

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA

MIKAEL NEDEL HARTMANN

APLICAÇÕES DE CONTROLADORES FOPID NA ENGENHARIA
MECATRÔNICA

CURITIBA

2021

MIKAEL NEDEL HARTMANN

APLICAÇÕES DE CONTROLADORES FOPID NA ENGENHARIA MECATRÔNICA

FOPID Controllers Applications in Mechatronics Engineering

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecatrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Brero de Campos.

CURITIBA

2021

MIKAEL NEDEL HARTMANN

APLICAÇÕES DE CONTROLADORES FOPID NA ENGENHARIA MECATRÔNICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecatrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 22/Julho/2021

Paulo Roberto Brero de Campos
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Carlos Raimundo Erig Lima
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Miguel Antonio Sovierzski
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

CURITIBA

2021

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais pelo seu apoio incondicional.

Agradeço ao Prof. Dr. Paulo Roberto Brero de Campos pela orientação e por tornar este trabalho possível.

Aos meus colegas de curso e professores que tiveram uma contribuição importantíssima na minha formação.

Aos meus colegas de laboratório, em especial ao Me. Rafael de Castro Martins Nogueira, por todo o aprendizado que obtive na área de robótica.

Por fim, agradeço a minha gata Freyja pela companhia que me fez enquanto este projeto foi realizado.

RESUMO

Controladores FOPID advém da generalização do controlador PID por meio das formulações do cálculo fracionário e por conseguinte possuiu uma maior capacidade de ajuste em relação aos controladores tradicionais. Logo, neste trabalho buscou-se realizar um levantamento de estudo de casos no contexto da engenharia mecatrônica comparando o desempenho de controladores PID e FOPID. Para o escopo de controle de processos, foi usada a toolbox FOMCON que permite inserir expoentes fracionários nas funções de transferência. Então, utilizando-se do algoritmo evolucionário PSO para a busca dos parâmetros que minimizam os índices de desempenho, foram realizadas simulações para um sistema de controle de nível, para um sistema de aquecimento de tanque agitado e para uma aproximação SOPDT de um sistema desconhecido. Enquanto para os sistemas robóticos, foram modeladas a cinemática e dinâmica de robôs manipuladores com configurações de dois, quatro e seis graus de liberdade. Como a técnica empregada nestes sistemas foi a de torque computado, no domínio do tempo, corrigiu-se os problemas numéricos provenientes da formulação da derivação fracionária numérica de Grünwald-Letnikov por meio da técnica de memória adaptativa. Os resultados das simulações confirmaram a hipótese de que a flexibilidade dos controladores FOPID implicam em um desempenho melhor ou no mínimo equivalente relação ao PID. Assim, mostrou-se o grau de melhora dos indicadores de desempenho que o FOPID pôde proporcionar para cada sistema analisado.

Palavras-chave: Controle. FOPID. Cálculo Fracionário. Mecatrônica. Robótica.

ABSTRACT

FOPID controllers come from the PID controller's generalization by fractional calculus formulations and therefore have a greater tuning capacity compared to traditional controllers. Therefore, this paper sought out to realize a case study survey in the mechatronics engineering context comparing PID and FOPID controllers' performance. For the process control scope, the FOMCON toolbox was used, what allowed inserting fractional powers in transfer functions. Then, utilizing the evolutionary algorithm PSO to search for parameters for performance index minimization, simulations were executed for a level control system, for a stirred tank heating system and for a unknown system's SOPDT approximation. While for robotics systems, manipulator robots' kinematics and dynamics configurations of two, four and six degrees of freedom were modeled. As computed torque was the law applied in these systems, in time domain, numerical problems from Grünwald-Letnikov numerical fractional derivative formulations were corrected by adaptative memory approach. The simulations outcome confirmed the hypothesis that FOPID controllers' flexibility results in a better or at least equivalent performance in comparison to PID. Thus, it was shown that FOPID is able to provide a degree of improvement in performance index for each analyzed system.

Keywords: Control. FOPID. Fractional Calculus. Mechatronics. Robotics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Controlador FOPID	11
Figura 2 - Plano complexo fracionário	21
Figura 3 - Diagramas de Bode de s^α	22
Figura 4 - Aproximação CRONE: (a) de ganho, (b) de fase	23
Figura 5 - Plano FOPID com alocação dos controladores P, PI, PD e PID em função dos parâmetros λ e μ	24
Figura 6 - Processo de armazenagem de líquido	25
Figura 7 - Processo de aquecimento de tanque agitado	27
Figura 8 - Orientação das juntas de um robô manipulador	29
Figura 9 - Cinemática direta e inversa	30
Figura 10 - Torque computado	33
Figura 11 - Torque computado fracionário	34
Figura 12 - Representação em blocos da planta de controle de nível	37
Figura 13 - Sistema de controle de nível - resposta ao degrau do IAE em: (a) 10%, (b) 50%, (c) 90%	38
Figura 14 - Sistema de controle de nível - resposta ao degrau ITAE em: (a) 10%, (b) 50%, (c) 90%	38
Figura 15 - Sistema de controle de nível - resposta ao degrau ISE em: (a) 10%, (b) 50%, (c) 90%	39
Figura 16 - Sistema de controle de nível - resposta ao degrau ITSE em: (a) 10%, (b) 50%, (c) 90%	39
Figura 17 - Sistema de controle de nível - comparativo das aproximações FOPID ..	40
Figura 18 - Sistema de aquecimento de tanque agitado - resposta ao degrau: (a) IAE, (b) ITAE, (c) ISE, (d) ITSE	42
Figura 19 - Sistema de aquecimento de tanque agitado - Sinal de controle: (a) IAE, (b) ITAE, (c) ISE, (d) ITSE	44
Figura 20 - Sistema de aquecimento de tanque agitado - resposta ao distúrbio: (a) IAE, (b) ITAE, (c) ISE, (d) ITSE	44
Figura 21 - Aproximação de uma planta pelo método SOPDT	46
Figura 22 - Sistema desconhecido - resposta ao degrau SOPDT: (a) IAE, (b) ITAE, (c) ISE, (d) ITSE	47
Figura 23 - Sistema desconhecido - resposta ao degrau da planta real: (a) IAE, (b) ITAE, (c) ISE, (d) ITSE	48
Figura 24 - Fluxograma para o coeficiente binomial	50
Figura 25 - Representação gráfica da função $\gamma(x)$	51
Figura 26 - Fluxograma da função $\text{negamma}(\ln)$	52
Figura 27 - Coeficiente da varredura das derivadas fracionárias	53
Figura 28 - Coeficiente da varredura das integrais fracionárias	54
Figura 29 - Métodos de varredura	55
Figura 30 - Varredura por <i>short memory principle</i> da meia derivada da função x	56

Figura 31 - Varredura por memória adaptativa da meia derivada da função x	56
Figura 32 - Varredura com tempo de amostragem uniforme da função $\text{sen}(x)$	57
Figura 33 - Erro de varredura	57
Figura 34 - Varredura por memória adaptativa.....	58
Figura 35 - Robô planar 2R - configuração cinemática	60
Figura 36 - Robô planar 2R - percurso do efetuador.....	63
Figura 37 - Robô planar 2R - trajetória da (a) junta 1, (b) junta 2.....	63
Figura 38 - Robô planar 2R - resultado cartesiano.....	64
Figura 39 - Robô planar 2R - detalhamento do resultado cartesiano	65
Figura 40 - Robô planar 2R - erro absoluto.....	65
Figura 41 - Robô planar 2R - sinal de controle: (a) junta 1, (b) junta 2.....	67
Figura 42 - Robô planar 2R - resultado cartesiano invertido	68
Figura 43 - Robô SCARA - configuração cinemática	69
Figura 44 - Robô SCARA - trajetória: (a) junta 1, (b) junta 2, (c) junta 3, (d) junta 4	73
Figura 45 - Robô SCARA - resultado cartesiano.....	74
Figura 46 - Robô SCARA - detalhamento do resultado cartesiano	74
Figura 47 - Robô SCARA - erro (a) de posição, (b) de orientação	75
Figura 48 - Robô SCARA - sinal de controle: (a) junta 1, (b) junta 2, (c) junta 3, (d) junta 4	76
Figura 49 - Robô de 6GDL - configuração cinemática	77
Figura 50 - Robô de 6GDL - trajetória: (a) junta 1, (b) junta 2, (c) junta 3, (d) junta 4, (e) junta 5, (f) junta 6	80
Figura 51 - Robô de 6GDL - resultado cartesiano.....	81
Figura 52 - Robô de 6GDL - detalhamento do resultado cartesiano	81
Figura 53 - Robô de 6GDL - erro (a) de posição, (b) de orientação	82
Figura 54 - Robô de 6GDL - sinal de controle: (a) junta 1, (b) junta 2, (c) junta 3, (d) junta 4, (e) junta 5, (f) junta 6	84
Figura 55 - Influências das componentes do PSO	106

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Sistema de controle de nível - comparação dos índices de desempenho do controle de nível	39
Tabela 2 - Sistema de aquecimento de tanque agitado - comparação dos índices de desempenho.....	43
Tabela 3 - Sistema de aquecimento de tanque agitado - características das respostas ao degrau.....	43
Tabela 4 - Sistema de aquecimento de tanque agitado - índices de desempenho para o caso regulatório.....	45
Tabela 5 - Sistema desconhecido - índices de desempenho para a aproximação SOPDT	47
Tabela 6 - Sistema desconhecido - Índices de desempenho da planta real	48
Tabela 7 - Robô planar 2R - tabela DHM	60
Tabela 8 - Robô planar 2R - resultados da trajetória otimizada	66
Tabela 9 - Robô planar 2R - parâmetros dos controladores	66
Tabela 10 - Robô planar 2R - resultados da trajetória invertida	67
Tabela 11 - Robô planar 2R - resultados da trajetória com maior velocidade	68
Tabela 12 - Robô SCARA - tabela DHM	70
Tabela 13 - Robô SCARA - resultados da trajetória otimizada.....	75
Tabela 14 - Robô SCARA - parâmetros dos controladores.....	76
Tabela 15 - Robô de 6GDL - tabela DHM	78
Tabela 16 - Robô de 6GDL - resultados da trajetória otimizada.....	83
Tabela 17 - Robô de 6GDL - parâmetros dos controladores.....	83
Tabela 18 - Parâmetros dos controladores de nível.....	91
Tabela 19 - Parâmetros dos controladores de temperatura	91
Tabela 20 - Parâmetros dos controladores de temperatura para distúrbio	92
Tabela 21 - Parâmetros dos controladores SOPDT	92
Tabela 22 - Parâmetros do robô planar 2R com o dobro da velocidade	92

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
1.1 TEMA	11
1.2 PROBLEMA	12
1.3 OBJETIVOS	13
1.3.1 Objetivo Geral	13
1.3.2 Objetivos Específicos	13
1.4 JUSTIFICATIVA	14
1.5 ESTRUTURA DO DOCUMENTO	14
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1 CÁLCULO FRACIONÁRIO	16
2.1.1 Definições	16
2.1.2 Não Localidade	18
2.1.3 Aproximações Numéricas	18
2.1.4 Problemas Numéricos	19
2.1.5 Domínio de Laplace	20
2.2 TEORIA DE CONTROLE FRACIONÁRIO	20
2.2.1 Função de Transferência	21
2.2.2 Diagramas de Bode	22
2.2.3 Aproximação por Ordem Inteira	22
2.3 CONTROLADOR FOPID	23
2.4 APLICAÇÕES EM CONTROLE DE PROCESSOS	25
2.4.1 Sistema de Armazenagem de Líquido	25
2.4.2 Sistema de Aquecimento de Tanque Agitado	26
2.4.3 Sistemas com Tempo Morto e Aproximação Padé	27
2.5 APLICAÇÕES EM ROBÓTICA	28
2.5.1 Modelagem Cinemática	28
2.5.2 Planejamento de Trajetória	31
2.5.3 Modelagem Dinâmica	31
2.5.4 Torque Computado	32
3 CONTROLE DE PROCESSOS	35
3.1 CONTROLE DE NÍVEL	35
3.1.1 Metodologia	35
3.1.2 Análise dos Resultados	37
3.2 SISTEMA DE AQUECIMENTO DE TANQUE AGITADO	40
3.2.1 Metodologia	40
3.2.2 Análise dos Resultados	41
3.3 IDENTIFICAÇÃO E SINTONIA DE SISTEMA DESCONHECIDO	45
3.3.1 Metodologia	45

3.3.2 Análise dos Resultados	46
4 ALGORITMO PARA A DERIVADA FRACIONÁRIA.....	49
4.1 METODOLOGIA	49
4.1.1 Função Gamma e Overflow	49
4.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS	55
5 CONTROLE DE ROBÔS MANIPULADORES	59
5.1 RÔBO PLANAR 2R.....	59
5.1.1 Metodologia	59
5.1.2 Análise dos Resultados	64
5.2 SCARA.....	69
5.2.1 Metodologia	69
5.2.2 Análise dos Resultados	73
5.3 MANIPULADOR DE SEIS GRAUS DE LIBERDADE.....	77
5.3.1 Metodologia	77
5.3.2 Análise dos Resultados	80
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
REFERÊNCIAS.....	87
APÊNDICE A - PARÂMETROS DOS CONTROLADORES	90
APÊNDICE B - FUNÇÃO PARA GAMMALN NEGATIVO	93
APÊNDICE C - CÓDIGO PARA A DERIVADA FRACIONÁRIA VIA MEMÓRIA ADAPTATIVA	95
APÊNDICE D - MATRIZES DO ROBÔ DE SEIS GRAUS DE LIBERDADE	98
ANEXO A - ALGORITMO EVOLUCIONÁRIO.....	105
ANEXO B - LEIS DE CONTROLE PARA ROBÔS MANIPULADORES	107

1 INTRODUÇÃO

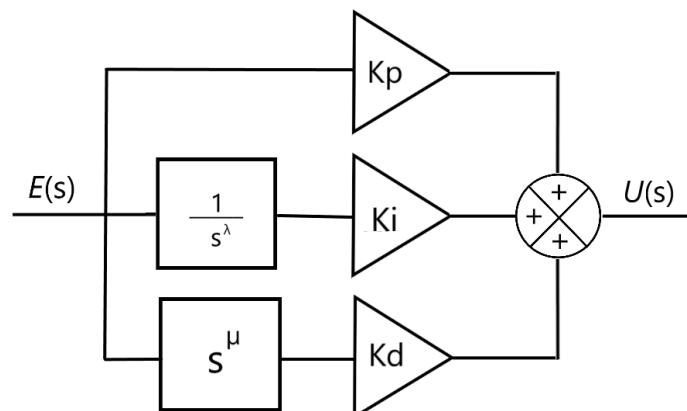
1.1 TEMA

Tradicionalmente na teoria de controle são utilizados controladores de ordem inteira, isto é, controladores que usam de derivação e integração de ordem inteira, sendo o caso mais comum o controlador Proporcional Integral Derivativo (PID). Já o controle de ordem fracionária possui como fundamentação teórica o cálculo de ordem fracionária, o qual generaliza a derivação e a integração para a ordem não inteira (VALÉRIO; DA COSTA, 2013).

O termo “fracionária”, tanto para o campo do cálculo quanto do controle, pode induzir erroneamente a ideia de que as derivadas e integrais restringem as suas ordens ao conjunto dos números racionais. Contudo, é importante ressaltar que dentro deste campo de estudo estão incluídos conjuntos numéricos mais abrangentes como o conjunto dos reais e dos números complexos.

O conceito de um controlador PID de ordem fracionária (*Fractional Order Proportional Integral Derivative*, FOPID) foi proposto pela primeira vez por Podlubny (1994). O formato básico de um controlador FOPID pode ser visualizado na Figura 1 (ANANTACHAISILP; LIN, 2017), em que os parâmetros “ λ ” e “ μ ” estão restritos ao domínio dos números reais.

Figura 1 - Controlador FOPID



Fonte: Autoria própria (2021)

Na literatura recente, encontra-se como o estado da arte para controladores fracionários a combinação da sua concepção original com demais técnicas conceituadas no ramo de controle não linear e controle inteligente (RASHEED; AL-ARAJI, 2017).

Bingi *et al.* (2018) apresentaram um estudo comparativo de controladores PID e FOPID de dois graus de liberdade, os quais adquirem maior flexibilidade e melhor desempenho para sistemas instáveis.

Kumar e Kumar (2017) aplicaram pré-compensação fuzzy e pré-compensação fuzzy de ordem fracionária sobre controladores PID e FOPID, obtendo maior robustez para um robô manipulador ao utilizar da ordem fracionária.

Ainda no estado da arte, Tepljakov *et al.* (2018) realizaram um levantamento de aplicações industriais recentes de controladores FOPID, onde pode-se encontrar aplicações para o controle de turbinas eólicas, sistemas eletro-hidráulicos, rotores duplos, veículos guiados por trilho e acionamentos elétricos.

Tratando-se da sintonia de controladores FOPID, um dos algoritmos mais recorrentes no atual estado da arte é a Otimização por Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization*, PSO). Esta técnica comparada ao algoritmo genético requer menos iterações e custo computacional para alcançar o mesmo mínimo local na sintonia de controladores FOPID (MOHAMED; KHASHAN, 2014).

Com este projeto de pesquisa pretende-se avaliar o desempenho de controladores FOPID aplicados sobre plantas referentes à área de atuação da engenharia mecatrônica.

1.2 PROBLEMA

Problemas como o controle de nível, controle de temperatura e controle de manipuladores robóticos são exemplos de aplicação da teoria de controle dentro da área de atuação da engenharia mecatrônica, sendo que estes estão sujeitos a não linearidade ou a controle multivariável. A aplicação da teoria de

controle de ordem fracionária poderia melhorar o desempenho do controle destes sistemas?

Segundo Valério e Da Costa (2013), devido à possibilidade de variar a ordem das derivadas e integrais nos mecanismos de controle, tem-se a inserção de mais graus de liberdade para a sintonia dos controladores. Desta forma, espera-se que os controladores fracionários tenham robustez e índices de desempenho superiores, ou no mínimo equivalentes, aos controladores tradicionais.

Por outro lado, tanto a sintonia quanto a implementação de um controlador de ordem fracionária possuem uma dificuldade mais elevada comparada a de um controlador tradicional. Fani e Shahraki (2016) apontam que a sintonia de controladores FOPID para manipuladores robóticos é muito difícil ou praticamente impossível sem o uso de ferramentas de otimização.

1.3 OBJETIVOS

Nesta seção é apresentado o objetivo geral do presente trabalho e posteriormente são descritos os seus objetivos específicos.

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do trabalho trata de simular o desempenho de controladores FOPID ao serem aplicados em plantas lineares e a robôs manipuladores, e compará-los com os controladores PID tradicionais.

1.3.2 Objetivos Específicos

Para atingir o objetivo geral, é necessário desenvolver os seguintes objetivos específicos:

- Identificar e solucionar problemas numéricos decorrentes das operações fracionárias utilizadas nas simulações deste trabalho;

- Avaliar e comparar o desempenho do controlador FOPID para plantas de controle de nível, controle de temperatura e aproximações com tempo morto;
- Avaliar e comparar o comportamento de leis de controle fracionárias para configurações de robôs manipuladores de dois, quatro e seis graus de liberdade.

1.4 JUSTIFICATIVA

Com o avanço tecnológico, ferramentas mais sofisticadas na área de controle são demandadas. As técnicas oriundas do cálculo fracionário podem ser aplicadas e combinadas com outras estruturas de controladores para prover melhores índices de desempenho, sendo este um requisito para sistemas que exigem alta precisão e exatidão, como o caso de robôs cirurgiões.

Neste sentido, é importante verificar o grau de redução no valor dos índices de desempenho que a flexibilidade dos controladores fracionários pode proporcionar para estes sistemas (que significa uma melhoria no desempenho do sistema). Desta forma, pode-se analisar o custo e o benefício da implementação da ordem fracionária para os processos industriais, como discutido por Tepljavok *et al.* (2018).

Este trabalho propõe a realização de simulações de malhas de controle de nível não linear, temperatura, planta desconhecida e manipuladores robóticos utilizando controladores FOPID, e a comparação dos resultados obtidos com os controladores tradicionais.

1.5 ESTRUTURA DO DOCUMENTO

Este documento está organizado em seis seções, sendo este capítulo a introdução do trabalho.

Os capítulos 2 a 5 referem-se ao desenvolvimento, onde o capítulo 2 trata da fundamentação teórica de todos os temas abordados na pesquisa, isto é, cálculo fracionário, teoria de controle fracionário, controle de processos e

robótica. Enquanto os capítulos 3, 4 e 5 são designados a cada um dos três objetivos específicos apresentados na subseção 1.3.1.

O capítulo 4 inteiramente trata da metodologia e a análise dos resultados para o objetivo específico responsável pelos erros numéricos da derivada fracionária. Os capítulos 3 e 5 se subdividem em 3 seções, nas quais são abordados a metodologia e os resultados de cada estudo de caso de modo isolado e sequencial.

Por fim, têm-se o capítulo de conclusão seguida pelas referências bibliográficas, apêndices e anexos utilizados no trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é apresentada a teoria que fundamenta as operações fracionárias aplicadas no controlador FOPID, bem como a base teórica necessária para a simulação dos estudos de caso para as plantas de controle de processos e de robôs manipuladores.

2.1 CÁLCULO FRACIONÁRIO

O cálculo diferencial e integral é a base matemática para praticamente todo o campo de estudo da física e da engenharia. Mas o que não é abordado nesses cursos é que no mesmo momento que foram criadas as derivadas e integrais de primeira, segunda ordem, etc., alguns matemáticos começaram a discutir as derivadas e integrais de ordem fracionária. Assim, hoje em dia muitas áreas estão utilizando o cálculo fracionário. Para a área de controle existem muitas aplicações do cálculo fracionário, e tem-se como fundamentação teórica a generalização do cálculo para a ordem fracionária. Esta seção tem como intuito a apresentação dos conceitos fundamentais das derivadas e integrais fracionárias, as quais são aplicadas no decorrer deste trabalho.

As informações contidas nesta seção são apresentadas em Valério e Da Costa (2013) e em Monje *et al.* (2010).

2.1.1 Definições

Na literatura encontra-se uma grande variedade de definições para as operações fracionárias, sendo duas bastante usuais: as definições de Riemann-Liouville e a de Grünwald-Letnikov.

A definição de Riemann-Liouville parte inicialmente da integral fracionária e posteriormente estende-se para a derivada. A integral fracionária de Riemann-Liouville é apresentada na equação (1).

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt \quad (1)$$

onde “ α ” representa a ordem da integral, “ c ” denota a localidade, apresentado na subseção 2.1.1, e “ I ” a representação da operação da integral.

A derivada nesta formulação pode ser representada a partir da definição da integral e da função “ceil”, a qual retorna o menor número inteiro maior que o argumento, como mostrado na equação (2).

$$\frac{d^a}{dx^a} f(x) = \frac{d^{[a]}}{dx^{[a]}} I^{[a]-a} f(x) \quad (2)$$

A definição também pode ser denotada através do operador diferintegral, o qual descreve de forma mais compacta em um mesmo operador a derivada de Riemann-Liouville para α positivos e a integral, sendo vista como uma antiderivada, para α negativos. A notação do operador é apresentada na equação (3).

$$D_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{d^{[a]}}{dx^{[a]}} I^{[a]-a} f(x) & a > 0 \\ f(x) & a = 0 \\ I^{-\alpha} f(x) & a < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Por sua vez, a definição de Grünwald-Letnikov, de modo análogo ao cálculo clássico, tem a formulação de derivada partindo da aplicação de limites na função. Esta definição está expressa na equação (4).

$${}_c D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{t-c}{h}} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \quad (4)$$

onde “ k ” é a variável auxiliar para a varredura da função e “ h ” um intervalo infinitesimal tal como no cálculo clássico.

Como “ α ” não é um número inteiro, o coeficiente binomial presente no somatório da equação (4) precisa ser representado pela função Gamma. Como a função Gamma não é definida para os números inteiros negativos, precisa-se desenvolver a formulação de modo independente para as integrais de ordem

inteira, conforme mostrado na equação (5), em que “n” representa a ordem fracionária para o domínio negativo.

$${}_c D_t^{-n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{k=0}^{\frac{t-c}{h}} \frac{h^n}{(n-1)!} \prod_{i=1}^{n-1} (k+i) f(t - kh) \quad (5)$$

2.1.2 Não Localidade

No cálculo clássico, a operação de derivada é dita como uma operação local, pois ela não depende de um intervalo como acontece com a integral. Entretanto, tanto as derivadas quanto as integrais de ordem fracionária dependem do instante “c” em que se inicia a operação. Em outras palavras, pode-se dizer que a operação possui “memória”.

Esta memória, em contraste com a memória das integrais de ordem inteira, não são triviais ao ponto de serem tratadas indefinidamente através de uma constante para uma integral de primeira ordem, ou por um polinômio para ordens mais elevadas.

A complexidade da derivada fracionária está implícita no somatório, presente na equação (4), o qual faz uma varredura em todo o passado da função para estabelecer o valor da derivada fracionária no ponto analisado conforme apresentado em 2.1.3.

2.1.3 Aproximações Numéricas

A resolução de operações fracionárias de modo analítico possui um grau de complexidade muito elevado em relação à ordem inteira, visto que técnicas como regra da cadeia, regra do produto e regra do quociente não funcionam neste contexto. Dessa forma, a formulação numérica torna-se bastante útil, e obrigatória nas aplicações de controle.

De modo análogo às técnicas de derivação e integração numérica de ordem inteira, usa-se um intervalo, ou tempo de amostragem, suficientemente pequeno da função. A formulação aproximada está apresentada na equação (6), em que “T_s” representa o tempo de amostragem.

$${}_c D_t^\alpha f(t) \approx \frac{1}{T_s^\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{t-c}{T_s}} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kT_s) \quad (6)$$

No caso inteiro, o cálculo da derivada numérica necessita apenas do ponto atual e do ponto anterior e diz-se que a operação não possui “memória”. Para ordens mais elevadas, a diferença dividida de Newton exige mais pontos passados, mas esta quantidade cresce proporcionalmente à ordem da derivada.

Já a integral inteira possui mais semelhança com as operações fracionárias, pois esta possui memória. Contudo, não há grandes problemas em computar a área abaixo da curva, pois com uma simples variável auxiliar pode-se criar um somatório com os valores anteriores.

No entanto, para o caso fracionário é necessário realizar a varredura de todo o passado da função para cada ponto calculado da derivada, como denotado pelo somatório na equação (6).

A exatidão da operação não depende exclusivamente do tempo de amostragem, mas também da quantidade de pontos computados na varredura do passado da função.

2.1.4 Problemas Numéricos

O primeiro problema numérico encontrado na equação (6) advém do coeficiente binomial quando o índice “k” ultrapassa o valor de 170. Ou seja, realiza-se uma operação fatorial que resulta em *overflow* no padrão de representação numérica *float* de 64 bits.

Esta situação ainda pode ser contornada quebrando-se as operações em outros somatórios e produtórios, mas, conforme o intervalo de tempo analisado da função cresce, o custo computacional torna-se inviável.

Para isso, foi proposta uma forma de truncamento do somatório, denominado *Short memory principle*. Este truncamento faz com que somente os pontos mais próximos do estado atual da função sejam computados, o que pode servir de aproximação em certas ocasiões, mas fornece um erro elevado nas integrais, justamente por ignorar os pontos passados.

Outras soluções conseguem fornecer uma resposta mais apropriada para a derivada fracionária. Essas soluções permitem o tempo de amostragem variar no tempo, cobrindo-se assim todo o passado da função, porém utilizando-se de uma quantidade limitada de pontos, assunto abordado em mais detalhes na seção 4.

