UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AYUMI TAMAKI MARCELINO

MATRIZES E OPERAÇÕES ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2021

AYUMI TAMAKI MARCELINO

MATRIZES E OPERAÇÕES ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina TCC 2, do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada.

Orientadora: Profa. Dra. Andresa Maria Justulin

CORNÉLIO PROCÓPIO
2021

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Ayumi Tamaki Marcelino

MATRIZES E OPERAÇÕES ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado às 19:30 no dia 01/12/2021, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Profa. Dra. Andresa Maria Justulin
(orientadora)

Profa. Dra. Marcele Tavares Mendes

Prof. Dr. Jader Otávio Dalto

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso"

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de ingressar nesta universidade e por ter me dado forças para chegar até aqui.

Aos meus familiares, por todo apoio e paciência.

Aos meus colegas de sala, pela parceria e companheirismo.

À minha orientadora Profa. Dra. Andresa Maria Justulin, por me orientar com sabedoria e profissionalismo, e pela paciência com que me guiou durante essa trajetória.

Aos professores e coordenadores, pelo apoio e dedicação e por contribuir em meu desenvolvimento durante esse tempo.

Enfim, a todos os que, por algum motivo, contribuíram para a realização desta pesquisa.

RESUMO

MARCELINO, Ayumi Tamaki. **Matrizes e operações através da Resolução de Problemas: Uma sequência didática**. 2021. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

Este trabalho teve por objetivo construir uma sequência didática sobre o conteúdo de matrizes para o Ensino Médio utilizando a metodologia Resolução de Problemas, para colaborar no ensino-aprendizagem de Matemática, bem como fornecer orientações aos professores. Para isso, foram feitos um levantamento histórico, uma revisão bibliográfica sobre matrizes e uma apresentação dos conceitos de matrizes e suas operações, abordados na sequência didática. Trata-se de uma pesquisa qualitativa. Para a construção da sequência foram realizados os seguintes procedimentos: a exploração do conceito de matriz e de suas operações a partir da análise de três livros didáticos e, posteriormente, a seleção de 5 problemas envolvendo o conceito de matriz e as operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes. A partir deles foram apresentadas possíveis resoluções e realizados encaminhamentos aos professores.

Palavras-chave: Educação Matemática. Resoluções de Problemas. Ensino de Matrizes. Sequência Didática.

ABSTRACT

MARCELINO, Ayumi Tamaki. **Matrices and operations through Problem Solving:** a didactic sequence. 43 f. Course Conclusion Work (Graduation) – Degree in Mathematics. Federal Technological University of Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

This work aimed to build a didactic sequence about the content of matrices for High School using the Problem Solving methodology, to collaborate in the teaching-learning of Mathematics, as well as to provide guidance to teachers. For this, a historical survey, a bibliographical review on matrices and a presentation of the concepts of matrices and their operations were made, discussed in the didactic sequence. This is qualitative research. For the construction of the sequence, the following procedures were performed: the exploration of the concept of matrix and its operations from the analysis of three textbooks and, later, the selection of 5 problems involving the concept of matrix and the operations of addition, subtraction and matrix multiplication. From them, possible resolutions were presented and referrals were made to the teachers.

Keywords: Mathematics Education. Problem Solving. Teaching Matrices. Didactic Sequence.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Curso de Licenciatura em Matemática pode ser um espaço de formação em que os futuros professores têm a oportunidade de compreender o verdadeiro significado do “Fazer Matemática”, dando sentido às relações matemáticas. Porém, a maneira como os conteúdos vêm sendo abordados, desde a Educação Básica em sala de aula, ainda é muito expositiva ou tradicional. Na maioria das vezes, o conteúdo é explorado de forma mecanizada e a Matemática perde sua essência e seu verdadeiro significado, o que torna o ensino-aprendizagem ainda mais difícil.

Dessa forma, o interesse por esta pesquisa veio a partir da disciplina Matemática Elementar, que tem em sua ementa o conteúdo de matrizes e determinantes. Nesse momento foi visto como esses conteúdos são importantes e presente no cotidiano, o que proporcionou uma reflexão sobre o modo de ensino tradicional com que o conteúdo foi tratado enquanto a autora deste trabalho era estudante do Ensino Médio. A aplicação das matrizes está presente em várias áreas como na informática para organizar dados, utilizando planilhas eletrônicas. No entanto, assim como ocorreu com a autora deste trabalho, provavelmente muitos alunos têm conhecimentos limitados em decorrência dessas aulas tradicionais e mecanizados.

Posteriormente, na disciplina de Tendências em Educação Matemática I, a Resolução de Problemas foi abordada como metodologia de ensino, e de acordo com Ribeiro et. al. (2019), essa perspectiva, diferente de utilizar um exercício pré-determinado que envolva apenas algoritmos e repetições, busca proporcionar aos alunos problemas com diversos caminhos para a solução, fazendo com que o aluno planeje suas próprias alternativas de resolução.

Diante disso, surgiu o interesse da autora do trabalho no estudo das matrizes e da Metodologia de ensino Resolução de Problemas[1]. Assim, o objetivo da presente pesquisa é construir uma sequência didática sobre o conteúdo de matrizes para o Ensino Médio utilizando a metodologia Resolução de Problemas, para colaborar no ensino-aprendizagem de Matemática, bem como fornecer orientações aos professores.

---

[1] O uso das iniciais em maiúsculo é devido a se referir à Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino.

Em termos de organização, nosso trabalho compõe-se por quatro seções. Na introdução trazemos uma apresentação do tema, a justificativa, o objetivo e a estrutura do trabalho. Na seção 2 discorremos brevemente sobre o surgimento da ideia de matriz, cuja denominação foi dada por Sylvester, em 1850. Este contato nos possibilitou a aproximação e um aprofundamento com o assunto a ser tratado. Em seguida, são apresentados trabalhos que fundamentam nossa pesquisa em relação à Resolução de Problemas. Também trazemos na subseção 2.3 uma revisão conceitual, com a definição de matriz, os tipos e as principais operações com matrizes, em linguagem matemática formal e com exemplos numéricos. A última subseção destaca a Resolução de Problemas que, conforme Smole e Diniz (2001), é um caminho para se ensinar Matemática.

Na terceira seção abordamos a metodologia da pesquisa. Inicialmente, discorremos sobre pesquisa qualitativa com base nos autores Sampieri, Collado e Lucio (2013), Flick (2019) e Stake (2011). Posteriormente é feita uma análise do conteúdo de matrizes em três livros didáticos, destinados para alunos do segundo ano do Ensino Médio, na versão manual do professor.

Na seção 4 propomos o desenvolvimento de uma sequência didática, que valorize os conhecimentos prévios dos alunos. Foram selecionados cinco problemas para trabalhar o conceito de matriz e as operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes. Como ponto de partida foi proposto um problema com o intuito de introduzir a definição de matriz e a adição de matrizes; em seguida, os problemas 2 e 3 têm o objetivo de identificar os elementos de matrizes por meio da sua ordem em linhas e colunas; para a introdução da operação de subtração de matrizes foi proposto um problema envolvendo gastos de uma loja de móveis e, por último, o Problema 5 aborda a operação de multiplicação de matrizes.

Por fim, trazemos as considerações finais do trabalho, seguidas das referências utilizadas.

2 MATRIZES

2.1 LEVANTAMENTO HISTÓRICO DO TEMA

De acordo com Sanches (2002) o início dos estudos sobre matrizes e determinantes reportam ao século II a.C. Apesar de alguns indícios serem encontrados no século IV a.C., somente no final do século XVII que as ideias reapareceram e se desenvolveram até os dias atuais.

O início do estudo das matrizes e determinantes está intimamente relacionado com o estudo dos sistemas lineares. Os babilônios estudaram problemas que levam à resolução de um sistema linear de duas variáveis e duas equações, sendo que alguns desses problemas foram preservados em tabletes de argila (SANCHES, 2002).

Os chineses, entre 200 a.C e 100 a.C, chegaram mais próximos ao conceito formalizado de matrizes como conhecemos hoje que os babilônios. O texto *Nove Capítulos da Arte Matemática,* escrito durante a dinastia Han, dá o primeiro exemplo conhecido de métodos de matriz (SANCHES, 2002).

