

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ISABELA GOMES MACHADO

**TIPOS DE RACIOCÍNIO IDENTIFICADOS NA RESOLUÇÃO DE UMA
TAREFA DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2020

ISABELA GOMES MACHADO

**TIPOS DE RACIOCÍNIO IDENTIFICADOS NA RESOLUÇÃO DE UMA
TAREFA DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina Trabalho de conclusão de curso 2, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jader Otavio Dalto

CORNÉLIO PROCÓPIO
2020



FOLHA DE APROVAÇÃO

Isabela Gomes Machado

TIPOS DE RACIOCÍNIO IDENTIFICADOS NA RESOLUÇÃO DE UMA TAREFA DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado às 17:00 no dia 03/11/2020, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Prof. Dr. Jader Otavio Dalto

Prof. Dra. Linlya Natassia Sachs Camerlengo De Barbosa

Prof. Dra. Andresa Maria Justulin

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me concedido forças e por ter me sustentado até aqui.

A minha família, que sempre priorizaram minha educação, me incentivaram, foram compreensíveis, e compartilharam todo o amor possível durante esse processo.

Ao meu noivo, Pedro, obrigada por sempre acreditar em mim e não me deixar esquecer que sou capaz.

Agradeço aos professores que contribuíram de alguma forma na minha formação e em especial, ao meu orientador Prof. Dr. Jader Otavio Dalto, pela paciência e por todo apoio para que esse trabalho pudesse ser desenvolvido.

As minhas amigas e amigos, obrigada pelos momentos que deixaram todo esse tempo mais leve. Em especial a Amanda Barretos, Gustavo Ioti, Isabela Godoy, Larissa Geovana Corrêa, Leandra Letícia de Lima, Maiara Oliveira, vocês sabem o quanto contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui, obrigada.

RESUMO

MACHADO, Isabela Gomes. **TIPOS DE RACIOCÍNIO IDENTIFICADOS NA RESOLUÇÃO DE UMA TAREFA DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA.** 2020. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2020.

O presente trabalho aborda o tema de possíveis tipos de raciocínios que podem ser evidenciados na resolução de uma Tarefa de Análise de Produção Escrita (TAPE). A Análise da Produção Escrita é abordada como uma nova possibilidade para o ensino de matemática que promove a participação dos alunos no processo de construção do conhecimento matemático enquanto o professor se torna mediador da atividade, e trabalha em conjunto com seus alunos, isso dá ao professor uma oportunidade de rever seus métodos. As sequências de raciocínios podem ser consideradas como os processos que a mente desenvolve para solucionar um problema, sendo essa solução correta ou incorreta. O trabalho traz a análise de nove tarefas, resolvidas por uma aluna do 3º ano do ensino médio, sobre o conteúdo de progressão geométrica e os resultados mostram que, na maioria das tarefas, o Raciocínio Criativo está presente na construção das respostas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Tarefa de Análise da Produção Escrita. Tipos de Raciocínio. Progressão Geométrica.

ABSTRACT

MACHADO, Isabela Gomes. **TYPES OF REASONING IDENTIFIED IN THE RESOLUTION OF A WRITTEN PRODUCTION ANALYSIS TASK.** 2020. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2020.

This work addresses the theme of possible types of reasoning that can be evidenced in the resolution of a Written Production Analysis Task (TAPE). The Analysis of Written Production is approached as a new possibility for the teaching of mathematics that promotes the participation of students in the process of building mathematical knowledge while the teacher becomes the mediator of the activity, and works together with his students, this gives the teacher an opportunity to review your methods. The reasoning sequences can be considered as the processes that the mind develops to solve a problem, whether that solution is correct or incorrect. The work brings the analysis of nine tasks, solved by a 3rd year high school student, on the content of geometric progression and the results show that, in most tasks, creative reasoning is present in the construction of the answers.

Keywords: Mathematical Education. Analysis task of written production. Types of Reasoning. Geometric progression.

Lista de Figuras

Figura 1: conversa por aplicativo de mensagem com a aluna	34
Figura 2: recorte tirado das tarefas resolvidas	35
Figura 3: recorte tirado das tarefas resolvidas	36
Figura 4: recorte tirado da tarefa nº 3.....	36
Figura 5: recorte tirado das tarefas resolvidas	37
Figura 6: recorte tirado das tarefas resolvidas	37
Figura 7: recorte tirado da tarefa nº 4.....	38
Figura 8: recorte tirado das tarefas resolvidas	38
Figura 9: recorte tirado das tarefas resolvidas	39
Figura 10: recorte tirado das tarefas resolvidas	40
Figura 11: conversa por aplicativo de mensagem com a aluna.....	41
Figura 12: recorte tirado das tarefas resolvidas	41
Figura 13: recorte tirado das tarefas resolvidas.....	42
Figura 14: recorte tirado das tarefas resolvidas	43

Sumário

1. Introdução	9
2. Referencial teórico	11
2.1. Tipos de Raciocínios	13
2.1.1. Raciocínio Memorizado (RM)	14
2.1.2. Raciocínio Algorítmico (RA).....	16
2.1.3. Raciocínio Algorítmico Familiar.....	Erro! Indicador não definido.
2.1.4. Raciocínio Algorítmico Guiado.....	17
2.1.5. Raciocínio Criativo.....	Erro! Indicador não definido.
2.2. Tarefa de Análise da Produção Escrita (TAPE)	18
3. Procedimentos Metodológicos	20
3.1. Tarefas que foram aplicadas	22
4. Análise das atividades	34
5. Considerações finais	44
6. Referências	46

1. Introdução

Atualmente o modelo de prova que é aplicado nas escolas com caráter classificatório parece não apresentar realmente o que os alunos aprenderam ou não durante as aulas por vários motivos. Baseando-se nisso, surge a necessidade de pensar em novos métodos de avaliação. Uma das estratégias para o enfrentamento desta problemática é dar mais atenção para os registros escritos que os alunos produzem ao resolverem tarefas de matemática, configurando o que alguns autores chamam de Análise da Produção Escrita.

A Análise da Produção Escrita, pela visão de Antunes, Mendes e Dalto (2017), configura-se como um processo integrado na relação de ensino-aprendizagem, o qual se preocupa em compreender mais os motivos que originaram as respostas dos alunos nas atividades de avaliação do que se elas estão corretas ou incorretas. É uma avaliação com a qual se pode acompanhar o processo pedagógico como um todo, fornecendo aos professores e aos alunos informações consistentes e confiáveis; uma avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem.

De acordo com os resultados das avaliações do Ensino Fundamental e Ensino Médio, o desempenho dos alunos ainda está longe do desejado e isso mostra que, para o enfrentamento desta situação, novas formas de ensino podem ser utilizadas. Nesta direção, para além de estratégia de avaliação, a Análise da Produção Escrita também pode ser considerada como estratégia de ensino, o que foi proposto inicialmente por Santos (2014).

Quando é levada em consideração toda a produção escrita do aluno e não só o resultado final, é dada a ele a oportunidade de conhecer seus erros, o conteúdo que domina e onde precisa reforçar o estudo um pouco mais. Além disso, o professor também tem a oportunidade de rever suas práticas em sala de aula e repensar se elas contribuem de maneira positiva no processo de ensino-aprendizagem.

Pesquisas sobre os tipos de raciocínios começam a ser desenvolvidas, mediante a curiosidade em entender as razões que fazem um aluno ter êxito ou fracasso ao resolver uma tarefa, seja ela avaliativa ou não. Essas pesquisas,

segundo Lithner (2008), procuram evidenciar os raciocínios ou tipos de raciocínio após a resolução de uma tarefa.

Assim, o presente trabalho tem por objetivo evidenciar os tipos de raciocínios utilizados no processo de resolução de tarefas de Análise da Produção Escrita, baseando-se nas definições de Lithner (2008). Isso foi possível por meio da aplicação de nove Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE) sobre o conteúdo de progressões geométricas, a uma aluna do 3º ano do Ensino Médio, e que já teve contato com esse conteúdo no início do 2º ano. Devido ao período de pandemia e quarentena provocada pela COVID-19, o contato com a aluna foi feito por meio do uso de um aplicativo de mensagem.

