UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LORYANE SANTOS DE OLIVEIRA

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM TAREFAS EXPLORATÓRIAS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2021

LORYANE SANTOS DE OLIVEIRA

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM TAREFAS EXPLORATÓRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman

Coorientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

CORNÉLIO PROCÓPIO
2021

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

FOLHA DE APROVAÇÃO

LORYANE SANTOS DE OLIVEIRA

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM TAREFAS EXPLORATÓRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado às 19:00 no dia 06/05/2021, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Eliane Araman Oliveira
Profa. Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman
(Orientadora)

Henrique Rizek Elias
Prof. Dr. Henrique Rizek Elias

Maria Lucia de Carvalho Fontanini
Profa. Me. Maria Lucia de Carvalho Fontanini

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso”

Dedico este trabalho aos meus amados pais, Rosineide dos Santos Oliveira e Cicero Marcos de Oliveira, por não medirem esforços para que a graduação se tornasse um sonho possível, por me apoiarem em meus momentos de angústia, e por compreenderem que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por ser meu suporte em todos os momentos difíceis, permitindo momentos enriquecedores ao longo da minha vida, proporcionando saúde e muita força para superar todos os obstáculos.

À minha família, por sempre estar ao meu lado e por todo amor depositado em mim. Em especial, agradeço à minha mãe Rosineide, ao meu pai Cicero e à minha irmã Naiane, que sempre acreditaram e me incentivaram em todos os aspectos da minha vida; sem eles, nada disso seria possível.

Aos meus professores, por me proporcionarem conhecimentos durante a minha vida acadêmica.

À minha orientadora, professora Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman e ao meu coorientador professor Dr. André Luis Trevisan, por todo empenho dedicado à realização deste trabalho, por todo incentivo e apoio, por compartilharem muita sabedoria e ensinamentos.

Aos professores da banca examinadora, professor Dr. Henrique Rizek Elias e professora Me. Maria Lúcia de Carvalho Fontanini por terem aceitado o convite e por todas as contribuições para este trabalho.

A Universidade tecnológica Federal do Paraná, pelo apoio financeiro.

As minhas companheiras da república 6 gama, onde tive o prazer de residir e conviver com pessoas maravilhosas, durante todo o período de graduação.

Aos queridíssimos amigos que fiz durante todos esses anos e quero levar para a minha vida toda. Em modo particular: Ana Cristina, Kimberly, Larissa, Maiara, Renan e Ronaldo. Pessoas essas que torceram e estiveram ao meu lado em toda a minha jornada. Assim, como a Nathiely e o Ricardo que foram essenciais

AGRADECIMENTOS

em diversos aspectos pessoais e acadêmicos, deixando a caminhada muito mais leve e feliz.

A Amanda Barretos e Maria Carolina por serem mais que amigas, grandes irmãs, parceiras em todos os momentos, tanto felizes quanto tristes, juntas nos fortalecemos em momentos de dificuldades, me oferecerem sorrisos, companheirismo, muitas festas, diversão, gestos de carinho e em muitas vezes o conforto de um abraço, por vocês meu amor e gratidão eterna.

Em geral, a todos os que estiveram de alguma forma ao meu lado durante essa fase incrível, que Deus em sua infinita bondade abençoe cada um de vocês. Muito obrigada!

RESUMO

OLIVEIRA, Loryane Santos de. **Processos de raciocínio matemático em tarefas exploratórias**. 2021. 60 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

O presente trabalho tem como objetivo analisar e identificar os processos de raciocínio matemático e suas contribuições para a aprendizagem da matemática. Para compor o aporte teórico desta pesquisa, foram realizados estudos pautados em diferentes autores sobre o que é raciocínio matemático, seus aspectos estruturais e seus processos, bem como sua relevância para a aprendizagem matemática. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de caráter interpretativo, realizada por meio da aplicação de uma tarefa exploratória em uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola privada no estado do Paraná, Brasil. A tarefa aplicada, foi resolvida por 30 estudantes, organizados livremente em grupos com três integrantes e constituída por questões que instigassem o raciocínio, proporcionando uma comunicação construtiva entre professor e alunos. Foram realizadas gravações de áudios dos momentos de resolução da tarefa pelos alunos. Os áudios foram transcritos pela autora e compõem o corpus de análise desta pesquisa. Como um dos resultados principais, destacamos a presença, de forma mais evidente e em ambas as discussões, a elaboração de conjecturas e a tentativa de validá-las a partir de envidências empíricas, utilização de exemplos genéricos e, em alguns momentos com o auxílio de autoridade externa da professora. Destaca-se aqui o papel das intervenções da professora em ambos os grupos, na qual os questionamentos foram ações fundamentais para que haja desenvolvimento do raciocínio, apoiando o trabalho do aluno e resistindo ao fornecimento de indicações para o desenvolvimento da resolução.

Palavras-chave: Ensino de Matemática**.** Raciocínio Matemático. Processos de Raciocínio.Tarefas Exploratórias.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Loryane Santos de. **Processes of mathematical reasoning in exploratory tasks**. 2021. 60 f. Course Conclusion Monography (Graduation course) - Degree in Mathematics. Federal Technological University of Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

The present work aims to analyze and identify the processes of mathematical reasoning and its contributions to the learning of mathematics. To compose the theoretical basis of this research, studies were conducted based on different authors about what is mathematical reasoning, its structural aspects and processes, as well as its relevance to mathematical learning. This is an interpretative qualitative research, carried out through the application of an exploratory task in a first year high school class in a private school in the state of Paraná, Brazil. The applied task was solved by 30 students, organized freely in groups of three and constituted by questions that instigate reasoning, providing a constructive communication between teacher and students. We made audio recordings of the students solving the task. The audios were transcribed by the author and make up the corpus of analysis of this research. As one of the main results, we highlight the presence, in a more evident way and in both circumstances, the preparation of conjectures and the attempt to validate them based on empirical implications, use of generic examples and, at times with the aid of external authority of the teacher. Here, the role of the teacher's interventions in both groups is highlighted, in which the questions were fundamental actions for the development of reasoning, supporting the student's work and resisting the provision of indications for the development of the resolution.

Keywords: Mathematics Teaching. Mathematical Reasoning. Reasoning Processes. Exploratory Tasks.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO **10**
2. OBJETIVOS **12**
2.1 Objetivo geral 12
2. 2 Objetivos especifícios 12
3. JUSTIFICATIVAS **13**
4. REFERENCIAL TEÓRICO **15**
5. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS **25**
6. DISCUSSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS **52**
REFERÊNCIAS **56**
ANEXO 1 59

1 INTRODUÇÃO

Desenvolver o raciocínio matemático é um dos grandes objetivos do ensino da matemática (MATA-PEREIRA; PONTE, 2017). No entanto, de acordo com Brodie (2010), por mais que o modo de promover o raciocínio matemático dos alunos seja uma questão importante, é pouco investigado e, em consequência disso, muitos professores ainda não sabem como podem contribuir para o seu desenvolvimento.

É fundamental que, para que o professor promova o raciocínio matemático em sala de sala, o mesmo tenha conhecimento acerca do próprio raciocínio, e também os processos de raciocínio dos seus alunos, pois " tão importante quanto à clareza sobre o que se deseja produzir (o tipo de aprendizagem almejada) é o domínio dos meios que tornam possível essa produção" (SFORNI, 2015, p.4). Ou seja, comprender realmente o que se entende por raciocinar matematicamente e saber quais ações e práticas pedagógicas contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático é uma questão relevante para que o professor contribua para promoção do raciocínio matemático.

As tarefas de investigação e exploração constituem uma das possibilidades para o trabalho em sala de aula com a disciplina de Matemática, e são tidas como potencializadoras no desenvolvimento do raciocínio matemático (PONTE, 2005; PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020). Esse tipo de abordagem é caracterizado pelo fato do professor não explicar tudo, deixando a descoberta e construção do conhecimento por conta do aluno (CABERLINI; GARCIA, 2016), promovendo a comunicação com os seus alunos, o que muitas vezes se difere de uma aula dita "tradicional".

O texto a *priori* está estruturado em 7 capítulos (além das referências), primeiramente por esta introdução, apresentando os fatos que levam ao desenvolvimento dessa pesquisa e a estrutura do trabalho, em seguida por um capítulo em que são apresentados os objetivos e outro com as justificativas.

O quarto capítulo aborda o referencial teórico, sendo apresentados e discutidos diversos estudos nos quais a pesquisa está embasada. Em uma primeira parte, explora caracterizações e tipos de raciocinio matemático, bem comoprocessos envolvidos. Em uma segunda parte, aborda a investigação matemática e o trablaho com tarefas exploratórias.

O quinto capítulo apresenta a metodologia utilizada na pesquisa, procedimentos, participantes, instrumentos, e a tarefa utilizada para o desenvolvimento deste trabalho. Numa fase seguinte, no capítulo 6, são apresentados os resultados da pesquisa, por meio das transcrições realizadas e sua análise. Por fim, haverá há um sétimo capítulo na qual são feitas as considerações finais sobre o tema.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivos Gerais

O presente trabalho tem como objetivo geral analisar e identificar os processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do 1º ano do Ensino Médio ao resolverem uma tarefa exploratória.

Para isso, foi necessário, num primeiro momento, aprofundar os estudos a respeito do processos de raciocínio matemático, analisando as diversas definições pela visão de diferentes autores, os tipos de raciocínio e suas contribuições para a elaboração do conhecimento matemático.

Após estes entendimentos, foi possível aprofundar-se nos processos que compõem o ensino e a aprendizagem para o desenvolvimento do raciocínio matemático, processos esses definidos como conjecturas, generalização, identificação de padrões, comparação, classificação, exemplificação, validação, justificação, provar e provar formalmente.

2.2 Objetivos Específicos

Para atingir o objetivo geral enunciado acima, tivemos os seguintes objetivos específicos:

- Realização de estudos teóricos relacionados ao raciocínio matemático e seus processos.
- Discussão sobre diferentes processos de raciocínio e suas implicações em sala de aula, considerando sua relevância para a aprendizagem Matemática.
- Transcrição de áudios de 2 grupos de alunos contendo diferentes processos de raciocínio e discussões dos mesmos no momento em que resolvem a tarefa exploratória.
- Analise das transcrições à luz da fundamentação teórica estudada.

3 JUSTIFICATIVAS

Um dos grandes desafios da Matemática escolar é desenvolver o raciocínio matemático dos alunos, de acordo com Mata-Pereira e Ponte (2018). Nesse aspecto, o desenvolvimento do raciocínio matemático é visto como fundamental na aprendizagem com compreensão, devendo existir um trabalho incidente desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (VIEIRA; RODRIGUES; SERRAZINA, 2020).

Ao analisar o tratamento dado ao raciocínio matemático diante da Base Nacional Comum Curricular (BNCC – BRASIL, 2018), foi possível compreender, por sua vez, que este documento curricular brasileiro, emprega o termo raciocínio com um significado mais preciso do que em outros documentos (CARNEIRO; ARAMAN; SERRAZINA, 2019). Para os autores Carneiro, Araman e Serrazina (2019), neste documento é possível observar que o termo raciocínio aparece acompanhado de outros termos como conjecturar e justificar, além disso, tem a compreensão do raciocínio matemático como um conjunto de processos, semelhante aos processos de raciocínio identificados por Jeannotte e Kieran (2017).

Wood (1997) considera que, para aprender matemática com compreensão, faz-se necessário entender os conceitos, matemáticos e não matemáticos, percebendo a razão de ser dos algoritmos, de outros procedimentos e os princípios que os regem. Como consequência, para criar oportunidades para o desenvolvimento do raciocínio matemático, os professores precisam criar ambientes que proporcionem oportunidade para pensar, considerando as diferentes maneiras pelas quais diferentes pessoas podem pensar e resolver problemas.

Uma das ações fundamentais que precisam ser consideradas pelos professores, de acordo com NCTM (2009), é o questionamento. Mata-Pereira e Ponte (2018, p.758) entendem que “se as perguntas são habitualmente mais provocatórias, os alunos esperam ter que dar respostas mais complexas e que envolvam processos de raciocínio”.

Neste processo, Wood (1997) também destaca a importância das diferentes interações que criam diferentes contextos de aprendizagem. Assim, as ações do professor precisam oportunizar interações, pois "as aulas onde os alunos expressam os seus pensamentos, explicando-os e justificando-os, constituem ambientes propícios ao desenvolvimento do seu raciocínio matemático" (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p. 470).

Assim, a motivação para realização desse estudo deu-se diante da importância que o raciocínio matemático tem para a aprendizagem matemática, e enquanto futura professora, é primordial inteirar-se sobre o tema, preparando-se assim para uma prática na qual o aluno possa expor e discutir ideias matemáticas, mobilizando diferentes processos de raciocínio, explicando e interpretando os resultados, justificando os argumentos utilizados, o que não costuma ser usual em uma aula "tradicional".

Se a prática docente encoraja a exploração, a promoção de um ambiente colaborativo, enriquece o ensino de Matemática tornando-se relevante para o aluno. Dessa forma o aluno é habituado com a investigação e se habilita a construir respostas diante do surgimento de questões em vez de recebê-las prontas, também é essencial para compor este ambiente que o aluno seja estimulado a aceitar diferentes formas de pensamento.

