

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARCOS FELIPE DE OLIVEIRA

**CURVAS PLANAS, CURVAS NO ESPAÇO E APLICAÇÃO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2021

MARCOS FELIPE DE OLIVEIRA

## **CURVAS PLANAS, CURVAS NO ESPAÇO E APLICAÇÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof<sup>ª</sup>. Me. Rosangela Teixeira Guedes

CORNÉLIO PROCÓPIO

2021



---

## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Marcos Felipe de Oliveira**

### **Curvas Planas, Curvas no Espaço e Aplicação**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado às no dia , do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

---

Prof<sup>a</sup>. Me. Rosangela Teixeira Guedes  
(Orientador)

---

Prof<sup>a</sup>. Me. Renata Mascari de Souza

---

Prof. Dr. Josimar Da Silva Rocha

"Ao único Deus seja honra e glória para todo o sempre".  
(1 Timóteo 1:17)

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades pra chegar até esse momento.

Agradeço a minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Me. Rosângela Teixeira Guedes, por toda orientação, dedicação e paciência, por todas as contribuições, correções e incentivos onde tive todo suporte necessário durante o projeto.

Obrigado por me ajudar realizar meu sonho e acreditar em mim. Não tenho palavras para descrever tamanha gratidão.

Agradeço a minha Família: Minha mãe, meu pai (Rubens) aos meus irmão(Adriam), (Eliesom),(Robson),(Tiago),(Sidney) e aos meus sobrinhos e familiares em especial meu tio Lucas e minha tia Valdirene.

Gostaria de agradecer a todos professores da Escola Estadual Padre Mario Briatore-Salto grande (SP), em especial minha professora (Meire Barger) pelo apoio, incentivo nas horas difíceis, por acreditar em mim e não fazer desistir de entrar em uma universidade, e aos meus amigos que acompanharam meu percurso durante o ensino médio.

Meus agradecimentos aos amigos da Rep. Lisossomos, sala do PIBID, futebol da Copel e da UTFPR- CP, ao DAMAT e todos professores que me ajudaram nessa caminhada. Gostaria também de agradecer a banca examinadora deste trabalho, o Prof.Dr. Josimar Rocha e Pro<sup>a</sup>.Me. Renata Mascari pelas contribuições.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso.

## RESUMO

Oliveira, Marcos Felipe. **Curvas Planas, Curvas no Espaço e Aplicação**. 2021. 48 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021

Este trabalho tem por objetivo estudar curvas no plano e no espaço e suas aplicações. Para tanto, será realizado um estudo dos conceitos preliminares necessários da Geometria Diferencial. Em seguida, serão enunciados e demonstrados resultados de curva parametrizada pelo comprimento de arco, referencial de Frenet para curva parametrizada pelo comprimento de arco, referencial de Frenet para curva não parametrizada pelo comprimento de arco, curvatura, torção e Teorema Fundamental das Curvas Planas. Com esse estudo, tornou-se possível desenvolver aplicações com comandos e animações no Software Geogebra sobre Vetor Tangente, Reparametrização da curva, curva reparametrizada pelo comprimento de arco, curva é uma hélice, curvatura, curvatura máxima e o Teorema Fundamental das Curvas Planas. Portanto o estudo de curvas no plano e no espaço possui importância na Geometria Diferencial e também em outras áreas como o Cálculo Diferencial e Integral e possibilitou com o Software Geogebra o entendimento da parte algébrica e geométrica.

**Palavras-chave:** Curvas, Referencial de Frenet, Curvatura, Aplicação.

## ABSTRACT

Oliveira, Marcos Felipe. **flat curves, curves in spaces and application**. 2021. 48 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021

This work aims to study curves in the plane and in space and their applications. For this, a study of the necessary preliminary concepts of Differential Geometry will be carried out. Then, the results of a curve parameterized by the arc length, Frenet reference for a curve parameterized by the arc length, Frenet reference for a curve not parameterized by the arc length, curvature, torsion and the Fundamental Theorem of Flat Curves will be enunciated and demonstrated. With this study, it became possible to develop applications with commands and animations in the Geogebra Software on Tangent Vector, reparametrization of the curve, curve reparametrized by the arc length, curve is a helix, curvature, maximum curvature and the Fundamental Theorem of Flat Curves. Therefore, the study of curves in the plane and in space is important in Differential Geometry and also in other areas such as Differential and Integral Calculus and made it possible with the Geogebra Software to understand the algebraic and geometric part.

**Keywords:** Curves, Frenet Reference, Curvature, Application.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>RESULTADOS PRELIMINARES</b>	<b>9</b>
2.1	CURVA PARAMETRIZADA DIFERENCIÁVEL	9
<b>3</b>	<b>TEORIA LOCAL DAS CURVAS NO PLANO E NO ESPAÇO</b>	<b>14</b>
3.1	CURVAS NO PLANO	14
3.1.1	Curva parametrizada pelo comprimento de arco	14
3.1.2	Referencial de Frenet e Curvatura	17
3.1.3	Teorema Fundamental das Curvas Planas	20
3.2	CURVAS NO ESPAÇO	23
3.2.1	Curvatura, torção e triedro de Frenet	23
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES</b>	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>48</b>



## 1 INTRODUÇÃO

A história da geometria diferencial começa com o estudo de curvas. Noções como retas tangentes a curvas já são encontradas entre os gregos Euclides, Arquimedes e Apolônio. O alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) e o inglês Isaac Newton (1643-1727) descobrem os algoritmos do cálculo infinitesimal, os quais permitirão o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais.

O estudo das propriedades locais de curvas e superfícies consideradas na Geometria Diferencial serão definidas por funções que possam ser derivadas um certo número de vezes.

A Geometria Diferencial consiste no estudo de propriedades geométricas de curvas e superfícies, por meio do Cálculo Diferencial e Integral e da Álgebra linear.

No capítulo 2 são abordados resultados preliminares de curva parametrizada diferenciável para o desenvolvimento do estudo.

No capítulo 3 são abordados curva parametrizada pelo comprimento de arco, traço da curva, reparametrização da curva pelo comprimento de arco, referencial de Frenet e Curvatura, torção e Teorema Fundamental das Curvas Planas.

No capítulo 4, demonstrações de lemas e proposições de aplicações dos capítulos 2 e 3. Animações com o auxílio do Software Geogebra de vetor tangente em um ponto da curva, reparametrização da curva regular que é circunferência de raio  $a$ , catenária parametrizada pelo comprimento de arco, a curva é uma hélice, curvatura de curvas, curvatura da Espiral Logarítmica, curva com curvatura máxima, dada uma função diferenciável como determinar a curvatura usando o Teorema Local de Curvas Planas.

## 2 RESULTADOS PRELIMINARES

### 2.1 CURVA PARAMETRIZADA DIFERENCIÁVEL

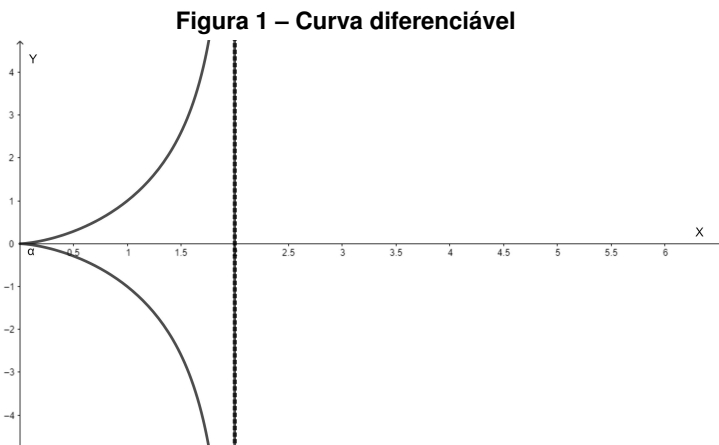
São apresentados resultados de curva parametrizada diferenciável, vetor tangente, espaço vetorial, produto interno, cujas demonstrações e mais resultados podem ser obtidos em (TENENBLAT, 2008), (CARMO, 2012) e (COELHO; LOURENÇO, 2013).

Começamos estudando as curvas localmente e apresentamos o comportamento de uma curva diferenciável em uma vizinhança de um ponto de seu traço.

**Definição 2.1.1** *Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  que para cada  $t \in I$ , associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , onde as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  são diferenciáveis de classe  $C^\infty$ .*

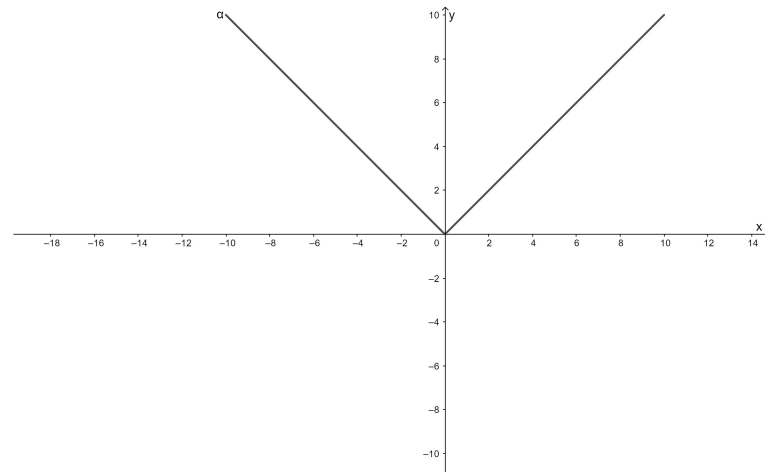
*A variável  $t \in I$  é dita parâmetro da curva  $\alpha$  e  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$  e o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  dos pontos  $\alpha(t), t \in \mathbb{R}^2$  é chamado traço da curva.*

**Exemplo 2.1.2** *A curva  $\alpha : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(t) = (2\text{sen}^2(t), 2\text{sen}^2(t) \text{tg}(t))$  é uma curva parametrizada diferenciável e cujo traço é representado pela figura 1.*



**Exemplo 2.1.3** *A curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(t) = (t, |t|)$  não é uma curva diferenciável em  $t=0$  e cujo traço é representada pela figura 2.*

Figura 2 – Curva não diferenciável



Fonte: Autoria Própria

**Exemplo 2.1.4** A curva parametrizada diferenciável  $\alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(t) = (x_0 + a \cos(t), y_0 + b \sin(t))$  em que  $a, b, x_0, y_0$  são números reais com  $a > 0$  e  $b > 0$ , tem o traço de uma elipse cuja equação  $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ .

**Definição 2.1.5** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada diferenciável, que a cada  $t \in I$  associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . O vetor  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$  é chamado **vetor tangente** a  $\alpha$  em  $t$ .

**Exemplo 2.1.6** Seja  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva parametrizada diferenciável que para cada  $t \in \mathbb{R}$  associa  $\alpha(t) = (\cos(t)(2\cos(t) - 1), \sin(t)(2\cos(t) - 1))$ . O vetor tangente a curva  $\alpha$  em  $t$  é dado por  $\alpha'(t) = (\sin(t) - 2\sin(2t), 2\cos(2t) - \cos(t))$ .