2. Referencial teórico

Segundo o dicionário Michaelis, avaliação significa “ato de avaliar, e avaliar: 1 calcular o valor ou determinar o valor, o preço ou merecimento de. 2 reconhecer a grandeza, a intensidade, a força de. 3 apreciar.” Uma ferramenta avaliativa muito usada, na aula tradicional, é a prova escrita.

Para Lima, Carneiro e Dalto (2017) entende-se por prova escrita uma situação em que o aluno é submetido a uma série de questões mecânicas as quais ele deveria ter “treinado” durante as aulas para conseguir resolvê-las. Esta prova tem caráter muito mais quantitativo do que qualitativo, uma vez que busca medir a quantidade de acertos e não o que o aluno conseguiu produzir ou o que o aluno demonstra saber.

De acordo com Silva, Oliveira e Dalto (2017) é importante manter a atenção e o cuidado com a avaliação durante todo o processo de ensino. A avaliação deve, de alguma forma, diagnosticar a maneira como o aluno compreende a matemática. Então, surge a necessidade de utilizar um tipo de avaliação que analise os resultados e forneça ao professor a oportunidade de entender quais caminhos o aluno tomou para concluir seu raciocínio.

A avaliação deve ter como objetivo proporcionar ao aluno a oportunidade de aprendizagem ou de recuperação de conteúdo. A Análise da Produção Escrita pode auxiliar o professor a tomar decisões que melhorem a relação de ensino-aprendizagem, através da investigação e análise do rendimento de seus alunos.

Analisar a produção escrita dos alunos é importante, seja ela obtida por meio de trabalhos, provas ou quaisquer outros instrumentos que possibilitem o registro de ideias, pois o professor poderá, por meio dessa resolução (quer considerada totalmente correta, quer parcialmente correta ou incorreta), obter informações sobre o que pode ser melhorado nas aulas ou até mesmo no processo de ensino e aprendizagem. (CARDOSO, 2017, p.16)

Existe a intenção de desmistificar a avaliação como um processo quantitativo que classifica e dá valor aos alunos, ou de se atentar apenas ao certo e errado. “A Análise da Produção Escrita passa a ser vista, então, como uma ferramenta que oportuniza a aprendizagem” (PEREIRA; DONEZE; DALTO, 2018, p.63).

Segundo Buriasco *et al.* (apud PEREIRA, DONEZE, DALTO, 2018, p.65) para que as produções escritas sejam passíveis de análise:

[...] as tarefas propostas devem ser de diferentes níveis de complexidade, envolver conhecimento matemático relevante, valorizar a resolução de problemas, a investigação, a escrita matemática, a reflexão, o pensamento crítico. Para resolver tarefas desse tipo, é preciso escolher que estratégias e ferramentas empregar para matematizar a situação, reconhecer e explicitar a matemática presente, além de utilizá-la para compreender, analisar e resolver a tarefa proposta, bem como outras que dela possam se originar (BURIASCO *et al.* apud PEREIRA *et al.*, 2018, P.65).

De acordo com Antunes, Mendes e Dalto (2017) independente de qual ferramenta avaliativa o professor decidir utilizar com seus alunos, ele deve ter consciência de que todo o material desenvolvido com essa atividade será fundamental para saber qual o nível de conhecimento de seus alunos e que matemática eles aprenderam até então. O professor acaba se envolvendo de forma investigativa:

Questionar-se a respeito de qual matemática os seus estudantes estão aprendendo, que entendimentos estão tendo do que está sendo trabalhado em sala de aula, do que já sabem, que dificuldades encontram, e o que pode ser feito para auxiliá-los na superação destas (BURIASCO, FERREIRA, CIANI apud ANTUNES *et al.*, 2017, p.2).

Santos (2014) buscou uma forma de configurar a Análise da Produção Escrita como uma estratégia de ensino. De acordo com a autora, a Análise de Produção escrita pode assumir um papel na sala de aula e na relação de ensino-aprendizagem, de forma que professor e aluno consigam assumir seus papéis durante o desenvolvimento da aula. De acordo com Santos (2014):

[...] a Análise da Produção Escrita como estratégia de ensino pode ser utilizada para auxiliar o professor na obtenção de informações sobre os processos de ensino e de aprendizagem da matemática, as quais posteriormente podem subsidiar a elaboração de intervenções, comentários e/ou questionamentos na produção do aluno de modo que esse possa, sob orientação do professor, desenvolver ferramentas matemáticas, isto é, ser autor de seu próprio conhecimento matemático (SANTOS, 2014, p. 63).

A ideia de que a Análise da Produção Escrita como estratégia de ensino pode auxiliar o professor na obtenção de informações a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática subsidiando o processo de elaboração de intervenções, comentários e/ou questionamentos,

possibilita que o professor tenha uma visão dos processos de aprendizagens dos alunos e possa reorientar sua prática pedagógica.

A Análise da Produção Escrita funciona na maioria dos casos como um diagnóstico do rendimento escolar do aluno e também da atuação do professor dentro da relação de ensino-aprendizagem, pois não é apenas o aluno que deve estar em constante avaliação, a auto-avaliação do professor também é fundamental para que essa relação tenha êxito.

Essa proposta que envolve a Análise da Produção Escrita pode tirar o professor do papel de avaliador e protagonizar o aluno de forma que ele possa corrigir e entender os próprios erros e os erros dos amigos. Assim, o aluno tem a oportunidade de construir e estruturar o próprio conhecimento matemático.

2.1. Tipos de Raciocínios

Lithner (2008) afirma que, mediante a necessidade e curiosidade em entender o que influencia o fracasso ou êxito de um aluno ao resolver uma tarefa (seja ela qualquer atividade usada de forma avaliativa), começaram a ser desenvolvidas pesquisas sobre os tipos de raciocínios ou sequências de raciocínio que podem ser evidenciados após a resolução da tarefa pelo aluno.

Em Lithner (2008), o autor define raciocínio como:

O raciocínio é a linha de pensamento adotada para produzir afirmações e chegar a conclusões na resolução de tarefas. Não é necessariamente baseado na lógica formal, portanto, não se restringe à prova, e pode até estar incorreto, desde que haja alguns tipos de razões sensíveis (para o racionalizador) que a sustentam. (LITHNER; 2008, p.257. tradução nossa)¹

Raciocínio pode ser considerado como o processo que a mente passa para encontrar a solução de uma tarefa ou um problema. Neste contexto, problema é considerado uma situação desconhecida e “intelectualmente difícil para um indivíduo”² (LITHNER, 2008, p. 257).

¹ The reasoning is the line of thought adopted to produce affirmations and to reach conclusions in the resolution of tasks. It is not necessarily based on formal logic, so it is not restricted to proof, and it may even be incorrect, as long as there are some types of sensitive reasons (for the rationalizer) that support it.

² intellectually difficult for an individual.

Lithner (2008) propõe uma estrutura do raciocínio no processo de solução de uma tarefa, assim pode se observar quatro etapas:

1. Identificar uma situação problema, em que não é evidente como proceder.
2. É feito um planejamento e escolha de uma tática. Neste sentido o planejamento pode transitar entre recordação, construção, suposição, descoberta.
3. O plano é colocado em prática.
4. Uma solução é obtida.

Alguns tipos de raciocínio foram definidos por meio do estudo de Lithner (2008), e eles podem ser divididos entre duas categorias: raciocínio imitativo e raciocínio não imitativo, que serão apresentados e discutidos no decorrer do trabalho.

Baseado nessas definições de raciocínio, Lithner (2008) afirma que os educadores utilizam o termo raciocínio sem levar em consideração suas especificidades ou variações. Sendo assim, algumas dessas variações serão definidas neste trabalho, como: Raciocínio Memorizado, Raciocínio Algorítmico, Raciocínio Algorítmico Familiar, Raciocínio Algorítmico Guiado, que são raciocínios imitativos, e Raciocínio Criativo que é um raciocínio não imitativo.

2.1.1. Raciocínio Memorizado (RM)

O Raciocínio Memorizado baseia-se principalmente na lembrança de uma solução previamente pronta, assim é útil apenas em alguns tipos de tarefa, como definições e provas ou questões diretas, como conversão de medidas.

De acordo com Lithner (2008) o Raciocínio Memorizado satisfaz duas premissas:

1. O método de resolução consiste na retomada de uma resposta inteira, já pronta.
2. A aplicação desse método resume-se apenas em discorrê-lo.