Muitos resultados da teoria apareceram antes das matrizes serem objetos de investigação matemática. A ideia de determinante apareceu no Japão e na Europa quase simultaneamente, embora o matemático Seki no Japão tenha publicado suas ideias antes. Em 1683, Seki escreveu *Método de Resolver os Problemas Dissimulados* que contém métodos matriciais escritos como tabelas, exatamente do jeito que os métodos chineses foram construídos (SANCHES, 2002).

Em 1826, Cauchy no contexto das formas quadráticas de n variáveis, desenvolveu os autovalores e deu resultados sobre a diagonalização de uma matriz. Além disso, conforme Sanches (2002), ele introduziu a ideia de matrizes semelhantes e mostrou que elas possuem o mesmo polinômio característico.

O primeiro a usar o termo "matriz", de acordo com Moura (2014), foi Sylvester em 1850. Sylvester definiu uma matriz para ser um arranjo retangular de termos e os viu como algo que levou a vários determinantes de matrizes quadradas. Depois de deixar a América, Sylvester voltou para a Inglaterra em 1851, se tornou advogado e conheceu Arthur Cayley[2] e compartilharam seus interesses na Matemática. Cayley percebeu o significado do conceito de matriz e publicou por volta de 1853, uma nota apresentando pela primeira vez a inversa de uma matriz (SANCHES, 2002).

2.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE MATRIZES

Nesta subseção são apresentados trabalhos que exploram o conteúdo de matrizes por meio de sequências didáticas ou propostas de ensino. A seleção foi feita a partir de consulta a uma ferramenta de busca por trabalhos acadêmicos[3].

O trabalho de Oliveira (2013) tem como objetivo mostrar a criação e a realização de uma engenharia didática com o uso de mensagens criptografadas no ensino de matrizes, com alunos do 2º ano do Ensino Médio da Escola Soares Ferraz, na cidade de Ourinhos-SP. O autor começa com uma reflexão sobre o desânimo e a apatia dos alunos em estudar Matemática e sugere o ensino de matrizes por meio de mensagens criptografadas por transposição de letras, uma abordagem diferente daquela aplicada convencionalmente, pretendendo que o aluno, no anseio de solucioná-las, se empenhe e se interesse em aprender o conceito de matriz e as características do tipo matriz transposta, sendo protagonista de sua busca pelo conhecimento.

Sanches (2002, p. 3) tem por objetivo

> [...] verificar a eficácia de um método diferenciando no ensino de matrizes, analisando o desempenho, caracterizado pelas notas obtidas em dois instrumentos por sujeitos submetidos a duas estratégias diferentes de ensinar esse conceito. O ponto de partida foi a ideia de que o uso dos conceitos espontâneos, no ensino de um novo conceito, favorece a aprendizagem. Os sujeitos foram 105 alunos de uma escola particular de Santo André, no ABC paulista, regularmente matriculados no segundo ano de quatro cursos técnicos profissionalizantes, com idades que variavam de 15 a 18 anos.

O estudo se fundamentou em uma aprendizagem significativa, entendida como um processo no qual a aprendizagem é o produto de novas informações. Os resultados obtidos permitem concluir que a estratégia de ensino diferenciada, dando ênfase à formação dos conceitos e situações-problema pode alcançar sucesso no ensino-aprendizagem. Houve um bom desempenho com o grupo experimental,

---

[2] Matemático Britânico, que nasceu em 1821 e morreu em 1895. Foi professor na Universidade de Cambridge, de 1863 a 1895.
[3] Foi utilizada a ferramenta *Google Acadêmico*, disponível em: https://scholar.google.com/schhp?hl=pt-BR.

porém, o resultado da pesquisa não pode ser generalizado, sendo apenas direcionada para o grupo em relação a essa pesquisa, o que não impede o uso do contexto prático por outros professores-pesquisadores (SANCHES, 2002).

Silva (2016, p. 7) apresenta

> [...] resultados de um estudo que teve por objetivo avaliar a potencialidade de uma sequência didática baseada na utilização da resolução de problemas como ponto de partida no ensino de matrizes. A motivação para tal estudo se deu a partir de indagações sobre quais os efeitos que uma metodologia baseada na resolução de problemas, como ponto de partida, proporciona ao aprendizado matemático do aluno sobre matrizes. Para tanto, com base nos pressupostos da Engenharia didática como metodologia de pesquisa, foram realizadas análises prévias, as quais contaram com dados históricos sobre o assunto na Educação Básica, com uma revisão da literatura atual que trata do tema, e com informações de 100 docentes de Matemática e de 100 alunos de escola pública que opinaram sobre o processo de ensino e aprendizagem de matrizes [...]

Os resultados da aplicação didática revelaram o grande avanço dos alunos em relação ao conteúdo e também evolução na linguagem matemática. O estudo proporcionou avanços no ensino de Matemática e como é desenvolvida a formação dos profissionais que atuam na área (SILVA, 2016).

Moura (2014, p. 9) elaborou

> [...] uma proposta de metodologia de ensino, tendo o intuito de colaborar com professores e alunos, através de sugestões de aplicabilidades práticas e inovadoras de resolução de problemas de matrizes segundo os conceitos de George Polya. Para tanto, foi realizado um levantamento da história, das conceituações e exemplificações dos tipos comuns e especiais de Matrizes, das operações matemáticas existentes nas mesmas e, finalmente, de Resolução de Problemas; posteriormente, foi elaborada uma sequência de exemplos de problemas voltados às situações práticas do cotidiano dos alunos, procurando despertar a curiosidade e possibilitando aos mesmos uma oportunidade para discussão, exploração e compreensão dos conteúdos de Matrizes através da resolução de problemas.

O trabalho de Moura (2014) destaca a contribuição da aplicabilidade das técnicas de resoluções de problemas sugeridos por Polya[4], junto com o problema de matrizes direcionado ao cotidiano dos alunos e também ressalta a importância do papel dos professores no desenvolvimento dos alunos em habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e a contextualização sociocultural.

---

[4] POLYA, George. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático/ G. Polya; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. – 2. reimpr. – Rio de Janeiro: interciência, 1995.
Todas as referências a Polya apresentadas nos trabalhos analisados são em relação a essa obra. Assim, será usado apenas Polya ao se tratar deste autor.

2.3 REVISÃO CONCEITUAL: DEFINIÇÃO DE MATRIZ; TIPOS DE MATRIZES; ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Matriz é definida como uma tabela organizada em linhas e colunas no formato $m\ x\ n$, onde m representa o número de linhas (sentido horizontal) e n o número de colunas (vertical).

Callioli, Domingues e Costa (2000, p. 16) trazem uma definição mais formal de matrizes, considerando "$m \geq 1$ e $n \geq 1$ dois números inteiros. Uma matriz $m\ x\ n$ real é uma dupla sequência de números reais, distribuídos em m linhas e n colunas".

Uma matriz qualquer, conforme Steinbruch e Winterle (1997), representada por $m\ x\ n$, é composta por elementos a_{ij}, em que $i(i = 1, 2, 3, \dots, m)$ representa o número da linha e $j(j = 1, 2, 3, \dots, n)$ o número da coluna que indica a posição de cada valor. Um exemplo de matriz é $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$, onde $m = 2$ é o número de linhas e $n = 2$ é o número de colunas.

As matrizes podem ser classificadas de acordo com suas características:

- Matriz linha em que $m = 1\ e\ n$ é um número qualquer. Exemplo: $A = (1\ 2)$.
- Matriz coluna em que m é um número qualquer e $m = 1$. Exemplo: $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- Matriz nula, em que todo elemento a_{ij} é zero. Exemplo: $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Matriz quadrada, em que $m = n$, ou seja, o número de linhas e colunas é igual. Exemplo: $D = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 9 & 15 \end{pmatrix}$.
- Matriz identidade: uma matriz quadrada em que os elementos da diagonal principal têm o valor 1 e os demais elementos são 0. Exemplo: $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Matriz inversa: uma matriz quadrada B é inversa da matriz quadrada A quando a multiplicação das duas matrizes resulta em uma matriz identidade Id, ou seja, $A * B = B * A = Id$.

- Matriz transposta: uma matriz obtida com a troca ordenada das linhas e colunas de uma matriz conhecida.

As operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes e de um escalar por uma matriz serão definidas a seguir:

A adição é obtida pela soma dos elementos de matrizes de mesma ordem. "Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes $m \, x \, n$. Indicamos por $A + B$ e chamamos soma de A com B a matriz $m \, x \, n$ cujo termo é a_{ij}+ b_{ij}" (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 2000, p. 18).