2.1.5 Domínio de Laplace

Dentro das propriedades da transformada de Laplace, encontra-se a transformada da derivada e a transformada da integral. Estas propriedades podem ser generalizadas para as derivadas fracionárias no formato da equação (7).

$$\mathcal{L}[{}_0D_t^\alpha f(t)] = \begin{cases} s^\alpha F(s) & \alpha < 0 \\ F(s) & \alpha = 0 \\ s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} s^k {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(0) & \alpha > 0 \end{cases} \quad (7)$$

Com a representação das derivadas fracionárias através de um expoente não inteiro na variável “s”, viabiliza-se a manipulação das equações. Entretanto, resoluções analíticas ainda são complicadas devido à transformada inversa para retornar ao domínio do tempo.

2.2 TEORIA DE CONTROLE FRACIONÁRIO

Apesar dos controladores FOPID normalmente não serem projetados a partir de considerações analíticas, alguns aspectos teóricos, em especial no domínio da frequência, são importantes para ter-se uma interpretação mais fundamentada sobre seu funcionamento.

Os livros bases que referenciam esta subseção são Valério e Da Costa (2013) e Monje *et al.* (2010).

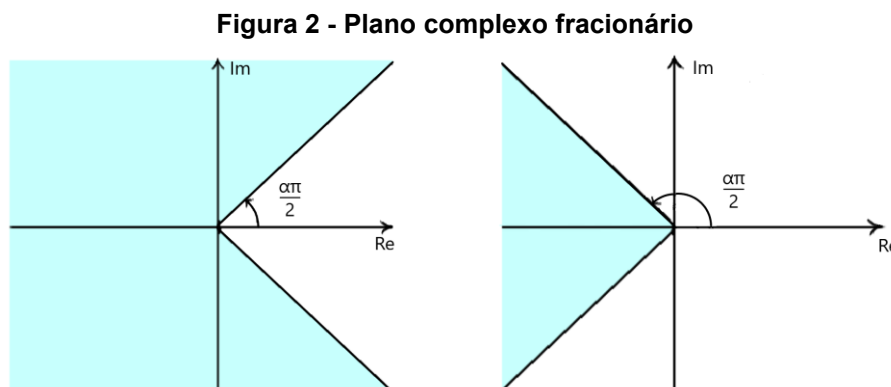
2.2.1 Função de Transferência

As funções de transferência de ordem fracionárias são descritas de forma similar às de ordem inteira, onde a única diferença notável está nos expoentes não inteiros da variável “s”.

Uma função de transferência é dita comensurável se ela puder ser descrita em um formato em que todos os expoentes da função sejam múltiplos inteiros de uma constante não inteira “ α ”, mostrado na equação (8), sendo que “ a_k ” e “ b_k ” são os escalares que acompanham cada elemento no numerador e no denominador.

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^{k\alpha}}{\sum_{k=0}^n a_k s^{k\alpha}} \quad (8)$$

Com esta representação, pode-se substituir “ s^α ” por uma nova variável e então analisar a estabilidade da função vista como uma expressão de ordem inteira. A Figura 2 mostra o plano complexo desta nova variável, onde o critério de estabilidade varia conforme o “ α ” adotado. Caso as raízes da função estejam na área sombreada, a função é estável.

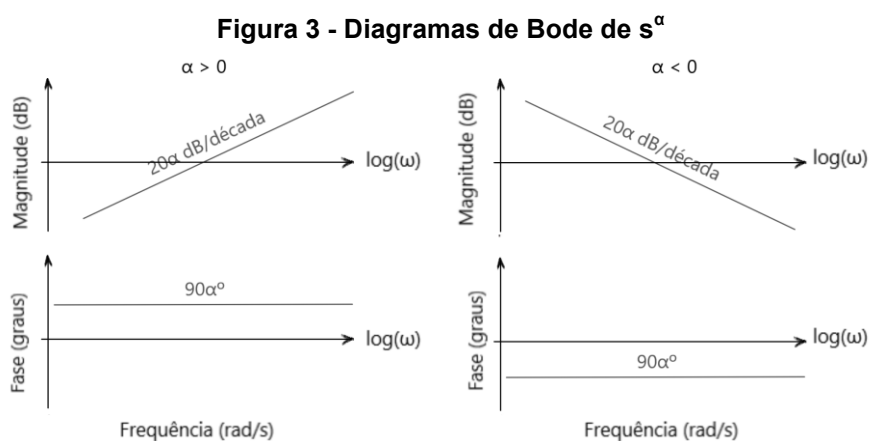


Fonte: Autoria própria (2021)

É interessante pontuar que o eixo imaginário é dito marginalmente estável para o controle clássico, sendo isto na verdade um caso particular do ângulo de estabilidade fracionário quando $\alpha = 1$.

2.2.2 Diagramas de Bode

Os diagramas de Bode de ganho e fase apresentam gráficos bastante intuitivos para a função “ s^α ”, em que “ α ” é um número real. A Figura 3 mostra que a variação de ganho é de 20α dB/década e a fase é de $90\alpha^\circ$.



Ainda há o estudo de polos e zeros fracionários através dos diagramas de Bode, no entanto, o estudo acima já é suficiente para a realização da aproximação de ordem inteira apresentada em 2.2.3.

2.2.3 Aproximação por Ordem Inteira

A aproximação *Commande Robuste d'Ordre Non-Entier* (CRONE), ou aproximação *Oustaloup*, é o método mais utilizado para aproximar uma função de transferência de ordem fracionária por uma função de transferência de ordem inteira.

Esta aproximação ocorre em um intervalo de frequência desejado $[\omega_l, \omega_h]$, onde a variável “ s ” elevado a um expoente fracionário é substituída por N polos e zeros. Notoriamente, quanto mais polos e zeros forem utilizados, mais precisa será a aproximação. A forma geral para esta aproximação é denotada pelas equações (9), (10) e (11) referenciadas em Valério e Da Costa (2013).

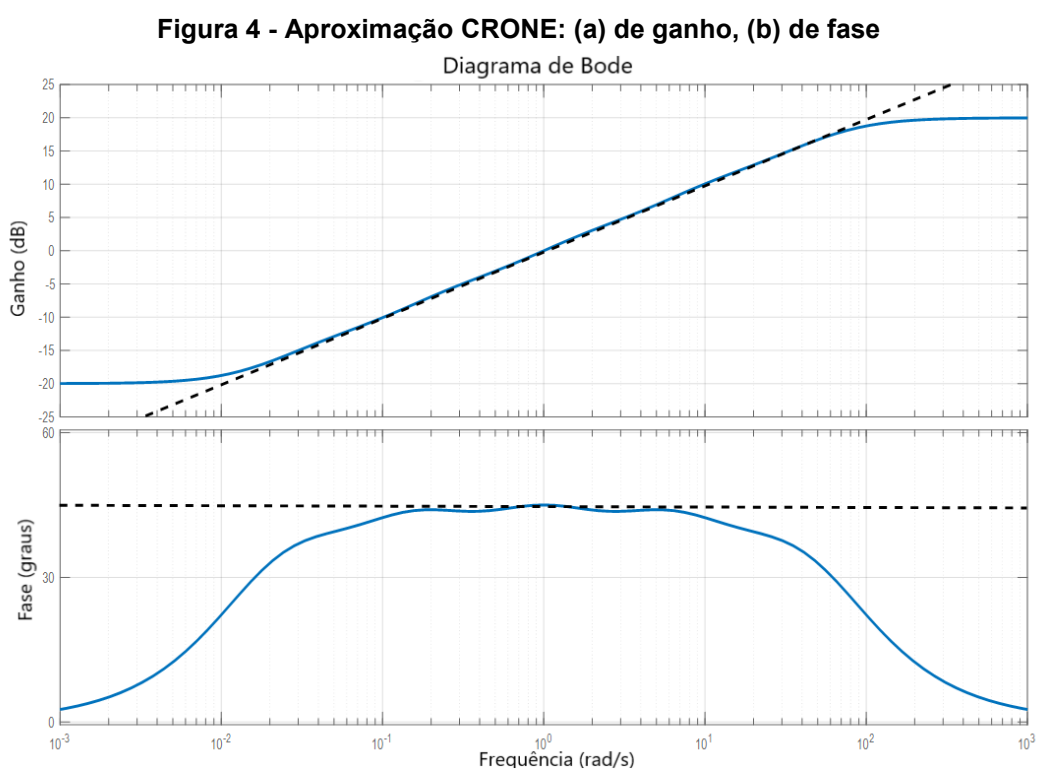
$$\omega_{p,m} = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{2m-1+\alpha}{2N}} \quad (9)$$

$$\omega_{z,m} = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{2m-1-\alpha}{2N}} \quad (10)$$

$$s^\alpha \approx C \prod_{m=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_{z,m}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p,m}}} \quad (11)$$

onde “ ω_p ” e “ ω_z ” são as frequências dos polos e zeros, e “C” é o ganho para compensar a aproximação.

Através dos diagramas de Bode da Figura 4 é possível visualizar graficamente um exemplo do comportamento desta aproximação.



Fonte: Autoria própria (2021)

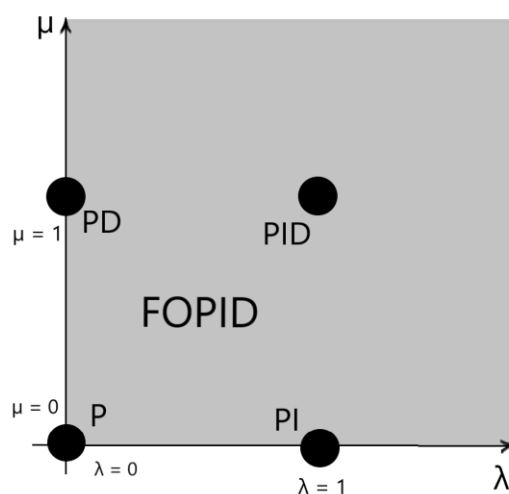
2.3 CONTROLADOR FOPID

Tendo em vista que o objetivo deste trabalho trata-se de aplicações de controladores FOPID, nesta subseção é abordada com mais detalhes o funcionamento deste controlador.

Esta seção é baseada por Podlubny (1994) e artigos sobre otimização referenciados no decorrer da seção.

O conceito de um controlador FOPID pode-se resumir na generalização de um controlador PID, mais especificamente na generalização da ordem da ação integral e da ação derivativa. A área sombreada ilustrada na Figura 5 (ZAMANI; KARIMI-GHARTEMANI; SADATI, 2007), indica os graus de liberdade do controlador FOPID, onde os controladores P, PI, PD e PID são um caso específico do FOPID.

Figura 5 - Plano FOPID com alocação dos controladores P, PI, PD e PID em função dos parâmetros λ e μ



Fonte: Autoria própria (2021)

O caso ideal de um controlador fracionário é denotado pelos expoentes λ e μ na variável “s” para representar a ordem da ação integral e derivativa, como exposto na equação (12). Sendo que estes expoentes estão limitados pelo conjunto dos reais não negativos, tal como ilustrado pela Figura 5.

$$C = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (12)$$

O problema desta representação no domínio da frequência é o mesmo do caso ideal do PID, em que a ordem do numerador é maior do que a do denominador, ou seja, um controlador irrealizável fisicamente. Para resolver este problema, são utilizados filtros para a ação derivativa fracionária, tal como ocorre no PID.

Para a busca dos cinco parâmetros que retornam a resposta com melhor desempenho, usualmente é utilizado o algoritmo evolucionário PSO (ver Anexo A).

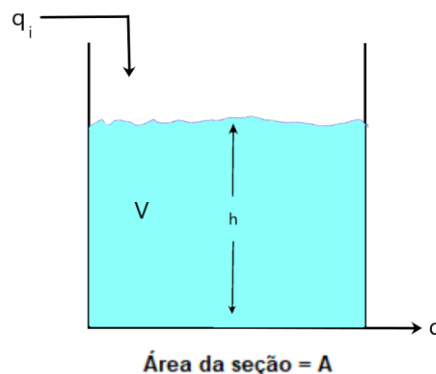
2.4 APLICAÇÕES EM CONTROLE DE PROCESSOS

A área de controle de processos industriais trata de variáveis com o tempo de resposta mais lento como temperatura, pressão, nível e volume. Tendo então nesta seção uma revisão de problemas clássicos da área, envolvendo tanques e trocadores de calor. Esta seção está fundamentada em Seborg *et al.* (2010).

2.4.1 Sistema de Armazenagem de Líquido

Um dos problemas mais elementares é o problema de tanque com a vazão de saída dependendo da pressão exercida pela coluna de líquido e consequentemente da gravidade. O processo é ilustrado pela Figura 6.

Figura 6 - Processo de armazenagem de líquido



Fonte: Autoria própria (2021)

Adicionando uma válvula de saída com uma constante de vazão, tem-se a equação diferencial ordinária (EDO) não linear para o sistema representada pela equação (13).

$$A \frac{dh}{dt} = q_i - K_v \sqrt{\rho g h} \quad (13)$$

onde “ q_i ” é a vazão de entrada (m^3/h), “ q ” é a vazão de saída, “ A ” é a área da seção do tanque (m^2), “ h ” é o nível do fluido (m), “ g ” é a aceleração da gravidade (m/s^2), “ ρ ” é a densidade do fluido (kg/m^3) e “ K_v ” é a constante de vazão da válvula de saída ($m^3/h\sqrt{Pa}$).

A linearização desta equação ocorre sobre o ponto de equilíbrio. Utilizando-se da altura de equilíbrio e da derivada neste ponto, obtém-se a EDO linear para esta faixa de operação na equação (14).

$$\frac{2A\sqrt{\bar{h}}}{K_v^*} \frac{d\tilde{h}}{dt} + \tilde{h} = \frac{2\sqrt{\bar{h}}}{K_v^*} \tilde{q}_i \quad (14)$$

onde “ K_v^* ” é a constante de vazão englobando as constantes “ g ” e “ ρ ”, a altura e a vazão de entrada após a linearização são denotadas por “ \tilde{h} ” e “ \tilde{q}_i ”, e “ \bar{h} ” é a altura do ponto de equilíbrio em questão.

2.4.2 Sistema de Aquecimento de Tanque Agitado

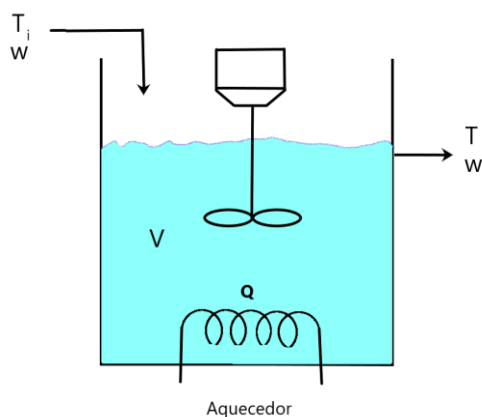
O sistema de aquecimento de um tanque agitado é um exemplo de problema de controle multivariável, onde há uma variável de saída e três variáveis de entrada. A temperatura de saída do tanque dependerá do trocador de calor, da vazão, da temperatura do fluido de entrada e dos parâmetros de volume total, massa específica e capacidade de calor do fluido. O problema é ilustrado na Figura 7.

O modelo matemático que representa o sistema apresentado é dado pela equação (15).

$$V\rho C \frac{dT}{dt} = wC(T_i - T) + Q \quad (15)$$

onde “V” é o volume do tanque (m^3), “ T_i ” e “ T ” são as temperaturas de entrada e saída do fluido ($^{\circ}C$), “C” é o calor específico ($kcal/kg^{\circ}C$), “w” é a vazão do fluido (m^3/h) e “Q” é o calor fornecido pelo o aquecedor ($kcal$ ou W).

Figura 7 - Processo de aquecimento de tanque agitado



Fonte: Autoria própria (2021)

A partir da equação (15) analisada no ponto de equilíbrio pode-se simular o comportamento da equação no domínio de Laplace para duas entradas (vazão e temperatura de entrada) e a temperatura de saída.

2.4.3 Sistemas com Tempo Morto e Aproximação Padé

Muitos sistemas físicos apresentam um atraso entre a aplicação do sinal de controle e sua efetiva ação, sendo modelado como um tempo morto que no domínio de Laplace é representado pelo termo “ e^{-sT} ” na função de transferência. Ao fechar a malha de controle esse termo aparece no denominador, o que dificulta a simulação por meio de funções de transferência.

Para isto, pode-se adotar a aproximação Padé, a qual aproxima o valor do termo “ e^{-sT} ” por um conjunto de polos e zeros expressos através de polinômios. O Quadro 1 exhibe a aproximação até a quinta ordem.

Quadro 1 - Aproximação Padé

Grau n	Aproximação Padé
1	$\frac{2 - (T_s)}{2 + (T_s)}$
2	$\frac{12 - 6(T_s) + (T_s)^2}{12 + 6(T_s) + (T_s)^2}$
3	$\frac{120 - 60(T_s) + 12(T_s)^2 - (T_s)^3}{120 + 60(T_s) + 12(T_s)^2 + (T_s)^3}$
4	$\frac{1680 - 840(T_s) + 180(T_s)^2 - 20(T_s)^3 + (T_s)^4}{1680 + 840(T_s) + 180(T_s)^2 + 20(T_s)^3 + (T_s)^4}$
5	$\frac{30240 - 15120(T_s) + 3360(T_s)^2 - 420(T_s)^3 + 30(T_s)^4 - (T_s)^5}{30240 + 15120(T_s) + 3360(T_s)^2 + 420(T_s)^3 + 30(T_s)^4 + (T_s)^5}$

Fonte: adaptado de Hanta e Prochazka (2009)

2.5 APLICAÇÕES EM ROBÓTICA

O campo de estudo da robótica exige a integração de conhecimentos da mecânica e da eletroeletrônica, sendo assim uma das áreas mais notórias da engenharia mecatrônica.

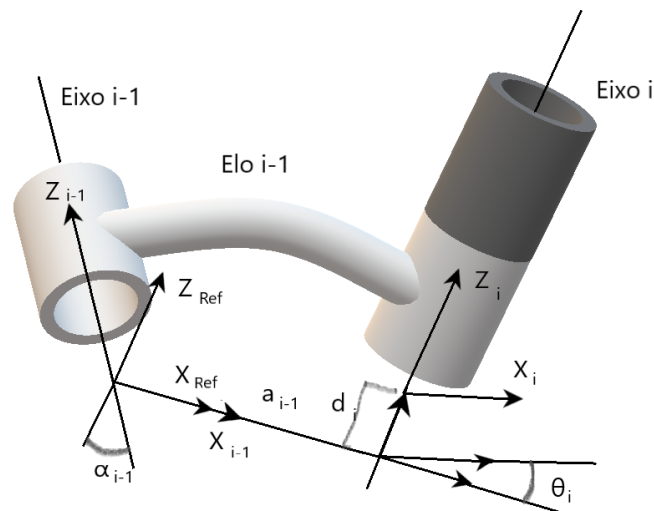
O controle de sistemas robóticos enquadra-se no campo de servomecanismos por trabalhar com variáveis de controle mais rápidas, como posição, velocidade, torque, tensão como principais aplicações.

Esta seção está fundamenta em Craig (2005), Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006).

2.5.1 Modelagem Cinemática

A análise cinemática de um robô manipulador parte dos parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH), os quais são alocados em uma tabela que leva em conta as distâncias entre as juntas bem como a sua classificação (prismática ou rotativa). A notação utilizada neste trabalho é a de Denavit-Hartenberg modificada (DHM) usada por Craig (2005), a qual referencia a junta “i” em relação à junta “i-1” como visto na Figura 8.

Figura 8 - Orientação das juntas de um robô manipulador



Fonte: Autoria própria (2021)

A partir desta convenção, pode-se construir a matriz transformação homogênea denotada pela equação (16), a qual pode ser concatenada desde a origem do manipulador até a junta respectiva ao efetuador final, como exposto na equação (17).

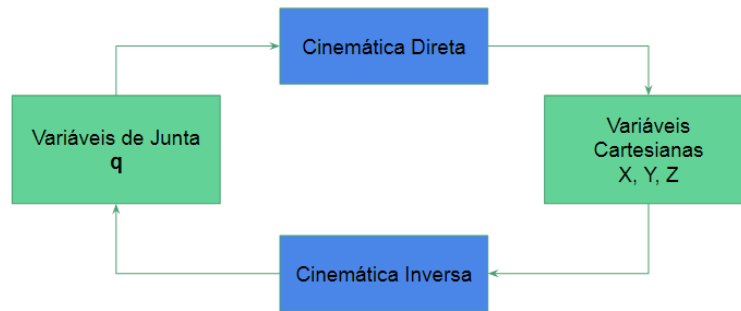
$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$T_N^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 \dots T_N^{N-1} \quad (17)$$

onde " T_B^A " é a matriz mudança de base da base A para a B.

A aplicação das variáveis de juntas na transformação homogênea resulta na posição e orientação do efetuador do robô, esta operação é denominada cinemática direta. Através das mesmas matrizes e das variáveis cartesianas (ou variáveis operacionais ao considerar a orientação) pode-se formular as equações para encontrar-se as variáveis de juntas para tal posição, esta é denominada cinemática inversa. A Figura 9 ilustra as duas transformações.

Figura 9 - Cinemática direta e inversa



Fonte: Autoria própria (2021)

A cinemática de velocidades envolve as transformações descritas neste item, porém levando-se em consideração que elas variam no tempo. Para a descrição deste tópico será utilizado as matrizes jacobianas na notação de Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006) adaptado para os parâmetros de Denavit-Hartenberg modificados.

A matriz jacobiana possui dimensões $6 \times N$, onde N é o número de juntas do manipulador, e cada coluna da matriz advém da equação (18) se a junta for rotativa e da equação (19) se for prismática.

$$J_i = \begin{bmatrix} z_i \times (o_n - o_i) \\ z_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} z_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

onde “ o_n ” e “ o_i ” são as origens de cada junta do robô manipulador.

De forma análoga a cinemática direta e inversa de posição, a jacobiana realiza a conversão das velocidades generalizadas para as velocidades cartesianas e operacionais, como visto na equação (20).

$$\dot{X} = J\dot{q} \quad (20)$$

onde “ \dot{q} ” denota a velocidade generalizada e “ \dot{X} ” as velocidades operacionais.

2.5.2 Planejamento de Trajetória

Na robótica evita-se o uso de mudanças abruptas de posição. Desta forma são usados perfis de velocidade que servem de referência para o controlador, sendo o perfil trapezoidal e os polinômios de trajetória os recursos mais utilizados.

Um polinômio de quinta ordem já é o suficiente para não decorrer em um *jerk* (derivada da aceleração) teórico infinito. A partir de uma matriz contendo os parâmetros deste polinômio e de vetores correspondentes às condições iniciais e finais de posição, velocidade e aceleração, é possível escrever a equação (21).

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 \\ 0 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ v_0 \\ a_0 \\ q_f \\ v_f \\ a_f \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde “ t_0 ” e “ t_f ” são o tempo inicial e final, “ q_0 ” e “ q_f ” são a coordenada generalizada de posição inicial e final, “ v_0 ” e “ v_f ” são a velocidade generalizada e “ a_0 ” e “ a_f ” a aceleração generalizada.

2.5.3 Modelagem Dinâmica

Os dois métodos mais usuais para encontrar as equações de movimento de um robô manipulador são através do algoritmo recursivo de Newton-Euler e através das equações de Euler-Lagrange.

O segundo método parte do formalismo da mecânica lagrangeana, a qual é descrita de forma analítica, ou seja, sem necessitar de uma formulação geométrica. A definição da lagrangeana é a diferença da energia cinética e potencial do sistema analisado, como visto na equação (22), e as equações de movimento são encontradas a partir da equação diferencial (23).

$$L = T - V \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (23)$$

onde “L” é a lagrangeana do sistema, “T” é a energia cinética total e “V” é a energia potencial.

A partir deste formalismo, a equação aplicada à robótica é rearranjada para separar os efeitos de inércia, gravidade e aceleração de Coriolis no formato de matrizes. A equação de movimento de um robô manipulador é então formulada na equação (24). As matrizes da equação da robótica são calculadas através das equações (25), (26) e (27).

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (24)$$

$$M(q) = \sum_{i=1}^n [m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T R_i I_i R_i^T J_{\omega_i}] \quad (25)$$

$$C(q) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right) \right\} \quad (26)$$

$$g(q) = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^n g^T r_{ci} m_i \quad (27)$$

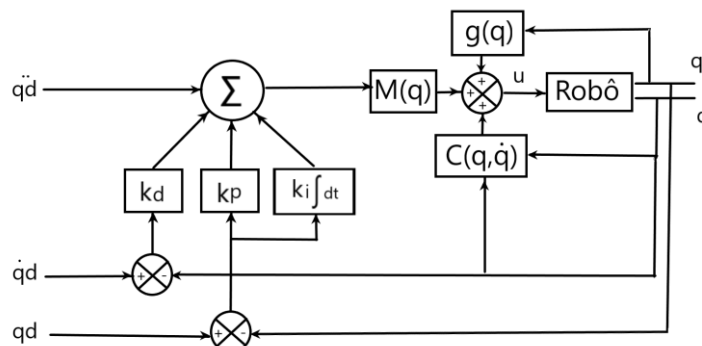
onde “M” é a matriz de inércia do robô, “C” a matriz de Coriolis, “g” a compensação da gravidade, “m_i” a massa de cada elo, “r_{ci}” é a distância ao centro de massa, “R_i” a matriz de rotação, “I_i” a matriz de inércia do elo, “J_{vi}” a matriz jacobiana de velocidades cartesianas e “J_{ωi}” a jacobiana das velocidades angulares.

2.5.4 Torque Computado

O método do torque computado, ou dinâmica inversa, é uma das leis de controle mais aplicadas em robôs manipuladores. A sua estrutura segue a

lógica de um controlador PID, porém utiliza-se dos estados do sistema para a realimentação como exemplificado na Figura 10 (ANGEL; VIOLA, 2018).

Figura 10 - Torque computado



Fonte: Autoria própria (2021)

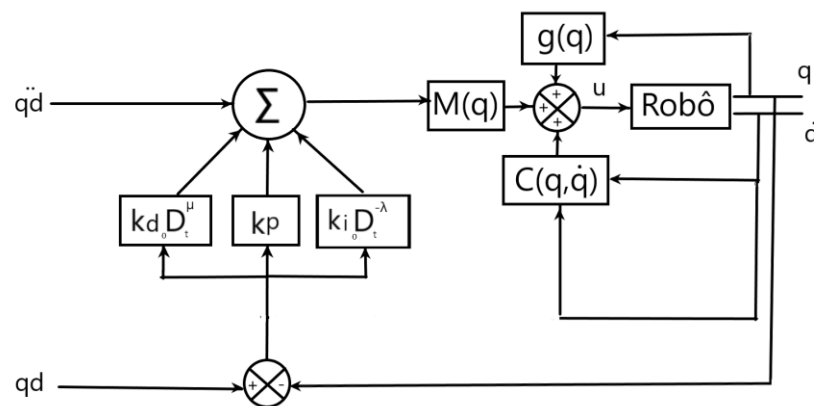
Devido a não linearidade das equações de movimento de robôs manipuladores, o torque computado é um método que apresenta melhores resultados comparado à estrutura clássica de um PID. Desta forma, torna-se “adaptativa” as ações proporcional, integral e derivativa onde variam proporcionalmente a matriz de inércia do robô, como exposto na equação (28), em que “ $e(t)$ ” é o erro do sistema para cada instante de tempo, “ k_p ”, “ k_i ” e “ k_d ” são os ganhos proporcional, integral e derivativo.

$$u(t) = M(q) \left(\ddot{q}_d + K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \dot{e}(t) \right) + C(q, \dot{q}) + g(q) \quad (28)$$

Algumas variações deste método são encontradas em livros, como o caso de controladores Proporcional Integral Derivativo mais segunda ordem (PIDD²), o qual incorpora na equação (28) o uso da segunda derivada do erro (SICILIANO *et al.*, 2010). Outras leis de controle estão no Anexo B.