Durante a correção de uma tarefa avaliativa, o Raciocínio Memorizado pode ser evidenciado na solução de questões que são facilmente encontradas

nos livros didáticos e/ou outros materiais de estudo. Segundo Lithner (2008) existem alunos que conseguem memorizar e reproduzir a solução exatamente como se é encontrada, e também aqueles que memorizam uma parte, logo cometem alguns erros durante a resolução. Porém, um detalhe que deve ser observado é que, mesmo reproduzindo corretamente a solução do exercício, não há garantia de que o aluno entendeu ou aprendeu o que fez.

Lithner (2008) diz que algumas afirmações, que acabam sendo decoradas automaticamente por influência de experiências vividas no ambiente de aprendizagem, “geralmente substituem o raciocínio mais matematicamente fundado”³ (LITHNER, 2008. p. 259). Situações em que o professor ensina um “macete” para os alunos seria um exemplo disso, como essa música que ajuda a montar a tabela trigonométrica dos ângulos 30°, 45° e 60°:

Um, dois, três

(comando para colocar os números na primeira linha da tabela em ordem crescente)

Três, dois, um

(comando para colocar os números na segunda linha da tabela em ordem decrescente)

Tudo sobre dois

(comando para colocar o denominador dois em todos os números, tanto na primeira quanto na segunda linha)

A raiz vai no três e também no dois

(comando para colocar raiz nos números dois e três, tanto na primeira quanto na segunda linha)

A tangente é diferente, veja só você

Raiz de três sobre três, um, raiz de três.

(comando para completar a terceira linha, da tangente)

	30°	45°	60°
Sen (x)	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
Cos (x)	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\frac{1}{2}$
Tan (x)	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 1 – tabela trigonométrica

³ generally replace more mathematically based reasoning

Com o tempo essa informação fica automática para o aluno, e muitas vezes ele aplica sem realmente entender o porquê.

2.1.2. Raciocínio Algorítmico (RA)

Como o próprio nome diz, o Raciocínio Algorítmico envolve tarefas escolares onde é preciso apenas aplicar um algoritmo de resolução, como o algoritmo da divisão. "Um algoritmo é uma sequência finita de executáveis instruções que permitem encontrar um resultado definitivo para uma determinada classe de problemas"⁴ (BROUSSEAU, apud LITHNER, 2008, p.259).

Neste formato, o algoritmo integra todos os processos de solução de uma tarefa. Ao se deparar com um problema semelhante a outro, já resolvido anteriormente, o aluno não precisa elaborar uma nova solução, mas sim implementar o algoritmo conhecido. Porém, qualquer descuido que leve a uma falha, pode impedir que a resposta correta seja alcançada.

De acordo com Lithner (2008) a importância do Raciocínio Algorítmico é que não existe a possibilidade de encontrar novas interpretações, ou informações que mudem a resolução da tarefa. "A enésima transição não depende de qualquer circunstância imprevista"⁵ (LITHNER, 2008, p.259).

Para o autor, esse uso do algoritmo pode deixar a impressão de que só é deixada para o aluno a "parte fácil" da tarefa, uma vez que as partes mais difíceis já eram previamente tratadas pelo algoritmo. Assim, conhecendo a estratégia de resolução da tarefa, o aluno consegue resolver outros semelhantes, o que pode limitar o efeito da aprendizagem.

2.1.3. Raciocínio Algorítmico Familiar

Durante a resolução de uma tarefa, pode não ser imediata a identificação de um algoritmo que satisfaça o problema. O Raciocínio Algorítmico Familiar equivale ao apoio em palavras-chave, que geralmente estão no enunciado e podem conduzir ao algoritmo necessário para continuar,

⁴ An algorithm is a finite sequence of executable instructions that allow you to find a definitive result for a given class of problems

⁵ The umpteenth transition does not depend on any unforeseen circumstances.

como as palavras mais e menos que dizem respeito aos algoritmos de adição e subtração respectivamente.

Visto que tarefas que podem ser solucionadas por um algoritmo dispensam uma argumentação e fundamentação matemática para resolver, para Lithner (2008) a validade do Raciocínio Algorítmico Familiar não é confiável em uma situação problemática.

2.1.4. Raciocínio Algorítmico Guiado

O Raciocínio Algorítmico Guiado é uma busca de orientação externa para resolver a tarefa quando o aluno não identifica de primeira o algoritmo que deve usar. O Raciocínio Algorítmico Guiado é evidenciado em duas categorias, guiado por texto e guiado por pessoa.

Ao citar Raciocínio Algorítmico Guiado por texto, Lithner (2008) literalmente se refere a buscas de algum tipo de semelhança com a tarefa por escrito, como em um exemplo, definição, teorema, regra, ou outra fonte desde que ela seja textual.

As tarefas realizadas por meio do Raciocínio Algorítmico Guiado por texto são feitas basicamente copiando uma solução, uma vez que são identificados os termos exclusivos da tarefa, modificando apenas os dados do exercício, ou detalhes pequenos durante a solução. Para Lithner (2008) o Raciocínio Algorítmico Guiado por texto é o tipo de raciocínio encontrado na aprendizagem individual ou em pequenos grupos.

Já o Raciocínio Algoritmo guiado por pessoa, no ambiente escolar pode ocorrer sendo provido por duas fontes, o professor que representa uma autoridade dentro da sala de aula ou um colega de turma. Esse tipo de raciocínio baseia-se em seguir as estratégias e soluções problemáticas fornecidas por um guia, porém o mesmo não fornece argumentação ou explicação da escolha da estratégia.

Segundo Lithner (2008) seguindo a imagem do professor como autoridade, quando a orientação é fornecida por ele, essa instrução passa uma garantia de solução correta e, assim, o aluno não procura questionar para entender a estratégia usada.

2.1.5. Raciocínio Criativo

O Raciocínio Criativo possibilita que o aluno construa novas sequências de raciocínio ao resolver a tarefa, sem que nunca tenha visto outra tarefa semelhante. O aluno coloca em prática seu conhecimento prévio em matemática, o que não dá ao aluno respostas prontas ou algoritmos de resolução.

De acordo com Lithner (2008) o Raciocínio Criativo possibilita ao aluno a construção do raciocínio que resulta em novos conhecimentos a partir de argumentos matematicamente fundamentados, procedentes do conhecimento matemático que ele já tem.

Para que esse tipo de raciocínio seja válido, deve atender três fatores: criatividade, plausibilidade e ancoragem.

1. Criatividade: o aluno desenvolve uma sequência de raciocínio não experimentada ou recria uma esquecida; essas soluções serão consideradas originais para o educando.
2. Plausibilidade: existem argumentos preditivos que explicam por que a implementação e as conclusões da estratégia são verdadeiras ou plausíveis.
3. Ancoragem: os argumentos estão ancorados nas propriedades matemáticas dos componentes do raciocínio.

2.2. Tarefa de Análise da Produção Escrita (TAPE)

As tarefas de Análise da Produção Escrita desempenham um papel prático na sala de aula, em situações em que o professor trabalha a análise de produções escritas com os alunos. A tarefa possibilita que o professor conduza uma investigação baseado em atividades já resolvidas por outros alunos. Segundo Santos (2014) essa prática possibilita que o aluno desenvolva ferramentas matemáticas que contribuam na construção do próprio conhecimento matemático.

De acordo com Pereira, Doneze e Dalto (2018) uma Tarefa de Análise da Produção Escrita (TAPE) é:

Um instrumento e/ou atividade, cujo surgimento advenha de uma produção escrita previamente analisada pelo professor, de modo que sua construção tenha sido no cerne desta produção escrita, tudo nele(a) proposto esteja envolto ao objetivo de se analisar tal produção escrita, norteados o ensino e a aprendizagem de determinado conteúdo, configurando-se como uma tarefa de questionamentos, reflexões, de comparação e discussão quanto aos diferentes pontos de vista e procedimentos que permitem solucionar as situações. (PEREIRA; DONEZE; DALTO, 2018, p.9).

