UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANNA LUIZA ALINO DOS SANTOS

TAREFAS EXPLORATÓRIAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2021

ANNA LUIZA ALINO DOS SANTOS

TAREFAS EXPLORATÓRIAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Profª. Drª. Eliane Maria de Oliveira Araman

CORNÉLIO PROCÓPIO
2021

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Anna Luiza Alino dos Santos

Tarefas exploratórias para o ensino de matemática: uma experiência no 6º ano do Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado às 19:00 no dia 29/11/2021, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Profa. Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman
(orientadora)

Profa. Ma. Maria Lucia de Carvalho Fontanini

Prof. Dr. Jader Otavio Dalto

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível graças à colaboração e estímulo de diversas pessoas, em que aqui demonstro a minha gratidão, amor e respeito, pois contribuíram, de maneira direta ou indiretamente, para esse trabalho.

Primeiramente, agradeço a Deus e sua Mãe santíssima, pois sem Eles, não teria como viver as diversas luta e batalhas nestes anos como universitária. Foram Eles que me deram forças em todos os momentos de minha vida.

Gratidão a minha família, meus pais Benedito Vitor e Ana de Fátima, e meus irmãos Pollyane e Victor Hugo, que me deram suporte e apoio durante a graduação.

Ao meu namorado, Pedro, que me incentiva desde o início da graduação, me dando suporte para que eu me sentisse capaz de passar por todas as minhas dificuldades.

À minha orientadora, professora Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman, pela atenção, carinho e suporte durante a realização desse trabalho.

Aos professores avaliadores, professor Dr. Jader Otavio Dalto e professora Ma. Maria Lucia de Carvalho Fontanini, por aceitarem o convite.

Aos meus amigos, que sempre demonstraram apoio e incentivo em toda minha graduação, e em especial a Ana Beatriz, Amabile e Fernanda, amigas que estão comigo desde o primeiro semestre, que se tornaram minha segunda família dentro da universidade.

Também para meu local de trabalho, Kumon Unidade Cornélio Procópio, e minha patroa, Veridiana, que desde 2017, me abriu portas para cursar Licenciatura em Matemática, pois foi nesse lugar que minha paixão por lecionar se iniciou.

Por fim, gostaria de agradecer a Universidade Tecnológica Federal do Paraná e todo o corpo docente do curso de Licenciatura em Matemática, pela qualidade e excelência do ensino.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.”
PAULO FREIRE, 2003.

RESUMO

SANTOS, Anna Luiza Alino dos. **Tarefas exploratórias para o ensino da matemática: uma experiência no 6º ano do Ensino Fundamental.** 2021. 65 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

Esta pesquisa de característica qualitativa, tem como tema as tarefas exploratórias, com o objetivo de analisar os processos de raciocínio matemático presentes nas resoluções de tarefas exploratórias referentes ao conteúdo de frações em duas duplas de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Para isso, neste estudo, realizamos a fundamentação teórica a respeito do raciocínio matemático e seus processos, das ações do professor em sala de aula e das tarefas de natureza exploratórias, baseando-se no estudo de diversos autores. Os dados que compõe o corpus de análise dessa pesquisa foram coletados durante a realização de tarefas exploratórias nas duplas analisadas, de maneira remota. O instrumento para coleta de dados foi constituído por três tarefas exploratórias. Os resultados apontam que as tarefas exploratórias contribuem para os processos de formulação de conjecturas, justificação, validação e generalização e promovem o raciocínio matemático, uma vez que os alunos, por meio de conhecimentos já adquiridos, desenvolveram outros.

Palavras-chave: Tarefas exploratórias. Raciocínio matemático. Processos de raciocínio. Ações do professor. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

SANTOS, Anna Luiza Alino dos. **Exploratory Tasks for Teaching Mathematics: an experience in the 6th year of middle school.** 2021. 65 f. Course Conclusion Paper (Graduation) – Mathematics Degree. Federal Technological University of Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

This qualitative research has as its theme the exploratory tasks, with the objective of analyzing the mathematical reasoning processes present in the resolution of exploratory tasks related to the content of fractions in two pairs of sixth-year students of middle school. For this, in this study, we performed the theoretical foundation regarding mathematical reasoning and its processes, the teacher's actions in the classroom and exploratory tasks, based on the study of several authors. The data that make up the corpus of analysis of this research were collected during the performance of exploratory tasks in the analyzed pairs, remotely. The instrument for data collection consisted of three exploratory tasks. The results indicate that exploratory tasks contribute to the processes of conjecture, formulation, justification, validation and generalization and promote mathematical reasoning, since students, through knowledge already acquired, developed other.

Keywords: Exploratory tasks. Mathematical reasoning. Reasoning processes. Teacher’s actions. Middle school.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desenvolver o raciocínio matemático dentro de uma sala de aula, em todos os seus processos de desenvolvimento, é um dos maiores objetivos da Matemática escolar (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018). Podemos ressaltar esta importância ao analisar a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), por exemplo, por ser um documento curricular que preza pelo desenvolvimento do raciocínio matemático nas aulas de matemática.

Mas inicialmente, devemos pensar: o que é este raciocínio matemático? O que devemos fazer, enquanto professores, para que esse desenvolvimento ocorra na vida escolar dos alunos?

Podemos dizer que raciocinar matematicamente é estabelecer inferências ou conclusões a partir de fatos conhecidos ou assumidos como verdadeiros. Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 783) entendem que "raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas, ou seja, utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões". Já para Jeannotte e Kieran (2017, p. 7), o raciocínio matemático é um "processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos". E também podemos nos referir à definição de Morais, Serrazina e Ponte (2018) que reconhecem o raciocínio matemático como um conjunto de processos mentais complexos por meio dos quais se obtém novas proposições a partir de proposições conhecidas ou assumidas como verdadeiras.

Porém para que o desenvolvimento do raciocínio matemático em sala de aula ocorra, a ação do professor é fundamental. Para que o professor possa promover o raciocínio matemático de seus alunos, é necessário um conhecimento sobre o próprio raciocínio matemático e os seus processos.

Os professores precisam criar um ambiente escolar que proporcione oportunidades estimulantes e reflexivas na disciplina: momentos de discussão, argumentação e elaboração de justificativas, dando o protagonismo da aula aos alunos, de maneira a valorizar as contribuições corretas e incorretas, sempre propondo novas questões e encorajando os alunos a argumentarem e justificarem seus argumentos, conduzindo discussões enriquecedoras e propondo tarefas desafiadoras.

Para George Pólya (1975), o professor deve propor problemas aos seus alunos para que estes possam se sentir desafiados nas suas capacidades matemáticas e assim experimentar o gosto pela descoberta, com início no Ensino Fundamental Anos Inicias até o ensino superior.

Essas descobertas matemáticas podem ser realizadas a partir de diferentes tipos de tarefas, entre elas a de caráter exploratório, foco do nosso trabalho. Tarefa exploratórias são capazes de “desenvolver o raciocínio matemático nos alunos e a compreensão de conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos.” (MATA-PEREIRA; PONTE; 2018, p. 784). Os estudantes não desenvolvem a capacidade de raciocinar apenas pela memorização de conceitos e procedimentos, mas a partir do trabalho com tarefas de natureza exploratória, por exemplo. Esse tipo de tarefa, segundo Ponte (2005) possibilita uma grande chance de sucesso em sua resolução, levando a um desenvolvimento de autoconfiança.

Dessa forma, esse trabalho tem como objetivo analisar os processos de raciocínio matemático presentes nas resoluções de tarefas exploratórias referentes ao conteúdo de frações em duas duplas de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

Assim, nesse trabalho de conclusão de curso, dividido em 6 capítulos, contando com a introdução, apresentamos a fundamentação teórica sobre temáticas como raciocínio matemático, ações do professor e tarefas exploratórias, a metodologia da pesquisa e os resultados e discussões sobre a coleta de dados apresentada.

No capítulo 2, baseado em autores como Jeanotte e Kieran (2017), Serrazina, Rodrigues e Araman (2020), Araman, Serrazina e Ponte (2019), Mata-Pereira e Ponte (2018), disserta-se sobre o raciocínio matemático e seus processos, como conjeturar, generalizar e justificar, entre outros.

O capítulo 3 apresenta a fundamentação teórica sobre as ações de professores em sala de aula, baseando-se em pesquisadores como Wood (1998), Mata-Pereira e Ponte (2020), Araman, Serrazina e Ponte (2019), Mata-Pereira, Quaresma e Ponte (2013), onde essas ações em sala de aula apoiam o raciocínio matemático.

Fundamentado em Ponte (2005), o capítulo 4 trata das tarefas matemáticas, com o foco na tarefa exploratória, que faz com que o conhecimento por meio dessa metodologia se torne mais dinâmico, isso porque o aluno que conduz a aula através dos questionamentos e levantamentos de hipótese.

No capítulo 5, apresenta-se a metodologia da pesquisa e o seu enquadramento. Os dados foram coletados com quatro alunos, organizados em duplas, do 6º ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Castro Alves, escola onde sou bolsista do Programa de Residência Pedagógica. A coleta foi realizada no dia 8 de outubro de 2021, de maneira remota, devido à pandemia da COVID-19, e foram usadas, como instrumentos de coleta de dados, três tarefas de caráter exploratório sobre o conteúdo de frações.

No capítulo 6, foi apresentada a transcrição e análise de todas as três tarefas realizadas pelas duplas. Esse capítulo também traz a discussão dos resultados obtidos, onde encontra-se a identificação dos processos de raciocínio matemático evidenciados pelos alunos durante a resolução da tarefa.

Por fim a conclusão, no qual estão presentes as considerações finais do trabalho de conclusão de curso, em que o objetivo de pesquisa foi retomado, os resultados foram apresentados, bem como os possíveis desenvolvimentos da pesquisa realizada.

2 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

"O raciocínio matemático é uma das capacidades-chave a se desenvolver desde os primeiros anos de escolaridade" (SERRAZINA; RODRIGUES; ARAMAN, 2020, p. 20), e isto porque um dos grandes objetivos do ensino da Matemática é desenvolver a capacidade de racionar, como afirma Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020).

É notório que diversos pesquisadores trazem a ideia do raciocínio matemático como algo de sublime importância nas aulas de matemática, e isso podemos confirmar quando Mata-Pereira e Ponte (2020) nos diz que raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas, ou seja, utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões, ou então quando vemos que vários documentos curriculares ao redor do mundo, apesar de, por vezes, não descreverem o raciocínio matemático de forma clara, destacam seu desenvolvimento por parte dos estudantes como um importante objetivo (JEANOTTE; KIERAN, 2017).

Muitos autores, embora descrevam o raciocínio matemático de formas diferentes, compartilham uma essência semelhante, na qual devemos construir novos conhecimentos com base nos já existentes, cuja afirmação podemos analisar a partir desde quadro:

Quadro 1: Algumas definições para Raciocínio Matemático

Definição	Referência
"Processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos".	JEANNOTTE; KIERAN (2017, p. 7)
Processo de inferência como o que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões.	STYLIANIDES (2009)
Processo que utiliza "informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões".	MATA-PEREIRA; PONTE (2018, p. 782)
Processo conjunto de conjecturar, generalizar, investigar porquê, argumentar e refutar se necessário.	LANNIN; ELLIS; ELLIOT (2011)
Um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas como verdadeiras (conhecimento prévio).	MORAIS; SERRAZINA; PONTE (2018)

Fonte: Araman e Serrazina, 2020, p.120

Outro documento interessante a ser analisado com relação ao raciocínio matemático é a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), que contém nas competências a serem desenvolvidas, a ideia principal de um raciocínio matemático apoiado a concepção de que

> [...] novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. (BRASIL, 2018, p. 531)

E para que isso seja realizado, autores como Morais, Serrazina e Ponte (2018) evidenciam que alunos de diferentes anos escolares conseguem participar de processos do raciocínio matemático, e desta maneira, o trabalho com esse desenvolvimento ocorre por meio dos processos associados ao raciocínio matemático, tais como generalização, conjectura, identificação de padrões, comparação, validação, que inclui a justificação e a prova, e por fim, a exemplificação, que ajuda a atender tais recomendações da BNCC já citada.

O raciocínio matemático deve ocorrer em todas as aulas de matemática, por meio de questionamentos, solicitação de porquês, interrogações durante as resoluções, trazendo o aluno como protagonista da aula. Para isso, Jeannotte e Kieran (2017) identificaram dois aspectos principais de raciocínio matemático: estrutural, que diz respeito aos diferentes tipos de raciocínio (dedutivo, indutivo e abdutivo), e o processual, que trata dos diferentes processos.

O raciocínio dedutivo, referido muitas vezes como raciocínio lógico ou raciocínio logico-dedutivo, segundo Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020, p.7), “produz conclusões que são necessariamente válidas”. Como refere Oliveira, esse raciocínio é “o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático” (OLIVEIRA, 2002, p.178). É por meio desse raciocínio que se validam as afirmações matemáticas, de tal forma que o traduzem como “selo da Matemática” (DAVIS; HERSH, 1995 apud PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020)

Já o raciocínio indutivo e abdutivo são muitas vezes usados em conjunto (RIVERA; BECKER, 2009 apud PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020)**,** e contribuem na criação de novo conhecimento, de tal forma que a

> indução é a inferência de uma regra a partir da observação do que é constante em diversos casos particulares. Já a abdução é um processo de

> inferência que parte de um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência. (MATA-PEREIRA, PONTE, 2018, p.789)

Após a identificação e explicação do aspecto estrutural do raciocínio matemático, é necessário o reconhecimento do aspecto processual, aonde encontramos diferentes processos.

Para Lannin, Ellis e Eliot (2011, p.10), “raciocinar matematicamente é um processo dinâmico envolvendo conjeturar, generalizar, investigar porquê, e desenvolver e avaliar argumentos”.