**Definição 2.1.7** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita suave ou regular se para todo  $t \in I$  tem-se  $\alpha'(t) \neq 0$ .

**Definição 2.1.8** Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$  - espaço vetorial, onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Um produto interno sobre  $V$  é uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  que satisfaz as seguintes propriedades:

(P1)  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ , para todo  $u, v, w \in V$ .

(P2)  $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ , para todo  $u, v \in V$  e para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

(P3)  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ , para todo  $u, v \in V$ .

(P4)  $\langle u, u \rangle \geq 0$ , se  $u \neq 0$  e  $\langle u, u \rangle = 0$  se, e somente se,  $u = 0$ .

**Exemplo 2.1.9** Para  $V = \mathbb{R}^n$  o espaço vetorial definido sobre o corpo  $\mathbb{R}$ , considere a aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i$ . Esta aplicação é um produto interno.

**Definição 2.1.10** Seja  $V$  um  $\mathbb{R}$  - espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle, \rangle$ . Para cada  $v \in V$ , chamamos de norma em  $V$  ao número real dado por  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .

**Proposição 2.1.11** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular. Tem-se que  $\|\alpha'(t)\|$  é constante se, e só se, para cada  $t \in I$ , o vetor  $\alpha''(t)$  é ortogonal a  $\alpha'(t)$ .

**Demonstração:**( $\Rightarrow$ ) Seja  $\|\alpha'(t)\| = C$  para todo  $t \in I$  e pela definição de norma em espaço vetorial com produto interno  $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}$ , ou ainda,  $\|\alpha'(t)\|^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$ .

Podemos escrever  $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = C^2$ .

Derivando esta equação em relação a  $t$ , temos que  $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$ .  
então,

$$2 \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0.$$

Portanto,

$\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ , donde segue que  $\alpha''(t)$  é ortogonal a  $\alpha'(t)$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $\alpha''(t)$  é ortogonal a  $\alpha'(t)$  então  $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$  o que implica em  $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle + \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ , então,

$$\frac{d}{dt} \|\alpha'(t)\|^2 = 0.$$

Portanto,

$\|\alpha'(t)\|^2 = C$ , ou seja,  $\|\alpha'(t)\|$  é constante para todo  $t \in I$ .

**Exemplo 2.1.12** Considere a aplicação  $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$\alpha(t) = \left( \operatorname{sent}, \operatorname{cost} + \log \left( \operatorname{tg} \left( \frac{t}{2} \right) \right) \right)$  (o traço desta curva é chamado Tractriz). Temos:

a)  $\alpha$  é uma curva parametrizada diferenciável;

b)  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \neq \frac{\pi}{2}$ ;

c) O comprimento do segmento da reta tangente, compreendido entre  $\alpha(t)$  e o eixo  $y$  é contante e igual a 1.

De fato,

a) A derivada da curva  $\alpha$  é

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \left( \cos(t), -\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} \right) \\
&= \left( \cos(t), -\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \right) \\
&= \left( \cos(t), -\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \right)
\end{aligned}$$

Como as funções trigonométricas  $\cos(t)$ ,  $\operatorname{sen}(t)$  e  $\operatorname{cosec}(t)$  são de classe  $C^\infty(0, \pi)$  conclui-se que a curva  $\alpha$  é uma curva parametrizada diferenciável.

b) Note que  $\alpha'(t) = 0$  implica em  $\cos(t) = 0$  e  $\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} = 0$ , ou seja,  $t = \frac{\pi}{2}$ .

Portanto  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \neq \frac{\pi}{2}$ .

c) De acordo com a figura 3 a equação da reta tangente a  $\alpha(t)$  em  $t_0$  é

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0) \\
&= \left( \operatorname{sen}(t_0) + r\cos(t_0), \cos(t_0) + \log\left(\frac{t_0}{2}\right) + r\left(\operatorname{sen}(t_0) + \frac{1}{\operatorname{sen}(t_0)}\right) \right).
\end{aligned}$$

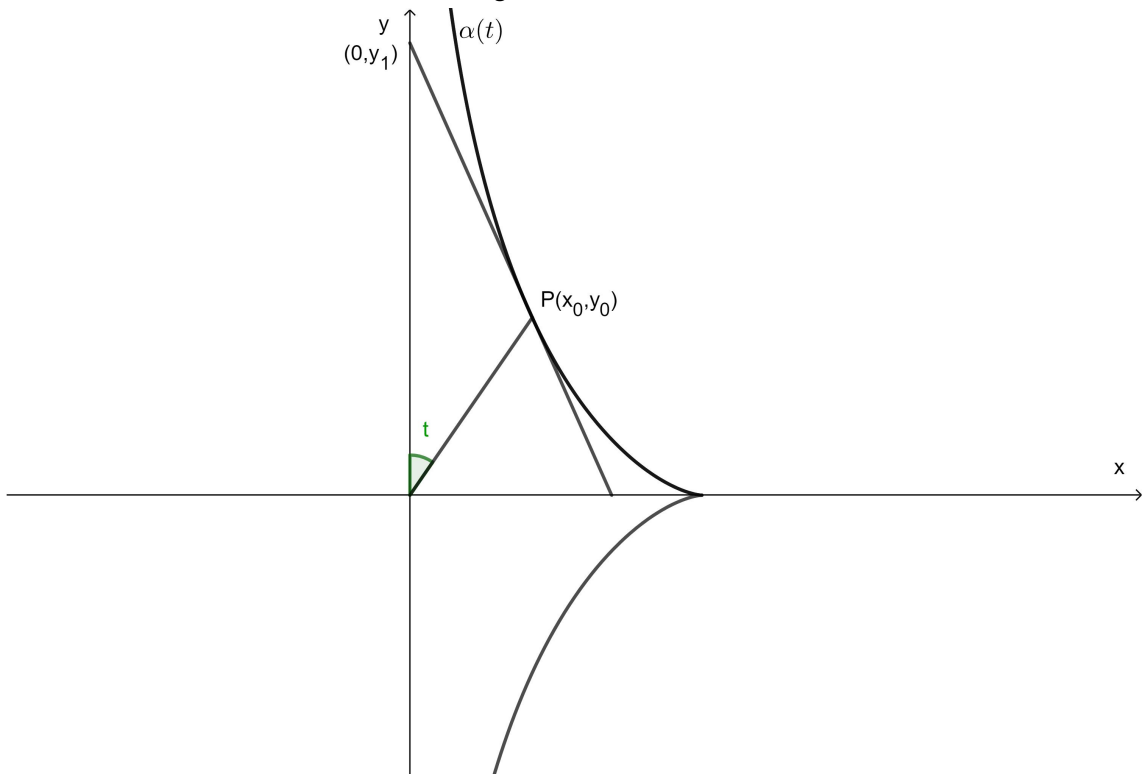
e para que  $\beta(r_0)$  seja o ponto de interseção da reta tangente com o eixo  $y$  devemos ter

$$\operatorname{sen}(t_0) + r_0\operatorname{sen}(t_0) = 0, \text{ ou seja, } r_0 = -\frac{\operatorname{sen}(t_0)}{\cos(t_0)} = -\operatorname{tg}(t_0).$$

Portanto, o comprimento do segmento da reta tangente  $\beta(r)$  em  $t_0$  compreende entre  $\alpha(t_0)$  e o eixo  $y$  é

$$\begin{aligned}
\|\alpha(t_0) - (\alpha(t_0) + r_0\alpha'(t_0))\| &= |r_0| \|\alpha'(t_0)\| \\
&= |-\operatorname{tg}(t_0)| \sqrt{\cos^2(t_0) + \left(-\operatorname{sen}(t_0) + \frac{1}{\operatorname{sen}(t_0)}\right)^2} \\
&= |-\operatorname{tg}(t_0)| \sqrt{\cos^2(t_0) + \operatorname{sen}^2(t_0) - 2\frac{\operatorname{sen}(t_0)}{\cos(t_0)} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2(t_0)}} \\
&= |-\operatorname{tg}(t_0)| \sqrt{1 - 2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2(t_0)}} \\
&= |-\operatorname{tg}(t_0)| \sqrt{-1 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2(t_0)}} \\
&= |-\operatorname{tg}(t_0)| \sqrt{\frac{-\operatorname{sen}^2(t_0) + 1}{\operatorname{sen}^2(t_0)}} \\
&= \left| -\frac{\operatorname{sen}(t_0)}{\cos(t_0)} \right| \left| \sqrt{\frac{\cos^2(t_0)}{\operatorname{sen}^2(t_0)}} \right| \\
&= \left| -\frac{\operatorname{sen}(t_0)}{\cos(t_0)} \right| \left| \frac{\cos(t_0)}{\operatorname{sen}(t_0)} \right| = 1.
\end{aligned}$$

Figura 3 – Tractriz



Fonte: Autoria Própria

### 3 TEORIA LOCAL DAS CURVAS NO PLANO E NO ESPAÇO

#### 3.1 CURVAS NO PLANO

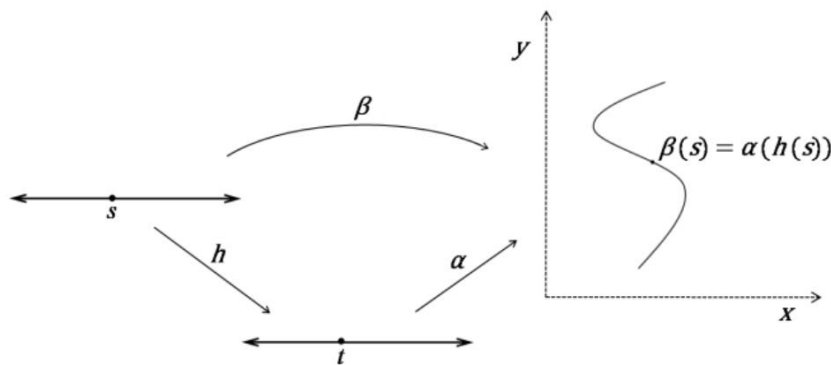
##### 3.1.1 Curva parametrizada pelo comprimento de arco

Neste capítulo será apresentado os conceitos e proposições de curva parametrizada pelo comprimento de arco, referencial de Frenet, Curvatura e o Teorema Fundamental das Curvas Planas. As definições e proposições foram consultadas em (TENENBLAT, 2008), (CARMO, 2012) e (ARAÚJO, 2016). Alguns resultados de Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo Vetorial foram utilizados nas demonstrações e foram consultados em (LEITHOLD, 1977), (GUIDORIZZI, 2002) e (FLEMMING; GONÇALVES, 2006).

**Definição 3.1.1** *Sejam  $I$  e  $J$  intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $h : J \rightarrow I$  uma função diferenciável de classe  $C^\infty$ , cuja derivada de primeira ordem é não-nula em todos os pontos de  $J$  e tal que  $h(J) = I$ . Então a função composta  $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva regular, que tem o mesmo traço que  $\alpha$ , chamada reparametrização de  $\alpha$  por  $h$ .*

**Observação:** A função  $h$  é dita mudança de parâmetro. E a orientação de uma curva regular plana  $\alpha$  é o sentido de percurso do traço de  $\alpha$ .