Não existem preceitos quando o assunto é a forma de aplicar uma TAPE. O professor pode proceder com os alunos em grupos, duplas ou até mesmo individualmente, o professor pode optar em conduzir a investigação ou permitir que os alunos tenham mais autonomia, e assim conversarem entre si e discutirem de que forma devem seguir para resolver. Dessa forma, o professor passa a ter um papel secundário dentro da sala de aula e tira dúvidas pontuais para cada aluno, podendo se dirigir à sala toda quando a dúvida for geral.

Como é uma metodologia diferente da tradicional, os alunos podem aparentar dificuldade e resistência em analisar a produção de outros alunos, é importante que o professor encoraje os alunos e observe as dificuldades que eles apresentam nesse processo, ajudando-os a superá-las.

3. Procedimentos Metodológicos

O presente trabalho tem caráter qualitativo. A pesquisa qualitativa identifica e analisa dados que não podem ser mensurados numericamente, logo os resultados desse tipo de pesquisa não são apresentados por meio de recursos estatísticos. Segundo Bogdan e Biklen (1994), uma pesquisa qualitativa deve atender aos seguintes requisitos:

(1) Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; (2) a investigação qualitativa é descritiva; (3) os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; (4) os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; (5) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (BOGDAN; BIKLEN, 1994)

O trabalho tem como objetivo evidenciar possíveis tipos de raciocínio na resolução de tarefas de progressões geométricas, através da análise de tarefas.

As tarefas utilizadas para a coleta de dados foram obtidas no trabalho de conclusão de curso “Tarefas de Análise da Produção Escrita para o ensino de progressões geométricas”, desenvolvido por Minato (2019). No trabalho, a autora desenvolveu 12 tarefas de Análise da Produção Escrita utilizando-se de produções de alunos, sobre o conteúdo de progressões geométricas, das quais nove serão analisadas neste trabalho.

Minato (2019) fala sobre a proposta de conduzir uma aula utilizando suas atividades, como uma possibilidade do aluno ser capaz de construir um conhecimento novo:

Esta proposta felizmente é uma proposta onde o ensino é feito de uma forma que os alunos são estimulados a pensar, a questionar e aprender, a discernir e assim consequentemente possam construir seu conhecimento. Este tipo de trabalho fará com que o aluno por meio das suas observações pensem e percebam o que o outro aluno fez, e assim reflitam sobre o conteúdo podendo fazer com que retomem alguns conteúdos já vistos e construam um novo (sempre amparado pelo professor). (MINATO, 2019, p. 42)

No processo de analisar a tarefa realizada pelos alunos, é importante destacar o que está sendo observado, e o que se espera da análise. Com isso, ao analisar cada atividade produzida, um tópico destacado foi o tipo de raciocínio utilizado para resolver a tarefa.

O ano de 2020 foi marcado pela pandemia da COVID-19 (SARS-CoV-2), o que fez com que a vida de todos sofresse mudanças drásticas em um curto espaço de tempo. Em um período de mais ou menos um mês tudo o que antes requeria contato físico e encontros diários, como a escola, passou a ser desenvolvido online.

Com uma carência de estrutura, poucos recursos e quase nada de informação, professores e alunos tiveram que se adaptar a essa nova realidade. E foi em meio a esse cenário que as tarefas precisavam ser aplicadas para que este trabalho de conclusão de curso fosse desenvolvido.

Foi feito contato com um professor responsável pelas aulas de matemática do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Tarumã, interior de São Paulo. Ele informou que o conteúdo de progressões geométricas foi ensinado no primeiro bimestre, na turma do 1º ano do Ensino Médio. Logo, não seria mais possível aplicar as atividades como introdução ao conteúdo, porém ele se mostrou solícito e afirmou que ajudaria como pudesse. Apesar de não poder ter acesso aos alunos, foram encaminhadas as nove atividades para ele, a metodologia em que elas foram desenvolvidas foi explicada, e também o que se esperava das respostas para poderem ser analisadas.

Para completar as possíveis respostas recebidas por meio do professor, as nove atividades também foram encaminhadas para uma estudante do 3º ano do ensino médio, de uma escola técnica no município de Assis - SP. O acesso a ela foi direto, logo foi possível tirar suas dúvidas no processo da resolução das atividades, por meio de um aplicativo de mensagens.

As atividades recebidas do professor não renderam bons resultados para a análise, pois não foram respondidas como uma Tarefa de Análise da Produção Escrita, o material recebido tinham alguns números soltos, como se

os alunos tivessem tentado resolver as questões presentes no enunciado das tarefas, e não suas questões em sim. Uma possível justificativa para isso foi o distanciamento para com os alunos no decorrer dessa aplicação, o que acabou limitando o desenvolvimento do trabalho. Entretanto, as nove atividades recebidas da outra aluna foram suficientes, e serão elas as atividades analisadas a seguir.

A aluna em questão tem 17 anos e frequenta o 3º ano do Ensino Médio Ela teve contato com a matéria de progressões geométricas no início do 2º ano do Ensino Médio.

3.1. Tarefas que foram aplicadas

Nesta seção serão apresentadas as tarefas produzidas por Minato (2019), que foram aplicadas e analisadas neste trabalho:

Tarefa nº 1

Objetivo da tarefa: Conceituar uma progressão geométrica e razão.

Tarefa nº 1

A professora Vera pediu aos seus alunos, Leandro, Beatriz e Isabela, que observassem se a sequência dada era um tipo específico de sequência chamada progressão geométrica. Em caso afirmativo deveriam citar qual a característica que uma progressão geométrica possui.

Veja as resoluções:

Resolução da aluna Beatriz

a) (1, 3, 9, 27, 81) → Todos os números foram multiplicado por 3.
 Caso afirmativo

Resolução da aluna Isabela

a) (1, 3, 9, 27, 81) (multiplicando cada termo por 3)

razão $q=3$

Resolução do aluno Leandro

a) (1, 3, 9, 27, 81) *form, pois a sequência cresce multiplicando por 3 o termo anterior, ficando assim:*
 $q=3$

- O que estas resoluções possuem em comum?
- Por que você acha que a Beatriz escreveu "Todos os números foram multiplicados por 3"?
- A aluna Isabela escreveu razão $q=3$. O que você acha que ele quis dizer com isso?
- Por meio destas observações, você consegue definir com suas palavras o que é uma progressão geométrica?

Fonte: MINATO, 2019

Tarefa nº 2

Objetivo da tarefa: Diferenciar progressão aritmética de progressão geométrica;

Tarefa nº 2

Ao pedir para as alunas verificarem se a sequência dada é uma progressão geométrica, Isabela e Maria responderam que não é.

Resolução da aluna Isabela

b) (2, 4, 6, 8, 10, 12) (soma de um cada termo)
 - não é PG

Resolução da aluna Maria

b) (2, 4, 6, 8, 10, 12)

Não é uma PG, é uma PA

a) Elas estão corretas?

b) Maria escreve que a sequência é uma progressão aritmética (PA). Qual a diferença entre uma progressão geométrica (PG) e uma progressão aritmética (PA)?

Fonte: MINATO, 2019

Tarefa nº 3

Objetivo da tarefa: Diferenciar progressões geométricas crescentes de decrescentes.

Tarefa nº 3

Em sua tarefa de casa, os alunos Carlos, Giovana e Isabela deveriam verificar se uma sequência era uma progressão geométrica, veja as respostas deles que estão corretas:

Resolução da aluna Isabela

c) (400, 200, 100, 50) (divide cada termo por 2)
 razão $q = \frac{1}{2}$

Resolução do aluno Carlos

c) (400, 200, 100, 50)

É P.G. Todos multiplicam $\frac{1}{2}$

Resolução da aluna Giovana

c) (400, 200, 100, 50)

$$a_1 = 400$$

$$a_2 = 400 \cdot 0,5^{2-1}$$

$$a_2 = 400 \cdot 0,5$$

$$a_2 = 200$$

$$a_3 = 400 \cdot 0,5^{3-1}$$

$$a_3 = 400 \cdot 0,25$$

$$a_3 = 100$$

É uma P.G. de razão 0,5

- a) Esta sequência é crescente ou decrescente? Por quê?
- b) Identifique e cite o valor da razão que os alunos utilizaram.
- c) De acordo com os seus conhecimentos, para que a sequência seja decrescente o valor da razão deve ser maior que _____ e menor que _____.

Se o valor for maior que _____ a sequência será crescente.