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ $e \; B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, então $\mathrm{A + B} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$.

A diferença de duas matrizes de mesma ordem é definida por $A + (-B)$. Exemplo: Considere as matrizes A e B do exemplo anterior, a diferença entre elas é dada por:

$A + (-B)$ = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

A multiplicação de uma matriz por um escalar, pode ser assim definida: " Se λ é um escalar, o produto de uma matriz $A = [\, a_{ij} \,]$ por esse escalar é uma matriz $B = [\, b_{ij} \,]$ tal que $b_{ij} = \lambda \, a_{ij}$" (STEINBRUCH; WINTERLE,1997, p. 210).

$\lambda * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} \lambda * a_{11} & \lambda * a_{12} \\ \lambda * a_{21} & \lambda * a_{22} \end{pmatrix}$

Exemplo: Dados $\lambda = 2$ e $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, então $\lambda * A = 2 * \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$.

A multiplicação de duas matrizes, A e B, só é possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, ou seja, $A_{m*p} * B_{p*n} = C_{m*n}$. Considere: $A * B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$. O produto A_{3*2} * B_{2*3} é uma matriz C_{3*3} tal que:

c_{11}= a_{11}* b_{11} + a_{12} * b_{21}

c_{12}= a_{11}* b_{12} + a_{12} * b_{22}

c_{13}= a_{11}* b_{13} + a_{12} * b_{23}

c_{21}= a_{21}* b_{11} + a_{22} * b_{21}

c_{22}= a_{21}* b_{12} + a_{22} * b_{22}

c_{23}= a_{21}* b_{13} + a_{22} * b_{23}

c_{31}= a_{31}* b_{11} + a_{32} * b_{21}

c_{32}= a_{31}* b_{12} + a_{32} * b_{22}

c_{33}= a_{31}* b_{13} + a_{32} * b_{23}

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, então a multiplicação da matriz A pela Matriz B será: $A * B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 6 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Os elementos da Matriz C, resultante da multiplicação $A * B$ foram obtidos a partir das seguintes operações:

$c_{11} = 2 * 0 + 1 * 2 = 2$

$c_{12} = 2 * 3 + 1 * 1 = 7$

$c_{13} = 2 * 4 + 1 * 3 = 11$

$c_{21} = 0 * 0 + 3 * 2 = 6$

$c_{22} = 0 * 3 + 3 * 1 = 3$

$c_{23} = 0 * 4 + 3 * 3 = 9$

$c_{31} = 1 * 0 + 1 * 2 = 2$

$c_{32} = 1 * 3 + 1 * 1 = 4$

$c_{33} = 1 * 4 + 1 * 3 = 7$

2.4 MATRIZES E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Na Resolução de Problemas como metodologia de ensino, os conceitos e as técnicas operatórias são apresentados aos alunos fazendo uma relação entre a ideia Matemática e o contexto. Smole e Diniz (2001) afirmam que a Resolução de Problemas é um caminho para se ensinar matemática. Nessa perspectiva, ao propor o problema como ponto de partida, é possível introduzir novos conceitos, fazer a conexão com outros ramos da Matemática e iniciar novos conteúdos. Na atividade de resolução de problemas, a comunicação é essencial, seja ela oral, escrita, ou através de desenhos. Isso possibilita ao professor observar as mudanças de atitudes e acompanhar o progresso do aluno, bem como interferir nas dificuldades encontradas, seja para o desenvolvimento das estratégias planejadas ou mesmo para esclarecer dúvidas.

Allevato e Onuchic (2014) sugerem algumas ações a serem realizadas em sala de aula para a utilização do que denominam de "Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas". Na visão das autoras e do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (Gterp), que validou essa metodologia, a avaliação deve ocorrer de modo integrado ao ensino para promover a aprendizagem. O roteiro abarca as seguintes etapas:

1. Proposição do problema.
2. Leitura individual.
3. Leitura em conjunto.
4. Resolução do problema.
5. Observar e incentivar.
6. Registro das resoluções na lousa.
7. Plenária.
8. Busca do consenso.
9. Formalização do conteúdo.
10. Proposição e resolução de novos problemas.

Nesta subseção são destacados trabalhos que investigaram o conteúdo de Matrizes e que utilizaram a resolução de problemas. Eles foram selecionados a partir de consulta realizada na Biblioteca Digital Brasileira de Tese e Dissertações (BDTD), pelo termo "Matrizes e Resoluções de Problemas", em busca avançada e usando como filtros o "Ensino Médio" e o período de 2008 a 2021. Como resposta foram reportados apenas dois trabalhos: Medico (2008) e Watanabe (2012).

A dissertação de mestrado produzida por Medico (2008) apresenta resultados de uma pesquisa de caráter qualitativo, em que foi adotada a metodologia de ensino através da Resolução de Problemas. O objetivo foi analisar as possibilidades que a Resolução de Problemas pode contribuir para uma aprendizagem significativa de conceitos matemáticos relacionados ao conteúdo de matrizes e determinantes. O desenvolvimento da pesquisa foi realizado com 26 alunos do 3° ano do Ensino Médio da Escola técnica José Cañellas de Frederico Westhapen-RS. Para a aplicação dos problemas a serem resolvidos foi seguido o roteiro de atividades sugerido por Onuchic (1999): Formar grupos e entregar a atividade, o papel do professor, resultados na lousa, plenária e análise dos resultados e por último consenso e formalização das atividades.

Medico (2008) também menciona as orientações de Polya quanto a resolução de problemas e destaca o papel fundamental do professor nesse processo:

> Os objetivos maiores do professor, segundo Polya, são auxiliar e resolver o problema que é apresentado e desenvolver de forma crescente sua autonomia, visando à resolução de futuros problemas próprios, pois a atividade de resolver problemas é aprendida por imitação, ou seja, depois de observar e imitar o que o professor ou colegas fazem para chegar ao resultado, finalmente aprenderá a resolver, resolvendo-os (MEDICO, 2008, p. 29).

As considerações da autora indicam que ao utilizar a metodologia Resolução de Problemas no ensino de matrizes e determinantes é proporcionado ao aluno a oportunidade de aprender por meio de situações reais do cotidiano. Isso possibilita estimular a curiosidade do aluno e contribui para a construção do pensamento dedutivo, a interpretação, a criação de estratégias e a solução do problema (MEDICO, 2008).

Watanabe (2012) teve como objetivo, em sua pesquisa, apresentar uma proposta para ensinar o conteúdo de Matrizes por meio da resolução de problemas, com base nas ideias de Polya. Cinco problemas foram selecionados e organizados pelo autor e foram elaborados dois textos didáticos: o “Guia do (a) Professor (a)” e o “Guia de Atividade do Aluno”.

Watanabe (2012) descreve a teoria de Polya da seguinte forma: primeira etapa (a compreensão do problema), nessa fase é explorado o problema como um todo, pois é necessário que o enunciado esteja claro para que o aluno possa prosseguir com a resolução; Na segunda etapa (o estabelecimento de um plano) o papel do professor é crucial, pois ele precisa guiar o aluno conforme suas indagações; na terceira etapa (a execução do plano) será onde o aluno desenvolverá seu plano/ roteiro; na quarta e última etapa (o retrospecto) é onde o aluno, após encontrar a solução do problema, deve fazer uma retrospectiva da resolução completa.

A pesquisa de Watanabe (2012) conclui que é importante a utilização do processo de investigação por meio da resolução de problemas para o ensino aprendizagem de Matrizes. Essa abordagem promove aos alunos a aprendizagem a partir do desenvolvimento do raciocínio lógico, melhorando o entendimento e a resolução do problema e relacionando os conceitos envolvidos. O docente que usa, em sua aula, essa metodologia poderá obter um rendimento mais eficiente, além de desenvolver no aluno a prática da investigação e da formulação problemas, além da validação dos resultados encontrados. Dessa forma, o aluno ao vencer “obstáculos” para a resolução de um problema matemático, está vivenciando o verdadeiro “fazer matemática”.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

O objetivo desta pesquisa é construir uma sequência didática sobre o conteúdo de matrizes para o Ensino Médio utilizando a metodologia Resolução de Problemas, para colaborar no ensino-aprendizagem de Matemática, bem como fornecer orientações aos professores.