Um controlador FOPID aos moldes da estratégia de torque computado é ilustrado pela Figura 11 (ANGEL; VIOLA, 2018). Esta estrutura usada por Angel e Viola (2018) demonstrou uma melhoria nos índices de desempenho do controle de um robô paralelo.

Figura 11 - Torque computado fracionário



Fonte: Autoria própria (2021)

Ao inserir os elementos fracionários na equação 28, tem-se a sua variação fracionária exibida na equação (29).

$$u(t) = M(q) \left(\ddot{q}_d + K_p e(t) + K_i D^{-\lambda} e(t) + K_d D^{\mu} e(t) \right) + C(q, \dot{q}) + g(q) \quad (29)$$

Fani e Sharahki (2016) da mesma forma obtiveram melhorias significantes ao aplicar o FOPID no controle de um manipulador de dois graus de liberdade, onde fizeram um estudo sobre a sua sintonia através de otimizadores, tendo o PSO o melhor resultado.

3 CONTROLE DE PROCESSOS

Este capítulo é especificado para a metodologia e análise dos resultados da aplicação de controladores FOPID para os processos descritos na seção 2.4.

Para a simulação das plantas foi usada a toolbox FOMCON desenvolvida por Tepljakov, Petlenkov e Belikov (2011) para o MATLAB. Esta ferramenta utiliza a aproximação Crone, apresentada em 2.2.3, e permitiu o uso de expoentes não inteiros na variável “s” das funções de transferência. Isso possibilitou a implementação do FOPID no domínio da frequência.

A otimização de cada um dos exemplos foi feita por PSO com o uso do algoritmo disponibilizado por Smail *et al.* (2014).

3.1 CONTROLE DE NÍVEL

3.1.1 Metodologia

A modelagem de um tanque para o controle de nível parte da equação (14), bem como dos seus parâmetros.

Para este estudo de caso, é tomado como exemplo um tanque de seção circular com as seguintes especificações:

- Diâmetro: 2 m.
- Altura Máxima: 3 m.
- Coeficiente da Válvula: 42 m³/h.
- Pontos de Equilíbrio: 10%; 50%; 90%.

Inserindo estes parâmetros na equação (14) e ao aplicar a transformada de Laplace, têm-se as funções de transferência aproximadas para os pontos de equilíbrio nas equações (30), (31) e (32).

$$G_{10\%}(s) = \frac{0,026082}{0,081939*s+1} \quad (30)$$

$$G_{50\%}(s) = \frac{0,058321}{0,18322*s+1} \quad (31)$$

$$G_{90\%}(s) = \frac{0,058321}{0,24582*s+1} \quad (32)$$

As aproximações realizadas tratam-se de funções de transferência de primeira ordem, as quais serviram como primeiro comparativo entre o desempenho do PID e do FOPID.

Como a linearização pressupõe pequenas variações, a mudança de *setpoint* aplicada foi de 5%, sendo uma variação positiva para as duas primeiras funções e uma variação negativa para a terceira.

O critério utilizado para a otimização foi a soma dos índices de desempenho, integral do erro absoluto (*integral of the absolute error*, IAE), integral do erro absoluto ponderado no tempo (*integral of the absolute error multiplied by time*, ITAE), integral do erro quadrático (*integral of the square error*, ISE) e integral do erro quadrático ponderado no tempo (*integral of the square error multiplied by time*, ITSE) das três aproximações. A integral do erro para cada critério foi calculada através da função “trapz” do MATLAB e as equações são apresentadas em (33), (34), (35) e (36), sendo que “e(t)” é o erro do sistema.

$$IAE = \int |e(t)| dt \quad (33)$$

$$ITAE = \int t|e(t)| dt \quad (34)$$

$$ISE = \int (e(t))^2 dt \quad (35)$$

$$ITSE = \int t(e(t))^2 dt \quad (36)$$

Tratando-se de funções de transferência de primeira ordem, teoricamente o sistema manter-se-ia estável com um aumento indefinido da ação proporcional. Desta forma, foi colocada uma restrição no sinal de controle em 80 m³/h.

A visualização do sinal de controle foi observada através da função mostrada na equação (37) somada à vazão dos pontos de equilíbrio, em que “C” e “G” são respectivamente os blocos do controlador e da planta controlada.

$$U(s) = \frac{c}{cG+1} \quad (37)$$

Tanto o PID quanto o FOPID necessitam do uso de um filtro para que se tornem realizáveis fisicamente e estão estruturados como nas equações (38) e (39). O coeficiente “N” foi mantido constante e igual a 10.

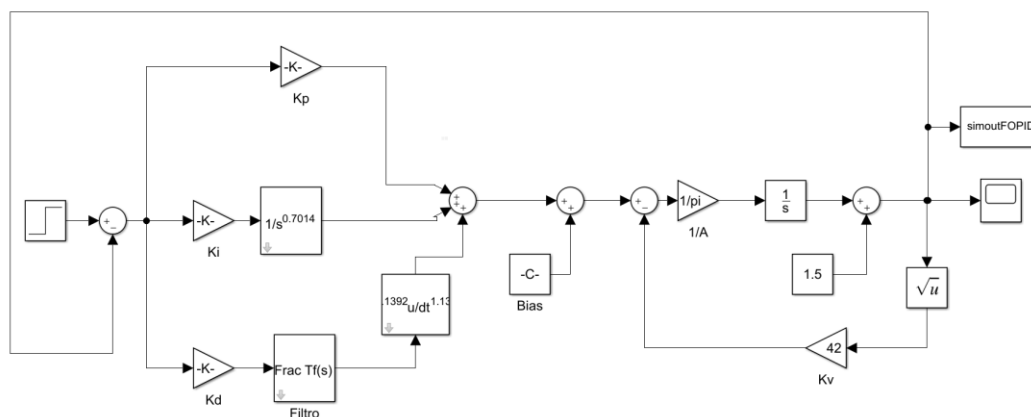
$$C_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{s+1} \quad (38)$$

$$C_{FOPID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + \frac{K_d s^\mu}{s^\mu+1} \quad (39)$$

onde “ k_p ”, “ k_i ” e “ k_d ” são as ações proporcional, integral e derivativa, “ λ ” é a ordem da integral e “ μ ” é a ordem da derivada.

Como forma de validação destas simulações foi desenvolvida no Simulink a planta não linear do controle de nível, mostrada na Figura 12, e então foram aplicadas as mesmas condições.

Figura 12 - Representação em blocos da planta de controle de nível



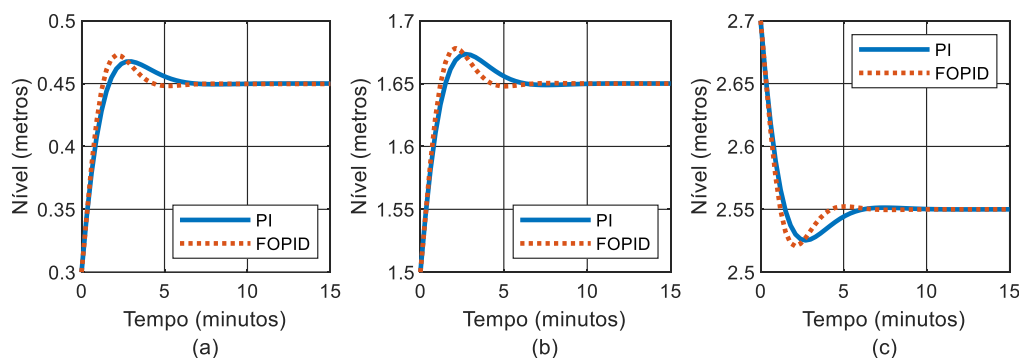
Fonte: Autoria própria (2021)

3.1.2 Análise dos Resultados

Os resultados, nas três faixas de operações, para a minimização dos índices de desempenho IAE, ITAE, ISE e ITSE estão expostos respectivamente nas Figuras 13, 14, 15, 16, onde nível é medido em metros e o tempo em minutos, e os parâmetros dos controladores estão no Apêndice A.

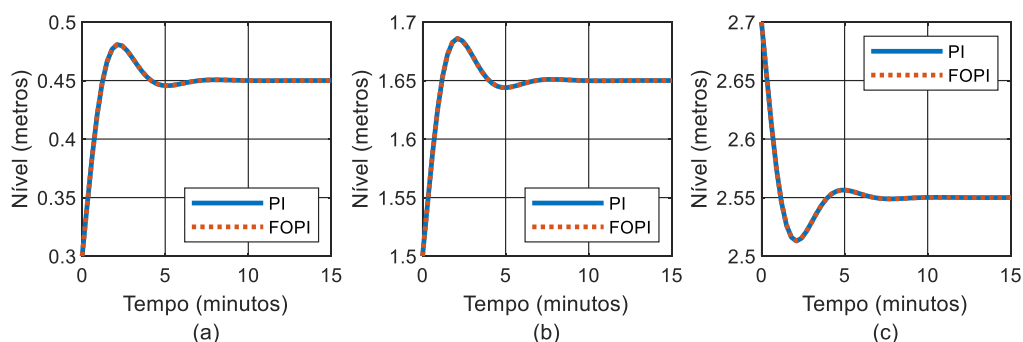
Primeiramente, observa-se que os controladores de ordem inteira para os quatro critérios dispensaram a ação derivativa, portanto, foram classificados somente como PI. Este resultado era esperado, pois as funções de transferência empregadas se tratavam de aproximações de primeira ordem.

Figura 13 - Sistema de controle de nível - resposta ao degrau do IAE em: (a) 10%, (b) 50%, (c) 90%



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 14 - Sistema de controle de nível - resposta ao degrau ITAE em: (a) 10%, (b) 50%, (c) 90%



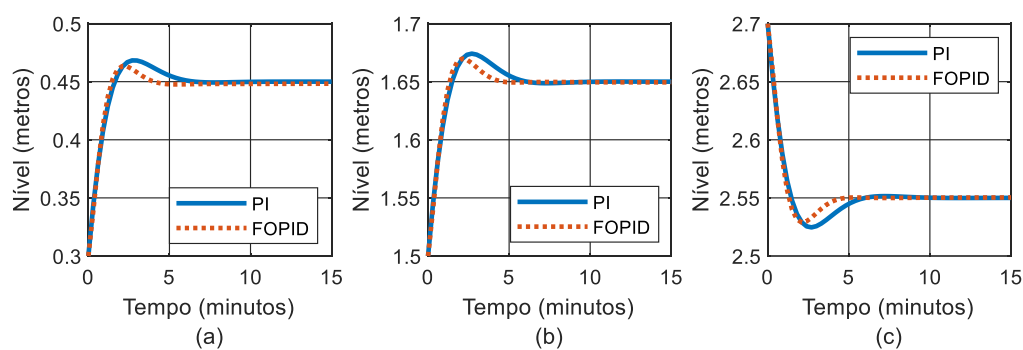
Fonte: Autoria própria (2021)

Para cada critério adotado, as faixas de operações do controle de nível, em torno de 10%, 50% e 90% da faixa da variável de processo, apresentaram um resultado similar. Isso advém do ajuste de parâmetros realizados pelo PSO que buscava minimizar a soma dos índices de desempenho das três faixas de operação.

Dentre os resultados, a sintonia para minimizar o indicador ITAE merece destaque, pois além de dispensar a ação derivativa, a ordem da integral convergiu para a primeira ordem. Desta forma, a otimização retornou os mesmos parâmetros do controlador PI.

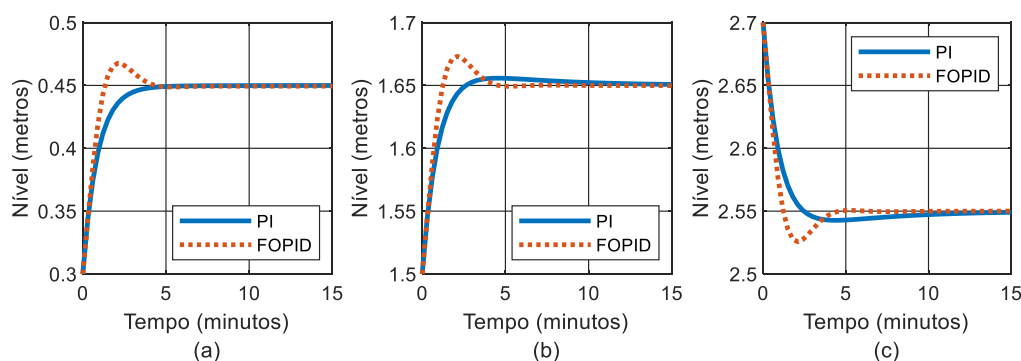
As respostas para os outros três indicadores apresentaram um desempenho mais rápido com o controlador fracionário. No entanto, para o IAE e principalmente para o ITSE houve a presença de um sobressinal maior do que o de ordem inteira.

Figura 15 - Sistema de controle de nível - resposta ao degrau ISE em: (a) 10%, (b) 50%, (c) 90%



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 16 - Sistema de controle de nível - resposta ao degrau ITSE em: (a) 10%, (b) 50%, (c) 90%



Fonte: Autoria própria (2021)

A Tabela 1 faz um comparativo da redução de cada índice ao empregar o FOPID. A partir dela, é possível observar que apesar da presença de sobressinal, o ITSE foi o índice que obteve a maior redução percentual.

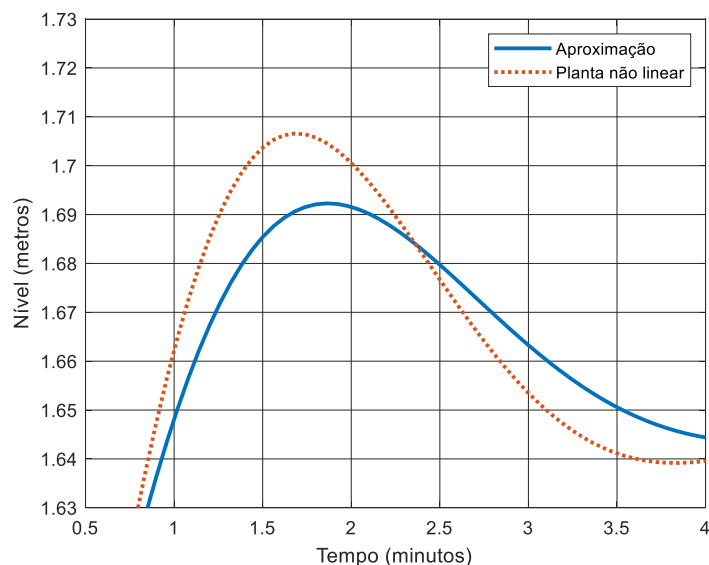
Tabela 1 - Sistema de controle de nível - comparação dos índices de desempenho do controle de nível

	IAE	ITAE	ISE	ITSE
PI	$7,5533 \times 10^{-3}$	$1,9263 \times 10^{-4}$	$4,8544 \times 10^{-4}$	$3,6957 \times 10^{-6}$
FOPID	$6,9528 \times 10^{-3}$	$1,9263 \times 10^{-4}$	$4,2999 \times 10^{-4}$	$3,0583 \times 10^{-6}$
Redução	7,95%	-	11,42%	17,25%

Fonte: Autoria própria (2021)

Uma variação de 5% na faixa de operação do nível do tanque é uma variação pequena, portanto a simulação realizada no diagrama de blocos com a planta não linear apresentou resultados similares à aproximação analisada anteriormente. Uma ampliação da diferença das respostas no critério IAE está exposto na Figura 17, com a amplitude em metros e o tempo em minutos.

Figura 17 - Sistema de controle de nível - comparativo das aproximações FOPID



Fonte: Autoria própria (2021)

3.2 SISTEMA DE AQUECIMENTO DE TANQUE AGITADO

3.2.1 Metodologia

A equação (15) descreve o comportamento de um sistema de tanque agitado. Sendo uma equação diferencial linear, a sintonia não necessita ser feita para diferentes faixas de operação.

Utilizando-se dos seguintes parâmetros, tem-se a função de transferência de primeira ordem na equação (40):

- Volume: 5 m³;
- Massa Específica: 1000 kg/m³;
- Calor Específico: 1 kcal/kg °C;
- Vazão: 1 m³/h;
- Temperatura de Entrada: 25 °C.

$$G(s) = \frac{0.001}{5s+1} \quad (40)$$

A partir da equação (40), foi aplicada uma mudança de *setpoint* na temperatura de 50 °C para 75 °C. Assim como no exemplo do item 3.1, a sintonia foi realizada através de PSO para minimizar os índices de desempenho.

Sendo uma planta de primeira ordem, também foi aplicada uma restrição na amplitude do sinal de controle em 200.000 kCal/h (232,6 kW).

Aproveitando-se do fato de ser um sistema com múltiplas entradas, o caso regulatório também foi simulado.

Neste caso, como perturbação, assumiu-se uma variação da temperatura de entrada de 25 °C para 10 °C ao mesmo tempo em que a vazão variou de 1m³/h para 4 m³/h, mantendo-se o *setpoint* do controlador em 50 °C.

A função de transferência em malha aberta diante deste distúrbio tem seu comportamento alterado à equação (41), enquanto a resposta ao distúrbio é encontrada pela função de transferência da equação (42).

$$G_D(s) = \frac{0.001}{5s+4} \quad (41)$$

$$D(s) = (Q_f - Q_{Df}) \frac{G_D}{cG_D+1} \quad (42)$$

onde “Q_f” e “Q_{Df}” são os sinais de controle em regime permanente das equações (40) e (41).

Para a sintonia, limitou-se o ganho das ações em 10.000, mas o ganho poderia ser aumentado por ser uma planta de primeira ordem.

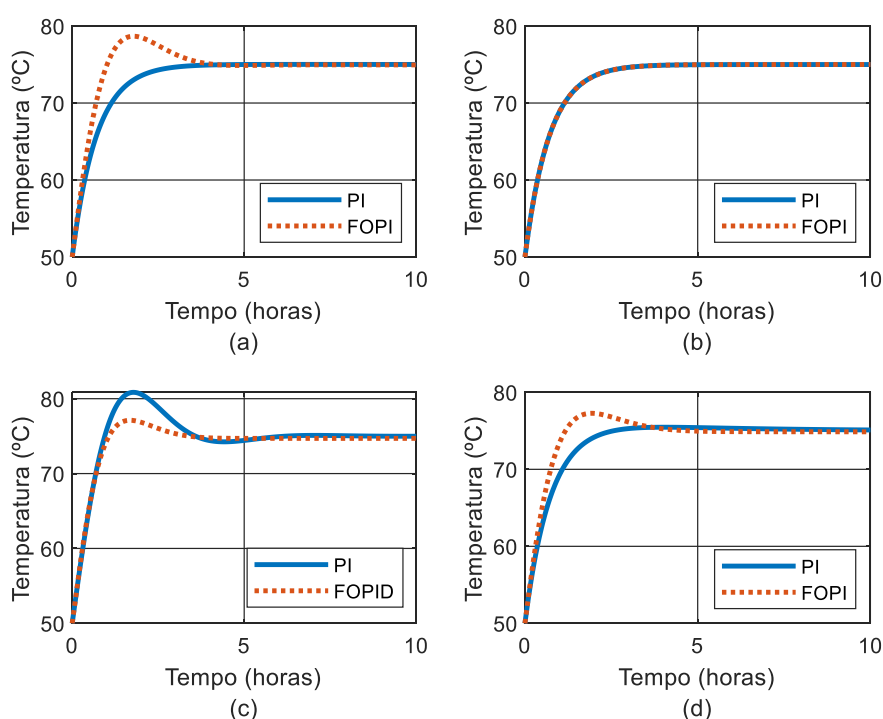
3.2.2 Análise dos Resultados

Para esta seção, a temperatura nas figuras está em graus Celsius, a potência está em quilowatt e o tempo é medido em horas.

Tratando-se novamente de uma modelagem de primeira ordem, naturalmente os controladores PID dispensaram a ação derivativa e mais uma vez pode-se observar a convergência do critério ITAE para a ordem inteira.

A Figura 18 mostra um comportamento similar dos quatro critérios adotados com os resultados do controle de nível. Neste exemplo, somente o controlador fracionário para o critério ISE não dispensou a ação derivativa (ver Apêndice A).

Figura 18 - Sistema de aquecimento de tanque agitado - resposta ao degrau: (a) IAE, (b) ITAE, (c) ISE, (d) ITSE



Fonte: Autoria própria (2021)

A Tabela 2, tal como em 3.12, mostra que o critério com a maior redução percentual é o ITSE.

As características de cada uma das respostas podem ser verificadas na Tabela 3. A partir dela, é possível observar um padrão no qual o instante de pico ocorre mais rápido nos controladores fracionários comparados ao PI de mesmo critério, enquanto as outras características variam conforme o indicador de desempenho adotado. Tempo de subida corresponde ao tempo necessário para que a resposta passe de 10% a 90% do valor final e tempo de acomodação ao tempo requerido para que a resposta permaneça entre $\pm 2\%$ do valor final.

Tabela 2 - Sistema de aquecimento de tanque agitado - comparação dos índices de desempenho

	IAE	ITAE	ISE	ITSE
PI	17,7278	12,6253	198,718	74,6506
FOPID	17,1123	12,6253	169,2294	54,3042
Redução	3,47%	-	14,84%	27,26%

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 3 - Sistema de aquecimento de tanque agitado - características das respostas ao degrau

Controlador	Tempo de subida (horas)	Tempo de acomodação (horas)	Sobressinal	Pico	Instante de pico (horas)
PI IAE	1,553	2,733	0,066%	75,02	6,49
FOPI IAE	0,760	3,515	14,71%	78,68	1,78
PI ITAE	1,562	2,780	0,0%	75,0	9,69
PI ISE	0,723	5,011	22,36%	80,59	1,77
FOPID ISE	0,774	2,856	8,461%	77,12	1,68
PI ITSE	1,414	2,170	1,875%	75,47	4,05
FOPI ITSE	0,845	3,627	9,117%	77,28	1,93

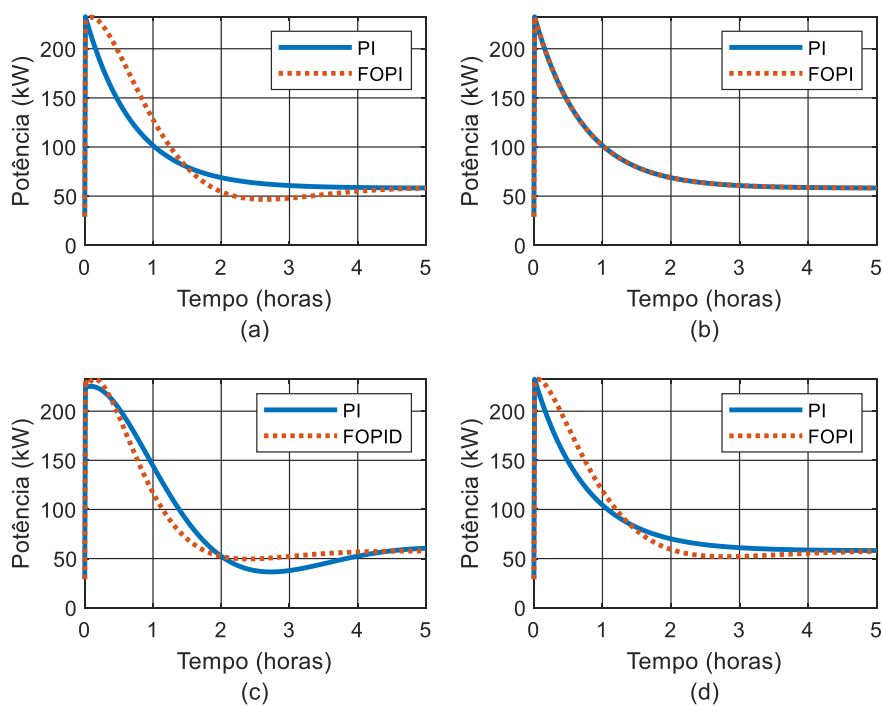
Fonte: Autoria própria (2021)

Ao observar os gráficos dos sinais de controle, expostos na Figura 19, percebe-se que os controladores PI apresentam o pico de potência no instante zero, devido à ação proporcional, e decaem até o sinal em regime permanente fornecido pela ação integral.

Já os controladores fracionários possuem o pico do sinal um pouco “atrasado”. Este comportamento advém das ações fracionárias e possibilita uma melhoria na resposta da planta.

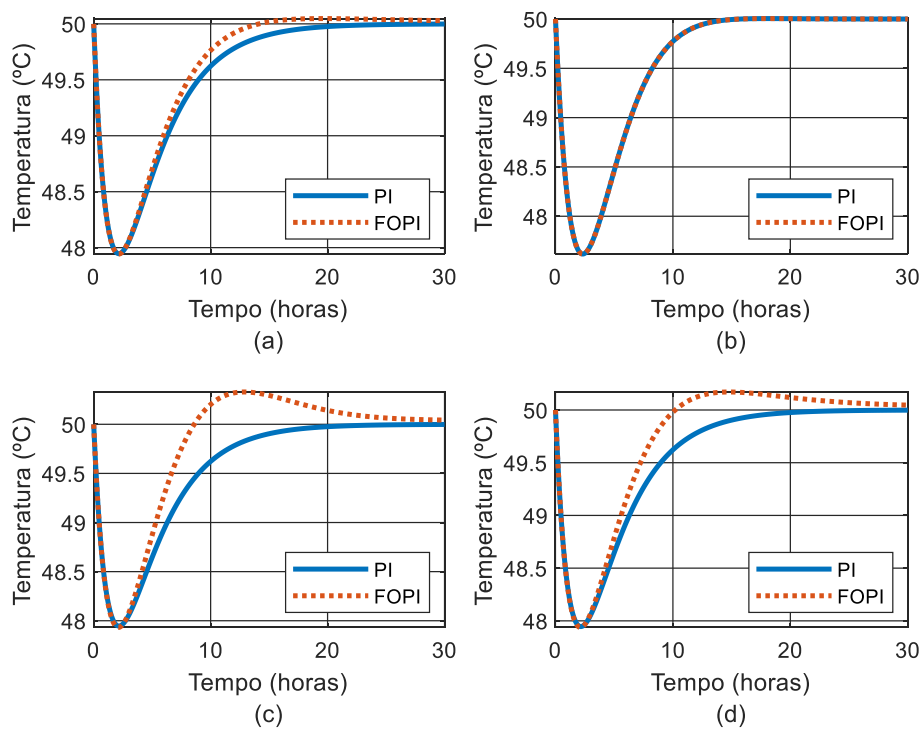
Para o caso regulatório, constatou-se resultados similares a mudança de *setpoint*. De forma que mais uma vez o PSO, para o critério ITAE, forçou a convergência dos parâmetros fracionários do controlador para um, tornando-o um controlado de ordem inteira. Os outros critérios obtiveram uma resposta mais rápida, como mostrado na Figura 20. A redução do erro destes critérios pode ser verificada na Tabela 4.

Figura 19 – Sistema de aquecimento de tanque agitado – Sinal de controle: (a) IAE, (b) ITAE, (c) ISE, (d) ITSE



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 20 – Sistema de aquecimento de tanque agitado – resposta ao distúrbio: (a) IAE, (b) ITAE, (c) ISE, (d) ITSE



Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 4 – Sistema de aquecimento de tanque agitado – índices de desempenho para o caso regulatório

	IAE	ITAE	ISE	ITSE
PI	13,4945	55,118	18,1887	63,8057
FOPI	12,4828	55,118	15,9159	51,9714
Redução	7,50%	-	12,50%	18,55%

Fonte: Autoria própria (2021)

3.3 IDENTIFICAÇÃO E SINTONIA DE SISTEMA DESCONHECIDO

Esta seção busca exemplificar o caso do projeto de controlador para um sistema desconhecido, do qual se pode extrair o comportamento via a aplicação de um degrau. A partir da curva obtida, realizar uma aproximação, em seguida projetar o controlador para aproximação e por fim validá-lo na planta real.

