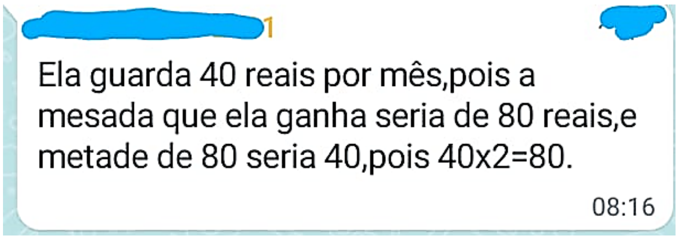
De início, os alunos perguntaram sobre o significado de “Reserva de Emergência” e alguns responderam corretamente ser o dinheiro poupado para emergência financeira. Isso mostra que a leitura individual tinha acontecido em casa. Esse problema possibilitou abordar conceitos matemáticos e também sociais, como a necessidade de uma reserva financeira, com a aplicação em um contexto de pandemia.

Assim, 04 grupos realizaram a discussão dos itens “a” e “b” desse problema, na primeira aula, devido à falta de dois alunos do grupo MTSD, pois familiares estavam com suspeita de estarem com COVID, e outro aluno não se sentia bem de saúde. No entanto, nos itens “c”, “d”, “e”, esses alunos participaram remotamente. A Internet estava instável na data, o que causou alguma dificuldade na comunicação entre os membros dos grupos.

O grupo Matemágicas trouxe alguns apontamentos apreendidos na resolução do primeiro problema como a releitura da pergunta para melhor compreender, bem como um maior debate para cada item. Os demais grupos fizeram a leitura e não apresentaram dúvidas sobre o enunciado do problema e, ao observar as mensagens nos grupos de *WhatsApp*, foi notado um maior debate.

As estratégias apresentadas pelos alunos para o primeiro item envolveram o uso de conhecimento prévio esperado pelo professor, ou seja, as operações de divisão e de multiplicação. Todos os grupos chegaram a essa conclusão, conforme Figura 22.

Figura 22 – Estratégia apresentada pelo grupo JRJ para o Problema 2a

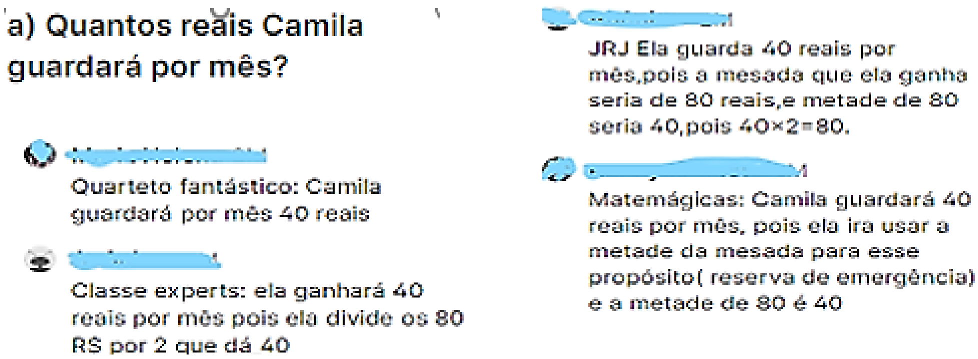


Fonte: Dados da pesquisa.

As demais turmas apresentaram pensamentos iguais, chegando à mesma conclusão, usando as operações de divisão e multiplicação.

Após os alunos terminarem de resolver o Problema 2a, eles foram direcionados a escrever na lousa (no *Padlet)* as suas respostas, conforme Figura 23.

Figura 23 – Registro das resoluções do Problema 2a



Fonte: Dados da pesquisa.

Após o compartilhamento da lousa, cada representante dos grupos começou a apresentar suas resoluções, justificando como havia pensado. Ao grupo Quarteto Fantástico foi solicitado explicar sua resposta, pois havia postado apenas a resposta final para o problema, não explicando como chegou ao resultado. A aluna representante justificou que o valor guardado pela *"moça do problema"* seria a metade de 80 reais e *"[...] a metade de 80 reais é 40 reais"*.

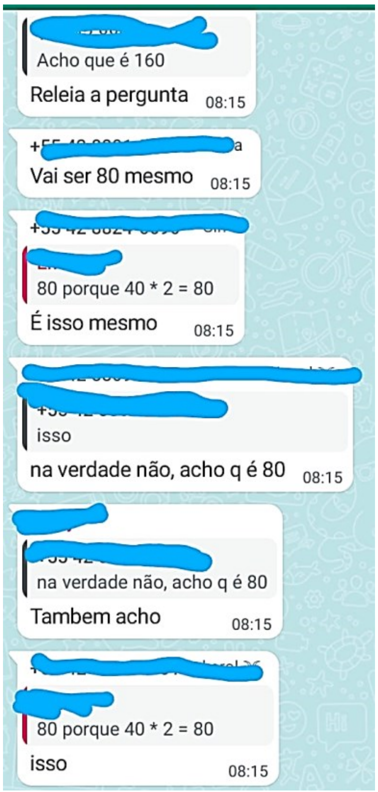
Para esse item, o tempo estipulado foi suficiente, a resposta estava de acordo com o esperado pela professora-pesquisadora, bem como a participação de todos foi relevante, apesar das brincadeiras ocorridas em alguns momentos.

Para o consenso, os alunos e a professora-pesquisadora viram que todos tinham obtido a mesma resposta, mas identificaram que o grupo Matemágicas trouxe a melhor explicação.

Em seguida, os grupos foram orientados a resolver o item “b”.

Os grupos fizeram a leitura da pergunta do item “b” e o grupo Matemágicas, conforme Figura 24, ao tentar resolver o problema, retoma a leitura, pois a aluna 1 identifica essa necessidade, ao ver que a colega (aluna 4) não tinha compreendido o item ao postar *“acho que é 160”*.

Figura 24 – Discussão do grupo Matemágicas no Problema 2a

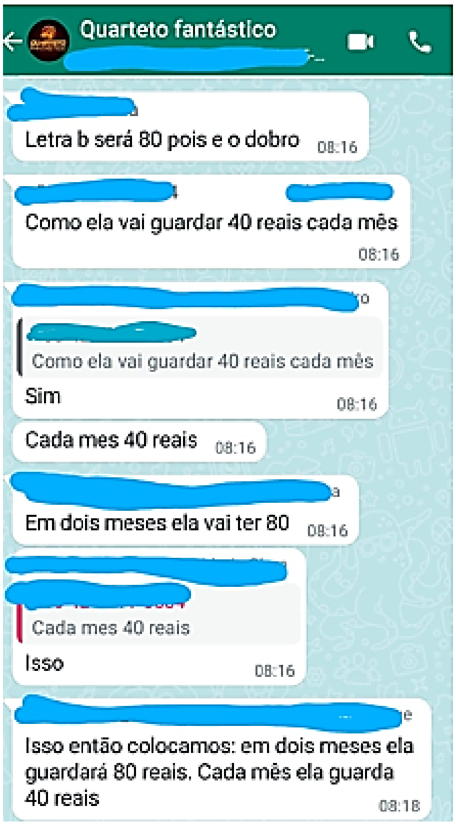


Fonte: Dados da pesquisa.

O item “b” foi rapidamente concluído por alguns grupos, que se encaminharam para os demais. A professora-pesquisadora pediu que tivessem a gentileza de aguardar os demais e que justificassem os raciocínios.

Os grupos chegaram a uma resposta. O grupo Quarteto Fantástico, conforme Figura 25, desenvolve um debate em linguagem informal.

Figura 25 – Discussão do grupo Quarteto Fantástico no Problema 2b

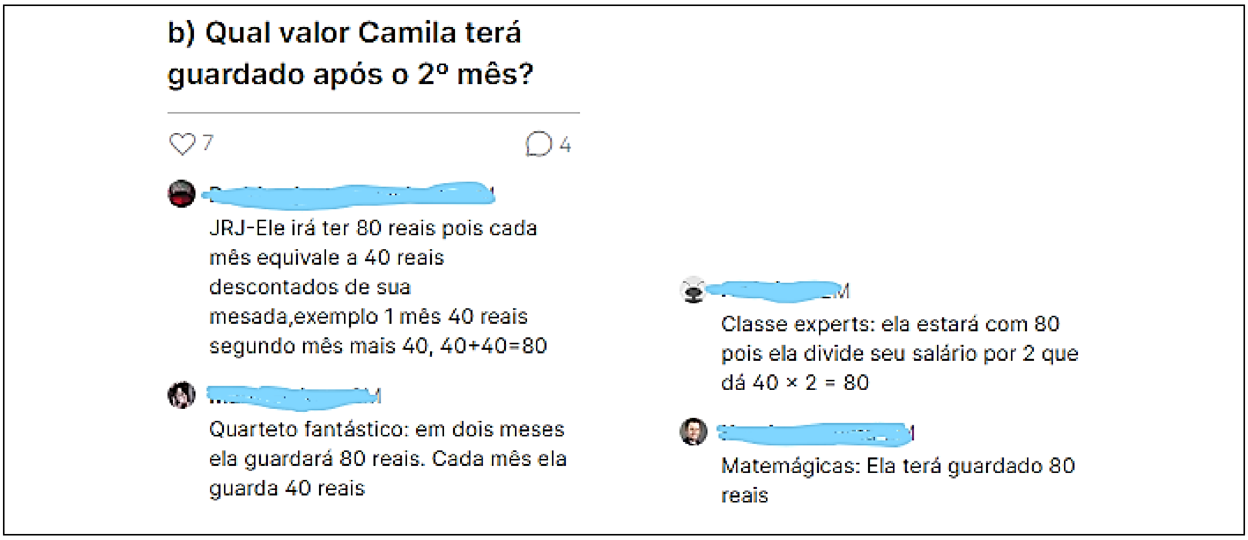


Fonte: Dados da pesquisa.

Os demais grupos pensaram de modo aditivo e outros utilizaram uma multiplicação, ou seja, relacionaram o valor obtido no segundo mês com o valor guardado a cada mês. A percepção dessa relação veio ao encontro do objetivo da aula – construir o conceito de função.

A Figura 26 traz o painel de soluções apresentado pelos grupos para o Problema 2b.

Figura 26 – Registro das resoluções do Problema 2b



Fonte: Dados da pesquisa.

As postagens, os debates nos grupos e a busca do consenso para quais estratégias atendiam o enunciado do Problema 2b foram em torno de operações básicas da Matemática, o que era o esperado pela professora-pesquisadora.

O trabalho colaborativo foi mostrado na plenária, pois os representantes mudavam a cada apresentação. Ao analisar as apresentações, notou-se que o grupo Matemágicas não justificou sua postagem e foi convidado a explicar.

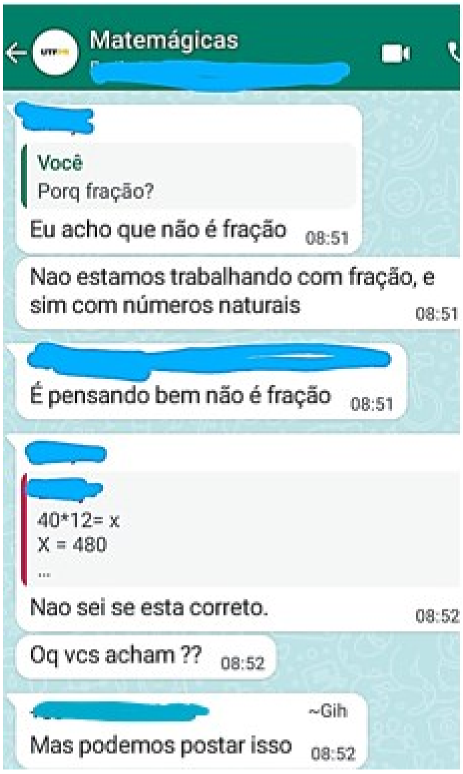
A professora-pesquisadora convidou os grupos para analisar o painel de soluções da turma e todos perceberam as semelhanças entre os registros. A professora-pesquisadora chegou a cogitar em solicitar um raciocínio mais formal da Matemática, mas isso deveria ser realizado no item "c" do problema.

Os grupos realizaram a leitura do item e compreenderam que ele solicitava uma regra matemática, ou seja, a escrita em uma linguagem matemática. Observando as postagens das discussões nos grupos, identificou-se que tinham compreendido o que item solicitava, ou seja, uma regra matemática.

A aluna 1 (do grupo Matemágicas) perguntou à professora-pesquisadora se essa regra solicitada pelo item seria "*escrever algo da Matemática*". Ela perguntou: *"como assim?"* A aluna respondeu: *"tipo uma potência".* A professora questionou a aluna sobre por que seria uma potência, notando que não houve um pensamento matemático ao dar essa resposta. Em seguida, incentivou o grupo Matemágicas e os demais grupos a pensarem partindo de algum conteúdo que tivessem estudado.

Vale ressaltar que a professora-pesquisadora conseguiu inserir nos grupos questionamentos para ajudá-los a pensar (Figura 27), em outros isso não aconteceu devido à instabilidade com a Internet, o que provocou demora para restabelecer a aula na plataforma *online* e o uso de "dados móveis" por alguns alunos durante o debate, que também causou lentidão na comunicação.

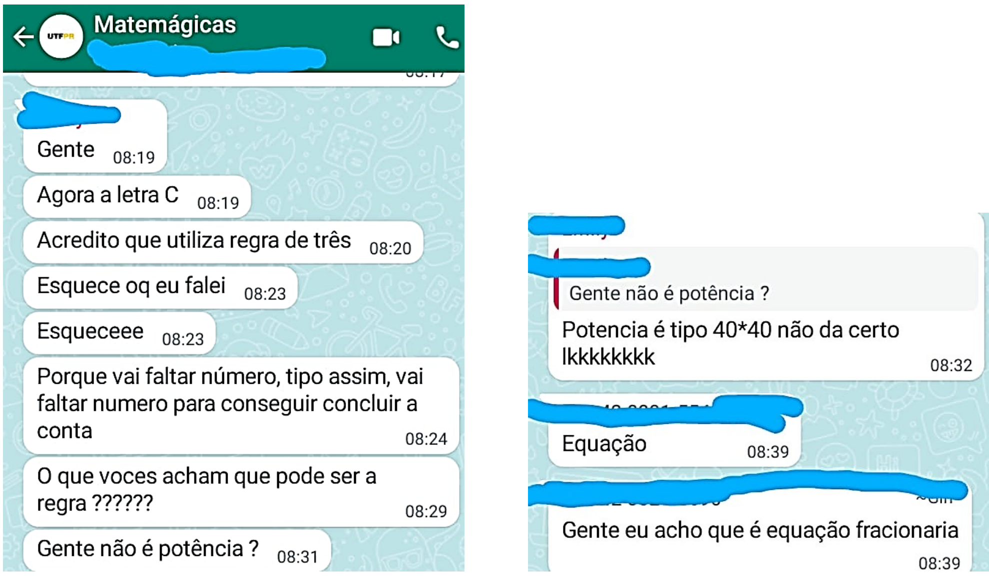
Figura 27 – Discussão do grupo Matemágicas (parte 1) – Problema 2c



Fonte: Dados da pesquisa.

A resolução desse item foi diferente, no sentido que foram possibilitadas muitas discussões. A Figura 28 mostra que, no grupo Matemágicas, houve uma tentativa de "descobrir" o conteúdo envolvido no problema.

Figura 28 – Discussão do grupo Matemágicas (parte 1) – Problema 2c



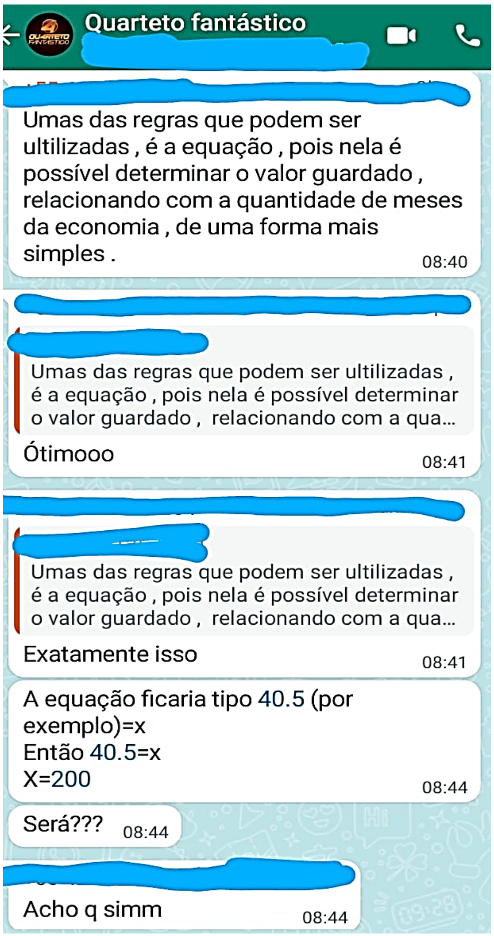
Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo Matemágicas cogitou a regra de três, ao tentar relacionar o problema com conteúdo prévios, todavia, as alunas perceberam alguns equívocos e começaram a raciocinar partindo da ideia de equação, conteúdo este que aprenderam no ano anterior.