Figura 4 – Curva parametrizada pelo comprimento de arco



Fonte: TENENBLAT, 2008, p.37.

**Definição 3.1.2** *Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita parametrizada pelo comprimento de arco, se para cada  $t_0, t_1 \in I$ ,  $t_0 \leq t_1$ , o comprimento do arco da curva  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$  é igual a  $t_1 - t_0$ , isto é,*

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0.$$

**Proposição 3.1.3** *Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, para  $t \in I$ ,  $\|\alpha'(t)\| = 1$ .*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $\alpha$  seja parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos  $t_0 \in I$ . Seja a função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , que para cada  $t \in I$ , associa

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

Além disso, pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\|, \text{ para todo } t \in I.$$

Para  $t_0 \leq t$  temos que

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = t - t_0$$

e para  $t \leq t_0$  temos que

$$-s(t) = -\int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = -(t - t_0) = t_0 - t.$$

Portanto,

$$s(t) = t - t_0, \text{ para todo } t \in I$$

o que implica em  $s'(t) = 1$ .

Logo,

$$\|\alpha'(t)\| = s'(t) = 1, \text{ para todo } t \in I.$$

( $\Leftarrow$ ) Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  curva regular tal que  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , para todo  $t \in I$ .

Para cada  $t_0, t_1 \in I$  tal que  $t_0 \leq t_1$  defina

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt.$$

Assim,

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} dt = t \Big|_{t_0}^{t_1} = t_1 - t_0$$

o que prova que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco.

**Proposição 3.1.4** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$  a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0$ . Então existe a função inversa  $h$  de  $s$ , definida no intervalo aberto  $J = s(I)$  e  $\beta = \alpha \circ h$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , onde  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.*



**Demonstração:** Seja  $\alpha$  uma curva regular, isto é,  $\alpha$  é parametrizada diferenciável e  $\alpha'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$  e defina

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi. \quad (3.1)$$

Derivando a equação (3.1) e pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\|$$

e portanto

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0, \text{ para todo } t \in I. \quad (3.2)$$

Da equação (3.2) temos que a função  $s$  é estritamente crescente e então existe a função inversa  $h : J \rightarrow I$  tal que para  $t \in I$ ,  $h(s(t)) = t$  e pela regra da cadeia, temos que,

$$\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1.$$

Portanto

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} > 0. \quad (3.3)$$

Concluimos que  $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ ,  $s \in J$ , é uma reparametrização de  $\alpha$  e da equação (3.3),

$$\left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \frac{dh}{ds} \right\| = \frac{\|\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} = 1,$$

o que conclui pela proposição 3.1.3 que  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

Como vimos na Proposição 3.1.4, toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.

**Exemplo 3.1.5** Consideremos a curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  com  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Então

$$\beta(t) = \left( \frac{at}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d \right)$$

é a reparametrização da curva  $\alpha$  pelo comprimento de arco.

De fato, seja  $s(t)$  a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0 = 0$ , isto é,

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi \quad (3.4)$$

como  $\alpha'(t) = (a, b)$  e substituindo na equação (3.4) obtemos

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\xi = \sqrt{a^2 + b^2} t, \quad (3.5)$$

cuja inversa de  $s(t)$  é  $h(t) = \frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

Como  $\alpha$  é uma curva regular e  $h(t)$  é a função inversa de  $s(t)$  pela Proposição 3.1.4 segue que

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \left( \frac{at}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d \right)$$

é uma reparametrização da curva  $\alpha$  pelo comprimento de arco.

### 3.1.2 Referencial de Frenet e Curvatura

Consideremos uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$  reparametrizada pelo comprimento de arco. Assim, para cada  $s \in I$ ,  $\alpha'(s)$  é um vetor tangente unitário, o qual denotamos por

$$t(s) = (x'(s), y'(s)) = \alpha'(s)$$

e o vetor normal a curva  $\alpha$  é o vetor unitário

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

O conjunto de vetores  $t(s)$  e  $n(s)$  é dito **referencial de Frenet da curva**  $\alpha$ .

**Proposição 3.1.6** *Seja a curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$  parametrizada pelo comprimento de arco e  $\{t(s), n(s)\}$  o **referencial de Frenet** da curva  $\alpha$ . Então os vetores  $t'(s)$  e  $n'(s)$  são paralelos aos vetores  $n(s)$  e  $t(s)$ , respectivamente, e satisfazem as equações*

$$t'(s) = K(s)n(s)$$

e

$$n'(s) = -K(s)t(s),$$

que são chamadas de **fórmulas de Frenet** da curva plana  $\alpha$  e o fator de proporcionalidade  $K(s)$  é chamado de **curvatura** de  $\alpha$  em  $s$ .

**Demonstração:** Por hipótese a curva  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco, isto é,  $\|\alpha'(s)\| = 1$  então  $t'(s)$  é ortogonal a  $t(s)$  e como  $t(s)$  é ortogonal a  $n(s)$  implica que  $t'(s)$  é paralelo a  $n(s)$ .

Portanto,

$$t'(s) = K(s)n(s). \tag{3.6}$$

Além disso,

$$K(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s).$$

Analogamente, como  $n(s)$  é unitário então  $n'(s)$  é ortogonal a  $n(s)$  e portanto  $n'(s)$  é paralelo a  $t(s)$ .

Assim,

$$\langle n'(s), t(s) \rangle = -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s),$$

donde concluímos

$$n'(s) = -K(s)t(s). \quad (3.7)$$

Agora, vamos considerar uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regular de parâmetro  $r \in I$  e  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma reparametrização de  $\alpha$  por comprimento de arco  $s$ , isto é,  $\beta(s(r)) = \alpha(r)$ , os vetores  $t(r)$  e  $n(r)$  referencial de Frenet da curva  $\alpha$  e a curvatura é  $K(r) = K(s(r))$ .

A ideia de associar uma curva regular  $\alpha$  ao movimento circular do vetor tangente unitário  $t(s)$ , ou equivalentemente, do vetor unitário normal  $n(s)$  é devido a (Gauss, 1965), no início da geometria diferencial. Essa ideia tem um papel fundamental na teoria das curvas planas diferenciáveis.

**Observação 3.1.7** *Os vetores do referencial de Frenet e a curvatura foram definidos para uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A proposição seguinte permite obter a curvatura de uma curva regular com qualquer parâmetro, sem precisar reparametrizar a curva pelo comprimento de arco.*

**Proposição 3.1.8** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular. Então*

$$t(r) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}},$$

$$n(r) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$$

e

$$K(r) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

**Demonstração:** Se  $\beta$  é parametrização da curva  $\alpha$  pelo comprimento de arco, podemos escrever

$$\beta(s(r)) = \alpha(r) \quad (3.8)$$

Derivando a equação (3.8) duas vezes, resulta nas equações

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dr} = \alpha'(r) \quad (3.9)$$

e

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} \left( \frac{ds}{dr} \right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dr^2} = \alpha''(r) \quad (3.10)$$

e a equação 3.2,

$$\frac{ds}{dr} = \|\alpha'(r)\|. \quad (3.11)$$

Assim,

$$\frac{ds}{dr} = \|\alpha'(r)\| = (\langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle)^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

e diferenciando a equação (3.12) temos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dr^2} &= \frac{1}{2} (\langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle)^{-\frac{1}{2}} (\langle \alpha''(r), \alpha'(r) \rangle + \langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|} = \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{d^2s}{dr^2} = \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|}. \quad (3.13)$$

Das equações (3.8) e (3.11) resulta em

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{\alpha'(r)}{ds/dr} = \frac{\alpha'(r)}{\|\alpha'(r)\|}. \quad (3.14)$$

Portanto,

$$t(r) = \frac{d\beta}{ds} = \frac{\alpha'(r)}{\|\alpha'(r)\|} = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

Como  $n(r)$  é vetor normal a  $t(r)$  então

$$n(r) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

Além disto, os vetores  $t(r)$  e  $n(r)$  são ortogonais, isto é,

$$\begin{aligned} \langle t(r), n(r) \rangle &= \left\langle \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right\rangle \\ &= \frac{-x'y' + y'x'}{\|\alpha'(r)\|^2} = 0. \end{aligned}$$

Substituindo as equações (3.11), (3.13) e (3.14) na equação (3.10):

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} \|\alpha'(r)\|^2 + \frac{\alpha'(r) \langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|^2} = \alpha''(r)$$

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{\alpha''(r) - \frac{\alpha'(r) \langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|^2}}{\|\alpha'(r)\|^2} = \frac{\alpha''(r)}{\|\alpha'(r)\|^2} - \frac{t(r) \langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|^3}.$$

Portanto

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{\alpha''(r)}{\|\alpha'(r)\|^2} - \frac{t(r) \langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|^3}. \quad (3.15)$$

Pela Proposição 3.1.6 podemos escrever

$$K(s(r)) = \langle \frac{d^2\beta}{ds^2}(s(r)), n(r) \rangle. \quad (3.16)$$

Agora, substituindo a Equação (3.15) na Equação (3.16):

$$\begin{aligned} K(s(r)) &= \langle \frac{\alpha''(r)}{\|\alpha'(r)\|^2} - \frac{t(r) \langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|^3}, n(r) \rangle \\ &= \langle \frac{\alpha''(r)}{\|\alpha'(r)\|^2}, n(r) \rangle - \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|^3} \langle t(r), n(r) \rangle \\ &= \langle \frac{\alpha''(r)}{\|\alpha'(r)\|^2}, n(r) \rangle \end{aligned}$$

pois os vetores  $t(s)$  e  $n(s)$  são ortogonais.

Ou ainda,

$$K(s(r)) = \langle \frac{\alpha''(r)}{\|\alpha'(r)\|^2}, n(r) \rangle = \langle \frac{(x'', y'')}{\|\alpha'(r)\|^2}, \frac{(-y', x')}{\|\alpha'(r)\|} \rangle = -\frac{x''y'}{\|\alpha'(r)\|^3} + \frac{x'y''}{\|\alpha'(r)\|^3}.$$

Portanto

$$K(r) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

### 3.1.3 Teorema Fundamental das Curvas Planas

A partir do próximo teorema (**Teorema Fundamental das Curvas Planas**) podemos concluir que é possível reconstruir uma curva pela sua curvatura, ou seja, a curvatura determina a curva plana, a menos de sua localização no plano.