A aluna Giovana escreveu em sua resposta a_1 , a_2 e a_3 . O que isto quer dizer? Neste caso o a_1 se refere a qual termo desta sequência?

Fonte: MINATO, 2019

Tarefa nº 4

Objetivo da tarefa: Realizar cálculos dos termos da progressão geométrica.

Tarefa nº 4

Na tarefa a seguir foi pedido aos alunos para que determinassem os três primeiros termos de uma progressão geométrica (PG), sendo que a

razão desta progressão vale 4 e o primeiro termo vale 2.

Esta tarefa foi resolvida por alguns alunos da professora Cláudia.

Observe as resoluções, sendo que ambas estão corretas.

Resolução da aluna Aline

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} & a_1 &= 2 \\
 & & q &= 5 \\
 a_1 &= 2 \\
 a_2 &= 2 \cdot 5^1 = 8 \\
 a_3 &= 2 \cdot 5^2 = 32 \\
 \cup & \text{ primeiros três termos são } 2, 8 \text{ e } 32
 \end{aligned}$$

Agora observe a resolução do aluno André

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2 \\
 a_2 &= 2 \cdot 4^{2-1} = 2 \cdot 4 = 8 \\
 a_3 &= 2 \cdot 4^{3-1} = 2 \cdot 4^2 = 2 \cdot 16 = 32
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 8 \\ a_3 = 32 \end{array} \right\} (2, 8, 32)$$

- a) Em ambas as resoluções, os alunos escrevem $a_1=2$. O que eles querem dizer com isto?
- b) Qual o valor da razão (q) da progressão geométrica?
- c) Quando queremos calcular o quinto termo (a_5) da progressão geométrica, chamamos $n=5$. No caso deste exercício vamos identificar:
- O primeiro termo (a_1)= _____ n = _____
- O segundo termo (a_2)= _____ n = _____
- O terceiro termo (a_3)= _____ n = _____

Tarefa nº 5

Objetivo da tarefa: Realizar cálculos dos termos da progressão geométrica, percebendo a importância do uso da fórmula do termo geral.

Tarefa nº 5

A questão número dois da tarefa de casa pedia que os alunos determinassem os três primeiros termos de uma progressão geométrica, que tinha como razão o valor 4 e o primeiro termo da sequência era 2. As resoluções dos três alunos estão corretas.

Observe e responda:

Resolução da aluna Aline

2) Determine os três primeiros termos de uma P.G., onde a razão vale 4 e o primeiro termo é igual a 2

$$a_1 = 2$$

$$q = 4$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot 4^1 = 8$$

$$a_3 = 2 \cdot 4^2 = 32$$

∴ primeiros três termos são 2, 8 e 32

Resolução do aluno Bruno

2) Determine os três primeiros termos de uma P.G., onde a razão vale 4 e o primeiro termo é igual a 2

$$a_1 = 2$$

$$q = 4$$

$$a_2 = 8$$

$$a_3 = 32$$

(2, 8, 32)

Resolução do aluno André

2) Determine os três primeiros termos de uma P.G., onde a razão vale 4 e o primeiro termo é igual a 2

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot 4^{2-1} = 2 \cdot 4 = 8$$

$$a_3 = 2 \cdot 4^{3-1} = 2 \cdot 4^2 = 2 \cdot 16 = 32$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 8$$

$$a_3 = 32$$

$$(2, \overset{4 \times 2}{8}, \overset{4 \times 8}{32})$$

- O que as três resoluções possuem de semelhante?
- Qual o valor de a_1 ? E qual o valor da razão?
- Como você faria para determinar o valor do a_2 ?
- É possível calcular o valor do a_6 sem ter que calcular os termos antecedentes? Se sim, explique como.

Fonte: MINATO, 2019

Tarefa nº 7

Objetivo da tarefa: Aplicar e verificar a validade da fórmula do termo geral da progressão geométrica.

Tarefa nº 7

Aline resolveu a tarefa corretamente utilizando uma fórmula para calcular os três termos da progressão geométrica:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = 4 \end{array}$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot 4^1 = 8$$

$$a_3 = 2 \cdot 4^2 = 32$$

∴ primeiros três termos são 2, 8 e 32

Observe que na resolução deste exercício a aluna apresentou uma

fórmula que a ajudou a calcular o segundo e o terceiro termo da sequência.

- a) Qual o primeiro termo desta sequência?
- b) Nesta parte da resolução a Aline escreve $a_3 = 2 \cdot 4^2 = 32$. O 32 é qual termo da sequência?
- c) É possível calcular o a_7 sem que seja necessário calcular o a_6 ? Faça o cálculo com a fórmula para verificar.
- d) Agora faça o cálculo por meio da multiplicação do antecessor pela razão (q) para comparação.
- e) O que concluiu? Então a fórmula é válida?

Fonte: MINATO, 2019

Tarefa nº 8

Objetivo da tarefa: Determinar o valor do n utilizado na fórmula e construir a fórmula da progressão geométrica para o n ésimo termo.

Tarefa nº 8

A professora propôs uma tarefa aos seus alunos pedindo que calculassem os três primeiros termos de uma progressão geométrica. Observe que os alunos André, Giovana e Aline chegaram a resposta correta da tarefa e podemos notar que os três utilizaram uma fórmula para conseguir chegar ao resultado.

Resolução do aluno André

$$\begin{array}{l}
 a_1 = 2 \\
 a_2 = 2 \cdot 4^{2-1} = 2 \cdot 4 = 8 \\
 a_3 = 2 \cdot 4^{3-1} = 2 \cdot 4^2 = 2 \cdot 16 = 32
 \end{array}
 \left(
 \begin{array}{l}
 a_1 = 2 \\
 a_2 = 8 \\
 a_3 = 32
 \end{array}
 \right)
 (2, 8, 32)$$

Resolução da aluna Giovana

$a_1 = 2 \cdot 4^{1-1}$
 $a_1 = 2 \cdot 4^0$
 $a_1 = 2 \cdot 1$
 $a_1 = 2$

$a_2 = 2 \cdot 4^{2-1}$
 $a_2 = 2 \cdot 4^1$
 $a_2 = 2 \cdot 4$
 $a_2 = 8$

$a_3 = 2 \cdot 4^{3-1}$
 $a_3 = 2 \cdot 4^2$
 $a_3 = 2 \cdot 16$
 $a_3 = 32$

$a_1 = 2$
 $q = 4$

$a_2 = 2 \cdot 4^{2-1}$
 $a_2 = 2 \cdot 4$
 $a_2 = 8$

(2, 8, 32)

Resolução da aluna Caroline

(2, 8, 32)

$q = 4$
 $a_1 = 2$
 $a_n = 32$

$a_3 = 2 \cdot 4^{3-1}$
 $a_3 = 2 \cdot 4^2$
 $a_3 = 2 \cdot 16$
 $a_3 = 32$

R: Se 4 é a razão (q) e 2 é dado como 1º termo e está pedindo para determinar os três primeiros termos então $a_n = 3$ assim pela fórmula os três primeiros termos são (2, 8, 32).

a) Identifique:

Valor da razão: _____.

Valor do primeiro termo da progressão geométrica (a_1): _____.b) Para calcular o a_3 Caroline fez o cálculo como mostra a figura abaixo:

$a_3 = 2 \cdot 4^{3-1}$
 $a_3 = 2 \cdot 4^2$
 $a_3 = 2 \cdot 16$
 $a_3 = 32$

Note que os valores 2 e 4 continuam presentes, porém um dos valores do expoente mudou (3), com qual parte da fórmula o 3 se refere?

c) Se fosse pedido para calcular o quarto termo, como você faria?

d) Agora, tente escrever a fórmula da progressão geométrica para a_n , onde n seja um número qualquer.

Fonte: MINATO, 2019

Tarefa nº 10

Objetivo da tarefa: Identificar erros durante a aplicação direta da fórmula.

Tarefa nº 10

As alunas Isabela e Aline resolveram a mesma questão e apesar de utilizarem a mesma fórmula o valor do a_3 da aluna Isabela está errado. Por quê?