O grupo Quarteto Fantástico compreendeu o item do problema, mas não o especificou como uma correspondência entre elementos. Segundo Van de Walle (2009, p. 305), "as relações funcionais são relações ou regras de correspondência dependentes". Já Tinoco (2009) afirma que a não exploração das diferenças que existem na utilização das letras pode levar o aluno a encarar a letra sempre como incógnita. Tal fato é corroborado na discussão do grupo.

A aluna 2, ao escrever a equação, não pensou em uma letra que representasse a economia e outra para representar o número de meses, conforme a Figura 29. Para a aluna 1, o valor da economia seria representado pelo x.

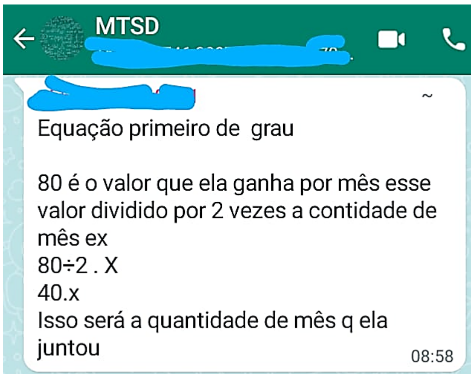
Figura 29 – Discussão do grupo Quarteto Fantástico no Problema 2c



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo MTSD, de acordo com a Figura 30, também trouxe seu debate em torno de uma equação com uma incógnita.

Figura 30 – Discussão do grupo MTSD no Problema 2c

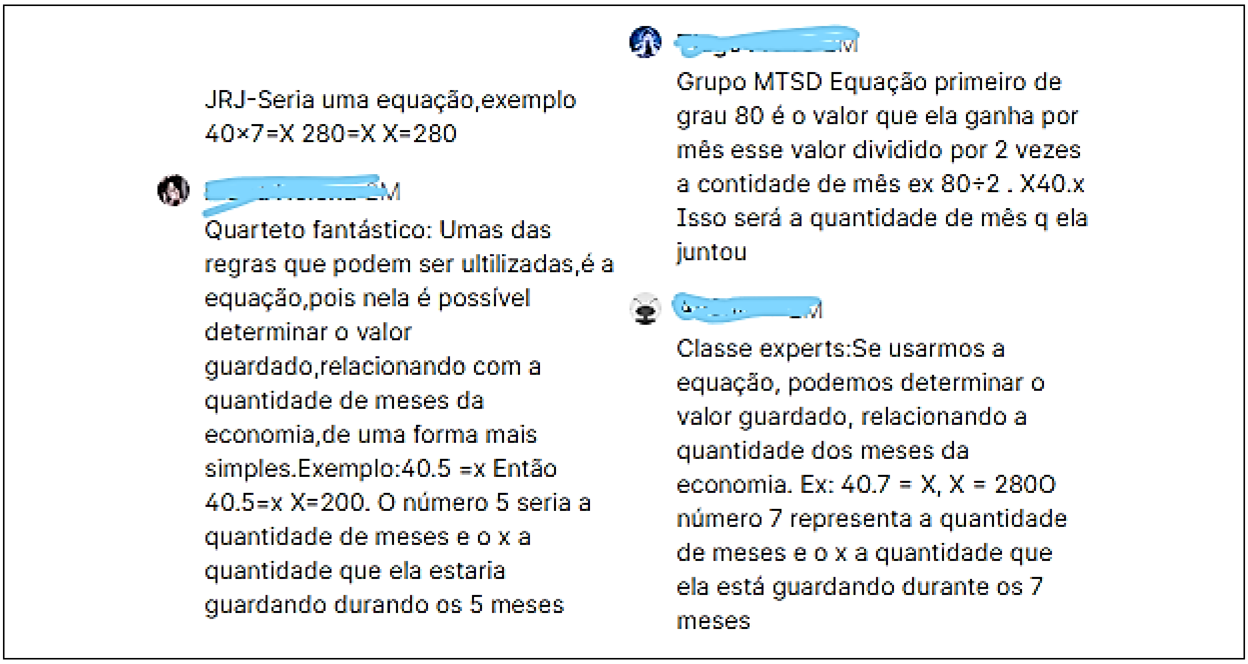


Fonte: Dados da pesquisa.

Os cinco grupos utilizaram uma equação do primeiro grau com uma incógnita. Isso mostra a relação dos conhecimentos prévios com conteúdo a ser construído. No entanto, os alunos não perceberam que uma equação envolve determinar o valor de uma incógnita, mas no Problema 2c havia uma relação entre duas grandezas que variam (meses e economia).

Cada equipe apresentou sua resposta na lousa (no *Padlet),* de acordo com a Figura 31, com exceção do grupo Matemágicas que teve um problema técnico e não conseguiu postar sua resolução. No entanto, a representante do grupo fez a leitura e apresentou como resolveram o Problema 2c.

Figura 31 – Registro das resoluções do Problema 2c



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao pedir que analisassem qual das resoluções atendia o problema, a professora-pesquisadora e os alunos concordaram que a resolução do Quarteto Fantástico, por hora, estava correta.

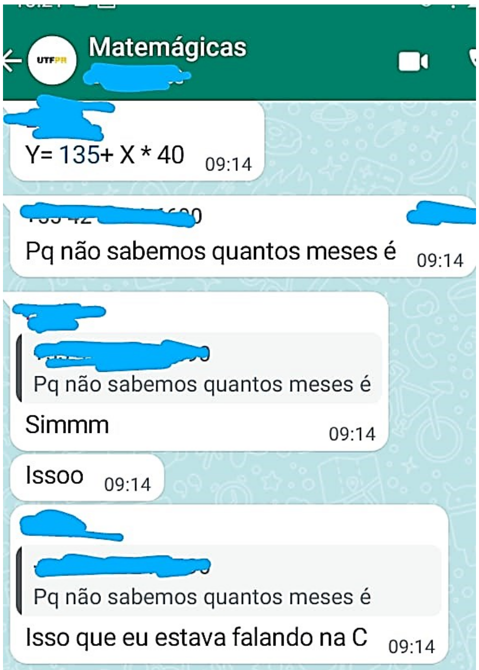
Os alunos resgataram, nessa atividade, seus conhecimentos prévios para construção do conhecimento, o que era esperado pela professora-pesquisadora, ou seja, construíssem uma expressão algébrica que relacionasse o valor guardado y com a quantidade de meses x.

A maioria dos grupos compreendeu a atividade e não apresentou dúvidas. O grupo Class Expert não participou dessa resolução devido à falta de conexão à Internet de duas alunas do grupo, e os que estavam em sala não conseguiram chegar a um raciocínio para postar.

O incentivo da professora-pesquisadora neste item foi para que os alunos retirassem os dados do problema, que pensassem sobre o significado do número 135 que aparecia na atividade, também do número 40 e da letra x, e se seria necessário determinar outro valor. A intenção era levar os alunos a identificar o valor fixo, o valor variável, o significado da letra x e a necessidade de usar outra letra que representasse o valor total a ser guardado, por exemplo a letra y.

O grupo Matemágicas, conforme Figura 32, compreendeu os dados do problema e utilizou corretamente as variáveis x e y.

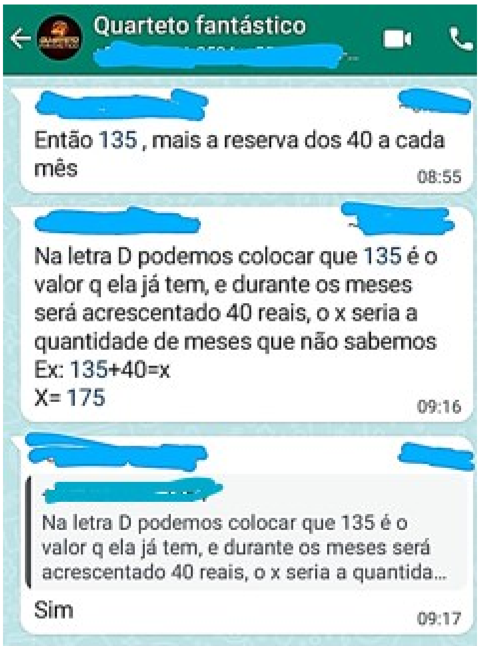
Figura 32 – Discussão do grupo Matemágicas no Problema 2d



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo Quarteto fantástico, de acordo com a Figura 33, não percebeu a necessidade de outra letra para representar o total guardado.

Figura 33 – Discussão grupo Quarteto Fantástico no Problema 2d



Fonte: Dados da Pesquisa.

O grupo MTSD não entendeu o significado do 135 no problema e pensou ser o valor total guardado e não um valor fixo, que é acrescentado, para se obter o valor total guardado. O aluno 1 desse grupo chegou a escrever:

Total guardado = 135 reais

1° mês guardou = 40 reais

2° mês guardou = 40 reais

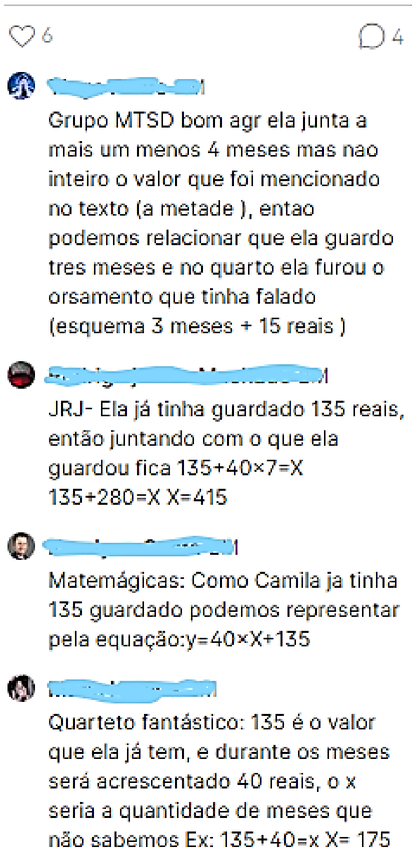
3° mês guardou = 40 reais

Depois, indicou que 135 reais seria o total em 3 meses, guardando 40 reais por mês + 15 reais (segundo ele, foi “furo” no quarto mês). Esse aluno explicou que usou o termo “furo” para explicar o porquê dos 15 reais. Ou seja, no quarto mês ela (a moça do problema) não guardou 40 reais, mas somente 15.

O grupo JRJ entendeu que 135 era um valor fixo acrescido de 40, por mês guardado, porém não utilizou outra letra que representasse a quantidade de meses e o valor total guardado.

Após postar a resolução no *Padlet*, Figura 34, cada representante leu e defendeu o ponto de vista do grupo.

Figura 34 – Registro das resoluções do Problema 2d



Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos e a professora-pesquisadora-pesquisadora chegaram em um consenso de que a resposta do grupo Matemágicas atendia coerentemente o enunciado do problema, pois justificou o uso dos símbolos x e y conforme a resposta esperada pela pesquisadora: a representação algébrica construída no item "c", acrescida do valor que já tenha guardado (135) , $y = 40.x + 135$ (correspondência).

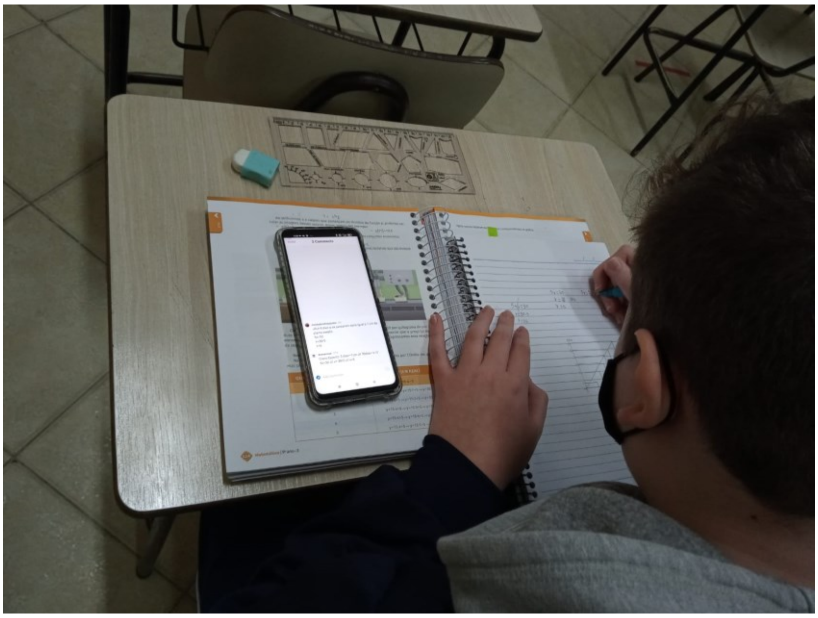
Esse problema mostrou a dificuldade dos alunos com o uso de letras (como variáveis), para generalizar um procedimento. Tinoco (2009) aponta, em suas pesquisas, que isso é devido não terem sido exploradas no Ensino Fundamental variáveis e dependências – durante o contato dos alunos com linguagem algébrica e equações – base para construção do conceito de função.

O item "e", durante a resolução, deixou os alunos com dúvidas de como construir o gráfico e de que números seriam utilizados. Foi necessário então a professora-pesquisadora solicitar para que fizessem a leitura do problema e dos itens novamente.

O aluno 1, do grupo MTSD, perguntou à professora-pesquisadora se poderia construir no caderno o gráfico, porque o grupo já tinha compreendido o que deveria usar na construção.

A professora-pesquisadora respondeu que a equipe deveria decidir. Conforme a Figura 35, o grupo optou pela construção sem o uso do Geogebra.

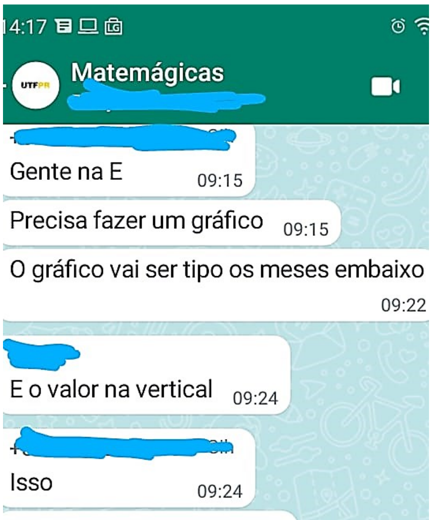
Figura 35 – Aluno 1, do grupo MTSD construindo o gráfico referente ao Problema 2e



Fonte: Dados da pesquisa.

Com o incentivo da professora-pesquisadora, os alunos compreenderam que o gráfico a ser construído no plano cartesiano envolveria as grandezas *meses x valor guardado*. A Figura 36 mostra a discussão no grupo Matemágicas sobre como deveriam colocar essas grandezas nos eixos.

Figura 36 – Discussão do grupo Matemágicas no Problema 2e



Fonte: Dados da Pesquisa.

Na discussão, a aluna 2 disse, em linguagem informal, que no gráfico os meses ficaram "embaixo" e "outro" indicariam o total guardado em reais. Porém, a aluna 3 mostrou, em sua escrita ("*e o valor na vertical*"), ter compreendido que seriam os eixos horizontal e vertical a que a aluna 2 se referiu.

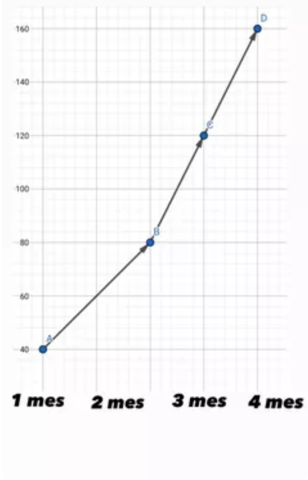
As demais equipes também perceberam a relação *meses x valor guardado*, mas ficaram com dúvida sobre qual *software* usar. A Figura 37 mostra a discussão do grupo por meio do *WhatsApp* e o uso do caderno para construir manualmente o gráfico.

Figura 37 – Aluna 3, do grupo Matemágicas durante a discussão do Problema 2e

Fonte: Dados da pesquisa.