Por sua vez, para Mata-Pereira e Ponte (2018, p.791) “c*onjeturar*, *generalizar* e *justificar* destacam-se como processos essenciais do raciocínio matemático”.

Conjeturar, de acordo com Jeannotte e Kieran (2017, p.10), “infere uma narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico de provável”. Este entendimento também é declarado por Mata-Pereira e Ponte (2018, p.784) quando afirmam que “conjecturar é declarar algo que se pretende que seja verdadeiro, mas ainda não é conhecido como tal”. Já para Morais, Serrazina e Ponte (2018) “o processo de conjecturar baseia-se em produzir declarações, denominadas conjecturas, que requerem outras explorações para determinar se são verdadeiras.”

A BNCC (BRASIL, 2018) também entende essas definições de conjectura, isto porque defende que os estudantes devem buscar sempre que possível, contraexemplos e argumentos para validar diferentes afirmações. Dessa maneira, conseguimos identificar que esse processo está relacionado ao tipo de raciocínio abdutivo.

Já generalizar, pode ser considerado como um tipo de conjectura, isto porque, “a generalização também consiste em declarar que uma propriedade que se sabe válida para determinado conjunto de objetos se sustenta para um conjunto mais amplo de objetos” (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018, p.784) Segundo Jeannotte e Kieran (2017, p.9), generalizar é “um processo que infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos de um subconjunto desse conjunto”, e assim, reconhecer um padrão, tendo relação direta com raciocínio indutivo e abdutivo.

Diversos pesquisadores ressaltam que “a justificação é central para que seja possível validar matematicamente tais afirmações” (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018, p. 783). Assim, os estudantes devem ser capazes de justificar uma generalização, e após a justificação, chegamos à validação, que, de acordo com Jeannotte e Kieran

(2017), é um processo que tem como objetivo mudar o valor epistêmico de um enunciado matemático, sendo estes relacionados ao raciocínio dedutivo.

O Quadro 2 apresenta uma síntese desses processos de raciocínio matemático.

Desta maneira, consegue-se perceber que estes processos do raciocínio matemático devem começar nos primeiros anos e devem ser valorizados desde o início da escolaridade.

Quadro 2: Conjeturar, Generalizar, Justificar

Conjeturar	*Podem ter por base* - observação; - construção; - transformação do conhecimento prévio; - combinações de observação, construção e transformação.	*Pode assumir formas como* - identificar uma possível solução para um problema; - formular uma estratégia para resolver um problema;
Generalizar		*Pode assumir formas como* - reconhecer um padrão ou uma propriedade comum a um conjunto de objetos; - alargar o domínio de validade de uma propriedade a um conjunto mais alargado de objetos.
Justificar	*Pode ter por base* - definições; - axiomas, propriedades, princípios gerais; - representações; - combinações de definições, propriedades e representações.	*Pode assumir formas como* - coerência lógica; - uso de exemplos genéricos; - uso contraexemplos; - por exaustão; - por absurdo.

Fonte: Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 791)

Segundo Jeannotte e Kieran (2017, p.7), também podemos organizar os processos de raciocínio matemático conforme suas características, que são elas:

> (i) o buscar por semelhanças e diferenças, de tal forma a incluir a generalização, conjectura, identificação de padrões, comparação e classificação;
> (ii) a validação, ou seja, os processos de justificação e prova; e
> (iii) a exemplificação, que apoia os dois anteriores (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p. 468).

O processo de identificar padrões pode ser confundido com o de conjecturar, sendo que identificar padrões pode levar a uma conjectura, contudo, os dois processos não são iguais (STYLIANIDES, 2009, apud GONÇALVES; ARAMAN; SERRAZINA, 2021). De acordo com Araman e Serrazina (2020, p. 121) a comparação procura, por meio dessas semelhanças e diferenças, tenta construir uma narrativa sobre essas relações matemáticas, e a classificação é o processo de justificar as conjecturas de forma objetiva, com base em definições matemáticas.

No processo de validação, encontramos a prova, um passo além da justificativa. Isso porque, de acordo com Jeannotte e Kieran (2017), a prova tem um potencial maior de teorização pelo fato de lidar com narrativas aceitas pelo discurso matemático de especialistas.

Já a exemplificação “gera dados a serem utilizados em outros processos, como generalização, formulação de conjectura e mesmo a validação.” (GONÇALVES; ARAMAN; SERRAZINA, 2021, p.165).

Todos esses processos estão relacionados uns com os outros, porém é importante analisar e compreender separadamente cada um deles para que seja possível desenvolvê-los em sala de aula.

3 AÇÕES DO PROFESSOR

As ações do professor perante uma sala de aula de Matemática são essenciais. “É de grande importância saber como pode o professor, na sala de aula de Matemática, contribuir para que os alunos desenvolvam a capacidade de raciocínio nas suas diversas formas.” (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018, p.789).

Para Jeannotte e Kieran (2017)

> uma atividade discursiva do aluno consiste em o que os alunos dizem, a maneira com que ele falam, o que eles fazem com a informação, as representações e desenhos que eles montam, as maneiras como eles usam essas representações, e suas entonações e gestos [...] Para fornecer essa contribuição, os professores não devem apenas estar cientes da natureza das formas e processos de raciocínio matemático que desejam que os alunos aprendam a participar mas também reconhecem quando os alunos estão engajados nos aspectos desejados de raciocínio. (JEANNOTTE, KIERAN, 2017, p.3)

Como já citado anteriormente, alunos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental devem estar habituados a um olhar crítico e lógico para a matemática, e isto só é conquistado a partir de um professor que cria um ambiente escolar no qual proporcione oportunidades de pensar matematicamente, saindo do ensino igualitário e comum, e “precisam considerar as diferentes maneiras pelas quais diferentes pessoas podem pensar e resolver problemas” (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p.469). Dessa maneira, é preciso que os professores revejam “certas expetativas para criar um ambiente em que as crianças expressem o seu pensamento” (WOOD, 1998, p. 37).

Mata-Pereira, Quaresma e Ponte (2013) aprofundaram-se e categorizaram as ações dos professores para promover o raciocínio matemático em quatro grupos. O primeiro deles é a ação de *convidar*, onde o docente deve inserir o discente na discussão realizada em aula, realizando perguntas e trazendo interesse do aluno para o assunto. Após este momento, deve-se realizar a ação de *guiar/apoiar*, que traz a ideia de conduzir o aluno a explicar e argumentar sobre o que está sendo aprendido. Outra ação que o professor deve realizar é a de *informar/sugerir*, que é quando o professor tem o papel de fornecer referências que apoiem o raciocínio do aluno. E por fim, a ação de *desafiar,* que é quando o docente realmente desafia os alunos a buscarem um conhecimento maior pelo assunto, encorajando os alunos a avançarem mais profundamente sobre o assunto discutido em sala, “seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar" (MATA-PEREIRA; QUARESMA; PONTE, 2013, p.59).

O pesquisador Wood (1998) crê na necessidade de salas interativas e encorajadoras, que proporcionem ao aluno entender a matemática por meio do significado dos conceitos, isto porque diferentes visões sobre um mesmo assunto podem trazer diferentes contextos de aprendizagem. Dessa maneira, Wood categorizou os padrões de interação em três tipos: o tipo 1, tipo 2 e tipo 3.

No primeiro padrão de interação, nomeado como tipo 1, o aluno relata sua experiência ao resolver um determinado problema matemático, que nada mais é que a declaração do seu pensamento, e o professor deve apenas ser um participante deste diálogo, apenas realizando perguntas para levar o aluno a explicar o que fez e como fez o problema em questão. Isso "pode variar dentro destes contextos, dependendo da medida em que o professor estabelece as expectativas para a compreensão e clareza das explicações" (WOOD, 1998, p.38).

Já no segundo padrão de interação, tipo 2, Wood nos explica que nessa etapa o aluno continua a relatar sua experiência com o problema, porém dessa vez apresentando mais claramente o porquê realizou o problema dessa forma. Nessa tapa, o docente "exige que os alunos forneçam razões para a sua explicação" (WOOD, 1998, p.39).

E por fim, no tipo 3, que é o terceiro padrão de interação, possui um acréscimo com relação às outras etapas: a ação do professor de perguntar: "Como é que sabes isso? Consegues provar isso?" (WOOD, 1998, p.39), fazendo com que assim, o discente consiga argumentar sobre o seu pensamento. Ao apresentar um resultado incorreto, o professor deve realizar novas perguntas, guiando o aluno a reelaborar suas respostas e reorganizar seus pensamentos de maneira com que ele possa encontrar o que estava errado e organizar novamente seu pensamento, porém agora, de maneira correta.

Para isso, autores como Araman, Serrazina e Ponte (2019) consideraram quatro categorias de ações dos professores que apoiam o raciocínio matemático e realizaram uma síntese, a partir de discussões de pensadores como Wood, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma.

Quadro 3: Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático

CATEGORIAS	AÇÕES
Convidar	- Solicita respostas para questões pontuais. - Solicita relatos de como fizeram.
Guiar/Apoiar	- Fornece pistas aos alunos. - Incentiva a explicação. - Conduz o pensamento do aluno. - Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. - Encoraja os alunos e re-dizerem suas respostas. - Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas.
Informar/Sugerir	- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. - Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos. - Fornece informações e explicações. - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.
Desafiar	- Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). - Propõe desafios. - Encoraja a avaliação. - Encoraja a reflexão. - Pressiona para a precisão. - Pressiona para a generalização.

Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019, p. 476)

Nesse quadro podemos separar as ações dos professores, de acordo com os autores, em quatro diferentes categorias: *convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir* e *desafiar.*

Para a primeira categoria, *convidar* associa as ações de solicitar informações dos alunos, tentando entender o que este sabe sobre o tema tratado, solicitando relatos de como fizeram e respostas diretas sobre o assunto.

Já na segunda categoria, podemos associar *guiar/apoiar* com a ação em que o professor incentiva a explicação e,

> a partir de perguntas, ou explicações, conduz o pensamento dos alunos para uma determinada situação ou focaliza fatos importantes ou ainda quando o professor fornece pistas aos alunos e os encoraja a pensarem sobre suas respostas. (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p.476)

Na categoria de *informar/sugerir*, o professor, além de fornecer explicações e informações aos alunos sobre determinado assunto, apresentando outras estratégias de resolução,

> reage às informações fornecidas pelos alunos, seja por meio da validação ou correção de uma resposta ou reelaborando uma informação dada pelos alunos, mas que esteja incompleta ou que precisa ser aprimorada. (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p. 473)

E por fim, o professor deve *desafiar* o aluno de modo com que ele queira avançar em seu pensamento e querer aprender e aprimorar ainda mais seu conhecimento, procurando novas formas de representação e refletindo sobre o tema dado, justificando suas respostas e buscando sempre a generalização.

E é por isso que as ações do professor são necessárias e importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático. As perguntas realizadas pelos docentes estão relacionadas à capacidade do pensamento matemático do aluno, isso porque “a forma como os professores iniciam os seus alunos nas discussões bem como as rotinas de participação que eles proporcionam estão diretamente relacionados com um papel mais ativo desempenhado pelos alunos” (SERRAZINA; RODRIGUES; ARAMAN, 2020, p.24).

4 TAREFAS MATEMÁTICAS

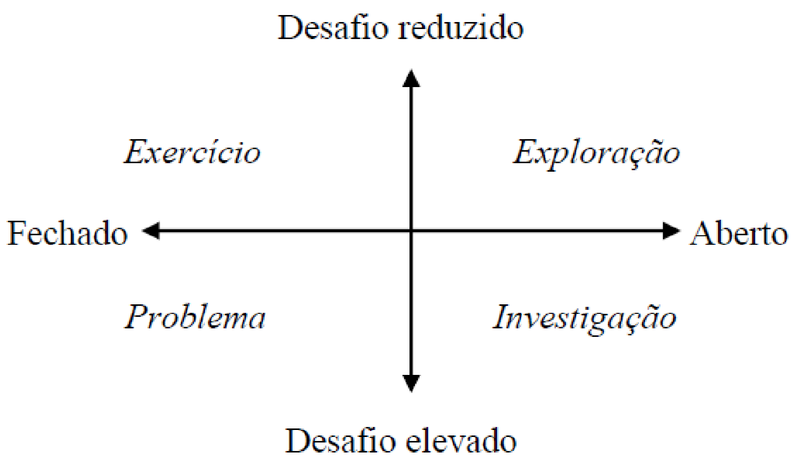
“Quando se está envolvido numa atividade, realiza-se uma certa tarefa. Uma tarefa é, assim, o objetivo da atividade” (PONTE, 2005, p. 1).

Uma tarefa matemática pode surgir de diversas formas: formulada e direcionada pelo professor ou pela iniciativa de algum aluno, sendo aplicada em qualquer momento em que o professor achar oportuno. Pode-se dizer que as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino da matemática. A ação do professor mediante a aplicação da tarefa também é de extrema importância, pois

> é formulando tarefas adequadas que o professor pode suscitar a atividade do aluno. Não basta, no entanto, selecionar boas tarefas – é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula. (PONTE, 2005, p. 1).

Existem diferentes tipos de tarefas matemáticas, que podem ser organizadas de acordo com seu grau de desafio e de abertura:

Figura 1: Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura.



Fonte: Ponte (2005, p.8)

Uma tarefa “fechada” é aquela onde é dito, de forma clara, o que é pedido, e já uma tarefa “aberta” é aquela que possui um grau de indeterminação do que é dado e pedido.

Já para relacionar uma tarefa ao seu desafio, deve-se levar em conta a dificuldade da questão apresentada e “constitui uma dimensão desde há muito usada para graduar as questões que se propõem aos alunos, tanto na sala de aula como em momentos especiais de avaliação como testes e exames" (PONTE, 2005, p.7).

Analisando essa figura, tendo em contas as respectivas propriedades de cada tipo de tarefa, podemos notar que: um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido, um problema é uma tarefa também fechada, mas com desafio elevado, uma investigação é de um grau de desafio elevado, porém uma tarefa aberta, e a tarefa de exploração, é uma tarefa de grau reduzido e dita como aberta.