Nesse sentido, essa pesquisa contribuiu, de forma pessoal, para a minha formação ao estudar o raciocínio matemático e seus processos, levando-me a refletir sobre as possibilidades de promover um ensino de Matemática que contribua para a formação do aluno. De modo mais amplo, traz contibuições no âmbito da pesquisa em Educação Matemática, ampliando as compreensões acerca dos processos de raciocínio matemático de estudantes do Ensino Médio, e as possibilidades pedagógicos para sua promoção.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

4.1 Raciocinio matemático: tipos e processos envolvidos

O pensamento do ser humano é constituído por aspectos complexos e irregulares. Diversos autores discorrem sobre o que se entende por raciocinar matematicamente, considerado um aspecto fundamental para a aprendizagem matemática, sendo necessário o incentivo ao seu desenvolvimento ao longo de todo processo de escolarização, iniciando desde os primeiros anos escolares (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; MATA- PEREIRA; PONTE, 2018; STYLIANIDES, 2009).

De acordo com Jeannotte e Kieran (2017, p. 7), o raciocínio matemático é um "processo de comunicação com outros ou consigo mesmo, que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos". Já para Russel (1999, p. 1) na aprendizagem da Matemática, o raciocínio é "o que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos" e é "a ferramenta para compreender a abstração".

Numa perspectiva semelhante, Lannin, Ellis e Elliot (2011) dizem que o raciocínio matemático inclui conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar, refutar caso necessário, desenvolver e avaliar argumentos, baseando-se em um processo evolutivo.

Oliveira (2008, p. 3) usa a expressão raciocínio matemático para referir "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)".

Também para Stylianides (2009) o raciocínio matemático é como um procedimento de inferência, que utiliza informações já conhecidas para obter novos conhecimentos e novas conclusões. Nesse mesmo contexto Aliseda (2003) diz haver uma identificação entre o raciocínio matemático e a inferência lógica, que são características de certeza e monotocidade, ou seja, existem relações entre premissas, conclusões e irrefutabilidade de conclusões obtidas.

Dedutivamente, o raciocínio matemático é definido por Brousseau e Gibel (2005) como sendo uma relação R entre dois elementos, seja definido A e B, tais que, A é uma condição, B uma consequência e R uma relação ou regra. Assim, caso A seja uma condição satisfeita é possível constatar que B é válido.

Nesse mesmo contexto, outros autores fazem ligações entre o raciocínio matemático e a indução, formulando generalizações a partir de certas características comuns em diversos casos, e à abdução, formulando generalizações e estabelecendo relações entre diversos aspectos de determinada situação (RIVERA; BECKER, 2009).

Em linhas gerais, percebe-se que são diversas as perspectivas sobre o raciocínio matemático, o que é entendido por um autor como essencial, pode não ser para outros. Assim, o raciocínio matemático pode dizer respeito tanto à aspectos lógicos, quanto intuitivos, incluindo formulações, consecuções e validação de conclusões.

Do ponto de vista epistemológico, Oliveira (2002) identifica quatro tipos de raciocínio, a constar: a indução, a dedução, a abdução e a transformação, todos constituídos por pontos que fazem referência para a análise do que caracteriza os processos do raciocínio matemático. Esses tipos são detalhados nos parágrafos seguintes.

O primero deles, a indução, segundo Pólya (1954 *apud* MATA-PAREIRA, 2012), inicia-se por meio da observação, a partir da qual se desenvolvem conjecturas a serem testadas futuramente. Outros processos relevantes ocorrem durante a resolução de problemas matemáticos, nomeados por generalizações, especializações e analogias. Particularmente, as analogias estão relacionadas com a indução; nesse sentido, Oliveira (2002, p.174) destaca o fato de que " quem induz faze-o por analogia, i.e., a pessoa infere a semelhança das conclusões a partir da diferença dos fatos". Também é por meio do raciocínio indutivo que as conjecturas são desenvolvidas, possibilitando a verificação a partir de demonstrações matemáticas (PÓLYA, 1954a apud MATA-PEREIRA, 2012).

O segundo deles, a dedução, ocupa uma área fundamental na Matemática por ser um raciocínio formal relacionado com a lógica, constituindo-se "o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático" (OLIVEIRA, 2002,p. 178). De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 89) "raciocinar envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento". Nesse mesmo aspecto, "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas” (OLIVEIRA, 2008, p. 7).

O terceiro, a abdução, envolve a elaboração de hipóteses sobre um determinado fenômeno, envolvendo a formulação de conjecturas plausíveis (RIVERA; BECKER, 2009). Com isso, partem de relações entre fenômenos que se cruzam em uma determinada situação, sendo utilizadas para explicar algo. Oliveira (2002, p.176) defende que “a demonstração (referente ao raciocínio dedutivo) esconde o trabalho do matemático que é mais relevante de um ponto de vista epistemológico, ou seja, a criação matemática, propriamente dita”. Nesse sentido, o raciocínio abdutivo também permite além de gerar hipóteses explicativas, avaliar hipóteses com o intuito de inferir uma melhor explicação (OLIVEIRA, 2002).

O último tipo, o raciocínio transformativo, para Oliveira (2002), tem duas fortes ideias: a operação e o dinamismo. É um tipo de raciocínio desenvolvido por meio de imagens mentais viabilizando uma explicação ou validação, com possibilidade de se chegar ou não uma conclusão, validando conhecimento e desempenhando um papel de criação. Nesse contexto, as imagens mentais que estão presentes no pensamento são dinâmicas permitindo explorar diversas situações matemáticas, levando Oliveira (2002) a defender este tipo de raciocínio como mais rico que os outros tipos.

Considerando os tipos de raciocínios analisados, nota-se que o raciocínio indutivo, dedutivo e abdutivo apresentam características facilmente identificáveis em sala de aula. O raciocínio transformativo, por sua vez, por ser baseado em imagens mentais, torna-se dificilmente observável.

Outro aspecto presente na literatura a respeito do raciocínio matemático discute os seus processos. De acordo com Morais, Serrazina e Ponte (2018 p. 556) “alunos de diferentes anos escolares podem se envolver em processos de raciocínio matemático”. Com isso, as formas de apresentação desses processos assumem diferentes contextos escolares. Jeannote e Kieran (2017) identificaram oito processos. São mais comuns, no âmbito da Educação Básica: conjecturar, comparar, classificar, identificar padrões e generalizar. Existem também, processos relativos à validação, que são justificar e provar, e ainda exemplificar, dando suporte aos outros processos.

O processo de conjecturar envolve formular uma hipótese acerca de uma relação matemática geral, baseando-se em evidências incompletas. Para

Lannin, Ellis e Elliot, (2011) as conjecturas são constituídas por relações matemáticas que desenvolvem afirmações com a finalidade de serem verdadeiras, mas que são desconhecidas. Para Morais, Serrazina e Ponte (2018, p.555), conjecturar consiste em “um processo que envolve raciocínio sobre relações matemáticas, desenvolvendo declarações, nomeadas como conjecturas, que requer maior exploração para verificar se são verdadeiras ou não verdadeiras”. Para Jeannote e Kieran (2017) conjecturar envolve processos ciclícos de: enunciar a conjectura, verificar os casos e exemplos existentes, tentar refutar e encontrar motivos para a conjectura ser verdadeira.

Os alunos desenvolvem conjecturas sobre conceitos e habilidades, sejam elas faladas ou não. Essas suposições exigem exploração e evidências para apoiá-las; com isso, as conjecturas servem de ponto de partida para determinadas atividades matemáticas e o raciocínio matemático (PÓLYA,1954 *apud* MATA-PEREIRA, 2012).

A comparação, de acordo com Jeannote e Kieran (2017), procura construir narrativas sobre objetos ou relações matemáticas, por meio da percepção de semelhanças e diferenças, processo este que pode ocorrer com outros processos como generalizar, identificar ou validar. Já o processo de classificar possibilita justificar conjecturas de maneira objetiva, baseando-se em propriedades e definições matemáticas “tendo como referência a identificação das suas características comuns – os atributos críticos. Consoante esta organização, um objetivo pertencente a uma classe se respeitar todos os seus atributos críticos” (BRUNHEIRA, 2019, p.24), sendo estabelecidos por definições, relacionando-se como outros processos de raciocínio, principalmente o processo de generalizar.

O processo de identificar padrões é semelhante à ideia de conjectura, sendo que ao realizar a idenficação de padrões, pode-se chegar a uma conjectura (STYLIANIDES, 2008), ou ainda a uma generalização, por meio da identificação de pontos comuns em casos diferentes, com foco em uma ideia ou aspecto particular de um problema, pensando nele de maneira abrangente, de acordo com o entendimento de Lannin, Ellis e Elliot (2011).

Mata-Pereira e Ponte (2017) entendem que as generalizações possibilitam reconhecer uma propriedade válida para certo conjunto de objetos continua sendo válida para uma variedade mais ampla de objetos. Para os autores, as generalizações são “conjecturas com características próprias” (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018, p. 783).

Na ciência, a generalização, enquanto processo de raciocínio, tem papel fundamental, pois é vista como base para construção matemática. Carraher, Martinez e Schliemann (2008) defendem a promoção e compreensão da transição entre as generalizações, que são baseadas em observações empíricas e casos particulares e as generalizações baseadas em coerências lógicas. Neste âmbito, baseando-se em observações empíricas e casos particulares, são considerados três tipos de generalizações: factual, contextual e simbólica.

O surgimento da generalização factual ocorre quando a observação empírica ou casos particulares são aplicados em novos casos particulares, sem qualquer tipo de alteração do conjunto de objetos a serem utilizados. A generalização contextual, mesmo baseada em observação empírica ou casos particulares pressupões novos conjuntos de objetos matemáticos. Já a generalização simbólica envolve em sua formulação o entendimento e utilização da linguagem algébrica (MATA-PEREIRA, 2012).

Kieran (2007) defende a importância de promover a formulação de generalizações diante dessas diversas fases, pois acredita que parte da compreensão, no que diz respeito aos objetos algébricos, vem das atividades de generalizações em Álgebra. Diversas investigações apontam que os alunos tendem a focar no que é familiar, dando pouca atenção aos conceitos matemáticos envolvidos, o que possivelmente, proporcionariam progresso. Contudo, nos poucos casos em que as estratégias se apoiam em conceitos matemáticos relevantes, o raciocínio é dominado. Neste contexto, para formular generalizações, faz-se necessário que situações exploratórias sejam associadas a propostas passíveis de generalizar, a um conjunto dados mais alargado (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008).

O processo de validação, segundo Jeannote e Kieran (2017), tem como objetivo alterar valores epistêmicos de narrativas, sendo feita de três formas: justificar, provar e provar formalmente. Para as autoras, justificar é um processo de procura de dados, afirmações e suporte para modificar o valor epistêmico. Justificar é um processo social, podendo assumir dois formatos (i) justificar a conjectura que surgiu no processo e (ii) relatar a validade que altera o valor epistêmico (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.12).

Apoiada em procedimentos, propriedades e definições, a justificação tanto quanto a generalização é vista como aspecto central em processo de raciocínio validando matematicamente determinadas afirmações. Cabe ao professor impor situações que promova justificações, enfatizando o "porquê" redirecionando os alunos ao contexto de determinada situação. Nesse sentido, diversas investigações realizadas em diversos países indicam que "apenas a um nível avançado os alunos reconhecem a necessidade de um raciocínio convincente com base num conjunto de pressupostos explícitos" (GALBRAITH, 1995, p. 412). Assim, promover o raciocínio implica em intervenções que levem os alunos a dar sentido a justificações já existentes, contemplando o poder matemático.

Lannin (2005) apresenta cinco niveís de complexidade das justificações: (i) não justificar; (ii) apelar à autoridade externa; (iii) utilizar evidência empírica; (iv) utilizar de um exemplo genérico e (v) justificar dedutivamente. Em termos gerais, a justificação tem como papel validar e compreender resultados, dando legitimidade a atividade matemática, em recorrência disso, pode-se associar o conceito de justificação ao conceito de demonstração, por terem contextos próximos.

Os processos de provar (de modo informal) e provar formalmente (elaborando uma "prova" matemática) são usados pelos indivíduos para responder questionamentos da veracidade de uma afirmação; provar algo é visto como uma atividade matemática na qual os indivíduos tentam justificar suas afirmações por meio de argumentos dedutivos e para autoras, alterando o valor epistêmico de provável para verdadeiro (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

Apoiando os demais, o processo de exemplificar auxilia o processo de generalizar e justificar, envolvendo a busca/elaboração de exemplos que apoiam tanto a pesquisa de semelhança, como a validação, processo esse, que permite a exploração de problemas com o objetivo de conjecturar, verificar e reformular conjecturas (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

Finalizando, detacamos a necessidade do ensino ser organizado de forma desenvolver estes diferentes tipo de raciocínio, e a investigação e o trabalho com tarefas exploratórias, que serão detalhados na continuidade do texto, mostram-se como uma alternativa nessa direção.

4.2 Investigação matemática e tarefas exploratórias

A investigação matemática constitui uma das tendências em Educação Matemática, e tem sido promissora para a construção do conhecimento. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2015, p.10), “em numerosas experiências já empreendidas com trabalho investigativo, os alunos têm mostrado realizar aprendizagens de grande alcance e desenvolver um grande entusiasmo pela Matemática”.

A utilização de tarefas exploratórias para a sistematização de aprendizagem é uma das caracteríticas marcantes da investigação matemática. Diante de inúmeras definições formuladas para a expressão “tarefa” a mais comum segundo Ferreira (2011, p.843) diz respeito ao “trabalho que se deve concluir em determinado prazo”, No contexto escolar, as tarefas são utilizadas por diferentes áreas com o intuito de fortalecer conhecimentos já adquiridos.

Diante de “exercícios”, o aluno estará praticando conhecimentos supostamente adquiridos por meio de ensino dito direto, caracterizado como um desafio reduzido. Todavia, é fato que essa combinação entre exercícios e ensino direto, não é a mais promissora (CABERLINI; GARCIA, 2016).