3.1 PESQUISA QUALITATIVA

A pesquisa qualitativa trata-se de uma investigação para entender o ponto de vista de um determinado grupo social por meio da “[...] coleta de dados sem medição numérica para descobrir ou aprimorar perguntas de pesquisa no processo de interpretação (SAMPIERI; COLLADO; LUCIO, 2013, p. 33). De acordo com Flick (2019) “A pesquisa qualitativa é de particular relevância ao estudo das relações sociais devido à pluralização das esferas de vida” (FLICK, 2019, p. 200).

De acordo com Sampieri, Collado e Lucio (2013):

> [...] pesquisas qualitativas se baseiam mais em uma lógica e em um processo indutivo (explorar e descrever, e depois gerar perspectivas teóricas). Vão do particular ao geral. Por exemplo, em um típico estudo qualitativo, o pesquisador entrevista uma pessoa, analisa os dados obtidos e tira algumas conclusões; posteriormente, entrevista outra pessoa, analisa essa nova informação e revisa seus resultados e conclusões [...] (p. 33).

Stake (2011) destaca a abordagem qualitativa como íntegra em seu pensamento, por ser interpretativa baseada em experiências, com características situacionais e humanísticas. Cada pesquisador seguirá um processo diferente. Para o referido autor, a interpretação é uma etapa muito trabalhosa, onde se busca tratar os objetos de estudo como únicos.

Considerando as características da abordagem qualitativa, entendemos que nossa pesquisa tem caráter qualitativo, pois visa desenvolver uma sequência didática considerando conhecimentos prévios de alunos do 2° ano do Ensino Médio. Não será efetuada uma medição numérica, ou seja, não envolve uma análise estatística (SAMPIERI; COLLADO; LUCIO, 2013).

Nessa direção, para a realização da sequência foram selecionados cinco problemas, com a finalidade de desenvolver habilidades e competências presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ao trabalhar o conceito e as operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes.

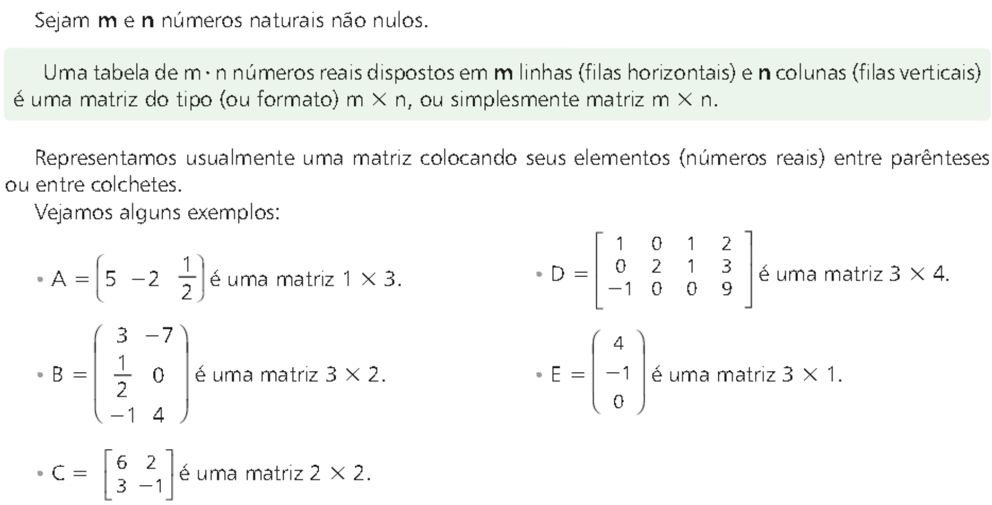
3.2 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Nesta subseção analisamos a abordagem do conteúdo de matrizes em três livros didáticos. A escolha foi realizada de acordo com o número de exemplares adquiridos pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), no ano de 2018.

O primeiro livro analisado foi *Matemática: Ciência e aplicações- 2* (manual do professor) destinado para alunos do segundo ano do Ensino Médio, da editora Saraiva. Os autores são: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. Foram comprados 638.626 exemplares[5] desse livro e distribuídos a escolas públicas do país.

No início de cada capítulo do livro é proposta a introdução do conteúdo com situações do cotidiano "[...] como forma de mostrar a aplicação da Matemática em outras áreas do conhecimento" (IEZZI et al., 2016, p. 3). Para apresentar as matrizes foi mostrada uma forma de representação de tabelas, encontrada em informações de jornais e revistas. Em seguida, é realizada a definição de matriz, conforme Figura 1, seguida por exemplos numéricos.

Figura 1 – Definição de matrizes do livro *Matemática: Ciência e aplicações 2.*



Sejam **m** e **n** números naturais não nulos.

Uma tabela de $m \cdot n$ números reais dispostos em **m** linhas (filas horizontais) e **n** colunas (filas verticais) é uma matriz do tipo (ou formato) $m \times n$, ou simplesmente matriz $m \times n$.

Representamos usualmente uma matriz colocando seus elementos (números reais) entre parênteses ou entre colchetes.

Vejamos alguns exemplos:

- $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz 1×3.
- $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×2.
- $C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×2.
- $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×4.
- $E = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×1.

Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 66)

[5] Dados obtidos no portal do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), disponível em: https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos.

O capítulo traz algumas informações sobre como surgiram as matrizes, pois segundo Iezzi et. al. (2016, p. 4), “A história da Matemática coloca os alunos em contato com o processo de construção do conhecimento e a criatividade na resolução de problemas enfrentados pela humanidade no decorrer do tempo, situando também acontecimentos na linha do tempo”.

O conteúdo é tratado por meio de uma sequência que apresenta a definição matemática, exemplos numéricos, exercícios resolvidos e atividades para fazer no caderno. Os exercícios propostos “estão organizados em ordem crescente de dificuldade” (IEZZI et al., 2016, p. 3).

É feita a demonstração de algumas das propriedades das operações de matrizes, que são utilizadas para a exemplificação e a validade das propriedades, mas outras ficam indicadas a serem feitas de modo análogo. Outro elemento é a “aplicação” presente no livro, em que é abordada a relação de matriz com pixel.

O segundo livro selecionado é *Matemática: contexto e aplicações 2,* da editora Ática. O autor é Luiz Roberto Dante. Foram comprados 537.480 exemplares desse livro e distribuídos a alunos de 2º ano do Ensino Médio de escolas públicas.

No livro podemos perceber, logo no início, que a comunicação com o professor está presente, trazendo sugestões de como conduzir as aulas. Outra questão interessante é a tarefa, proposta em grupo, para introduzir o conteúdo de matrizes, que também aborda o uso de tabelas presentes em nosso cotidiano e as relacionam com matrizes.

É feita uma abordagem com História da Matemática, trazendo uma curiosidade a respeito de Cayley e Sylvester e o surgimento do nome “matriz”. Em seguida é apresentada uma breve história, em que o autor busca a comunicação com o leitor e propõe um problema a ser resolvido, mas a ideia é que até o final do estudo do capítulo o leitor consiga resolvê-lo.

Os conteúdos são tratados em uma sequência, com início na definição de matrizes (Figura 2), seguida de exemplos numéricos, exercícios resolvidos e atividades, em que o autor possibilita ao leitor a oportunidade do trabalho em equipe. Entre esses intervalos aparecem “[...] pequenos boxes que trazem questões para reflexão ou dicas importantes para o estudo” (DANTE, 2016, p. 4), que visam provocar o engajamento do aluno com o conteúdo. As propriedades são destacadas nos boxes e a demonstração de teoremas fica a cargo do leitor.

Figura 2 - Definição de matrizes no livro *Matemática: contexto e aplicações - 2*

2 Definição de matriz

Sejam m e n dois números inteiros maiores ou iguais a 1.

Denomina-se matriz $m \times n$ (lê-se m por n) uma tabela retangular formada por $m \cdot n$ números reais, dispostos em m linhas e n colunas.

Dizemos que a matriz é do **tipo** $m \times n$ ou de **ordem** $m \times n$.

Exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×2 (dois por dois – duas linhas e duas colunas).

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -5 & 1 \\ 2 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×3 (dois por três – duas linhas e três colunas).

c) Quando $m = 1$, a matriz é chamada **matriz linha**. Por exemplo: $(1 \quad 3 \quad -2)$ é uma matriz linha do tipo 1×3.