4.1 Tarefa exploratórias

Temos, segundo Ponte (2005), que a principal característica de um ensino-aprendizagem de caráter exploratório é aquele em que o professor não procura explicar tudo, propondo que, os alunos, por meio de conhecimentos já adquiridos, façam a construção de uma linha de raciocínio.

Um ensino-aprendizagem exploratório "não significa que tudo resulta da exploração dos alunos, mas sim que esta é uma forma de trabalho marcante na sala de aula" (PONTE, 2005, p. 14), e assim, podemos concluir que não é algo ocasional que define o tipo de ensino, mas o trabalho desenvolvido como um todo. Desse modo, a tarefa exploratória dará ênfase em atividades de exploração, juntamente com outros tipos de tarefa como investigações, problemas e exercícios.

Ponte (2005) também nos diz, que tarefas de natureza mais acessível, como a exploratória, possibilita a todos os alunos uma grande chance de sucesso, contribuindo assim para o desenvolvimento da autoconfiança, sentimento de absoluta importância quando se trata da disciplina de matemática, e também faz com que os alunos se sintam desafiados. A realização destas tarefas permite com que eles percebam como se desenvolve uma atividade matemática.

Por existir diferentes tipos de tarefas matemáticas, podemos diferenciar estas em dois estilos, segundo Ponte (2005): ensino direto e ensino para uma aprendizagem exploratória, e é a partir desse quadro que podemos evidenciar a complexidade de uma tarefa de cunho exploratório, isto porque

> "uma aula com a exploração e tarefas de investigação é muito mais complexa de gerir do que uma aula com base na exposição de conceitos e de realização de exercícios, já que é impossível prever todas as sugestões e questões que os alunos possam apresentar." (PONTE, 2005, p. 25)

No quadro abaixo, conseguimos analisar as principais diferenças de um ensino direto e de um ensino de aprendizagem exploratória como relação aos tipos de tarefa aplicada, aos papéis dos alunos e professores e também a comunicação entre eles com relação ao ensino.

Quadro 4: diferenciação de ensino direto e aprendizagem exploratória

Ensino directo	Aprendizagem exploratória
Tarefas ▪ Tarefa padrão: Exercício; ▪ As situações são artificiais; ▪ Para cada problema existe uma estratégia e uma resposta certa.	Tarefas ▪ Variedade: Explorações, Investigações, Problemas, Projectos, Exercícios; ▪ As situações são realísticas; ▪ Com frequência, existem várias estratégias para lidar com um problema.
Papéis ▪ Os alunos recebem "explicações"; ▪ O professor e o manual escolar são as únicas autoridades na sala de aula; ▪ O professor mostra "exemplos" para os alunos "aprenderem a fazer".	Papéis ▪ Os alunos recebem tarefas para descobrirem estratégias para as resolver; ▪ O professor pede ao aluno para explicar e justificar o seu raciocínio; ▪ O aluno é autoridade se usar raciocínio lógico para fundamentar as afirmações.
Comunicação ▪ O professor coloca questões e fornece feedback imediato (sequência I-R-F); O aluno coloca "dúvidas".	Comunicação ▪ Os alunos são encorajados a discutir com os colegas (trabalhando em grupos ou pares); ▪ No fim de um trabalho significativo, fazem-se discussões com toda a turma; Significados negociados na sala de aula.

Fonte: Ponte (2005, p.12)

Em um ensino direto, entendemos que a tarefa padrão é um exercício aplicado em sala de aula sem muita relação com situações cotidianas, onde para cada exercício, existe um caminho e uma resposta correta. Para esse tipo de ensino, podemos correlacionar com uma ação do professor tranquila e amortecida, isso porque os alunos ficam fixados a um tipo de resolução, um processo de raciocínio generalizado, sem trabalhar a criatividade e a individualidade de conhecimento de cada um, já que o professor mostra "exemplos" para os alunos usarem de modelo para resolução. A comunicação entre aluno e professor é apenas para tirar dúvidas e receber um *feedback* (que está sempre relacionado com os acertos e erros da questão apresentada), esse que pode ser totalmente desmotivador para o aluno.

Já em um ensino de aprendizagem exploratória, as tarefas podem variar entre problemas, projetos, investigações, fazendo com que o aluno relacione o aprendizado, em sua grande maioria, a uma situação realista. Com frequência, nesse tipo de tarefa, usamos a ação de conjeturar, que explicado anteriormente, trata-se de formular uma estratégia para resolver determinado problema, mas isso de acordo com a individualidade de cada estudante. O professor guia o aluno por meio de pistas, mas é atitude do discente escolher qual estratégia usar para a resolução, isto porque existe diversos caminhos para se chegar ao resultado.

É também papel do professor, nessa tarefa, encorajar o aluno, fazendo com que o aluno justifique e discuta o seu raciocínio com a turma, fazendo questionamentos que desafiem o aluno a se aprofundar mais no conteúdo apresentado.

A partir desse quadro, podemos concluir que o trabalho com tarefas exploratórias em aulas de Matemática faz com que o conhecimento matemático seja dinâmico, isto porque o aluno que conduz a aula por meio dos questionamentos e discussões realizadas por eles. Para que essa condução ocorra, deve-se ocorrer o incentivo do professor, para que o discente faça a justificação de argumentos, por meio da exploração de situações e justificativas dadas na tarefa, se tornando algo diferente do habitual que ocorre na disciplina de matemática.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

5.1 A pesquisa qualitativa

A partir da ideia de Godoy (1995), a pesquisa qualitativa permite que a imaginação e a criatividade levem os pesquisadores a propor novos trabalhos que explorem enfoques diferenciados, de caráter inovador. Além disso, documentos qualitativos normalmente são considerados fonte de dados para outros estudos qualitativos. Godoy também nos diz que “uma das vantagens básicas desse tipo de pesquisa é que permite o estudo de pessoas as quais não temos acesso físico, porque não estão mais vivas ou por problemas de distância.” (GODOY, 1995, p.22).

Uma distinção entre a pesquisa qualitativa e a pesquisa quantitativa refere-se ao fato de que

> na pesquisa qualitativa há aceitação explícita da influência de crenças e valores sobre a teoria, sobre a escolha de tópicos de pesquisa, sobre o método e sobre a interpretação de resultados. Já na pesquisa quantitativa, crenças e valores pessoais não são consideradas fontes de influência no processo científicas. (GÜNTHER, 2006, p.203)

Segundo Günther (2006), a descoberta e a construção de teorias são objetos de estudo desta abordagem. Também nos diz que “a pesquisa qualitativa é uma ciência baseada em textos, ou seja, a coleta de dados produz textos [...]” (GÜNTHER, 2006, p.202).

5.2 Sujeitos da pesquisa

Após consulta com a professora da disciplina de matemática do Colégio Estadual Castro Alves, localizado na cidade de Cornélio Procópio, e escola onde atuo como residente do Programa de Residência Pedagógica, a coleta de dados foi realizada com quatro alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, organizados em duas duplas. A escolha dessa turma foi feita pelo fato de já ter contato com os alunos semanalmente, facilitando a interação dos estudantes através das tarefas propostas a eles.

Devido a pandemia da COVID-19, essa coleta foi realizada de maneira remota, no dia 8 de outubro de 2021, uma sexta-feira, no período da manhã, no contraturno das atividades escolares. Para esse estudo, usamos a plataforma Google MEET por um período de duas horas. Os alunos, inicialmente, se encontraram em um mesmo link para explicar a dinâmica da atividade. Após esse momento, foram direcionados a links diferentes para a aplicação da tarefa.

Os quatros estudantes que estiveram presentes na pesquisa foram alunos que se disponibilizaram para participar da atividade. Foi explicado para os alunos, antes de começar uma regência, que estaria fazendo uma pesquisa e precisaria de alguns alunos para participar de uma atividade. Inicialmente, seis alunos se mostraram dispostos a participar, porém, no dia, apareceram apenas cinco estudantes, onde um realizou a tarefa sozinho, e sendo assim, optamos por não aproveitar tal resolução para a nossa pesquisa, uma vez que o foco da análise está nas interações entre os alunos nas duplas.

Após esse momento, foi realizado o contato com os pais via *Whatsapp* para comunicar sobre a pesquisa, informando horário e data para que os pais ficassem cientes.

Para que isso ocorresse, foi enviado um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido aos pais, que está contido em apêndices, pedindo a permissão para a gravação do áudio da pesquisa, que foi transcrita posteriormente e analisada neste trabalho. Os termos devidamente assinados pelos responsáveis dos alunos estão em minha posse.

5.3 Instrumentos de coleta de dados

O instrumento de coleta de dados é constituído em três tarefas de caráter exploratório. O conteúdo trabalhado foi o de frações.

Anteriormente, no TCC 1, apresentamos cinco tarefas, porém, analisando o tempo que teríamos para aplicar e posteriormente para analisar, decidimos retirar uma tarefa. Portanto, na hora da aplicação, também foi necessário retirar mais uma, pela falta de tempo disponível dos alunos. Dessa forma, o corpus de análise foi constituído por três tarefas, apresentadas na sequência.

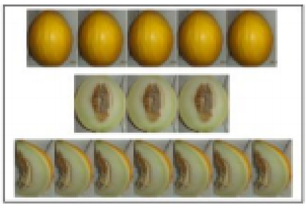
O objetivo delas é contribuir para a abordagem das frações em sala de aula, por meio de tarefas desafiadoras, numa perspectiva exploratória.

Baseada em um estudo de Garcia e Oliveira, organizamos essas três tarefas em três partes, "consideradas essenciais para a compreensão dos alunos a respeito das frações" (OLIVEIRA; GARCIA, 2014, p.5), assim como estão representadas abaixo:

Parte 1 – Explorando situações de contagem

Figura 2: Explorando situações de contagem

Seu Manoel é feirante há mais de vinte anos e tem uma barraca de frutas, na feira de rua, que acontece todo sábado na sua cidade. Em sua longa experiência nessa profissão, percebeu que muitas pessoas preferem comprar alguns produtos já cortados. Ele tem o costume de fazer os cortes em duas e em quatro partes iguais, hoje pela manhã passei em sua barraca e vi que na banca dos melões ele tinha:



Sendo assim, qual o total de melões nessa banca?

Fonte: Oliveira, Garcia, 2014, p. 8

A primeira tarefa tem como objetivo a percepção dos alunos sobre a insuficiência dos números naturais para expressar as situações cotidianas, por meio de um exercício de contagem envolvendo unidades inteiras e partes da unidade (metade, quartos), realizando uma relação parte-todo.

Parte 2 – Explorando situações de partilha

Figura 3: Explorando situações de partilha

Quatro amigas estão organizando um *picnic*, e combinaram que cada uma levará um tipo de lanche, como mostra o quadro ao lado:

Pessoas	Lanches
Ana	8 sanduíches
Luiza	1 torta salgada
Julia	3 litros de suco
Maria	6 *cupcakes*

a) Se no *picnic*, elas dividirem o lanche igualmente, quanto cada uma poderá comer de cada item?

b) No dia do *picnic*, Luiz e Pedro se juntaram ao grupo, e levaram mais uma torta salgada igual à que Luiza levou, e um pacote com dez laranjas. Agora que o grupo aumentou, quanto cada um poderá comer de cada item?

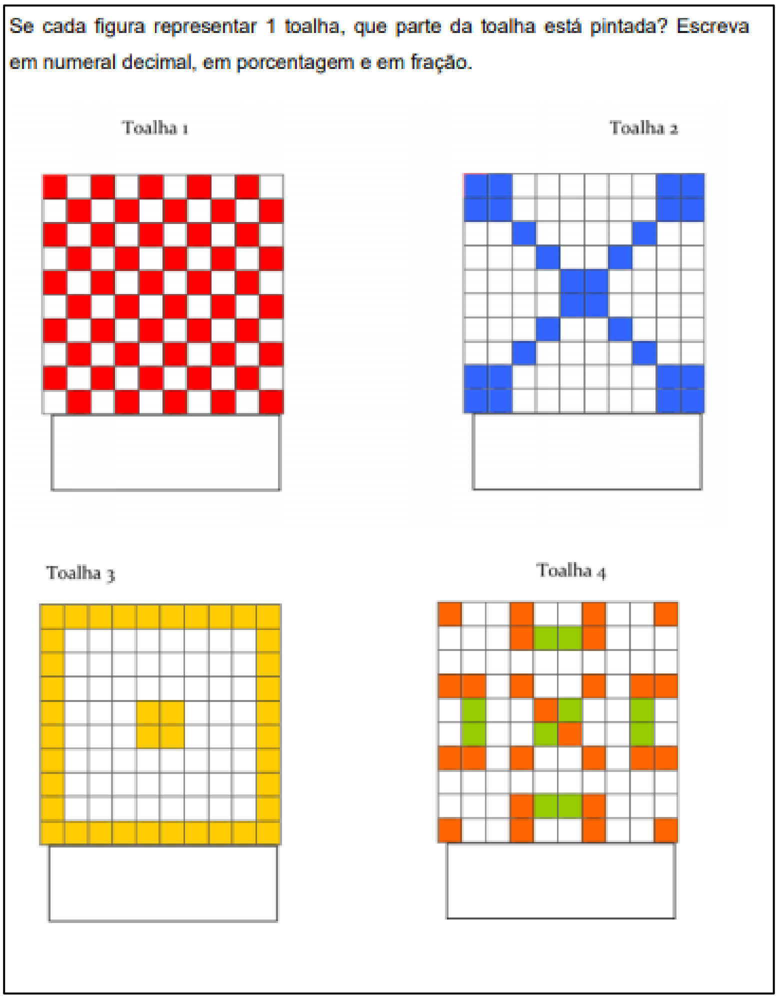
Fonte: Oliveira, Garcia, 2014, p. 10

A segunda tarefa traz a ideia de partilha, em uma análise cotidiana de um *picnic*, onde os alunos devem repartir os lanches enunciados em partes iguais, e fazer a representação numérica da situação, obtendo diferentes maneiras de registrá-las.