3.3.1 Metodologia

Foi utilizada a função de transferência com um elevado número de polos para representar um sistema “desconhecido” e então aproximado por uma planta *second order plus dead time* (SOPDT) como mostrado na equação (43).

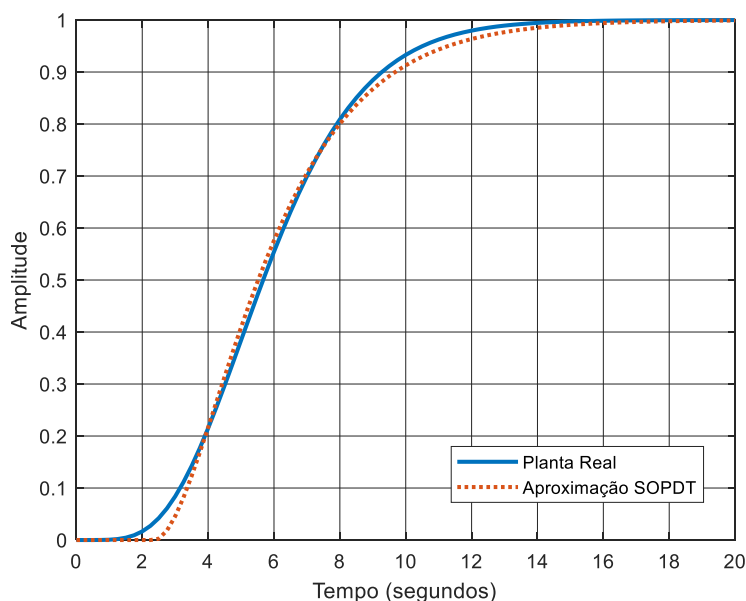
$$G(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)} e^{-Ls} \quad (43)$$

A Figura 21 mostra que a função de transferência SOPDT resulta numa boa aproximação para o sistema desconhecido ao ser aplicado um degrau unitário.

Os parâmetros usados na equação (39) para tal aproximação foram os seguintes:

- $K = 1$;
- $T_1 = 1,797$;
- $T_2 = 1,962$;
- $L = 2,366$.

Figura 21 - Aproximação de uma planta pelo método SOPDT



Fonte: Autoria própria (2021)

Devido à presença de tempo morto na função de transferência de malha aberta, a aproximação Padé de quinta ordem foi utilizada para fechar a malha. Em seguida, assim como nos exemplos anteriores, este modelo foi sintonizado para um controlador PID e FOPID.

Por fim, os controladores foram aplicados diretamente na planta para confirmar os resultados obtidos pela aproximação SOPDT.

3.3.2 Análise dos Resultados

Devido ao maior número de polos da planta e da presença de tempo morto, os controladores de ordem inteira não dispensaram a ação derivativa, sendo assim, todos classificados como PID. A resposta do modelo está apresentada na Figura 22.

Neste exemplo, também se pode observar pela primeira vez uma resposta diferenciada do controlador fracionário para o critério ITAE. Isto se dá pela ordem fracionária da componente derivativa, todavia, a ordem da integral continuou tendendo a um para este critério como mostrado no Apêndice A.

Em relação ao benefício do uso das ações fracionárias, este exemplo demonstrou uma redução considerável para todos os indicadores de desempenho no modelo adotado, como mostra a Tabela 5. Sendo o ITSE o

indicador com a maior redução, seguido pelo ITAE que até então sempre convergia para o controlador inteiro.

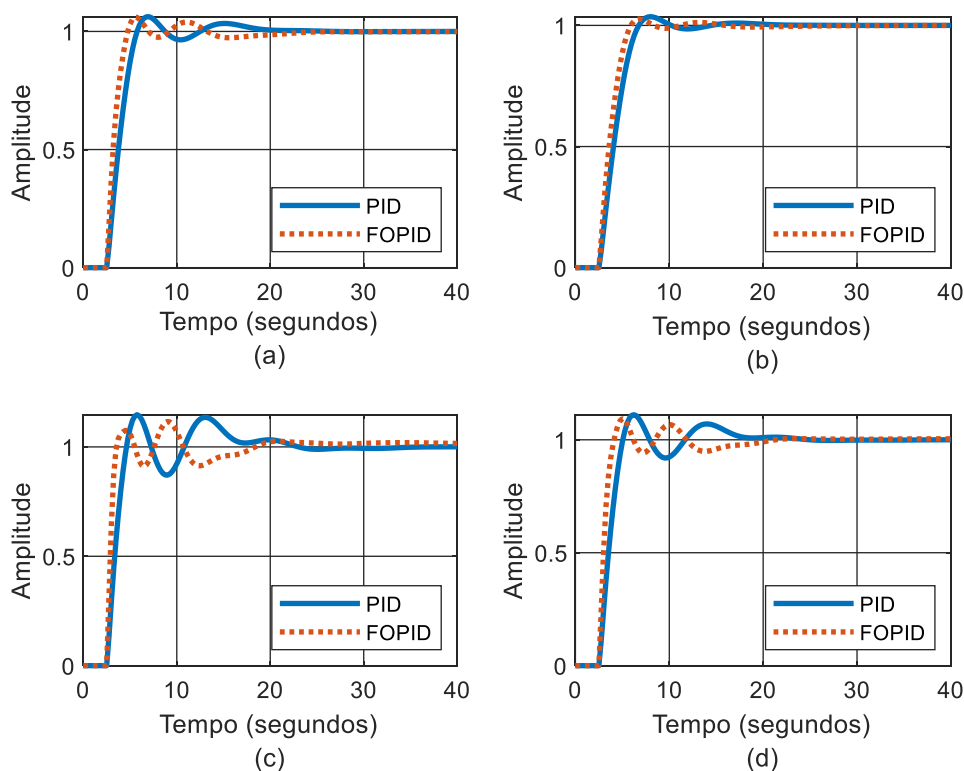
O desempenho destes controladores perante a planta real pode ser verificado na Figura 23 e na Tabela 6, onde se constata que os indicadores IAE, ISE e ITSE obtiveram um resultado superior ao do modelo tanto para o PID quanto para o FOPID.

Tabela 5 - Sistema desconhecido - índices de desempenho para a aproximação SOPDT

	IAE	ITAE	ISE	ITSE
PID	4,2398	11,4603	3,2090	5,7192
FOPID	3,7396	9,8327	2,8439	4,4305
Redução	11,8%	14,20%	11,38%	22,53%

Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 22 - Sistema desconhecido - resposta ao degrau SOPDT: (a) IAE, (b) ITAE, (c) ISE, (d) ITSE



Fonte: Autoria própria (2021)

Em contra partida, os controladores que minimizavam o ITAE obtiveram um desempenho reduzido e bastante similar. Isto provavelmente se

dá pelo fato do modelo SOPDT não ter sido suficientemente próximo à planta real para a sintonia deste indicador.

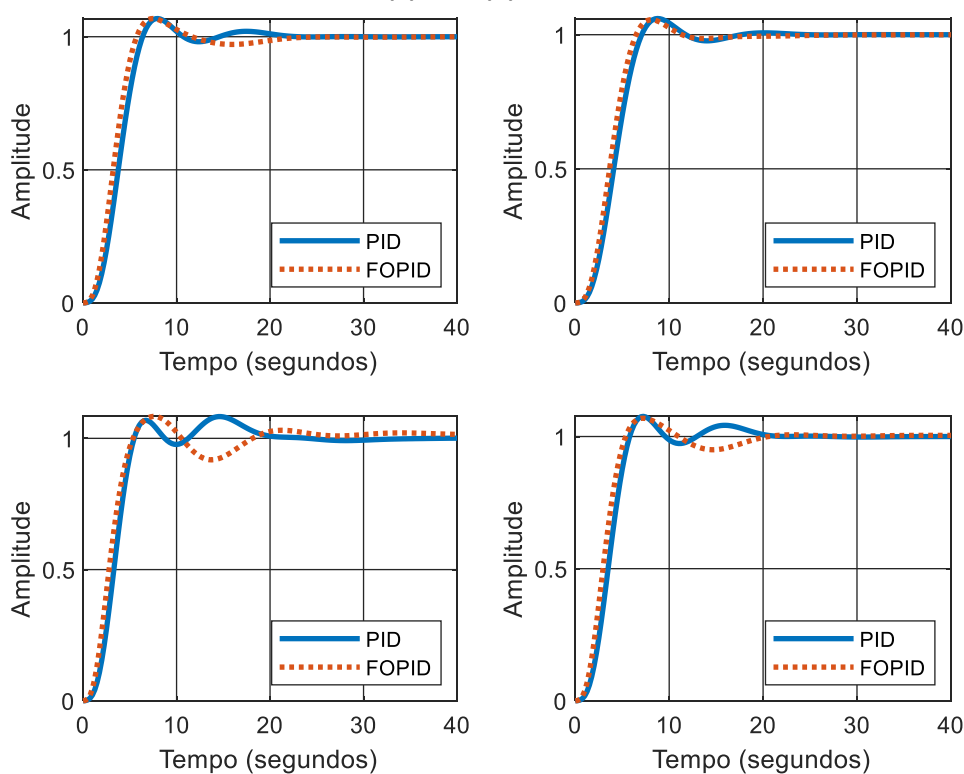
Ainda assim, destacam-se os indicadores ISE e ITSE que desempenharam uma redução superior dos indicadores a do próprio modelo utilizado para a otimização.

Tabela 6 - Sistema desconhecido - Índices de desempenho da planta real

	IAE	ITAE	ISE	ITSE
PID	4,0927	14,7307	2,6402	4,5462
FOPID	3,7622	14,6121	2,2331	3,4142
Redução	8,07%	0,81%	15,42%	24,90%

Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 23 - Sistema desconhecido - resposta ao degrau da planta real: (a) IAE, (b) ITAE, (c) ISE, (d) ITSE



Fonte: Autoria própria (2021)

4 ALGORITMO PARA A DERIVADA FRACIONÁRIA

Este capítulo contém o desenvolvimento do algoritmo para derivada fracionária no domínio do tempo seguindo a definição de Grünwald-Letnikov. A aplicação desta definição implica em problemas numéricos oriundos da sua aproximação e do custo computacional para a realização do cálculo. Assim sendo, neste capítulo são exploradas e testadas as abordagens que tratam destes problemas.

Este algoritmo foi utilizado para realização do controle dos manipuladores via torque computado apresentado no capítulo 5.

4.1 METODOLOGIA

4.1.1 Função Gamma e Overflow

Tal como apresentado nas seções 2.1.3 e 2.1.4, a aproximação numérica para a derivada fracionária exige uma correção de problemas numéricos.

O índice “k” da equação (6) é o responsável pela varredura dos valores passados da função. A equação exige o coeficiente binomial, o que usa o fatorial ou gamma deste valor, e deste modo ao passar de 170 ocorre um *overflow*.

Esta questão foi resolvida pelo uso de logaritmos. Como o MATLAB possui a função “*gammaln*”, a qual retorna o logaritmo natural de gamma, o coeficiente binomial da equação (6) foi escrita na forma da equação (44).

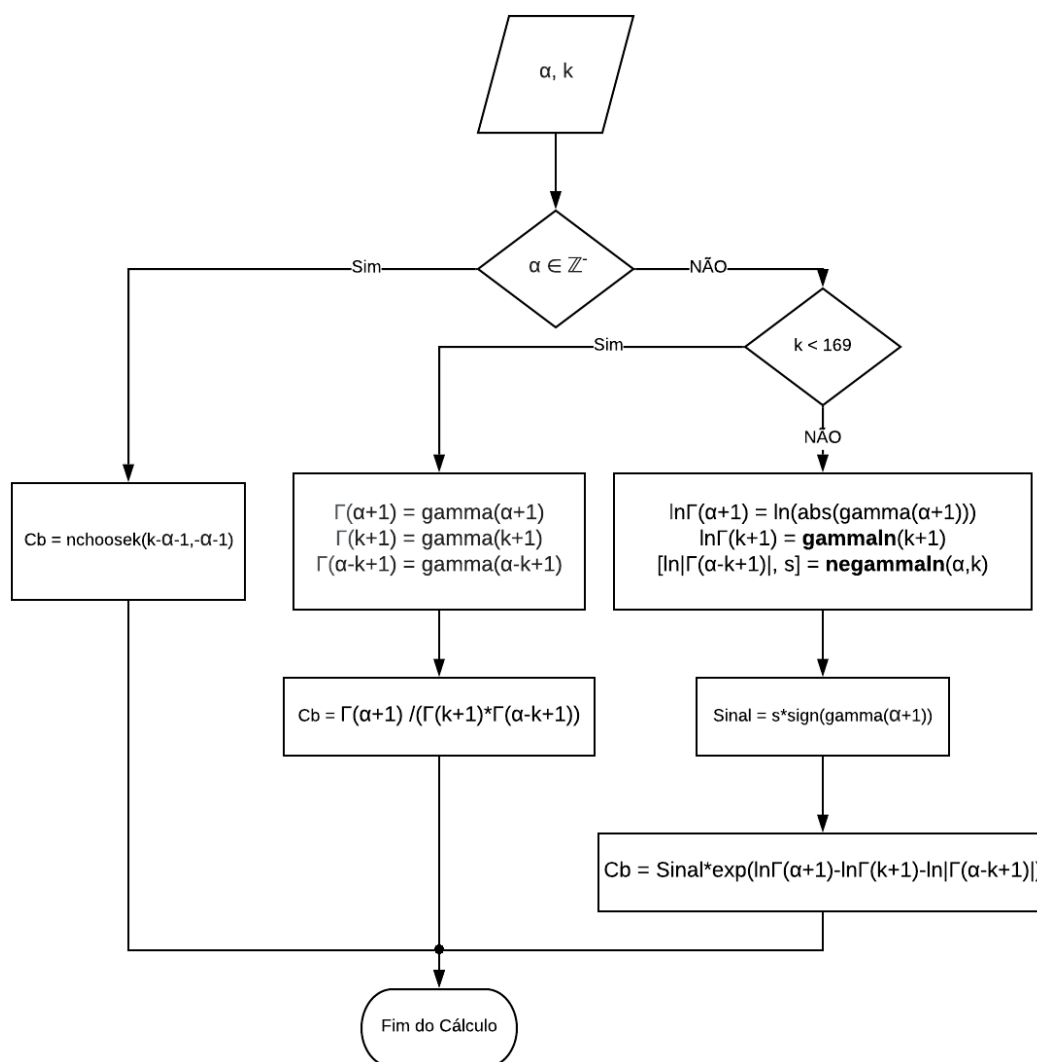
$$\binom{\alpha}{k} = e^{(\ln\Gamma(\alpha+1) - \ln\Gamma(k+1) - \ln\Gamma(\alpha-k+1))} \quad (44)$$

A equação (44) ainda estaria limitada pelo fato da função “*gammaln*” só trabalhar com argumentos positivos, desta forma foi desenvolvido uma função análoga ao “*gammaln*” para trabalhar no domínio negativo.

O logaritmo de um número negativo resulta em um número imaginário, portanto foi necessário tratar o sinal de forma isolada. Sabendo desta alternância de sinal, este foi armazenado em uma variável auxiliar, enquanto a magnitude foi calculada pela soma dos logaritmos, tal como a função `gammaln`.

Assim sendo, o algoritmo para o cálculo do coeficiente binomial foi construído como mostra o fluxograma na Figura 24, onde “`nchoosek`”, “`gamma`” e “`gammaln`” são funções pré-existentes do MATLAB e “`negammaln`” a função desenvolvida.

Figura 24 - Fluxograma para o coeficiente binomial

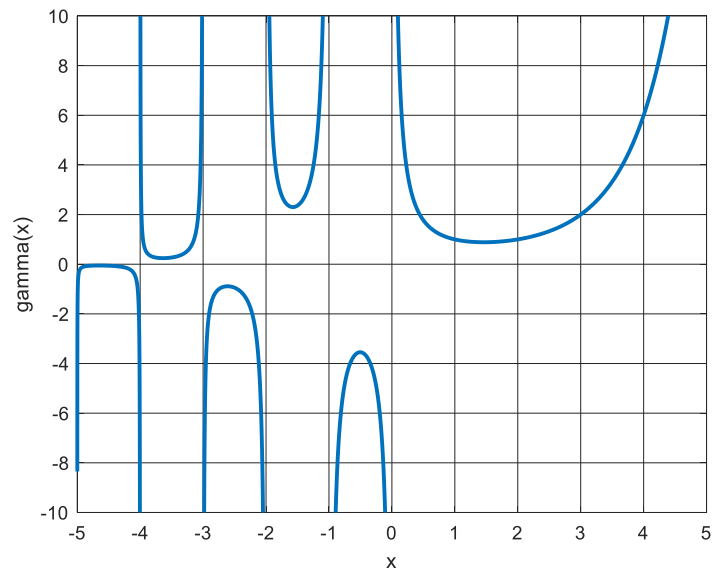


Fonte: Autoria própria (2021)

A função `gamma` no domínio negativo apresenta singularidades para os números inteiros e sinal alternado entre esses, como visto na Figura 25.

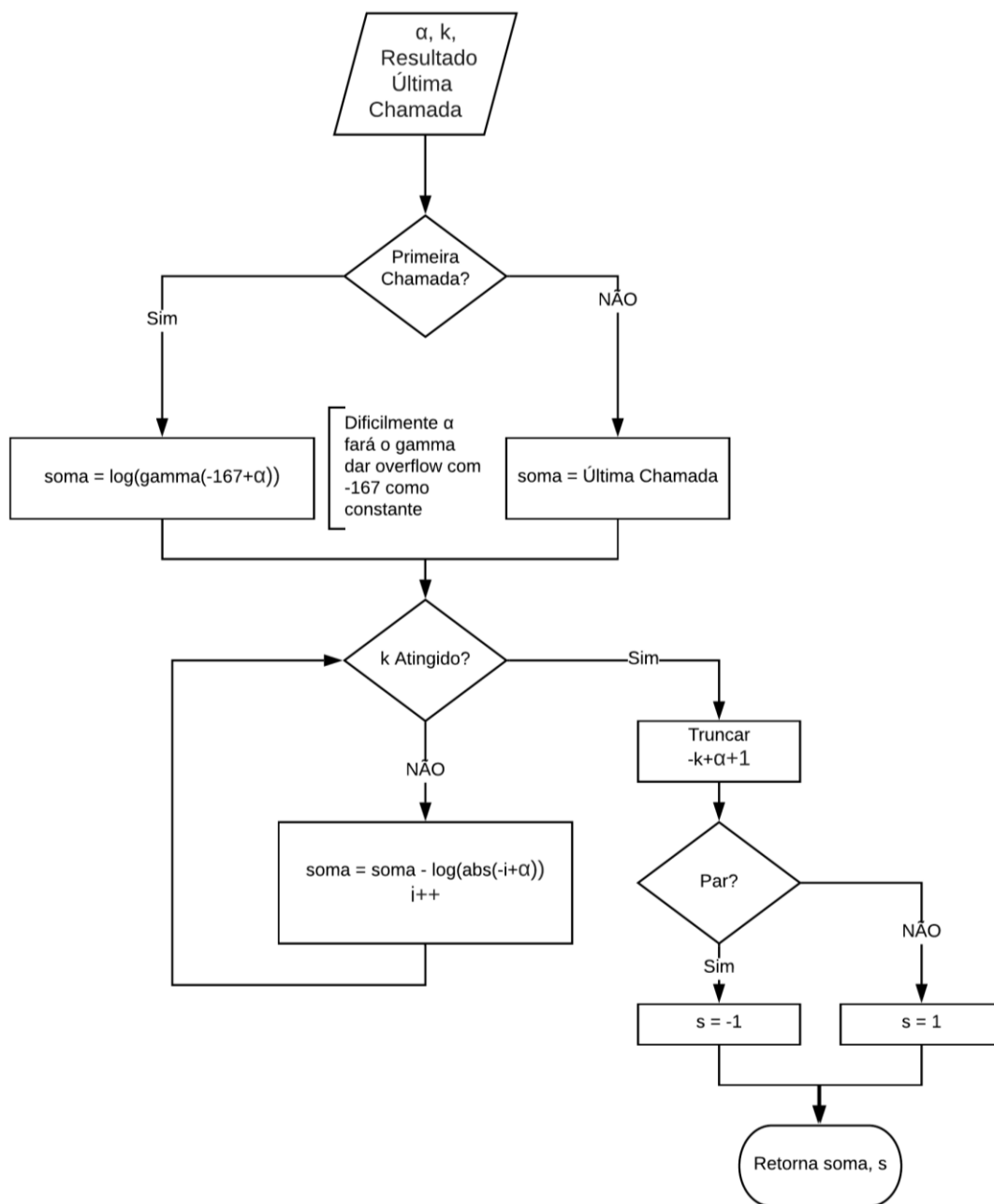
Aproveitando-se de que seria necessária a programação de uma função, foi colocado como entrada o resultado da última chamada da própria. Assim ao chamá-la continuamente pôde-se aproveitar de resultados anteriores e conseqüentemente reduzir o custo computacional. O fluxograma desta função está apresentado na Figura 26 e o código no Apêndice B.

Figura 25 - Representação gráfica da função gamma(x)



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 26 - Fluxograma da função negammaIn



Fonte: Autoria própria (2021)

4.1.2 Varredura e Memória Adaptativa

Com os problemas numéricos resolvidos, o outro grande problema da derivada fracionária é a realização de constantes varreduras por todo o passado da função. Deste modo, o número de varreduras cresce conforme o

número de amostragens do sinal e em certo ponto torna-se computacionalmente inviável.

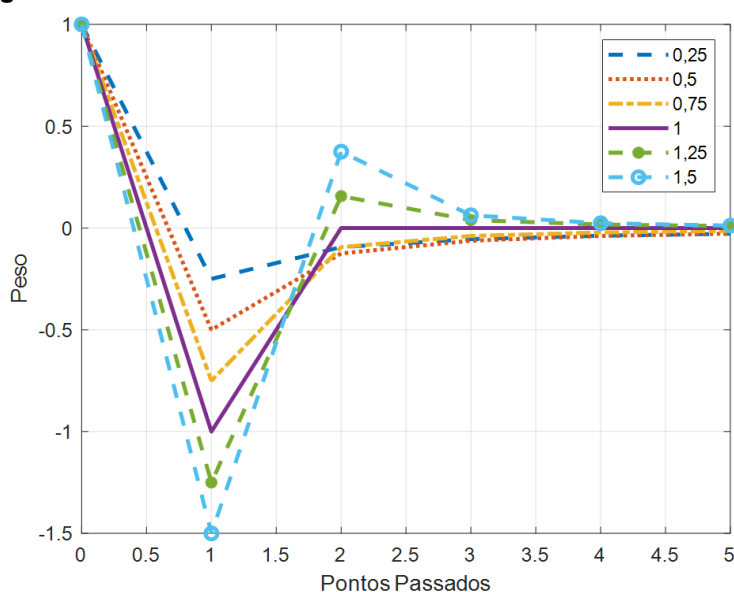
Limitar-se aos pontos mais recentes com a técnica de *short memory principle*, tal como descrito na seção 2.1.4, tem como problema ignorar os valores passados da função, o que impacta negativamente na exatidão das integrais e das derivadas fracionárias.

As Figuras 27 e 28 mostram o valor numérico do coeficiente usado nas seis amostragens mais recentes da varredura para diferentes ordens de derivadas e integrais. Os gráficos estão representados de forma contínua para facilitar a visualização da tendência de crescimento e decrescimento.

No caso das derivadas não inteiras, observa-se uma valorização dos dois pontos mais recentes enquanto as amostragens mais antigas decrescem o seu peso no somatório. Já as integrais de ordem superior a um valorizam cada vez mais as amostragens passadas.

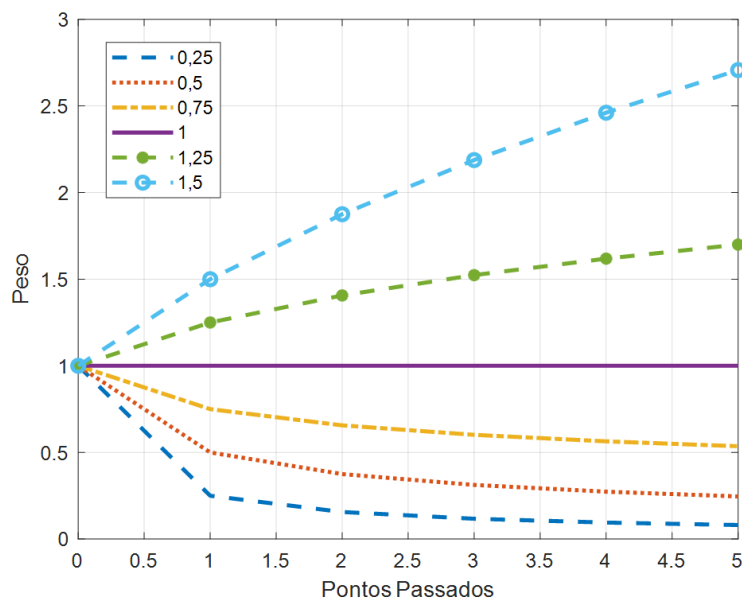
É interessante observar que a derivada inteira coloca peso somente nos dois primeiros pontos e zera o resto, o que demonstra a localidade. Enquanto a integral de primeira ordem mantém todos os seus coeficientes em um, o que possibilita simplesmente somar o valor da varredura anterior com a amostragem atual.

Figura 27 - Coeficiente da varredura das derivadas fracionárias



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 28 - Coeficiente da varredura das integrais fracionárias



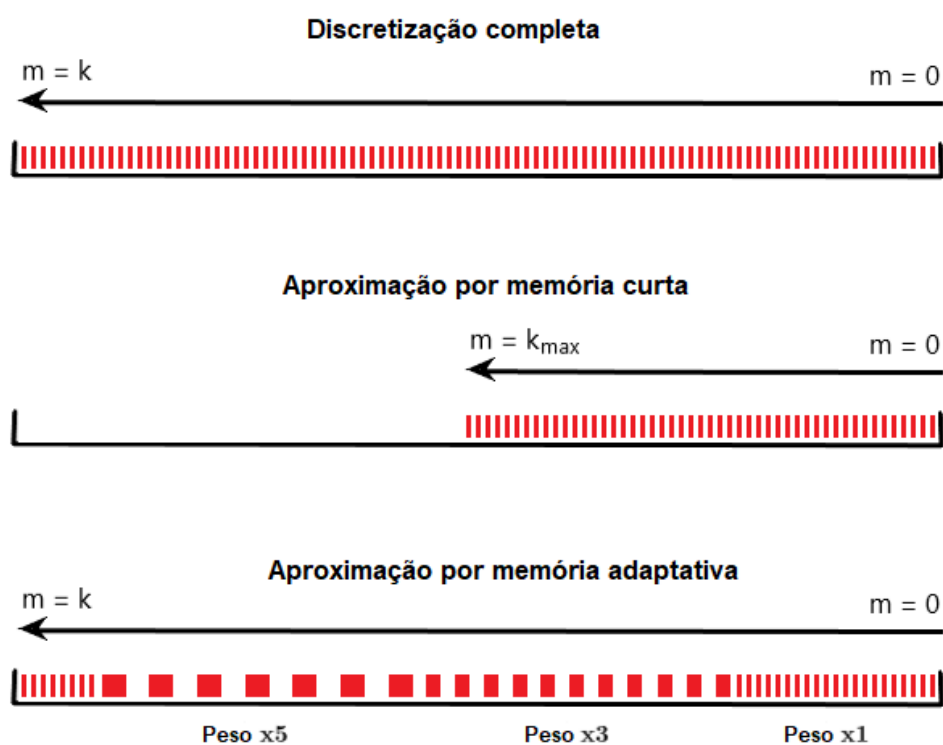
Fonte: Autoria própria (2021)

Uma solução aparente para este problema seria a de aumentar o tempo de amostragem conforme o número de pontos a serem computados cresce. Desta maneira, consegue-se cobrir todo o passado da função, todavia há uma perda significativa na resolução, e este aumento no tempo de amostragem compromete significativamente as derivadas, que como visto na Figura 27, possuem um peso maior nas amostragens mais recentes.