Para refletir
Por que se diz "matriz linha" e "matriz coluna"?
Porque a matriz só tem uma linha e uma coluna, respectivamente.

d) Quando $n = 1$, a matriz é chamada **matriz coluna**. Por exemplo: $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz coluna do tipo 4×1.

Quando temos matrizes linha ou matrizes coluna, também podemos chamá-las de **vetores**. Embora essa não seja uma denominação comum no Ensino Médio, é bastante utilizada no Ensino Superior, principalmente em Computação e Álgebra linear. É muito comum uma matriz linha como $[2 \quad 0 \quad 5]$ ser escrita como $(2, 0, 5)$ quando se trabalha com vetores.

Fonte: Dante (2016, p. 65).

Ao final do capítulo é abordada a relação de matrizes com a criptografia propondo um exercício para ser feito em grupo.

O terceiro livro analisado tem o título *Contato Matemática 2.* Os autores são Joamir Roberto de Souza e Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia. Publicado pela editora FTD, o livro teve 469.779 exemplares comprados e distribuídos às escolas do país.

Souza e Garcia (2016) trazem, na abertura de cada capítulo, um contato inicial com os assuntos que serão tratados. Assim, espera-se que os alunos mostrem conhecimentos e troquem ideias com colegas e professores sobre os diversos temas. No capítulo analisado é apresentada uma matriz com cores em escala de cinzas, relacionando-a com sistemas de cores utilizados para pixels e, em seguida, é proposta uma atividade para os alunos envolvendo essas matrizes e pixel.

A definição de matrizes desse livro é dada com a representação de uma tabela, que pode ser retratada como matriz e, posteriormente, é apresentada a definição matemática de matriz (Figura 3).

Figura 3 – Definição de matrizes do livro *Contato Matemática 2*

Estudando matrizes

Ao final do estudo deste capítulo podem ser trabalhados os exemplos e as atividades das páginas 270 e 271 da seção Acessando tecnologias.

Para auxiliar na representação de informações ou facilitar cálculos complexos, é comum a utilização de tabelas numéricas retangulares. Essas tabelas, compostas de certa quantidade de **linhas** (fileiras horizontais) e de **colunas** (fileiras verticais), são chamadas na Matemática de **matrizes**.

As matrizes são amplamente utilizadas em diversas áreas, como na computação gráfica, em Engenharia, Física e Administração.

Observe a tabela.

População rural e urbana no Brasil, em milhões de habitantes

	1970	1980	1991	2000	2010
Rural	41,6	39,1	36	31,8	29,8
Urbana	52,9	82	110,9	138	160,9
Total	94,5	121,1	146,9	169,8	190,7

Fonte: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/popul/default.asp?t=3&z=t&o=25&u1=1&u2=1&u3=1&u4=1&u5=1&u6=1>. Acesso em: 25 nov. 2015.

Podemos representar essa tabela pela seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 41{,}6 & 39{,}1 & 36 & 31{,}8 & 29{,}8 \\ 52{,}9 & 82 & 110{,}9 & 138 & 160{,}9 \\ 94{,}5 & 121{,}1 & 146{,}9 & 169{,}8 & 190{,}7 \end{bmatrix}$$

Convencionou-se que a ordenação das linhas de uma matriz seja dada de cima para baixo, e a ordenação das colunas, da esquerda para a direita.

Como essa matriz possui 3 linhas e 5 colunas, dizemos que é de ordem (ou tipo) 3×5 (lê-se "três por cinco"). Nela, as linhas correspondem à população brasileira em cada categoria: rural, urbana e total. Já as colunas indicam o ano da pesquisa. A 1ª linha, por exemplo, indica a população rural em cada ano pesquisado e a 3ª coluna, a população rural, urbana e total em 1991.

$$\begin{array}{l} \text{1ª linha} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{41{,}6 \quad 39{,}1 \quad 36 \quad 31{,}8 \quad 29{,}8} \\ 52{,}9 \quad 82 \quad 110{,}9 \quad 138 \quad 160{,}9 \\ 94{,}5 \quad 121{,}1 \quad 146{,}9 \quad 169{,}8 \quad 190{,}7 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} \text{3ª coluna} \\ \downarrow \end{array} \begin{bmatrix} 41{,}6 & 39{,}1 & 36 & 31{,}8 & 29{,}8 \\ 52{,}9 & 82 & 110{,}9 & 138 & 160{,}9 \\ 94{,}5 & 121{,}1 & 146{,}9 & 169{,}8 & 190{,}7 \end{bmatrix}$$

O elemento da matriz localizado na 1ª linha e na 3ª coluna corresponde à população rural brasileira em 1991.

$$\begin{array}{c} \text{3ª coluna} \\ \downarrow \end{array}$$
$$\text{1ª linha} \rightarrow \begin{bmatrix} 41{,}6 & 39{,}1 & \boxed{36} & 31{,}8 & 29{,}8 \\ 52{,}9 & 82 & 110{,}9 & 138 & 160{,}9 \\ 94{,}5 & 121{,}1 & 146{,}9 & 169{,}8 & 190{,}7 \end{bmatrix}$$

Uma matriz de ordem $m \times n$, com m e n números naturais não nulos, é toda tabela composta por $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Fonte: Souza e Garcia (2016)

Os autores, ao longo do capítulo, tratam de três relações com matrizes: com a tabela periódica, trazendo um conteúdo interdisciplinar; com a criptografia e com o consumo de sódio.

A sequência do conteúdo neste livro está disposta por uma introdução, com matrizes relacionadas a pixels, seguida pela definição, uma apresentação genérica de matriz, exemplos, atividades resolvidas e atividades para resolver no caderno. Por fim, o autor traz uma curiosidade histórica a respeito do direito igualitário de voto entre homens e mulheres e faz a apresentação das operações de adição e subtração de matrizes.

Na análise do conteúdo de matrizes nos três livros didáticos foi possível perceber semelhanças em como estão organizados e a presença de duas competências específicas da Matemática propostas na BNCC. São elas:

- Competência específica 1:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral (BRASIL, 2018, p. 532).

- Competência específica 3:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 535).

O primeiro livro traz uma introdução envolvendo situações cotidianas, o que está de acordo com as recomendações da BNCC sobre a “[...] construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos [...]” (BRASIL, 2018, p. 528). O segundo livro destaca as matrizes, o momento histórico e as necessidades da época e o terceiro livro traz a relação do trabalho em grupo, relacionada no desenvolver do raciocínio lógico e matemático, na comunicação, na construção de argumentação, etc (BRASIL, 2018, p. 529).

Com base nessa análise, o presente trabalho tem como objetivo elaborar uma sequência didática que possibilite ao estudante a construção do conteúdo de Matrizes, utilizando a metodologia Resolução de Problemas, para colaborar no ensino-aprendizagem de Matemática, trabalhos como esse favorecem ao professor repensar suas práticas a partir do uso de seus livros didáticos. Espera-se que a sequência didática possa ser aplicada por professores de Matemática, desenvolvendo habilidades, processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas (BRASIL, 2018, p. 529).

3.3 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

O entendimento de sequência didática (SD) adotado neste trabalho é o de "[...] conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos" (ZABALA, 1998, p.18). Essas atividades podem estar alinhadas com as competências e habilidades propostas na BNCC, conforme proposto. Além disso, a SD valoriza os conhecimentos prévios dos alunos, o que implica um trabalho pedagógico organizado, em uma ordem e um período estruturado pelo professor, segundo seus objetivos para alcançar a aprendizagem. (MIQUELANTE et. al., 2017).

Para iniciar a construção de uma sequência didática é necessário planejar uma variedade de aulas com desafios e problemas diferenciados com base em uma análise prévia dos conhecimentos dos alunos. A ideia é seguir uma sequência de atividades motivadoras, ou seja, planejar uma variedade de aulas que apresente desafios cada vez maiores aos alunos permitindo a construção do conhecimento. Conforme a adaptação dos alunos deve-se aumentar a complexidade dos desafios e orientações proporcionando um aprofundamento ao tema proposto (PERETTI; COSTA, 2013).