**Teorema 3.1.9** a) Dada uma função diferenciável  $K(s)$ ,  $s \in I \subset \mathbb{R}$ , existe uma curva regular  $\alpha(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , cuja curvatura é  $K(s)$ .

b) A curva  $\alpha(s)$  acima é única quando fixamos  $\alpha(s_0) = p_0$  e  $\alpha'(s_0) = v_0$ , em que  $v_0$  é um vetor unitário de  $\mathbb{R}^2$ .

c) Se duas curvas  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  têm a mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação  $L$  e uma translação  $T$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que

$$\alpha(s) = (L \circ T)(\beta(s)).$$

**Demonstração:** Por hipótese a função  $K(s)$  é diferenciável e fixando  $s_0 \in I$  defina

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s K(s) ds.$$

Considere um ponto  $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  e defina a curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  por

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(s) + \lambda) ds \quad (3.17)$$

e

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(s) + \lambda) ds. \quad (3.18)$$

A curva  $\alpha$  está bem definida pois as funções  $\cos(\theta(s) + \lambda)$  e  $\text{sen}(\theta(s) + \lambda)$  são integráveis em  $[s_0, s]$  já que estas funções são contínuas em  $[s, s_0]$ . Agora vamos determinar o referencial de Frenet  $t(s)$  e  $n(s)$ . Derivando as equações (3.17) e (3.19) e pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$t(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \text{sen}(\theta(s) + \lambda)) \quad (3.19)$$

e

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)) = (-\text{sen}(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)).$$

A curva  $\alpha$  é regular pois  $\alpha'(s) \neq 0$ , para todo  $s \in I$ . Além disto,

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{(x'(s))^2 + y'(s)^2} = \sqrt{\cos^2(\theta(s) + \lambda) + \text{sen}^2(\theta(s) + \lambda)} = 1.$$

Portanto pela Proposição 3.1.3 a curva  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

Em seguida, determinamos a curvatura da curva  $\alpha$ , para isso derivamos a equação (3.19) em relação a  $s$ , o que resulta

$$\begin{aligned} t'(s) &= (-\theta'(s)\text{sen}(\theta(s) + \lambda), \theta'(s)\cos(\theta(s) + \lambda)) = \theta'(s)(-\text{sen}(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)) \\ &= \theta'(s)n(s) = k(s)n(s). \end{aligned}$$

Portanto  $K(s) = \theta'(s)$  é a curvatura da curva  $\alpha(s)$ .

Para provar o item (b) considere a curva  $\alpha$  com curvatura  $K(s)$  e as equações de Frenet

$$t'(s) = K(s)n(s) \quad (3.20)$$

e

$$n'(s) = -K(s)t(s). \quad (3.21)$$

Do fato que  $t''(s) = (x''(s), y''(s))$  e  $n(s) = (-y'(s), x'(s))$  e substituindo na equação (3.22) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x''(s) = -K(s)y'(s) \\ y''(s) = K(s)x'(s) \end{cases}$$

Desta forma, temos o seguinte sistema de Equações diferenciais com condições iniciais:

$$\begin{cases} x''(s) = -K(s)y'(s) \\ y''(s) = K(s)x'(s) \\ \alpha(s_0) = p_0 \\ \alpha'(s_0) = v_0 \end{cases}$$

Portanto pelo Teorema de Unicidade de soluções do sistema de equações diferenciais com condições iniciais (FIGUEIREDO, 2018), concluímos que a curva  $\alpha$  é única.

Para provar o item (c), consideremos duas curvas  $\alpha$  e  $\beta$  com mesma curvatura  $K(s)$ . Fixado  $s_0$  então existe uma rotação  $L$  e uma translação  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que a curva

$$\bar{\alpha} = L \circ T \circ \beta$$

satisfaz  $\bar{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$  e  $\bar{\alpha}'(s_0) = \alpha'(s_0)$ .

Usando agora o item (b) segue o resultado.

## 3.2 CURVAS NO ESPAÇO

Consideremos a curva  $\alpha$  no espaço e os conceitos de curva parametrizada diferenciável, comprimento de arco e reparametrização de arco vistos nos capítulos 2 e 3, são válidos para curvas no espaço. São apresentados resultados de curvatura, torção e referencial de Frenet no espaço. Alguns resultados de vetores e operações com vetores foram usados nas demonstrações e podem ser consultados em (WINTERLE, 2014).

### 3.2.1 Curvatura, torção e triedro de Frenet

**Definição 3.2.1** Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$  é o número real

$$K(s) = \|\alpha''(s)\|$$

(a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção é denominada curvatura de  $\alpha$ ) e  $K(s) \geq 0$  para todo  $s \in I$ .

Geometricamente, visto que  $\|t(s)\| = 1$  e  $K(s) = \|t'(s)\|$ , a função curvatura é uma medida da variação da direção de  $t$ , portanto, da mudança de direção da reta tangente a  $\alpha$  em  $\alpha(s)$ . A curvatura então é uma medida de quanto uma curva deixa de ser uma reta (ALENCAR; SANTOS; NETO, 2003).

De fato, o próximo resultado caracteriza as retas como as curvas cuja curvatura é identicamente nula.

**Proposição 3.2.2** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então  $\alpha(I)$  é um segmento de reta, se e só se,  $K(s) = 0$ , para todo  $s \in I$ .

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Por hipótese,  $\alpha(I)$  é um segmento de reta, isto é,

$$\alpha(s) = p + vs,$$

$p \in \mathbb{R}^3$  e  $v$  é um vetor unitário de  $\mathbb{R}^3$ ,  $s \in I$ .

Então,

$$\text{para todo } s \in I, \alpha'(s) = v$$

e

$$\alpha''(s) = 0.$$

Portanto,

$$K(s) = \|\alpha''(s)\| = 0.$$



( $\Leftarrow$ ) Se  $K(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$ , para todo  $s \in I$  e por hipótese  $K(s) = 0$ , para todo  $s \in I$  e o conceito de norma temos que

$$\alpha''(s) = 0. \quad (3.22)$$

Integrando a equação (3.22) obtemos

$$\alpha'(s) = v.$$

Sendo  $\alpha$  reparametrizada pelo comprimento de arco pela Proposição 3.1.3 temos que

$$\|\alpha'(s)\| = 1.$$

E integrando  $\alpha'(s) = v$  obtemos

$$\alpha(s) = p + vs, \quad s \in I$$

cujo traço é uma reta e  $v$  é unitário, pois  $\|v\| = \|\alpha'(s)\| = 1$ .

**Observação 3.2.3** Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então pela Proposição 3.1.3 tem-se  $\|\alpha'(s)\| = 1$  e pela Proposição 2.2.11 segue que  $\alpha''(s)$  é ortogonal a  $\alpha'(s)$ . Portanto,  $\forall s \in I$  em que  $K(s) \neq 0$ , isto é,  $\alpha''(s) \neq 0$ , podemos definir um vetor unitário na direção de  $\alpha''(s)$ . (Chamado de versor do vetor).

**Definição 3.2.4** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $K(s) > 0$ . O vetor

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{K(s)}$$

é denominado vetor normal a  $\alpha$  em  $s$ .

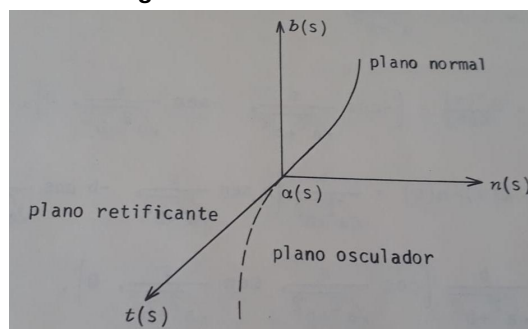
Observe que os vetores  $t(s) = \alpha'(s)$  e  $n(s) = \frac{\alpha''(s)}{K(s)}$  são vetores ortonormais.

**Definição 3.2.5** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $K(s) > 0$ . O vetor **binormal** a  $\alpha$  em  $s$  é

$$b(s) = t(s) \times n(s).$$

em que a operação  $\times$  denota produto vetorial.

**Figura 5 – Triedro de Frenet**



Fonte: TENENBLAT, 2008, p.65.

O referencial ortogonal  $t(s)$ ,  $n(s)$  e  $b(s)$  é o **triedro de Frenet** da curva  $\alpha$  em  $s$ . O **triedro de Frenet** forma uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Cada par de vetores do triedro de Frenet determina um plano, conforme Figura 5.

**Proposição 3.2.6** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $K(s) > 0$  então  $b'(s)$  é paralelo a  $n(s)$ .*

**Demonstração:** Pela definição de vetor binormal a curva  $\alpha$  em  $s$ ,

$$b(s) = t(s) \times n(s). \quad (3.23)$$

Derivando a equação (3.23), obtemos

$$b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s).$$

Temos que  $t'(s) \times n(s) = 0$  já que  $t'(s)$  e  $n(s)$  são paralelos pela equação (3.6).

Portanto

$$b'(s) = t(s) \times n'(s)$$

e concluímos que  $b'(s)$  é ortogonal a  $t(s)$ . Como o vetor binormal  $b(s)$  é ortonormal então

$$\|b(s)\| = 1, \text{ ou seja, } \langle b(s), b(s) \rangle = 1$$

então

$$2 \langle b'(s), b(s) \rangle = 0$$

que implica

$$\langle b'(s), b(s) \rangle = 0.$$

Portanto, como  $b'(s)$  é ortogonal a  $t(s)$  e a  $b(s)$ , então  $b'(s)$  é paralelo a  $n(s)$ .

**Definição 3.2.7** *O número real  $\tau(s)$  definido por  $b'(s) = \tau(s)n(s)$  é denominada torção da curva  $\alpha$  em  $s$ .*

**Exemplo 3.2.8** *Seja a hélice circular  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por*

$$\alpha(s) = \left( a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \quad s \in \mathbb{R} \text{ em que } a > 0 \text{ é uma contante então a torção é } \tau(s) = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

*De fato, a curva  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco e temos que*

$$\alpha'(s) = \left( \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right),$$

$$t(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left( -a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), b \right),$$

$$\alpha''(s) = \left( \frac{-a}{a^2 + b^2} \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{-a}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right),$$

$$\alpha''(s) = \frac{-a}{a^2 + b^2} \left( \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right)$$

Assim,

$$k(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2} \sqrt{\cos^2 \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + \operatorname{sen}^2 \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

O vetor normal  $n(s)$  é

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)} = \left( -\cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), -\operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right)$$

e o vetor binormal

$$b(s) = t(s) \times n(s) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) & \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) & 0 \\ -\cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) & -\operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( b \operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), -b \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \right)$$

então

$$b'(s) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \operatorname{sen} \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right)$$

e a torção é  $\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e tal que  $K(s) > 0$ , para todo  $s \in I$ , então o **triedro de Frenet** definido por

$$t(s) = \alpha'(s),$$

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

e

$$b(s) = t(s) \times n(s)$$

satisfaz as equações:

$$t'(s) = K(s)n(s),$$

$$\begin{aligned}n'(s) &= -K(s)t(s) - \tau(s)b(s), \\b'(s) &= \tau(s)n(s).\end{aligned}$$

**Observação 3.2.9** O triedro de Frenet, a curvatura e a torção foram definidos para uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A proposição seguinte permite obter a curvatura e torção de uma curva regular com qualquer parâmetro, sem precisar reparametrizar pelo comprimento de arco.