Três grupos postaram no *Padlet* a atividade dentro do tempo estipulado de 10 minutos. Esses três grupos, conforme Figuras 38, 39 e 40, explicaram que construíram seus gráficos considerando a função $Y = 40.x$, ou seja, que a cada mês (x) é reservado 40 reais (y).

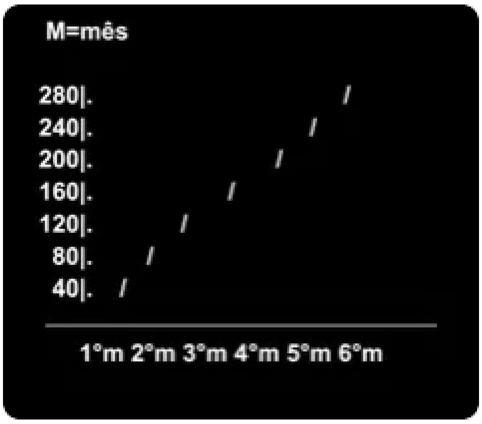
Figura 38 – Registro da resolução do Problema 2e pelo grupo Quarteto Fantástico



Grupo quarteto fantástico-Letra E

Fonte: Dados da pesquisa.

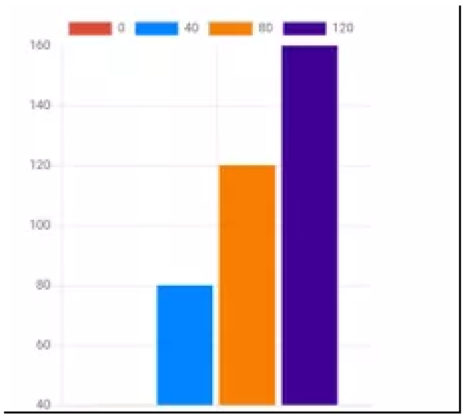
Figura 39 – Registro da resolução do Problema 2e pelo grupo MTSD



Grupo MTSD a cada mês que o gráfico sobe ela ganha mais dinheiro

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 40 – Registro da resolução do Problema 2e pelo grupo JRJ



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo Quarteto fantástico (Figura 38) apresentou o gráfico e justificou "*no primeiro mês o valor guardado será 40 reais; no segundo mês 80 reais, no terceiro mês 120 reais e no quarto mês 160 reais e assim por diante"* (aluna 3, Quarteto Fantástico). A aluna representante também explicou que o gráfico construído *"era pra ser uma reta crescent*e", mas devido ao tempo estipulado para entrega da resolução do item, a escala não foi considerada.

O grupo MTSD (Figura 39) explicou seu gráfico, utilizando-se das mesmas justificativas do grupo Quarteto fantástico: "*Um mês 40 reais guardado, no segundo mês 80 reais e fizemos até o sexto mês"* (aluno 2, MTSD). A professora-pesquisadora perguntou sobre o significado do valor "280" que estava no gráfico e o aluno respondeu que o grupo deveria ter colocado o 7° mês no eixo horizontal do gráfico, pois 7 meses guardando 40 reais resulta em 280 ou poderia ter retirado o 280 do eixo vertical do gráfico. Para esse grupo, a elaboração do gráfico mostrou que, com o passar dos meses, a quantidade de economia aumentava linearmente: *"a cada mês que o gráfico sobe ela ganha mais dinheiro"* (Grupo MTSD). A professora-pesquisadora destacou que o tipo de gráfico empregado (Alta-Baixa-Fechamento) não é o melhor tipo a ser usado nessa situação, visto que é frequentemente utilizado no mercado de ações ou em situações que apresentam três séries de valores na seguinte ordem (alta, baixa e, em seguida, fechamento).

Para o aluno 1 do grupo JRJ (Figura 40) a construção da equipe também ilustrava as relações expostas, em que a cada mês (x – indicado no eixo horizontal) são reservados 40 reais (y – indicado no eixo vertical). Porém, os alunos os gráficos não representaram a situação corretamente: "*a primeira coluna azul era para ter subido até o 40, a segunda até 80 e a terceira até 120"*. Ressalta que a professora-pesquisadora resolveu, neste item, abster-se de provocar outros debates em torno do tipo de gráfico utilizado, pois poderia antecipar discussões que seriam realizadas no problema 5c.

Segundo Tinoco (2009), "a familiarização do aluno com os diversos tipos de gráficos pode se dar ao mesmo tempo que ao aluno adquire noções de variável e dependência, básicas para a construção do conceito de função. Essas noções ficam cada vez mais claras ao passo que o aluno constrói e interpreta gráficos" (TINOCO, 2009, p. 11).

Logo após, os grupos e a professora-pesquisadora identificaram que os gráficos que melhor representavam a resolução desse item seriam os que se relacionavam com uma reta, ou seja, o gráfico dos grupos Quarteto Fantástico e MTSD.

A formalização do conteúdo ocorreu utilizando-se o material didático, ou seja, destacando que os itens abordam ideias básicas do conteúdo função - relação entre grandezas (definido no problema 1). Retomou-se que, para toda função, têm-se os conjuntos domínio, contradomínio e imagem, e se pode estabelecer uma relação entre as variáveis dependente e independente da função. As grandezas “valor guardado” e “quantidade de meses” são, nesse caso, variáveis; o valor guardado y depende da quantidade x de meses de economia, isto é, o valor guardado está *em função* da quantidade de meses de economia, segundo a Lei de formação da função, $f(x) = 40.x + 135$.

Nesse momento, a professora-pesquisadora apresentou à turma a definição formal da função do primeiro grau: chama-se Função polinomial do 1º grau, ou Função afim, a qualquer função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por uma lei da formação $\mathrm{f}(x) = ax + b$, em que a e b são números reais fixos, com $a \neq 0$; x e $f(x)$ são variáveis. O número a é chamado de coeficiente de x e o número b é chamado termo constante. Dados os conjuntos A e B, não vazios, em R de A em B, quando para todo elemento $x \in A$ existe um único $f(x) \in B$, dizemos que R é uma função f de A em B. Notação: f: A $\rightarrow$ B, função é chamada do primeiro grau devido ao expoente da letra x ter grau 1. Ressalta-se que não foi aprofundada a discussão dos gráficos apresentados para não antecipar as resoluções e discussões dos próximos problemas.

Logo após essas considerações, houve a proposição de novos problemas como tarefa, indicando uma página do material didático para ser resolvido e indicada a leitura do problema 3.

Van de Walle (2009) ressalta que o conteúdo função não deve ser visto somente como uma regra que associa elementos entre conjuntos, pois somente isso pode ser um pouco formal para alunos do Ensino Fundamental. “[...] Para esses alunos o conceito de função evolui melhor a partir de situações contextualizadas em que uma mudança em uma coisa (variável independente) cause uma mudança correspondente em outra coisa (variável dependente)” (VAN DE WALLE, 2009, p. 303).

Trazer a construção do conceito de função, por meio da ideia de dependência entre variáveis, configura-se uma forma diferenciada de abordagem, visto que uma forma comum é partir de valores específicos até se chegar em uma quantidade qualquer, ou seja, por meio da Lei da função.

5.3 PROBLEMA 3: MÃES E FILHOS

Em certo dia, três mães deram à luz em uma maternidade. A primeira teve gêmeos, a segunda, trigêmeos e, a terceira, um único filho. Considere, para aquele dia, o conjunto das 3 mães e o conjunto das 6 crianças. Caros estudantes, sigam as orientações abaixo corretamente. Logo em seguida discuta em seu grupo e tentem chegar a uma solução. a) Relacione cada mãe ao seu filho. Todos as mães relacionam-se com seus filhos? b) Relacione cada filho à sua mãe. Todos os filhos relacionam-se com suas mães? c) Relacione cada criança ao seu irmão. Todas as crianças relacionam-se com seus irmãos? (SANTOS, 2017, p. 04- adaptado)

Nesta sequência de duas aulas, os alunos estavam animados e eufóricos com a resolução do Problema 3, debatiam, inclusive, questões secundárias relacionadas à ilustração dos bebês que o problema trazia. Como na fala do aluno 3, do grupo Class Experts: “T*emos que identificar a cor da pele e as características de cada mãe, porque as imagens dos bebês são diferentes”*. A professora-pesquisadora esclareceu que eram imagens ilustrativas, de personagens fictícios e isso era irrelevante.

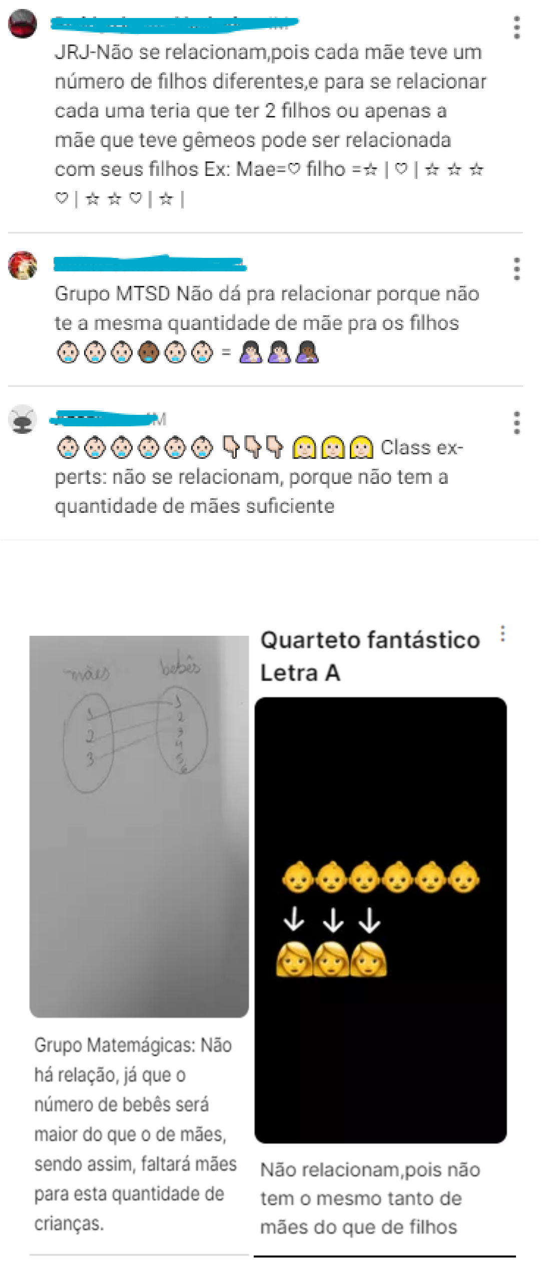
O grupo JRJ debateu se cada mãe teria que se relacionar somente com um filho. Para o aluno 2 desse grupo: “*Para se relacionar, cada mãe teria que ter 2 filhos, uma média aritmética da quantidade de filhos e mães”*. Pensamentos semelhantes surgiram nas discussões dos demais grupos. Para o grupo Quarteto Fantástico: “*não se relacionam, pois não têm o mesmo tanto de mães e de filhos”* (aluna 4). O grupo Matemágicas seguiu no mesmo sentido, porém a aluna 1 chegou a cogitar: “*pensei que os bebês poderiam ser o grupo do domínio, mas não sei se faria sentido”*. A professora-pesquisadora interferiu perguntando o porquê desse raciocínio. A aluna 1 respondeu que foi o que aprenderam no problema 1. A aluna 3 chamou a atenção da colega de grupo que “o *item “a” pede para relacionar as mães com os bebês e não o contrário”*.

Fazendo uso de *emoji*, os alunos, nos grupos, disputavam qual resolução seria mais criativa e, em votação, escolheram a que os agradaram. Isso provocou um atraso no tempo estipulado para atividade ocorrer. Alguns grupos se adiantaram e foram debatendo e postando as resoluções dos itens “b” e “c”, o que ocasionou poucas intervenções da professora-pesquisadora nos debates desses grupos.

Os alunos foram direcionados à plenária – momento em que explicaram e defenderam suas postagens no *Padlet.* A primeira equipe, JRJ, justificou o porquê de ter pensado em média de filhos, segundo eles, seria uma melhor relação no sentido *para cuidar*. Esse também foi a ideia dos outros grupos que seguiram por esse caminho. No entanto, eles chegaram à conclusão de que as mães não poderiam dividir os filhos.

A equipe Matemágicas relacionou conhecimentos adquiridos no problema 1, explicando aos colegas e foram alertados sobre os mesmos equívocos na escrita da relação, já que o item pedia a relação mães e filhos.

Figura 41 – Registro das resoluções do Problema 3a



Fonte: Dados da pesquisa.

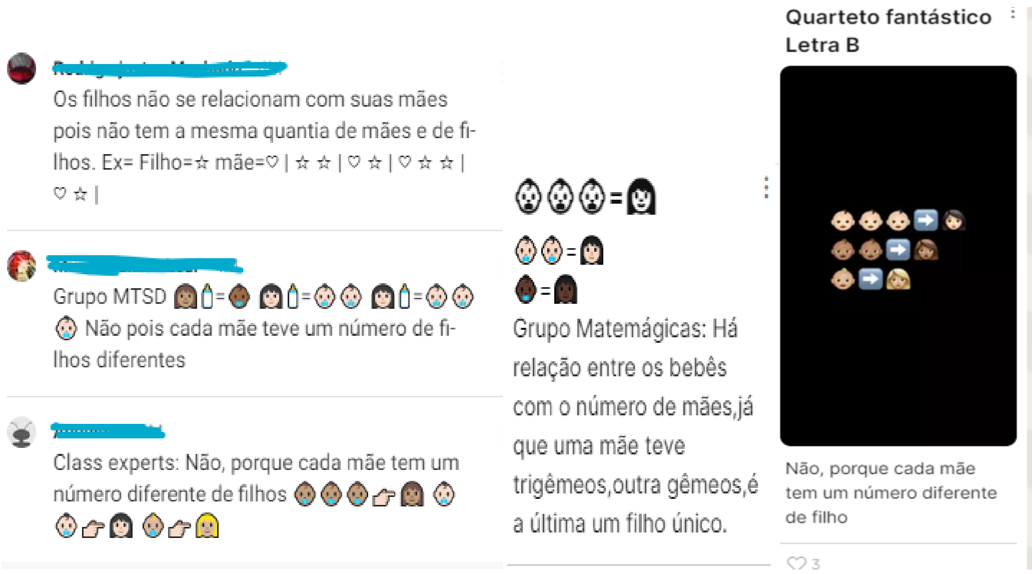
Após as justificativas, todos os grupos identificaram que uma mãe se relacionaria com mais de um filho, a mãe seria o conjunto domínio, e o diagrama de Venn, apresentado pela equipe Matemágicas, tentou atender o enunciado do item, mas erroneamente não relacionou a mãe a mais de um filho. E isso também aconteceu com os *emojis* apresentados pelos grupos MTSD, Class Experts e o Quarteto fantástico. O *emoji* utilizado pelo grupo JRJ foi considerado como certo pelos grupos, pois apresentou uma mãe se relacionando com mais de um filho. Outras resoluções nos grupos que não foram aprovadas atenderiam o enunciado do problema satisfatoriamente (Figura 42).

Figura 42 – Discussão do grupo Quarteto Fantástico

Fonte: Dados da pesquisa.

Após a plenária do item “a”, o grupo Matemágicas foi direcionado a concluir o item “b” do problema, já que as equipes JRJ, MTSD, Class Experts e o Quarteto Fantástico já tinham debatido e postado suas resoluções. Essas três equipes debateram e postaram no mesmo sentido da resolução do item “a”.

Figura 43 – Registro das resoluções do Problema 3b



Fonte: Dados da pesquisa.

Durante a plenária, a professora-pesquisadora fez questionamentos aos alunos representantes de cada grupo durante as apresentações das resoluções. Para os grupos MTSD, Quarteto fantástico e Class Experts, foi solicitada mais atenção na relação estabelecida no enunciado de cada item. Os integrantes desses grupos reconheceram os equívocos cometidos, pois o item solicitava a relação dos filhos com suas mães. Esses grupos responderam no mesmo sentido do item 3 “a”, na relação mães e filhos. O aluno 2 do grupo MTSD explicou: *“Pensamos que se as mães não se relacionam com seus filhos, assim os filhos também não se relacionam”*. Nota-se que esse grupo entendeu a palavra relação com o sentido de relacionar-se e não com o significado matemático, como sendo uma regra que relaciona dois conjuntos.