Miquelante et. al. (2017) apresentaram a elaboração de uma sequência didática que parte de uma estrutura definida pelo grupo de pesquisadores de Genebra[6]. Tal estrutura se configura em etapas:

(I) Apresentação da situação: tem como objetivo apresentar aos alunos a tarefa e os estudos que serão realizados. O professor aponta quais serão as áreas de conhecimento envolvidas e o aluno terá a liberdade de discutir alguns aspectos

---

[6] A equipe de Didática de Línguas da Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Genebra – Suíça é constituída por vários pesquisadores dentre os quais estão Jean-Paul Bronckart, Bernard Schneuwly, Joaquim Dolz, A. Pasquier, Sylvie Haller (CABRAL, 2017), essa sequência didática foi definida para o planejamento e elaboração do material didático. (VARGAS E MAGALHÃES, 2011).

da organização como para quem será elaborada e a forma que a produção irá se dispor (oral, escrita, vídeo, etc.).

(II) Produção inicial: procura identificar a partir das primeiras produções o conhecimento prévio dos alunos, descobrindo suas dificuldades e obtendo meios de estabelecer as atividades adequadas que foram empregadas na sequência didática. Essa avaliação terá uma contribuição no planejamento das futuras intervenções e, caso seja necessário, ele pode completar ou transformar as atividades de acordo com as necessidades dos alunos, mesmo que a sequência didática já esteja definida.

(III) Módulos intermediários: permite que o aluno aprenda por meio de atividades variadas. No caso de dificuldades particulares do aluno, o professor pode transformar as aulas orientando em grupos ou individualmente para a construção do conhecimento. Os módulos devem ser direcionados com base nas dificuldades dos alunos e visando à superação das mesmas, propondo atividades diversificadas e adaptadas às particularidades da turma.

(IV) Produção final: visa avaliar os conhecimentos construídos pelo aluno, dando a possibilidade de por em prática tudo que ele estudou para aprimorar a versões posteriores.

As sequências didáticas podem ser utilizadas, assim, como neste trabalho, para alinhar as aulas à BNCC trazendo diversos benefícios para os alunos, como um papel mais ativo em sua aprendizagem.

4 CONSTRUÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nessa seção, com base na teoria apresentada e nas análises dos livros didáticos selecionados, propomos uma sequência didática de modo a explorar o conceito e as operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes.

Em termos de estrutura, optamos por trazer o problema, a fonte, as habilidades e/ou competências da BNCC, o objetivo do problema, o ano escolar, o conceito explorado (que será formalizado após a resolução do problema), as possíveis resoluções dos alunos para o problema e comentários gerais.

Problema 1

Fonte: Paraná (2014)

Habilidade BNCC: (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Objetivos: Compreender o que é uma matriz e como é realizada a operação de adição de matrizes.

Ano Escolar: 2° ano do Ensino Médio

Conteúdos: Definição de matriz e operação de adição de Matrizes.

Uma fábrica de calça jeans fornece seus produtos para duas lojas, sendo elas P e Q. Lançado uma pesquisa sobre a aceitação de dois novos modelos de calças nos quatro primeiros dias de novembro, os resultados apurados foram:

Tabela1

Quantidade vendida na loja P				
	1° Dia	2° Dia	3° Dia	4° Dia
Modelo A	3	4	2	6
Modelo B	2	3	6	4

Tabela 2

Quantidade vendida na loja Q				
	1° Dia	2° Dia	3° Dia	4° Dia
Modelo A	4	1	3	4
Modelo B	5	3	5	6

De que maneira podemos determinar o total de vendas de cada modelo de calça jeans em cada um dos quatro primeiros dias de novembro?

Possíveis resoluções:

Os alunos poderiam descobrir o total de vendas de cada modelo de calça nas lojas P e Q, em cada dia, e depois adicionar o total de vendas diário para determinar as vendas totais nos quatro primeiros dias do mês de novembro.

- Modelo A: (Dia 1) 7(3+4), (Dia 2) 5 (4+1), (Dia 3) 5 (2+3) e (Dia 4) 10 (6+4). Assim, o total será 7+5+5+10 = 27 calças.
- Modelo B: (Dia 1) 7(2+5), (Dia 2) 6 (3+3), (Dia 3) 11 (6+5) e (Dia 4) 10 (4+6). Assim, o total será 7+6+11+10 = 34 calças.

No momento de formalização, ele deve perceber que trabalhou apenas com os números dessas tabelas e que poderia representá-las como matrizes, ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Para determinar o total de vendas de cada modelo de calça jeans nos quatro primeiros dias de novembro, deve-se adicionar os respectivos elementos das matrizes A e B, obtendo a matriz C.

$$C = \begin{bmatrix} 3+4 & 4+1 & 2+3 & 6+4 \\ 2+5 & 3+3 & 6+5 & 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 & 10 \\ 7 & 6 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

Portanto o total de vendas de cada modelo de calça jeans nos quatro primeiros dias de novembro é:

Total de vendas				
	1° Dia	2° Dia	3° Dia	4° Dia
Modelo A	7	5	5	10
Modelo B	7	6	11	10

Comentários[7]**:**

Esse problema tem o intuito de introduzir o conteúdo de matrizes. Recomendamos que o professor faça uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014). Assim, o professor deve entregar uma cópia do problema aos alunos e solicitar que façam a leitura individualmente. Na sequência, o professor deve formar grupos e pedir que seja feita uma nova leitura entre os integrantes de cada grupo. O docente deve acompanhar o trabalho dos grupos, esclarecendo dúvidas secundárias e incentivando os alunos a resolverem o problema com base em seus conhecimentos prévios. Em seguida, cada grupo deve expor na lousa como resolveu o problema e a turma buscará um consenso da resposta. O professor deverá discutir com seus alunos a respeito do que eles observaram, instigando-os a perceber a relação das tabelas com matrizes e, logo após, deverá fazer a sistematização do conceito de matriz e da operação de adição de matrizes. Nesse momento é feita a apresentação formal do conteúdo matemático explorado no problema. O professor pode trazer exemplos dos tipos de matrizes e de suas características.

Problema 2
Fonte: São Paulo (2009, p. 27)
Habilidade BNCC: (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

[7] Espera-se que essa abordagem, explicitada no problema 1, da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas seja explorada em toda a sequência proposta.

Objetivos: Utilizar as matrizes para representar figuras planas, respeitando sequências de comandos; e identificar elementos de matrizes por meio da sua posição em linhas e colunas.

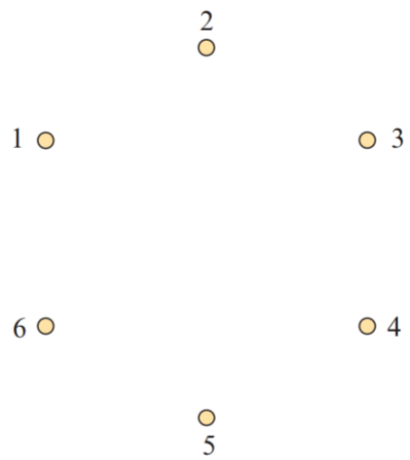
Ano Escolar: 2° ano do Ensino Médio

Conteúdo: Posicionamento dos elementos a_{ij} na matriz.

Dada a matriz D e os pontos desenhados, uni-los ou não a partir do seguinte código estabelecido para os elementos da matriz D:

- Se $d_{ij} = 1$, unir i com j;
- Se $d_{ij} = 0$, não unir i com j.

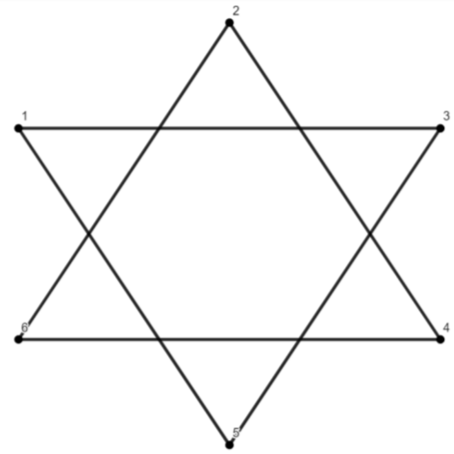
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Possíveis resoluções:

Para a resolução deste problema o aluno precisará observar apenas as posições do número 1 e relacionar com o conceito de matriz que foi apresentado no problema anterior.