Assim sendo, foi desenvolvido um tempo de amostragem adaptativo seguindo o algoritmo proposto por MacDonald *et al.* (2015). Deste modo, são levados em conta as amostragens mais recentes enquanto as passadas são espaçadas conforme o número de pontos a computar cresce. A Figura 29 ilustra o método e o código consta no Apêndice C.

A validação deste método foi feita pela comparação com os resultados analíticos de derivadas fracionárias conhecidas.

Figura 29 - Métodos de varredura



Fonte: Autoria própria (2021)

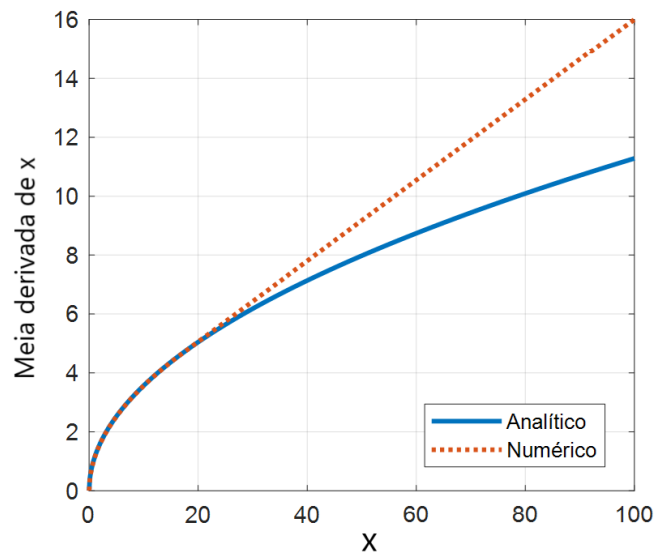
4.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS

O erro do truncamento das amostragens mais recentes é facilmente notado pela meia derivada da função $f(x) = x$. Na Figura 30, pode-se observar que a curva numérica deixa de acompanhar os resultados analíticos assim que o número de amostragens é saturado.

Nesta simulação, foi usado um tempo de amostragem de 0,1 unidades de tempo e limitou-se às 200 amostragens mais recentes, resultando em um erro a partir do instante 20.

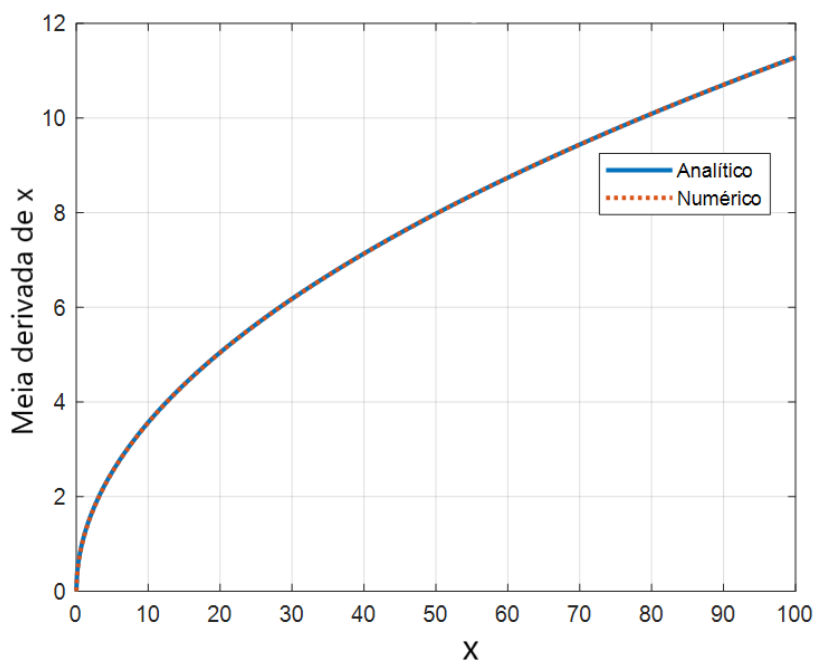
Em contrapartida, a memória adaptativa, por espaçar adequadamente as 200 amostragens disponíveis da varredura, manteve um resultado consistente com a função analítica conforme apresentado na Figura 31.

Figura 30 - Varredura por *short memory principle* da meia derivada da função x



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 31 - Varredura por memória adaptativa da meia derivada da função x



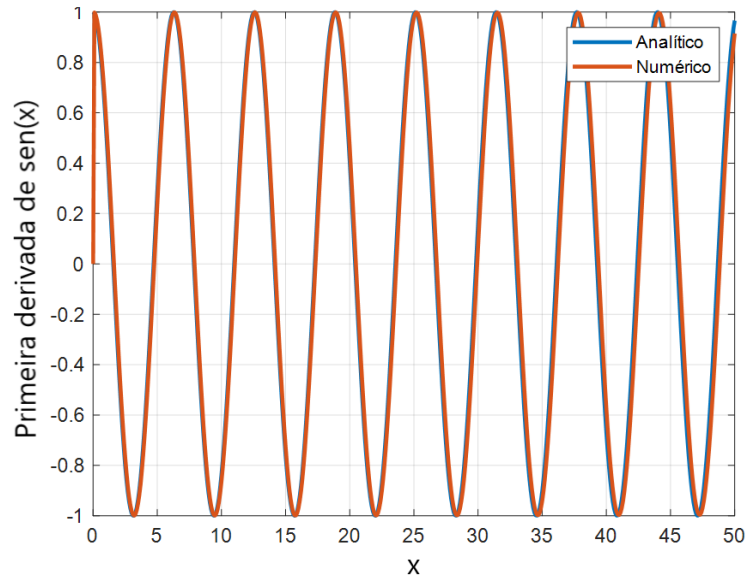
Fonte: Autoria própria (2021)

A solução de aumentar o tempo de amostragem de modo uniforme, também apresenta bons resultados para o caso acima. Entretanto, a necessidade do uso da memória adaptativa é facilmente mostrada através do exemplo da primeira derivada de $\sin(x)$.

Observando a Figura 32, nota-se que a primeira vista esta técnica aparenta apresentar bons resultados. No entanto, conforme o tempo passa, o tempo de amostragem torna-se cada vez maior e acaba com uma resolução

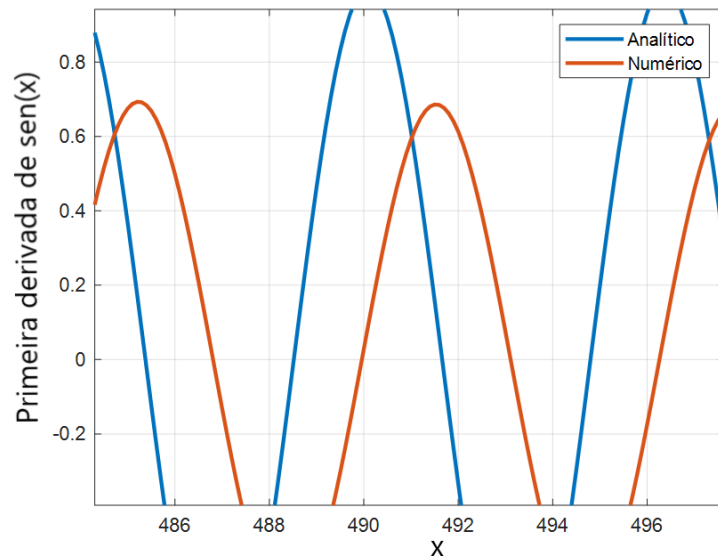
inadequada. Desta forma o erro da operação fica evidente, conforme mostra a Figura 33.

Figura 32 - Varredura com tempo de amostragem uniforme da função $\text{sen}(x)$



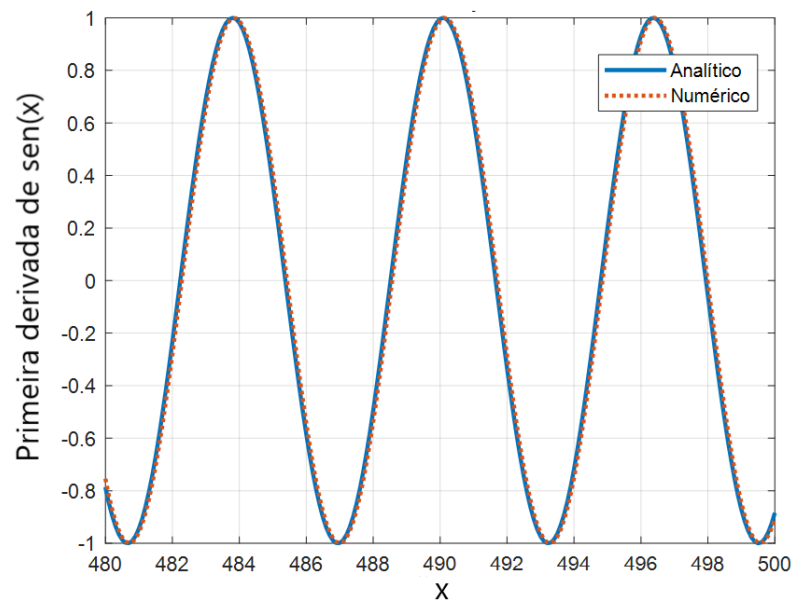
Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 33 - Erro de varredura



Fonte: Autoria própria (2021)

Como a memória adaptativa mantém o tempo de amostragem dos resultados mais recentes constante, e aumenta os valores passados gradualmente, a Figura 34 mostra que a primeira derivada não foi prejudicada mesmo com o decorrer do tempo.

Figura 34 - Varredura por memória adaptativa

Fonte: Autoria própria (2021)

5 CONTROLE DE ROBÔS MANIPULADORES

Esta seção é direcionada para a modelagem e controle de diferentes configurações de robôs manipuladores. O método de minimização é o mesmo da seção 3 e utiliza-se de PSO.

A técnica de torque computado usada foi a mesma mostrada na seção 2.5.4, onde restringe-se a utilizar os mesmos parâmetros de controlador para tratar de todas as juntas do manipulador. Portanto, não foram incluídos controladores PID e FOPID de múltiplos graus de liberdade nesta comparação.

Para esta seção, as figuras possuem unidade de medida de tempo expressa em segundos, de torque em newton-metro, de força em newton, e as distâncias dos gráficos cartesianos estão em metros.

5.1 RÔBO PLANAR 2R

O robô planar 2R possui as mesmas equações de movimento de um pêndulo duplo, sendo uma clássica aplicação de mecânica analítica, e é uma das configurações mais simples de robôs manipuladores.

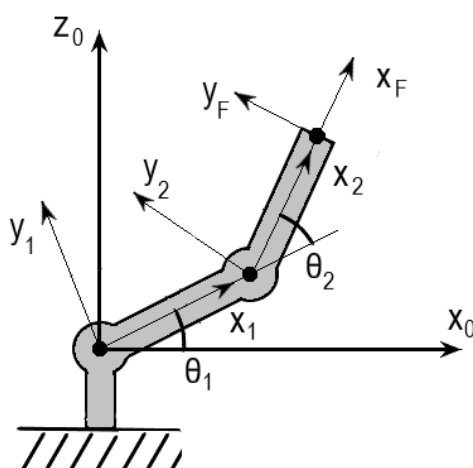
5.1.1 Metodologia

As bases para esta configuração foram posicionadas conforme a Figura 35, onde a última base, alocada no efetuador final, é dada como a base da ferramenta do robô e os eixos “Z” móveis estão saindo do plano.

Os parâmetros de DHM para a cinemática direta desta configuração estão na Tabela 7. Os parâmetros da tabela são os ângulos e distâncias formadas pelos elos tal como foi apresentado na Figura 8.

Para este exemplo, foi considerado que cada elo do robô é dado por um cilindro homogêneo de 1 m de comprimento, 10 cm de raio e com massa de 1 kg. Desta forma, o centro de massa de cada elo está na metade do seu comprimento.

Figura 35 - Robô planar 2R - configuração cinemática



Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 7 - Robô planar 2R - tabela DHM

l	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	90°	0	θ_1	0
2	0°	a_1	θ_2	0
F	0°	a_2	0°	0

Fonte: Autoria própria (2021)

Substituindo os valores numéricos no comprimento dos elos, foi gerada a matriz transformação homogênea da base fixa do robô para a ferramenta mostrada na equação (45).

$$T_F^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & c_1 + c_{12} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & s_1 + s_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (45)$$

onde “ c_1 ” equivale a $\cos(\theta_1)$, “ s_1 ” a $\sin(\theta_1)$ e a função trigonométrica com a soma dos ângulos é dada por “ c_{12} ” e “ s_{12} ”.

A partir dos elementos da matriz foram encontradas as equações (46) e (47), responsáveis pela cinemática inversa do manipulador. Devido à existência de duas soluções possíveis para as mesmas coordenadas, algumas correções foram efetuadas para manter a consistência da curva no planejamento de trajetória.

$$q_2 = \text{acos}\left(\frac{x^2+z^2-a_1^2-a_2^2}{2a_1a_2}\right) \quad (46)$$

$$q_1 = \text{atan2}(z(a_1 + a_2c_2) - xa_2s_2, x(a_1 + a_2c_2) + za_2s_2) \quad (47)$$

As matrizes jacobianas para a primeira e segunda base do manipulador foram calculadas através das equações (18) e (19), e estão apresentadas nas equações (48) e (49). A partir delas pôde-se concluir a modelagem cinemática do robô.

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{-s_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{c_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 2} \quad (48)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{s_1+s_{12}}{2}\right) & \frac{s_{12}}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{c_1+c_{12}}{2} & \frac{c_{12}}{2} \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 2} \quad (49)$$

As equações de movimento necessitam da matriz de inércia dos elos. Deste modo, foi empregada a matriz de inércia do cilindro homogêneo mostrada na equação (50). Assim, deu-se prosseguimento a modelagem dinâmica do manipulador.

$$I = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{a_1^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{a_1^2}{12}\right) \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (50)$$

Com o uso das equações apresentadas na seção 2.5.3, foram calculados o vetor compensação da gravidade, a matriz de Coriolis e a matriz

de inércia do robô planar 2R, expostas respectivamente nas equações (51), (52) e (53).

$$g = \begin{bmatrix} \frac{981}{200}c_{12} + \frac{2943}{200}c_1 \\ \frac{981}{200}c_{12} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad (51)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{-\dot{q}_2 s_2}{2} & -s_2 \frac{\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2}{4} \\ \frac{\dot{q}_1 s_2}{4} & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (52)$$

$$M = \begin{bmatrix} c_2 + \frac{1003}{600} & \frac{c_2}{2} + \frac{403}{1200} \\ \frac{c_2}{2} + \frac{403}{1200} & \frac{403}{1200} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (53)$$

A aplicação destas matrizes na equação de movimento da robótica, equação (24), resulta na equação (54), a qual apresenta o torque total em cada uma das juntas do manipulador.

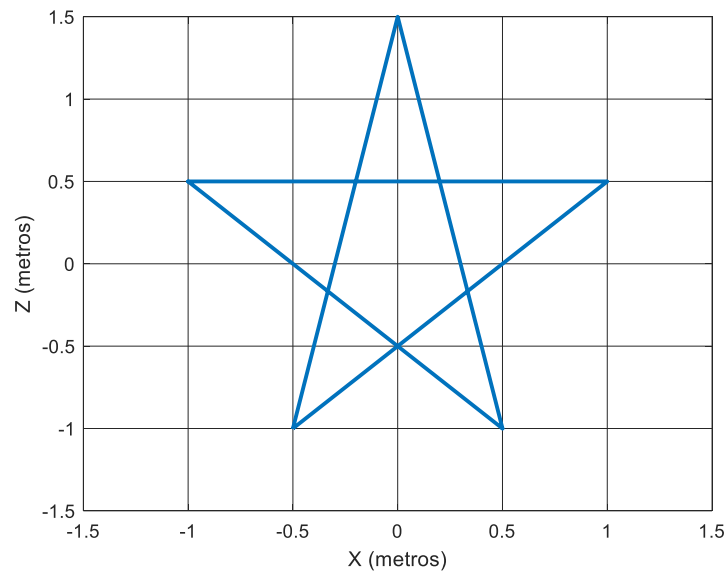
$$\tau = \begin{bmatrix} \frac{981}{200}c_{12} + \frac{2943}{200}c_1 + \ddot{q}_1 \left(c_2 + \frac{1003}{600} \right) + \ddot{q}_2 \left(\frac{c_2}{2} + \frac{403}{1200} \right) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 \frac{s_2}{2} - \dot{q}_2 \frac{s_2}{4} (\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2) \\ \frac{s_2}{4} \dot{q}_1^2 + \frac{403}{1200} \ddot{q}_2 + \frac{981}{200}c_{12} + \dot{q}_1 \left(\frac{c_2}{2} + \frac{403}{1200} \right) \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad (54)$$

Para o planejamento de trajetória foi usado o perfil polinomial de 5ª ordem por meio da equação (21), de modo que o percurso forme o desenho de uma estrela como mostrado na Figura 36. Cada aresta da estrela deve ser realizada em 2 segundos e se manter parado no ponto final por mais 2 segundos para verificar a estabilidade do manipulador em repouso.

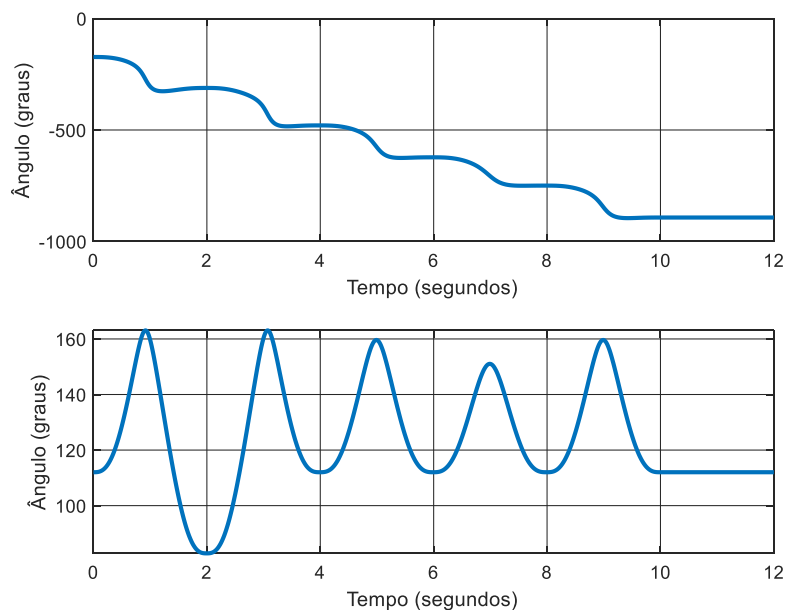
A cinemática inversa do percurso proposto foi realizada através das equações (46) e (47). Assim obtiveram-se as trajetórias para a posição angular de cada junta do manipulador, como mostra a Figura 37.

Com a trajetória definida para o controlador, a técnica de torque computado e torque computado fracionário foram empregados conforme especificado na seção 2.5.4 com um tempo de amostragem de 10 ms.

Foi acrescentado também um pequeno distúrbio de 1 Nm em cada uma das juntas, como forma de representar imperfeições no modelo ou carga útil durante o percurso.

Figura 36 - Robô planar 2R - percurso do efetuador

Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 37 - Robô planar 2R - trajetória da (a) junta 1, (b) junta 2

Fonte: Autoria própria (2021)

Além do controlador PID e FOPID, o controlador PIDD² também foi utilizado para fins comparativos e o indicador que se buscou minimizar foi a integral do erro absoluto cartesiano, isto é a integral da raiz quadrada da soma dos quadrados dos erros, tal como explicitado na equação (55), em que “ e_x ” e “ e_z ” são os erros cartesianos em x e z.

$$\text{Índice de Desempenho} = \int \sqrt{e_x^2 + e_z^2} dt \quad (55)$$

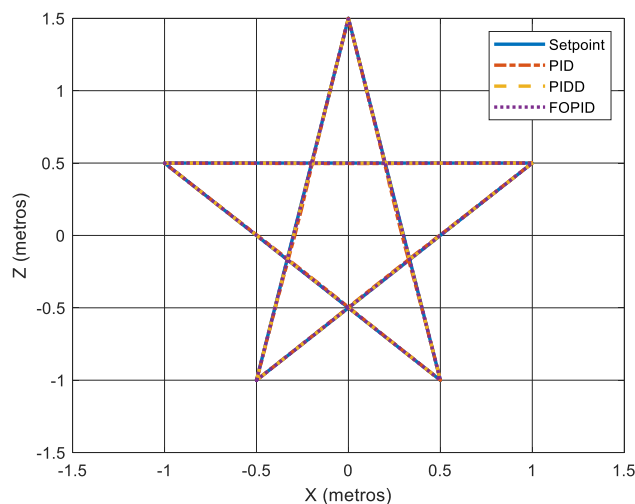
Em seguida, inverteu-se o desenho proposto para averiguar se o desempenho se conserva mediante trajetórias distintas da utilizada para a otimização dos controladores.

Por fim, o percurso original foi simulado novamente com a metade do tempo, e, portanto, com o dobro da velocidade. Desta forma buscou-se verificar se há algum impacto na diferença de desempenho dos controladores com a variação da velocidade de simulação.

5.1.2 Análise dos Resultados

De forma geral, os três controladores obtiveram um resultado adequado para cumprir o percurso proposto. A Figura 38 mostra que os três resultados se sobrepõem ao *setpoint* nesta escala.

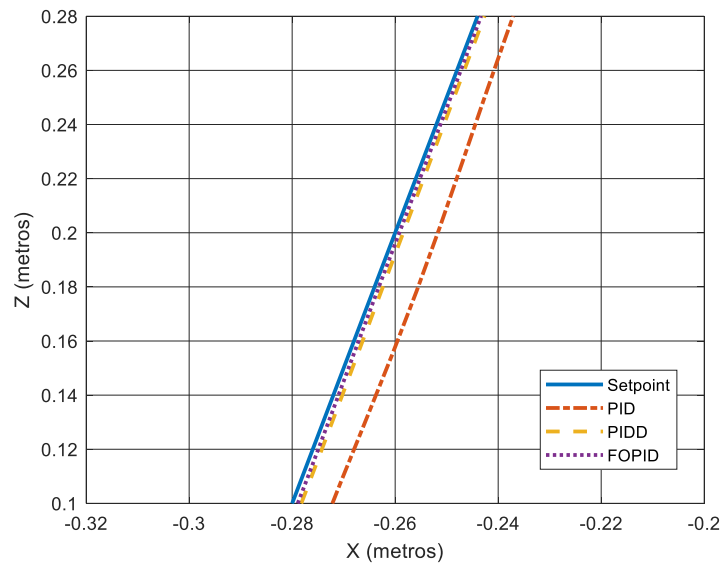
Figura 38 - Robô planar 2R - resultado cartesiano



Fonte: Autoria própria (2021)

Todavia, ao aplicar um detalhamento nos vértices e arestas do desenho, percebe-se a variação de desempenho entre os controladores. A Figura 39 apresenta o detalhamento de parte da Figura 38 e mostra a diferença de percursos obtidos, onde o controlador FOPID, seguido do PIDD², apresenta uma maior exatidão em relação ao PID.

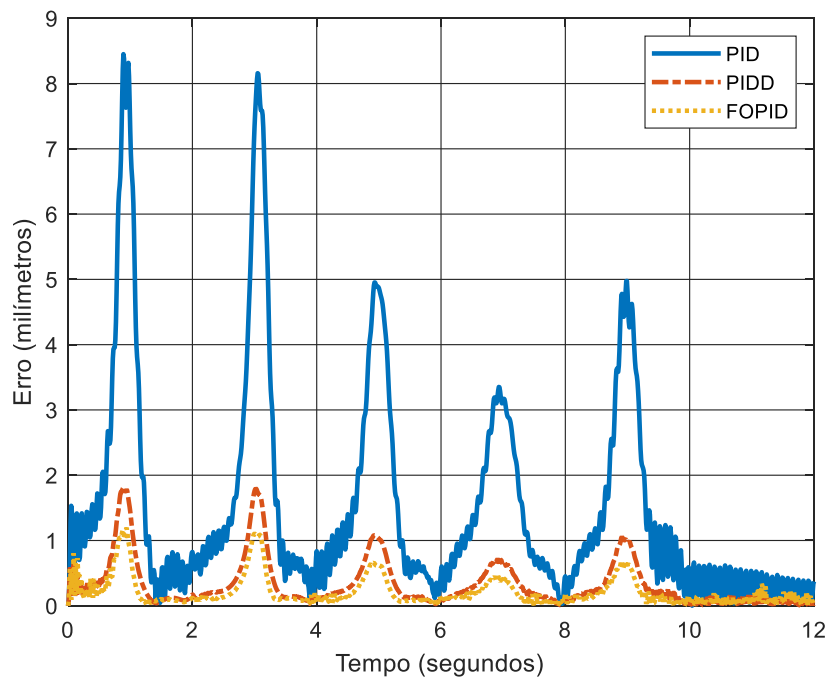
Figura 39 - Robô planar 2R - detalhamento do resultado cartesiano



Fonte: Autoria própria (2021)

Observou-se que os pontos de maior erro aconteceram no meio das arestas da estrela, ponto onde o efetuador move-se com a maior velocidade por seguir um planejamento de trajetória polinomial. O gráfico do erro de posição está exposto na Figura 40 e mostra picos de erros, em milímetros, maiores no controlador PID quando comparado aos outros.

Figura 40 - Robô planar 2R - erro absoluto



Fonte: Autoria própria (2021)

A Tabela 8 mostra uma melhora significativa do índice de desempenho e uma redução do maior erro registrado do controlador fracionário em relação aos outros controladores, especialmente em relação ao PID.

Na Tabela 9 estão os parâmetros encontrados pelo PSO, em que “ λ ” e “ μ ” são as ordens da integral e da derivada. Nela pode-se observar que o controlador PIDD² dispensou a ação derivativa de primeira ordem e que o controlador FOPID obteve uma ordem muito próxima a dois. Desta forma, o que os diferenciou foi a baixa ordem da ação integral do FOPID.

Presume-se que a ordem da integral explica o baixo ganho proporcional do controlador FOPID em relação aos demais, justamente por esta ação estar muito mais próxima da ação proporcional em si do que da ação integral de primeira ordem. Como a ação integral fracionária possui uma ordem baixa e um ganho elevado, o ganho proporcional não se fez tão necessário.