No mesmo sentido, o grupo JRJ explicou que *“os filhos não se relacionam com suas mães, pois não tem a mesma quantia de mães e de filhos*” (aluno 1), para eles, essa relação deveria ser biunívoca, ou seja, cada elemento de um conjunto está somente associado a um, e só um, elemento do outro. No caso, cada mãe seria associada ao seu filho e vice-versa.

Os grupos Quarteto Fantástico e o Class Experts disseram que não seria possível os filhos se relacionarem as suas mães, mas por meios dos *emojis* indicaram corretamente.

Em consenso, professora-pesquisadora e alunos chegaram à conclusão de que a resposta escrita do grupo Matemágicas e as representações por *emoji* se aproximavam da resposta para o item “b”. Porém, em suas explicações durante a plenária, os demais grupos também concluíam que todos os filhos estão relacionados a sua mãe.

Por meio das postagens no *Padlet*, dos debates no *WhatsApp* ou presencialmente sobre o item “c”, foi possível perceber que os grupos compreenderam o *item* e as conclusões foram, parcialmente, conforme o esperado. Por exemplo, o aluno 2, do grupo JRJ, mencionou que*: “Não se relacionam, pois uma criança não tem irmão”.* Questionado sobre o porquê de ter pensado assim, ele justificou que o grupo considerou a relação criança com seu irmão e ao sobrar uma criança sem irmão, eles concluíram que não há uma relação.

Após postarem suas conclusões, cada membro eleito pelo grupo leu a resposta e defendeu as ideias apresentadas, conforme Figura 44.

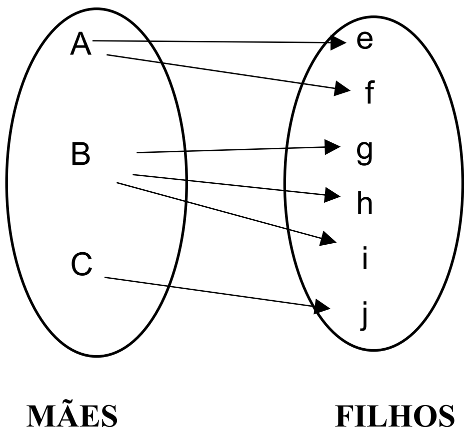
Figura 44 – Registro das resoluções do Problema 3c

Fonte: Dados da pesquisa.

Nas explicações dos cinco grupos, pode-se perceber que, primeiro, pensaram em subdividir os grupos de filhos, relacionando um elemento exclusivamente a apenas outro. Assim, no caso dos trigêmeos, sobraria uma criança, os gêmeos se relacionariam e, o filho único, não. Assim, os grupos perceberam que não haveria relação no caso do filho único, mas havia dúvida em relação aos trigêmeos.

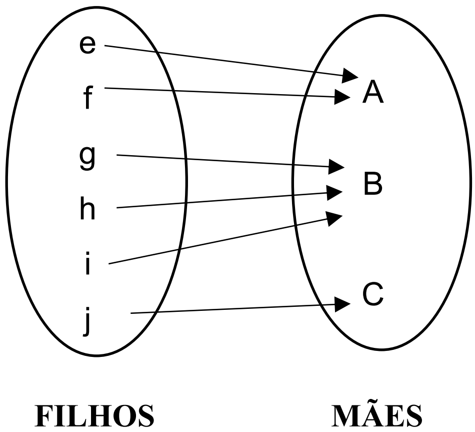
Em consenso e mediante a intervenção da professora-pesquisadora, concluiu-se que uma criança poderia ser relacionar com mais de um irmão, e ficaria, sim, uma criança sem relacionar-se com outra (no caso do filho único). Os grupos perceberam que os desenhos propostos por eles não especificavam essas relações. Houve dúvida sobre qual representação estaria correta. Para sanar as dúvidas, a professora-pesquisadora retomou as ideias e fez a formalização.

Como estudado no problema anterior, uma relação apresenta elementos no conjunto domínio e no conjunto imagem, mas para ser uma função, cada elemento do conjunto domínio está associado a um único elemento do conjunto imagem. No caso do item “a”, a mãe seria um elemento do conjunto domínio e os filhos seriam elementos do conjunto imagem. Logo, a mãe se relaciona com todos os seus filhos, então um elemento do conjunto domínio está associado a mais de um elemento do conjunto imagem, o que não caracteriza uma função.



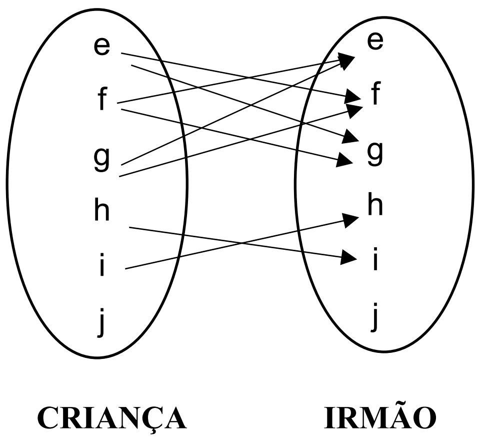
Não é função.

No caso da segunda relação, proposta no item b, os filhos são elementos do domínio e a mãe é um elemento da imagem. Desta forma, cada elemento do domínio está associado a um único elemento da imagem, pois todos os filhos estão relacionados à sua mãe, o que caracteriza uma função.



É função.

Na terceira relação, item c, o filho único (elemento do domínio) não se associa a outro (elemento da imagem), pois não tem irmãos. Logo esta não é uma função.



Não é função.

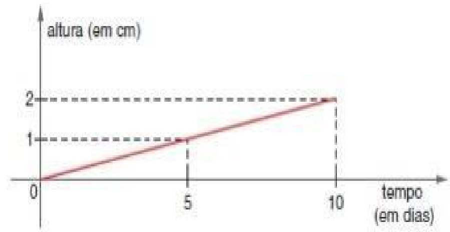
Após essa discussão mediada pela professora-pesquisadora, esta defendeu que, no item "b", a relação é uma função, pois dados os conjuntos A e B, não vazios, e uma relação R de A em B, quando para todo elemento $x \in A$ existe um único $f(x) \in B$, dizemos que R é uma função f de A em B. Notação: $f: A \rightarrow B$.

Diante das dificuldades reveladas pelos alunos para compreender a ideia de relação neste problema, sugeriu-se, no Produto Educacional, antecipá-lo e propô-lo como Problema 2. A sequência ganha uma estrutura melhor, visto que no Problema 1 se explora a relação entre pedras e ovelhas e, no Problema 2, essa ideia é ampliada, visando definir um tipo especial de relação, que é a função.

No Ensino Médio, uma possibilidade de ampliação deste problema seria a exploração das propriedades da função e quando esta se caracteriza como Função Injetora, Função Bijetora e Função Sobrejetora.

5.4 PROBLEMA 4: O CRESCIMENTO DE UMA PLANTA

Um botânico mede o crescimento de uma planta em centímetros todos os dias, marca os pontos em um gráfico e traça uma reta.



Considerando o comportamento dessa planta, discuta com seus colegas:

a) Após analisar o gráfico, descreva qual a relação observada.

b) Se for mantida sempre essa relação, que altura a planta terá no trigésimo dia?

c) Como essa situação-problema pode ser representada algebricamente?

(SILVA, 2021, p. 03, adaptada)

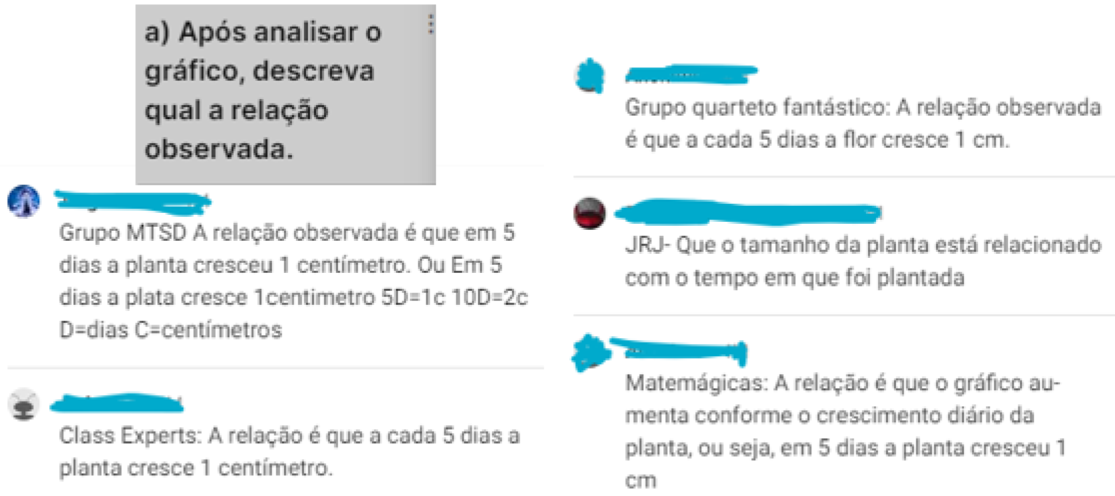
No início da aula, os grupos já debatiam sobre o problema, mostrando interpretações individuais. Para a aluna 5, do grupo Class Experts*: "cada 5 dias a planta cresce 1cm. Então a relação é que a cada 5 dias a flor cresce 1 cm"*. Os demais membros desse grupo contribuíam com raciocínios parecidos, como foi o caso dos grupos Quarteto Fantástico, MTSD e Matemágicas.

Para o aluno 1, do grupo JRJ, o gráfico: "*Apresenta o crescimento de uma planta em 10 dias".* Os membros do grupo concordaram, porém alertaram sobre escrever em linguagem vernácula a relação e não a representar matematicamente.

Foram postadas no *Padlet* as resoluções do problema pelos grupos e foi orientado pela professora-pesquisadora que explicassem suas ideias. Em plenária, o grupo MTSD apresentou e justificou o uso "*de uma possível tabela, com os símbolos*", em que a letra D significa dias, e, a letra C, o tamanho em cm, $5\ dias = 1\ cm$; $10\ dias =\ 2\ cm$, e assim sucessivamente.

Logo após as apresentações, com a ajuda de questionamentos feitos pela professora-pesquisadora, os alunos chegaram ao consenso de que a relação apresentada no gráfico se refere aos dias e à altura da planta, e consideraram a resolução do grupo JRJ seria a única correta.

Figura 45 – Registro das resoluções do Problema 4a

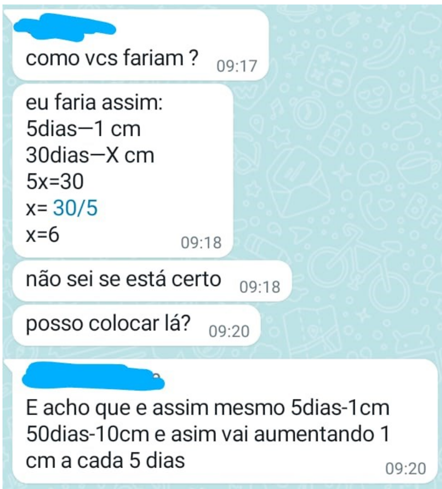


Fonte: Dados da pesquisa.

Direcionados à resolução do item “b”, os grupos JRJ, Quarteto Fantástico, Matemágicas e MTSD utilizaram a ideia de que se em 5 dias a planta tem 1 cm, logo, em 30 dias a planta teria 6 cm. Os grupos MTSD, JRJ e Matemágicas raciocinaram aritmeticamente $(5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30)$, e descobriram um padrão crescimento.

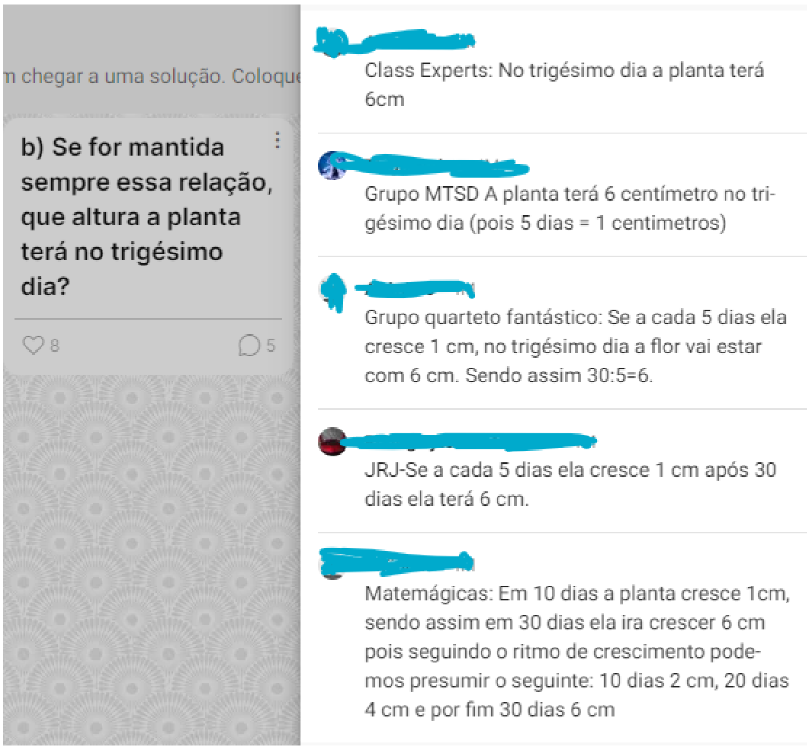
A Figura 46 apresenta a resolução da aluna 5, do grupo Class Experts, utilizando uma regra de três e também considerando o padrão de crescimento da planta, de 1 cm a cada 5 dias.

Figura 46 – Discussão do grupo Class Experts no problema 4b



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 47– Registro das resoluções do Problema 4b



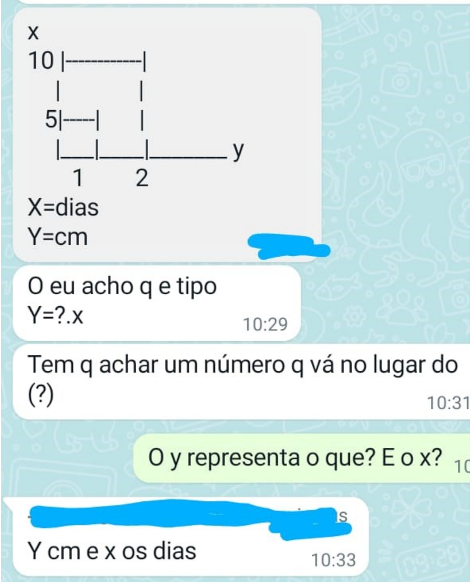
Fonte: Dados da pesquisa.

Após postarem suas resoluções, os representantes de cada grupo defenderam suas ideias e observaram que o grupo Matemágicas tinha cometido um erro de digitação no início de sua escrita (Em 10 dias a planta cresce 1 cm). O grupo Matemágicas concordou e pediu para que fosse considerado o final da escrita, ou seja "*em 10 dias a planta cresce 2 cm*". Posteriormente, a professora-pesquisadora questionou a equipe Class Experts sobre a justificativa, o representante explicou que foi a regra de três que os amparou nessa solução, porém não escreveram a justificativa, usaram regra de três.

Os alunos, juntamente com a professora-pesquisadora, chegaram ao consenso de que as explicações de todas os grupos estavam corretas, no entanto, a ferramenta matemática usada pelo grupo Class Experts foi muito interessante, porque usou conhecimento sobre regra de três.

O item "c" mostrou os conhecimentos prévios dos alunos, trazidos de problemas já trabalhados (2c e 2d). A Figura 48 apresenta o debate do grupo JRJ (aluno 1) e uma breve intervenção da professora-pesquisadora para auxiliar no raciocínio sobre os significados dos símbolos utilizados. Na ocasião, o aluno 1, do grupo JRJ, tentava encontrar um valor (?) que deveria multiplicar o x (nº de dias) e resultar y (cm), lembrando-se da escrita y= $?.x$, feita no problema 2c.

Figura 48 – Discussão do grupo JRJ problema 4c



Fonte: Dados da pesquisa.

No grupo Class Experts, a aluna 5 orienta: "*galera devemos determinar, quantos cm a planta cresce por dia*". Segundo ela, a partir desse valor, será possível descobrir quantos cm a planta terá conforme se passam os dias, seguindo esse padrão. Os demais alunos, após o comentário da aluna 5, começaram a estipular valores e deduziram que poderiam fazer uma análise do gráfico: a planta mede $1\ cm$ no quinto dia e mede $2\ cm$ no décimo dia. Dessa maneira, é possível concluir que a planta cresce $0{,}2\ cm$ por dia (1 cm dividido por 5 dias).