Contrapondo a ideia de ensino direto, tem-se o ensino designado por alguns autores de “exploratório”, caracterizado pelo fato do professor permitir a descoberta e a construção do conhecimento por conta do aluno. As práticas de ensino exploratório contribuem para a construção de generalizações matemáticas, promovendo aos alunos a descoberta e disseminação de conhecimento (PONTE, 2005). Para tal, explorar tarefas abertas proporcionando momentos de discussões entre grupos, encorajando-os a partilhar suas ideias, incentivando-os a escrever e partilhar as variadas versões do seu raciocínio são fundamentais para a construção do conhecimento.

> A realização de tarefas abertas, de caráter exploratório e investigativo é um elemento marcante neste tipo de ensino, mas importância idêntica assumem os momentos de discussão em que os alunos apresentam o seu trabalho, relatam as suas conjecturas e conclusões, apresentam as suas justificações e questionam-se uns aos outros e que o professor aproveita para procurar que se clarifiquem os conceitos e procedimentos, se avalie o valor dos argumentos e se estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática. Os momentos de discussão constituem, assim, oportunidades fundamentais para

> negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento (PONTE, 2005, p. 16).

Diversos estudos apontam a resolução de problemas e as tarefas exploratórias como fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio matemático, ou seja, estudos que promovem comunicação, conexões matemáticas e argumentação.

Segundo Boavida e seus colaboradores (2008, p. 7), tais tarefas proporcionam uma " visão global da matemática e uma aprendizagem baseada na compreensão de conceitos e no desenvolvimento do raciocínio matemático" . É fundamental que sejam propostas aos alunos tarefas desafiadoras, para que desperte o raciocínio dos mesmos e incentive a darem sentido a justificações, enfatizando a explicação do "porquê". O ensino exploratório possibilita promover "uma compreensão vivida dos processos matemáticos envolvidos numa investigação e facilita, igualmente, o desenvolvimento do raciocínio na resolução de problemas" (HENRIQUES, 2010, p. 373).

Baxter e Willians (2010) descrevem o ambiente deste tipo de ensino da seguinte forma: apresentam a tarefa aos alunos, os alunos trabalham nesta tarefa enquanto os professores circulam incentivando e questionando o raciocínio, os alunos apresentam suas resoluções para a turma e o professor sistematiza as apresentações. Os mesmos autores afirmam que as aulas que são utilizadas esses mecanismos os professores falam menos e os alunos têm mais oportunidades de comunicação.

O questionamento é uma das ações fundamentais do professor para que haja desenvolvimento do raciocínio, resistindo ao fornecimento de indicações para resoluções, apoiando o trabalho do aluno (BRODIE, 2010). Contudo, o professor não deve deixar os alunos sem qualquer mediação, sejam elas individualmente ou em grupo, pois "não trás necessariamente apoio suficiente para desenvolver o seu raciocínio " (BRODIE, 2010, p.20).

Brodie (2010) também salienta que os alunos devem ser provocados e encorajados à partilhar suas ideias, escrever e realizar comunicações sobre o modo de pensar, incentivando-os à ouvir colegar e construir pensamentos. Para Wood (1999) o professor deve explorar situações de desacordo com os alunos, desenvolvendo a capacidade de argumentação dos mesmos, consequentemente, o raciocínio matemático.

Ao que diz respeito à justificação, Brodie (2010) enfatiza que o professor não deve requisitar somente justificações aos alunos, mas também justificar suas próprias ideias. Por outro contexto, de acordo com Galbrait (1995) os professores sentem dificuldade em ensinar processos formais de raciocínio, processos esses, denominados como justificação formal ou demonstração.

A demonstração passa por quatro fases de abordagens pelo professor: (i) discutir demonstrações completas; (ii) indicar quais os aspectos lógicos a considerar; (iii) fazer uma demonstração e (iv) desencadear os alunos a fazer uma demonstração, usando a mesma estrutura lógica que anteriormente. Todavia, essas abordagens se tornam eficazes no processo de raciocínio próximos de demonstrações, quando a justificação promovida na discussão, possibilita ao aluno “oportunidades para partilhar, debater e clarificar o seu raciocínio” (GALBRAITH, 1995, p.416).

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

5.1 Caracterização e contexto da pesquisa

A presente pesquisa qualitativa apresenta caráter interpretativo e se insere no âmbito de uma pesquisa maior, também qualitativa e interpretativa. O contexto da qual provém os dados para análise neste trabalho inserem em um projeto de pesquisa maior, intitulado "Aprendizagem profissional do professor de Matemática e o ensino de Álgebra: um estudo envolvendo os contextos da escola básica e da universidade", e seu objetivo principal configura-se em compreender como se constitui e explicar como se desenvolve a aprendizagem profissional do professor de Matemática no que tange ao ensino de Álgebra.

Neste trabalho, em particular, analisamos o material proveniente de aulas desenvolvidas como parte do projeto supracitado, envolvendo estudantes do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, câmpus Cornélio Procópio e Londrina. Esse processo ocorreu nas disciplinas "Ensino de variação de grandezas" e "Saberes docentes e formação profissional", ministradas pelo coorientador deste TCC, realizadas em 15 sessões de 3 horas cada, ao longo do 1º e do 2º semestre de 2018, respectivamente.

O material analisado neste trabalho(detalhado a seguir) foi coletado a partir de uma aula planejada coletivamente no âmbito da disciplina "Saberes docentes e formação profissional", e desenvolvido na aula da professora Cássia (nome fictício), licenciada em Ciências, com habilitações em Matemática, Biologia e Química, e especialização em Educação Matemática, tendo atuado como professora nos iniciais e finais do Ensino Fundamental (desde 1986), Ensino Médio (desde 1990), bem como coordenação e direção de escolas. Realizou a aula em uma turma do 1º ano do Ensino Médio na qual atuava como professora de Matemática em uma escola particular de um município de médio porte do estado do Paraná/Brasil, estando presentes, naquele dia, 30 estudantes, organizados livremente em grupos com três integrantes.

Em seu plano de aula (ANEXO 1), propunha-se uma situação envolvendo a variação na velocidade de leitura das páginas de um livro com objetivo de verificar a capacidade de pensar nas variações de uma magnitude conforme outra magnitude também varia, de acordo com o Quadro 1.

Quadro 1 – Tarefa proposta aos alunos.

Um leitor mandou, para uma revista, a seguinte análise de um livro que ele havia acabado de ler, com muitas páginas: “O livro é eletrizante, muito envolvente mesmo! A cada página terminada, mais rápido eu lia a próxima! Não conseguia parar!”

1. Desenhe um gráfico que represente o número *n* de páginas que esse leitor concluía pelo tempo decorrido *t*, mas de modo a refletir corretamente a mensagem do leitor à revista. Não se preocupe com detalhes, mas com a tendência geral do gráfico. Explique brevemente como pensou.

2. Se afirmarmos que o livro tem 400 páginas e que o leitor levou três dias para ler o livro inteiro, quantas páginas aproximadamente ele leu por dia?

3. Supondo que o livro tenha 120 páginas e o leitor leu 15 páginas em uma hora, quantas horas ele levou para terminar a leitura do livro?

4. É possível construir uma fórmula matemática que represente a relação da construção do gráfico? Em caso afirmativo, escreva a fórmula matemática.

Fonte: arquivo do grupo de pesquisa.

5.2 Procedimentos para coleta e análise de dados

Os 30 estudantes foram organizados em 10 grupos com 3 integrantes cada, e em cada grupo foi deixado um gravador para registrar as discussões ao longo da resolução da tarefa. A professora orientou que as equipes deveriam priorizar a resolução do item (1), e os demais seriam explorados quando a equipe julgasse tê-lo concluído. A professora então circulou livremente pela sala, acompanhando o trabalho das equipes e fazendo algumas intervenções, quando julgava necessário. Ao final do tempo combinado para esse trabalho (uma aula de 50 minutos), as equipes entregaram o registro escrito com suas resoluções aos 5 itens da tarefa (Quadro 1). Após a professora convidou algumas equipes para compartilhar suas resoluções ao item (a), orquestrando uma discussão coletiva entre os estudantes.

Todos os grupos que resolveram a tarefa foram capazes de mobilizar diferentes processos de raciocínio, estabelecendo algum tipo de conjectura e buscando elementos para validá-la ou refutá-la. Na intenção de reconhecer uma maior variedade de processos de raciocínio que foram mobilizados, tomou-se por critério para análise a escolha de dois grupos na qual houve um maior envolvimento dos estudantes na "apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados" (RODRIGUES; MENEZES; PONTE, 2018, p. 399). Nosso foco está na resolução do item (a) da tarefa.

Consideramos como material de análise o áudio de cada uma das equipes, e o protocolo escrito entregue ao final, com o esboço do gráfico solicitado no item (a). Ao longo da discussão, as equipes elaboraram representações intermediárias, mas que infelizmente não compõem seu protocolo escrito. Ao longo da transcrição, os integrantes da equipe remetem a esses representações. Quando possível, os pesquisadores apresentam algumas hipóteses a respeito delas.

Para análise dos áudios, a pesquisadora inicialmente os transcreveu integralmente. Nos dois grupos em análise, houve uma primeira parte da discussão correspondendo ao trabalho autônomo dos alunos e, a certa altura do diálogo, a professora passa a participar. Considerando o objetivo deste trabalho, a partir dessa transcrição inicial, a pesquisadora procurou identificar os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos ao resolverem uma tarefa exploratória. Inicialmente, fez um identificação inicial, em diálogo com outra pesquisadora do grupo, que também está explorando essa temática em seu TCC. Na continuidade, compartilhou sua categorização inicial com uma estudante de mestrado, que contribuiu com algumas sugestões e ajustes. Por fim, em parceria com o orientador e coorientador deste trabalho, foram feitos ajustes finais nessa categorização.

A seguir, com base nos processos identificados, seguiu-se uma fase de análise dos mesmos, apresentada no capítulo seguinte. Para tal, as transcrições foram separadas em trechos, na qual uma temática dentro da discussão parecia "iniciar e finalizar", dando origem a um novo foco na continuidade da discussão. A cada um desses trechos atribuiu-se um rótulo, que buscava sintetizar do que se tratava aquele trecho. Finalizando, são realizadas discussões desses dados em articulação com o referencial teórico, apresentadas no capítulo final.

6 ANALISE DE DADOS

Neste capítulo, são apresentadas as análises realizadas acerca dos processos de raciocínio de cada um dos dois grupos (aqui denominados Grupo 1 e Grupo 2), a partir dos trechos no qual a transcrição da discussão foi organizada. Os integrantes de cada uma das equipes são denominados Aluno 1, Aluno 2 e Aluno 3, numerados conforme sua apresentação no início da gravação.

6.1 Análise do Grupo 1

Inicialmente, os alunos realizam a apresentação de seus nomes, dando início a gravação da aula, posteriormente, fazendo a leitura do item (a) da tarefa proposta pela professora (Quadro 1).

Trecho 1 – Uma primeira leitura da tarefa

[1.1] Aluno 1: Vamos ler ... aquelas responsáveis né.
[1.2] Aluno 2: Vocês querem colocar o nome?
[1.3] Aluno 1: Pode colocar
[1.4] Aluno 2: Aah, depois eu escrevo o nome ...
[1.5] Aluno 1: Quem quer ler?
[1.6] Aluno 3: Eu leio ...
[1.7] Aluno 3: Um leitor mandou para uma revista a seguinte análise de um livro que ele havia acabado de ler com muitas páginas, o livro é eletrizante, muito envolvente mesmo, a cada página terminada mais rápido eu lia a próxima, não conseguia parar … Desenhe um gráfico que represente o número n de páginas que esse leitor concluía pelo tempo decorrido t, mas de modo a refletir corretamente a mensagem do leitor a revista, não se preocupe com detalhes, mas com a tendência geral do gráfico.
[1.8] Aluno 1: ahh, então não precisa de número, só fazer meio que ... função de tempo.

Neste primeiro trecho, observa-se que os alunos do grupo buscam realizar um primeiro entendimento de como poderá ser resolvido a tarefa. Inicia com a leitura do enunciado, que leva a primeiro entendimento da situação. Esse entendimento pode ser definido como a elaboração das primeiras conjecturas, em que, por meio de conhecimentos prévios, criam a possibilidade de uma informação ser verdadeira ou não, podendo validá-la no decorrer da resolução da tarefa. Essas conjecturas, a partir da fala final de A3 em [1.8], incluem: (i) uma hipótese de que não são necessários valores numéricos para resolver a tarefa e;

(ii) a questão envolve uma função, na qual uma das variáveis é o tempo.

Trecho 2 – algumas escolhas na representação inicial

[2.1] Aluno 2: vocês têm régua?
[2.2] Aluno 1: eu tenho ...
[2.3] Aluno 1: deixar pra aluna 2 né, já que ela não ta fazendo nada.
[2.4] Aluno 1: (risos) grupo irresponsável.
[2.5] Aluno 2: tem que desenhar aqui também?
[2.6] Aluno 3: tem que usar rascunho também será? ...
[2.7] Aluno 1: não sei se é obrigado usar ...
[2.8] Aluno 2: é um gráfico assim ...[apresenta algum esboço inicial]
[2.9] Aluno 1: ahhh, não precisa ser grande não ...

A partir do primeiro entendimento do enunciado da tarefa, são realizadas suposições de como devem resolver o problema, questionando o fato de terem que desenhar e usar rascunho. Não há processos de raciocínio explícitos nesse trecho, apenas escolhas feitas para construir o esboço solicitado. Porém, ao mencionar a régua [2.1], Aluno 2 poderia ter elaborado uma conjectura (não explicitada aos demais) de que o gráfico é uma reta. Ou apenas estivesse pensando em utilizá-la para representar os eixos coordenados. De qualquer modo, há um entendimento compartilhado por todos os integrantes do grupo de que um gráfico é uma curva representada em um sistema de dois eixos.