Tabela 8 - Robô planar 2R - resultados da trajetória otimizada

	Índice de desempenho	Maior erro (mm)
PID	$1,8236 \times 10^{-2}$	8,450
PIDD²	$3,9327 \times 10^{-3}$	1,809
FOPID	$2,5672 \times 10^{-3}$	1,196
Redução ao PID	85,92%	85,85%
Redução ao PIDD²	34,72%	33,89%

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 9 - Robô planar 2R - parâmetros dos controladores

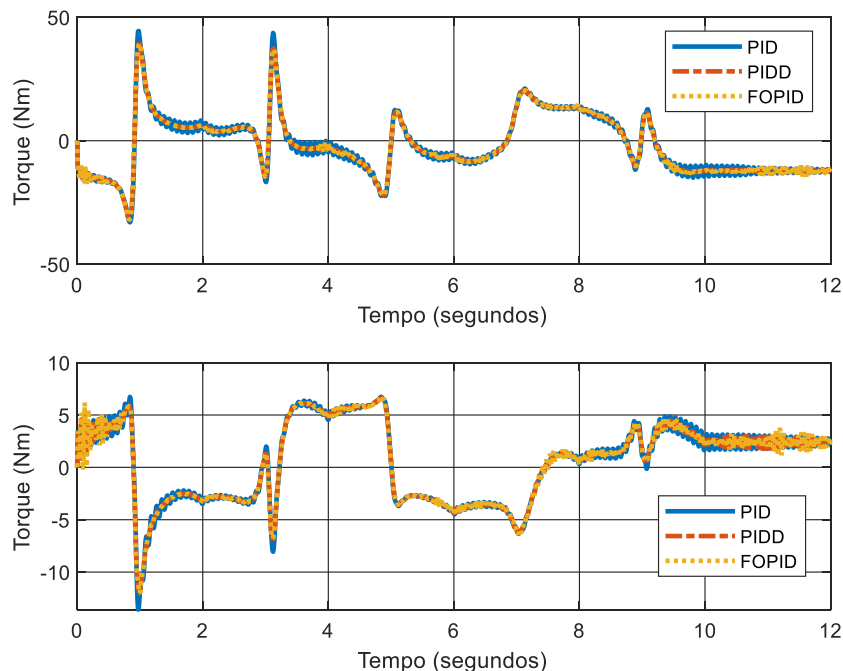
Controlador	Kp	Ki	Kd	Kd ₂	λ	μ
PID	2831	325,8	62,35	-	-	-
PIDD²	13242	1682	0	1,427	-	-
FOPID	108	29777	2,072	-	0,1737	1,9439

Fonte: Autoria própria (2021)

Em relação ao sinal de controle, os três controladores obtiveram um resultado semelhante, assim mostrando que nenhum dos controladores retornou um torque exorbitante. Ora, houve uma maior variação do sinal de

controle em um dos controladores, ora, em outro. A Figura 41 apresenta o torque das duas juntas do robô manipulador.

Figura 41 - Robô planar 2R - sinal de controle: (a) junta 1, (b) junta 2



Fonte: Autoria própria (2021)

Ao se inverter o percurso proposto na otimização dos parâmetros, obteve-se um desempenho praticamente equivalente como mostra a Figura 42. A Tabela 10 ainda mostra um indicador de desempenho menor deste percurso para o PIDD² e para o FOPID.

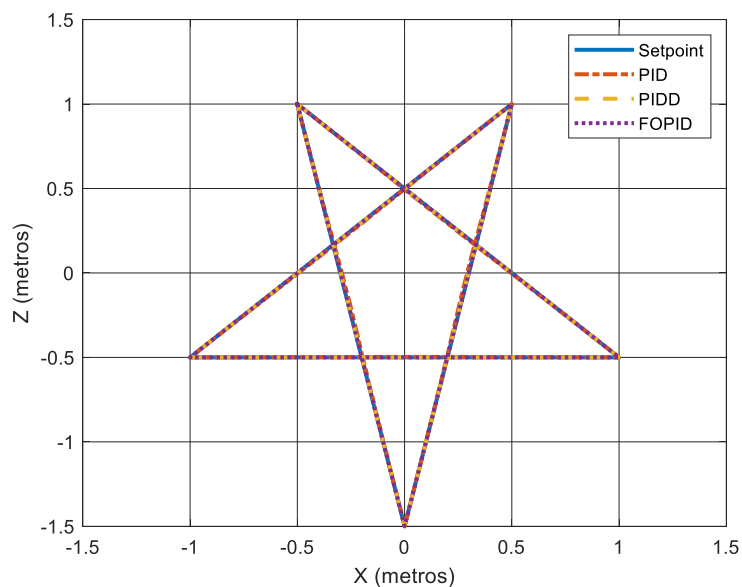
Tabela 10 - Robô planar 2R - resultados da trajetória invertida

Controlador	Índice de desempenho	Maior erro (mm)
PID	$1,8165 \times 10^{-2}$	8,813
PIDD ²	$3,8573 \times 10^{-3}$	1,860
FOPID	$2,3763 \times 10^{-3}$	1,269
Redução ao PID	86,92%	85,60%
Redução ao PIDD ²	38,39%	31,77%

Fonte: Autoria própria (2021)

Conclui-se que a conservação do desempenho para diferentes percursos se dá pelo uso do torque computado, onde a matriz de inércia do manipulador é multiplicada às ações dos controladores.

Figura 42 - Robô planar 2R - resultado cartesiano invertido



Fonte: Autoria própria (2021)

Por outro lado, a redução do tempo para a realização do mesmo desenho necessita de uma nova sintonia para os parâmetros dos três controladores. A Tabela 11 mostra que os indicadores de desempenho mantiveram a proporcionalidade dos resultados passados e os parâmetros dos novos controladores estão no Apêndice A.

Tabela 11 - Robô planar 2R - resultados da trajetória com maior velocidade

Controlador	Índice de desempenho	Maior erro (mm)
PID	$8,6077 \times 10^{-3}$	7,223
PIDD ²	$1,8209 \times 10^{-3}$	1,633
FOPID	$1,1902 \times 10^{-3}$	1,093
Redução ao PID	86,17%	84,87%
Redução ao PIDD ²	34,64%	33,07%

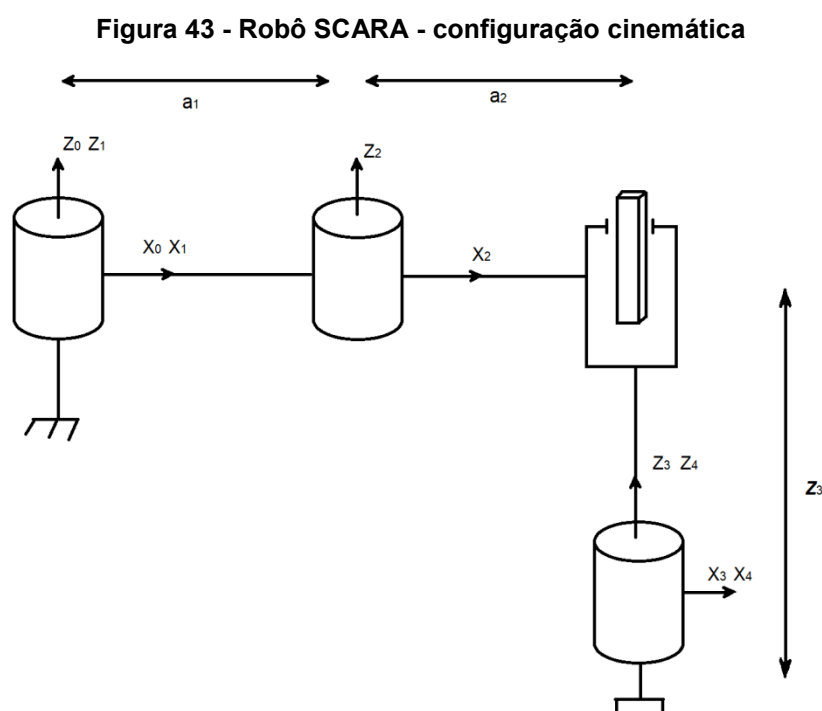
Fonte: Autoria própria (2021)

5.2 SCARA

O robô *Selective Compliance Assembly Robot Arm* (SCARA) é uma configuração com três juntas rotativas e uma junta prismática. As três primeiras juntas são responsáveis pela posição do efetuador, enquanto a última junta rotativa é responsável pela orientação. Sua grande vantagem é que apenas a junta prismática possui carga oriunda da força peso do robô, sendo também mais vantajoso para tarefas planares e de alta velocidade (CRAIG, 2005).

5.2.1 Metodologia

A cinemática usada para este modelo de manipulador está ilustrada na Figura 43, onde a origem dos primeiros eixos móveis foi sobreposta à origem fixa e os dois últimos sobrepostos ao efetuador. A Tabela 12 apresenta os parâmetros DHM propostos para esta configuração.



Fonte: Autoria própria (2021)

Assim como no exemplo anterior, os três elos foram aproximados para cilindros homogêneos de 1 metro de comprimento e 10 cm de raio, enquanto a

junta de orientação foi aproximada por um disco de mesmo raio, onde todos os elementos possuem 1 kg de massa.

Tabela 12 - Robô SCARA - tabela DHM

I	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0°	0	θ_1	0
2	0°	a_1	θ_2	0
3	0°	a_2	0°	z_3
4	0°	0	θ_4	0

Fonte: Autoria própria (2021)

Para estas dimensões, foram encontradas as matrizes transformação homogênea, sendo a equação (56) a matriz correspondente a cinemática direta da base fixa para o efetuador.

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} c_{124} & -s_{124} & 0 & c_1 + c_{12} \\ s_{124} & c_{124} & 0 & s_1 + s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & -z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (56)$$

Da mesma forma, foi encontrada a matriz jacobiana para o efetuador, exposta na equação (57). Esta demonstra que apenas as posições angulares das duas primeiras juntas impactam a velocidade linear e angular do manipulador.

$$J_4 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{s_1 + s_{12}}{2}\right) & -\frac{s_{12}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{c_1 + c_{12}}{2} & \frac{c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 4} \quad (57)$$

A cinemática inversa para este modelo é análogo ao exemplo anterior, com a diferença da posição resultante das duas primeiras juntas se darem no plano XY e não no plano XZ. As equações para estas juntas estão mostradas nas equações (58) e (59) em que “ a_1 ” e “ a_2 ” são os comprimentos dos dois primeiros elos.

$$q_2 = \arccos\left(\frac{x^2+y^2-a_1^2-a_2^2}{2a_1a_2}\right) \quad (58)$$

$$q_1 = \arctan2(y(a_1 + a_2c_2) - xa_2s_2, x(a_1 + a_2c_2) + ya_2s_2) \quad (59)$$

A junta 3, sendo uma junta prismática, possui uma relação direta com a posição cartesiana no eixo Z, sendo somente tal distância com o sinal invertido como mostra a equação (60).

$$q_3 = -z \quad (60)$$

A orientação do efetuador é encontrada através dos elementos (1,1) e (2,1) da matriz de rotação e, desta forma, a posição angular da junta 4 é calculada conforme a equação (61).

$$q_4 = \arctan\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right) - q_1 - q_2 \quad (61)$$

Assim como foi explicado no começo desta seção, como as juntas rotativas estão ortogonais ao plano XY, a única junta sujeita a força peso é a junta prismática sendo então uma constante, como mostra a equação (62).

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{981}{50} \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad (62)$$

A equação (63) mostra que a coordenada generalizada, que se trata de uma variável para a matriz de inércia, é a posição angular da segunda junta. Por fim, a matriz de Coriolis, equação (64), apresenta a maioria dos seus elementos nulos, sendo que a sua contribuição é exclusiva para o torque das duas primeiras juntas.

$$M = \begin{bmatrix} 3c_2 + \frac{1003}{240} & \frac{3}{2}c_2 + \frac{253}{300} & 0 & \frac{1}{200} \\ \frac{3}{2}c_2 + \frac{253}{300} & \frac{253}{300} & 0 & \frac{1}{200} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{200} & \frac{1}{200} & 0 & \frac{1}{200} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (63)$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}s_2\dot{q}_2 & -\frac{3}{4}s_2(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) & 0 & 0 \\ \frac{3}{4}s_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (64)$$

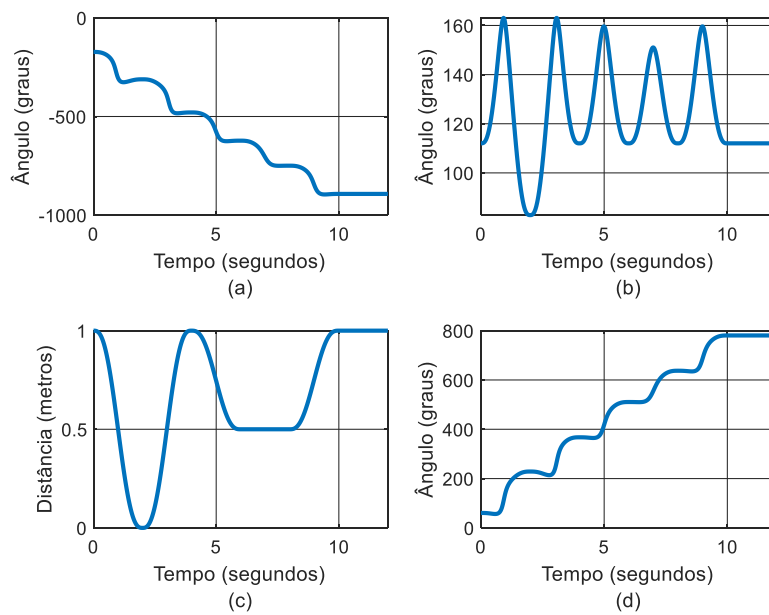
A soma destes efeitos na equação de movimento da robótica resulta na equação do torque generalizado apresentado na equação (65). Ressaltando-se de que a terceira linha corresponde à junta prismática, portanto sendo uma força e não um torque.

$$\tau = \begin{bmatrix} (3c_2 + \frac{1003}{240})\ddot{q}_1 + (\frac{3}{2}c_2 + \frac{253}{300})\ddot{q}_2 + \frac{1}{200}\ddot{q}_4 - \frac{3}{2}s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{3}{4}s_2\dot{q}_2(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\ (\frac{3}{2}c_2 + \frac{253}{300})\ddot{q}_1 + \frac{253}{300}\ddot{q}_2 + \frac{1}{200}\ddot{q}_4 + \frac{3}{4}s_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)\dot{q}_1 \\ 2\ddot{q}_3 + \frac{981}{50} \\ \frac{1}{200}(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_4) \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad (65)$$

A trajetória proposta para este modelo segue os mesmos parâmetros do exemplo anterior e o percurso desejado também foi o de desenhar uma estrela. No entanto, utilizando-se da movimentação no eixo Z através da junta prismática para desenhá-la em um plano inclinado, enquanto a última junta necessitou cumprir o papel de manter a orientação do efetuador constante em relação à base fixa do manipulador. A Figura 44 apresenta a trajetória das juntas necessária para esta tarefa, onde a junta 3 está em metros e as demais juntas estão em graus.

O indicador de desempenho que se buscou minimizar foi a soma da integral absoluta do erro de posição cartesiana com a integral absoluta do erro de orientação. Como ambas possuem unidades de medida distintas, arbitrou-se ponderá-las de modo unitário, tal como mostra a equação (66), em que “ e_y ” é o erro do sistema no eixo y e “ e_4 ” é o erro da junta 4 em graus.

Figura 44 - Robô SCARA - trajetória: (a) junta 1, (b) junta 2, (c) junta 3, (d) junta 4



Fonte: Autoria própria (2021)

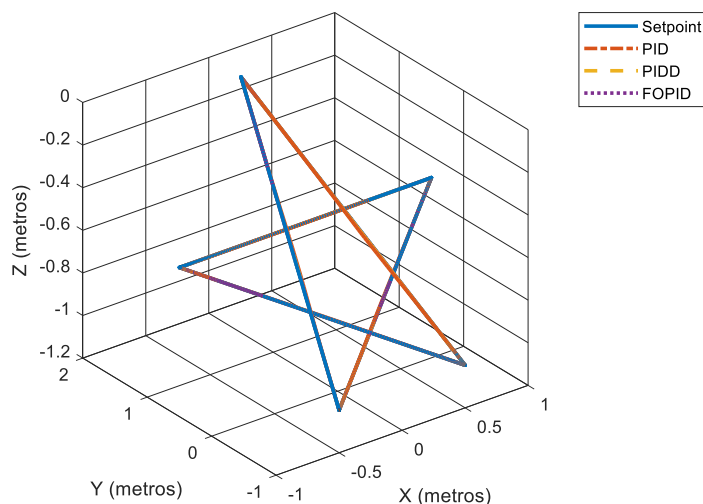
$$\hat{\text{Índice de Desempenho}} = \int \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2} + e_4 dt \quad (66)$$

5.2.2 Análise dos Resultados

Tal como o modelo de dois graus de liberdade, os três controladores foram capazes de seguir a trajetória proposta ao robô SCARA, como mostra a Figura 45.

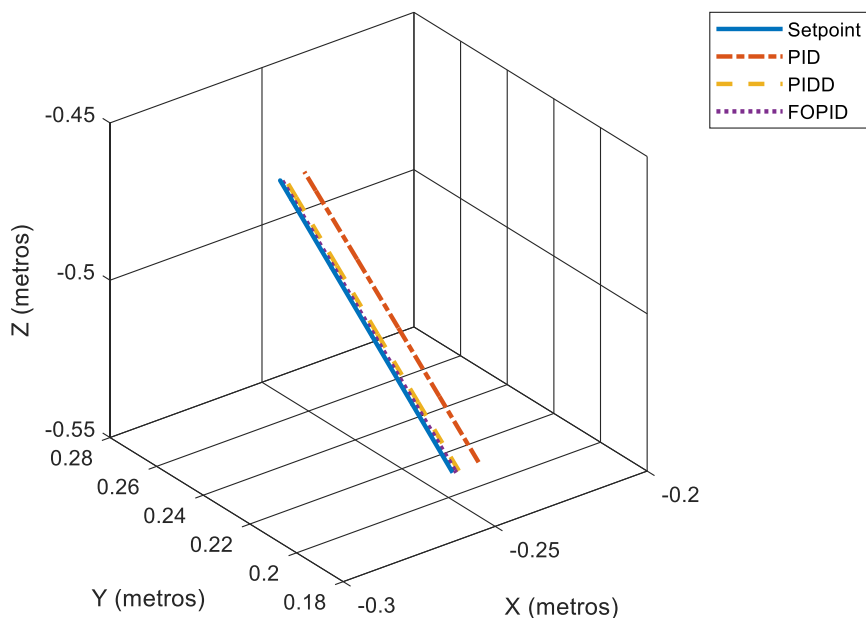
Contudo, mais uma vez ao aplicar um detalhamento em uma das arestas da estrela, percebe-se que o desvio do controlador PID foi o maior, enquanto o FOPID obteve a maior proximidade da referência, seguido pelo PIDD², conforme mostra a Figura 46.

Figura 45 - Robô SCARA - resultado cartesiano



Fonte: Autoria própria (2021)

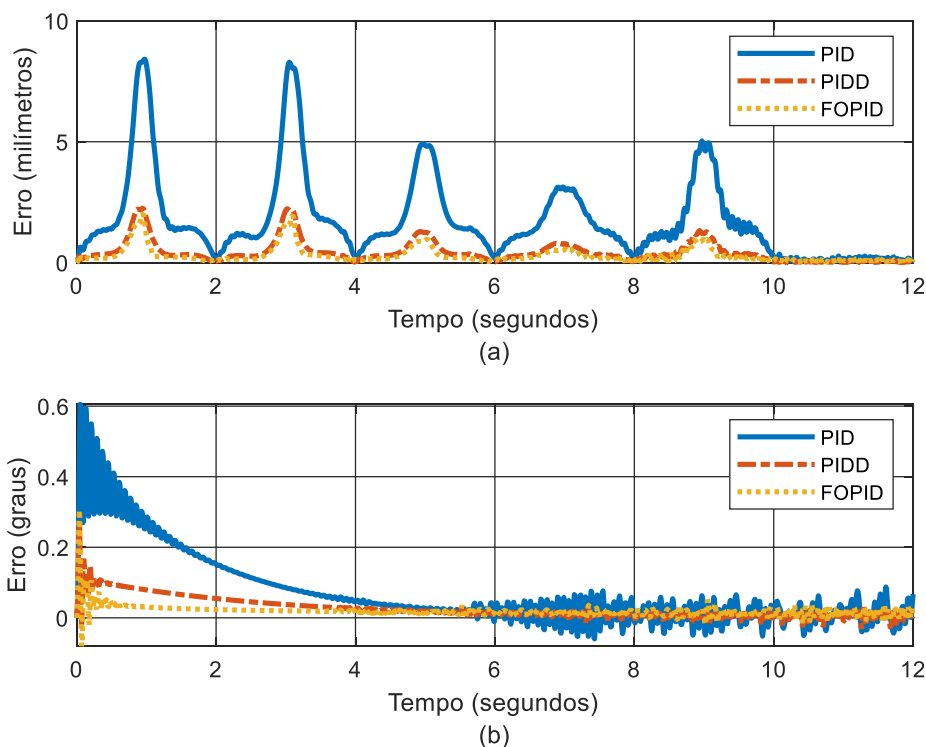
Figura 46 - Robô SCARA - detalhamento do resultado cartesiano



Fonte: Autoria própria (2021)

A comparação de desempenho é mais facilmente ilustrada pela Figura 47, a qual expõe o erro de posição em milímetros e de orientação em graus dos controladores durante a trajetória. Dela puderam-se observar picos muito menores do erro cartesiano nos controladores PIDD² e FOPID em comparação ao PID, enquanto a maior diferença de desempenho entre o FOPID e o PIDD² se dá no erro de orientação, onde a área do erro do FOPID é visivelmente menor.

Figura 47 - Robô SCARA - erro (a) de posição, (b) de orientação



Fonte: Autoria própria (2021)

Os índices de desempenho e os maiores valores dos erros de posição estão mostrados na Tabela 13, onde observa-se uma redução significativa do FOPID em relação aos demais controladores.

Tabela 13 - Robô SCARA - resultados da trajetória otimizada

	Índice de Desempenho	Maior Erro (mm)
PID	$3,7406 \times 10^{-2}$	8,414
PIDD²	$1,1048 \times 10^{-2}$	2,251
FOPID	$7,6800 \times 10^{-3}$	2,018
Redução ao PID	79,47%	76,02%
Redução ao PIDD²	30,48%	10,34%

Fonte: Autoria própria (2021)

O “jitter” observado na Figura 48, especialmente na orientação do PID, reflete-se nos sinais de controle ilustrados na Figura 48. Este jitter possivelmente advém do uso do mesmo ganho para todas as juntas.

Os parâmetros encontrados para esta simulação estão expostos na Tabela 14. Desta vez, observou-se que o controlador PIDD² não dispensou a

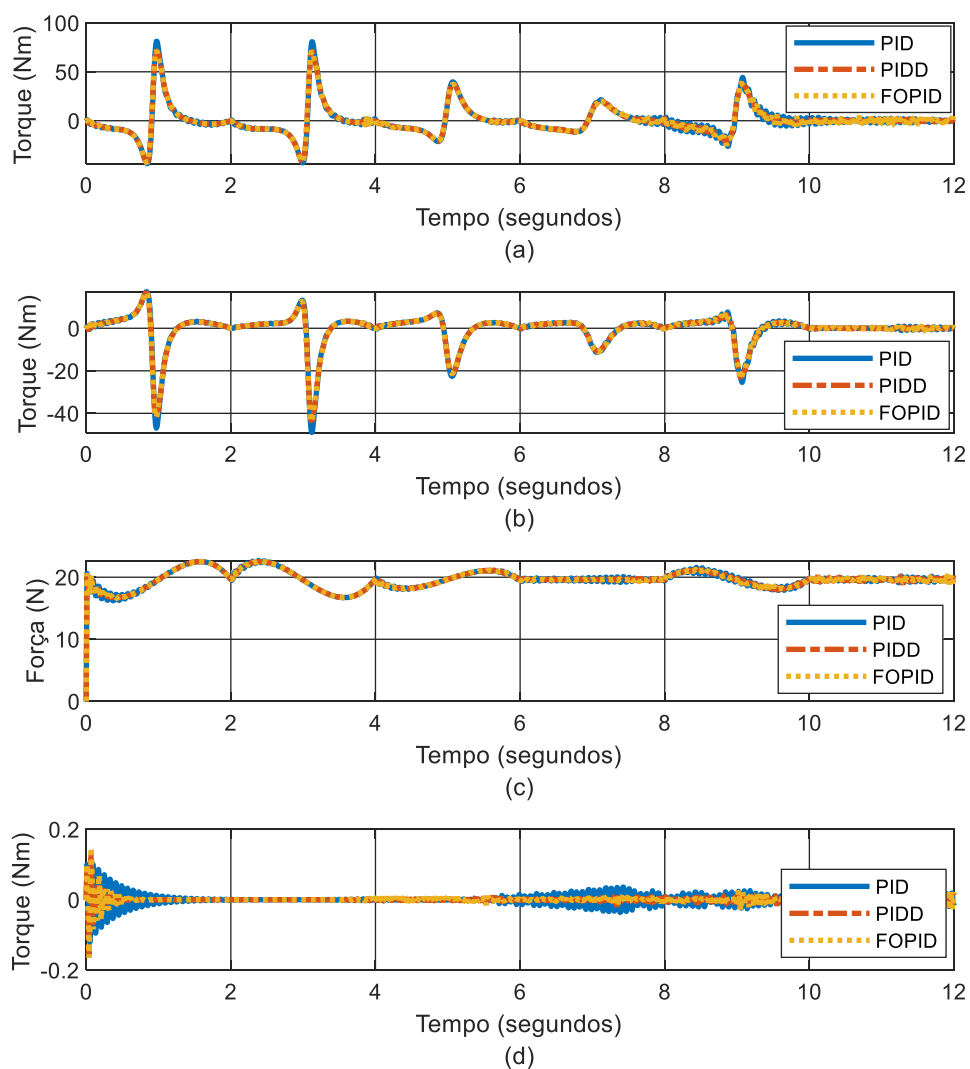
ação derivativa de primeira ordem, portanto utilizou-se de quatro ações de controle.

Tabela 14 - Robô SCARA - parâmetros dos controladores

Controlador	K_p	K_i	K_d	K_{d_2}	λ	μ
PID	2481	1393	69,71	-	-	-
PIDD ²	9983	3693	15,20	1,291	-	-
FOPID	3755	23792	7,302	-	0,4039	1,6406

Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 48 - Robô SCARA - sinal de controle: (a) junta 1, (b) junta 2, (c) junta 3, (d) junta 4



Fonte: Autoria própria (2021)

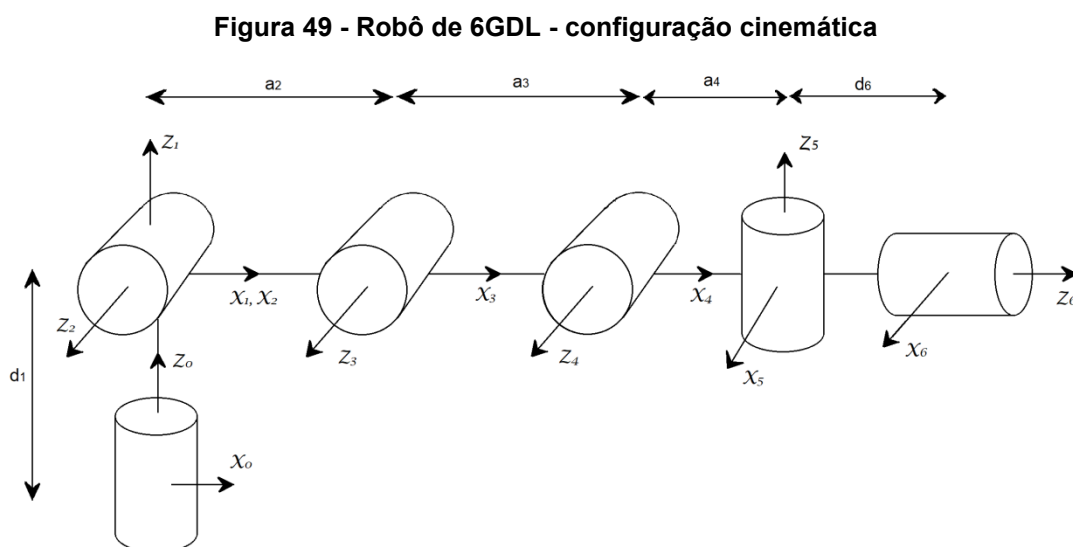
5.3 MANIPULADOR DE SEIS GRAUS DE LIBERDADE

Um robô manipulador de seis graus de liberdade (6GDL), dentro da sua área de trabalho, é capaz de posicionar o efetuador em qualquer ponto cartesiano com uma orientação arbitrária, sendo as três primeiras juntas responsáveis pela posição X, Y, Z, e as três últimas responsáveis pela orientação do efetuador (SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006).