Os demais grupos concluíam que os símbolos x e y representariam, respectivamente, o número de dias e a altura da planta (em cm).

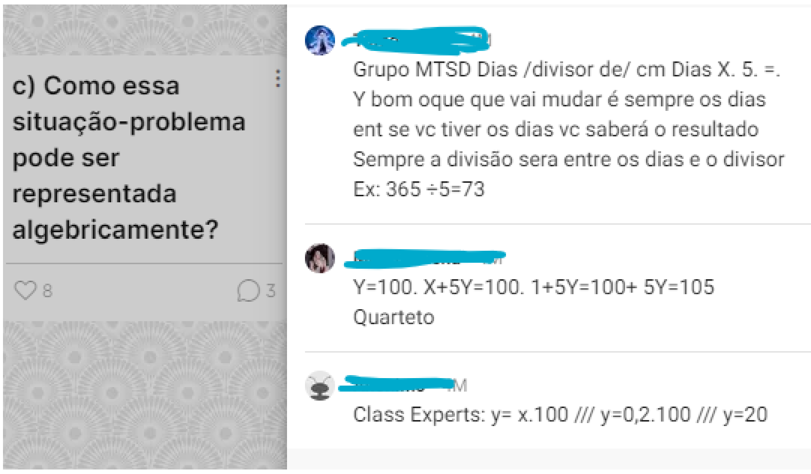
Encaminhados a postarem as resoluções no *Padlet*, somente 03 grupos (MTSD, Quarteto Fantástico e o Class Experts) o fizeram. Os outros dois não conseguiram chegar em uma resposta, mas participaram das apresentações e das discussões. Por exemplo, o grupo JRJ utilizou postagens anteriores (Figura 45) ao ver a resolução do grupo Class Experts. Segundo o aluno 1, do grupo JRJ, "*era esse valor (0,2) que ele precisava*" para concluir seu raciocínio, ou seja, perceber que "*o gráfico aumenta de* $1\ cm$ *após o quinto dia,* $2\ cm$ *após o décimo dia e continua de 3 cm após 15 dias...*". No entanto, o que o aluno quis dizer era que a cada 5 dias a planta crescia 1 cm.

Os integrantes do grupo MTSD (que estava sem um de seus membros), ao explicarem sua resolução, disseram que não estavam seguros de sua resposta, mas resolveram postar algo para concluir a atividade. Concluíram que utilizaram uma ideia semelhante à da equipe JRJ.

O grupo Quarteto Fantástico utilizou a mesma justificativa do grupo MTSD, mas não chegou a conclusões seguras para postar.

O grupo Class Experts explicou que o valor 100, presente na sua resolução postada, foi um teste para identificar se estavam corretos. Eles perceberam o erro na escrita matemática logo no início, ou seja, ao pensarem que 100 era o número de dias e 0,2 era o quanto a planta crescia em cm por dia - no mesmo sentido apresentado pela equipe JRJ. Sendo assim, em consenso foi aceita como resolução correta $y = 0{,}2.x$.

Figura 49 – Registro das resoluções do Problema 4c



Fonte: Dados da pesquisa.

A professora-pesquisadora explicou, ao formalizar o conteúdo, que para encontrar a função que gerou o gráfico também seria possível calcular o valor do coeficiente angular da função. Este pode ser obtido de formas diferentes: Graficamente, aplicando o conceito de taxa de variação, conhecendo dois pontos de uma reta, ou então, utilizando o ângulo de inclinação da reta com o eixo x. No primeiro caso, são escolhidos dois pontos da reta, tal que:

$\boldsymbol{a} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$, em que **y** =y final; $\boldsymbol{y_0}$ = y inicial; **x** = x final e $\boldsymbol{x_0}$ = x inicial

Assim, substituindo os valores na fórmula e considerando x final = 5, tem-se que:

$\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{1-0}}{\mathbf{5-0}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$, com isso, a função é: $\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{x}$. Ao substituir *x* por 30 (trigésimo dia), é encontrada a altura da planta, 6 cm.

Outra possibilidade seria calcular o coeficiente angular da função, utilizando o ângulo de inclinação da reta com o eixo *x*, poderia ser construído um triângulo retângulo. As medidas de seus catetos são as variações em y (ordenada) e em x (abcissas). O ângulo α pode ser determinado por meio da razão trigonométrica tangente:

$$\boldsymbol{a = tan\, a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{yB - yA}{xB - xA}}$$

Após representar algebricamente a função, verificou-se que ela é crescente, pois a > 0. A professora-pesquisadora definiu crescimento e decrescimento de uma função. O material didático dos alunos trouxe atividades sobre isso e foram desenvolvidas como tarefa. A leitura do último problema proposto também deveria ser realizada previamente.

Uma ampliação desse problema seria possível fazendo uma atividade prática, por meio do plantio, coleta de dados e esboço do gráfico para verificar a relação entre o tempo e o crescimento da planta, analisando as condições do problema e se existe uma planta com esse comportamento (que se desenvolve continuamente). O uso de *softwares* gráficos para a construção e visualização do gráfico também seria possível.

5.5 PROBLEMA 5: JARRA DE ÁGUA

Em uma tarde de muito calor, você e outros quatro amigos encontraram uma jarra de água de 2 litros geladinha na geladeira da sua casa. Você verificou que os copos disponíveis no armário tinham capacidade de 200 ml. Como todos estavam com muita sede, foi servida uma rodada da bebida para cada um.

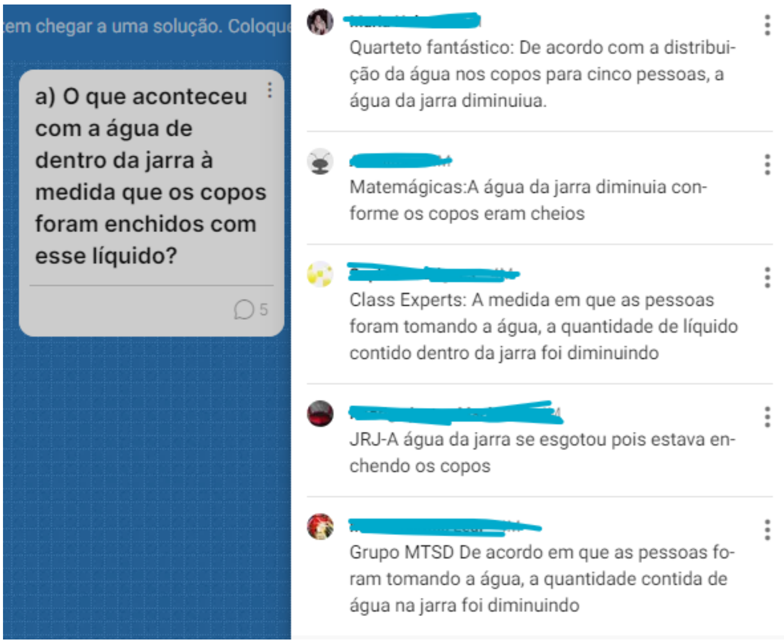
Considerando o comportamento do líquido na jarra, discuta com seus colegas:

a) O que aconteceu com a água de dentro da jarra à medida que os copos enchidos com esse líquido?
b) Como esse problema pode ser representado algebricamente?
c) Como esse problema pode ser representado graficamente?
d) Há algum intervalo no gráfico onde a produção é constante? Se sim, qual?

(LADEIRA, 2015, p. 113)

Essa aula foi a última da sequência elaborada e, segundo as alunas, com "*gostinho de quero mais*" (aluna 4, grupo Quarteto fantástico e aluna 2, Matemágicas). A discussão logo se iniciou e todos os grupos chegaram à mesma conclusão: *a água da jarra foi diminuindo conforme foram servidos os copos de água.* Fazendo uso de conceitos e procedimentos abordados nas aulas anteriores, os alunos levaram menos tempo para discutir o problema, mostrando compreensão, individual e em equipe, do enunciado e da ferramenta que iram utilizar. Logo foram postando suas conclusões no *Padlet*, conforme Figura 50.

Figura 50 – Registro das resoluções do Problema 5a



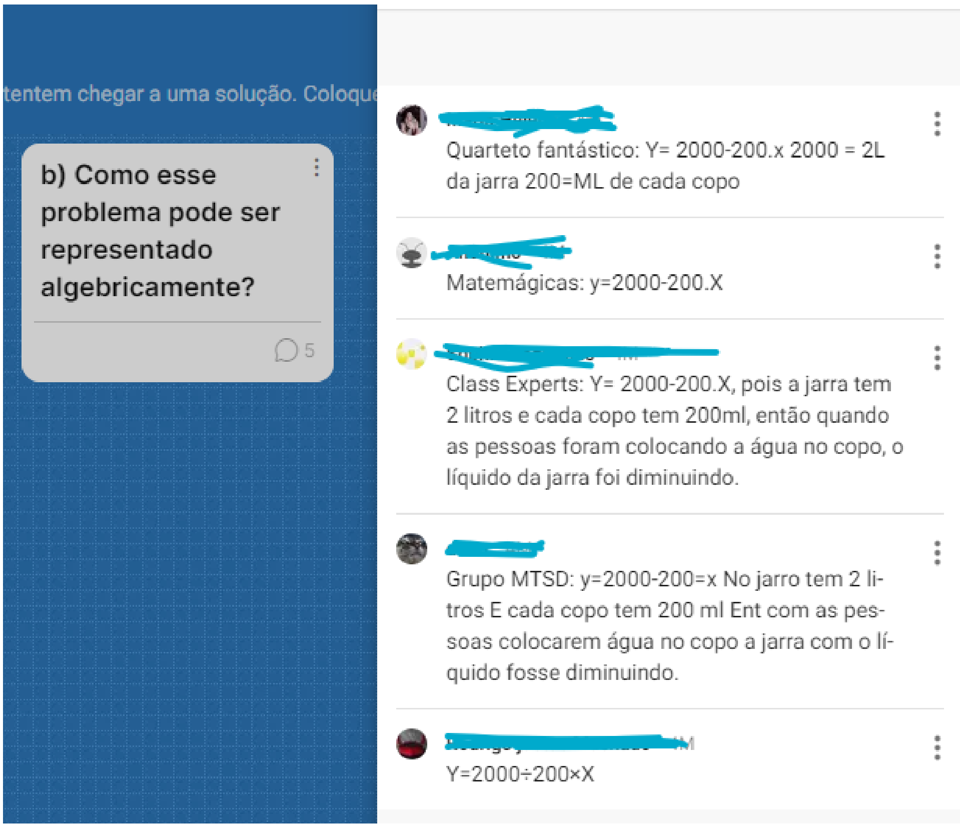
Fonte: Dados da pesquisa.

A plenária foi o momento em que os próprios alunos destacaram para o grupo JRJ os dados do enunciado, pois o problema não dizia que a água da jarra se esgotou e, sim, diminuiu. O grupo agradeceu a colaboração e concordou. Em consenso, a professora-pesquisadora e os alunos concluíram que, com exceção do grupo JRJ, os demais responderam corretamente a esse item do problema.

No item "b", também foi um momento em que os alunos mostraram um conhecimento prévio, principalmente na conversão correta de litros para ml. Todos os grupos postaram que *2 litros correspondem a 2000 ml*, isso porque a jarra continha a unidade de medida em litros, e, os copos, em ml.

Os grupos postaram suas conclusões (Figura 51) e começaram a defender seus raciocínios.

Figura 51 – Registro das resoluções do Problema 5b



Fonte: Dados da pesquisa.

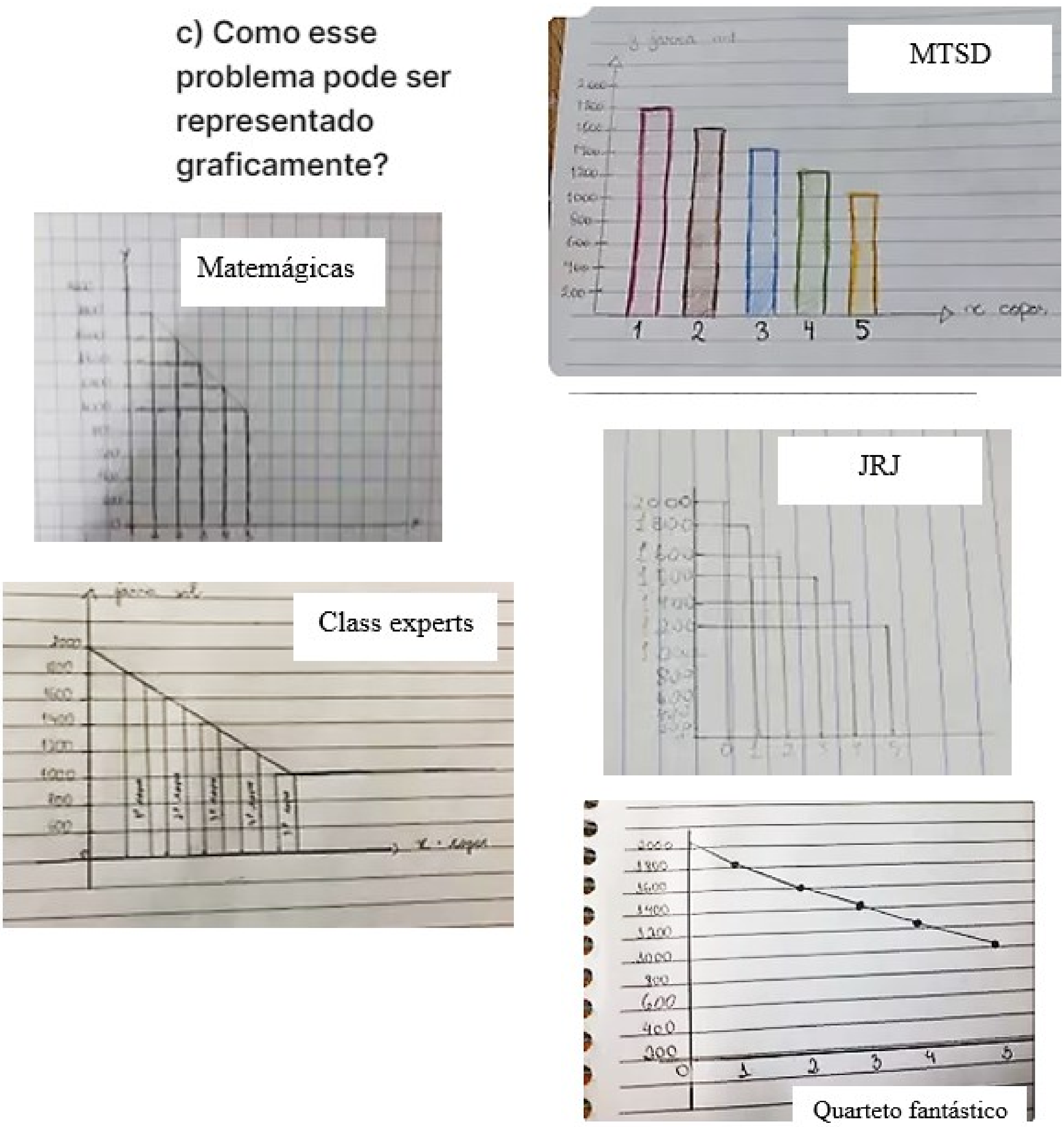
Os grupos Matemágicas, Quarteto Fantástico, MTSD e Class Experts compartilharam suas resoluções no *Padlet* e explicaram o significado das letras utilizadas. A aluna 4, do grupo Matemágicas, explicou que não indicaram na resolução postada, mas "*o y representa a quantidade de água após servidos os copos. Os copos foram representados pelo x". O grupo* MTSD reconheceu que digitou o sinal de "=" (igual) errado, "*era pra ser um sinal de multiplicação"* (aluno 2) e completou: *"a jarra está com 2000 ml e vai esvaziando conforme os copos de 200 ml vai se enchendo. Após o primeiro copo retirado fica 1800 ml, era isso que tínhamos pensado"*.

O grupo JRJ explicou que utilizou a operação de divisão porque pensou em "*2000 ml dividido em copos de 200 ml"* (aluno 1). O grupo reconheceu seu erro e o acerto das outras equipes e perceberam nas explicações, principalmente do grupo Class Experts, como deveriam testar a lei de formação da função, para o intervalo $1 \leq x \leq 5$.