Considerando uma matriz genérica para facilitar a visualização dos elementos, temos:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} \end{bmatrix}$$ Assim, o número 1 está presente nos seguintes termos: $d_{11,}\ d_{13}, d_{15}, d_{22}, d_{24}, d_{26}, d_{31}, d_{33}, d_{35}, d_{42}, d_{44}, d_{46}, d_{51}, d_{53}, d_{55}, d_{62}, d_{64}, d_{66}$ Formando a figura, temos: 
Comentários: Após a formalização do Problema 1 e da apresentação da definição de matrizes, propomos que os alunos resolvam um problema envolvendo a posição dos elementos da matriz D. Este problema servirá como base para o encaminhamento do problema 3, em que o aluno deverá criar sua própria matriz código.

Problema 3
Fonte: São Paulo (2009, p. 27)
Habilidade BNCC: (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Objetivo: Compreender o posicionamento dos elementos de uma matriz; Elaborar uma matriz-código.
Ano escolar: 2° ano do Ensino Médio.
Conteúdo: Posicionamento dos elementos a_{ij} na matriz.

Imagine um desenho que possa ser obtido a partir da união de pelo menos 8 pontos. Marque apenas os pontos no papel e numere-os, sem, entretanto, uni-los. Escreva a matriz de codificação para a união de pontos em seu desenho. Em seguida, troque sua atividade com a de um colega, de maneira que você unirá os pontos do desenho dele enquanto ele une os pontos de seu desenho. Por fim, peça que seu colega corrija seu trabalho enquanto você corrige o dele.

Possíveis resoluções:

Neste problema os alunos deverão ter um conhecimento sobre a definição de matriz e de como localizar um elemento com base em sua posição. Eles estarão livres para usar a criatividade ao construir um desenho com 8 pontos. Um exemplo de desenho possível é:

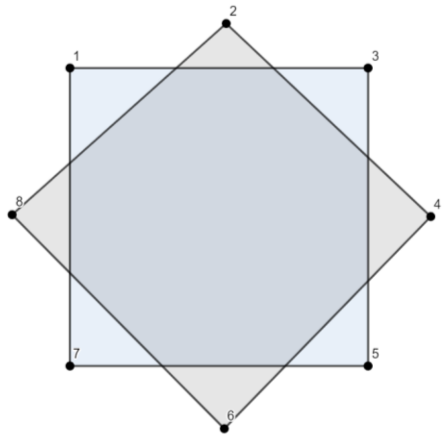
Para codificar a união dos pontos a matriz representada é de ordem 8 x 8.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para que a matriz possa ser decifrada o aluno deve obedecer ao código: Dada a matriz A e os pontos desenhados, ligue-os ou não de acordo com a seguinte regra:

- Se $a_{ij} = 1$, unir i com j;
- Se $a_{ij} = 0$, não unir i com j.

Logo a figura a ser formada será:



Comentários:

Com base no Problema 2, o aluno será o protagonista na criação de sua própria matriz código utilizando o que foi aprendido até o momento.

Problema 4

Fonte: Dante (2016, p. 69)

Habilidade BNCC: (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Objetivo: Compreender a operação de subtração de matrizes, fazendo uso de conhecimentos prévios.

Ano escolar: 2° ano do Ensino Médio

Conteúdo: Subtração de matrizes

O gerente de vendas de uma loja tem à sua disposição as tabelas de vendas mensais, em reais, dos seus três vendedores, por produto vendido.

Vendas em janeiro (R$)

Vendedor	Geladeiras	Fogões
Paulo	23.000,00	12.000,00
Germano	27.000,00	10.000,00
Rodolfo	19.000,00	15.000,00

Vendas em fevereiro (R$)

Vendedor	Geladeiras	Fogões
Paulo	21.000,00	10.000,00
Germano	16.000,00	6.000,00
Rodolfo	20.000,00	24.000,00

O gerente precisa saber se a evolução de vendas de janeiro para fevereiro aumentou ou diminuiu. Encontre a diferença de faturamento entre janeiro e fevereiro e o vendedor que teve a maior queda de vendas de geladeira de janeiro para fevereiro.

Possíveis resoluções:

Os alunos poderiam descobrir a diferença de faturamento fazendo a subtração de cada valor de geladeiras e fogões do mês de janeiro pelo mês de fevereiro para cada vendedor. Assim, a diferença de Paulo foi de –(R$2.000,00) para as geladeiras e de –(R$2.000,00) para os fogões; a de Germano foi de –(R$11.000,00) para as geladeiras e de –(R$4.000,00) para os fogões e Rodolfo teve uma diferença de R$1.000,00 para as geladeiras e de -(R$6.000,00) para os fogões.

No momento de formalização, as tabelas de fevereiro e janeiro devem ser transformadas nas matrizes A e B respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 21.000,00 & 10.000,00 \\ 16.000,00 & 6.000,00 \\ 20.000,00 & 9.000,00 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 23.000,00 & 12.000,00 \\ 27.000,00 & 10.000,00 \\ 19.000,00 & 15.000,00 \end{bmatrix}$$

Fazendo-se a subtração entre A e B:

$$A - B = \begin{bmatrix} 21.000,00 - 23.000,00 & 10.000,00 - 12.000,00 \\ 16.000,00 - 27.000,00 & 6.000,00 - 10.000,00 \\ 20.000,00 - 19.000,00 & 9.000,00 - 15.000,00 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2.000,00 & -2.000,00 \\ -11.000,00 & -4.000,00 \\ 1.000,00 & -6.000,00 \end{bmatrix}$$

Comentários:

Este problema tem o intuito de introduzir a operação de subtração de matrizes. Recomendamos que o professor utilize também a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

(ALLEVATO; ONUCHIC, 2014) no desenvolvimento deste problema. Conforme o roteiro da referida metodologia, o professor deve: entregar uma cópia do problema aos alunos e solicitar que façam a leitura individualmente; formar grupos e pedir que seja feita uma nova leitura entre os integrantes; acompanhar o trabalho dos grupos, esclarecendo dúvidas secundárias e incentivando os alunos a resolverem o problema com base em seus conhecimentos prévios; solicitar que cada grupo exponha na lousa o modo como resolveu o problema; buscar um consenso da resposta e fazer a formalização do conteúdo envolvido no problema.

Problema 5
Fonte: Dante (2016, p. 79)
Habilidade BNCC: (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais
Objetivo: Compreender a operação de multiplicação de matrizes.
Ano Escolar: 2° ano do Ensino Médio
Conteúdo: Multiplicação de Matrizes.

Para a fabricação de caminhões, uma indústria montadora precisa de eixos e rodas para seus três modelos de caminhões, com a seguinte especificação:

Número de eixos de cada modelo de caminhão

Componentes/ Modelo	A	B	C
Eixos	2	3	4
Rodas	4	6	8

Para os dois primeiros meses do ano, a produção da fábrica deverá seguir a tabela abaixo:

Produção de caminhões nos meses de janeiro e fevereiro

Modelo/ Meses	Janeiro	Fevereiro
A	30	20
B	25	18
C	20	15

Nessas condições, quantos eixos e quantas rodas são necessários em cada um dos meses para que a montadora atinja a produção planejada?

Possíveis resoluções:

Para descobrir a quantidade de eixos e rodas necessários nos meses de janeiro e fevereiro, os alunos poderiam multiplicar os números de eixos e rodas, de cada modelo, pela quantidade de produção de caminhões, e depois adicionar o total de eixos e rodas de cada mês.

- Mês de Janeiro:
  Eixos: (Modelo A) 2 x 30 = 60, (Modelo B) 3 x 25 = 75 e (Modelo C) 4 x 20 = 80. Assim, o total será 60 + 75 + 80 = 215 eixos.
  Rodas: (Modelo A) 4 x 30 = 120, (Modelo B) 6 x 25 = 150 e (Modelo C) 8 x 20 = 160. Assim, o total será 120 + 150 + 160 = 430 rodas.
- Mês de Fevereiro:
  Eixos: (Modelo A) 2 x 20 = 40, (Modelo B) 3 x 18 = 54, (Modelo C) 4 x 15 = 60. Assim, o total será 40 + 54 + 60 = 154 eixos.
  Rodas: (Modelo A) 4 x 20 = 80, (Modelo B) 6 x 18 = 108 e (Modelo C) 8 x 15 = 120. Assim, o total será 80 + 108 + 120 = 308 rodas.