Resolução da aluna Isabela

2) Determine os três primeiros termos de uma P.G., onde a razão vale 4 e o primeiro termo é igual a 2

$$a_1 = 2 \quad q = 4$$

$$a_n = 2 \cdot 4^{n-1} \\ = 8$$

$$a_n = 2 \cdot 4^{3-1} \\ = 8^2$$

$$a_n = 2 \cdot 4^{4-1} \\ = 8^3$$

$$PG: (2, 8, 64, 512)$$

Resolução da aluna Aline

2) Determine os três primeiros termos de uma P.G., onde a razão vale 4 e o primeiro termo é igual a 2

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = 4 \end{array}$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot 4^1 = 8$$

$$a_3 = 2 \cdot 4^2 = 32$$

∴ os primeiros três termos são 2, 8 e 32

Fonte: MINATO, 2019

Tarefa nº 12

Objetivo da tarefa: Provocar reflexões sobre a interpretação de uma situação-problema; Aplicar conceitos para o cálculo da interpolação.

Tarefa nº 12

A aluna Claudia não conseguiu resolver a questão. Mas ao observar sua anotação, podemos verificar que ela estava na direção correta.

Resolução da aluna Claudia

4) Insira ou interpole 3 meios geométricos positivos entre 2 e 162.

2, —, —, —, 162

- De acordo com a anotação da aluna, qual o valor de a_1 ?
- Inserindo três valores entre 2 e 162, teríamos que 162 seria o a_n , sendo $n = \underline{\hspace{2cm}}$ (o último termo da progressão geométrica).
- Observando a fórmula da progressão geométrica, qual o valor que está faltando para que possamos utilizá-la?
 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- Agora, calcule o a_2 , a_3 e a_4 .

e) Escreva como ficou a sequência.

Fonte: MINATO, 2019

4. Análise das atividades

Nesta seção será desenvolvida a análise de algumas questões das nove tarefas produzidas por Minato (2019). Ao primeiro contato da aluna com o conjunto de atividades, a primeira dúvida dela foi se a “progressão geométrica (PG) pode dividir também ou só multiplicar”.

Figura 1: conversa por aplicativo de mensagem com a aluna



Fonte: arquivo pessoal da autora

A partir da Figura 1, é possível perceber que a aluna chegou sozinha à conclusão de que “Se multiplicar por $\frac{1}{2}$ vai reduzir”, uma vez que ela só precisou de uma confirmação, para seu processo de raciocínio se efetivar. A dúvida não é proveniente de nenhuma atividade específica, o contato com o arquivo das atividades sobre progressões geométricas foi o suficiente para que a dúvida surgisse. É possível inferir que ela usou Raciocínio Algorítmico Guiado por pessoa, por ela possivelmente ter recordado de uma propriedade da progressão geométrica e ter buscado essa confirmação.

Iniciando a Análise das atividades pela tarefa nº 1, ela tem como objetivo que os alunos consigam conceituar uma progressão geométrica e o

termo razão, diretamente associado às progressões. A seguir, em vermelho, estão as repostas da aluna para a tarefa nº 1:

Figura 2: recorte tirado das tarefas resolvidas

a) O que estas resoluções possuem em comum?

Estas resoluções demonstram que todos os alunos notaram o valor da razão da PG, que é $q=3$.

b) Por que você acha que Beatriz escreveu “Todos os números foram multiplicados por 3”?

Pois, é possível analisar que a PG segue uma ordem crescente de números multiplicados por 3.

c) A aluna Isabela escreveu “razão $q=3$ ”. O que você acha que ela quis dizer com isso?

Isabela encontrou a razão da PG que é $= 3$. A “razão” é uma característica da progressão geométrica. É um número fixo que, a partir do primeiro termo, os termos são cálculos pela “razão q ” vezes o seu antecessor.

d) Por meio destas observações, você consegue definir com suas palavras o que é uma progressão geométrica?

Uma progressão geométrica, é uma sequencia numérica que possui uma razão q , ou seja, um número fixo que determina seus termos.

Fonte: arquivo pessoal

Pela figura 2, pode-se perceber que a aluna teve o desempenho esperado e atingiu o objetivo da tarefa. Em sua resposta para a pergunta c, ela identifica a razão como uma característica da progressão geométrica, e ainda coloca em sua resposta uma ideia do cálculo realizado para encontrar os próximos termos da progressão “os termos são cálculos pela razão q vezes o seu antecessor”. Nas questões c e d a aluna usa suas palavras para explicar suas respostas, o que pode ser um fator influenciado pelo Raciocínio Criativo. As atividades de Análise da Produção Escrita questionam coisas diferentes de uma tarefa normal sobre progressões geométricas, o que, podemos inferir, estimula o Raciocínio Criativo no processo de resolução das questões da tarefa.

A tarefa nº 2 tem como objetivo identificar se o aluno consegue diferenciar progressão geométrica de progressão aritmética. Em seguida está a resposta da aluna para a questão b:

Figura 3: recorte tirado das tarefas resolvidas

b) Maria escreve que a sequência é uma progressão aritmética (PA). Qual a diferença entre uma progressão geométrica (PG) e uma progressão aritmética (PA)?

Uma PG é definida por uma razão que multiplica o termo anterior para obter a sequência. Por outro lado, a PA determina sua razão através de uma soma.

Fonte: arquivo pessoal

Para resolver essa tarefa, a aluna teve que buscar conhecimentos prévios sobre progressão aritmética, para poder diferenciar as duas. Observando a figura 3, é possível inferir que seu raciocínio transita entre o Raciocínio Memorizado, por se recordar de um conteúdo que ela já sabia para ter capacidade de compará-las, e o Raciocínio Criativo, pela questão não exigir da aluna algum algoritmo pronto de resolução, mas sim por possibilitar a ela que estruture sua resposta baseada em solucionar o problema.

A tarefa nº 3 tem como objetivo que o aluno consiga diferenciar progressões geométricas crescentes e decrescentes, e para resolver essa tarefa, a aluna colocou em prática o conhecimento que construiu no início do processo de resolução das tarefas.

O enunciado dessa tarefa traz resoluções de outros alunos para serem analisadas pela aluna, e assim responder as questões seguintes. Os recortes analisados nessa tarefa dizem respeito a uma PG decrescente, observe um dos recortes a seguir, na figura 4:

Figura 4: recorte tirado da tarefa nº 3

Resolução da aluna Isabela

c) (400, 200, 100, 50) (divide cada termo por 2)

razão $q = \frac{1}{2}$

Fonte: MINATO, 2019

A aluna conseguiu observar nessa atividade outra confirmação para a dúvida que teve no início do processo de resolução das atividades, quando

questionou sobre a possibilidade de divisão em uma progressão geométrica. Veja a seguir sua resposta na figura 5:

Figura 5: recorte tirado das tarefas resolvidas

a) Esta sequência é crescente ou decrescente? Por quê?

Decrescente. O número antecessor é maior que o sucessor (o primeiro termo é maior que o segundo). dessa forma a sequência de números está decrescendo.

Fonte: arquivo pessoal

Por mais que ela não tenha citado a divisão, ou multiplicação por $\frac{1}{2}$, ela pôde confirmar que seu estava correto, sua forma de definir uma progressão geométrica decrescente fica clara em sua resposta, ela definiu que, como os termos antecessores são maiores que seus sucessores, logo a sequência só pode ser decrescente. Além disso, o fato da tarefa exigir algo diferente do que se exige numa tarefa tradicional de matemática, pode-se deduzir que o Raciocínio Criativo esta presente nesse processo de resolução.