Trecho 3 – é uma reta?

[3.1] Aluno 2: tá, vai ser um gráfico, cada vez ele lia, mais ele ia mais rápido ...
[3.2] Aluno 3: esse é o tempo ... [apontando para um dos eixos]
[3.3] Aluno 2: só isso?
[3.4] Aluno 2: mas daí tem que fazer a reta crescente? Ou ...
[3.5] Aluno 1: não, mas se fosse só pra desenhar isso, era muito fácil.
[3.6] Aluno 2: é, não sei.

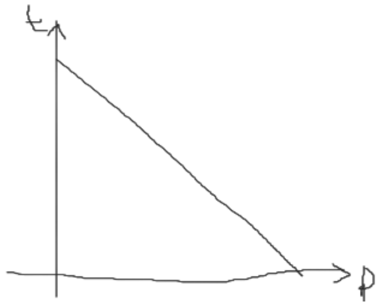
Para Aluno 3, em [3.2],a situação em análise envolve duas grandezas que se relacionam: o número de páginas e o tempo. Assim, uma das hipóteses que havia sido elaborada no trecho 1 (de que uma das variáveis era o tempo), foi validada pelos alunos com base em evidências empíricas. Dúvidas surgem diante da resolução da tarefas, "será que é uma reta crescente?" "Mas será que é só pra desenhar isso?" "Se fosse seria facil". Tais dúvidas formam uma conjectura, de que o gráfico seria uma reta, e de que essa reta é crescente, constiutindo suposições que mais adiante podem ser validadas ou não.

Trecho 4 – Posicionando as variáveis nos eixos

[4.1] Aluno 1: explique brevemente, com atenção ... é o mais difícil de fazer.
[4.2] Aluno 1: não, agora a gente tem que desenhar a reta, porque aqui é o número de páginas certo? Aqui é o tempo, vai ter que fazer assim, não é?[apontando para um dos eixos, faz um esboço]
[4.3] Aluno 2: não, eu acho que é assim [faz outro esboço], porque aqui vai aumentando o número de páginas.
[4.4] Aluno 1: e a cada página que ele lia, mais tempo ... é menor o tempo, não é?
[4.5] Aluno 2: mais rápido eu li, então o tempo vai diminuindo ...
[4.6] Aluno 1: aah, então é assim, decrescente.
[4.7] Aluno 2: é.
[4.8] Aluno 1: então. (risos)

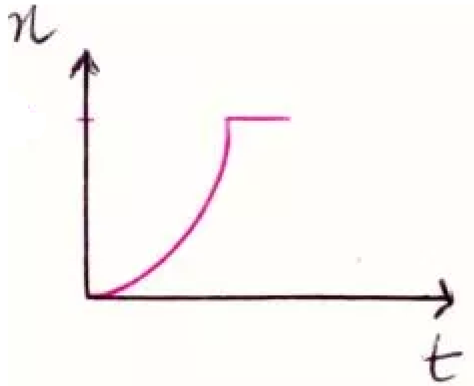
Neste trecho, os alunos discutem a respeito do posicionamento das variáveis nos eixos do sistema coordenado. Uma conjectura é feita pelo Aluno 1, em [4.2], e em seguida é refutada e reformulada por Aluno 2 em [4.3], justificando que “vai aumentando o número de páginas”. Outra conjectura é elaborada, com relação à variável tempo: “ o tempo vai diminuindo [4.5]. Logo, “é decrescente” [4.6]. Entendem o comportamento do gráfico e que ele varia de forma decrescente, com isso, tentam validar esse pensamento. Podemos inferir, aqui, que o esboço considerado nesse momento assume o tempo de leitura da página como variável independente, e o número da página como variável dependente, de modo que, à medida que o número da página aumenta (avançamos na leitura do livro), o tempo para sua leitura vai diminuindo (um possível esboço é apresentado na Figura 1). Tal gráfico difere daquele elaborado pela maioria das demais equipes, e da possibilidade que haviam sido considerada pela professora em seu planejamento da aula (um gráfico na qual o tempo acumulado de leitura do livro cresce à medida que avançamos na leitura – Figura 2).

Figura 1 – Possível gráfico elaborado pela equipe



Fonte: material do grupo de pesquisa.

Figura 2 - Gráfico que relaciona o número o tempo acumulado e o número de páginas.



Fonte: material do grupo de pesquisa.

Trecho 5 – Validando o esboço

> *[5.1] Aluno 1: daqui pra cá [possivelmente, de cima para baixo], ta certo, o tempo ta diminuindo, porque é de baixo pra cima o tempo e de lá pra cá [possivelmente, da esquerda para direita], ta certo, e o número de páginas, ta certo!*
> *[5.2] Aluno 1: eu acho, e o que você acha? Aluno 2 ?*
> *[5.3] Aluno 2: o que você acha ?*
> *[5.4] Aluno 2: também acho ...*
> *[5.5] Aluno 1: por que como foi seu pensamento? porque assim ó, vamos supor aqui é ...*
> *[5.6] Aluno 1: o tempo vai diminuindo ...*
> *[5.7] Aluno 1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ai aqui a página 1, 2, 3, 4, 5, 6 se o tempo*

aqui começou no 6, o tempo ta diminuindo, hora que ele chegar aqui, o tempo vai chegar no 0, e o número de páginas vai aumentando, porque quanto mais você vai lendo, mais páginas vai aumentando, então.
[5.8] Aluno 3: faz sentido.

Os alunos tentam validar o gráfico utilizando a ideia de que quanto mais você lê, menor é o tempo de leitura das páginas, e as páginas vão aumentando [5.1]. A partir dessa análise, validam utilizando evidência empírica que o número da página é a variável independente, e o tempo é a dependente variável deste gráfico. Com isso, assumem que no decorrer da leitura do livro, o tempo de leitura de cada página vai diminuindo, levando a conclusão de que a variável dependente é crescente, e a variável tempo é decrescente. Utilizando também exemplos numéricos genéricos para complementar sua justificativa, em [5.7]. A representação dessa relação por meio de uma reta não foi justificada, mas apenas "assumida" pela equipe como verdadeira.

Neste trecho, ao elaborarem conjecturas e acreditarem na veracidade das mesmas, os alunos tentam concluir que seu pensamento está correto, ou seja, validar essa hipótese. Assim, após o grupo analisar todas as hipóteses, entrar em um consenso e entenderem que o gráfico se comporta de maneira decrescente, validam essa informação. A discussão prossegue a partir da interação que ocorre com a professora, solicitando que o grupo explique como pensou, conforme trecho transcrito na continuidade.

Trecho 6 – Explicando para professora

[6.1] Professora: o que vocês pensaram meninas?
[6.2] Aluno 2: vai, explica pra ela ... (risos)
[6.3] Aluno 1: eu pensei assim óh! Porque o tempo, ele vai aumentando, só que, aqui no gráfico ... só que aqui, ele vai passando mais rápido a cada página, então aqui a gente vai aumentando o número de páginas que é o tanto que ele vai lendo, e o tempo como vai passando ele vai ter que ir abaixando.
[6.4] Professora: tá, então aqui você colocou no eixo do x o número de páginas.
[6.5] Aluno 1: isso.
[6.6] Professora: aí quando você toca aqui o eixo do x, ele vai chegar no máximo de páginas quando não tem mais tempo, acabou o livro. Só que vocês não estão vendo isso como uma função, o gráfico de vocês ficou uma reta, mas uma função o que que vocês acham que representa esse gráfico? Que função que é essa?
[6.7] Aluno 3: uma função afim?

[6.8] Professora: uma função afim?
[6.9] Aluno 3: do primeiro grau?
[6.10] Professora: então você acha que em um intervalo de tempo ele ta lendo sempre a mesma quantidade de páginas?Não sei, é só pra vocês pensarem, pode ter várias representações, porque ele diz que o livro é eletrizante, cada vez que ele lê, ele quer ler mais, e mais rápido, quando a gente pensa em uma função afim, que é uma reta, a taxa de variação é sempre constante, será que isso é uma função constante?

A partir do pedido de explicação feito pela professora, o Aluno 1 explica a escolha feita pela equipe [6.3], e justifica o fato do gráfico ser descrecente (o tempo está "abaixando"). A professora, então, questiona o grupo em [6.6] acerca da intersecção do gráfico com o eixo x, fornecendo algumas informações que instigam o raciocínio, fazendo com eles, por meio de suas próprias ideias, tentem verifificar se o pensamento está correto.

Os alunos desenharam uma reta e concluíram que era uma função afim. A professora então questiona em [6.10] se eles acham que em um intervalo de tempo, eles estão sempre lendo a mesma quantidade de páginas? A partir disso, novas conjecturas são criadas para serem validadas ou invalidadas.

Trecho 7 – Não é uma reta?

[7.1] Aluno 1: então não é uma função afim.
[7.2] Professora: não. O que será que é?
[a professora vai atender outra equipe]
[7.3] Aluno 1: vamos ter que fazer assim né, a mesma coisa, só que é só fazer assim né? [faz algum esboço no papel]
[7.4] Alunos 2, 3: não sei... risos
[7.5] Aluno 1: tipo fazer assim, invés de ser reto, porque ela disse que se for reto, não varia ... se for assim.
[7.6] Aluno 2: e ele ta falando, quanto mais ele lê, mais ele quer ler, então não pode ser uma reta.
[7.7] Aluno 1: quanto mais ele lê, mais ele quer ler?
[7.8] Aluno 2: é quanto mais ele lê, mais...
[7.9] Aluno 1: ta, eu entendi, eu entendi.

Neste trecho, observa-se que os questionamentos anteriores da professora foram fundamentais para a formulação de novas conjecturas. Anteriormente, havia perguntado se eles achavam se em intervalos de tempo iguais está sendo lida sempre a mesma quantidade de páginas [6.10]. Com isso, forneceu algumas informações, incentivando a explicação, ou seja, guiando e apoiando a maneira de pensar dos alunos, encorajando - os a elaborarem novas conjecturas e buscarem meios para justificá-las. Anteriormente, haviam "assumido", justificar, que a representação era uma função afim (ou função do primeiro grau). Embora tenha instigado os alunos a repensarem esse aspecto, a fala da professora no sentido de confirmar que gráfico não era uma reta foi justificada, em um primeiro momento, a partir de sua autoridade externa [7.2]. Tal fato levou os alunos a elaborem conjecturas sobre como realmente seria então o gráfico, analisando agora com mais cuidado a hipótese, presente no enunciado da tarefa, de que quanto mais o leitor lê, mais ele quer ler.

Trecho 8 – É uma parábola!

[8.1] Aluno 1: então não pode ser reta!
[8.2] Aluno 3: não pode ser reta, porque não é constante.
[8.3] Aluno 3: então e se a gente fizer assim... uma parábola.
[8.4] Aluno 1: é, então.
[8.5] Aluno 2: você ta fazendo uma semi parábola.
[8.6] Aluno 3: semi parábola ... (risos)
[8.7] Aluno 1: então eu acho que é isso ...
[8.8] Aluno 3: mas tem que desenhar ela pra cima ou pra baixo?
[8.9] Aluno 1: não sei.

Em [8.1] e [8.2], os alunos utilizam evidência empírica para validar a conjectura de que o gráfico não é uma reta, e passam a considerar outras possibilidades. Aluno 3 então apresenta um novo esboço, possivelmente parte de uma parábola: "e se a gente fizer assim... uma parábola?" [8.3], ou seja, uma nova conjectura sobre como deve ser o formato do gráfico. Os alunos possivelmente reconhecem sua representação como uma parábola por se tratar de um dos poucos tipos de curvas que eles conheciam até aquele momento. Entretanto, não há justificativa que faça uso do conceito matemático de parábola. Eles validam esse formato, com base em evidência empírica. A partir surgem dúvidas referentes à sua concavidade.

Trecho 9 – Novamente, explicando para professora

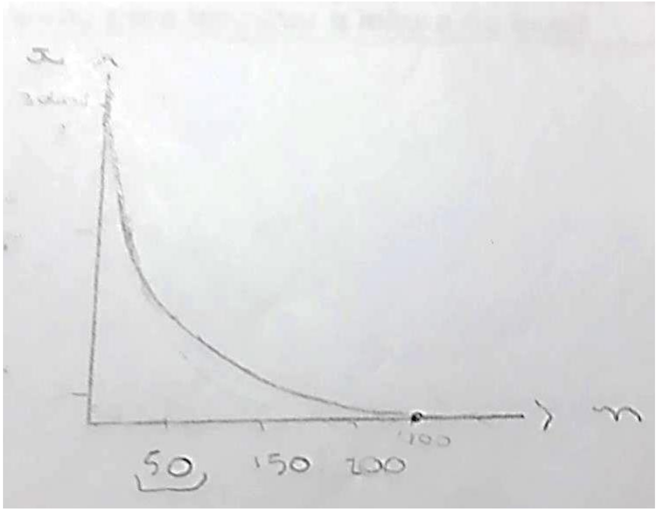
[9.1] Professora: o que ele ta dizendo?
[9.2] Aluno 1: que quanto mais ele lê, mais rápido ele quer ler, porque o livro é eletrizante ...
[9.3] Professora: então como você desenharia esse gráfico, sem valores? sem você pensar em números, mas pensar nessa velocidade da leitura?
[9.4] Aluno 3: uma parábola?