**Proposição 3.2.10** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular de parâmetro  $t$  e  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco, isto é,  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ , para todo  $t \in I$ . Se  $K(s) > 0$  e  $\tau(s)$ , são respectivamente a curvatura e a torção de  $\beta$  em  $s$  então

$$K(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

e

$$\tau(s(t)) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

**Demonstração:** Por hipótese  $\beta$  é uma parametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco, isto é,  $\|\beta'(t)\| = 1$  e

$$\beta(s(t)) = \alpha(t). \quad (3.24)$$

Derivando a equação (3.24) duas vezes em relação a  $t$ , obtemos

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} = \alpha'(t) \quad (3.25)$$

e

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} = \alpha''(t). \quad (3.26)$$

Sendo  $\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|$  então

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} \quad (3.27)$$

e da equação (3.25),

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}. \quad (3.28)$$

Substituindo as equações (3.27) e (3.28) na equação (3.26) resulta em

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{\alpha'(t)\|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t)\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^4} \quad (3.29)$$

Agora, calculamos o produto vetorial de  $\alpha'(t)$  e  $\alpha''(t)$  e com as propriedades de produto vetorial,

$$\begin{aligned}\alpha'(t) \times \alpha''(t) &= \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} \times \left( \frac{d^2\beta}{ds^2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \right) \\ &= \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \left( \frac{d\beta}{ds} \times \left( \frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{d\beta}{ds} \right) \right) \\ &= \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \left( \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d\beta}{ds} \right) \\ &= \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \left( \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \right)\end{aligned}$$

pois  $\frac{d\beta}{ds} \times \frac{d\beta}{ds} = 0$ .  
Portanto,

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \left( \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \right).$$

Assim,

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \left| \frac{ds}{dt} \right|^3 \left\| \frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\| = \left| \frac{ds}{dt} \right|^3 \left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| \left\| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\| \text{sen}(90^\circ) = \left| \frac{ds}{dt} \right|^3 \left\| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\|$$

em que  $\frac{d\beta}{dt}$  é ortogonal a  $\frac{d^2\beta}{ds^2}$  e  $\left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| = 1$ .

Então,

$$K(s(t)) = \left\| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\| = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}. \quad (3.30)$$

Agora, calculemos os vetores normal  $n(s(t))$  e binormal  $b(s(t))$  da curva  $\beta$  que são dados por

$$n(s(t)) = \frac{1}{K(s(t))} \frac{d^2\beta}{ds^2} \quad (3.31)$$

e

$$b(s(t)) = t(s(t)) \times n(s(t)). \quad (3.32)$$

Da equação (3.29) e (3.30) na equação (3.31),

$$n(s(t)) = \frac{\alpha''(t) \|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t) \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\| \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}. \quad (3.33)$$

Da equação (3.28) e (3.33) na equação (3.32) resulta em

$$b(s(t)) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \quad (3.34)$$

Derivando a equação (3.34) em relação a  $t$ ,

$$\frac{db}{ds}(s(t)) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} - \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle (\alpha'(t) \times \alpha'(t))}{\|\alpha'(t)\| \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^3}. \quad (3.35)$$

Da equação (3.33) e (3.35) concluímos que

$$\tau(s(t)) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

## 4 APLICAÇÕES

Neste capítulo são apresentados alguns resultados de curva regular de curvatura não-nula, caracterização de uma curva regular que é uma hélice. Além disso, aplicações e animações de curvas planas e espaciais no Software Geogebra.

**Lema 4.0.1** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular de curvatura não-nula. Se  $\alpha$  é uma curva plana, então o plano osculador de  $\alpha$  independe do parâmetro e é o plano que contém o traço de  $\alpha$ .*

**Demonstração:** Por hipótese podemos supor  $\alpha(s)$  parametrizada pelo comprimento de arco. Como  $\alpha$  é uma curva plana, existe um plano  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $\alpha(I)$ .

Seja o vetor  $v$  não-nulo ortogonal a este plano. E vamos provar que  $v$  é paralelo a  $b(s)$ , para todo  $s \in I$ .

Fixado  $s_0 \in I$ , então para todo  $s \in I$ ,

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v \rangle = 0 \quad (4.38)$$

pois  $\alpha(s) - \alpha(s_0)$  está contido no plano  $\gamma$  e  $v$  é ortogonal ao plano  $\gamma$ .

Derivando duas vezes a equação (4.38) temos que

$$\langle \alpha'(s), v \rangle = 0$$

e

$$\langle \alpha''(s), v \rangle = 0,$$

isto é,

$$\langle t(s), v \rangle = 0$$

e

$$\langle t'(s), v \rangle = 0.$$

Sendo  $t'(s) = K(s)n(s)$  então

$$K(s) \langle n(s), v \rangle = 0$$

e  $K(s)$  não-nula então  $\langle n(s), v \rangle = 0$ , o que prova que o vetor  $v$  é ortogonal a  $t(s)$  e  $n(s)$ , e portanto  $v$  é paralelo a  $b(s), \forall s \in I$ , isto é, o plano osculador de  $\alpha$  não depende do parâmetro e contém  $\alpha(I)$ .

**Proposição 4.0.2** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva plana regular, de curvatura não-nula. Então  $\alpha$  é uma curva plana, se e só se,  $\tau \equiv 0$ .*

**Demonstração:** Por hipótese a curva  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco. Se  $\alpha$  é uma curva plana então pelo Lema 4.0.1, o vetor  $b(s)$  é constante. Portanto,  $b'(s) = 0$ , para todo  $s \in I$ .

Donde concluímos que

$$\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle = 0, \forall s \in I.$$

Reciprocamente, se  $\tau(s) = 0$ , para todo  $s \in I$  então  $b'(s) = 0$ . Assim,  $b(s) = b$  é constante.

Fixado  $s_0 \in I$ , consideremos a função

$$f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), b \rangle. \quad (4.39)$$

Agora provaremos que  $f(s) \equiv 0$ .

Derivando a equação (4.39) resulta em

$$f'(s) = \langle \alpha'(s), b \rangle = \langle t(s), b(s) \rangle = 0.$$

Portanto  $f(s)$  é constante. Como  $f(s_0) = 0$ , concluímos que  $f(s) \equiv 0$ , isto é,  $\alpha(I)$  está contido no plano que contém  $\alpha(s_0)$  e é ortogonal ao vetor  $v$ .

**Proposição 4.0.3** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular. Então o traço de  $\alpha$  está contido em uma circunferência de raio  $a > 0$ , se e só se,  $\tau \equiv 0$  e  $K \equiv \frac{1}{a}$ .*

**Demonstração:** Consideremos  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco e suponhamos que  $\alpha(I)$  está contida em uma circunferência de centro  $c$  e raio  $a$  então  $\alpha$  é uma curva plana.

Podemos escrever

$$\|\alpha(s) - c\|^2 = a^2, \text{ para todo } s \in I. \quad (4.40)$$

Pela proposição 4.0.2,  $\tau \equiv 0$  e pelo lema 4.0.1

$$\langle \alpha(s) - c, b \rangle = 0$$

em que  $b(s) = b$  (constante). Portanto,  $\alpha(s) - c$  é ortogonal a  $b$ .

Derivando a equação (4.40) duas vezes resulta em

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s) - c \rangle = 0$$

e

$$\langle \alpha''(s), \alpha(s) - c \rangle + \|\alpha'(s)\|^2 = 0.$$

Portanto

$$\langle \alpha''(s), \alpha(s) - c \rangle = -1 \quad (4.41)$$

pois  $\|\alpha'(s)\| = 1$ . Do fato que  $(\alpha(s) - c)$  é ortogonal aos vetores  $t(s)$  e  $b(s)$  segue que  $(\alpha(s) - c)$  é paralelo a  $n(s)$ .

Além disso,

$$|\langle \alpha''(s), \alpha(s) - c \rangle| = \|\alpha''(s)\| \|\alpha(s) - c\|$$



então

$$K(s) = \|\alpha'(s)\| = \frac{|\langle \alpha''(s), \alpha(s) - c \rangle|}{\|\alpha(s) - c\|} = \frac{1}{\|\alpha(s) - c\|} = \frac{1}{a}, \text{ para todo } s \in I.$$

Reciprocamente, consideramos a aplicação diferenciável  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(s) = \alpha(s) + a n(s).$$

Em seguida, provaremos que  $f(s)$  é constante. Pelas fórmulas de Frenet temos que

$$\begin{aligned} f'(s) &= \alpha'(s) + a n'(s) \\ &= t(s) + a n'(s) \\ &= t(s) + a(-K(s)t(s) - \tau(s)b(s)). \end{aligned}$$

Como  $\tau \equiv 0$  e  $K \equiv \frac{1}{a}$  segue que  $f'(s) = 0$  e portanto  $f$  é constante então  $f(s) = c$ .  
Note que  $\alpha(s) + a n(s) = c$  então

$$\|\alpha(s) - c\| = \|-an(s)\| = a\|n(s)\| = a,$$

pois  $\|n(s)\| = 1$ , isto é, o traço de  $\alpha$  está contido em uma circunferência de centro  $c$  e raio  $a$ .

**Definição 4.0.4** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma hélice, se existe um vetor unitário  $v$  que forma um ângulo constante com  $\alpha'(t)$ , para todo  $t \in I$ , isto é,  $\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{\|\alpha'(t)\|}$  é constante.

**Proposição 4.0.5** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular de curvatura e torção não-nulas. Então  $\alpha$  é uma hélice, se e somente se,  $\frac{K}{\tau}$  é constante.

**Demonstração:** Considere a curva  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco e por hipótese se  $\alpha$  é uma hélice e pela definição 4.0.4 existe um vetor unitário  $v$  tal que  $\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{\|\alpha'(t)\|}$  é constante (ou ainda,  $\langle \alpha'(t), v \rangle$  é constante) e  $\|\alpha'(t)\| = 1$ . Assim,

$$\langle \alpha'(t), v \rangle = a. \tag{4.42}$$

Derivando a equação (4.42), temos que

$$\langle \alpha''(t), v \rangle = 0,$$

isto é,  $\langle K(s)n(s), v \rangle = 0$ . Sendo  $K$  não-nula então  $\langle n(s), v \rangle = 0$ , o que implica que  $n(s)$  é ortogonal a  $v$  e  $v$  pertence ao plano determinado por  $t(s)$  e  $b(s)$ , para cada  $s \in I$ .

Desta forma, podemos escrever  $v$  como combinação linear de  $t(s)$  e  $b(s)$ , isto é,

$$v = \cos(\theta(s))t(s) + \text{sen}(\theta(s))b(s). \quad (4.43)$$

Derivando a equação (4.43) e usando as fórmulas de Frenet, temos que

$$-\text{sen}(\theta(s))\theta'(s)t(s) + \cos(\theta(s))t'(s) + \cos(\theta(s))\theta'(s)b(s) + \text{sen}(\theta(s))b'(s) = 0$$

e

$$-\text{sen}(\theta(s))\theta'(s)t(s) + (k(s)\cos(\theta(s)) + \tau(s)\text{sen}(\theta(s)))n(s) + \cos(\theta(s))\theta'(s)b(s) = 0.$$

Portanto, para todo  $s \in I$

$$\text{sen}(\theta(s))\theta'(s) = 0$$

$$\cos(\theta(s))\theta'(s) = 0$$

e

$$K(s)\cos(\theta(s)) + \tau(s)\text{sen}(\theta(s)) = 0.$$

De  $\text{sen}(\theta(s))\theta'(s) = 0$  e  $\cos(\theta(s))\theta'(s) = 0$  obtemos que  $\theta'(s) = 0$ , isto é,  $\theta(s)$  é constante, ou ainda,  $\theta(s) = \theta$ .