A professora-pesquisadora destacou os erros na digitação, bem como a dificuldade de escrever matematicamente o que eles tinham explicado verbalmente. O aluno 2, do grupo MTDS falou: "*Professora, matemática é mais legal fazer conta do que escrever, sem falar na pressa de entregar*". Esse aluno prefere não justificar sua resolução e expõe que o tempo estimado para entrega das resoluções pode ser um dos fatores dos erros na escrita e também na resolução. Os demais alunos concordaram e acrescentaram que, na plenária, fica bem mais fácil de explicar. A professora-pesquisadora reforçou a necessidade da escrita matemática e o combinado para as aulas era que as resoluções fossem justificadas, por escrito ou oralmente. Alunos e professora-pesquisadora, em consenso, concordaram que a resolução e as explicações em plenária dos grupos Quarteto Fantástico, Matemágicas, Class Experts e MTSD estariam corretas.

A Figura 52 apresenta os gráficos construídos pelos grupos no item “c”:

Figura 52 – Registro das resoluções do Problema 5c



Fonte: Dados da pesquisa.

Houve pouco debate no item “c”, visto que a conversa nos grupos do *WhatsApp*, bem como presencialmente foi sobre a construção de gráficos: O grupo MTSD optou por fazer um gráfico de coluna, pois os integrantes achavam mais fácil. A professora-pesquisadora optou por fazer questionamentos sobre os tipos de gráficos propostos no momento da plenária. Os demais grupos optaram por fazer um gráfico conforme os construídos ou visualizados nos problemas anteriores.

Os grupos Class Experts e Quarteto Fantástico fizeram seus gráficos e traçaram uma reta. Questionados pela professora-pesquisadora sobre o do porquê de terem feito isso, a aluna 4, do grupo Quarteto Fantástico, explicou: “*No nosso gráfico, professora, a linha de baixo (eixo x) é a quantidade de copos e na linha em pé (eixo y) estão os ml. Fizemos uns pontos representando cada retirada dos copos e ligamos”.* A professora-pesquisadora os questionou novamente: “*Como assim?”* A aluna respondeu: *“Um copo está ligado com 1800 ml, porque tinha no início 2000 ml e serviu/retirou o primeiro copo de 200 ml ficando 1800 ml, depois encheu o segundo...e assim até o quinto copo”.* A aluna, com suas palavras, quis dizer que a jarra estava com 2000 ml de água no início e, após um certo tempo, encheu o primeiro copo. Logo após, encheu o segundo copo, e assim, sucessivamente, até o último/quinto copo. Aqui, encontra-se um indício do raciocínio covariacional (THOMPSON; CARLSON, 2017). O raciocínio da aluna pode ser interpretado como variações entre grandezas. A grandeza (quantidade de copos) se altera no sentido de crescimento com o passar do tempo (1 copo, 2 copos, 3 copos, 4 copos e 5 copos), e a grandeza y (água, em ml) também se altera (decresce). O gráfico relaciona essas duas grandezas inversamente proporcionais, elas estão covariando, ou seja, uma provoca interferência na outra. Quantos mais copos forem retirados, menos água ficará na jarra.

A professora-pesquisadora, na sequência, solicitou que o grupo Class Experts explicasse sua resolução. A aluna 2 utilizou a mesma ideia do grupo Quarteto Fantástico e acrescentou: “*professora, sobrou água na jarra que daria pra encher mais 05 copos!*” Com essa fala, a aluna dava indício para a resolução do próximo item, porque seria a visualização do intervalo no gráfico em que não há retirada de mais água. Por não querer antecipar a próxima resolução, a professora-pesquisadora solicitou explicação dos próximos grupos.

Os grupos Matemágicas e JRJ construíram seus gráficos de modo semelhante, mas não traçaram a reta. A justificativa também foi no sentido da apresentada pelos grupos Class Experts e Quarteto Fantástico.

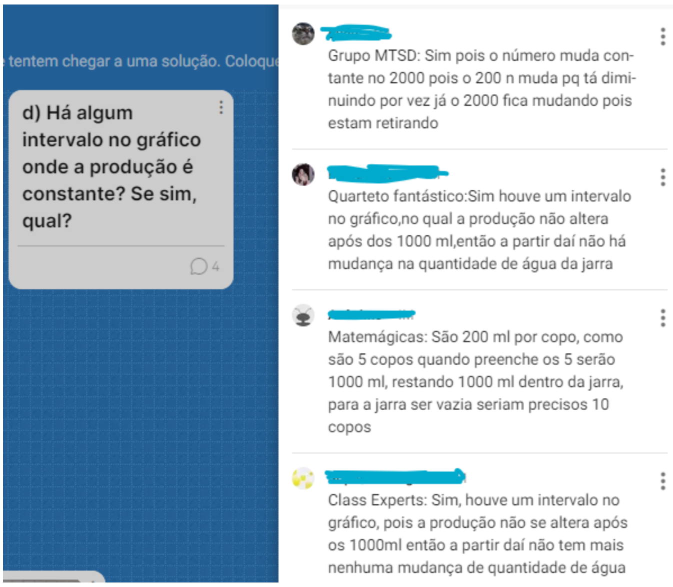
O grupo MTSD construiu um gráfico de colunas, pois, segundo aluna 4, “[...] *estamos acostumados em construir esse gráfico, é mais bonitinho. E cada barra representa o copo* *enchido até o ml que restou*". Essa aluna recordava de conhecimentos adquiridos com o conteúdo Estatística e o aplicou para explicar a construção do gráfico. Os alunos confundiram grandezas com quantidade numérica. A professora-pesquisadora questionou-os sobre quais grandezas estavam envolvidas no problema, e o aluno 1 (grupo MTSD) respondeu: "*o eixo x representa a quantidade de copos e o eixo y representa o volume de água na jarra".* O aluno quis dizer que o gráfico representa o volume de água da jarra em função dos copos retirados.

A professora-pesquisadora chamou a atenção sobre o tipo de gráfico e seu uso diante das situações matemáticas. Em relação ao uso do gráfico de barras, eles são utilizados quando o domínio e imagem são variáveis discretas, em geral, representadas por números inteiros (como número do calçado e quantidade de pessoas) e não quando um deles é uma variável contínua (como volume ou resultados de medidas). Fazendo uso dessas definições, também foi discutido quando o gráfico deve ser "traçado" (formando uma reta) e quando ele seria formado por pontos. Os alunos perceberam que se o domínio e a imagem forem formados por variáveis discretas, o gráfico será formado por um conjunto de pontos; por outro lado, caso sejam variáveis contínuas, o gráfico deve ser traçado.

Giovanni Junior e Castrucci (2018) classificam as variáveis em qualitativas (definidas por atributos ou categorias) e quantitativas (podem ser medidas usando uma escala numérica). As variáveis quantitativas podem ser discretas ou contínuas. Já as variáveis qualitativas são diferenciadas em nominais ou ordinais.

Em seguida, todos foram para resolução do item "d". Os grupos Class Experts, JRJ Matemágicas e Quarteto Fantástico, em suas discussões, concluíram que a partir de 1000 ml a quantidade de água não se altera, ficando constante. O grupo MTDS, ao ver as demais equipes postando, apressou-se em concluir e durante a plenária percebeu seu equívoco: "O *número 2000 seria os ml, mudando/diminuindo conforme enche os copos. Professora, esquecemos de escrever que para no 1000 ml e não muda mais"* (aluno 2). A professora-pesquisadora pediu aos demais grupos para que apresentassem suas resoluções e justificativas. A Figura 53 mostra as postagens dos grupos no *Padlet*.

Figura 53 – Registro das resoluções do Problema 5d



Fonte: Dados da pesquisa.

Em consenso, a professora-pesquisadora e os grupos chegaram à conclusão de que a resposta do grupo Quarteto Fantástico foi direta e completa.

A professora-pesquisadora parabenizou a turma pelo comprometimento e sucesso durante as resoluções e formalizou o conteúdo, utilizando-se de linguagem intuitiva e evoluindo para formal. No Problema 5, destacou que, à medida que os copos são enchidos, o volume de água na jarra diminui, e isso se caracteriza uma função decrescente. A função decrescente é aquela em que o valor de y diminui toda vez que o valor de x é aumentado. Para tanto, basta observar o valor do coeficiente “a” da função. Esse coeficiente é proveniente da forma geral da função do primeiro grau: $y = ax + b$, e se $a < 0$, a função é decrescente. No caso do Problema 5, a função é $f(x) = 2000 - 2x$ ou $f(x) = -2x + 2000$, $1 \leq x \leq 5$, e o coeficiente $a < 0$. Portanto, o gráfico que representa esse problema é uma reta que mostra o comportamento decrescente dessa função até o momento em que foram retirados cinco copos ($x = 5$) de 200 mililitros de água da jarra, e sobrou 1 litro de água no recipiente, ou seja, *f*(*x*)=1000. De tal modo, tem-se uma função constante a partir disso, em que $a = 0$ e o gráfico é uma reta horizontal.

Com esse problema, pode-se instigar os estudantes a esboçarem gráficos correlacionando altura e tempo, por exemplo, analisando se essa variável é relevante para o problema. Recomenda-se o uso de *softwares* gráficos para a construção e visualização dos gráficos, com ou sem restrição do domínio.

6 DISCUSSÃO DOS DADOS

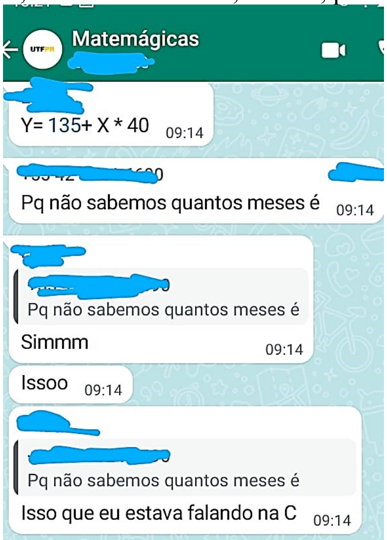
No Quadro 7 estão dispostas os 06 eixos de análise, bem como são trazidos fragmentos de respostas dos participantes da pesquisa, individualmente ou dos grupos, e percepções gerais da turma, registradas no caderno de campo da professora-pesquisadora, durante a resolução dos problemas propostos.

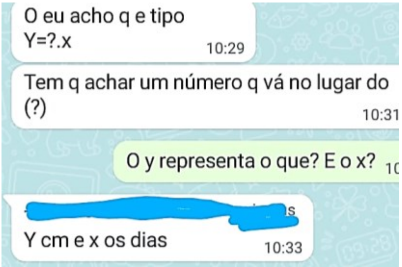
Quadro 7 – Análise dos problemas

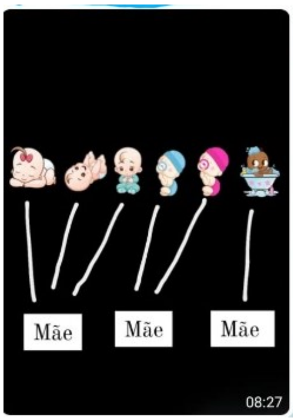
EIXOS DE ANÁLISE	FRAGMENTOS DE RESPOSTAS DOS PARTICIPANTES/ REGISTROS DAS RESOLUÇÕES DOS PROBLEMAS
(1) A construção da ideia de relação	"*O pastor **associava** o número de ovelhas com o número de pedras, para conseguir contá-las"* (QUARTETO FANTÁSTICO, problema 1a).
	*"O pastor **associava** o número de pedras com o número de ovelhas"* (JRJ, problema 1a).
	"*A **associação** foi realizada através do número de pedras equivalente ao número de ovelhas"* (MTSD, problema 1a).
	"*Ele **associava** as ovelhas as pedras, exemplo: 1 ovelha, 1 pedra, 2 ovelhas, 2 pedras..."* (MATEMÁGICAS, problema 1a). *"O pastor **associava** o número de ovelhas com o número de pedras"* (CLASS EXPERTS, problema 1a).
	"*Pensei que os bebês poderiam ser o grupo do domínio (...)"* (MATEMÁGICAS, aluna 1. Problema 3a).
(2) O pensamento covariacional	*"Se **sobra** pedras, é sinal que está **faltando** ovelhas!"* (MTSD, problema 1c). "*O fato de estar **sobrando** uma pedra é a **falta** de uma das ovelhas*" (QUARTETO FANTÁSTICO, problema 1c)
	*"Acreditamos que é porque está **faltando** uma ovelha no rebanho" (*MATEMÁGICAS, problema 1c).
	"*O fato te ter **sobrado** uma pedra significa a **falta** de uma ovelha no rebanho, ou erro na contagem" (*JRJ, problema 1 c).
	*"Se usarmos a equação, podemos determinar o **valor guardado**, relacionando **a quantidade de meses da economia** [...]"* (CLASS EXPERTS, problema 2c).
	"***Cada** 5 **dias** a planta **cresce** 1cm. Então a relação é que **a cada** 5 **dias** a flor **cresce** 1 cm"* (CLASSS EXPERTS, aluna 5, problema 4a).
	*"A relação é que **o gráfico aumenta conforme o crescimento diário** da planta, ou seja em 5 dias a planta cresceu 1 cm*" *(*MATEMÁGICAS, problema 4a).
	*"Se **a cada** 5 **dias** ela **cresce** 1 cm após 30 dias ela terá 6 cm*" (JRJ, problema 4 b).
	*"De acordo com **a distribuição da água nos copos** para cinco pessoas, **a água da jarra diminuía**"* (QUARTETO FANTÁSTICO, problema 5a).
	*"A **medida da água diminuía conforme os copos eram cheios**"* (MATEMÁGICAS, problema 5a).

<table>
<tr>
<td rowspan="2">(3) A passagem da linguagem corrente para a linguagem algébrica

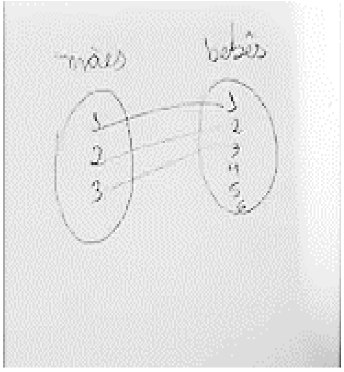
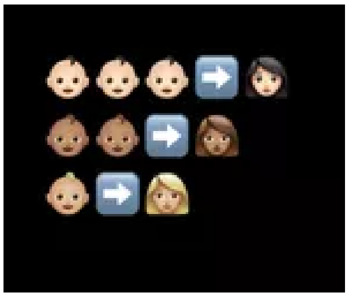
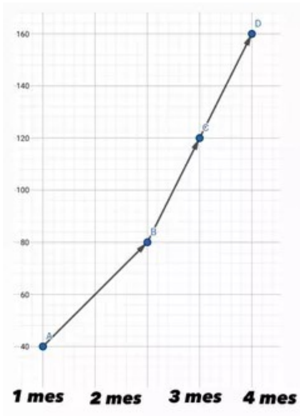
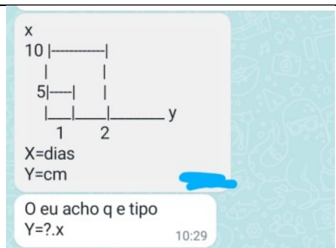
(Lei de formação da função)</td>
<td>“O y representa a quantidade de água após servidos os copos. Os copos foram representados pelo x” (MATEMÁGICAS, ALUNA 4, problema 5b).

“$y = 2000 - 200.x$” (QUARTETO FANTÁSTICO; (CLASS EXPERTS; MATEMÁGICAS; MTSD, problema 5b).


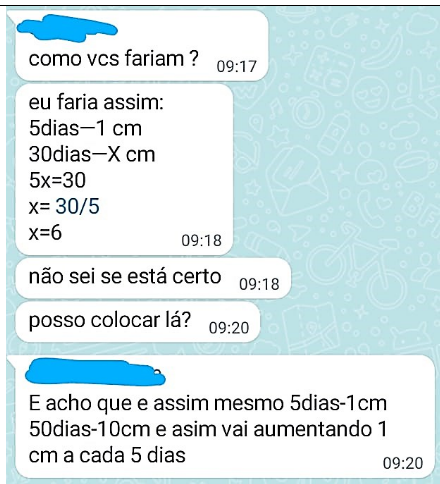
Conversa no aplicativo de mensagem WhatsApp do grupo MATEMÁGICAS, problema 2d</td>
</tr>
<tr>
<td>

Conversa no aplicativo de mensagem WhatsApp entre o aluno 1, grupo JRJ e a professora-pesquisadora, problema 4c.</td>
</tr>
<tr>
<td>(4) As formas de representação de uma função</td>
<td>

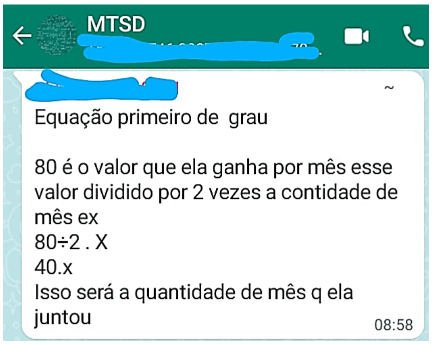
Esquema do Grupo Quarteto Fantástico, problema 3a</td>
</tr>
</table>

	  **Diagrama de Venn** feito pelo Grupo Matemágicas **e uso de *emojis*** pelo grupo Quarteto Fantástico
	 **Representação gráfica** do Problema 2e pelo grupo Quarteto Fantástico
	 **Conversa** no aplicativo de mensagem *WhatsApp* do grupo JRJ, problema 4c
	Representação algébrica "$Y = 2000 - 200.x$" (QUARTETO FANTÁSTICO; CLASS EXPERTS; MATEMÁGICAS; MTSD, problema 5).
(5) O uso e a ressignificação de conhecimentos matemáticos prévios.	*" O conjunto pertencente são os **naturais e os positivos** , porém só os positivos"* (QUARTETO FANTÁSTICO, problema 1b).
	*"Pertencem aos **conjuntos naturais**, pois não tem zero[...]"*(JRJ, problema 1b).
	"Pertecem aos **naturais** e aos **inteiros**, mas só os **posiivos**" (CLASS EXPERTS, problema 1b).
	*"São os conjuntos de **números naturais**"* (MTSD, problema 1 b).