O objetivo principal da tarefa é que os alunos compreendam as diferentes representações numéricas em momentos de partilha, até mesmo no momento da partilha do resto. Esse resultado foi obtido utilizando a divisão do número de lanche pelo número de pessoas, porém, o resultado, muitas vezes, deve ser formado por um número natural acompanhado de um número fracionário menor que a unidade, permitindo uma compreensão mais ampla dos números fracionários.

Parte 3 – Diferentes representações do número racional

Figura 4: Diferentes representações do número racional



Fonte: Oliveira, Garcia, 2014, p. 21

A terceira tarefa, por sua vez, tem o objetivo de levar o aluno a visualizar o resultado das frações em outras representações, como o número decimal e a porcentagem.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como mencionado, os dados foram coletados em duas duplas de alunos, sendo a dupla 1 composta pelos estudantes 2 e 3 e a dupla 2 composta pelos estudantes 4 e 5. Na sequência, apresentamos os dados da discussão entre os alunos nas três tarefas, primeiramente da dupla 1 e depois da dupla 2.

6.1 Transcrição e análise dos estudantes 2 e 3

6.1.1 Tarefa 1:

PROFESSORA: Então pensem o seguinte: como podemos juntar os melões para eles ficaram inteiro? Por exemplo, esse melão dividido ao meio, como eu posso juntar as partes para formar um inteiro?

ESTUDANTE 2: O que eu vi aqui que está perguntando: quantos "totais" de melões que tem na barraca do seu Manoel. Aqui no enunciado que fala dos produtos já cortados, acho que temos que prestar atenção nisso.

ESTUDANTE 3: Pelo que eu vi aqui, parece que tem uns dez melões, se juntar tudo igual a professora comentou. A gente já tem cinco inteiros, três pela metade e sete que estão cortados em fatias menores, uma de quatro partes.

ESTUDANTE 2: Tá, então se um ele cortou em quatro partes iguais, a gente tem que juntar as quatro e ver quantos que vai dar. Se eu não me engano, é isso.

ESTUDANTE 3: Então se a gente juntar os quatro, vai formar um melão inteiro, e daí vai sobrar três partes dessas menores. E daí, os que estão cortados pela metade, nós vamos juntar, e como ali também é um número ímpar, não vai dar para juntar tudo.

ESTUDANTE 2: Nossa, verdade! Eu achei que se juntasse tudo, ia dar número par, daí a gente conseguiria juntar, mas agora que reparei que estão cortados diferentes, igual você falou. O de cima tem três e é metade, e o de baixo tem sete, mas tá cortado em quatro. Eu não tinha percebido, e agora eu vi.

ESTUDANTE 3: Então, são números ímpares, não vai dar certo.

ESTUDANTE 2: Eu acho que um daqueles melões que está cortado pela metade, a gente pode juntar com dois daqueles três cortados em baixo.

ESTUDANTE 3: Isso, verdade! Mas vai sobrar um pedaço daí. Então calma, se ele cortou em quatro, então ali vai sobrar três. Então, se ele cortou em quatro, vai ficar duas partes de um lado e duas do outro. Daí a gente pega dois daqueles três que sobrou e coloca com a outra metade que sobrou, daí vai sobrar só uma parte menor. É isso ne?

ESTUDANTE 2: É, acho que é isso mesmo.

ESTUDANTE 3: Tá, então vamos lá: uma metade junta com a outra metade, daí vai dar um melão. Daí a outra metade que sobrou então, vai juntar com os outros dois melões cortados menores, daí fica mais um. Daí pega mais quatro desses menores e forma mais um. Pronto, vai sobrar um mesmo, não tem o que fazer com essa parte.

ESTUDANTE 2: Tá, e qual o total de melões?

ESTUDANTE 3: Será que tem que contar com os melões que já tão certo?

ESTUDANTE 2: Acho que sim, daí a gente vai ter um total de oito melões, mais aquela partezinha que sobrou.

ESTUDANTE 3: É, certeza que é isso.

PROFESSORA: E aí meninas, conseguiram fazer? Como fizeram?

(O raciocínio descrito acima foi feito enquanto não estava ali com as alunas)

ESTUDANTE 2: Olha, a gente pensou assim: A gente foi vendo os melões e ali nos que foram cortados pela metade são três, que é um número ímpar, e embaixo são sete, que também é um número ímpar. Daí ali, como ele cortou em quatro partes, para dar um melão inteiro, são quatro, e vai sobrar três. E ali, como já tem os pela metade, a gente pegou dois, juntou e deu um melão, daí a gente pegou a metade que sobrou, juntou com dois pedaços menores, que juntos também formam uma metade e deu mais um melão.

ESTUDANTE 3: Então com os cinco lá de cima, deu oito melões inteiros e mais uma partezinha menor.

PROFESSORA: Vocês falaram dos números impares: o que isso tem a ver?

ESTUDANTE 2: É porque se fosse número par, era só a gente juntar que ia dar certo. Por exemplo, se fosse seis metades, oito metades, ia dar um número de melões inteiros, mas como a gente tinha um número ímpar, ficou sobrando.

ESTUDANTE 3: Nossa professora, e agora o de baixo, pensando bem, tinha que ser tipo, os números da tabuada do quatro ne? Já que para formar um inteiro, tem que ter quatro partes. Se tivesse mais uma partezinha ali, ia dar dois melões, mas se tivesse seis, por exemplo, não ia dar muita diferença, ainda ia sobrar.

PROFESSORA: É isso meninas!!! Perfeito!

As estudantes começam a fazer a tarefa a partir da explicação da professora, considerando que devem juntar as partes para formar os melões inteiros. A estudante 2 elabora uma primeira conjectura ao dizer que, se o feirante cortou um melão em quatro partes, então deve-se juntar as quatro partes de novo para formar o inteiro outra vez. Essa conjectura se apoia no conceito de parte-todo de uma fração. Entretanto vale destacar que essa informação inicial foi dada pela professora durante a explicação da tarefa.

Na sequência, a estudante 3 valida a conjectura apresentada pela estudante 2 e ainda elabora outra conjectura, afirmando que quando é número ímpar não dá para formar o inteiro (neste caso especificamente em que os melões foram divididos em 4 partes). A partir dessa conjectura, a estudante 2 informa que sua conjectura inicial era de que tudo ia dar par, mas que a partir da discussão, ela observa elementos da tarefa que não tinha percebido antes. Tal observação é relevante, pois o evidencia o potencial da tarefa exploratória e da discussão entre os estudantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Na continuidade da discussão, a estudante 2 elabora uma nova conjectura *"eu acho que um daqueles melões que está cortado pela metade, a gente pode juntar com dois daqueles três cortados embaixo",* ou seja, juntar um quarto de melão com outro um quarto para formar a metade do melão, e aí juntar com a outra metade para formar o inteiro. Essa conjectura é validada pela estudante 3, que ainda apresenta uma justificação para torná-la válida: "*uma metade junta com a outra metade, daí vai dar um melão. Daí a outra metade que sobrou então, vai juntar com* *os outros dois melões cortados menores, daí fica mais um. Daí pega mais quatro desses menores e forma mais um. Pronto, aí vai sobrar um mesmo, não tem o que fazer com essa parte".*

A partir disso, a estudante 2 responde facilmente a tarefa: "*daí a gente vai ter um total de oito melões, mais aquela partezinha que sobrou".* Nesse momento, a professora se aproxima da dupla e solicita que elas expliquem como fizeram. Elas relatam para a professora como fizeram. Nesse momento, a professora as questiona sobre a conjectura do número ímpar, pois até o momento elas tinham tomado como válida essa conjectura, mas não a tinham justificado.

A estudante 2 tenta elaborar uma justificação para a conjectura e, para isso, se apoia no processo de exemplificação: "*É porque se fosse número par, era só a gente juntar que ia dar certo. Por exemplo, se fosse seis metades, oito metades, ia dar um número de melões inteiros, mas como a gente tinha um número ímpar, ficou sobrando".* Tal justificação é complementada pela estudante 3 que recorre ao conhecimento anterior sobre a tabuada do 4 para afirmar que quatro partes forma um inteiro.

6.1.2 Tarefa 2:

PROFESSORA: Então esse exercício é o seguinte: vocês têm algumas quantidades de comidas e bebidas para as amigas fazerem um picnic, e elas vão dividir os lanches. Daí olhem certinho o que o exercício está pedindo e reflitam: elas vão ficar com quantidades iguais, todo mundo? Vai ficar um número inteiro certinho de comidas para cada uma? A gente vai usar fração para representar os números ou não? Já volto aqui, façam do jeitinho de vocês, da forma que acharem melhor.

ESTUDANTE 2: Tá, então vamos lá: então a gente tem que elas levaram oito sanduiches, então como são quatro amigas, vai ficar dois sanduiches para cada, porque daí né, oito dividido por quatro pessoas dão dois para cada.

ESTUDANTE 3: Aham

ESTUDANTE 2: Tá, uma torta salgada.... a gente não sabe o tamanho da torta.

ESTUDANTE 3: Vamos pro outro para a gente tentar ver se tem quantidade.

ESTUDANTE 2: Três litros de suco e seis cupcakes. Como são quatro pessoas.... Tá, seis dividido por quatro... Dá um para cada né? E vai sobrar dois cupcakes ainda.

ESTUDANTE 3: Tá, então vamos voltar: o sanduiche vai dar dois para cada mesmo, a torta a gente não sabe o tamanho então não tem como a gente saber quantos pedaços de torta vai dar para cada uma... A Julia levou três litros de suco. Consegue fazer a conta de três vezes quatro?

ESTUDANTE 2: Porque vezes?

ESTUDANTE 3: Para ser as quatro pessoas vezes os três litros de suco.

ESTUDANTE 2: Três vezes quatro é doze.

ESTUDANTE 3: Então doze dividido por quatro... é três. Então cada uma vai poder beber três copos de suco...

ESTUDANTE 2: E os cupcakes?

ESTUDANTE 3: A Maria levou seis, então é aquilo que você falou, são quatro pessoas... se elas comerem um inteiro, vai sobrar dois, e esses dois que sobrarem elas dividem pela metade. Duas pessoas ficam com um cupcake e outras duas ficam com o outro. Daí cada uma vai comer um e meio.

ESTUDANTE 2: Caraca, a gente está indo super bem, nem estou acreditando (risadas)

ESTUDANTE 3: Acho que está certinho mesmo, vamos pra próxima e depois a gente vê com a professora sobre a torta.

(leem o enunciado da letra b)

ESTUDANTE 2: Tá, então eles levaram mais uma torta salgada... Agora dificultou... (risadas)

ESTUDANTE 3: Mas a gente não sabe o tamanho da torta... E o pacote de laranja tem dez laranjas... Como aumentou mais duas pessoas, então vai dar seis pessoas, é isso?

ESTUDANTE 2: Pera, vai dar uma laranja para cada um, e vai sobrar quatro laranjas

ESTUDANTE 3: É, vai sobrar quatro laranjas...

ESTUDANTE 2: E a torta não tem como a gente saber.... não tem o tamanho da torta

ESTUDANTE 3: Então... como a gente vai saber quanto cada um comeu? Se sobrou ou não sobrou, se faltou, não dá para saber...

ESTUDANTE 2: Então, porque as vezes fez uma torta de oito pedaços, de dez pedaços, como a gente vai saber né?

ESTUDANTE 3: Vamos chamar a professora.

PROFESSORA: Precisam de ajuda?

ESTUDANTE 2: Professora, a gente não sabe o tamanho da torta...

PROFESSORA: Pensem em uma torta inteira... vocês podem imaginar ela da forma que quiserem.

ESTUDANTE 2: A gente pode considerar como tipo... um quilo de torta para cada torta?

PROFESSORA: Sim, pode ser sim!

ESTUDANTE 3: Tá, então vamos pensar... um quilo de torta... vamos pensar em quantas partes a gente pode dividir, mais fácil.

ESTUDANTE 2: Olha, um quilo de torta deve dar uns doze pedaços né? Não é muito, mas não é pouco também, a gente pode fazer essa estimativa de doze pedaços.

ESTUDANTE 3: Então vamos ficar com doze fatias... Então, no primeiro exercício, doze dividido pelas quatro amigas dão três pedaços de torta para cada.

ESTUDANTE 2: É, e na outra, são seis pessoas, mas eles levaram mais uma torta.

ESTUDANTE 3: Então não vai ser mais doze pedaços, vai ser vinte e quatro.

ESTUDANTE 2: Aham, daí são vinte e quatro pedaços para seis pessoas... vinte e quatro dividido por seis dão... quatro.

PROFESSORA: Oi, cheguei... concluíram a tarefa?

ESTUDANTE 2: Então professora, olha: o sanduiche na primeira vai dar dois para cada, a torta vai dar três pedaços para cada pessoa...

PROFESSORA: Então vocês consideraram uma torta como se ela tivesse doze pedaços, é isso?

ESTUDANTE 3: Sim, porque a gente pensou que ela poderia ter um kg, e dai a gente imaginou que um quilo não é muita coisa, então imaginamos doze pedaços...

PROFESSORA: E se ela fosse um pouco menor, tipo, de oito pedaços, quantos ficariam para cada?

ESTUDANTE 2: Hmmm, deixa eu ver... são quatro amigas né? Então ficaria dois pedaços para cada...

ESTUDANTE 3: É, se a torta for maior, são mais pedaços para cada, se a torta for menos, menos pedaços

ESTUDANTE 2: No suco, a gente fez que ia dar três copos para cada.

PROFESSORA: Então calma, quantos copos vocês fizeram para um litro? Vocês calcularam isso? Uma garrafa de um litro, da quantos copos? Como chegaram nesses três copos para cada?