Note que a constante  $\cos(\theta)$  é não-nula, pois caso contrário, teríamos  $\tau(s) = 0$ , o que contradiz a hipótese.

Além disso,

$$K(s)\cos(\theta) + \tau(s)\text{sen}(\theta) = 0$$

$$K(s) = \frac{-\tau(s)\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$$

e

$$\frac{K(s)}{\tau(s)} = -\frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)},$$

o que prova que  $\frac{K(s)}{\tau(s)}$  é constante.

Reciprocamente, como  $\frac{K(s)}{\tau(s)} = -\tan(\theta)$  considere o vetor  $v$  dado por

$$v = \cos(\theta)t(s) + \text{sen}(\theta)b(s).$$

Assim,  $\|v\| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)} = 1$ .

Além disto,

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha'(s), v \rangle &= \langle t(s), \cos(\theta)t(s) + \text{sen}(\theta)b(s) \rangle \\
 &= \langle t(s), \cos(\theta)t(s) \rangle + \langle t(s), \text{sen}(\theta)b(s) \rangle \\
 &= \cos(\theta) \langle t(s), t(s) \rangle + \text{sen}(\theta) \langle t(s), b(s) \rangle \\
 &= \cos(\theta) \|\alpha'(s)\| = \cos(\theta)
 \end{aligned}$$

pois  $\|\alpha'(s)\| = 1$  e  $\langle t(s), b(s) \rangle = 0$ . Portanto  $\langle \alpha'(s), v \rangle$  é constante e pela definição 4.04 segue que a curva  $\alpha$  é uma hélice.

A seguir, serão realizadas construções e animações no Software Geogebra relacionadas aos tópicos: Vetor tangente, reparametrização da circunferência, Catenária não é parametrizada pelo comprimento de arco, parametrização pelo comprimento de arco, hélice, curvatura da circunferência, curvatura máxima e curvatura de uma função diferenciável.

#### Aplicação 4.0.6: (Cardioide e Vetor Tangente)

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva parametrizada diferenciável que para cada  $t \in \mathbb{R}$  associa  $\alpha(t) = (\cos(t)(2\cos(t) - 1), \text{sen}(t)(2\cos(t) - 1))$  (tal curva é denominada Cardioide).

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar que num ponto qualquer P do Cardioide existe o vetor tangente utiliza os seguintes comandos:

a=Curva(cos(t)(2cos(t) - 1), sen(t)(2cos(t) - 1), t, -10, 10)

Controle deslizante s de variação  $-10 \leq s \leq 10$

P=a(s)

Controle deslizante h de variação  $0 < h \leq 1$  de incremento 0.0001

Q = a(s + h)

reta tangente a P e a curva  $\alpha$

reta secante por P e Q

Anime seletor h tendendo a zero

$$L = \frac{x(Q) - x(P)}{h}$$

$$M = \frac{y(Q) - y(P)}{h}$$

$$d = x(P)$$

$$e = y(P)$$

Inserir na caixa de texto:

$$x'(d) = L$$

$$y'(e) = M$$

Editar (marcar fórmula Latex):

$$x'(d)=L(\text{escolher este L na caixa de objetos})$$

$$y'(e)=M(\text{escolher este M na caixa de objetos})$$

vetor tangente=(L,M)(escolher na caixa de objetos)

Na caixa de entrada:  $a' = \text{Derivada}(a)$

$$A = a'(s)$$

$$O = (0, 0)$$

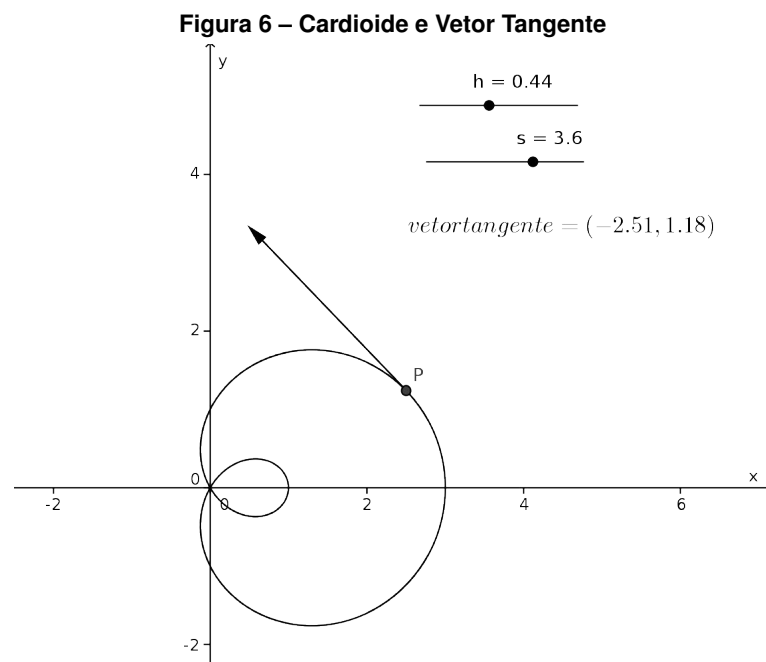
$$\vec{u} = \text{Vetor}(O, A)$$

$$\vec{v} = \text{Transladar}(\vec{u}, P)$$

$$B = \text{Transladar}(P, v)$$

Vetor( $P, B$ )(vetor tangente em P a curva  $\alpha$ )

Anime o controle deslizante  $s$  e observe que em qualquer ponto P do Cardioide existe o vetor tangente, de acordo com a figura 6.



Fonte: Autoria Própria

#### Aplicação 4.0.7: ( Circunferência)

Consideremos a curva regular  $\alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$$

em que  $a > 0$  é constante. Seja  $h : [0, 2a\pi) \rightarrow [0, 2\pi)$  definida por  $h(s) = \frac{s}{a}$ . A reparametrização da curva  $\alpha$  por  $h$  é a curva

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \left( a \cos \left( \frac{s}{a} \right), a \sin \left( \frac{s}{a} \right) \right).$$

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar que a circunferência e sua reparametrização tem o mesmo traço utiliza os seguintes comandos:

Controle deslizante  $a$  de variação  $0 < a \leq 5$ .

Controle deslizante  $s$  de variação  $0 \leq s \leq 2a\pi$ .

Digite na caixa de entrada:

$$\alpha(t) = \text{Curva}(a \cos(t), a \sin(t), t, 0, 2a\pi)$$

$$h(s) = \frac{s}{a},$$

Determine o ponto  $A = \alpha(h(s))$  e habilite rastro neste ponto e anime o controle deslizante  $s$ , determinando o traço da curva  $\alpha$ .

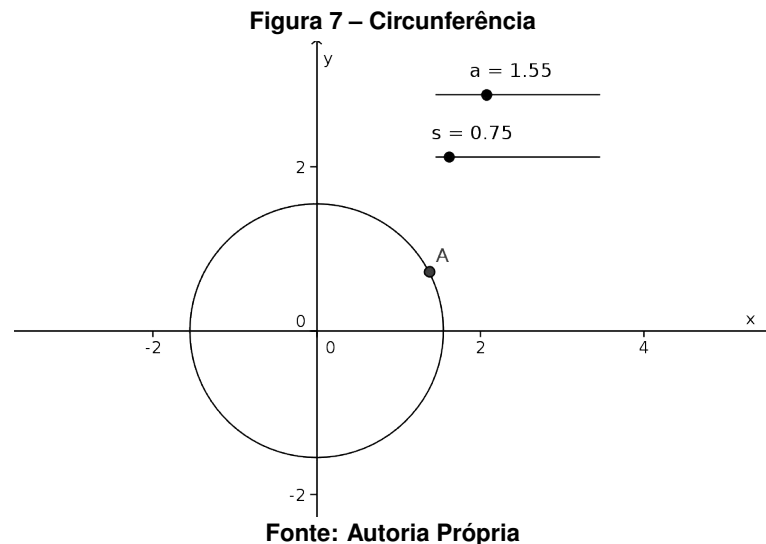
Digite na caixa de entrada:

$$\beta(s) = \text{Curva}\left(a \cos\left(\frac{s}{a}\right), a \sin\left(\frac{s}{a}\right), s, 0, 2a\pi\right)$$

Anime o controle deslizante  $s$  e observe que a curva  $\beta$

$$\beta(s) = (\alpha(h(s)))$$

tem o mesmo traço que a curva  $\alpha$ , de acordo com a figura 7.



#### Aplicação 4.0.8: (Catenária)

Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$ . A curva  $\alpha$  não é parametrizada pelo comprimento de arco.

Alguns resultados de funções hiperbólicas:

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}; \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

e

$$(\cosh(t))' = \sinh(t); \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

Assim,

$$\alpha'(t) = (1, \sinh(t))$$

e

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \sqrt{\cosh^2(t)} = \cosh(t).$$

O comprimento de arco da curva  $\alpha$  é

$$s(t) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \cosh(t) dt = \sinh(t) \Big|_a^b = \sinh(b) - \sinh(a).$$

Pela definição 3.1.2 como  $s(t) \neq b - a$  então  $\alpha$  não é parametrizada pelo comprimento de arco e o comprimento de arco da catenária é

$$s(t) = \sinh(b) - \sinh(a).$$

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar que a Catenária não é parametrizada pelo comprimento de arco utiliza os seguintes comandos:

$$f(s) = s$$

Controle deslizante a e b de variação  $-5 \leq a \leq b, a \leq b \leq 5$ .

Digitar os comandos na caixa de entrada:

$$\alpha = \text{Curva}(t, \cosh(t), t, a, b)$$

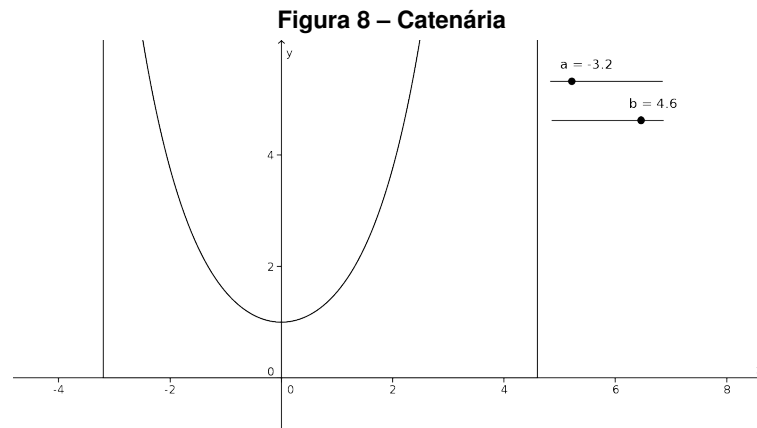
$$\alpha' = \text{Derivada}(\alpha(t))$$

$$g(t) = \text{sqrt}(1 + (\sinh(t))^2)$$

$$s(t) = \text{Integral}(g, a, b)$$

$$e = b - a$$

Anime seletor a e b e observe que  $s(t)$  e  $e = b - a$  são diferentes, isto é, a curva  $\alpha$  não é parametrizada pelo comprimento de arco, de acordo com a figura 8.