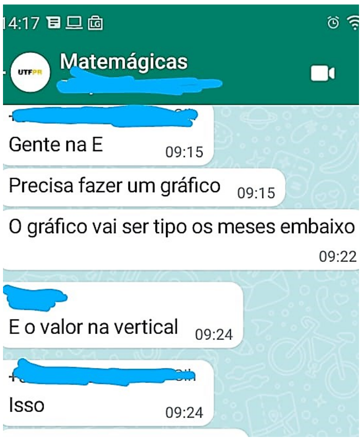
<table>
<tr><td></td><td>“Pertence aos conjuntos dos números naturais e inteiros, porem , esses positivos, pois no problema não identificamos outros conjuntos numericos”(MATEMÁGICAS, problema 1b)</td></tr>
<tr><td></td><td>“ Eu acho que não é fração, não estamos trabalhando com fração, e sim com numeros naturais”(MATEMÁGICAS, aluna 1, problema 2c).</td></tr>
<tr><td></td><td>“Não é potência. Potencia é do tipo 40.40, não dá certo. Acho que é equação fracionária” (MATEMÁGICAS, aluna 2, problema 2c).</td></tr>
<tr><td></td><td>“ Acredito que utiliza regra de três” (MATEMÁGICAS, aluna 3, problema 2c).</td></tr>
<tr><td></td><td>



Regra de três - Discussão do grupo Class Experts no problema 4b.</td></tr>
<tr><td></td><td>



Equação do 1º grau - Discussão do grupo MTSD no Problema 2c.</td></tr>
</table>

	 **Representação gráfica -** Discussão do grupo Matemágicas no Problema 2e.

Fonte: Dados da pesquisa.

No primeiro eixo, *a construção da ideia de função*, foram selecionados fragmentos de respostas dos participantes/registros das resoluções dos problemas 1 e 3, identificando-se, assim, indícios da compreensão da ideia de "relação" escrita em linguagem informal. Diante das dificuldades reveladas pelos alunos para compreender a ideia de relação neste eixo, sugeriu-se, no Produto Educacional, antecipá-lo e propô-lo como Problema 2. A sequência ganha uma estrutura melhor, visto que no Problema 1 se explora a relação entre pedras e ovelhas e no Problema 3 essa ideia é ampliada, visando definir um tipo especial de relação, que é a função.

O segundo eixo, *o pensamento covariacional*, foi analisado por meio de fragmentos das respostas para os problemas 1, 2 ,4 e 5, em que ocorreu uma escrita informal, mas que revela noções intuitivas que podem ser interpretadas como variações entre grandezas - raciocínio covariacional (THOMPSON; CARLSON, 2017). No caso, foram identificadas variações entre as seguintes grandezas: (animais-pedras) a quantidade de animais é representada pela quantidade de pedras, se sobram pedras estão faltando animais; (valor guardado-quantidade de meses) quanto mais meses forem considerados, maior será o dinheiro guardado; (altura da planta e dias) conforme o problema enunciado, ao passar os dias, a planta fica mais alta; (água na jarra-copos servidos) a água da jarra diminui, conforme são servidos os copos de água.

Ao trazer a construção do conceito de função por meio da ideia da variação entre grandezas e como uma "interfere" na outra, propõe-se uma forma diferenciada de abordagem, e isso ocorreu durante a implementação dos problemas, conforme mostram os fragmentos apresentados. "[...] ressignificar esse conceito na Educação Básica é considerar que uma função representa como duas ou mais quantidades variam uma em relação à outra" (TREVISAN *et.al*, 2020, p.283).

Van de Walle (2009) ressalta que o conteúdo função não deve ser visto somente como uma regra que associa elementos entre conjuntos, pois somente isso pode ser formal para alunos do Ensino Fundamental. “[...] Para esses alunos o conceito de função evolui melhor a partir de situações contextualizadas em que uma mudança em uma coisa (variável independente) cause uma mudança correspondente em outra coisa (variável dependente)” (VAN DE WALLE, 2009, p. 303).

O terceiro eixo referente à *passagem da linguagem corrente para a linguagem algébrica (Lei da formação de uma função)* traz fragmentos das discussões dos problemas 2, 4 e 5. As resoluções mostraram a dificuldade dos alunos com o uso de letras (como variáveis) para apresentar a lei de formação da função a partir do enunciado do problema. Eles tentavam raciocinar, partindo da ideia de equação (incógnita), conteúdo este que aprenderam no ano anterior. No entanto, os alunos não haviam distinguido, até então, que uma equação envolve determinar um único valor desconhecido (a incógnita), mas os problemas abordavam uma relação entre duas grandezas que variam. Tal fato é corroborado nas discussões dos grupos, dificultando, de certa forma, a construção do conceito de função.

Tinoco (2009) aponta, em suas pesquisas, que a dificuldade com o uso das letras pode ser devido a não terem sido exploradas as ideias de variáveis e dependências - durante o contato dos alunos com linguagem algébrica e equações. Segundo a autora, a não exploração das diferenças que existem na utilização das letras pode levar o aluno a encarar a letra sempre como incógnita.

Já quanto ao quarto eixo, *As formas de representação de uma função,* nos fragmentos de respostas dos participantes/registros das resoluções dos problemas, é encontrada uma pluralidade de representações, que os alunos compreenderam e construíram. Para Souza e Souza (2018), Van de Walle (2009), Tinoco (2009), essas representações são diferentes fontes de informação sobre um mesmo objeto - cada representação é um modo de olhar para a função.

As representações utilizadas foram as esperadas pela professora-pesquisadora: linguagem corrente, gráficos, diagrama de Venn e a algébrica. Entretanto, os alunos utilizaram também as representações, utilizando-se de esquemas e *emojis*. Isso foi positivo para construção do conceito de função, tendo em vista que os alunos trouxeram o problema e sua representação para sua vivência, pois os *emojis* fazem parte da comunicação dos discentes no ambiente virtual. Essa representação foi evidenciada ao deixar os alunos serem protagonistas da própria aprendizagem, criando sua representação e não utilizando ou seguindo algo pronto.

O quinto e último eixo de análise, *O uso e a ressignificação de conhecimentos matemáticos prévios*, revelou o que os alunos trouxeram como conhecimentos matemáticos prévios. No problema 1, foi identificada a discussão sobre os conjuntos numéricos. No problema 2, os alunos utilizaram uma linguagem matemática já conhecida como “metade”, “dividido”, potência, fração, regra de três, gráfico e equação. Os próprios alunos conversaram sobre esses conteúdos que, por vezes, não tinham relação com o que estava sendo proposto. Assim, chegaram a conclusões, tais como: não ser uma fração, pois estavam trabalhando com o Conjunto dos Números Naturais; recordaram que potência poderia ser exemplificada por (“40. 40”); a regra de três poderia ser utilizada; poderiam fazer gráficos já conhecidos e usaram equações. Em problemas posteriores, o uso dos símbolos *x* e y foi justificado para representar a quantidade de dinheiro guardado, por exemplo, e estabeleceram uma relação entre as duas grandezas: valor guardado e quantidade de meses.

Os eixos de análise discutidos até aqui serviram de base para a resposta da questão desta pesquisa, bem como para atingir os objetivos propostos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação para a presente pesquisa foi a percepção da professora-pesquisadora, em anos anteriores, de pouco interesse por parte de alguns alunos quanto à matemática, além de um baixo nível de raciocínio e espírito de investigação para compreender problemas, em especial os que envolvem compreensão dos conceitos matemáticos relacionados ao conteúdo de função e seus diferentes tipos de representação.

Porém, o cenário educacional que antes de 2020 era presencial foi alterado diante das mudanças ocasionadas pela COVID-19. Em 2020, o ensino ocorreu de modo remoto, com aulas síncronas, de março de 2020 a junho de 2021. Tornou-se híbrido (com alunos presenciais e remotos) em julho de 2021. As aulas voltaram a ser presenciais em fevereiro de 2022, com a possibilidade de serem remotas para alunos com COVID-19 (ou caso familiares testassem positivo para a doença). Durante a realização da coleta de dados desta pesquisa, as aulas estavam acontecendo em modo híbrido.

Se a MEEAMARP tem seus desafios no ensino presencial, no ensino híbrido, formar grupos, colocar as resoluções em uma lousa, debater o modo como os alunos resolveram os problemas parecia algo impossível. Fez-se necessário adaptar o roteiro dessa metodologia, e o uso do aplicativo de mensagens *WhatsApp* e da ferramenta *Padlet* foi a solução encontrada e validada para que ocorressem as discussões, respeitando o distanciamento emergencial. Além do uso de uma plataforma que permitisse a realização da aula de modo síncrono para os alunos que estivessem em casa. Muitas foram as dificuldades enfrentadas pelos alunos: casos de COVID-19 em membros da família, a instabilidade com a Internet, o “receio” com relação ao novo formato de aula. Diante desse cenário, a professora-pesquisadora, dentro de seu novo papel de mediadora, fez o possível para que acontecesse a nova dinâmica de aula.

A questão de pesquisa foi assim proposta: “*Como ocorre a construção do conceito de função, no 9º ano do Ensino Fundamental, através da Resolução de Problemas no ensino híbrido com o auxílio do Padlet?”.* Para respondê-la, foram iniciados os estudos teóricos e a elaboração ou adaptação de problemas geradores e seus objetivos específicos, bem como as habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) que se relacionam com o conteúdo de função, conforme disposto no Quadro 4.

Considerando-se os objetivos da pesquisa: analisar como os alunos resolvem problemas potencializados pelo uso de uma tecnologia digital; investigar a construção do conceito de função através da Resolução de Problemas no ensino híbrido e apresentar um Produto

Educacional que oriente o professor na introdução do conteúdo de função através da Resolução de Problemas, em relação ao primeiro, o uso do *Padlet* possibilitou um ambiente virtual de aprendizagem bastante funcional no ensino híbrido. Este recurso permitiu aos alunos o acesso ao problema, além de curtirem, comentarem e avaliarem as postagens de outros grupos no mural. Ressalta-se que a professora-pesquisadora não tinha trabalhado com o *Padlet* anteriormente.

Considerando o segundo objetivo da pesquisa, durante 10 aulas de Matemática e 5 encontros, os participantes da pesquisa aprenderam matemática enquanto resolviam problemas. As dificuldades envolveram a compreensão do problema - percebidas na leitura individual ou em conjunto; a exigência de justificativas por escrito às resoluções, pois os alunos não estavam acostumados a fazer isso. O papel da professora-pesquisadora foi fundamental para ajudá-los a superar tais dificuldades. Os momentos da plenária e da busca do consenso foram importantes e de muita participação. A formalização do conteúdo, segundo a metodologia apresentada, foi conduzida de forma a evidenciar a existência de um novo conteúdo e de apresentar uma linguagem formal relacionada aos conhecimentos prévios dos alunos.

Após a produção dos dados, em triangulação com o referencial teórico, foram delineados os seguintes eixos de análise: a construção da ideia de relação; o pensamento covariacional; a passagem da linguagem corrente para a linguagem algébrica (Lei da formação de uma função); as formas de representação de uma função e o uso e a ressignificação de conhecimentos matemáticos prévios.

Em relação ao eixo, *a construção da ideia de função* e os fragmentos selecionados de respostas dos participantes nos problemas 1 e 3 revelaram indícios da compreensão da ideia de "relação" escrita em linguagem informal, bem como dificuldades reveladas por todas as equipes para compreender a ideia de relação em linguagem matemática. Assim, sugeriu-se no Produto Educacional antecipar o Problema 3 e propô-lo como Problema 2, visando ampliar essa discussão para definir um tipo especial de relação, que é a função.

No segundo eixo, *o pensamento covariacional* foi identificado nos problemas 1, 2 ,4 e 5. Ocorreu uma escrita informal, mas que revela noções intuitivas que podem ser interpretadas como variações entre grandezas, que revelam um raciocínio covariacional (THOMPSON; CARLSON, 2017). No caso, foram identificadas variações entre as seguintes grandezas: (animais-pedras); (valor guardado-quantidade de meses); (altura da planta e dias); (água na jarra-copos servidos). Neste eixo, sentiu-se falta de exposição por parte dos alunos da dependência entre as variáveis (LIMA, 2006), (VAN DE WALLE, 2009).

O terceiro eixo, referente *à passagem da linguagem corrente para a linguagem algébrica (Lei da formação de uma função),* trouxe aspectos das discussões dos problemas 2, 4 e 5. As resoluções mostraram a dificuldade dos alunos com o uso de letras (como variáveis), para apresentar a lei de formação da função. Eles tentaram raciocinar partindo da ideia de equação (incógnita). No entanto, não haviam distinguido, até então, que uma equação envolve determinar um único valor desconhecido (a incógnita), mas os problemas abordavam uma relação entre duas grandezas que variam. Segundo Tinoco (2009), tal fato pode ser considerado fator que dificulta, de certa forma, a construção do conceito de função.

Já o quarto eixo, *As formas de representação de uma função,* nos fragmentos de respostas, evidenciou que os alunos compreenderam uma pluralidade de representações linguagem corrente, gráficos, diagrama de Venn e a algébrica, e as constroem sugerindo as suas próprias (*emojis*). Essa representação foi evidenciada naturalmente, ao deixar os alunos serem protagonistas da própria aprendizagem, não utilizando ou seguindo algo. A maior dificuldade foi na representação algébrica, o que corrobora Justulin et. al (2019). Para Souza e Souza (2018), Van de Walle (2009) e Tinoco (2009), essas representações são diferentes fontes de informação sobre um mesmo objeto - cada representação é um modo de olhar para a função.

O quinto e último eixo de análise foi *o uso e a ressignificação de conhecimentos matemáticos prévios*, revelou conhecimentos matemáticos prévios que os alunos trazem. No problema 1, foi identificada a discussão sobre os conjuntos numéricos. No problema 2, os alunos utilizaram-se de termos matemáticos (ou linguagem matemática) já conhecidos como “metade”, “dividido”, potência, fração, regra de três, gráfico e equação. O próprio uso do *x* e y (explorado na no problema 2) foi utilizado em outros problemas para representar a quantidade de dinheiro guardado, por exemplo, e estabelecer uma relação entre as duas grandezas: valor guardado e quantidade de meses.

Após as análises realizadas em cada um dos eixos, a pesquisa evidenciou que o conceito de função foi potencializado após o professor assumir a postura de mediador do conhecimento, propondo problemas geradores para que os alunos trabalhem em grupo (ou individualmente), com o uso de uma tecnologia digital. Essa construção iniciou-se pela construção da ideia de função, mediante a *compreensão da ideia de relação*, pois é necessário que percebam a existência de duas grandezas (SOUZA E SOUZA, 2018), (ou conjuntos) que se relacionam de alguma forma, o que é fundamental para o desenvolvimento do *pensamento covariacional*; por meio do pensamento covariacional (THOMPSON; CARLSON, 2017, TREVISAN *et al.*, 2020) os alunos percebem que a variação de uma das grandezas infere na outra; *na passagem da linguagem corrente para a linguagem algébrica* os alunos percebem que há uma lei de formação da função e a letra pode ser entendida, nesse caso, como uma variável*; na representação de uma função*, em que a forma algébrica é uma delas, mas que também pode ser realizada por meio de gráficos, tabelas, esquemas e linguagem vernácula (VAN DE WALE, 2009, TINOCO, 2009); e *no uso e ressignificação de conhecimentos matemáticos prévios* (VAN DE WALLE ,2009, MORAIS, 2008, BRASIL, 2018, ALLEVATO; ONUCHIC, 2019), visto que os alunos partem de conceitos e procedimentos que já conhecem (como equação) e avançam em sua compreensão algébrica.