ESTUDANTE 3: A gente fez quatro vezes três, porque são quatro pessoas e três litros, dai depois a gente pegou o resultado que era 12 copos e dividimos por quatro, daí deu três copos para cada uma.

PROFESSORA: Então vamos pensar... quantos copos da por litro? Se são dozes copos no total, quantos copos seriam em um litro?

ESTUDANTE 2: Se em três litros tem dozes copos...

ESTUDANTE 3: Quatro professora?

PROFESSORA: Isso!! Muito bem!

ESTUDANTE 2: Daí nos cupcakes, vai dar um para cada amiga, e mais metadinha para cada uma também, porque vai sobrar dois, que vai ser dividido entre as quatro amigas.

ESTUDANTE 3: É, acho que é isso na letra a...

PROFESSORA: Isso mesmo, e na letra b?

ESTUDANTE 2: O sanduiche, pensando aqui agora, vai dar um pra cada né? E dai vai sobrar dois...

PROFESSORA: E esses dois, o que pode ser feito?

ESTUDANTE 3: Da para dividir um em quatro partes, e o outro em duas...

PROFESSORA: Mas os dois amigos comeriam mais? Não tem como dividir de forma igual será?

ESTUDANTE 2: Ah professora, eu acho que não... acho que os dois meninos vão comer mais... meninos comem mais mesmo (risadas)

PROFESSORA: (risada) então ok, vamos para o próximo...

ESTUDANTE 3: Na torta, e gente juntou as duas né, e ficou um total de 24 pedaços, porque a gente fez igual a letra a, como se uma torta tivesse doze pedaços... A gente dividiu 24 pedaços para seis pessoas, dai deu quatro pedaços para cada um.

ESTUDANTE 2: Nos três litros de suco, vai ficar dois copos para cada, porque é a mesma quantidade de suco né...

ESTUDANTE 3: É, como a gente tinha falado, tem 12 copos de suco no total, dai vai ficar dois copos para cada, porque são seis amigos...

ESTUDANTE 2: O cupcake é simples, vai ser um para cada mesmo, não vai ter briga... E nas laranjas, deu uma para cada

ESTUDANTE 3: Daí vai sobrar quatro né... Essas quatro laranjas poderiam ficar com as meninas né? Já que os meninos comeram mais sanduiche...

ESTUDANTE 2: Verdade professora, não pode isso não?

PROFESSORA: Não tem como dividir essas quatro laranjas entre as seis pessoas?

ESTUDANTE 3: Olha, estou pensando aqui, dá para dividir três das que sobraram no meio, daí fica uma laranja e meia para cada, e sobra uma, para quem ainda estiver como fome...

PROFESSORA: Conseguem pensar de outra maneira, para não sobrar nenhuma laranja?

ESTUDANTE 2: Professora, eu acho que não dá não, não tem como dividir mais do que isso em uma laranja...

PROFESSORA: Perfeito meninas, está incrível o pensamento de vocês! Vamos para o último então?

As estudantes começam a tarefa a partir de uma breve explicação da professora, com base nos dados fornecidos no enunciado. Imediatamente, a estudante 2 elabora a conjectura que, como são quatro amigas presentes no *picnic,* serão dois sanduiches para cada, e apresenta sua justificativa para isso "oito dividido por quatro pessoas dão dois para cada", recorrendo a ideia de divisão. Tal conjectura, correspondente a ideia de divisão de lanches pelo número de pessoas, é validada pela estudante 3.

Em seguida, elas questionam não saber o tamanho da torta, e sendo assim, elaboram a ideia de que não é possível descobrir quanto de torta que cada uma vai receber, isto porque não sabem o tamanho da torta. Isso indica que elas ainda não perceberam que podem recorrer a fração, considerando a torta como um inteiro e a parte de cada amigo como sendo um quarto da torta.

Assim, elas seguem para o cálculo do suco. A estudante 3 pede para a companheira fazer três vezes quatro, o que, matematicamente, não tem sentido para esta situação, já que na verdade, deveria ser três litros dividido por quatro amigas. A intervenção da professora neste caso era necessária, porém ela não estava presente nesse momento e acabou não intervindo no raciocínio das estudantes. Seguindo o pensamento, elas, com o resultado de três vezes quatro, dividem doze pelas quatro amigas, obtendo o total de três copos de suco para cada menina. Aplicando na matemática, elas não conseguiram utilizar a representação fracionária para simbolizar essa divisão, na qual elas precisaram achar um número que fosse divisível por quatro para então obter um número inteiro como resultado.

Na continuidade da discussão, vão para a quantidade de *cupcakes,* tal que a estudante 3 elabora uma nova conjectura, em que cada uma comerá um *cupcake* inteiro e ainda sobrarão dois dos mesmos, no qual esses dois, serão divididos pela metade e cada uma ficará com meio *cupcake*, totalizando um *cupcake* e meio para cada.

Com relação à torta, quando a professora se aproxima da dupla, a estudante 2 afirma não saber o tamanho da torta, e sendo assim, a professora sugere as estudantes a pensarem em uma torta inteira, da forma que pudessem imaginar. A estudante 2 questiona: "*A gente pode considerar como tipo... um quilo de torta para cada torta?".* A partir disso, elas elaboram uma conjectura de que a torta poderia ter 12 pedaços: "*Olha, um quilo de torta deve dar uns doze pedaços né? Não é muito, mas não é pouco também, a gente pode fazer essa estimativa de doze pedaços.".* Por meio dessa conjectura, a estudante 3 conclui que cada amiga ficará com três pedaços de torta para cada, recorrendo mais uma vez a ideia de divisão, e sempre com a validação da estudante 2.

Olhando matematicamente para esse caso, é notório, como já citado anteriormente, que as estudantes ainda não estão conseguindo representar estes números em fração, onde precisam determinar um número, sendo este divisível por quatro, para conseguir efetuar a divisão e para assim, resultar em um número inteiro.

A professora, a fim de desafiar as estudantes, as questiona com relação a uma torta um pouco menor, como se ela tivesse oito pedaços, e as estudantes, apoiadas em sua conjectura, afirmam que ficariam dois pedaços para cada amiga, ainda considerando a ideia de divisão, sem estabelecer a relação de parte-todo. Aqui também houve uma falha na intervenção da professora, pois o mais adequado seria estabelecer um número de pedaços que não fosse divisível por quatro, para conduzi-las a tentar estabelecer uma relação com a fração.

Já para a alternativa B, elas são guiadas pelas mesmas conjecturas já elaboradas, porém agora com o aumento do número de pessoas no *picnic*, de uma torta e de dez laranjas.

Com relação aos sanduiches, elas foram bem breves e elaboram a conjectura que será um sanduiche para cada amigo, e sobraram dois. A professora, ao questionar o que seria feito com esses dois que sobraram, é respondida por meio do seguinte pensamento: “*dá para dividir um em quatro partes, e o outro em duas...”,* porém, a professora ainda tenta sugerir as estudantes perguntando se não teria como dividir de forma igual entre os amigos, ou se duas pessoas comeriam mais, e a estudante 2 é certa no que diz quando elabora a seguinte conjectura: “*ah professora, eu acho que não... acho que os dois meninos vão comer mais... meninos comem mais mesmo (risadas)”,* o que, infelizmente, não é uma resposta matematicamente proveitosa, o que nos mostra mais uma vez a falta de conhecimento das estudantes com relação ao conteúdo de fração como representação de números.

Para o cálculo da torta, elas utilizaram a mesma conjectura criada na primeira alternativa. Juntaram as duas tortas, totalizando vinte e quatro pedaços, seguindo ainda a ideia de doze pedaços por torta, e dividiram para seis pessoas, resultando em quatro pedaços para cada um dos amigos, assim como apresenta a estudante 3.

O cálculo do suco é explicado melhor pela estudante 3, quando a mesma diz inicialmente, como resposta para a letra a: “*A gente fez quatro vezes três, porque são quatro pessoas e três litros, dai depois a gente pegou o resultado que era 12 copos e dividimos por quatro, daí deu três copos para cada uma.”* E para a letra b, o cálculo é realizado por meio da mesma conjectura, apresentada pela estudante 2: “(...) *como a gente tinha falado, tem 12 copos de suco no total, daí vai ficar dois copos para cada, porque são seis amigos...”.*

Para o *cupcake*, levam em consideração a conjectura de quantidade dividida pelo tanto de pessoas, totalizando um *cupcake* por amigo, ou seja, apoiam-se na ideia de divisão de quantidade pelo número de pessoas.

Já para as dez laranjas, a estudante 2 elabora uma conjectura inicial, onde diz que, como agora serão seis pessoas, dará uma laranja para cada e sobrarão quatro. Em seguida, a estudante 3 traz uma resposta, não matemática, para a conjectura da sobra das quatro laranjas: “*essas quatro laranjas poderiam ficar com as meninas né? Já que os meninos comeram mais sanduiche...”.* Através dessa resposta, pode-se entender que as alunas não conseguiram alcançar o objetivo da atividade: trabalhar com a relação parte-todo, utilizando a representação de frações.

A partir dessa resposta, pedem a confirmação da professora, onde esta questiona se não é possível dividir de maneira igual as laranjas restantes. Sendo assim, após pensar um pouco, a estudante 3 afirma: "*dá para dividir três das que sobraram no meio, daí fica uma laranja e meia para cada, e sobra uma, para quem ainda estiver como fome...".* A professora tenta mais uma vez conduzir as estudantes a pensaram em uma maneira de dividirem as laranjas em formas iguais, mas essa condução não é bem sucedida.

6.1.3 Tarefa 3:

(elas leem o enunciado)

ESTUDANTE 2: Calma... a gente vai ter que contar tudo esses quadradinhos?

ESTUDANTE 3: Acho que pro total, a gente pode contar os dos lados e multiplicar né? Porque vai ser 10 x 10... tem dez linhas e dez quadradinhos em cada linha, então daí é só fazer 10x10 que tem o total de quadradinhos entendeu?

ESTUDANTE 2: Então tem cem quadradinhos no total né?

ESTUDANTE 3: Isso na toalha 1 né?

ESTUDANTE 2: Acho que em todas tem a mesma quantidade, está tudo do mesmo tamanho...

ESTUDANTE 3: Sabe o que eu entendi aqui? Tem que pegar esse cem e escrever em forma decimal...

ESTUDANTE 2: Han?

ESTUDANTE 3: Forma decimal, colocar a vírgula... E na forma de fração, esse cem vai ser o de baixo, porque o de baixo é sempre o total de partes divididas, lembra? Na fração, a gente tem que contar os que estão pintados, para colocar na parte de cima sabe? Daí fica o cem em baixo e os pintados em cima...

ESTUDANTE 2: Tá, e a porcentagem? Acho que estou entendendo o que está pensando...

ESTUDANTE 3: A porcentagem é o tanto que tá pintado com o símbolo de porcentagem (%)

PROFESSORA: É isso mesmo meninas, o raciocínio de vocês está certinho. Vamos ver então, quantas partes pintadas tem na primeira toalha?

ESTUDANTE 2: Pelo que contei aqui, um por um, é cinquenta...

PROFESSORA: Tem uma forma mais fácil, sem ser contar um por um?

ESTUDANTE 2: Professora, eu sempre me confundo, prefiro contar um por um mesmo.

ESTUDANTE 3: Tá, então se é cinquenta pintados, a fração vai ficar cinquenta em cima e cem em baixo, porque é o total...

ESTUDANTE 2: Daí, isso em porcentagem, é 50%, porque é a metade de cem, então a metade de 100% é 50%... O decimal, é 0,50, porque eu lembro que quando a gente transforma uma porcentagem em número decimal, tem que ficar dois números depois da virgula, e esses dois números é a porcentagem mesmo...

ESTUDANTE 3: Nossa, agora peguei o raciocínio de tudo...

PROFESSORA: Perfeito meninas, façam isso do restante das toalhas ok?

ESTUDANTE 2: Então como a gente já viu que todos tem cem quadradinhos, agora a gente precisa ver os pintados de todas as toalhas para calcular os números...

ESTUDANTE 3: Eu conto!!

(contando)

ESTUDANTE 3: Na toalha dois tem 28!

ESTUDANTE 2: 28? Tá, então em forma decimal fica 0,28, em porcentagem fica 28% e em fração 28 em cima e 100 em baixo, porque é a mesma coisa da primeira toalha...

ESTUDANTE 3: Na toalha três é 40 coloridos!

ESTUDANTE 2: Tá, então vai ficar 40%, 40 sobre 100 em forma de fração e 0,40 em número decimal

ESTUDANTE 3: 36 na toalha quatro... 36 coloridos...

ESTUDANTE 2: Então vai ser a mesma coisa, 36%, 36/100 e 0,36... Isso porque todos em baixo são 100, senão seria muito mais difícil de fazer sabia?

PROFESSORA: Como vocês fizeram para achar de todos? Seguiram o mesmo raciocínio?

ESTUDANTE 2: Sim, a gente contou o total fazendo a multiplicação de 10x10, e os coloridos contamos um por um

ESTUDANTE 3: A gente seguiu o mesmo modelo do primeiro, porque o total de quadrados é igual, só muda o colorido...

PROFESSORA: Entendi, vocês contaram um por um os coloridos mesmo?

ESTUDANTE 2: Sim, daí a gente seguiu o modelo dos primeiros e achou essas respostas...

PROFESSORA: Tá, certinho meninas, é isso mesmo! Obrigada pelo empenho de vocês!!

Para a última tarefa, as estudantes 2 e 3, logo elaboram a primeira conjectura para contar o total de quadradinhos que possuem na toalha: "*Acho que pro total, a gente pode contar os dos lados e multiplicar né? Porque dai vai ser 10 x 10... tem dez linhas e dez quadradinhos em cada linha, então dai é só fazer 10x10 que tem o total de quadradinhos entendeu?",* chegando assim no total de cem quadrados por toalha.