[9.5] Professora: e como que você vai desenhar essa parábola?
[9.6] Aluno 1: é isso que a gente tava discutindo agora.
[9.7] Aluno 2: a gente tava em dúvida se ela seria pra baixo ou pra cima, mas acho que seria pra cima, porque quanto mais ele lê, mais rápido.
[9.8] Aluno 1: não teria que ser assim [faz um esboço no papel], porque o tempo ele vai diminuindo, porque ele começa a ler mais rápido ... invés de ser assim.
[9.9] Aluno 2: você fala tipo assim?
[9.10] Aluno 1: é, porque o tempo vai passando mais rápido.
[9.11] Aluno 1: então teria que fazer assim.
[9.12] Aluno 2: e o número de páginas vai aumentando porque ele já leu
[9.13] Aluno 3: é.
[9.14] Aluno 1: então eu acho que é assim.
[9.15] Aluno 1: o que você acha aluno 3?
[9.16] Aluno 3: também acho que é assim.

Neste trecho, em que a professora retorna ao grupo e pede que expliquem porque modificaram o gráfico. Em [9.2], Aluno 1 apresenta a justificativa validada no grupo, e a professora então questiona: “Então como você desenharia esse gráfico, sem valores? sem você pensar em números, mas pensar nessa velocidade da leitura?” [9.3]. Em [9.4], Aluno 3 apresenta uma nova conjectura do grupo, de que o gráfico seria uma parábola, pois o tempo vai passando rápido, e não de maneira constante, mas ainda não entendem ainda se a convavidade do gráfico seria para baixo ou para cima.

Nos trechos [9.8] a [9.12], Aluno 1 e Aluno 2 formulam e reformulavam conjecturas a respeito da concavidade da curva, e procuram justificá-las com base em evidência empíricas (“começa a ler mais rápido”, “o tempo vai passando mais rápido”). Baseados no protocolo escrito apresentado pela equipe, e pelo fato de, na continuidade do diálogo, não haver indícios de que o esboço tenha sido novamente modificado, inferiamos que a representação validada pela equipe nessa etapa do diálogo é a representada na Figura 3.

Figura 3 - Gráfico apresentado no protocolo final da equipe 1



Fonte: material do grupo de pesquisa.

Trecho 10 – “Passando a limpo” o esboço

[10.1] Aluno 2: quer desenhar?
[10.2] Aluno 3: não, pode desenhar
[10.3] Aluno 3: toma aluno 1, desenha você, você desenha mais certinho.
[10.4] Aluno 1: só que tipo, a parábola, não é assim?
[10.5] Aluno 1: é só o tempo, não vai crescer de novo.
[10.6] Aluno 2: mas aqui seria o ponto inicial, não seria?
[10.7] Aluno 1: é, mas tipo ... é assim, ele não vai crescer de novo.
[10.8] Aluno 2: ou pode parar aqui né.
[10.9] Aluno 2: quando acabar o livro.
[10.10] Aluno 1: então, quando ele chegar aqui vai ser 0, daí ele vai acabar.
[10.11] Aluno 2: então isso teria que estar aqui, porque assim é o zero, há não ser que...
[10.11] Aluno 1: não quando ele toca aqui é o zero, daí o tempo é zero, porque ele não ta lendo mais.
[10.12] Aluno 2: é... faz sentido.
[10.13] Aluno 1: fazer sentido faz, só não sei se ta certo.
[10.14] Aluno 2: é né (risos)

Ao “passar a limpo” o esboço feito anteriormente e validado pela equipe, um novo aspecto do gráfico, que até esse momento não havia sido discutido pela equipe: os pontos de intersecção da curva (que, para a equipe, foi validada como uma parábola) com os eixos coordenados. Uma conjectura é então explícita: que o ponto na qual a curva interpecta o eixo x (páginas), o tempo de leitura é zero [10.10], com a justificativa de que “ele não está lendo” mais [10.11]. Com base nessa evidência empírica, o grupo validada então essa conjectura.

Trecho 11 – “Eu explico, e vocês escrevem”

[11.1] Aluno 3: eu explico, e vocês escrevem ... não sei explicar
[11.2] Aluno 2: na verdade ela entendeu, você entendeu, não entendeu?
[11.3] Aluno 3: entendi.
[11.4] Aluno 2: então.
[11.5] Aluno 3: ta, mas tem que explicar tipo, o enunciado, ou o gráfico?
[11.6] Aluno 1: não, tem que explicar como que a gente chegou aqui, o nosso pensando, como a gente formulou isso daqui.
[11.7] Aluno 2: é.
[11.8] Aluno 3: ta bom, então é o que a gente falou pra Cássia?
[11.9] Aluno 1: é ... basicamente!
[11.10] Aluno 3: ta, é só explicar isso daí então, que a gente colou a reta [eixo] x como n [páginas], o t [tempo] como y, que o t vai diminuindo, porque vai pra baixo, a gente não colou reta porque não é constante.
[11.11] Aluno 1: o t ta aqui porque ele que varia.
[11.12] Aluno 2: na verdade o número de página também varia, porque vai...
[11.13] Aluno 1: mas ele depende do tempo.
[11.14] Aluno 2: é ... o tempo depende do outro
[11.15] Aluno 3: é.
[11.16] Aluno 2: Ta.
[11.17] Aluno 1: ou se for ao contrário a gente tem que trocar.
[11.18] Aluno 3: e se a gente trocar, o que acontece?

Ao tentar formular uma explicação para ser registrada por escrito para ser entregue à professora, o grupo resgata algumas escolhas feitas no processo de construção do gráfico, e que refletem conjecturas que foram validadas ao longo da discussão, como por exemplo: sobre o número da página ter sido representado como variável indepedente, no eixo x, e o tempo de leitura da página no eixo y, como variável dependente [11.10]. Também remetem-se ao fato de terem optado por uma curva que não é uma reta, porque “não é constante” (referindo-se ao tempo de leitura).

Nesse trecho, surge uma nova conjectura, em [11.17], de que, se os eixos forem invertidos, “algo” tem que ser trocado. “E se a gente trocar, o que acontece?” [11.18]: esse questionamento faz com que eles pensem em outras hipóteses para a representação da situação.

Trecho 12 – Outra representação

[12.1] Aluno 1: daí é o número de página que vai depender do tempo
[12.2] Aluno 3: não, mas daí ficaria assim?
[12.3] Aluno 1: não, só vai mudar aqui, é o número de páginas que depende do tempo.
[12.4] Aluno 1: calma, aqui seria n, aqui seria o tempo, o tempo.
[12.5] Aluno 2: vai aumentando ...
[12.6] Aluno 1: aqui o número de páginas vai aumentando e o tempo vai diminuindo ...
[12.7] Aluno 1: não é?
[12.8] Aluno 2: é, aqui o tempo ta aumentando, o,1 ,2 ,3, ta aumentando.
[12.9] Aluno 3: não, mas daí aqui teria que começar do ...
[12.10] Aluno 1: não aqui, 1,2,3,4 vai diminuindo, porque o gráfico é assim, certo? [faz um esboço] Ai menos, 1 menos, bla bla bla então se ele ta vindo pra cá, ele vai diminuindo, o número de páginas vai aumentando ...
[12.11] Aluno 2: É ...
[12.12] Aluno 1: então aqui o t diminuiu e o número de páginas aumentou, é a mesma coisa.
[12.13] Aluno 2: É ...

Neste trecho da discussão, reconhece-se uma tentiva de representação da ideia de que, cada página lida, menor seria o tempo. Contudo, surgem novas suposições como, por exemplo, “se for ao contrario a gente tem que trocar” “e se a gente trocar, o que acontece?”, ou seja, surgem outras oportunidades de elaborarem conjecturas e, consequentemente, novas tentativas de validações. Ao analisarem as conjecturas que criaram referentes aos eixos do gráfico, concluem que se fizessem a alteração dos mesmos, o gráfico seria o mesmo [12.12]. Tal conjectura não parece ser matematicamente válida. Entretanto, por não ter acesso aos esboços realizados nesse momento, não é possível analisar em profundidade esse trecho.

6.2 Análise do Grupo 2

Após a leitura do enunciado do item (a) da tarefa, o Aluno 2 inicia a formulação de uma primeira conjectura, conforme trecho transcrito a seguir.

Trecho 1 – [Tempo] aumenta ou diminui?

[1.1] Aluno 2: eu acho que eu já saquei. Porque quanto mais...
[1.2] Aluno 1: ele vai lendo o livro ...
[1.2] Aluno 2: quanto mais páginas ele vai lendo ... calma! Não, porque tipo, quanto mais ele gosta do livro, mais rápido ele lê, então o tempo vai crescendo.
[1.3] Aluno 3: diminuindo.
[1.4] Aluno 2: crescendo.
[1.5] Aluno 1: ué, se ele ta lendo, ele ta passando o tempo.
[1.6] Aluno 3: mas não faz sentido, porque tipo, é menos tempo que lê
[1.7] Aluno 2: não, é mais tempo.
[1.8] Aluno 3: lógico que não, mas ele lê mais rápido.
[1.9] Aluno 2: é por esse raciocínio, mas se a gente for tipo, pegar por ele gostar mais, ele gasta mais, tipo, o tempo dele vai crescendo mais por ele ler muita página, entendeu?
[1.10] Aluno 2: tá, então é o número de páginas...

Neste trecho, nota-se uma divergência quanto às conjecturas elaboradas por Aluno 2 e Aluno 3. Para Aluno 2, o tempo vai crescendo [1.2], pois, quanto “mais ele gosta do livro, mais rápido ele lê”. Aqui, Aluno 2 parece estar considerando a variável tempo como representando o tempo acumulado de leitura das páginas do livro. Por sua vez, Aluno 3 conjectura que o tempo está diminuindo [1.3], e justifica com o fato de que, conforme o tempo passa, ele lê mais rápido, e gasta menos tempo ([1.6] e [1.8]). Aluno 3 está considerando o tempo de leitura de cada página (similar à escolha feita pelo Grupo 1 durante a construção do gráfico).

Destaca-se que, apesar de coexistirem conjecturas diferentes, o grupo assume o conceito de função na resolução da tarefa, ao se referir a variação do tempo, pois acreditam, que um fator determinante na conclusão da leitura do livro rapidamente pelo leitor, seja o fato dele gostar de ler, ou pode ser um leitor que não goste tanto, e faça uma leitura mais lenta do livro.

Trecho 2 – Em cima, ou embaixo?

[2.1] Aluno 2: será que é o número de páginas, pelo número de tempo?
[2.2] Aluno 3: é né, número de páginas pelo número de tempo.
[2.3] Aluno 2: porque tipo, vamos supor, em 1 hora ...
[2.4] Aluno 1: o tempo é sempre embaixo.
[2.5] Aluno 3: ou não.
[2.6] Aluno 1: na maioria das vezes.
[2.7] Aluno 2: vai ser embaixo.

Neste trecho, ocorre uma discussão a respeito do posicionamento das variáveis tempo e número de páginas nos eixos coordenados. A validação da conjectura do grupo de como deve ser esse posiciomento é evidente neste trecho, nota-se que como já possuem conhecimentos prévios referentes a funções e gráficos, validam de que “ o tempo deve ser embaixo”, com apelo à autoridade externa – no caso, nos materiais didáticos, isso sempre ocorre ([2.4] e [2.6]. Logo, a numeração de páginas deve ser “em cima”, ou seja, o número de páginas é tomado como uma função do tempo.

Trecho 3 – “Se é um livro que a gente gosta, a gente termina rápido”

> *[3.1] Aluno 1: mas o que o aluno 3 falou é verdade, a cada página terminada, mais rápido ele lia a próxima, então cada vez que ele gostava mais do livro, ele vai acabar o livro mais rápido.*
> *[3.2] Aluno 3: uhum, por exemplo, se ele ia ler o livro em 3 horas ele vai ler em menos tempo, porque ele vai ler mais rápido, porque ele tava gostando do livro.*
> *[3.3] Aluno 1: é igual quando tipo, a gente ta lendo um livro de literatura que a gente não gosta, a gente demora muito pra terminar o livro.*
> *[3.4] Aluno 1: agora, se é um livro que a gente gosta, a gente termina muito rápido.*
> *[3.5] Aluno 2: ah, tá! Então tipo, vamos supor que em 1 hora, olha, de um livro que ele não gosta, em 1 hora vamos supor que o livro tem 300 páginas, se em 1 hora das 300 ele lê sei lá, umas 30, um livro que ele gosta, em 1 hora, ele pode ler 50.*
> *[3.6] Aluno 1: é, agora se fosse um livro que ele não gostasse, daí mudaria as coisas.*
> *[3.7] Aluno 1: acho que se ele não gostasse, em 1 hora, não chegaria nem em 30 folhas.*
> *[3.8] Aluno 3: tá, então vamos lá, vou colocar 20 páginas em 1 hora e 40 quando você gosta.*
> *[...]*
> *[3.9] Aluno 1: é pra ... a gente vai ter que usar números que a gente conhece né, porque tipo, não deu nada de número, nem nada, nem página, nem tempo.*
> *[3.10] Aluno 2: a gente pode fazer vários exemplos, vários exemplos de quando a pessoa gosta e quando a pessoa não gosta livro, mas tipo, seria hipótese.*
> *[3.11] Aluno 3: mas é.*
> *[3.12] Aluno 1: porque é a mesma coisa, tipo uma pessoa que tem dificuldade pra ler o livro que ele gosta, ele também vai demorar um pouco.*

Aqui, o grupo dialoga com o objetivo de compreender a situação. Lançam mão de valores numéricos e apresentam hipóteses de como poderiam resolver a tarefa, momento este que são elaboradas as conjecturas. Com isso, tentam validá-las utilizando exemplos genéricos, utilizando valores numéricos para representar o tempo de leitura de páginas do livro em horas, de maneira que a quantidade seja maior para quem gosta e quem não gosta de ler. Assim, se um leitor gosta da leitura que está realizando, ele consequentemente, acaba lendo mais rápido, para saber o final da história, e terminando o livro em menos tempo, ou pode ser que faça uma leitura mais lenta, e acabe demorando para concluir a leitura do livro, [3.5] e [3.7]. Essas hipóteses de resolução, favorecem o entendimento da proposta da tarefa, fazendo com que os alunos percebam a variação do tempo da leitura do livro.