Ressalta-se que a implementação dos problemas poderia ser diferente em alguns pontos. Um destaque é a preocupação com tempo/hora-aula para aplicação e resolução de cada problema, o que limitou ou interrompeu as discussões. O uso de uma quantidade menor de itens em cada problema poderia otimizar o tempo. Os problemas geradores utilizados foram adaptados e refinados e integram o Produto Educacional (último objetivo desta pesquisa) - um material para professores: *Padlet:* uma possibilidade para a construção do conceito de função através da Resolução de Problemas - com disponibilidade no Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (RIUT), no link http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2119.

Espera-se, em pesquisas futuras, ampliar as ideias apresentadas no material, desenvolvendo novos problemas contextualizados, tomando cuidado no que diz respeito às imagens, indicando que são ilustrativas; organizando um tempo maior para as discussões; bem como enfatizando o uso de *softwares* para construir e analisar gráficos de funções. Algumas questões que se colocam é: "Que quantidade de tempo seria adequada para os alunos resolverem o problema?"; "E, no caso das demais funções, que aspectos seriam relevantes para sua construção?"

Por fim, fica o convite para que os educadores matemáticos explorem a MEAAMARP, o produto e compartilhem seus avanços e reflexões.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 55, p. 1-19. 2009.

ALLEVATO, N.S.G. Trabalhar através da resolução de problemas: possibilidades em dois diferentes contextos. **VIDYA**, Santa Maria, v. 34, n. 1, p. 209-232, jan./jun. 2014.

ALLEVATO, N. S. G., ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p.35-52.

ALLEVATO, N. S. G., ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: In: ONUCHIC, L. R. ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2021.p.37-57.

ALLEVATO, N.; VIEIRA, G. Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. **Quadrante** – Revista de Investigação em Educação Matemática. Lisboa/Portugal, v. XXV, n. 1, p. 113-131, 2016.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de la R. As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática. **REnCiMa**, São Paulo, v. 10, n. 2. p. 1-14, 2019.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. In: ONUCHIC, L. R; LEAL JR, L. C; PIRONEL, M (orgs). **Perspectivas para a Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 355-396.

ANDRADE, C. P.; ONUCHIC, L. R. Perspectivas para a Resolução de Problemas no GTERP. In: ONUCHIC, L. R; LEAL, L. C; PIRONEL, M (orgs). **Perspectivas para a Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 433-466.

ANDREATTA, C; ALLEVATO, G.S.N. A Resolução de Problemas nos documentos de orientação curricular oficiais da Educação Básica Brasileira. VII Seminário Internacional de **Pesquisa em Educação Matemática**. SIPEM, Paraná, 2018.

ARAUJO, J. P. **Proposta de atividades para a introdução do conceito de função no ensino fundamental.** 2013. 57 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas - Campos dos Goytacazes/RJ, 2013.

ASSUNÇÃO, J. A. **A resolução de problemas como metodologia de ensino no conteúdo de função Afim fundamentada na teoria de aprendizagem significativa de Ausubel**. 2015.145 f. 145 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) - Universidade Estadual de Roraima.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. de M. (Org.). **Ensino Híbrido**: Personalização e Tecnologia na Educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Trad. Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. 1. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1977.

BORBA, M. de C.; ALMEIDA, H. R. F. L. de.; GRACIAS, T. A. de S. **Pesquisa em ensino e sala de aula:** diferentes vozes em uma investigação. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2018.

BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P. Mídias educacionais em ambiente virtual de ensino e aprendizagem: ampliando possibilidades para o trabalho colaborativo. **Revista Contexto & Educação**, [*s. l.*], v. 32, n. 103, p. 248-274, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.21527/2179-1309.2017.103.248-274>. Acesso em: 16 jun. 2021.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Investigação qualitativa em Educação: fundamentos, métodos e técnicas. In: BOGDAN, Robert; BIKLEN S. (org.). **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Porto Editora, 1994. p. 15-80.

BOTTA, E. S. **O ensino do conceito de função e conceitos relacionados a partir da resolução de problemas.** 2010. 427 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro/SP, 2010.

BOTELHO, L.; REZENDE, W. Um breve histórico do conceito de função. **Caderno Dá Licença**, v. 6, p. 65-75, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018.

BUSTAMANTE, J. G., RIBEIRO, C. M.; NAVARRO, M. M. El conocimiento especializado del profesor de matemática frente a problemas abiertos. In: **XIV CIAEM-IACME**, Chiapas, México, 2015. Chiapas, Mexico: CIAEM. Disponível em: http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/12002/El_conocimiento_especializado.pdf?sequence=2. Acesso em: 24 jul. 2015.

CALADO, T. V. **Invariantes operatórios relacionados a generalização**: uma investigação com estudantes do 9° ano a partir de situações que envolvam função afim. 2020. 197 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Cascavel/ PR, 2020.

CANAVARRO, A. P. O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da matemática com conexões – ideias da teoria ilustradas com exemplos. **Educação e Matemática**. Lisboa, n. 144-145, p. 38-42, out, nov, dez. 2017.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 1. ed. Lisboa, 1963.

CHEVITARESE, V.; ANTUNES, V. **Matemática.** Dom Bosco - Sistema de Ensino – 9º ano, ensino fundamental volume 3 – Pearson Education do Brasil, 2020. FREIRE, Paulo. Educação e mudança. 30ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2007.

CORDEIRO, E. M.; OLIVEIRA, G. S.; CUNHA, A. M. O. Resolução de Problemas como alternativa metodológica no ensino de matemática. in. oliveira, g. s. (org.). **Metodologia do ensino de Matemática**: fundamentos teóricos e práticos. Uberlândia - MG, FUCAMP, 2020, p. 120-150.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de problemas de matemática**. 12.ed. São Paulo: Editora Ática, 2000.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. 1ªedição, são Paulo: Ática, 2011.

DIAS, A.R**. O ensino e a aprendizagem do conceito de função através da resolução de problemas:** um estudo para desenvolver noções básicas inerentes ao conceito em classes do ensino fundamental. 2015. 195 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2015.

FERREIRA, C. R. dos. **Conceito de proporcionalidade**: uma proposta para o processo ensino-aprendizagem dos 7° ano do Ensino Fundamental. 2013. 65 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Maranhão, Maranhão, 2013.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pró-posições**, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1997, p. 43.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática:** 8º ano: ensino fundamental: anos finais 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GOMES, M. L. M. **Álgebra e funções na Educação Básica** – Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

GONÇALVES, W. J. **Raciocínio covariacional em aulas de cálculo diferencial e integral:** possibilidades de desenvolvimento a partir do uso de tarefas. 2018. 101 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018.

HASHIMOTO, Y.; BECKER, J. The open approach to teaching mathematics-creating a culture of mathematics in the classroom: Japan. In: L. J. Sheffi eld (Ed.), **Developing mathematically promising students**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1999, p. 101-119.

IEZZI, G., MURAKAMI, C. **Coleção Fundamentos da Matemática Elementar**. Vol. 1. 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2013.

JUSTULIN, A. M. **A formação de professores de matemática no contexto da resolução de problemas.** 2014. 254 p. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2014.

JUSTULIN, A. M.; PEREIRA, F. F.; FERREIRA, A. DA S. Representação gráfica de Funções: uma análise das principais dificuldades de alunos do Ensino Médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 6, p. 301-318, 10 dez. 2019.

KILPATRICK, J.A History of Research in Mathematics Education, p.3-38. In: **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the Nation Coucil of Teachers of Mathematics**. Douglas A. Grouws (ed.). New York: MACMILLAN, 1992.

KLINE, M. **O Fracasso da Matemática Moderna**. 1ª ed., São Paulo: IBRASA, 1976. Tradução: Leonidas Gontijo de Carvalho. Título do original: Why Johnny can´t add: the failure of the New Math. 1973.

LADEIRA, V. P. **O Ensino do Conceito de Funções em um Ambiente Tecnológico**: uma investigação qualitativa baseada na teoria fundamentada sobre a utilização de dispositivos móveis em sala de aula como instrumentos mediáticos da aprendizagem. 256 f. 2015. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2015.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática. v. 1. 10.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Org.) **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** 3. ed. Campinas: Editora Autores Associados, 2012, p. 03-37.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2ª edição. Rio de Janeiro: E.P.U., 2014.

MACHADO, N. J; GRANJA, S.C. E.; MELLO, P. L. J; MOISÉS, P. R.; FONSECA, F.R.; PIETROPAOLO, C. R.; SPINELLI, W. **Matemática -** Caderno do professor - Ensino Médio – 1° ano, volume 2 - Secretaria da Educação São Paulo, 2009.

MATULLE, L. M. **O raciocínio de proporcionalidade sob a luz da Resolução de Problemas com estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental.** 2019. 116 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Centro-Oeste, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Guarapuava/PR, 2019.

MORAIS, R. S. **A aprendizagem de polinômios através da resolução de problemas por meio de um ensino contextualizado**. 2008. 251 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, 2008.

MORAIS, R. S. **O processo constitutivo da Resolução de Problemas como uma temática da pesquisa em Educação Matemática**: um inventário a partir de documentos dos ICMEs. 2015. 446 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 1989.

NCTM. **Professional standards for teaching mathematics**. Reston: NCTM, 1991.

NCTM. **Assessment standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 1995.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

OEHRTMAN, M. C., CARLSON, M. P.; THOMPSON, P.W. **Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function.** In: Carlson, M. P., & Rasmussen, C. (Eds.). Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics Washington, DC: Mathematical Association of America, 27-42, 2008.

OLLAIK, L. G; ZILLER, H. M. Concepções de validade em pesquisas qualitativas. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 38, n. 1, 229-241, 2012.

ONUCHIC, L.R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 212-231.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Resolução de Problemas na Licenciatura em Matemática: rumo à compreensão e à aquisição das grandes ideias contidas na Matemática escolar. In: **SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 4, 2009, Brasília. Anais do 4º SIPEM. Brasília: SBEM, 2009, p. 1-21.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA** - Boletim de Educação Matemática. UNESP. Rio Claro, v.25, p.73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R. A Resolução de Problemas na Educação Matemática: onde estamos e para onde iremos? In: **IV Jornada Nacional de Educação Matemática - XVII Jornada Regional de Educação Matemática**. De 06 a 09 de maio de 2012. Universidade Federal de Passo Fundo: 2012.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 4ª ed. São Paulo: Cortez, pp. 232-252, 2012.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A.V.; BORBA, M. de C. (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 4. Ed. São Paulo: Cortez, 2012, p. 232-252.

ONUCHIC, L. R. ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.) **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade através da Resolução de Problemas no curso superior de Licenciatura em Matemática. In: **SEMINÁRIO Educação**

Matemática Debate, Montes Claros (MG), Brasil v. 4, e202042, p. 1-26, 2020 26 INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 2015, Pirenópolis. Anais do 6º SIPEM. Brasília: SBEM, 2015, p. 1-12.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. 1945. Título em inglês: “How to solve it: a new aspect of mathematical method”. Tradução de Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POPE, C.; MAYS, N. **Pesquisa qualitativa na atenção à saúde**. 2ª edição. Porto Alegre: Artmed, 2005. 118 p.

SANTOS, N. F. **A metodologia de resolução de problemas e o aplicativo Winplot para a construção do conceito de função por alunos do ensino médio**. 2013. 116 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Franciscana, Santa Maria, 2013.

SANTOS, N. P.; JUSTULIN**,** Andresa Maria. A Resolução de Problemas em tempo de pandemia através de aulas síncronas: uma metodologia invertida no ensino de matemática para a construção do conteúdo função exponencial. In: **VIII Encontro Brasiliense de Educação Matemática**, 2020, Brasília (virtual). Anais do VIII Encontro Brasiliense de Educação Matemática. Brasília, 2020.

SANTOS, J.G. **Apostila de Função do 1° Grau**, 2017. Disponível em: <file:///C:/Users/User/Documents/Apostila%20de%20Fun%C3%A7%C3%A3o%20at%C3%A9%20Fun%C3%A7%C3%A3o%20do%201%C2%BA%20grau%20(20%20p%C3%A1ginas,%20111%20quest%C3%B5es,%20com%20gabarito).pdf.> Acesso em: 10 mar. 2021.

SILVA, M. H. M.; REZENDE, W. M. Análise histórica do conceito de função. **Caderno Dá Licença**, v. 2, p. 28-33, 1999.

SILVA, M. **Lista - Função Afim**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, 2021. Disponível em: https://docente.ifrn.edu.br/marcelosilva/disciplinas/matematica-i/funcoes/lista-funcao-afim/view. Acesso em: 10 mar. 2021.

SOUZA, R.P. **A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia a dia**. 2016. 98 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Campos dos Goytacazes, 2016.

SOUZA, A. A. **Obstáculos epistemológicos do conceito de função na transição do ensino médio para o superior.** 2016. 88 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, 2016.

SOUZA, J; SOUZA, O.L. A Definição de Função: Operacionalizar para Articular e Articular para compreender. **Alexandria**, Florianópolis, v. 11, n. 1, p. 125-148, maio. 2018.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: Trafton, P. R.; Shulte, A. P. (Org.). **New directions for elementar school mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

SHIMADA, S.; The Significance of an Open-Ended Approach. In: BECKER, P. J.; SHIMADA, S. (Ed.). **The Open-Ended Approach: a new proposal for teaching mathematics**. Reston: NCTM, 1997. cap.1. p. 1-9. 1. ed.1977, Japão.

TINOCO, L. A. **A. Construindo o conceito de função**. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, Projeto Fundão, 2009.

TINOCO, L. A. A. **Álgebra**: pensar, calcular, comunicar? 2. ed. Rio de Janeiro, Projeto Fundão, 2011.

THORNDIKE, E. L. **The new methods in Arithmetic.** 1921. [S.I.]: On openlibrary.org. Disponível em: . Acesso em: 23 out. 2013.

THOMPSON, P. W.; CARLSON, M. P. Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In: Cai, J. (Ed.). **Compendium for research in mathematics education.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 421-456, 2017.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1994.

VALENTE, J. A. Integração currículo e tecnologia digitais de informação e comunicação: a passagem do currículo da era do lápis e papel para o currículo da era digital. In: CAVALHEIRI, A.; ENGERROFF, S. N.; SILVA, J. C. (Orgs.). **As novas tecnologias e os desafios para uma educação humanizadora**. Santa Maria: Biblos, 2013.

VAN DE WALLE, J. A. **Teaching Through Problem Solving**. In: VAN DE WALLE, J. A. Elementary and Middle School Mathematics. New York: Longman, 2001. p. 40-61.

VAN DE WALLE, J. A.; LOVIN, L. H. **Teaching Student**: Centered Mathematics grades 5-8, v.3. Boston: Pearson, 2006.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonese. – 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIEIRA, G. **Tarefas exploratório-investigativas e a construção de conhecimento sobre figuras geométricas espaciais**. 2016. 169f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) — Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo, 2016.

ZATTI, S. B. **Construção do conceito de função**: uma experiência de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas. 2010. 93 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Franciscana, Santa Maria, 2010.

ANEXO - FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

Adaptado de: RIZZATTI, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em: 14 dez. 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	A construção do conceito de função através da Resolução de Problemas no ensino híbrido
Título do Produto/Processo Educacional	Padlet: uma possibilidade para a construção do conceito de função por meio da Resolução de Problemas
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Nilcilene Pereira dos Santos
	Orientador/Orientadora: Andresa Maria Justulin
	Outros (se houver):
Data da Defesa	27/04/2022

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); *L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática* (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *<u>Apenas um item pode ser marcado</u>. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	( ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *<u>Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória</u>.	( ) Local ( ) Regional (X) Nacional ( ) Internacional Justificativa (*obrigatória*): O PE estará disponível no repositório institucional em Língua Portuguesa, podendo ser utilizado no país. ____ ____
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). *<u>Apenas um item pode ser marcado</u>.	( ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada *<u>Apenas um item pode ser marcado</u>.	( ) Econômica; ( ) Saúde; (X) Ensino;

	( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; ( ) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.	(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (X) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (X) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. (X) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	**Instituição**
Andresa Maria Justulin	UTFPR
Rosilda dos Santos Morais	UNIFESP
André Luis Trevisan	UTFPR