No momento da formalização as tabelas devem ser transformadas em matrizes e o aluno deve perceber a multiplicação dos elementos da linha da Matriz A pelos elementos da coluna da Matriz B.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 25 & 18 \\ 20 & 15 \end{bmatrix}$$

Assim, temos:

$a_{11} = 2 * 30 + 3 * 25 + 4 * 20 = 215$

$a_{12} = 2 * 20 + 3 * 18 + 4 * 15 = 154$ $a_{13} = 4 * 30 + 6 * 25 + 8 * 20 = 430$ $a_{14} = 4 * 20 + 6 * 18 + 8 * 15 = 308$ A matriz obtida será: $\begin{bmatrix} 215 & 154 \\ 430 & 308 \end{bmatrix}$. Dessa forma, conclui-se que: Em janeiro serão necessários 215 eixos e 430 rodas e em fevereiro, 154 eixos e 308 rodas.
Comentários: Para resolver esse problema também recomendamos o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que traz o problema como ponto de partida. Assim, após os alunos pensarem sobre a situação proposta é que o professor faz a formalização, introduzindo o algoritmo e chamando atenção dos alunos para a ordem das operações realizadas ao multiplicar duas matrizes.

Por fim, destacamos que essa sequência pode ser modificada de acordo com a realidade da turma onde será aplicada. O professor pode inserir novos problemas ou mesmo exercícios do livro didático. No entanto, os 5 problemas propostos são chamados de geradores, pois eles trazem novos conceitos ou procedimentos a partir dos conhecimentos prévios dos alunos. Nesse processo, é fundamental que os alunos explorem os problemas e que construam a Matemática enquanto buscam pela solução (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi o de construir uma sequência didática sobre o conteúdo de matrizes para o Ensino Médio utilizando a metodologia Resolução de Problemas, para colaborar no ensino-aprendizagem de Matemática, bem como fornecer orientações aos professores.

Para isso, a primeira etapa deste trabalho contemplou a delimitação de nosso tema de estudo. Para isso, foi feito um levantamento sobre o surgimento de matrizes e uma revisão bibliográfica de estudos que abordam o conteúdo de matrizes. Também fizemos a revisão conceitual de matrizes apresentando suas características, definições e operações. A metodologia de pesquisa foi retratada, e foi realizada a análise dos três livros didáticos de Matemática, do segundo ano do Ensino Médio, disponibilizados pelo PNLD e mais vendidos.

Em uma segunda etapa, foi realizada a seleção dos problemas da sequência didática de acordo com a disposição didática curricular e com a habilidade EM13MAT301. O problema 1, envolvendo o conceito de matriz e a operação de adição de matrizes, traz tabelas contendo dados numéricos em um contexto que os alunos podem explorá-los utilizando seus conhecimentos prévios. Para resolver o Problema 2, o aluno irá utilizar matrizes para representar figuras planas a partir de uma matriz-código, respeitando a posição dos elementos das matrizes. Essa exploração será base para a realização do problema 3, onde o aluno irá criar sua própria matriz-código para representar a figura desejada. O problema 4 foi proposto para abordar a operação de subtração de matrizes. Para finalizar a sequência, foi proposto o problema 5, para explorar a operação de multiplicação entre duas matrizes. Além de cada problema, foram apontadas possíveis resoluções e apresentados comentários ao professor de Matemática sobre como se recomenda fazer uso do problema.

Consideramos que a abordagem da sequência didática proposta através da Resolução de Problemas para a introdução do conceito e das operações entre matrizes pode auxiliar o professor de Matemática em sua prática. As recomendações buscam estimular a participação ativa do aluno, promovendo a compreensão dos dados dispostos em tabelas e proporcionando métodos de organização de dados. Busca-se também, por meio da sequência, desenvolver as capacidades dos alunos de descrever, representar, sistematizar e argumentar matematicamente.

É possível que o professor faça uso dos livros didáticos disponíveis para selecionar problemas e torná-los mais desafiadores, podendo adaptá-los de acordo com seus objetivos. Modificações na pergunta e exclusão de alternativas, por exemplo, fazem com que o problema possa ser tomado como ponto de partida da aula de Matemática e não somente como aplicação de conteúdo já formalizado pelo professor.

Deixamos como sugestão, para professores de Matemática, o uso dessa sequência didática com alunos do Ensino Médio, bem como para novas pesquisas que possam refiná-la e/ou ampliá-la. Nesse caso, recomendamos o uso da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, conforme apresentada em outros trabalhos.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.) **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CABRAL, N. F. **Sequências didáticas:** estrutura e elaboração. Belém: Sociedade Brasileira de Educação Matemática/ SBEM – PA, 2017. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sequencias_didaticas.pdf>. Acesso em: 05 ago. 2021.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. **Álgebra Linear e aplicações**. São Paulo: Atual, 2000.

DANTE, L. R. **Matemática:** Contexto e Aplicações 2. São Paulo: Ática, 2016. Disponível em: < https://www.edocente.com.br/pnld/2018/obra/matematica-contexto-e-aplicacoes-volume-2-atica >. Acesso em: 28 jul 2021.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa**. 3 ed. Porto Alegre: Artmed, 2019.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática: Ciência e Aplicações 2**. São Paulo: Saraiva, 2016. Disponível em: < https://api.plurall.net/media_viewer/documents/2414501 >. Acesso em: 28 jul 2021.

MEDICO, L. D. **O ensino-aprendizagem de matrizes e determinantes por meio de resolução de problemas**. 141 p. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário Francisco (UNIFRA). Santa Maria – RS, 2008.

MIQUELANTE, M. A.; PONTARA, C. L.; CRISTOVÃO, V. L. L.; SILVA, R. O. **As modalidades da avaliação e as etapas da sequência didática:** articulações possíveis. Trabalhos em Linguística Aplicada [online]. 2017, v. 56, n. 1.

MOURA, I. M. **Contextualização de Matrizes Para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - Profissional). Jataí, p. 68. 2014.

OLIVEIRA, R. D. **Utilização de mensagens criptografadas no ensino de matrizes**. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), São Carlos, p. 84, 2013.

ONUCHIC, L.R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.199-220.

PARANÁ, Secretaria da Educação. **Os desafios da escola publica paranaense na perspectiva do professor PDE**: Produções Didático-Pedagógicas, ensino médio – 3° série, v. 2. Curitiba: SEED/PR, 2014.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. **Sequência Didática na Matemática**. Revista de educação do ideal, Alto Uruguai, v. 8, p. 15, jun 2013.

RIBEIRO, D. M.; ARAUJO, L. C.; OLIVEIRA, E. S.; CARISSIMI, A.; RIBEIRO, E. C. Uma abordagem de matrizes na perspectiva de resolução de problemas. **Revista Brasileira de Educação em Ciência e Educação Matemática**, ReBECEM, Cascavel, v. 3, n. 3, p. 854-869, dez 2019.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, M. P. B. **Metodologia de pesquisa**. 5 ed. Porto Alegre: Penso, 2013.

SANCHES, M. H. F. **Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação (Unicamp), Campinas, p. 153, 2002.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do professor:** matemática, ensino médio - 2° série, v. 2. São Paulo: SEE, 2009.

SILVA, H. C. M. **O ensino de matrizes a partir da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará (UEPA), Belém, p. 244, 2016.

SMOLE K.S. E DINIZ M.I. **Aprender matemática resolvendo problemas**. Porto Alegre: Artmed Editora. 2001.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. **Contato Matemática 2**. São Paulo: FTD, 2016. Disponível em: <https://leonardoportaldesign.files.wordpress.com/2020/02/matematica-contato-2-ano-2016.pdf>. Acesso em: 28 jul 2021.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa:** estudando como as coisas funcionam. Porto Alegre: Penso, 2011.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Introdução à álgebra linear**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1997.

VARGAS, S. L.; MAGALHÃES, L. M. O gênero tirinhas: uma proposta de sequência didática. **Educ. foco**, Juiz de Fora, v. 16, n. 1, p. 119-143, mar/ ago. 2011. Disponível em: <https://www.ufjf.br/revistaedufoco/files/2012/08/Texto-05.pdf>. Acesso em: 5 ago 2021.

WATANABE, T. **Resolução de Problemas no Ensino de Matrizes**. 2012. 70 f. TCC (Graduação) – Curso de Licenciatura de Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, São Paulo, 2012.

ZABALA, A. **Prática Educativa**: como ensinar. Porto Alegre: ARTMED, 1998