Fonte: Autoria Própria

### Aplicação 4.0.9: (Reta)

Seja a curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(t) = \left( a \frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}} + c, b \frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}} + d \right)$ ,  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

A curva  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco.

Temos que

$$\alpha'(t) = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

e

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}} = 1$$

Portanto a curva  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco.

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar que a reta é parametrizada pelo comprimento de arco utiliza os seguintes comandos:

Controles deslizantes: a, b, c, d, m, n, s

com variações

$$1 \leq a \leq 5; 1 \leq b \leq 5$$

$$-5 \leq c \leq 5; -5 \leq d \leq 5$$

$$-5 \leq m \leq n; m \leq n \leq 5; -5 \leq s \leq 5$$

. Digite na caixa de entrada:

$$\alpha(t) = \text{curva} \left( a \frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}} + c, b \frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}} + d, t, m, n \right)$$

$$\alpha'(t) = \text{Derivada}(\alpha(t))$$

$$P = \left( a \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + c, b \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + d \right)$$

$$Q = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$O = (0, 0)$$

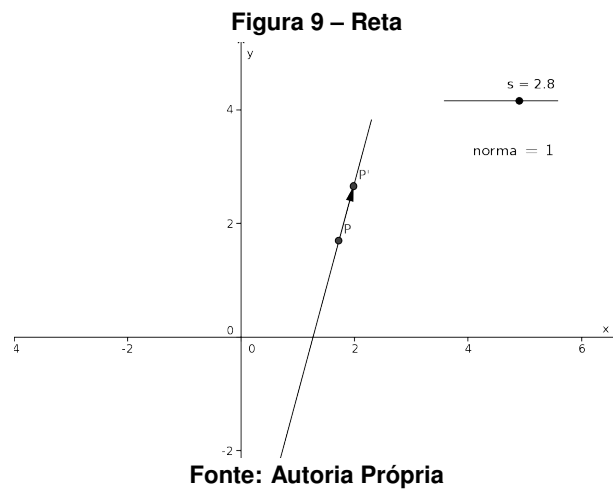
$$u = \text{Vetor}(O, Q)$$

$$v = \text{Transladar}(u, P)$$

$$P' = \text{Transladar}(P, v)$$

$$\text{norma} = \text{Distância}(P, P').$$

Anime o seletor  $s$  e observe que  $\text{norma} = \|\alpha'(s)\| = 1$ , para todo  $s$ , isto é, a curva  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco, de acordo com a figura 9.



#### Aplicação 4.0.10: (Hélice)

A curva regular  $\alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$  é uma hélice.

De fato, seja  $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$  e considere um vetor unitário  $v = (\sin t, -\cos t, 0)$  temos que

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(t), v \rangle &= \langle (-\sin t, \cos t, 1), (\sin t, -\cos t, 0) \rangle \\ &= -\sin^2 t - \cos^2 t = -1 \end{aligned}$$

Como  $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$ .

Assim,

$$\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \text{ para todo } t \in [0, 2\pi).$$

Logo  $\frac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{\|\alpha'(t)\|}$  é constante e pela definição 4.04 a curva  $\alpha$  é uma hélice.

As construções no Software Geogebra 3D para mostrar que a curva é uma Hélice utiliza os seguintes comandos:

Digite na caixa de entrada:

$$\alpha(t) = \text{Curva}(\cos(t), \sin(t), t, t, 0, 2\pi)$$



e

$$\alpha'(t) = \text{Derivada}(\alpha(t))$$

Controle deslizante  $s$  de 0 a  $2\pi$

$$P = (\cos(s), \sin(s), s)$$

$$Q = (-\sin(s), \cos(s), 1)$$

$$O = (0, 0, 0)$$

$$u = \text{Vetor}(O, Q)$$

$$v = \text{Transladar}(u, P) \text{ (vetor tangente em P).}$$

$$Q_1 = (\sin(s), -\cos(s), 0)$$

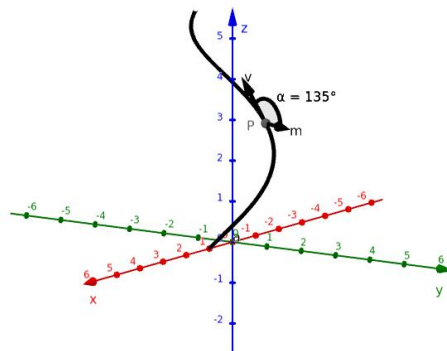
$$w = \text{Vetor}(O, Q_1)$$

$$m = \text{transladar}(w, P)$$

$$\beta = \hat{\text{Ângulo}}(v, m)$$

Anime o Controle deslizante  $s$  e observe que o ângulo entre o vetor tangente e o vetor unitário é constante donde conclui que a curva é uma Hélice, de acordo com a figura 10.

Figura 10 – Hélice



Fonte: Autoria Própria

#### Aplicação 4.0.11: (Curvatura da circunferência)

Seja a aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(s) = (a \cos(s/a), a \sin(s/a))$  em que  $a \neq 0$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, uma vez que

$$\|\alpha'(s)\| = 1, \text{ para todo } s \in \mathbb{R},$$

a curvatura da curva  $\alpha$  é  $\frac{1}{a}$ .

Primeiro vamos determinar o referencial de Frenet  $t(s), n(s)$ . Assim,

$$t(s) = (x'(s), y'(s)) = \left( -\sin\left(\frac{s}{a}\right), \cos\left(\frac{s}{a}\right) \right)$$

$$t'(s) = (x''(s), y''(s)) = \left( \frac{-1}{a} \cos\left(\frac{s}{a}\right), \frac{-1}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right) \right)$$

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)) = \left( -\cos\left(\frac{s}{a}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right) \right)$$

$$\begin{aligned} K(s) &= \langle t'(s), n(s) \rangle = \left\langle \left( \frac{-1}{a} \cos\left(\frac{s}{a}\right), \frac{-1}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right) \right), \left( -\cos\left(\frac{s}{a}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right) \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{a} \cos^2\left(\frac{s}{a}\right) + \frac{1}{a} \operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar a curvatura da circunferência utiliza os seguintes comandos:

Controles deslizantes: a e b com variações, a de 1 até 8 e b de -5 até 5.

Digite na caixa de entrada:

$$\alpha(s) = \text{Curva}\left(a \cos\left(\frac{s}{a}\right), a \operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right), s, -5, 5\right)$$

$$\alpha'(s) - \text{Derivada}(\alpha)$$

$$P = \left( a \cos\left(\frac{b}{a}\right), a \operatorname{sen}\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$

$$K = \text{Curvatura}(P, \alpha)$$

$$Q = \left( -\operatorname{sen}\left(\frac{b}{a}\right), \cos\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$

$$O = (0,0)$$

$$u = \text{Vetor}(O, Q)$$

$$t = \text{Transladar}(u, P)(\text{vetor } t(s))$$

$$L = \left( -\cos\left(\frac{b}{a}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$

$$w = \text{Vetor}(O, L)$$

$$n = \text{Transladar}(w, P)(\text{vetor } n(s))$$

$$\beta = \text{Ângulo}(t, n)$$

$$M = \left( \frac{-1}{a} \cos\left(\frac{b}{a}\right), \frac{-1}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$

$$v = \text{Vetor}(O, n)(\text{vetor } t'(s))$$

$$t' = \text{Transladar}(v, P)$$

$$K = t' * n(\text{Curvatura})$$

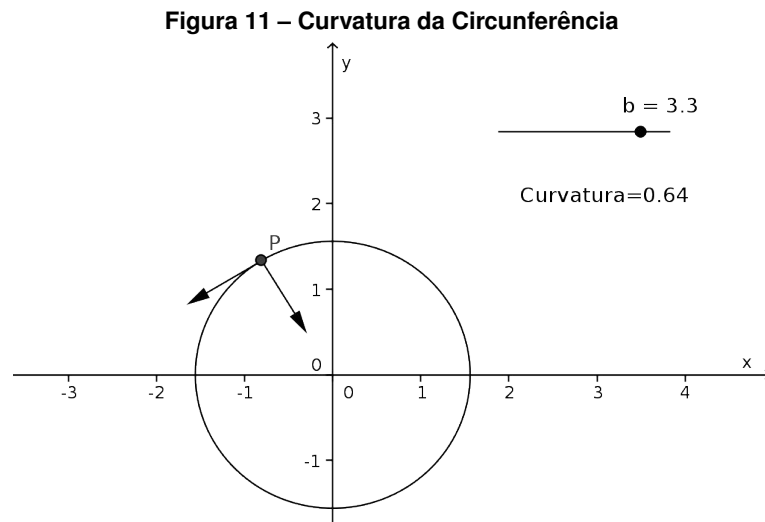
Considere uma reparametrização de  $\alpha$  dado por

$$\beta(s) = \left( a \cos\left(\frac{s}{a}\right), -a \operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right) \right)$$

então a curvatura será

$$\frac{-1}{a}.$$

Anime o seletor  $a$  e observe que a curvatura da circunferência de raio  $a$  é  $K = \frac{1}{a}$ , de acordo com a figura 11.



Fonte: Autoria Própria

#### Aplicação 4.0.12: (Curvatura da Espiral Logarítmica)

Consideremos a espiral logarítmica

$$\alpha(r) = (e^r \cos(r), e^r \sin(r)), r \in \mathbb{R}.$$

Então a curvatura é

$$K(r) = \frac{1}{\sqrt{2}e^r}.$$

Temos que

$$\alpha'(r) = (e^r \cos(r) - e^r \sin(r), e^r \sin(r) + e^r \cos(r))$$

$$\alpha'(r) = (0, 0) \Rightarrow e^r(\cos(r) - \sin(r)) = 0 \Rightarrow \cos(r) = \sin(r)$$

e

$$e^r(\sin(r) + \cos(r)) = 0 \Rightarrow \cos(r) = -\sin(r)$$

Portanto a curva  $\alpha$  é regular pois  $\alpha'(r) \neq 0$ , para todo  $r \in \mathbb{R}$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\|\alpha'(r)\| &= \sqrt{e^{2r}((\cos(r) - \sin(r))^2 + (\sin(r) + \cos(r))^2)} \\
&= e^r \sqrt{\cos^2(r) - 2\cos(r)\sin(r) + \sin^2(r) + \sin^2(r) + 2\sin(r)\cos(r) + \cos^2(r)} \\
&= e^r \sqrt{2(\cos^2 r + \sin^2 r)} = \sqrt{2}e^r \neq 1, \text{ para todo } r \neq \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Assim, para todo  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $r \neq \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  a curva  $\alpha$  não é parametrizada pelo comprimento de arco pois  $\|\alpha'(r)\| \neq 1$ .