A configuração cinemática usada nesta seção é inspirada no manipulador TITAN 4 da Schilling Robotics. Todavia, os *offsets* da configuração original foram retirados e foram usados valores fictícios para as dimensões e massas dos elos.

5.3.1 Metodologia

A cinemática deste modelo está ilustrada na Figura 49, onde os dois primeiros eixos móveis estão com as origens sobrepostas e o último eixo móvel está coincidente ao efetuador. Os parâmetros DHM desta configuração estão expostos na Tabela 15.



Fonte: Autoria própria (2021)

Todos os elos foram representados como cilindros homogêneos e suas dimensões estão descritas no Quadro 2.

Tabela 15 - Robô de 6GDL - tabela DHM

i	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0°	0	θ_1	d_1
2	90°	0	θ_2	0
3	0°	a_2	θ_3	0
4	0°	a_3	θ_4	0
5	-90°	a_4	θ_5-90°	0
6	-90°	0	θ_6	d_6

Fonte: Autoria própria (2021)

Como os elementos da matriz transformação homogênea da base fixa para o efetuador deste modelo são demasiadamente extensos, a matriz e as equações da cinemática direta foram anexadas no Apêndice D.

Quadro 2 - Dimensões dos elos

Elo	Comprimento (m)	Raio (cm)	Massa (kg)
1	1,0	20	4,0
2	1,0	10	2,0
3	1,0	10	2,0
4	0,4	10	0,8
5	0,4	10	0,8
6	0,2	10	0,4

Fonte: Autoria própria (2021)

A cinemática inversa para um robô de seis graus de liberdade é uma tarefa complexa de ser realizada através da matriz transformação homogênea da base fixa ao efetuador. Deste modo, as coordenadas generalizadas foram encontradas por meio da comparação dos elementos da matriz homogênea da base móvel ao efetuador, como mostram as equações (67) e (68).

$$\widetilde{T}_6^0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$T_6^1 = (T_1^0)^{-1} \widetilde{T}_6^0 \quad (68)$$

Assim, com as dimensões numéricas já substituídas, foram encontradas as equações (69) a (76) para a cinemática inversa, onde as equações (72) e (74) servem de variáveis auxiliares para os cálculos das juntas seguintes.

$$q_1 = \text{atan}\left(\frac{5y-3r_{23}}{5x-3r_{13}}\right) \quad (69)$$

$$q_5 = \text{asin}\left(5yc_1 - \frac{1}{3}xs_1\right) \quad (70)$$

$$q_6 = \text{atan}\left(-\frac{r_{22}c_1 - r_{12}s_1}{r_{21}c_1 - r_{11}s_1}\right) \quad (71)$$

$$q_{234} = \text{asin}\left(\frac{r_{33}}{c_5}\right) \quad (72)$$

$$q_3 = \pm \text{acos}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}s_5 - yc_1 + xs_1^2 + \left(\frac{2}{5}s_{234} - z + \frac{3}{5}s_{234}c_5 + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{5}c_{234} + \frac{3}{5}c_{234}c_5 - xc_1 - ys_1\right)^2 - 2\right)\right) \quad (73)$$

$$k = xc_1 + \frac{3}{5}s_{234}s_5 - \frac{2}{5}c_{234} + ys_1 \quad (74)$$

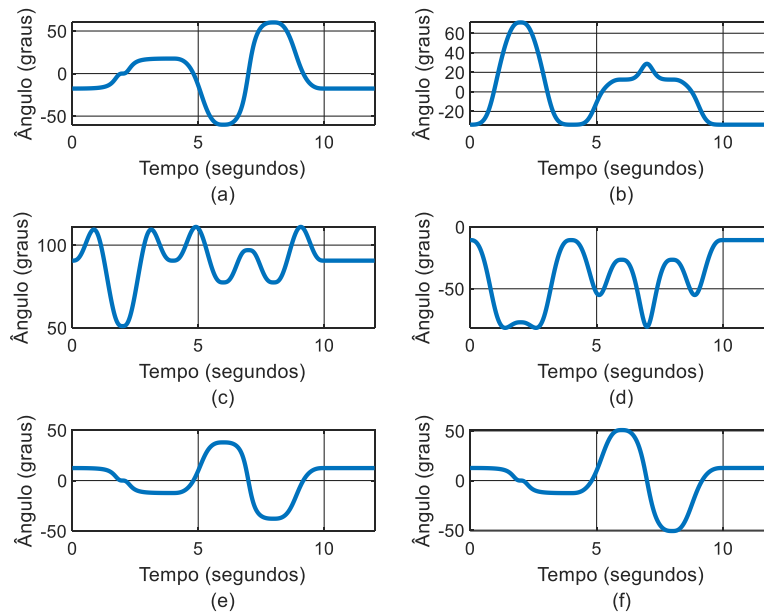
$$q_2 = \text{asin}\left(\frac{-2ks_3 \pm \sqrt{4k^2s_3^2 - 8(1+c_3)(k^2 - (1+c_3)^2)}}{4(1+c_3)}\right) \quad (75)$$

$$q_4 = q_{234} - q_2 - q_3 \quad (76)$$

De modo análogo aos exemplos anteriores, o percurso proposto para este manipulador é o desenho de uma estrela em um plano inclinado a frente do manipulador mantendo a orientação do efetuador constante em relação à base fixa e ortogonal ao plano de desenho. Utilizando-se das equações (69) a (76), a trajetória das seis juntas necessitou seguir os ângulos mostrados na Figura 50.

As matrizes e equações necessárias para a dinâmica do robô são apresentadas no Apêndice D, pois a matriz jacobiana, compensação da gravidade, matriz de inércia e matriz de Coriolis, tal como a matriz transformação homogênea, obtiveram elementos muito extensos para serem apresentadas no corpo do texto.

Figura 50 - Robô de 6GDL - trajetória: (a) junta 1, (b) junta 2, (c) junta 3, (d) junta 4, (e) junta 5, (f) junta 6



Fonte: Autoria própria (2021)

O critério para a minimização segue o mesmo do modelo SCARA, sendo a soma da integral do erro da posição com a da orientação. Como neste caso a orientação não está restrita somente a um ângulo, a integral do erro de orientação foi calculada através da norma do erro das matrizes de rotação, conforme mostra as equações (77) e (78).

$$e_{orient} = \|E_{orient}\| = \sqrt{\lambda_{max}((R_d - R)^T(R_d - R))} \quad (77)$$

$$\text{Índice de Desempenho} = \int \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + e_{orient}^2} dt \quad (78)$$

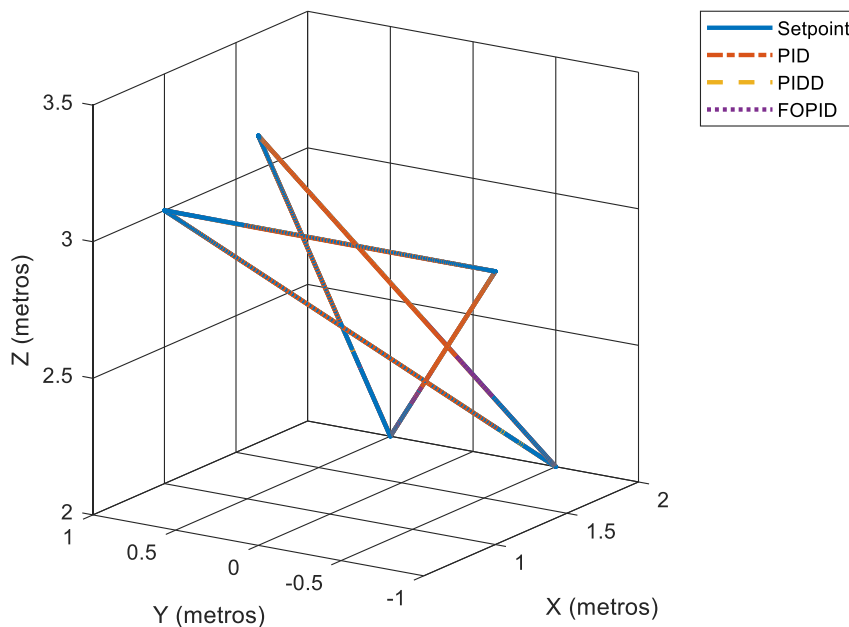
onde “ R_d ” é a orientação desejada, “ R ” a orientação real e “ λ_{max} ” é o maior autovalor da matriz.

5.3.2 Análise dos Resultados

Da mesma forma que as seções 5.1.2 e 5.2.2, visualmente os três controladores conseguiram acompanhar a trajetória proposta e desenhar a estrela no plano inclinado, como mostra a Figura 51.

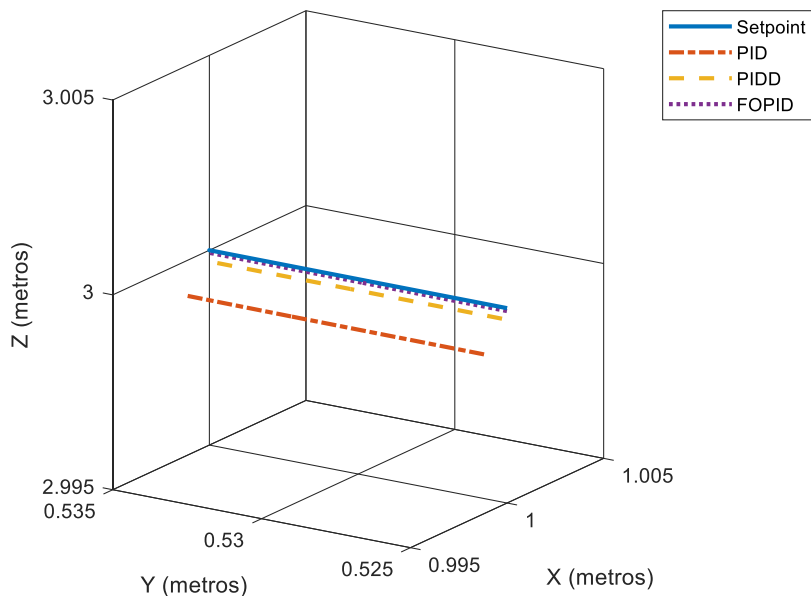
Novamente pode-se observar, na Figura 52, que o controlador PID obteve o maior erro de posição, enquanto o controlador FOPID obteve a maior proximidade da referência em uma das arestas da estrela.

Figura 51 - Robô de 6GDL - resultado cartesiano



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 52 - Robô de 6GDL - detalhamento do resultado cartesiano

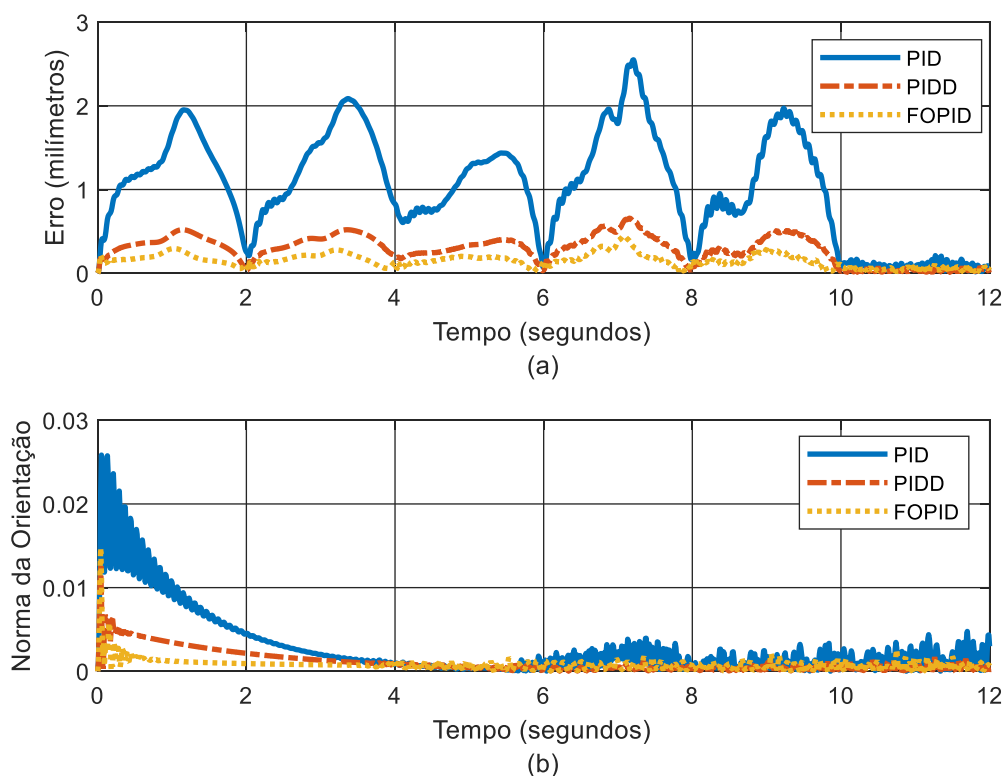


Fonte: Autoria própria (2021)

O erro de posição dos três controladores pode ser visualizado mais facilmente no decorrer do tempo na Figura 53, bem como o erro de orientação do

efetuador, onde o erro de posição está em milímetros. Tanto para a posição quanto para a orientação, o controlador FOPID apresentou os menores valores da norma dos erros.

Figura 53 - Robô de 6GDL - erro (a) de posição, (b) de orientação



Fonte: Autoria própria (2021)

O desempenho dos controladores está expresso numericamente na Tabela 16, onde se constata o mesmo padrão de redução da integral do erro dos modelos anteriores. Os picos de erros de posição para o manipulador de 6GDL foram menores do que as configurações mais simples. Todavia, a integral do erro, sendo o real critério de minimização, obteve resultados inferiores. Os parâmetros desta simulação estão na Tabela 17.

O sinal de controle das seis juntas está mostrado na Figura 54 e novamente, assim como no sinal de controle do robô SCARA (Figura 48) a última junta resalta o “jitter” ocorrido na orientação do manipulador pela utilização dos mesmos ganhos para todas as juntas, em especial para o controlador PID. Como o PSO buscou minimizar o funcional, sendo a soma do erro de posição com o erro de orientação, aplicando-se diferentes pesos para cada erro, poderia suavizar o “jitter” da última junta.

Tabela 16 - Robô de 6GDL - resultados da trajetória otimizada

	Índice de Desempenho	Maior Erro (mm)
PID	$4,7159 \times 10^{-2}$	2,55
PIDD²	$1,6816 \times 10^{-2}$	0,658
FOPID	$1,1588 \times 10^{-2}$	0,446
Redução ao PID	79,43%	82,51%
Redução ao PIDD²	31,09%	32,22%

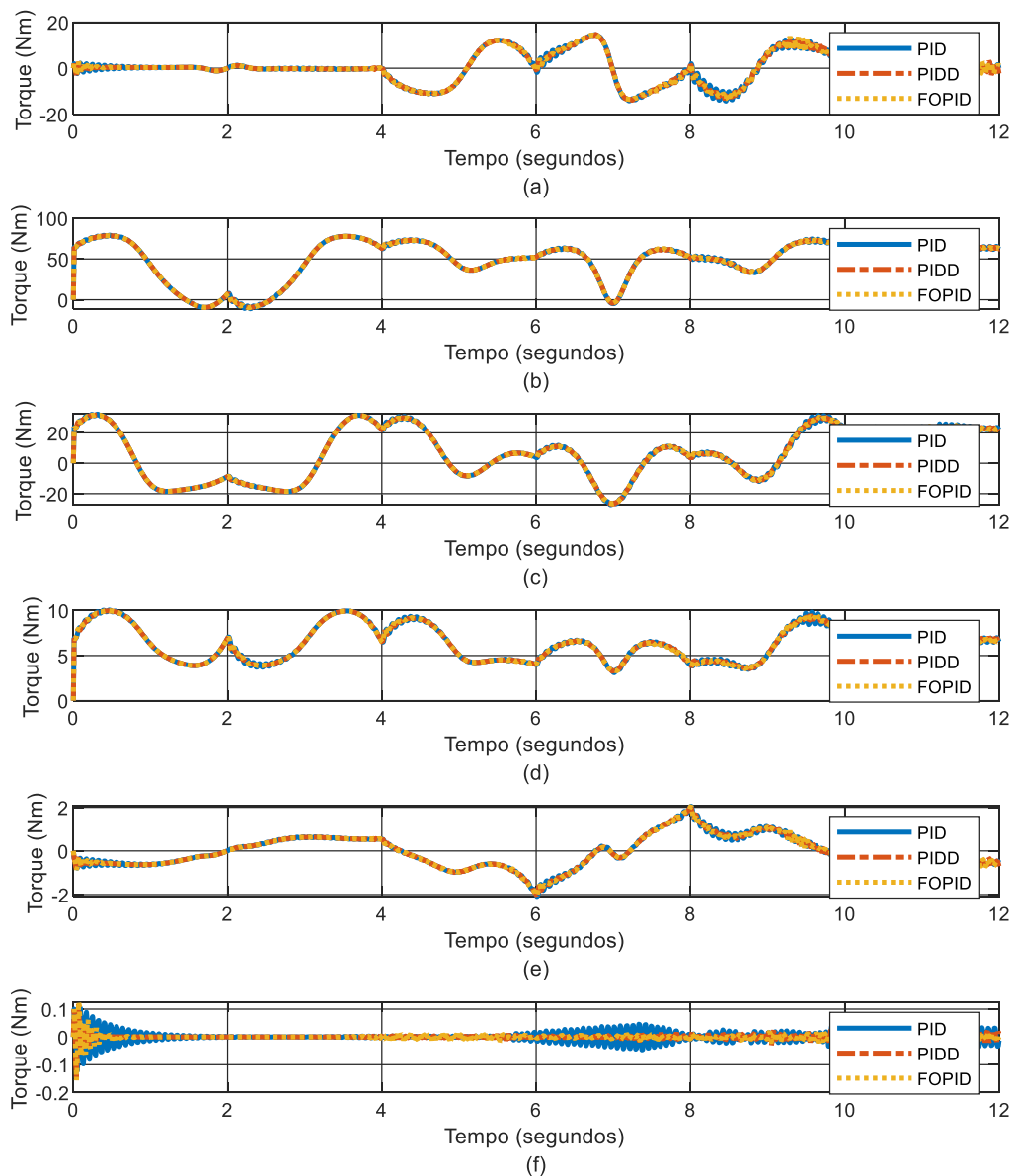
Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 17 - Robô de 6GDL - parâmetros dos controladores

Controlador	Kp	Ki	Kd	Kd ₂	λ	μ
PID	2458	1873	72,95	-	-	-
PIDD²	9043	4267	22,63	1,291	-	-
FOPID	1588	26731	14,1	-	0,4087	1,4905

Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 54 - Robô de 6GDL - sinal de controle: (a) junta 1, (b) junta 2, (c) junta 3, (d) junta 4, (e) junta 5, (f) junta 6



Fonte: Autoria própria (2021)

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste projeto de pesquisa propôs-se a efetuar aplicação da teoria de controle fracionário analisando alguns sistemas dinâmicos, e desta forma poder-se-ia averiguar a hipótese de que tal aplicação melhoraria o desempenho dos sistemas analisados.

Assim sendo, estabeleceu-se o objetivo geral de simular um conjunto de estudos de caso da área da engenharia mecatrônica e realizar um comparativo do desempenho dos controladores PID e FOPID.

A metodologia do capítulo 3 constou do uso da toolbox de controle fracionário para as plantas lineares e linearizadas. Desta forma, obteve-se um comparativo das plantas de controle de processos, onde se observou um desempenho melhor ou equivalente dos quatro indicadores de desempenho para cada caso estudado. No qual houve um destaque para o critério ITSE, como o critério onde houve maior redução percentual da integral do erro ao aplicar o FOPID em todas as plantas analisadas, enquanto no caso do ITAE para plantas de primeira ordem observou-se uma convergência do controlador PI como mínimo local no plano FOPID, implicando em desempenhos equivalentes.

Posteriormente, no capítulo 4 foi elaborada a resolução dos problemas numéricos da derivação fracionária utilizada neste trabalho. Foi usada a abordagem de memória adaptativa que foi a técnica com a forma de varredura mais inteligente diante de uma limitação do custo computacional, a qual mantém suficientemente pequenos os intervalos de tempo de amostragem dos pontos recentes e estende-se gradualmente para o passado da função cobrindo toda a sua memória. O código desenvolvido nesse capítulo foi de contribuição fundamental para a aquisição dos resultados do capítulo 5.

Enfim, no capítulo 5 houve aplicação da definição numérica da derivada fracionária nas equações de Euler-Lagrange para os robôs manipuladores. Assim foram realizadas as simulações e comparativos dos controladores, sendo a seção que demonstrou o maior grau de redução percentual com a aplicação do FOPID na lei de controle de torque computado. Para todas as configurações de robôs observou-se uma melhoria significativa no erro cartesiano e de orientação do efetuador durante as trajetórias propostas.

Ao comparar os resultados do capítulo 3 e 5, vê-se que a magnitude das reduções percentuais das integrais de erro dos robôs manipuladores foram visivelmente melhores. A melhor redução do erro do capítulo 3 foi de 27,46%, critério ITSE na Tabela 2, enquanto a menor redução do capítulo 5 foi de 30,48% do FOPID em relação ao PIDD² na Tabela 13. Portanto, todas simulações na área de robótica demonstraram um impacto mais significativo com a aplicação do FOPID na lei de controle.

Esta diferença nos resultados pode advir do grau de complexidade mais elevado dos sistemas robóticos em comparação às plantas selecionadas na área de controle de processos.

O escopo do trabalho limitou-se ao controlador PID e sua variação fracionária, bem como a manutenção constante dos ganhos e das ordens fracionárias, portanto controladores não variantes no tempo. Para os sistemas robóticos limitou-se a aplicação de um controlador PID e FOPID para todo o sistema, devido ao elevado número de variáveis para realizar a sintonia individual de cada junta dos robôs manipuladores.

Para trabalhos futuros, recomenda-se a realização de comparativos da ordem inteira e fracionária para diferentes estruturas de controladores, como controladores com parâmetros variantes no tempo, utilizando-se de técnicas como a lógica fuzzy e redes neurais, para que desta forma possa-se verificar a contribuição que a ordem fracionária traria para controladores adaptativos na engenharia mecatrônica.

REFERÊNCIAS

AL-SHAMMA, Basil R.; GROSSELIN, Olivier; KING, Peter R. History Matching Using Hybrid Parameterisation and Optimisation Methods. In: SPE Europec featured at 80th EAGE Conference and Exhibition, 2018, Copenhagen. **Proceedings...** [s. l.]: Society of Petroleum Engineers, 2018, p. 1-27.

ANANTACHAISILP, Parinya; LIN, Zongli. Fractional order PID control of rotor suspension by active magnetic bearings. **Actuators. Multidisciplinary Digital Publishing Institute**, Basel, p. 4, 2017.

ANGEL, L.; VIOLA, J. Fractional order PID for tracking control of a parallel robotic manipulator type delta. **ISA transactions**, Bucaramanga, v. 79, p. 172-188, 2018.

BINGI, Kishore; Ibrahim R.; Karsiti M. N.; Hassan S. M.; Harindran V. R. A comparative study of 2DOF PID and 2DOF fractional order PID controllers on a class of unstable systems. **Archives of Control Sciences**, Poland, v. 28, 2018.

CRAIG, John J. **Introduction to robotics: mechanics and control**. 3rd ed. Upper Saddle River: Pearson Education, 2005.

FANI, Davoud; SHAHRAKI, Elmira. Two-link robot manipulator using fractional order PID controllers optimized by evolutionary algorithms. **Biosciences Biotechnology Research Asia**, [s. l.], v. 13, n. 1, p. 589-598, 2016.

HANTA, V.; PROCHAZKA, A. Rational approximation of time delay. **Institute of Chemical Technology in Prague. Department of computing and control engineering. Technická**, Prague, v. 5, n. 166, p. 28, 2009.

KENNEDY, James; EBERHART, Russell. Particle swarm optimization. In: Proceedings of ICNN'95-International Conference on Neural Networks, 1995, Perth. **Proceedings...** [s. l.]: IEEE, 1995. p. 1942-1948.

KUMAR, Anupam; KUMAR, Vijay. Hybridized ABC-GA optimized fractional order fuzzy pre-compensated FOPID Control design for 2-DOF robot manipulator. **AEU-International Journal of Electronics and Communications**, [s. l.], v. 79, p. 219-233, 2017.

LEWIS, Frank L.; DAWSON, Darren M.; ABDALLAH, Chaouki T. **Robot manipulator control: theory and practice**. 2nd ed. New York: CRC Press, 2003.

MACDONALD, Christopher L.; BHATTACHARYA, Nirupama; SPROUSE Brian P.; SILVA, Gabriel A. Efficient computation of the Grünwald-Letnikov fractional diffusion derivative using adaptive time step memory. **Journal of Computational Physics**, [s. l.], v. 297, p. 221-236, 2015.

MOHAMED, Mohamed Jasim; KHASHAN, Amjad. Comparison Between PID and FOPID Controllers Based on Particle Swarm Optimization. In: The 2nd-Engineering Conference of Control, Computers and Mechatronics Engineering (ECCCM2, 2014), 2014, Baghdad. **Proceedings...** [s. l.]: [s. n.], 2014.

MONJE, Concepción A; CHEN, YangQuan; VINAGRE, Bias M.; XUE, Dingyu; FELIU-BATLLE, Vicente. **Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications**. London: Springer Science & Business Media, 2010.

PODLUBNY, Igor. Fractional-order systems and fractional-order controllers. **Institute of Experimental Physics, Slovak Academy of Sciences, Kosice**, [s. l.], v. 12, n. 3, p. 1-18, 1994.

RASHEED, L. T.; AL-ARAJI, A. S. A Cognitive Nonlinear Fractional Order PID Neural Controller Design for Wheeled Mobile Robot based on Bacterial Foraging Optimization Algorithm. **Engineering and Technology Journal**, [s. l.], v. 35, n. 3 Part (A) Engineering, p. 289-300, 2017.

SEBORG, Dale E.; MELLICHAMP, Duncan A.; EDGAR, Thomas F.; DOYLE, Francis J. **Process dynamics and control**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2010.

SICILIANO, Bruno; SCIavicco, Lorenzo; VILLANI Luigi; ORIOLO Giuseppe. **Robotics: modelling, planning and control**. London: Springer Science & Business Media, 2010.

SMAIL, M. K.; BOUCHEKARA, H. R. E. H.; PICHON, L.; BOUDJEFDJOUF H.; MEHASNI, R. Diagnosis of Wiring Networks Using Particle Swarm Optimization and Genetic Algorithms. **Computers & Electrical Engineering**, [s. l.] vol. 40, no. 7, Elsevier BV, Oct. 2014, pp. 2236-45, doi:10.1016/j.compeleceng.2014.07.002.

SPONG, Mark W.; HUTCHINSON, Seth Andrew; VIDYASAGAR, M. **Robot modeling and control**. New York: John Wiley & Sons, 2006.

TEPLJAKOV, Aleksei; ALAGOZ, Baris B.; YEROGLU, Celaledin; GONZALEZ, Emmanuel; HOSSEINNIA, S. Hassan; PETLENKOV, Eduard. FOPID controllers and

their industrial applications: A survey of recent results. **IFAC-PapersOnLine**, [s. l.], v. 51, n. 4, p. 25-30, 2018.

TEPLJAKOV, Aleksei; PETLENKOV, Eduard; BELIKOV, Juri. FOMCON: Fractional-order modeling and control toolbox for MATLAB. In: Proceedings of the 18th International Conference Mixed Design of Integrated Circuits and Systems-MIXDES, 2011, Gliwice. **Proceedings...** [s. l.]: IEEE, 2011. p. 684-689.