Logo em seguida, a estudante 3 entende o propósito da tarefa e traz uma segunda conjectura: "*na forma de fração, esse cem vai ser o de baixo, porque o de baixo é sempre o total de partes divididas, lembra? Daí na fração, a gente tem que contar os que estão pintados, para colocar na parte de cima sabe? Daí fica o cem em baixo e os pintados em cima*...". A partir dessa conjectura, é possível entender que nesse caso sim, elas conseguiram encontrar a representação fracionária das toalhas, mas isso porque elas eram, diretamente, obrigadas a fazer essa relação, já que o uso de fração era pedido no enunciado.

As estudantes seguem a ideia de contar um por um os quadrados coloridos, que representarão o numerador posteriormente. A professora então intervém, questionando se possui uma maneira mais fácil de calcular os quadrados coloridos, mas elas não conseguem identificar uma outra maneira.

Dessa forma, elas encontram a fração da primeira toalha, $\frac{50}{100}$, mediante a tal raciocínio: "*então, se é cinquenta pintados, a fração vai ficar cinquenta em cima e cem em baixo, porque é o total...*". E continuam: "*isso em porcentagem, é 50%, porque é a metade de cem, então a metade de 100% é 50%... o decimal, é 0,50, porque eu lembro que quando a gente transforma uma porcentagem em número decimal, tem que ficar dois números depois da virgula, e esses dois números é a porcentagem mesmo...".* Por meio dessa conjectura e justificação realizada pelas estudantes, é possível perceber o domínio de representação de fração, número decimal e porcentagem seguindo o uso de imagens.

Por meio da mesma conjectura formulada para a toalha 1, elas realizam os cálculos das toalhas 2, 3 e 4. Na toalha 2, elas encontram 28 quadrados coloridos: "*Então em forma decimal fica 0,28, em porcentagem fica 28% e em fração 28 em cima e 100 em baixo, porque é a mesma coisa da primeira toalha..."*

Para a terceira toalha: "*Então vai ficar 40%, 40 sobre 100 em forma de fração e 0,40 em número decimal".*

E por fim, na quarta toalha a estudante 2 faz uma consideração relevante: "*Então vai ser a mesma coisa, 36%, 36/100 e 0,36... isso porque todos em baixo são 100, senão seria muito mais difícil de fazer sabia?".* A estudante, diante desse comentário, realiza uma generalização. A estudante generaliza a ideia de que sempre que uma figura foi dividida em cem partes iguais, ela pode ser representada na fração decimal, em número decimal e em porcentagem, isto porque em todos esses casos trata-se de uma quantidade dividida por cem partes iguais. Por meio desse comentário, é possível analisar o conhecimento da estudante com relação a porcentagem, pois caso não fosse o algarismo cem no denominador, segundo ela, o cálculo, tanto de porcentagem como para representação decimal seria mais complexo. Nesse caso, a intervenção da professora também seria necessária para verificar realmente essa ideia, porém a mesma não foi efetuada.

6.2 Transcrição e análise dos estudantes 4 e 5

6.2.1 Tarefa 1:

PROFESSORA: Alunos, leiam o enunciado com atenção e reflitam diferentes maneiras de juntarem os melões para eles ficarem de forma inteira... Por exemplo, esse melão dividido ao meio, como eu posso juntar as partes para formar um inteiro?

(essa dupla de alunos teve dificuldade em resolver os exercícios em forma de discussão)

ESTUDANTE 4: Eu estou pensando aqui, e cada um daquele pedaço menor vale, por exemplo, 0,11 e vai somando um tanto até somar um...

PROFESSORA: Mas da onde você tirou esse 0,11? Você fez alguma conta para chegar nesse resultado?

ESTUDANTE 4: Não, eu simplesmente deduzi esse número e sei que tem que ir somando até chegar no número 1, que daí vai ser um melão.

PROFESSORA: Mas vamos deduzir então o número de outra forma... no enunciado fala que seu Manoel tem o costume de cortar em duas e em quatro partes iguais... como que a gente pode representar isso?

ESTUDANTE 5: Acho que entendi melhor seu raciocínio professora... Se ele dividiu em duas partes iguais, é só juntar dois que tem um melão inteiro

PROFESSORA: Perfeito, e esse que eu dividi em quatro?

ESTUDANTE 4: Espera professora, acho que já sei a resposta....

(demora um tempinho)

ESTUDANTE 4: Vai ser mais ou menos sete melões e meio, não é? Sete melão e pouco...

PROFESSORA: Como você chegou nisso?

ESTUDANTE 4: Aqueles melões ao meio, dois ali já dá um... O que está dividido em quatro, eu junto quatro e dá mais um...

ESTUDANTE 5: Então calma, daí o total é sete melões, porque lá em cima tem cinco melões... Em baixo tem três, junta duas metades e da mais um, total de seis melões, *daí vai sobrar ainda uma partezinha... No de baixo ainda, você junta quatro e da mais um, daí fica sete melões, três partes menores e uma metade.*

PROFESSORA: É isso mesmo! E o que sobrou? Da para juntar de alguma forma que dê um melão inteiro também?

ESTUDANTE 4: Foi isso que eu fiz, que daí deu sete melões e pouquinho...

ESTUDANTE 5: Mas ela está perguntando já com o que sobrou... A gente já explicou o porquê de sete, mas ela quer saber com as partes que sobraram...

PROFESSORA: Isso, exatamente... Com essas sobras, eu consigo juntar mais um melão?

ESTUDANTE 4: Sim! Eu ainda não fiz as contas...

PROFESSORA: Não precisa de conta não, só explica seu raciocínio...

ESTUDANTE 4: Pelo que eu observei, as últimas fatias que estão cortadas, se eu juntar duas partes delas, vai dar uma metade né?

ESTUDANTE 5: Ahh... Entendi... Daí junta duas partes com a metade que sobrou ali em cima e da mais um melão...

PROFESSORA: Então agora nós temos quantos melões inteiros?

ESTUDANTE 4: Então agora a gente tem oito né? Porque antes tinha sete, mais esse que a gente descobriu agora da oito

ESTUDANTE 5: Daí tem a partezinha que sobrou, que eu não consigo pensar em qual número que eu posso usar para representar isso...

PROFESSORA: Essa partezinha (referente a sobra), se a gente pegar de um melão inteiro... Vai ser qual parte?

ESTUDANTE 4: ENTENDI, ENTENDI, ENTENDI! É uma parte, de quatro, né? Nossa, entendi

PROFESSORA: (risada) isso, isso mesmo!

ESTUDANTE 4: Então vai ser um quarto... Oito melões e um quarto que sobrou, que não dá para juntar...

PROFESSORA: Muito bem! É isso mesmo! Vamos para o próximo!

Os estudantes começam a fazer a tarefa a partir da explicação da professora, considerando que devem juntar as partes para formar os melões inteiros. O estudante 4 elabora uma conjectura ao dizer que, cada pedaço menor, ou seja, o referente a um quarto do melão, vale 0,11 e que, para se formar um melão inteiro, deve-se somar esse número até dar o inteiro 1. A professora questiona o estudante sobre de onde veio o valor 0,11, e ele não consegue justificar. Ele afirma que não sabe o valor das partes, mas que sabe que deve-se juntá-las até formar um inteiro (relação parte-todo).

Nesse momento, a professora resgata algumas informações contidas no enunciado da tarefa: "*no enunciado fala que seu Manoel tem o costume de cortar em duas e em quatro partes iguais... como que a gente pode representar isso?"* com o objetivo de que os estudantes percebam que os melões foram cortados em duas e em quatro partes iguais.

A intervenção da professora conduziu o aluno a refinar a conjectura inicial, quer dizer, ainda deve-se juntar partes para formar o inteiro, mas agora eles já sabem quais são essas partes e quantas devem juntar para formar o inteiro. O estudante 4 elabora a conjectura dizendo que, se o seu Manoel dividiu o melão em duas partes iguais, deve-se juntar duas dessas partes para se ter um melão inteiro, e também que, as partes divididas em um quarto, deve-se juntar quatro para resultar em mais um melão inteiro.

O estudante 5 concorda com essa conjectura, e apresenta uma justificativa a fim de torna-la válida: "*daí o total é sete melões, porque lá em cima tem cinco melões... em baixo tem três, daí junta duas metades e da mais um, total de seis melões, daí vai sobrar ainda uma partezinha... daí no de baixo ainda, você junta quatro e da mais um, daí fica sete melões, três partes menores e uma metade",* ou seja, juntar as duas metades e mais 4 quartos de melão, de forma a formar dois melões inteiros.

A professora questiona os estudantes agora com relação ao que sobrou. De acordo com o estudante 5, foram três partes menores e uma metade. O estudante 4, logo em seguida, já realiza uma nova conjectura: "*as últimas fatias que estão cortadas, se eu juntar duas partes delas, vai dar uma metade né?"* e continua explicando *"junta duas partes com a metade que sobrou ali em cima e da mais um melão..."*

Por fim, eles chegam à conclusão que se tem um total de oito melões, mas o estudante 5 ainda quer uma representação para a parte que sobrou. Dessa forma, a professora faz o seguinte questionamento*: "essa partezinha (referente a sobra), se a gente pegar de um melão inteiro... vai ser qual parte?".* O estudante 4 realiza uma nova conjectura, entendendo que essa parte é equivalente a fração um quarto, elaborando uma justificação para a conjectura, *"oito melões e um quarto que sobrou, que não dá para juntar..."*

6.2.2 Tarefa 2:

(leem o enunciado)

ESTUDANTE 4: Tá, essa tá fácil, o sanduíche vai ser dois para cada, na letra a.

ESTUDANTE 5: A torta vai ser um quarto, né?

ESTUDANTE 4: Por quê? Como chegou nisso?

ESTUDANTE 5: Porque eu peguei a torta inteira, que é uma torta, e dividi por quatro pessoas, daí eu coloquei só na forma de fração: um quarto.

ESTUDANTE 4: Tá, mas e se não puder usar fração?

ESTUDANTE 5: É só dividir, daí vai ficar 0,25, não tem como ficar número normal, porque vai dividir por partes...

PROFESSORA: Cheguei, estão conseguindo?

ESTUDANTE 5: Professora, o sanduíche vai ser dois para cada, a torta vai ser 0,25, o suco vai ser 0,75...

PROFESSORA: Como que você chegou nisso? Como chegou até esses valores decimais?

ESTUDANTE 5: Ah, eu peguei a quantidade e dividi por quatro: uma torta dividida por quatro pessoas dá 0,25 de cada pedaço, pode ser tipo 25 gramas, sei lá... o suco também, três dividido por quatro dá 0,75, que daí eu acho que pode ser 750 ml né? Já que um litro tem 1000 ml....

ESTUDANTE 4: Professora, pode pensar desse jeito também olha: uma torta a gente pode pensar que tem 100, 100 alguma coisa, daí para dar cem tem que somar o 25 quatro vezes.... 25,25,25,25... Daí por isso que tem que ser 0,25, porque na verdade não é cem né, é um.

PROFESSORA: Olha, bom raciocínio!!

ESTUDANTE 5: Tá, então pode pensar nisso também no suco né? Como um litro tem 1000ml, eles têm 3000ml, daí tem que ser 750 quatro vezes também, para dar três mil.

PROFESSORA: Isso, e o cupcake agora? Será que a gente consegue pensar dessa mesma maneira que vocês estão pensando?

ESTUDANTE 5: Ah professora, eu fiz agora a divisão de seis por quatro, deu 1,5, ou seja, deve ser um e meio para cada né?

ESTUDANTE 4: Mas é isso mesmo, pensa... Vamos pegar um cupcake para cada uma né? Daí vai sobrar dois cupcakes... É só a gente dividir esses cupcakes no meio, daí vai ficar metade para cada uma, então cada uma vai comer um cupcake e meio...

PROFESSORA: Isso mesmo, porque vamos pensar: se eu juntar um cupcake e meio, mais um cupcake e meio, isso dá quanto?

ESTUDANTE 4: Três inteiros....

PROFESSORA: E daí para dar seis, são quantos?

ESTUDANTE 4: 4 “cupcakes e meio.”

PROFESSORA: Muito bem! Podem ir para a letra b.

(ficam em silencio, cada um vai resolvendo individualmente)

ESTUDANTE 5: Tá, o sanduíche vai ser 1,33, porque são oito sanduiches divididos por seis pessoas...

PROFESSORA: Qual conta você fez para chegar?

ESTUDANTE 5: Eu fiz 1,25 e somei seis vezes, mas não deu, deu sete sanduiches e meio... Daí eu fiz 1,50 e passou, deu nove sanduiches, daí eu fui no meio termo... peguei 1,30 e somei seis vezes, chegou mais perto, deu 7,8, daí eu fui aproximando e cheguei no 1,33...

ESTUDANTE 4: Tem uma forma mais simples, que é só dividir mesmo oito por seis, já dá esse número...

ESTUDANTE 5: Sim, também, pode ser isso também...

ESTUDANTE 4: Tá, e a torta?

ESTUDANTE 5: Olha, vão ser duas tortas agora, e seis pessoas, então é só fazer dois dividido por seis, que vai dar 0,33 também, vai ser um pedaço um pouco maior do que os da letra a, porque o da letra a era 0,25 e esse já é um pouco maior, mas não muito.

PROFESSORA: Agora pensem no suco, como eu vou fazer?

ESTUDANTE 4: Dá certo se eu fizer assim no suco: são seis pessoas, daí eu multiplico 3x6 ou 6x3?

PROFESSORA: Olha, pensa o seguinte, a multiplicação serve para aumentar ou diminuir a quantidade?

ESTUDANTE 4: Aumentar.

PROFESSORA: A gente quer aumentar a quantidade de suco? Os amigos vão ficar com mais de três litros para cada?

ESTUDANTE 4: Não...

ESTUDANTE 5: Não é multiplicação, é divisão também, é três dividido por seis

PROFESSORA: Isso...