Além disso, em [3.10], Aluno 2 destaca que a tarefa poderia ser resolvida de diversas formas e que poderiam apresentar diferentes exemplos de resolução, quando o leitor gosta e quando ele não gosta do livro.

Trecho 4 – “Em uma hora, você já está exausto daquele livro”

[4.1] Aluno 3: no caso seria as hipóteses que a gente cria a desenvolver essa questão.
[4.2] Aluno 1: então a gente vai desenvolver hipóteses de uma pessoa que não tem dificuldade pra fazer uma leitura, de uma pessoa também que tem?
[4.3] Aluno 3: não
[4.4] Aluno 1: [...] a gente vai desenvolvendo a parte que eles não gostam.
[4.5] Aluno 3: tá, então vamos colocar que em 1 hora, ele lê só 20 páginas.
[4.6] Aluno 1: a gente pode colocar também tipo, um livro pequeno, quando o livro é pequeno a pessoa consegue ler tipo, em 1 dia.
[O grupo toma então como exemplo um dos integrantes, que gosta muito de ler]
[4.7] Aluno 3: assim, 1 hora tem 20 páginas, 2 horas, sei lá, 50. E é tipo isso, porque vamos supor, aqui quando ele gosta, se aqui aumentou 20 páginas, tipo, vamos supor, que em 2 horas como ele ta gostando do livro, ele vai conseguir ler mais que o dobro, pode ler, sei lá umas 80 páginas, entendeu? Então tipo, o valor das páginas, aumentou.
[4.8] Aluno 1: é muita hipótese, é muito se, é muito depende da pessoa, depende da questão.
[4.9] Aluno 3: aí vamos supor, um livro que ele não gosta, vamos supor, ele pode ler, sei lá, ele pode ler só mais 10 páginas, entendeu? Ou tipo, ele pode ...
[4.10] Aluno 1: aah não, mas seria, 1 hora ele vai ler só 10 páginas?
[4.11] Aluno 3: é porque é um livro que ele não gosta.
[4.12] Aluno 1: mas, Aluno 3, são 60 minutos.
[4.13] Aluno 3: ta, tem como colocar como 40 então?Porque é o dobro.

[4.14] Aluno 1: não, acho que 40 até não, porque se você já leu, olha, tem uma coisa também que a gente tem que ver.
[4.15] Aluno 1: se você já leu um livro, tipo 20 páginas em 1 hora você já ta exausto daquele livro, ainda mais que você não gosta daquele livro ...
[4.16] Aluno 3: então quer dizer que vai ler menos páginas?
[4.17] Aluno 1: sim, se você parar pra pensar, sim. Porque sua cabeça vai ficar mais cansada, nunca parei pra pensar nisso.
[4.18] Aluno 2: mas é verdade.
[4.19] Aluno 3: mas é verdade.
[4.20] Aluno 1: não que vão ler poucas páginas igual você falou, quantas você falou?
[4.21] Aluno 3: eu falei 30.
[4.22] Aluno 1: mas tipo, umas 25.

A validação da conjectura elaborada anteriormente é realizada neste trecho, quando os alunos entendem que poderiam criar diversas hipóteses para a realização da tarefa. Porém, acreditam que essa resolução deve ser divida em duas formas, a primeira que seria para um leitor que não tem dificuldade pra realizar a leitura de um livro, e a segunda para um leitor que tem dificuldade ou não gosta de ler [4.2]. Mas, surge uma nova conjectura, pois caso seja um livro pequeno, tanto quem gosta, quanto quem não gosta, poderia ler rapidamente, até mesmo em um dia [4.6].

O grupo então considera o caso de uma pessoa que gosta muito de ler, e o quão acostumado ele é com a leitura, facilitando esse processo, fazendo com que ele consiga ler muito, até mais que o dobro, caso ele esteja gostando do livro [4.7]. Essas hipóteses acabam deixando o grupo confuso, pois vai depender muito de cada pessoa, do quanto ela gosta de ler, do tempo disponível, da quantidadede páginas, se tornando uma tarefa não tão simples de resolver.

Ao longo da transcrição, diversas conjecturas são criadas. Neste trecho como um todo, nota-se que os alunos tentam entender o modo como um leitor que não gosta de ler, faria a leitura de um livro. Mas, surge uma hipótese referente à exaustão do leitor, caso o mesmo leia 20 páginas e se canse do livro, pois para um leitor que não tem o costume de ler, ou que não gosta, seria um fator influente na quantidade de páginas lidas ao dia [4.15].

Trecho 5 – Explicando para professora

[5.1] Professora: pensaram alguma coisa?

[5.2] Aluno 1: a gente tem que fazer hipóteses ou não?
[5.3] Aluno 3: é porque tipo a gente ta analisando 2 tipos de pessoas, uma pessoa normal igual a gente e uma pessoa que vamos supor, que tenha algum déficit de atenção.
[5.4] Professora: vocês podem pensar como uma pessoa sem déficit de atenção.
[5.5] Aluno 1: ou a pessoa que gosta de ler um livro ou outra pessoa que também não curte muito ou que também dificilmente lê né.
[5.6] Professora: pensa na situação problema específica, cada vez que ela lê, ela quer ler mais. O livro é eletrizante, então ela ta chamando, ela leu tantas páginas hoje, depois ela quer saber o que aconteceu e lê cada vez mais.
[5.7] Aluno 1: então nós só vamos focar nas pessoas que gostam?
[5.8] Professora: Isso.
[5.9] Aluno 3: então ta certo.
[5.10] Professora: se fosse assim, daria várias outras interpretações.
[5.11] Aluno 1: mas os números de páginas, de tempo, a gente usa como hipótese?
[5.12] Professora: pode ser genérico, o valor que você quiser, vocês tem que entender, a gente quer que vocês entendam a ideia, como ficaria esse gráfico, sem você ter valores exatos, como seria? Você entenda como vai ser ele geometricamente, se ele vai ser reto, uma curva, uma parábola, o que vocês acham? A maneira que vocês acham que represente isso daí.
[5.13] Aluno 1: então ta bom.

Neste trecho, é possível observar algumas intervenções da professora, a partir das hipóteses e conjecturas haviam construído até o momento. A professora guia e apoia as conjecturas elaboradas pelos alunos, pois de fato, como a tarefa não tem exatamente uma unica forma de resolução, pensar em analisar um leitor que goste e tenha facilidade com a leitura, comparado a um leitor que não goste, também seria uma possibilidade de resolução valida. Contudo, a professora orienta para que o grupo pense especificamente em um leitor que goste de ler, pois quanto mais ele ler, mais ele vai querer, e relembra-os que o livro citado na tarefa é eletrizante, empolgante, fazendo com que o leitor leia muitas páginas [5.6].

A professora então orienta que, para a resolução da tarefa, os alunos poderiam utilizar qualquer valor, pois o objetivo principal da tarefa é entender geometricamente como ficaria o gráfico sem que sejam definidos valores exatos [5.12]. Isso faz com que o grupo entenda que, nem sempre para a resolução de uma tarefa matemática, necessita realizar a escolha de valores numéricos, e que existem várias possibilidades de uma tarefa estar correta.

Trecho 6 – Pode ser um gráfico de pizza!

> *[6.1] Aluno 2: ta certo, aqui quando ele tiver em uma hora, como é uma coisa eletrizante, não sei te dizer.*
> *[6.2] Aluno 1: mas a gente não vai saber se é crescente ou decrescente, porque o Aluno 3 tava falando de diminuir a cada vez que ele lê e ta gostando mais, o tempo diminuir ...*
> *[6.3] Aluno 2: mas então sabe o que vai acontecer, então a gente fez errado, o tempo vai ter que começar ao contrário, então tipo ...*
> *[6.4] Aluno 1: verdade.*
> *[6.5] Aluno 2: em 2 horas, ele vai ler 40, em 1 hora ele vai ler 80, quanto menor o tempo, maior é o número de páginas.*
> *[6.6] Aluno 1: é.*
> *[6.7] Aluno 3: a gente é uma equipe muito boa.*
> *[6.8] Aluno 1. é dai ta errado.*
> *[6.9] Aluno 3: mas pelo menos a gente tentou.*
> *[6.10] Aluno 1: sim.*
> *[6.11] Aluno 1: acho que o gráfico é assim [apresenta um esboço].*
> *[6.12] Aluno 3: não, acho que ta errado. porque olha ...*
> *[6.13] Aluno 1: verdade, pode não ser só um gráfico assim, pode ser um gráfico de pizza, a gente pode fazer vários gráficos pra exemplificar, a gente podia fazer aquele gráfico assim olha [apresenta outro esboço].*
> *[6.14] Aluno 3: mas como que a gente vai fazer um gráfico de pizza se o negócio vai aumentando?*
> *[6.15] Aluno 1: como a gente aprendeu por porcentagem, amor.*
> *[6.16] Aluno 1: por porcentagem igual a gente aprendeu.*
> *[6.17] Aluno 3: e como que faz?*
> *[6.18] Aluno 1: porcentagem, divide por 100.*
> *[6.19] Aluno 2: 100% do livro dai a gente divide por hora.*
> *[6.20] Aluno 3: ta, calma ai.*

Neste trecho, nota-se o entendimento dos alunos em relação a variação do gráfico, elaboram conjecturas considerando que o tempo de leitura de cada livro está dimunuindo, [6.2], e julgam que a forma que fizeram anteriormente não estaria correta. Com isso, compreendem que, em um esboço feito anteriormente, estavam diminuindo as páginas do livro, conforme o tempo iria passando, mas que o correto, seria aumentar as páginas lidas, ao decorrer do tempo, ou seja, de maneira decrescente. Parece que as conjecturas feitas pelo grupo, nesse momento, são similares àquelas do Grupo 1, que ora considera o tempo acumulado de leitura, à medida que o tempo passa, e ora considera o tempo de leitura de cada página, individualmente.

Conjecturas também são criadas quando o Aluno 3 refuta o Aluno 1 ao discordarem do formato do gráfico. Com isso, Aluno 1 sugere que o formato do gráfico possa ser em formato de pizza (gráfico de setores) e mais uma vez o Aluno 3 refuta essa possibilidade ao acreditar que não poderia ser em formato de pizza, pois a variavel vai aumentando.

Trecho 7 – Escolhendo valores

[7.1] Aluno 3: vamos focar em 3 tipos de hora: 3 horas, 2 horas e 1 hora.
[7.2] Aluno 3: aí vamos supor, em 3 horas, ele lê sei lá ...
[7.3] Aluno 2: 40 páginas
[7.4] Aluno 3: isso.
[7.5] Aluno 2: 40, 80, 120
[7.6] Aluno 3: e aqui é o tempo. Quantas páginas a gente da pro livro?
[7.7] Aluno 2: coloca 120, porque dai ele sobe de 40 em 40.
[7.8] Aluno 3: não, quantas páginas a gente da pro livro?
[7.9] Aluno 2: 120.
[7.10] Aluno 3: 120 páginas redondo?
[7.11] Aluno 1: 120? Não, vamos colocar um arredondado.
[7.12] Aluno 2: vamos colocar 200.
[7.13] Aluno 1: é 200.
[7.14] Aluno 3: ta, 200 páginas o livro, então quer dizer que em 3 horas, ele leu 40 páginas, em 2 horas ele vai ler quantas?
[7.15] Aluno 1: aluno 3, esse dai é de que não gosta de ler?
[7.16] Aluno 3: de que gosta, esse raciocínio.
[7.17] Aluno 1: 3 horas, 40 folhas, é né?
[7.18] Aluno 1: sabe quem muito sabe disso, o [nome do aluno]. Porque ele gosta de ler.

Aqui, [7.1] os alunos do grupo elaboram algumas hipóteses numéricas e procuram entrar em um consenso da divisão de horas de páginas lidas do livro. Inicialmente, focam em 3 horas [7.2], com divisões de 40 páginas por hora, [7.3], mas posteriormente, preferem arredondar para 200 páginas, [7.12], sendo este raciocínio voltado para um leitor que goste de ler [7.16]. Porém fica indefinido, a forma que serão divididas essas 200 páginas de acordo com as 3 horas que decidiram impor a tarefa.

Trecho 8 – Ajustando os valores

[8.1] Aluno 2: mas sabe porque eu acho que não pode ser o dobro, porque quanto mais o tempo passa mais ele lê.
[8.2] Aluno 1: é, então tem que ser um pouco mais.
[8.3] Aluno 3: é não vai ser exato.
[8.4] Aluno 1: a gente pode fazer tipo 85 ou 90, aí no outro a gente já faz tipo, um pouco mais que o dobro.