A tarefa nº 4 tem como objetivo que o aluno consiga realizar cálculos a fim de obter os termos da progressão geométrica, porém não será isso o objeto observado nessa tarefa. A seguir, na figura 6, está a resposta da aluna para a questão c desta tarefa:

Figura 6: recorte tirado das tarefas resolvidas

c) Quando queremos calcular o quinto termo (a_5) da progressão geométrica, chamamos $n=5$. No caso deste exercício vamos identificar:

O primeiro termo (a_1)= 2 $n=$ 1

O segundo termo (a_2)= 8 $n=$ 2

O terceiro termo (a_3)= 32 $n=$ 3

Fonte: arquivo pessoal

Na questão c da tarefa nº 4 é pedido à aluna que identifique os termos da sequência, do primeiro ao terceiro e a que n esses termos correspondem, a aluna respondeu corretamente e associou certo cada n ao seu respectivo termo da sequência. É possível concluir que a aluna utilizou o Raciocínio Algorítmico Familiar, uma vez que a sequência está descrita no enunciado da tarefa como se pode observar em seguida:

Figura 7: recorte tirado da tarefa nº 4

Agora observe a resolução do aluno André

$$\begin{array}{l}
 a_1 = 2 \\
 a_2 = 2 \cdot 4^{2-1} = 2 \cdot 4 = 8 \\
 a_3 = 2 \cdot 4^{3-1} = 2 \cdot 4^2 = 2 \cdot 16 = 32
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 a_1 = 2 \\
 a_2 = 8 \\
 a_3 = 32
 \end{array}
 \right.
 \quad (2, 8, 32)$$

Fonte: MINATO, 2019

Na figura 7 é possível constatar que o aluno André expos a sequência (2,8,32) em sua resolução, que foi analisada pela aluna com objetivo de resolver a tarefa, logo ela pode ter usado essa informação para responder a primeira parte da questão c. voltando-se para a segunda parte da questão agora, é aceitável inferir que a aluna tenha lançado mão do Raciocínio Criativo, uma vez que ela respondeu corretamente, como o esperado, conhecendo a fórmula ela pode ter deduzido que o n é o número que corresponde a cada termo da sequência e daí a resposta "1, 2 e 3".

As tarefas nº 5 e 7 têm objetivos muito parecidos, basicamente as duas pedem para que os alunos calculem termos da sequência utilizando a fórmula do termo geral da progressão geométrica. Nas figuras a seguir, é possível ver que a aluna colocou em prática a fórmula geral da progressão geométrica e calculou os termos indicados de cada sequência:

Figura 8: recorte tirado das tarefas resolvidas

d) É possível calcular o valor do a_6 sem ter que calcular os termos antecedentes? Se sim, explique como.

Sim, por meio da equação geral.

Para calcular o sexto termo: $a_6 = 2 \cdot 4^5 = 2 \cdot 1024 = 2048$

Fonte: arquivo pessoal

Figura 9: recorte tirado das tarefas resolvidas

c) É possível calcular o a_7 sem que seja necessário calcular o a_6 ? Faça o cálculo com a fórmula para verificar.

$$a_7 = 2 \cdot 4^6 = 2 \cdot 4096 = 8192$$

Fonte: arquivo pessoal

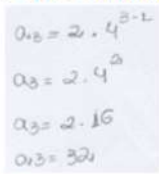
As figuras 8 e 9 correspondem às respostas das questões *c* e *d* das tarefas nº 5 e 7, respectivamente. Na figura 8, além de questionada sobre a possibilidade de se calcular o sexto termo da sequência, também é perguntado como isso seria possível, a aluna responde que seria possível por meio da “equação geral” e em seguida aplica o algoritmo de resolução, encontrando assim o sexto termo da sequência referida na tarefa nº 5. Já na figura 9 é pedido apenas que a aluna calcule o sétimo termo da sequência e a própria questão já indica o uso do termo geral para isso, em sua resposta a aluna aplica o algoritmo e obtém o sétimo termo da sequência.

Analisando mais especificamente a resposta da figura 8, agora voltada a evidenciar a sequência de raciocínio desenvolvida pela aluna, é possível inferir que ela desenvolve o Raciocínio Criativo para chegar à solução do problema, respondendo de qual forma conseguiria encontrar o determinado termo da sequência solicitado na questão, em seguida a mesma avança com o Raciocínio Algorítmico o qual também é usado para resolver a questão *c* da tarefa nº 7. A aluna identifica o algoritmo apropriado e o aplica para chegar ao resultado esperado.

A tarefa nº 8 tem como objetivo que o aluno consiga determinar o valor n utilizado na fórmula e construir o termo geral da progressão geométrica para o n ésimo termo. Na figura a seguir é possível observar as respostas da aluna para as questões *b*, *c* e *d* da tarefa:

Figura 10: recorte tirado das tarefas resolvidas

b) Para calcular o a_3 Caroline fez o cálculo como mostra a figura abaixo:



Note que os valores 2 e 4 continuam presentes, porém um dos valores do expoente mudou (3), com qual parte da fórmula o 3 se refere?

Se refere a "n"

c) Se fosse pedido para calcular o quarto termo, como você faria?

$a_4 = 2 \cdot 4^3 = 2 \cdot 64 = 128$

d) Agora, tente escrever a fórmula da progressão geométrica para a_n , onde n seja um número qualquer.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} =$

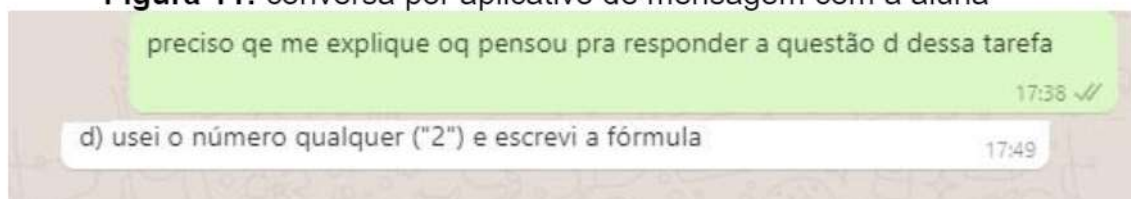
Fonte: arquivo pessoal

A tarefa cria condições e um ambiente com o decorrer das questões, com intenção de conduzir o aluno ao objetivo central, que está na resposta da questão *d*, escrever a fórmula para o *n*ésimo termo, onde *n* é "um número qualquer" como está no enunciado.

A questão *b* apresenta, em seu enunciado, uma parte de uma resolução em que o termo geral é aplicado, e pede para a aluna identificar a qual parte da fórmula, o único termo que muda se refere, ela responde corretamente que aquele o termo modificado na resolução se refere ao *n*. Em seguida, na questão *c* é pedido para que a aluna encontre o quarto termo da sequência, o que ela fez corretamente. É possível inferir a esse ponto que ela sabe o termo geral e como aplicá-lo, assim é provável que a aluna tenha utilizado o Raciocínio Algorítmico familiar. Ao chegar à pergunta *d* na qual ela deveria escrever a fórmula da progressão geométrica para o *n*ésimo termo, ela escreve a fórmula para $n=2$, porém, o enunciado pede para que seja um *n* qualquer, e isso pode tê-la influenciado a deduzir que, como o *n* era qualquer, logo o dois seria suficiente para solucionar o problema. Pode-se entender que a aluna utilizou Raciocínio Criativo para sua conclusão, apesar de ela estar

errada, uma vez que o raciocínio não precisa estar correto, desde que faça sentido para quem o coloca em prática.

Figura 11: conversa por aplicativo de mensagem com a aluna



Fonte: arquivo pessoal

A figura 11 confirma o equívoco da aluna ao resolver a questão *d* com o número qualquer dois.

A tarefa nº 10 tem como objetivo identificar erros durante a aplicação do algoritmo de resolução. A aluna foi capaz de identificar, solucionar o erro, e apresentar a resposta correta do cálculo. Observe a seguir na figura 12:

Figura 12: recorte tirado das tarefas resolvidas

As alunas Isabela e Aline resolveram a mesma questão e apesar de utilizarem a mesma fórmula o valor do a_3 da aluna Isabela está errado. Por quê?

Isabela errou na ordem de multiplicar. Para descobrir o a_3 ela deveria resolver primeiro o 4^2 que é $=16$, dessa forma $a_3 = 2 \cdot 16 = 32$.

Fonte: arquivo pessoal

Neste processo de identificar e solucionar o erro, é possível inferir que a aluna teve um processo de Raciocínio Algorítmico Guiado por texto, pois na tarefa estava exposta a maneira correta de como aplicar o algoritmo necessário, e ela identificou o erro e fez uma adaptação usando Raciocínio Criativo, isso é deduzido a partir do ponto em que a aluna modificou detalhes pequenos na resolução a fim de obter a resposta correta.

As tarefas elaboradas por Minato (2019) tiveram um grau de complexidade intensificado desde a tarefa nº 1 até a nº 12. A tarefa nº 12 tinha como objetivo provocar reflexões sobre a interpretação de uma situação-problema, e aplicar conceitos para o cálculo da interpolação. A aluna teve que desempenhar um conhecimento mais avançado em relação ao conteúdo de progressões geométricas para resolver esta tarefa do que para resolver as anteriores.