VALÉRIO, Duarte; DA COSTA, José Sá. **An introduction to fractional control**. London: IET, 2013.

ZAMANI, Majid; KARIMI-GHARTEMANI, Masoud; SADATI, Nasser. FOPID controller design for robust performance using particle swarm optimization. **Fractional Calculus and Applied Analysis**, [s. l.], v. 10, n. 2, p. 169-187, 2007.

APÊNDICE A – Parâmetros dos Controladores

Os parâmetros dos controladores para o controle de nível apresentado na seção 3.1, dos controladores de temperatura para mudança de *setpoint* e caso regulatório da seção 3.2, e para aproximação SOPDT da seção 3.3 apresentam-se respectivamente nas Tabelas 18, 19, 20 e 21. Os parâmetros dos controladores usados na simulação do robô planar 2R, da seção 5.1, com o dobro de velocidade apresentam-se na Tabela 22.

Tabela 18 - Parâmetros dos controladores de nível

Controlador	Kp	Ki	Kd	Λ	μ
PI IAE	213,8	11248	0	-	-
FOPID IAE	0	10488	13,62	0,823	1,7278
PI ITAE	160,1	21988	0	-	-
PI ISE	211,5	11716	0	-	-
FOPID ISE	0,136	3128	5,02	0,5012	1,5785
PI ITSE	255	3021	0	-	-
FOPID ITSE	14,25	6597	9,75	0,7014	1,1392

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 19 - Parâmetros dos controladores de temperatura

Controlador	Kp	Ki	Kd	λ	μ
PI IAE	7085	1438	0	-	-
FOPI IAE	6698	8460	0	0,8334	-
PI ITAE	7084	1417	0	-	-
PI ISE	6696	10170	0	-	-
FOPID ISE	4258	9366	361,7	0,5370	0,5573
PI ITSE	7081	1855	0	-	-
FOPI ITSE	6769	6516	0	0,7543	-

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 20 - Parâmetros dos controladores de temperatura para distúrbio

Controlador	Kp	Ki	Λ
PI IAE	10000	10000	-
FOPI IAE	10000	10000	1,0484
PI ITAE	0	10000	-
PI ISE	10000	10000	-
FOPI ISE	10000	10000	1,1896
PI ITSE	10000	10000	-
FOPI ITSE	10000	10000	1,12

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 21 - Parâmetros dos controladores SOPDT

Controlador	Kp	Ki	Kd	λ	μ
PID IAE	1,159	0,2945	1,869	-	-
FOPID IAE	1,749	0,3181	2,975	1,0033	1,322
PID ITAE	1,07	0,2598	1,39	-	-
FOPID ITAE	1,347	0,2855	2,074	1,0002	1,1701
PID ISE	1,183	0,3766	3,008	-	-
FOPID ISE	2,66	0,2246	4,226	1,1553	1,5984
PID ITSE	1,228	0,3302	2,397	-	-
FOPID ITSE	2,184	0,2955	3,697	1,0458	1,4483

Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 22 - Parâmetros do robô planar 2R com o dobro da velocidade

Controlador	Kp	Ki	Kd	Kd ₂	Λ	μ
PID	11407	1450	134,8	-	-	-
PIDD ²	54336	6056	0	1,449	-	-
FOPID	27997	90906	1,037	-	0,1755	2,0843

Fonte: Autoria própria (2021)

APÊNDICE B – Função para gammaIn Negativo

```

function [S,G] = negammaln(k,alfa,lastG,lastk)

    kmax = -k;
    arg = 1 + alfa + kmax; %ARGUMENTO DO GAMMA NEGATIVO A SER
    CALCULADO
    if lastG == 0 %PRIMEIRA CHAMADA
        k0 = -167;
        soma = log(abs(gamma(k0+alfa)));
    else %REAPROVEITA RESULTADOS ANTERIORES
        k0 = lastk;
        soma = lastG;
    end
    for i = 1:1:k0-kmax-1

        soma = soma - log(abs(k0+alfa-i)); %CÁLCULO DO MÓDULO

    end
    G = soma; %RETORNA O MÓDULO
    if mod(ceil(arg),2) == 0 %PAR OU ÍMPAR/ RETORNA O SINAL
        S = -1;
    else
        S = 1;
    end
end
end

```

APÊNDICE C – Código para a Derivada Fracionária via Memória Adaptativa


```

function [u] = DerivadorFracionarioFOPID(erro,i,Ts,alfa)

c = 0; % Ponto de partida de Integração.
j = 1; %contador
t = i*Ts; %tempo
kmax = 200; %Limite de pontos de amostragens

W = 0; %inicialização da variável

K = (t-c)/Ts; %número de pontos totais

soma = zeros(size(erro,1),1); %Zerar somatório
x = i+1;
B = 1; %passo para varrer o passado de f(x)
lastk = 0;
lastG = 0;

if K > kmax

    N = ceil((K-20)/(kmax-20)); %20 arbitrado, relação das
proporções.
    W = floor((K-kmax)/(N^2-N)); %"largura" dos pesos: x3,
x5, x7 ...
    K = kmax; %limitar número de amostragens

end

B = 1;
k = 0;
w = 0;
R = 0; %variável auxiliar
for cont = 0:1:K-1

    %decisões do peso do espaçamento
    if (cont > 20+W ) && (W>0) && (R==0)
        if w == 0
            B = B + 2; %aumentar passo da varredura.
        end

        w = w + 1;

        if w == W %atingida toda a largura do peso.
            w = 0;
        end

        if B > 2*N-1
            B = 1;
            R = 1;
        end
    end
end

```

```

        end

    end

    k = k + floor(B/2); %"tempo de amostragem adaptativo"

    if (alfa > 0) || (ceil(alfa) ~= floor(alfa)) %alfa
    positivos ou negativos não-inteiros
        if k < 169
            G = log(abs(gamma(alfa-k+1)));
            S = sign(gamma(alfa+1)*gamma(alfa-k+1));
        else %overflow, usar gammaln
            [S,G] = negammaln(k,alfa,lastG,lastk);
            lastG = G;
            lastk = -k+1;
            S = S*sign(gamma(alfa+1));

        end

        coef = S*((-1)^k)*exp(log(abs(gamma(alfa+1)))-
        gammaln(k+1)-G); %Coeficiente Binomial Alternado
        else
            coef = nchoosek(k-alfa-1,-alfa-1); %Alfas inteiros
            negativos (descontinuidade na função gamma)
        end

        x = x - B; %varredura ao passado (domínio).

        f = erro(:,x); %(imagem da função ou do sinal do
erro)

        soma = soma + B*coef*f./((Ts)^alfa);%Divisão
pelo Tempo de Amostragem.

        k = k + ceil(B/2);

    end

    u = soma;

end

```

APÊNDICE D – Matrizes do Robô de Seis Graus de Liberdade

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = (C_5 S_1 + C_{234} C_1 S_5) C_6 + S_{234} C_1 S_6$$

$$r_{12} = S_{234} C_1 C_6 - (C_5 S_1 + C_{234} C_1 S_5) S_6$$

$$r_{13} = C_{234} C_1 C_5 - S_1 S_5$$

$$r_{21} = S_{234} S_1 S_6 - (C_1 C_5 - C_{234} S_1 S_5) C_6$$

$$r_{22} = (C_1 C_5 - C_{234} S_1 S_5) S_6 + S_{234} S_1 C_6$$

$$r_{23} = C_1 S_5 + C_{234} S_1 C_5$$

$$r_{31} = S_{234} S_5 C_6 - C_{234} S_6$$

$$r_{32} = -C_{234} C_6 - S_{234} S_5 S_6$$

$$r_{33} = S_{234} C_5$$

$$x = (C_{23} + C_2) C_1 - \frac{3}{5} S_1 S_5 + \frac{2}{5} C_{234} C_1 + \frac{3}{5} C_{234} C_1 C_5$$

$$y = \frac{3}{5} C_1 S_5 + (C_{23} + C_2) S_1 + \frac{2}{5} C_{234} S_1 + \frac{3}{5} C_{234} S_1 C_5$$

$$z = \frac{2}{5} S_{234} + S_{23} + S_2 + \frac{3}{5} S_{234} C_5 + 1$$

$$J = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} & j_{16} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} & j_{26} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} & j_{35} & j_{36} \\ j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{44} & j_{45} & j_{46} \\ j_{51} & j_{52} & j_{53} & j_{54} & j_{55} & j_{56} \\ j_{61} & j_{62} & j_{63} & j_{64} & j_{65} & j_{66} \end{bmatrix}$$

$$j_{11} = -\frac{1}{2} C_1 S_5 - (C_2 + C_{23}) S_1 - \frac{2}{5} C_{234} S_1 - \frac{1}{2} C_{234} S_1 C_5$$

$$j_{12} = -(S_2 + S_{23} + \frac{2}{5} S_{234} + \frac{1}{2} S_{234} C_5) C_1$$

$$j_{13} = -(\frac{2}{5} S_{234} + S_{23} + \frac{1}{2} S_{234} C_5) C_1$$

$$j_{14} = -(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} C_5) S_{234} C_1$$

$$j_{15} = -\frac{1}{2} S_1 C_5 - \frac{1}{2} C_{234} C_1 S_5$$

$$j_{16} = 0$$

$$j_{21} = (C_2 + C_{23}) C_1 - \frac{1}{2} S_1 S_5 + \frac{2}{5} C_{234} C_1 + \frac{1}{2} C_{234} C_1 C_5$$

$$j_{22} = -(S_2 + S_{23}) S_1 - \frac{2}{5} S_{234} S_1 - \frac{1}{2} S_{234} S_1 C_5$$

$$j_{23} = -(\frac{2}{5} S_{234} + S_{23} + \frac{1}{2} S_{234} C_5) S_1$$

$$j_{24} = -(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} C_5) S_{234} S_1$$

$$j_{25} = \frac{1}{2} C_1 C_5 - \frac{1}{2} C_{234} S_1 S_5$$

$$j_{26} = 0$$

$$j_{31} = 0$$

$$j_{32} = \frac{2}{5} C_{234} + C_2 + C_{23} + \frac{1}{2} C_{234} C_5$$

$$j_{33} = \frac{2}{5} C_{234} + C_{23} + \frac{1}{2} C_{234} C_5$$

$$j_{34} = (\frac{2}{5} + \frac{1}{2} C_5) C_{234}$$

$$j_{35} = -\frac{1}{2} S_{234} S_5$$

$$j_{36} = 0$$

$$\begin{aligned}
j_{41} &= 0 \\
j_{42} &= s_1 \\
j_{43} &= s_1 \\
j_{44} &= s_1 \\
j_{45} &= -s_{234}c_1 \\
j_{46} &= c_{234}c_1c_5 - s_1s_5 \\
j_{51} &= 0 \\
j_{52} &= -c_1 \\
j_{53} &= -c_1 \\
j_{54} &= -c_1 \\
j_{55} &= -s_{234}s_1 \\
j_{56} &= c_{234}s_1c_5 + c_1s_5 \\
j_{61} &= 1 \\
j_{62} &= 0 \\
j_{63} &= 0 \\
j_{64} &= 0 \\
j_{65} &= c_{234} \\
j_{66} &= s_{234}c_5
\end{aligned}$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3924}{625}c_{234} + \frac{2943}{100}c_{23} + \frac{8829}{2500}c_{234}c_5 + \frac{981}{20}c_2 \\ \frac{3924}{625}c_{234} + \frac{2943}{100}c_{23} + \frac{8829}{2500}c_{234}c_5 \\ \frac{981(9c_5+16)}{2500}c_{234} \\ -\frac{8829}{2500}s_{234}s_5 \\ 0 \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
m_{11} &= 3(c_3 + c_2c_{23} - s_2s_{23}) + \frac{16}{25}(c_4 + c_{34} + c_2c_{234} - s_2s_{234} + c_{23}c_{234} - s_{23}s_{234} - 1) + \\
&\frac{9}{25}(c_4 + c_{34} + c_2c_{234} + c_{23}c_{234} - s_2s_{234} - s_{23}s_{234})c_5 + \frac{2797}{600}c_2^2 - \frac{33}{250}c_5^2 + \frac{1597}{600}c_{23}^2 + \frac{349}{1500}c_{234}^2 + \\
&\frac{36}{125}c_5c_{234}^2 + \frac{33}{250}c_5^2c_{234}^2 + \frac{121}{500}
\end{aligned}$$

$$m_{12} = m_{21} = \frac{3s_5(30s_2 + 30s_{23} + 12s_{234} + 11c_5s_{234})}{250}$$

$$m_{13} = m_{31} = \frac{3s_5(30s_{23} + 12s_{234} + 11c_5s_{234})}{250}$$

$$m_{14} = m_{41} = \frac{3s_5s_{234}(11c_5 + 12)}{250}$$

$$m_{15} = m_{51} = \frac{69}{250}c_{234} + \frac{9}{25}\left(c_2 + c_{23} + \frac{2}{5}c_{234}\right)c_5$$

$$m_{16} = m_{61} = \frac{1}{500}s_{234}c_5$$

$$m_{22} = 6c_3 + \frac{32c_4}{25} + \frac{36c_5}{125} + \frac{32c_{34}}{25} + \frac{18c_4c_5}{25} + \frac{18c_5c_{34}}{25} + \frac{33c_5^2}{250} + \frac{3793}{500}$$

$$m_{23} = m_{32} = \frac{33}{250}c_5^2 + \frac{36}{125}c_5 + \frac{8743}{3000} + \left(\frac{16}{25} + \frac{9}{25}c_5\right)(c_{34} + 2c_4) + 3c_3$$

$$m_{24} = m_{42} = \frac{33}{250}c_5^2 + \frac{36}{125}c_5 + \frac{91}{375} + \frac{16}{25}(c_4 + c_{34}) + \frac{9}{25}(c_4 + c_{34})c_5$$

$$m_{25} = m_{52} = -\frac{9}{25}(s_{34} + s_4)s_5$$

$$m_{26} = m_{62} = -\frac{1}{500}s_5$$

$$m_{33} = \frac{33}{250}c_5^2 + \frac{36}{125}c_5 + \frac{8743}{3000} + \frac{32}{25}c_4 + \frac{18}{25}c_4c_5$$

$$m_{34} = m_{43} = \frac{33}{250}c_5^2 + \frac{36}{125}c_5 + \frac{91}{375} + \frac{16}{25}c_4 + \frac{9}{25}c_4c_5$$

$$m_{35} = m_{53} = -\frac{9}{25}s_4s_5$$

$$m_{36} = m_{63} = -\frac{1}{500}s_5$$

$$m_{44} = \frac{33}{250}c_5^2 + \frac{36}{125}c_5 + \frac{91}{375}$$

$$m_{45} = m_{54} = 0$$

$$m_{46} = m_{64} = -\frac{1}{500}s_5$$

$$m_{55} = \frac{69}{500}$$

$$m_{56} = m_{65} = 0$$

$$m_{66} = \frac{1}{500}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = -\frac{1}{3000}((\dot{q}_2 + \dot{q}_3)(9000c_2s_{23} + 7985c_{23}s_{23} + (1920 + 1080c_5)((c_{23} + c_2)s_{234} + c_{234}s_{23}) + (698 + 864c_5 + 396c_5^2)c_{234}s_{234}) + \dot{q}_2(13985c_2s_2 + 9000c_{23}s_2 + (1920 + 1080c_5)c_{234}s_2)) - \frac{1}{1500}\dot{q}_4((960 + 540c_5)(c_2 + c_{23}) + (349 + 432c_5 + 198c_5^2)c_{234})s_{234} - \frac{3}{250}\dot{q}_5((11 + 12c_5)c_{234} + 30(c_2 + c_{23}))c_{234} - 11c_5)s_5$$

$$C_{12} = \frac{3}{250}(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + 2\dot{q}_4 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6)((11c_5 + 12)c_{234} + 30(c_2 + c_{23}))s_5 - \frac{9}{50}(\dot{q}_3c_2 + \dot{q}_4(c_2 + c_{23}))s_5 - \frac{3}{250}\dot{q}_5((11 - 12c_5 + 22c_5^2)s_{234} + 30(s_2 + s_{23})c_5)$$

$$C_{13} = \frac{3}{500}(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + 2\dot{q}_4 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6)((11c_5 + 12)c_{234} + 30c_{23})s_5 - \frac{9}{50}c_{23}s_5\dot{q}_4 - \frac{3}{500}\dot{q}_5((11 - 12c_5 - 22c_5^2)s_{234} - 30s_{23}c_5)$$

$$C_{14} = \frac{3}{500}(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + 2\dot{q}_4 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6)(11c_5 + 12)c_{234}s_5 - \frac{3}{500}\dot{q}_5((11 - 12c_5 - 22c_5^2)s_{234})$$

$$C_{15} = \frac{9}{125}((5c_2 + 5c_{23} + 2c_{234})(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4 + \dot{q}_6)s_5 - (\frac{9}{50}((s_2 + s_{23})\dot{q}_2 + s_{23}\dot{q}_3) + \frac{9}{125}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)s_{234})c_5 - \frac{69}{1000}s_{234}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)$$

$$C_{16} = \frac{1}{1000}((\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)c_{234}c_5 - \dot{q}_5s_{234}s_5)$$

$$C_{21} = -\frac{3}{500}(\dot{q}_1 + \dot{q}_6)((11c_5 + 12)c_{234} + 30(c_2 + c_{23}))s_5 - \frac{9}{50}(\dot{q}_3c_2 + \dot{q}_4(c_2 + c_{23}))s_5 - \frac{3}{250}\dot{q}_5((11c_5 + 12)c_{234}s_5 + (11 - 12c_5 + 22c_5^2)s_{234} + 30((c_2 + c_{23})s_5 - (s_2 + s_{23})c_5))$$

$$C_{22} = \frac{-9c_5+16}{25}(\dot{q}_3 + \dot{q}_4)((c_{23} + c_2)s_{234} - c_{234}(s_{23} + s_2)) + 3\dot{q}_3(c_2s_{23} - s_2c_{23}) - \frac{3}{250}\dot{q}_5((11c_5 + 12)c_{234} + 30((c_2 + c_{23})c_{234} + (s_2 + s_{23})s_{234}))s_5$$

$$C_{23} = \frac{1}{50}((\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + 2\dot{q}_4 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6)(9c_5 + 16)(c_2s_{234} + s_2c_{234}) + 2\dot{q}_4(9c_5 + 16)(c_{23}s_{234} + s_{23}c_{234}) + 75(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + \dot{q}_4 + \dot{q}_5 + \dot{q}_6)(c_2s_{23} - s_2c_{23})) - \frac{45}{250}(33c_5 + (90(c_{23}c_{234} + s_{23}s_{234}) + 36))s_5$$

$$C_{24} = \frac{-9c_5+16}{50}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + 2\dot{q}_4 + \dot{q}_6)((c_{23} + c_2)s_{234} - c_{234}(s_{23} + s_2)) + \frac{-9c_5+16}{50}\dot{q}_3(c_2s_{234} - c_{234}s_2) + \frac{1}{250}\dot{q}_5(80(c_{234}(s_{23} + s_2) - (c_{23} + c_2)s_{234}) - 33c_5s_5 - 36s_5 - 45(((c_{23} + c_2)s_{234} - c_{234}(s_{23} + s_2))c_5 + ((c_{23} + c_2)c_{234} + (s_{23} + s_2)s_{234})s_5))$$

$$C_{25} = \frac{-9}{50}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4 + 2\dot{q}_5 + \dot{q}_6)((c_{23} + c_2)s_{234} - c_{234}(s_{23} + s_2))c_5 - \frac{9}{50}(\dot{q}_3 + \dot{q}_4)(c_2c_{234} + s_2s_{234})s_5 - \frac{9}{50}\dot{q}_4(c_{23}c_{234} + s_{23}s_{234})s_5$$

$$C_{26} = -\frac{c_5}{1000}\dot{q}_5$$

$$C_{31} = -\frac{3}{500}(q_1 + q_6)((11c_5 + 12)c_{234} + 30c_{23})s_5 - \frac{9}{50}c_{23}s_5q_4 - \frac{3}{500}q_5((11 - 12c_5 - 22c_5^2)s_{234} + (11 + 12c_5)c_{234}s_5 + 30(c_{23}s_5 - s_{23}c_5))$$

$$C_{32} = \frac{1}{50}((q_1 + q_2 + 2q_4 + q_5 + q_6)(9c_5 + 16)(c_2s_{234} + s_2c_{234}) + 75(q_1 + q_2 + q_4 + q_5 + q_6)(c_2s_{23} - s_2c_{23})) - \frac{q_5}{250}(33c_5 + (90(c_{23}c_{234} + s_{23}s_{234}) + 36))s_5$$

$$C_{33} = -\frac{9c_5+16}{50}q_4(c_{23}s_{234} - c_{234}s_{23}) - \frac{3}{250}q_5s_5(11c_5 + 30c_{23}c_{234} + 30s_{23}s_{234} + 12)$$

$$C_{34} = \frac{-9c_5+16}{50}(q_1 + q_2 + q_3 + 2q_4 + q_6)(c_{23}s_{234} - c_{234}s_{23}) + \frac{1}{250}q_5(80(c_{234}s_{23} - c_{23}s_{234}) - 33c_5s_5 - 36s_5 - 45((c_{23}s_{234} - c_{234}s_{23})c_5 + (c_{23}c_{234} + s_{23}s_{234})s_5))$$

$$C_{35} = \frac{-9}{50}(q_1 + q_2 + q_3 + 2q_5 + q_6)(c_{23}s_{234} - c_{234}s_{23})c_5 - \frac{9}{50}(c_{23}s_{234} + c_{234}s_{23})s_5q_4$$

$$C_{36} = -\frac{c_5}{1000}q_5$$

$$C_{41} = -\frac{3}{500}(q_1 + q_6)(11c_5 + 12)c_{234}s_5 - \frac{3}{500}q_5((11 - 12c_5 - 22c_5^2)s_{234} + (11 + 12c_5)c_{234}s_5)$$

$$C_{42} = \frac{(9c_5+16)}{50}((q_1 + q_2 + q_6)(c_{23}s_{234} - c_{234}s_{23} + c_2s_{234} - c_{234}s_2) + q_3(c_{23}s_{234} - c_{234}s_{23})) + \frac{1}{250}q_5((80 + 45c_5)((c_{23} + c_2)s_{234} - c_{234}(s_{23} + s_2)) - (36 + 45(c_{23}c_{234} + s_{23}s_{234})))s_5 - 33c_5s_5$$

$$C_{43} = \frac{1}{50}(q_1 + q_2 + q_3 + q_6)(9c_5 + 16)(c_{23}s_{234} - c_{234}s_{23}) + \frac{1}{250}q_5((80 + 45c_5)(c_{23}s_{234} - c_{234}s_{23}) - (36 + 45(c_{23}c_{234} + s_{23}s_{234})))s_5 - 33c_5s_5$$

$$C_{44} = -\frac{3q_5s_5(11c_5+12)}{250}$$

$$C_{45} = 0$$

$$C_{46} = -\frac{c_5}{1000}q_5$$

$$C_{51} = \frac{9}{250}((5c_2 + 5c_{23} + 2c_{234})(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_6)s_5 - \left(\frac{9}{50}((s_2 + s_{23})q_2 + s_{23}q_3) + \frac{9}{125}(q_2 + q_3 + q_4)s_{234}\right)c_5 - \frac{69}{1000}s_{234}(q_2 + q_3 + q_4))$$

$$C_{52} = \frac{9}{50}((q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_6)((c_2 + c_{23})s_{234} - (s_2 + s_{23})c_{234})c_5 - ((c_2q_3 + (c_2 + c_{23})q_4)c_{234} + (s_2q_3 + (s_2 + s_{23})q_4)s_{234})s_5)$$

$$C_{53} = \frac{9}{50}((q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_6)(c_{23}s_{234} - s_{23}c_{234})c_5 - q_4(c_{23}c_{234} + s_{23}s_{234})s_5)$$

$$C_{54} = 0$$

$$C_{55} = 0$$

$$C_{56} = 0$$

$$C_{61} = \frac{1}{1000}((\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)c_{234}c_5 - \dot{q}_5s_{234}s_5)$$

$$C_{62} = -\frac{c_5}{1000}\dot{q}_5$$

$$C_{63} = -\frac{c_5}{1000}\dot{q}_5$$

$$C_{64} = -\frac{c_5}{1000}\dot{q}_5$$

$$C_{65} = 0$$

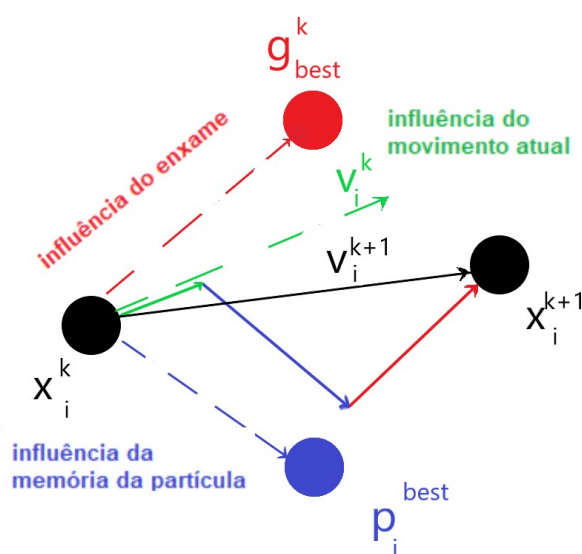
$$C_{66} = 0$$

ANEXO A – Algoritmo Evolucionário

O PSO foi proposto por Kennedy e Eberhart (1995) e é um método computacional que busca de forma iterativa pelo mínimo global de uma função ou funcional. Este algoritmo evolucionário é inspirado na forma em como os pássaros buscam alimentos e tem como princípio de funcionamento a representação de partículas cujas velocidades possuem três componentes. A componente de inércia corresponde à velocidade da última iteração, a componente cognitiva refere-se a melhor posição alcançada pela partícula e a componente social está relacionada à melhor posição alcançada por todas as partículas.

A Figura 55 (AL-SHAMMA *et al.*, 2018), ilustra bem as três componentes que resultam na próxima posição da partícula. Os vetores da influência social e cognitiva são multiplicados por uma constante e um valor gerado aleatoriamente, assim fornecendo “variabilidade” ao algoritmo de busca.

Figura 55 - Influências das componentes do PSO



Fonte: Autoria própria (2021)

ANEXO B - Leis de Controle para Robôs Manipuladores

Variações de leis de controle incorporam ou dispensam vetores correspondentes a efeitos físicos sujeitos aos robôs manipuladores. Algumas das leis de controle mais usuais para robôs manipuladores estão no Quadro 3.

Quadro 3 - Leis de controle

	Equação
Dinâmica de robôs manipuladores	$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + F_d(\dot{q}) + g(q) + \tau_d$
PD torque computado	$\tau = M(q)(\ddot{q}_d + k_p e + k_d \dot{e}) + N(q, \dot{q})$
PID torque computado	$\tau = M(q)(\ddot{q}_d + k_p e + k_i \varepsilon + k_d \dot{e}) + N(q, \dot{q})$
Controle PD-gravidade	$\tau = k_p e + k_d \dot{e} + g(q)$
Controle PD clássico	$\tau = k_p e + k_d \dot{e}$
Controle PID clássico	$\tau = k_p e + k_i \varepsilon + k_d \dot{e}$

Fonte: adaptado de Lewis, Dawson e Abdallah (2003)

onde “ F_v ” e “ F_d ” são os vetores de atrito viscoso e o atrito dinâmico, “ τ_d ” é um vetor de distúrbio, “ ε ” é a integral do erro e N é o vetor que engloba os efeitos de atrito, gravidade e Coriolis.