[8.5] Aluno 2: isso, tem que ver certinho.
[8.6] Aluno 3: ta, vou colocar 90.
[8.7] Aluno 2: aqui já deu 130.
[8.7] Aluno 3: não, a gente não precisa colocar de todos.
[8.8] Aluno 1: lógico que não, 90 + 90 é 130?
[8.9] Aluno 2: 90 + 40.
[8.10] Aluno 2: 40 a gente já pulou mais o dobro, foi pra ...
[8.11] Aluno 3: 130.
[8.12] Aluno 2: aí a gente aumentou 40 que deu 130
[8.13] Aluno 2: não a gente aumentou...
[8.14] Aluno 1: 180.
[8.15] Aluno 2: 50 então a gente tinha que por mais 60 aqui que vai dar 150, e assim vai.
[8.16] Aluno 1: mas daí...
[8.17] Aluno 3: só que vai sobrar 30 aqui.
[8.18] Aluno 1: em 3 horas ele leu 40, em 2 horas ele leu 90, em 1 hora leu 150?
[8.19] Aluno 2: é, porque ele começou a ler mais rápido.
[8.20] Aluno 1: sim, mas esse gráfico não ta meio sem sentido?
[8.21] Aluno 2: não, porque a gente tem que contar essas páginas aqui, então quer dizer que até chegar numa 1 hora, ele leu 130 + 20, então eu tenho que tipo, somar. Então em 5 horas ele leu 150.
[8.22] Aluno 1: vamos mostrar pra eles, ta todo mundo mostrando. (professores)
[8.23] Aluno 1: ta então é uma reta crescente, só que não seria descrente? porque ta diminuindo.
[8.24] Aluno 2: não, ela seria crescente em relação ao número de páginas.
[8.25] Aluno 1: sim
[8.26] Aluno 2: então quer dizer aqui ...
[8.27] Aluno 1: e de tempo seria decrescente
[8.28] Aluno 2: é olha, aí aqui ...

Neste momento do diálogo entre o grupo, [8.1] eles elaboram hipóteses tentando definir como será a divisão das 200 páginas, entendem que não será um valor exato, [8.3], pois quanto mais o leitor lê, mais rapido ele quer ler, consequentemente, acaba lendo uma quantidade de páginas maior, cada vez que inicia a leitura do livro. Não há mudanças nas conjecturas elaboradas anteriormente, apenas uma tentativa de validá-las utilizando exemplos numéricos genéricos, porém sem que o grupo chegue a uma conclusão [8.18].

Pela discussão, [8.21] inferimos que o grupo reconhece que a variável número de páginas é crescente, e a variável tempo de leitura da página é decrescente. Pois quanto mais o tempo vai passando, mais rápido o leitor lê o livro (diminuindo o tempo de leitura das páginas), e consequentemente, aumentando o número de páginas lidas [8.24]. O grupo valida essa informação com base em evidências empíricas, [8.25] porém ainda não tem certeza a respeito da representação gráfica. Buscando uma validação por autoridade externa, o grupo então chama a professora até o grupo.

Trecho 9 – “Professora, é assim?”

[9.1] Aluno 1: professora, é assim?
[9.2] Aluno 2: se é o livro que prende a pessoa, consequentemente ela vai ler mais, certo?
[9.3] Aluno 3: ela vai ler mais rápido.
[9.4] Aluno 2: então assim, conforme o tempo vai passando, mais páginas ele vai lendo, certo? Então é isso que a gente colocou no gráfico.
[9.5] Professora: ta, e esses outros exemplos aí?
[9.6] Aluno 2: isso daqui representa uma reta crescente.
[9.7] Aluno 3: em relação ao número de páginas. Porque quanto menos tempo tem, mais páginas ele vai ler mais rápido.
[9.8] Professora: mas você conseguiu uma reta?
[9.9] Aluno 2: aqui sim. aqui não.
[9.10] Aluno 2: tipo, em relação ao número de páginas, ele cresceu certo? Agora aqui, ele já vai decrescer.
[9.11] Professora: ta, mas hora que você ligou os pontos, o que aconteceu?
[9.12] Aluno 2: ué, deu uma reta crescente. É porque a gente não fez muito proporcional. Porque vamos supor aqui, em 1 hora ele leu 40 páginas, ai passou mais 1 hora, ele vai tipo, aumentar o número de páginas, então tipo, não vai ser o dobro, vai ser mais o dobro, entendeu? Então conforme essa passagem de tempo, mais páginas estão sendo lidas.
[9.13] Professora: mas será que quando eu ligar esses pontos, será que eu vou conseguir uma reta?
[9.14] Aluno 2: aqui nem tanto, porque não ta proporcional.
[9.15] Aluno 3: se a gente fizer proporcional da.
[9.16] Aluno 1: mas se a gente for fazer proporcional aí não vai pegar a ideia que a gente ta pensando.
[9.17] Aluno 2: é olha, quer ver tipo, em 3 horas ele lê 40 páginas, em 2 horas ele lê 80.
[9.18] Aluno 3: 120.
[9.19] Aluno 1: só que a gente ta pensando em um pouco mais que o dobro.

Neste trecho [9.4], a professora incentiva os alunos a justificarem suas respostas, guia e apoia os alunos para que suas hipóteses a respeito da tarefa sejam explicitadas e justificadas. Os alunos explicam para a professora o modo que estão resolvendo [9.2], afirmando ser uma reta crescente [9.6], com as páginas divididas em um pouco mais que o dobro, sem haver proporcionalidade. Contudo, o fato desta divisão não ser proporcional [9.12], faz com que o gráfico não seja completamente uma reta, o que também alteraria a conjectura elaborada pelo grupo, de que cada vez o leitor lia mais que o dobro de páginas, da leitura anterior.

Trecho 10 – É uma parábola?

[10.1] Professora: isso que eu to perguntando, se você pensar dessa forma você vai encontrar reta?
[10.2] Aluno 2: mais que o dobro?
[10.3] Professora: é.
[10.4] Aluno 2: não, mais que o dobro aí não, aí viraria uma parábola.
[10.5] Professora: porque que eu não vou?
[10.6] Aluno 2: aaaaa ...
[10.7] Aluno 1: mas dai eu mostro a parábola.
[10.8] Aluno 2: é porque dai não precisa ta uma coisa proporcional.
[10.9] Professora: não precisa por valores ta? Não precisa representar por valores, quero que você pense, como pode ser o gráfico em relação a essa situação.
[10.10] Professora: e ele fala na leitura que ele leu o mesmo tempo de páginas conforme o tempo foi passando?
[10.11] Aluno 1: é uma hipótese nossa.
[10.12] Professora: mas na leitura, mostra isso?
[10.13] Aluno 2: então vai ser parábola, pela variação.
[10.14] Aluno 3: hmm, entendi.
[10.15] Professora: da pra traçar o desenho agora?
[10.16] Aluno 2: dá.
[10.17] Aluno 3: faz sentido agora.

Após o incentivo e apoio da professora, os alunos validam/reformulam algumas das conjecturas elaboradas anteriores [10.2]. Reconhecem que o leitor ler mais que o dobro indicaria que o gráfico se tornaria uma parábola e não uma reta, como acreditavam ser [10.4]. Assumem também, que seria uma parábola por conta da variação do gráfico [10.13] e pela falta de proporcionalidade, dando sentido ao pensamento desenvolvido pelo grupo [10.17].

Trecho 11 – Tempo negativo.

[11.1] Aluno 2: o professora, eu não poderia fazer uma parábola que passe pelo lado negativo do eixo y né? Porque eu não consigo ler página repetida, certo? Seria mais ou menos assim.
[11.2] Aluno 1: só que e o tempo, como se o tempo tivesse diminuindo, por cada vez que ele lesse mais?
[11.3] Aluno 2: é porque tipo, como que o tempo vai diminuindo, como que eu representaria no eixo x? tipo assim, é o número de páginas sobre o tempo, não é? Então tipo, sei lá, aqui tem, 1 hora tem tantas páginas e

passou mais, sempre vai crescendo, então tipo, vamos supor ... aah, ta certo.
[11.4] Aluno 1: mas e pra baixo? Porque o tempo diminui também.
[11.5] Aluno 2: não tem nada pra baixo.
[11.6] Professora: eu vou pensar em tempo negativo?
[11.7] Aluno 2: não! viu, por isso.
[11.8] Aluno 1: hmm, verdade.

Nota-se neste trecho uma nova conjectura, a hipótese da parábola passar pelo lado negativo do gráfico [11.1], mas a professora orienta que não se deve pensar em tempo negativo, pois o tempo sempre vai crescendo [11.8].

Trecho 12 - Onde está o negativo?

[12.1] Professora: você vai pensar em tempo negativo? E outra coisa, o tempo seu, você ta escolhendo esse eixo não é?
[12.2] Aluno 1: uhum.
[12.3] Professora: aonde ta o negativo desse eixo?
[12.4] Professora; ta pra baixo?
[12.5] Aluno 2: aqui.
[12.6] Professora: e o número de páginas, você representou porque eixo?
[12.7] Aluno 2: pelo y
[12.8] Professora: ta, aonde ta o negativo dele?
[12.9] Aluno 2: aqui.
[12.10] Professora: você vai passar por essa parte de baixo?
[12.11] Aluno 2: não.
[12.12] Aluno 2: (risos) rindo de nervosa.

Mais uma vez a professora alerta os alunos que não devem pensar em tempo negativo [12,1], pois o eixo negativo está para baixo e o número de páginas está representado no eixo acima, ou seja, positivo [12.11]. Parecem compreender a explicação da professora, e assim não validam essa conjectura.

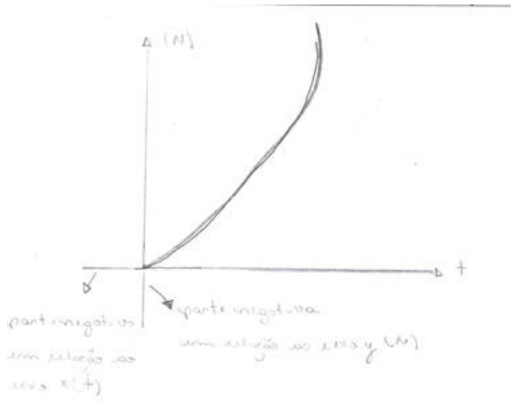
Trecho 13 – Acho que estamos pensando certo.

[13.1] Aluno 1: eu acho que a gente ta pensando certo, porque ela não falou '' olha, vocês estão indo pelo caminho errado'' nem nada, né?
[13.2] Aluno 3: será que só vai ter 1 exercício?
[13.3] Aluno 1: sim né.
[13.4] Aluno 3: vai, vamos terminar.
[13.5] Aluno 3: o que a gente escreve?
[13.6] Aluno 1: a gente vai falar, que como a pessoa ta gostando muito do livro, cada vez que ela lê ...
[13.7] Professora: Aluno 2, fala uma coisa pra mim, a sua leitura começou em que momento?
[13.8] Aluno 2: no 0.

[13.9] Professora: então porque colocar essa coisa imensa aqui.
[13.10] Aluno 2: aí professora, desculpa, era minha intenção ta no zero, mas, espera aí, vou colocar.
[13.11] Professora: agora você já imaginou que se você for arrastando isso dai aqui assim olha, até aqui ele não leu nada né, o tempo foi passando, passando ...
[13.12] Aluno 1: verdade.
[13.13] Aluno 2: professora eu juro pra você que não era essa a nossa intenção, a gente nem sabe se ta saindo certo.
[13.14] Aluno 2: quanto mais páginas ...
[13.15] Aluno 1: quanto mais a pessoa gosta do livro né, quanto mais páginas ela lê ...
[13.16] Aluno 3: como que é?
[13.17] Aluno 2: quanto mais gosto tem pela leitura ...
[13.18] Aluno 1: isso, quanto mais gosto tem pela leitura, consequentemente desenvolverá, pra ficar mais bonito, entendeu?
[13.19] Aluno 3: consequentemente o tempo diminuirá ...
[13.20] Aluno1: isso.
[13.21] Aluno 2: o tempo diminuirá e o tempo gasto para ler as páginas diminuirá.
[13.22] Aluno 3: e as páginas aumentarão automaticamente.
[13.23] Aluno 1: isso.
[13.24] Aluno 2: consequentemente, o tempo diminuirá ...
[13.25] Aluno 3: vamos fazer a segunda parte.

Neste último trecho, os alunos justificam seus processos de raciocinio em rascunho entregue pela professora no inicio da tarefa [13.5]. Deixam evidente que a tarefa a qual desenvolveram, foi focada em um leitor que goste de ler e tenha facilidade [13.6], pois assim, seriam lidas uma maior quantidade de páginas em menor quantidade de tempo [13.19]. A Figura 4 mostra o esboço presente no protocolo escrito entregue à professora.

Figura 4 - Gráfico apresentado no protocolo final da equipe 2.



Fonte: material do grupo de pesquisa.

7 DISCUSSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como objetivo analisar e identificar processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do 1º ano do Ensino Médio ao resolverem uma tarefa exploratória. Consideramos como material de análise aúdios provenientes da discussão realizada por dois grupos (com três integrantes cada) A tarefa trazia uma situação envolvendo a variação na velocidade de leitura das páginas de um livro, com o intuito de verificar a capacidade de pensar de forma articulada em variações de uma grandeza, conforme ocorria a variação de outra.

Para atender ao objetivo do trabalho, foi necessário aprofundar-se nos estudos referentes aos processos de raciocínio matemático, analisando as concepções de diversos autores no que diz respeito aos tipos de raciocínio e suas contribuições para elaboração do conhecimento matemático. De acordo com Jeanotte e Kieran (2017), existem diversos processos de raciocínio, sendo alguns mais comuns no âmbito do trabalho com a disciplina de Matemática na Educação Básica.

O presente estudo tinha como um dos propósitos identificar esses processos. Como um dos resultados principais, destacamos a presença, de forma mais evidente e em ambas as discussões, *a elaboração de conjecturas e a tentativa de validá-las a partir de envidências empíricas ou em alguns momentos com o auxílio de autoridade externa da professora*.