ESTUDANTE 5: Tá, dá para fazer de cabeça essa divisão também... Três é a metade de seis, então isso daí vai dar 0,5, porque a gente está dividindo um número menor por um maior, por isso vai dar número com virgula.

PROFESSORA: Isso! Que outro número por exemplo, que a gente fazendo a divisão, da 0,5, você sabe me dizer?

ESTUDANTE 5: Ah, cinco dividido por dez, porque cinco é metade de dez...

PROFESSORA: (risadinha) É isso ai, muito bem! E qual é a metade de um litro? Já que aí a gente está se tratando de um litro...

ESTUDANTE 4: Essa eu sei, 500 ml.

PROFESSORA: Isso, então quanto de suco vai ser para cada um?

ESTUDANTE 5: 500 ml...

PROFESSORA: Perfeito! Agora só fazer do cupcake e da laranja...

ESTUDANTE 4: Nossa, o do cupcake é fácil, vai ser um para cada mesmo, não vai dar nem número com virgula...

ESTUDANTE 5: Tá, agora as laranjas vai ser o seguinte: vai ser dez laranjas para seis pessoas, então dividindo dá 1,66, uma laranja e mais um pouquinho...

PROFESSORA: Você consegue imaginar a laranja que representa esse 66 aí que você falou?

ESTUDANTE 5: Ah, é mais que a metade né, um pouquinho mais...

Os estudantes começam a tarefa sem o auxílio da professora. Leem o enunciado em voz alta, e logo de início, o estudante 4 elabora uma primeira conjectura (número de sanduíches dividido pelo número de pessoas) ao dizer que, ao dividir o sanduiche, será dois para cada.

Logo em seguida, o estudante 5 cria uma outra conjectura ao afirmar que a torta seria um quarto para cada, usando a relação parte-todo, e assim, conseguindo representar a divisão de torta pelas amigas utilizando um número fracionário, alcançando o propósito da tarefa. A estudante 4 questiona como o estudante chegou nessa afirmação, o que podemos considerar uma observação interessante, pois mostra como uma tarefa exploratória feita através da discussão entre os estudantes é relevante para o desenvolvimento de um raciocínio matemático. O estudante 5 explica sua conjectura: "*porque eu peguei a torta inteira, que é uma torta, e dividi por* *quatro pessoas, daí eu coloquei só na forma de fração: um quarto.”* Novamente, a estudante 4 tem um questionamento relevante, questionando como seria representado esse número se não puder usar fração, e assim, o estudante 5 formula uma conjectura que se baseia na transformação de frações para números decimais: “*é só dividir, daí vai ficar 0,25, não tem como ficar número normal...”*

Com relação ao suco, o estudante afirma que será 0,75 para cada um. A professora então pergunta como o estudante chegou a esses valores decimais, e o mesmo responde: “*três dividido por quatro dá 0,75, que daí eu acho que pode ser 750 ml né? Já que um litro tem 1000 ml...”*, usando a mesma relação parte-todo, já que ele pegou os três litros de suco e dividiu pelo tanto de amigas. A partir do comentário do estudante 4 sobre o não uso da fração, é notório que o aluno realmente para de utilizar fração e transforma todos os números em notações decimais, porém o método utilizado para alcançar tais números ainda é o de relação de divisão do numerador com o denominador. Ainda sobre o suco, eles pensam também em transformar a medida litro em mililitro, para que o cálculo fique mais fácil, pois então não será necessário o uso de números decimais: “*Como um litro tem 1000ml, eles têm 3000ml, daí tem que ser 750 quatro vezes também, para dar três mil.”*

Diante desse pensamento, para o *cupcake,* através da mesma conjectura utilizada, os estudantes realizam a divisão de seis por quatro. O estudante 5 diz: “*eu fiz agora a divisão de seis por quatro, deu 1,5, ou seja, deve ser um e meio para cada ne?”* e a estudante 4 justifica com a seguinte ideia: “*mas é isso mesmo, pensa... vamos pegar um cupcake para cada uma né? Daí vai sobrar dois cupcakes... é só a gente dividir esses cupcakes no meio, ei vai ficar metade para cada uma, então cada uma vai comer um cupcake e meio...”.* A professora intervém e questiona: “*se eu juntar um cupcake e meio, mais um cupcake e meio, isso dá quanto?”* e os estudantes prontamente respondem que serão três *cupcakes* inteiros, e então, a professora pergunta: “*e daí para dar seis, são quantos?”* e eles respondem que seria necessário quatro *“cupcakes* e meio”, concluindo assim o pensamento diante da divisão dos *cupcakes.*

Na letra b, eles seguem a mesma conjectura utilizada na letra a: dividir a quantidade de lanche pelo número de pessoas, que agora são seis.

Para o sanduíche, o estudante afirma que será 1,33 sanduiche para cada pessoa. O estudante 5 realizou a seguinte conjectura: "*eu fiz 1,25 e somei seis vezes, mas não deu, deu sete sanduiches e meio... daí eu fiz 1,50 e passou, deu nove sanduiches, daí eu fui no meio termo... peguei 1,30 e somei seis vezes, chegou mais perto, deu 7,8, daí eu fui aproximando e cheguei no 1,33...".* Nesse caso, ele anuncia uma conjectura inicial, de que era 1,25 sanduíches para cada um, mas ele mesmo, logo em seguida, já invalida essa conjectura. Sendo assim, aqui encontramos dois processos: conjectura e validação. Deste modo, ele reformula sua conjectura, que ainda é a mesma, atribuindo valores maiores até que ele encontre um número, tal que este multiplicado por seis dê oito sanduíches. O estudante 4, logo em seguida, já pensou de maneira mais simples: "*é só dividir mesmo oito por seis, já dá esse número...".* Porém, apesar de métodos diferentes de resolução, todos utilizaram a divisão da quantidade de sanduiches pelo número de pessoas. Apesar dos estudantes terem chegado no resultado correto, a professora poderia ter interferido e perguntado como seria comer 1,33 sanduiche, porém não houve essa ação no momento da aplicação.

Para as tortas, pois agora são duas, assim como a letra a, eles usaram novamente a relação parte-todo, porém representada em números decimais. O estudante 5 utiliza a divisão de dois por seis para chegar ao resultado: 0,33 da torta para cada amigo. Ainda realiza a comparação com a letra a, onde o pedaço de torta seria um pouco maior.

Seguinte adiante, para a quantidade de suco, o estudante 5 diz que deve-se fazer três dividido por seis, e segue uma linha de pensamento bem interessante: "*três é a metade de seis, então isso daí vai dar 0,5, porque a gente está dividindo um número menor por um maior, por isso vai dar número com vírgula",* realizando assim uma justificação. A professora, diferentemente da torta e do sanduiche, agora pergunta o que esse 0,5 representa quando se trata de litros, e então o estudante 4 e 5 respondem prontamente que essa quantia é equivalente a 500 mililitros.

Para o *cupcake,* eles simplesmente falam que será um para cada, pois são seis *cupcakes* para seis pessoas, utilizando a mesma conjectura de toda a tarefa.

E por fim, as laranjas, o estudante 5 afirma que será 1,66 laranja, se referindo a uma laranja e mais um pouquinho. A professora questiona: "*você consegue* *imaginar a laranja que representa esse 66 que você falou"* e o estudante afirma que é mais que a metade, mas não justifica.

6.2.3 Tarefa 3:

(leem o enunciado)

ESTUDANTE 4: Tá, a gente precisa saber quanto tem de colorido

ESTUDANTE 5: Essas figuras me lembram os exercícios de fração, então acho que a gente podia começar com fração e depois achar os outros... Então primeiro a gente precisa contar tudo, é isso né?

ESTUDANTE 4: Vamos contar quanto tem em tudo e depois quantos coloridos tem, e depois quantos brancos tem...

ESTUDANTE 5: Mas o branco não precisa, não é o que a gente quer, a tarefa quer o colorido só, não o que está em branco.

ESTUDANTE 4: Tá, eu somei dos lados e deu 18 quadrados vermelhos em volta...

ESTUDANTE 5: E no total, da quanto?

ESTUDANTE 4: Da 36 contando todos que estão na volta... Daí o que eu pensei, a gente coloca 18 em cima e o 36 em baixo, na fração, daí fica $\frac{18}{36}$*, daí a gente dividindo a gente acha o número decimal*

ESTUDANTE 5: Que vai ser 0,5... nossa, boa!

ESTUDANTE 4: E daí a porcentagem vai ser 50%, porque eu lembro das aulas que 0,5 é a mesma coisa de 50%, porque a gente faz isso...

Na atividade 3, essa dupla de estudantes lê o enunciado e já interpretam a imagem do exercício como semelhante as imagens de exercícios de frações. A partir disso, o estudante 4 sugere a ideia de contar quanto tem ao todo, os coloridos e também os brancos, porém o estudante 5 afirma que o branco não é necessário, pois o enunciado pede apenas com relação aos números coloridos.

Eles criam uma conjectura: contar quantos quadradinhos coloridos tem em volta da toalha, para achar uma relação com o todo.

O estudante 4 conta e encontra 18 quadrados coloridos em volta da toalha, e no total, 36 quadrados e explica seu pensamento diante da tarefa, criando uma conjectura: "*a gente coloca 18 em cima e o 36 em baixo, na fração, daí fica 18/36, daí a gente dividindo a gente acha o número decimal*" e o estudante 5 logo em seguida já encontra o número decimal, que será 0,5. E para chegar na representação em porcentagem, eles usam o conhecimento adquirido em aula: "*a porcentagem vai ser 50%, porque eu lembro das aulas que 0,5 é a mesma coisa de 50%, porque a gente faz isso...*"

Ao analisar esse caso, podemos perceber que esse cálculo deu certo justamente porque a imagem apresentava 50% de quadradinhos coloridos, onde estavam distribuídos sequencialmente, tanto em volta como ao meio da toalha.

Os alunos infelizmente não conseguiram concluir a tarefa por falta de tempo, porém, pelo procedimento utilizado na primeira toalha, pode-se imaginar que para as toalhas seguintes, essa conjectura não daria certo.

6.3 Discussão

A análise das tarefas feita por meio do diálogo dos alunos sugerem indícios de raciocínio matemático. Para relatar suas estratégias de resolução, assim como diz Ponte (2005) com relação as tarefas exploratórias, os alunos basearam-se em conhecimentos anteriores. Nas três tarefas, as duas duplas elaboraram conjecturas, mesmo que ainda de forma incompleta, e fizeram tentativas de validá-las, investigando elementos matemáticos que pudessem justificar os métodos usados, mediado sempre pela discussão em dupla.

A tarefa 1 tinha como objetivo analisar a percepção dos alunos sobre a insuficiência dos números naturais para expressar algumas situações cotidianas, como o corte de melões em uma feira. A tarefa demandava do aluno o uso de frações para representar os cortes feitos nos melões.

Para isso, as duplas 1 e 2 elaboraram conjecturas parecidas, que se apoiam no conceito de parte-todo de uma fração. Elas juntam os melões de modo a formar uma fruta inteira. Após esse momento, ambas as duplas chegam ao resultado da sobra de um quarto de melão, que a dupla 1 e 2, respectivamente, denominam como *"aquela partezinha que sobrou"* e "*essa partezinha".*

Observando a resolução, pode-se notar que o uso de frações foi utilizado, mesmo que indiretamente, pelos estudantes para realizar a soma dos melões inteiros, porém, na primeira dupla, elas não conseguiram identificar que a parte restante poderia ser representada pela fração $\frac{1}{4}$, e já na segunda, por meio da intervenção da professora, os estudantes já conseguem perceber essa representação.

Segundo Mata-Pereira e Ponte (2018, p.784), "conjecturar é declarar algo que se pretende que seja verdadeiro, mas ainda não é conhecido como tal". Dessa forma, percebemos que tais conjecturas elaboradas pelos estudantes, de juntar as partes de uma fruta, serviu como ponto de partida para outros processos, como a justificação por exemplo.

As duplas recorreram a justificação quando realizaram a junção dos melões e realmente perceberam que, juntos, formariam uma fruta inteira. A segunda dupla também elabora uma justificação final para a tarefa, quando identifica a parte restante equivalente a fração $\frac{1}{4}$, "*"É uma parte, de quatro, né?(...) Então vai ser um quarto...".* Isto acontece porque o processo de justificação está relacionado com "a identificação de relações que permitem entender porque uma afirmação pode ser verdadeira ou falsa" (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p. 468), e é o que ocorre na discussão tanto da dupla 1 como da dupla 2.

Ainda na tarefa 1, ainda temos um retrato de exemplificação, feito pela estudante 2, que segundo Jeanotte e Kieran (2017), é conhecido como um processo que serve de suporte aos demais, uma vez que auxilia na pesquisa de semelhanças e diferenças. Essa exemplificação tem o intuito de justificar uma conjectura realizada anteriormente, sobre a junção de números impares de partes do melão, onde não é possível formar um melão inteiro: "*É porque se fosse número par, era só a gente juntar que ia dar certo. Por exemplo, se fosse seis metades, oito metades, ia dar um número de melões inteiros, mas como a gente tinha um número ímpar, ficou sobrando".*

Na segunda tarefa, as duas duplas elaboraram as conjecturas apoiando-se em conhecimentos matemáticos relacionado a divisão de, neste caso, lanches com o número de pessoas presentes. Os estudantes elaboraram as conjecturas, mesmo que de forma inconsciente, uma vez que definiram que a divisão de lanches pelo número de pessoas era o caminho que os conduziria a um resultado, lembrando-se que Jeannotte e Kieran (2017) consideram a conjectura como a inferência de alguma narrativa sobre certa regularidade, ou seja, a partir da regularidade observada pelos estudantes da divisão dos lanches pelos amigos, os mesmos foram criando conjecturas baseando-se neste fato.