Calculando a curvatura então

$$K(r) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^r}.$$

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar a curvatura da Espiral Logarítmica utiliza os seguintes comandos:

Digite na caixa de entrada:

$\alpha(r) = \text{Curva}(e^r \cos(r), e^r, r, -3, 3)$

$f(r) = e^r \cos(r)$

$g(r) = e^r \sin(r)$

$f'(r) = \text{Derivada}(f)$

$g'(r) = \text{Derivada}(g)$

$f''(r) = \text{Derivada}(f, 2)$

$g''(r) = \text{Derivada}(g, 2)$

$$K(r) = \frac{-f''(r)g'(r) + f'(r)g''(r)}{((f'(r))^2 + (g'(r))^2)^{3/2}}$$

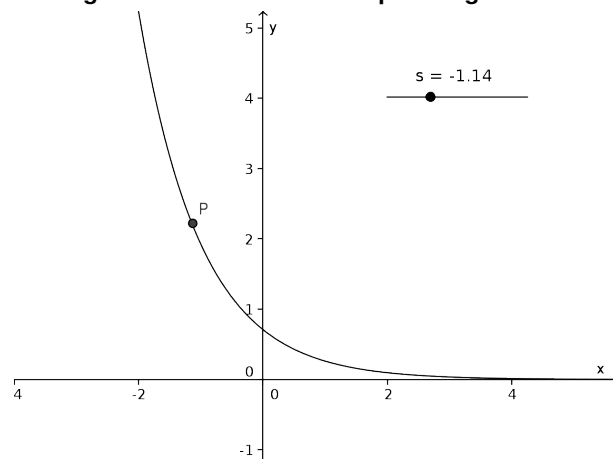
$$K_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}e^s}$$

Controle deslizante s de variação de -3 a 3.

$P = (s, K_1(s))$  e habilitar rastro em P

Anime o controle deslizante s e observe a curvatura da curva da Espiral Logarítmica, de acordo com a figura 12.

**Figura 12 – Curvatura da Espiral Logarítmica**



Fonte: Autoria Própria

**Aplicação 4.0.13: (Curvatura Máxima)**

Considere a curva regular  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(t) = (t, t^2 - 4t - 3, t, -5, 5)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Para que valor de  $t$  a curvatura da curva  $\alpha$  é máxima?

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar a curvatura máxima utiliza os seguintes comandos:

Digite na caixa de entrada:

$$\alpha(t) = \text{Curva}(t, t^2 - 4t - 3, t, -5, 5)$$

Controle deslizante s de variação  $-5$  a  $5$

$$P = (s, s^2 - 4s - 3)$$

K= Curvatura(P, $\alpha$ )

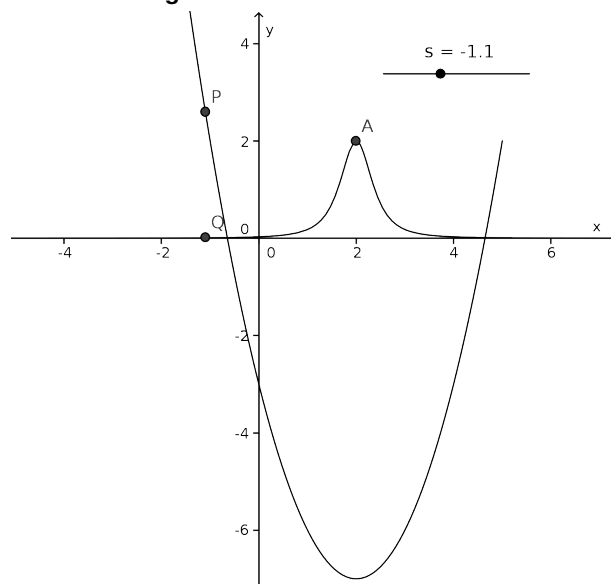
Q= (S,K) e ative rastro em Q

$$K_1(s) = \frac{2}{((1 + (2s - 4)^2)^{3/2})}$$

A= Máximo ( $K_1(s)$ ,  $-5, 5$ ).

Portanto em  $t = 2$  ocorre a curvatura máxima de  $\alpha$ , de acordo com a figura 13.

Figura 13 – Curvatura Máxima



Fonte: Autoria Própria

**Aplicação 4.0.14: (Curvatura de uma função diferenciável)**

Seja a função diferenciável

$$f(s) = s, s \in \mathbb{R}$$

então existe uma curva regular  $\alpha(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco, cuja curvatura é

$$K(s) = f(s).$$

Pelo Teorema Fundamental das curvas planas,

$$\theta(s) = \int_0^s t dt = \frac{s^2}{2}$$

$$\alpha(s) = \left( \int_0^s \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) dt, \int_0^s \text{sen}\left(\frac{t^2}{2}\right) dt \right)$$

$$t(s) = \alpha'(s) = \left( \cos\left(\frac{s^2}{2}\right), \text{sen}\left(\frac{s^2}{2}\right) \right)$$

$$t'(s) = \alpha''(s) = \left( -s \text{sen}\left(\frac{s^2}{2}\right), s \cos\left(\frac{s^2}{2}\right) \right)$$

$$n(s) = \left( -\text{sen}\left(\frac{s^2}{2}\right), \cos\left(\frac{s^2}{2}\right) \right)$$

$$k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = s \operatorname{sen}^2 \left( \frac{s^2}{2} \right) + s \operatorname{cos}^2 \left( \frac{s^2}{2} \right) = s$$

$$\therefore K(s) = f(s).$$

As construções no Software Geogebra 2D para mostrar a curvatura de uma função diferenciável utiliza os seguintes comandos:

$$f(s) = s$$

Controle deslizante c de variação  $-20$  a  $20$ .

Digitar os comandos na caixa de entrada:

$$g(s) = \operatorname{cos} \left( \frac{s^2}{2} \right)$$

$$h(s) = \operatorname{sen} \left( \frac{s^2}{2} \right)$$

$$a = \operatorname{Integral}(g, 0, c)$$

$$b = \operatorname{Integral}(h, 0, c)$$

$$P = (a, b)$$

$$h(s) = \frac{s}{a},$$

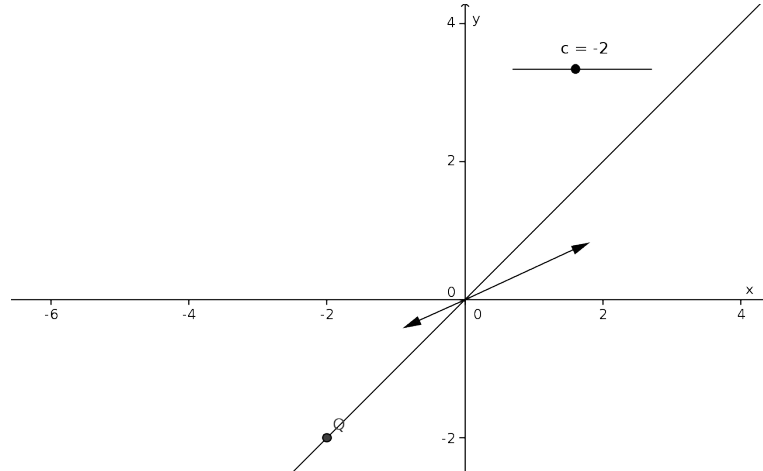
$$u = \left( -c \operatorname{sen} \left( \frac{c^2}{2} \right), c \operatorname{cos} \left( \frac{c^2}{2} \right) \right) (\text{vetor } t'(s))$$

$$v = \left( -\operatorname{sen} \left( \frac{c^2}{2} \right), \operatorname{cos} \left( \frac{c^2}{2} \right) \right) (\text{vetor } n(s))$$

$$Q = (c, u * v)$$

Adicionar exibir rastro em Q e anime o seletor c e observe que  $f(s) = K(s)$ , isto é, toda função diferenciável tem curvatura e a curvatura é a própria função diferenciável, de acordo com a figura 14.

**Figura 14 – Curvatura de uma função diferenciável**



**Fonte: Autoria Própria**



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo estudar curvas planas e curvas espaciais e algumas aplicações, com enfoque em curva parametrizada diferenciável e curva parametrizada pelo comprimento de arco, referencial de Frenet, curvatura e o Teorema Fundamental das Curvas Planas. Para tanto, foi realizada uma revisão bibliográfica em livros de Geometria Diferencial e o enfoque em demonstrações e enunciado de aplicações com base no livro Introdução À Geometria Diferencial da autora Keti Tenenblat.

De um modo geral, nas aplicações foi provado que toda curva regular plana de curvatura não-nula implica em torção nula e vice-versa. O traço de uma curva regular contida em uma circunferência de raio  $a$  implica em torção nula e curvatura igual ao inverso do raio  $a$ . Uma curva regular no espaço é uma hélice se existir um vetor  $v$  unitário que forma um ângulo constante com o vetor gradiente, ou ainda, a curva é uma hélice se e somente se a razão entre a curvatura e a torção é constante em que curvatura e torção são não-nulas.

Por fim, foram desenvolvidos comandos no Software Geogebra de aplicações relacionadas aos Capítulos 2, 3 e 4 e após construção deste comandos foram feitas animações no controle deslizante para observar o vetor tangente a um ponto da curva do cardiode, que a curva reparametrizada tem o mesmo traço da curva, curva parametrizada pelo comprimento de arco implica em vetor tangente unitário, análise de que a curva espacial é uma hélice verificado pela definição, curvatura da Espiral Logarítmica, curvatura máxima de uma curva e na última aplicação verificar a parte geométrica do Teorema Local das curvas planas de que toda função diferenciável no plano tem curvatura e a curvatura é a própria função diferenciável.

## REFERÊNCIAS

ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy; NETO, Gregório Silva. **Geometria Diferencial das Curvas Planas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. Citado na página 22.

ARAÚJO, Paulo Ventura. **Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. Citado na página 13.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curva e Superfícies**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012. Citado nas páginas 8 e 13.

COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. **Um curso de Álgebra Linear**. 2. ed. rev. e ampl. São Paulo: EDUSP, 2013. Citado na página 8.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloísio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. Citado na página 20.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo C : Funções vetoriais, integrais curvilíneas, integrais de superfície**. 6. ed. Florianópolis: Pearson Universitários, 2006. Citado na página 13.

GAUSS, Carl Friedrich. **General investigations of curved surfaces**. Translated from the Latin and German by Adam Hildebrandt and James Morehead. Raven Press, Hewlett, N. Y., 1965. Citado na página 17.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. vol. 1. Citado na página 13.

LEITHOLD, Louis. **Cálculo com Geometria Analítica**. 3 ed. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1994. Citado na página 13.

TENENBLAT, Ketiv. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2008. Citado nas páginas 8 e 13.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000. Citado na página 22.