Tais processos de raciocínio matemático foram evidenciados ao longo da análise das discussões que ocorreram em cada um dos grupos. Analisando o grupo 1, percebemos a busca pelo entendimento da tarefa em um momento inicial, onde por meio de conhecimentos prévios, elaboraram as primeiras conjecturas, realizando conjecturas sobre o modo que poderiam resolver a tarefa e como poderiam esboçar o gráfico solicitado.

Com base em evidências empíricas, validaram as primeiras conjecturas do grupo, tendo como situação em análise o envolvimento do número de páginas com o tempo, posteriormente, questionando o crescimento do gráfico. Nesse sentido, entenderam a variação do gráfico e o seu comportamento diante da leitura do livro em relação ao tempo, sendo a interação com professora em diversos momentos fundamental para elaboração de algumas hipóteses que foram expressas a partir de novas conjecturas.

Por fim, os alunos do grupo 1 refletem as conjecturas que foram validadas ao decorrer da discussão, como por exemplo, o número de páginas ser representado como variável independente e também, por terem optado por uma parábola e não uma reta como acreditavam que era, ao perceberem que o tempo de leitura não seria uma constante .

Analisando o grupo 2, as conjecturas foram elaboradas precocemente, quando, ao realizarem a leitura inicial, já percebem que quanto mais o leitor vai lendo, mais o tempo vai crescendo. Posteriormente, assumindo o conceito de variação do tempo, sendo possível notar que o grupo possui conhecimentos prévios referente a funções e gráficos.

A partir da comunicação com a autoridade externa, no caso, a professora, validam a conjectura do número de páginas ser tomado como uma função do tempo. Em vários momentos de diálogo, o grupo trabalha com valores numéricos que possibilitaram a elaboração de algumas conjecturas.

O grupo reconhece que a resolução da tarefa poderia se dar de diversas formas, e que poderiam apresentar diferentes exemplos de resolução, incluindo o fato de analisarem um leitor que goste e tenha facilidade com a leitura, e outro que não goste tanto de ler.Situações de desacordo também são evidentes na análise do grupo 2, quando algum aluno do grupo levanta novas informações ou até mesmo novos exemplos que fazem com que reelaborem e refutem (ou validem) conjecturas.

Em alguns momento de sua intervenção, a professora guia e apoia as conjecturas elaboradas pelos alunos, pois de fato, analisar um leitor que goste de ler e um que não goste, também seria uma possibilidade válida de resolução. O grupo 2 também elabora estratégias de divisão das páginas lidas, o que seria um diferencial do modo de resolução do grupo 1, entendendo que não seria uma resolução exata. O grupo 2 reconhece que a variável número de páginas é crescente e a variável tempo de leitura é descrescente e explora essas possibilidades, elaborando conjecturas validadas com base em informações empíricas.

Para Jeannotte e Kieran (2017) conjecturar envolve processos cíclicos de enunciar a conjectura, verificar possibilidades e encontrar motivos para serem verdadeiras, o que fica evidente na análise das discussões que ocorrem nos dois grupos. Os momentos de discussão constituíram, assim, como "oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novos conhecimentos" (PONTE, 2005, p.16).

O fato da tarefa ser aberta permitiu com que os alunos partilhassem ideias, formulassem e reformulassem conjecturas, o que para Lannin, Ellis e Elliot (2011), por meio da exploração de relações matemáticas e a elaboração e reelaboração de conjecturas, e a busca por justificá-las e validá-las. Em geral, essa justificação ocorre a partir da utilização de evidência empírica ou de exemplo genérico, e em alguns momentos com apelo à autoridade externa da professora (LANNIN, 2005).

Destaca-se aqui o papel das intervenções da professora em ambos os grupos. Para Wood (1999) o professor deve explorar essas situações, para que seja desenvolvida a capacidade de argumentação e consequentemente, o raciocínio matemático. É essencial que para estimular o raciocínio do aluno, a professora evite fornecer indicações muito específicas, mas é necessário os questionamentos para que auxíliem os alunos em suas reflexões. Assim como diz Brodie, o questionamento é uma das ações fundamentais para que haja desenvolvimento do raciocínio, apoiando o trabalho do aluno e resistindo ao fornecimento de indicações para o desenvolvimento da resolução. No entando, acredita que não se deve deixar os alunos sem qualquer mediação, sejam elas individuais ou em grupos, e isso ficou evidenciado na análise de ambos os grupos.

Os resultados obtidos por este estudo foram fundamentais para a compreensão de questões pertinentes às práticas educativas, evidenciando o potencial que os processos reconhecidos ao longo da análise têm para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Destaca-se também o quanto é fundamental que sejam propostas aos alunos tarefas desafiadoras, para sejam exploradas de modo a fomentar o raciocínio dos alunos, incentivando-os a elaborem conjecturas e buscarem elementos para justificá-las e validá-las.

As tarefas exploratórias demandam a disponibilidade, em sala de aula, de momentos como esses que foram analisados, em que os alunos possam pensar em estratégias e procedimentos para resolução por meio de discussões coletivas mediadas pelo professor. Finalizando, destaca-se também a importância da qualidade da tarefa aliada às ações da professora como fator relevante para o ocorrência dos diversos processos de raciocínio aqui evidenciados.

REFERÊNCIAS

ALISEDA, A. Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A strutural approach. **Synthese**, v.134, p. 25-44, 2003.

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 2, p. 466–490, 2019.

ARAMAN, E.M.O.; SERRAZINA, M.L.; PONTE, J.P. Raciocínio matemático nos primeiros anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. **Bolema**, Rio Claro, v.34, n.67, p.441-461, 2020.

BAXTER, J. A.; WILLIANS, S. Social and analytic scaffolding in middle scholl mathematics managing the dilemma of telling. **Journal Mathematics Teacher Education**, v.13, p. 7-26, 2010.

BOAVIDA, A. et al. **A experiência matemática no ensino básico**. Lisboa: DGIDC - ME, 2008.

BRASIL, Ministério da Educação; Secretária de Educação Básica; Base Nacional Comum Curricular – Etapa Ensino Médio: **MEC/SEB**, 2018.

BRODIE, K. **Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms**. New York, NY: Springer, 1. Ed, 2010.

BROUSSEAU, G.; GIBEL, P. Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. **Educational Studies in Mathematics**, v.59, p.13-58, 2005.

BRUNHEIRA, L. O desenvolvimento do racíocínio geométrico na formação inicial dos professores dos primeiros anos. **Tese de doutorado**. Instituto de Educação de Lisboa, Lisboa, 2009.

CABERLINI, G.S.F.; GARCIA, T,M,R. Práticas de ensino exploratório em matemática: implicações para a aprendizagem dos alunos e para o trabalho docente. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor pde**, v.1, p.1-28, 2016.

CARNEIRO, L.F.G.; ARAMAN, E.M.O.; SERRAZINA, M.L. A abordagem ao raciocínio matemático em documentos curriculares brasileiros: uma breve análise. **II congresso internacional de ensino**. p. 1-10, Cornélio Procópio, 2019.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM,** Heidelberg, v.40, n.1, p.3-22, 2008.

FERREIRA, A.B.H. Aurélio **Júnior: dicionário escolar da língua portuguesa**.

2. ed. Curitiba: Positivo, 2011.

GALBRAITH, P. Mathematics as reasoning. **The Mathematics Teacher**, Reston, VA, v.88, n.5, p. 412- 417. 1995.

HENRIQUES, A. **O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação.** 2010. 446 f. Tese (Doutoramento em Educação, Didáctica da Matemática) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010.

JEANOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v.96, n.1, p. 1-16, 2017.

LANNIN, J. Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. **Mathematical thinking and learning**, v.7, p. 231-258, 2005.

LANNIN, J.K.; ELLIOTT, R.; ELLIS, A.B. Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8. Reston, VA: **National Council of Teachers of Mathematics**, 2011.

MATA-PEREIRA, J.; O raciocínio matemático em alunos do 9.º ano no estudo dos números reais e inequações. 2012. 163 f. **Dissertação (Mestrado em Educação)** – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 2, p. 1 – 18, 2017.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o raciocínio matemático dos alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781–801, 2018.

MORAIS, C,; SERRAZINA,L; PONTE, J.P. Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. **Acta Scientiae**, Canoas, v.20, n.4, p.552-570, 2018.

NCTM. **Focus in high school mathematics**: Reasoning and sense making. Reston: NCTM, 2009.

OLIVEIRA, P. **A investigação do professor, do matemático e do aluno: uma discussão epistemológica**. 2002. 178 f. Dissertação (Mestrado em Didáctica da Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2002.

OLIVEIRA, P. **O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia**. Educação e Matemática, v.100, p. 3-9, 2008.

PÓLYA, G. **Mathematics and plausible reasoning: induction and analogy in mathematics** (Vol. 1). New Jersey: Princeton University Press, 1954ª.

PÓLYA, G. Mathematics and plausible reasoning. Vol 2, **Patterns of Plausible Inference**. New Jersey: Princeton University Press, 1954.

PONTE, J.P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular** , p.11-34. Lisboa. APM, 2005.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC-ME, 2009.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. - 3.ed.rev.ampl. - Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, Lisboa, v. 22, n. 2, p. 55-81, 2013.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação Matemática**, Lisboa, n.156, p. 7-11, 2020.

RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P. Práticas de discussão em sala de aula de matémática: Os casos de dois professors. **Bolema,** Rio Claro, v. 12, n. 61, p. 398-418, 2018.

RIVERA, F; BECKER, J. Algebraic reasoning through patterns. **Mathematics Teacher in the Middle School**, Reston, VA, v. 15, n. 4, p. 213-221, 2009.

RUSSEAL, S. Mathematical Reasoning in the Elementary Grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), **Developing mathematical reasoning in grades K-12 (NCTM Yearbook)**, p. 1-12. Reston, VA: NCTM, 1999.

SFORNI, M.S.F. Interação entre Didática e Teoria Histórico – Cultural. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v.40, n2, p. 375-397, abr./jun. 2015

STEIN, M. K.; Engle, R. A.; Smith, M. S.; Hughes, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v.10, n4, p.313-340. 2008.

STYLIANIDES, G, J. An analytic framework of reasoning-and-proving. **For the learning of Mathematics**, v.28, n.1, p.9-16, 2008.

STYLIANIDES, G, J. Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. **Mathematical Thinking and Learning**, v.11, n.4, p. 258-288, 2009.

VIEIRA, W.; RODRIGUES, M.; SERRAZINA.L.. O conhecimento de futuros professores sobre os processos de raciocínio matemático antes e depois de uma experiência de formação. **Quadrante**, vol. 29. n.1, 2020

WOOD, T. Creating classroom interactions for mathematical reasoning: beyond “natural teaching”. In: ABRANTES, P.; PORFÍRIO, J.; BAÍA, M. (Org.). **The interactions in the mathematics classroom**: proceedings of the CIEAEM 49. Setúbal: Escola Superior de Educação, p. 34-43, 1997.

WOOD, T. Creating a context for argument in mathematics class. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v. 30, n. 2, p. 171-191, 1999.

WUNDT, W. **An introdution to psychology**. London: George Allan & Unwin, 1912.

ANEXO 1

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CÂMPUS LONDRINA

PLANO DE AULA COMPLETO

SABERES DOCENTES
FORMAÇÃO PROFISSIONAL
ENSINO DE VARIAÇÃO DE GRANDEZAS

TAREFA

Um leitor mandou, para uma revista, a seguinte análise de um livro que ele havia acabado de ler, com muitas páginas: “O livro é eletrizante, muito envolvente mesmo! A cada página terminada, mais rápido eu lia a próxima! Não conseguia parar!”

1. Desenhe um gráfico que represente o número *n* de páginas que esse leitor concluía pelo tempo decorrido *t*, mas de modo a refletir corretamente a mensagem do leitor à revista. Não se preocupe com detalhes, mas com a tendência geral do gráfico. Explique brevemente como pensou.

2. Se afirmarmos que o livro tem 400 páginas e que o leitor levou três dias para ler o livro inteiro, quantas páginas aproximadamente ele leu por dia?

3. Supondo que o livro tenha 120 páginas e o leitor leu 15 páginas em uma hora, quantas horas ele levou para terminar a leitura do livro?

4. É possível construir uma fórmula matemátca que represente a relação do construção do gráfico? Em caso afirmativo, escreva a fórmula matemática.

I. Possíveis dificuldades que podem surgir na aplicação da tarefa:

- Não conseguir no primeiro momento entender o que a tarefa está pedindo.
  Intervenções: Explicar em plenária o contexto da questão.
  Atendimento individual nos grupos.

- Tentar resolver recorrendo a uma fórmula de função.
  Intervenções: Sugerir aos grupos a pensarem sem a necessidade de recorrer a cálculos.
  Descrever o que está entendo do problema.

- Dificuldade para definir as variáveis nos eixos do plano cartesiano. Intervenção: Sugerir a apresentação das variáveis envolvidas no problema.

II. Perguntas e respostas

Perguntas do professor	Respostas dos alunos
Como você pode representar o problema em gráfico?	Utilizando o sistema cartesiano.
Como você vai definir os eixos	Abscissas? ordenadas? ; x e y
Como você imagina esse gráfico?	Reta, curva, parábola e barra

A tarefa será realizada em grupo de 3 pessoas, cada grupo receberá a atividade e folhas para resolver; os grupos serão atendidos pelos professores, auxiliando e incentivando a discussão do grupo.

Obs: Durante a aplicação da tarefa os alunos serão observados, questionados e motivados a raciocinar sobre a situação problema.