Desse modo, nessa tarefa, a primeira dupla em momento algum recorre a validação, ou exemplificação, ou então generalização. Elas apenas vão criando conjecturas, baseando-se na ideia inicial de divisão.

Já a segunda dupla apresenta os processos de conjectura, validação e justificação em seu raciocínio, e também discutem bastante, uma característica evidente de tarefas exploratórias. As conjecturas, assim como na primeira dupla, são relacionadas a relação parte-todo.

É comum, segundo Ponte (2005), que os alunos desenvolvam conjecturas, façam a validação das mesmas, abandonem as que consideram erradas e elaborem outras, ou mesmo refinem algumas, o que podemos observar quando o estudante 5 diz: "*eu fiz 1,25 e somei seis vezes, mas não deu, deu sete sanduiches e meio... daí eu fiz 1,50 e passou, deu nove sanduiches, daí eu fui no meio termo... peguei 1,30 e somei seis vezes, chegou mais perto, deu 7,8, daí eu fui aproximando e cheguei no 1,33...".* Nesse caso, o estudante apresenta a tentativa de validação de uma conjectura, e ao perceber que ela não é válida, faz outras tentativas até chegar num valor aproximado, o que, de acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011) consiste no processo de investigar o porquê.

O estudante 5, em diversos momentos, mobiliza o processo de justificação, isso porque, logo após formular uma conjectura, o mesmo elabora justificativas para a mesma, assim como podemos analisar nos trechos: "*Ah, cinco dividido por dez, porque cinco é metade de dez..." e "Três é a metade de seis, então isso daí vai dar 0,5, porque a gente está dividindo um número menor por um maior, por isso vai dar número com virgula"*. Isso é passível de ocorrer, pois segundo Ponte (2005), há estudantes que formulam conjecturas logo após a manipulação dos dados, ou simplesmente a partir da observação direta dos mesmos, que é o que acontece com o estudante 5.

Finalmente, na terceira e última tarefa, temos como objetivo levar o aluno a visualizar o resultado das frações em outras representações, por meio de toalhas quadriculadas.

Diferentemente das outras tarefas, a primeira dupla procurou elaborar justificativas e avançar em seu conhecimento matemático no sentido de organizar uma fórmula geral para a resolução, ainda que pautada apenas nos exemplos dados, numa tentativa de generalização. Para Lannin, Ellis e Elliot (2011), os alunos generalizam quando se focam numa ideia ou num aspecto particular de um problema e pensam nele de uma forma mais abrangente, por meio da identificação de elementos comuns. Podemos notar isso quando a estudante analisa que, quando uma figura é dividida por cem partes iguais, ela pode ser representada em fração decimal, número decimal e porcentagem.

Nessa tarefa, as estudantes 2 e 3 também realizando o processo de justificar baseando-se em conhecimentos matemáticos: "*porque é a metade de cem, então a metade de 100% é 50%...*" e ""*na forma de fração, esse cem vai ser o de baixo, porque o de baixo é sempre o total de partes divididas, lembra?".*

Infelizmente, nessa tarefa, a dupla dos estudantes 4 e 5 não conseguiram avançar nas resoluções devido a falta de tempo dos mesmos. Mas, ainda assim, criam uma conjectura interessante: contar quantos quadradinhos coloridos tem em volta da toalha, para achar uma relação com o todo, recorrendo também a multiplicação 10x10.

Porém eles não conseguiram justificar o porquê deste procedimento. Com relação ao denominador, a conjectura é válida, porém, diante dos pensamentos de Lannin, Ellis e Elliot (2011), eles fizeram a ação, no caso dos quadrados coloridos, recorrendo a percepção (isto porque a toalha era pintada de forma sequencial), o que não se deve ocorrer no processo de justificação. Dessa forma, se eles tivessem seguido o mesmo modelo de resolução nas outras toalhas, não iriam chegar à solução correta, isto porque não há justificação matemática para esse método de resolução.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mencionado na introdução deste trabalho, esta pesquisa tem como objetivo analisar os processos de raciocínio matemático presentes nas resoluções de tarefas exploratórias referentes ao conteúdo de frações em duas duplas de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

Realizamos o estudo da fundamentação teórica sobre o raciocínio matemático e seus processos, ações do professor e tarefas, com ênfase na tarefa exploratória. A fundamentação teórica foi essencial para a execução do trabalho e para a escolha do instrumento de pesquisa a ser utilizado, pois, por meio do conhecimento adquirido diante de outros pesquisadores, a escolha das tarefas foi mais coerente e fundamentada.

O instrumento de coleta de dados foi constituído de três tarefas de caráter exploratório, realizadas com quatro alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, organizados em duas duplas do Colégio Estadual Castro Alves, de maneira remota, devido a pandemia da COVID-19.

Podemos notar, mediante as transcrições e análises feitas a partir da coleta de dados, que em todos os momentos, seja para criar conjecturas, justificar o porquê e também usar a exemplificação, as ações dos estudantes foram impulsionadas pela discussão. A comunicação em uma tarefa exploratória, assim como retrata Ponte (2005), é extremamente fundamental para que o aluno faça a justificação de argumentos, isto por meio da exploração das situações propostas, assim como foi analisado nessas três tarefas.

As tarefas trabalhadas com as duas duplas têm como características possibilitar várias estratégias de resolução, permitindo aos estudantes a escolha de um método próprio de resolução, sendo muitas vezes, segundo Ponte (2005), mais eficaz para a aprendizagem do aluno.

As justificativas apresentadas pelos estudantes, apesar de terem sido, muitas vezes, incompletas com relação ao suporte matemático, recorrem a conhecimentos adquiridos anteriormente, para assim apresentar diferentes estratégias de resolução, desenvolvendo o raciocínio matemático (SERRAZINA; RODRIGUES; ARAMAN, 2020).

Um trabalho mais constante com tarefas de natureza exploratória pode aprimorar a capacidade dos estudantes de mobilizar mais processos de raciocínio matemático. Ou seja, por meio de tarefas como estas, os estudantes caminharão progressivamente no raciocínio matemático, pois, assim como trata Morais, Serrazina e Ponte (2018, p. 556), "é desejável que os estudantes se tornem progressivamente conscientes da necessidade de justificar".

Deve-se então advogar que as tarefas exploratórias foram essenciais para que os estudantes conseguissem elaborar esses processos de raciocínio matemático. A tarefa exploratória desenvolve o raciocínio matemático e requer que os processos de raciocínio, como conjectura e a generalização sejam empregados. Os processos de raciocínio matemático explicitados na discussão conduziram os alunos a uma atividade intelectual, isto porque os alunos recorreram a conhecimentos adquiridos anteriormente, sem recorrer, em sua grande maioria, a livros e uma autoridade maior, como a professora, ou até mesmo o senso comum, conforme preconiza Lannin, Ellis e Elliot (2011).

Porém, sobre as ações do professor, temática citada no referencial teórico, por fator do prazo limitado de pesquisa, não foi possível aplicar e discutir.

Desse modo, com esse trabalho, foi possível analisar o desempenho e as estratégias dos alunos em diferentes tarefas exploratórias, explorando os processos de raciocínio matemático e salientando a importância desse tipo de tarefa matemática em sala de aula, contribuindo assim para a minha formação acadêmica. A pesquisa proporciona pensar em diversas alternativas de promover a aprendizagem matemática no aluno.

Conclui-se, diante dos dados resultantes desta pesquisa que os alunos possuem grande competência de desenvolver os processos de raciocínio matemático em sala de aula, construindo conhecimento matemático, isto porque, segundo Ponte (2005), o raciocínio matemático deve ocorrer em toda a aula de matemática, todos os dias.

REFERÊNCIAS

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L. Como cozer pãezinhos: processos de raciocínio matemático e ações do professor na discussão coletiva de uma tarefa exploratória no 3º ano. **Vidya.** Santa Maria, v.40, n.2, p.147-165, 2020.

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J.P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo, v.21, n.2, p.466-490. 2019.

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L. Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade. **Revista Paranaense de Educação Matemática.** Campo Mourão, v.9, n.18, p. 118-136, jan-jun 2020.

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J.P. Raciocínio Matemático nos Primeiros Anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. **Bolema.** Rio Claro, v.34, n.67, p.441-461, ago. 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Brasília, MEC, 2018

GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de Empresas.** São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20-29, mai-jun. 1995.

GONÇALVES, L. F.; ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L. Processos do Raciocínio Matemático Mobilizados por Estudantes do 6º Ano do Ensino Fundamental ao Resolverem uma Tarefa de Geometria. **Bolema.** Rio Claro, v.35, n.69, p.158-178, abr. 2021.

GOVERNO DO ESTADO DO PARANÁ. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE: produções didático-pedagógicas**. v. 2, p.1-36. 2014.

GÜNTHER, H. Pesquisa Qualitativa *Versus* Pesquisa Quantitativa: Esta é a Questão? **Psicologia: Teoria e Pesquisa.** Brasília, v. 22, n.2, p. 201-210, mai-ago 2006.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C,. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educional Studies Mathematics.** v. 96, p.1-16, 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. ***Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K Grade 8.*** 2011.

LIMA, L. L. **Desempenho e estratégias de alunos do Ensino Fundamental aos resolverem diferentes tipos de problemas.** TCC - Licenciatura em Matemática - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, p. 1-42. 2021.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema.** Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781-801, dez. 2018.
MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M.; PONTE, J. P. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante.** Lisboa, v. 22, n. 2, p.55-81, 2013.

MENDES, B. A. **Resolução de problemas e o raciocínio proporcional**. TCC - Licenciatura em Matemática - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio. p.1-64. 2021.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. *Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations.* **Acta Scientiae.** v.20, n. 4, p. 552-570. 2018.

OLIVEIRA, M. B.; GARCIA, T. M. R. **Frações: explorar para compreender**. Dia a dia educação, 2014. Disponível em:< http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unespar-paranavai_mat_artigo_maria_borin_de_oliveira.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2021.

OLIVEIRA, P. **A investigação do professor, do matemático e do aluno: uma discussão epistemológica**. Tese de mestrado – Universidade de Lisboa. 2002

PAULA, B. A. **Tarefas exploratórias e raciocínio matemático.** TCC - Licenciatura em Matemática - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, p.1-55. 2021.

PÓLYA, G. A arte de resolver problemas. **Editora Interciência**. Rio de Janeiro. 1975.

PONTE, J.P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. **Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?** Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. p. 7-11**,** 2020.

PONTE, J.P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte. Autêntica. 2019.

PONTE, J.P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.** Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2005.

PONTE, J.P. Gestão curricular em Matemática. **Centro de Investigação em Educação e Departamento de Educação.** Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. 2005.

SERRAZINA, M. L.; RODRIGUES, M.; ARAMAN, E. M. O. Envolver os alunos em processos de raciocínio matemático: as ações do professor. **Psicologia em Pesquisa.** Juiz de Fora, v.14, n.1, p. 18-36, jan-abr 2020.

TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. O. Processos de Raciocínio Matemático Mobilizados por Estudantes de Cálculo em Tarefas Envolvendo Representações Gráficas. **Bolema**, Rio Claro, São Paulo. 2021.

TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. O. Argumentos apresentados por estudantes de cálculo em uma tarefa de natureza exploratória. **Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo, v.23, n.1, p. 591-612, 2021.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ. Sistema de Bibliotecas. **Normas para elaboração de trabalhos acadêmicos.** Curitiba: UTFPR, 2009.

WOOD, T. *Creating classroom interactions for mathematical reasoning: beyond “natural teaching”.* **Theory into practice.** Ohio, v. 40, n. 2, 1998.

APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para participação na pesquisa

Você, pai/responsável pelo menor ...., que está sendo convidado(a) a participar do projeto de conclusão de curso, através da plataforma Google Meet, titulado “Tarefas exploratórias para o ensino da matemática: uma experiência no 6º ano do Ensino fundamental”, da pesquisadora Anna Luiza Alino dos Santos. A seguir, as informações do projeto de pesquisa com relação a participação do menor neste projeto:

1. O estudo se destina ao Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, câmpus Cornélio Procópio.

2. A importância deste estudo é a de analisar as ações dos alunos de acordo com as atividades propostas com relação ao conteúdo de frações. As atividades são de caráter exploratório, ou seja, são atividades aonde os alunos terão que discutir e argumentar sobre seus conhecimentos já adquiridos em sala de aula para a resolução das atividades com os colegas, de tal maneira a ampliar seu aprendizado. Esta atividade acontecerá de forma on-line, através do Google Meet.

3. A coleta de dados será na **sexta-feira (08/10) das 9:00 as 11:00**.

4. A sua participação será nas seguintes etapas: autorizando a participação do menor sob sua responsabilidade na pesquisa

5. Os benefícios esperados com a participação do menor sob sua responsabilidade no projeto de pesquisa, mesmo que não diretamente são: analisar os conhecimentos sobre o conteúdo de fração; ampliação de conhecimento referente a este conteúdo.

6. A qualquer momento, você poderá recusar a continuação de seu filho (a) a estar participando do estudo e, também, que poderá retirar seu consentimento, sem que isso lhe traga qualquer penalidade ou prejuízo.

7. As informações conseguidas através da participação do menor sob sua responsabilidade na pesquisa não permitirão a identificação da sua pessoa, (no trabalho, os alunos serão referidos como “estudante 1, estudante 2, ...” , e que a divulgação das mencionadas informações só será feita entre os profissionais estudiosos do assunto após a sua autorização.

Eu ...., responsável pelo menor .... que foi convidado a participar da pesquisa, tendo compreendido perfeitamente tudo o que me foi informado sobre a participação no mencionado estudo e estando consciente dos direitos, das responsabilidades, dos riscos e dos benefícios que a participação implicam, **concordo** em autorizar a participação do menor e para isso eu DOU O MEU CONSENTIMENTO SEM QUE PARA ISSO EU TENHA SIDO FORÇADO OU OBRIGADO.

.

Assinatura do responsável pelo aluno (a)	Assinatura do Pesquisador pelo estudo