Figura 13: recorte tirado das tarefas resolvidas

Tarefa nº 12

A aluna Claudia não conseguiu resolver a questão. Mas ao observar sua anotação, podemos verificar que ela estava na direção correta.

Resolução da aluna Claudia

4) Insira ou interpole 3 meios geométricos positivos entre 2 e 162.

2, —, —, —, 162

a) De acordo com a anotação da aluna, qual o valor de a_1 ?
O valor de a_1 é 2.

b) Inserindo três valores entre 2 e 162, teríamos que 162 seria o a_n , sendo $n = \underline{162}$ (o último termo da progressão geométrica).

Fonte: arquivo pessoal

Como é possível observar na figura 13, a aluna começou bem suas respostas para a tarefa, com a letra a , onde identifica que o 2 é o valor correspondente à a_1 , pode-se inferir que ela usou o Raciocínio Algorítmico Familiar, já que utilizou uma informação descrita na imagem presente no enunciado para chegar a sua resposta, sem deixar de levar em consideração o Raciocínio Criativo, que pode estar presente pelo fato da aluna ter conseguido identificar a informação e perceber que ela resolveria seu problema naquela questão.

Porém, na letra b , é questionado a que n o valor 162 é atribuído e ela deveria ter respondido 5. Pode-se entender que seu raciocínio neste caso foi imitativo e provavelmente está presente nesta resolução o Raciocínio Algorítmico Familiar, devido a ela ter usado uma informação do enunciado como uma possível resposta, que nesse caso está errada.

Figura 14: recorte tirado das tarefas resolvidas

- c) Observando a fórmula da progressão geométrica, qual o valor que está faltando para que possamos utilizá-la?

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

está faltando $q=3$

- d) Agora, calcule o a_2 , a_3 e a_4 .

$$a_2 = 2 \cdot 3^1 = 6$$

$$a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$$

$$a_4 = 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$$

- e) Escreva como ficou a sequência.

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 6$$

$$a_3 = 18$$

$$a_4 = 54$$

$$a_5 = 162$$

Fonte: arquivo pessoal

No restante da tarefa nº 12 a aluna conseguiu atender as expectativas da resolução, como pode ser verificado na figura 14. Na questão c ela conseguiu identificar e calcular o valor ausente para ser possível utilizar a fórmula e na questão d, com um processo de Raciocínio Algorítmico ela aplicou a fórmula e obteve os valores que completam a sequência, expondo-a na letra e.

5. Considerações finais

O desenvolvimento deste trabalho teve por objetivo evidenciar os tipos de raciocínio que fazem parte do processo de resolução de uma Tarefa de Análise da Produção Escrita (TAPE). Para alcançar esse objetivo foi recorrida a fundamentação teórica sobre o uso da Análise da Produção Escrita como estratégia de ensino citando Santos (2014), a autora defende o uso da Análise da Produção Escrita como uma ferramenta que pode fortalecer a relação de ensino-aprendizagem, onde professor e aluno assumem seus papéis na sala de aula, sendo ambos ativos. Assim o professor tem recursos para diagnosticar a matemática que seus alunos sabem e a qualidade de sua atuação dentro da sala de aula.

Além disso, foi necessário um estudo um pouco mais aprofundado sobre os tipos de raciocínios ou sequências de raciocínios evidenciados na resolução de tarefas matemáticas, baseado em designações de Lithner (2008), que trouxe cinco classificações, as quais estão presentes neste trabalho, como: Raciocínio Memorizado, Raciocínio Algorítmico, Raciocínio Algorítmico Familiar, Raciocínio Algorítmico Guiado e Raciocínio Criativo.

A intenção de coleta de dados para essa pesquisa era através da aplicação das atividades produzidas por Minato (2019) a alunos do 1º ano do ensino médio porém, devido às limitações em virtude da pandemia da COVID-19 (SARS-CoV-2), essa coleta precisou ser adaptada às condições e reduzida, então os dados analisados neste trabalho são provenientes da resolução de nove das doze tarefas produzidas, por uma aluna de 17 anos, cursando o 3º ano do Ensino Médio.

Com os resultados obtidos a partir da análise dessas tarefas resolvidas, foi possível compreender algumas sequências de raciocínio desenvolvidas pela aluna durante a resolução das tarefas. Ao longo da análise foi percebido que mesmo para respostas erradas existe um raciocínio empregado para solucionar o problema. Em tarefas que foram resolvidas incorretamente o Raciocínio Criativo foi identificado, isso mostra que o tipo de raciocínio não tem a ver com a resolução de uma tarefa estar ou não correta .

O raciocínio que se destacou, estando presente em quase todas as respostas analisadas foi o Raciocínio Criativo, uma vez que a aluna conseguiu construir e estruturar seu conhecimento em muitas das suas conclusões, ademais, o raciocínio algoritmo vem em seguida e foi inferido várias vezes durante a análise, o Raciocínio Algorítmico Familiar, Raciocínio Algorítmico guiado por pessoa e também o Raciocínio Memorizado foram citados durante a análise. Dito isso, essa análise é baseada nas definições de raciocínio propostas por Lithner e pelo ponto de vista da pesquisadora, logo poderia haver outros raciocínios empregues, dependendo das percepções de quem analisa.

A análise das tarefas voltada a apontar possíveis tipos de raciocínios é uma forma de entender como o aluno está estruturando suas respostas e a forma como aplica seu conhecimento matemático, podendo ser diagnosticado assim seu sucesso ou fracasso em suas resoluções de atividades, avaliativas ou não.

6. Referências

- ANTUNES, T. P. MENDES, M. T. DALTO, J. O. A Análise da Produção Escrita: um recurso para uma prática de avaliação da aprendizagem. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2017, Cascavel, Pr. **Anais [...]** Cascavel: SBEMPR, 2017. Disponível em: <http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/102/133>.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.
- CARDOSO, M. A. M. **Análise da Produção Escrita em matemática: quatro histórias da construção de uma proposta de ensino para a educação de jovens e adultos**. 2017. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.
- DONEZE, Iara. **Caderno de Tarefas de Análise da Produção Escrita para o Ensino de Matemática. Produto Educacional 03/2019**. Disponível em: <<https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4106>>. Acessado em: 15/05/2019
- DONEZE, I. S. DALTO, J. O. A construção de tarefas de Análise da Produção Escrita de professores para o ensino e aprendizagem de matemática. In: XII SEMINÁRIO SUL-MATO-GROSSENSE DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2018. **Anais [...]**, Campo Grande: UFMG, 2018. Disponível em: <<http://seer.ufms.br/ojs/index.php/sesemat/article/view/6031/4933>>. Acesso em: 01/07/2019
- LIMA, R. B. CARNEIRO, L. F. G. DALTO, J. O. Resoluções de atividade sobre média analisadas por estudantes do ensino médio. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2017, Cascavel, Pr. **Anais [...]** Cascavel: SBEMPR, 2017. Disponível em: <http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/78/106>. Acesso em: 29/10/2018.
- LITHNER, Johan. **A RESEARCH FRAMEWORK FOR CREATIVE AND IMITATIVE REASONING**. Educational Studies in Mathematics, Vol. 67, No. 3 (Mar., 2008), pp. 255-276. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/40284656>>. Acesso em: 29/04/2019
- MICHAELIS. 3ª edição – São Paulo – Ed. Melhoramentos, 2008.
- MINATO, N. S. **Tarefas de Análise da Produção Escrita para o ensino de Progressões geométricas**. 2019. 51 f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2019.
- PEREIRA, F. F. DONEZE, I. S. DALTO, J. O. Caracterizando tarefas de Análise da Produção Escrita por meio do ensino de equações. **Revista paranaense de educação matemática**. Campo Mourão, Pr, v.7, n.14, jul.-dez. 2018.
- SANTOS, E. R. dos. **Análise da Produção Escrita em Matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. 156 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

SILVA, E. P. OLIVEIRA, W. I. DALTO, J. O. Alunos corrigindo provas de matemática: algumas reflexões sobre avaliação. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2017, Cascavel, Pr. **Anais [...]** Cascavel: SBEMPR, 2017. Disponível em: <
http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/download/196/156>. Acesso em: 29/10/2018.