

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE  
MATERIAIS

THIAGO CASTRO BEZERRA

QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO DE PRIDDLE VIA  
METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2017

THIAGO CASTRO BEZERRA

QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO DE PRIDDLE VIA  
METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica – Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Claudio R. Ávila da Silva Jr.

CURITIBA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

---

B574q Bezerra, Thiago Castro  
2017 Quantificação da incerteza do modelo de priddle via metodologia fast crack bounds / Thiago Castro Bezerra.-- 2017.  
106 f. : il. ; 30 cm

Texto em português com resumo em inglês  
Disponível também via World Wide Web  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Curitiba, 2017  
Bibliografia: f. 104-106

1. Mecânica da fratura. 2. Metais – Fratura. 3. Deformações (Mecânica). 4. Fractografia. 5. Resistência de materiais. 6. Fadiga (Metalurgia). 7. Resistência de materiais – Simulação por computador. 8. Engenharia mecânica – Dissertações. I. Silva Júnior, Cláudio Roberto Ávila da. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais. III. Título.

---

CDD: Ed. 23 – 620.1

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba  
Bibliotecário: Adriano Lopes CRB9/1429

## **TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº314**

A Dissertação de Mestrado intitulada: **QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO DE PRIDDLE VIA METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS**, defendida em sessão pública pelo Candidato **Thiago Castro Bezerra**, no dia 05 de dezembro de 2017, foi julgada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, área de concentração: Mecânica dos Sólidos, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais – PPGEM.

**BANCA EXAMINADORA:**

Prof. Dr. Claudio Roberto Ávila da Silva Júnior

Prof. Dr. Eduardo Mauro do Nascimento

Prof. Dr. João Morais da Silva Neto

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 20\_\_.

Carimbo e assinatura do Coordenador do Programa

---

Dedico este trabalho a minha esposa  
Fernanda Alves Bezerra, que sempre  
acreditou em meus sonhos.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por permitir a conclusão desta etapa em minha vida.

Agradeço ao meu pai, Paulo Cesar Bezerra, que durante o ano de 2016 me acolheu em seu lar. Garantindo assim tranquilidade para o desenvolvimento do mestrado.

Agradeço a minha mãe, Iraide Castro Moreno, que mesmo distante, sempre tinha uma palavra de apoio e incentivo.

Agradeço o meu sogro, Floravante Alves e minha sogra, Vilma Alves, por todo carinho e dedicação com os meus filhos, Leonardo Alves Bezerra e Davi Alves Bezerra. O apoio de vocês foi fundamental para que eu pudesse estar longe das crianças e sem me preocupar.

Agradeço ao meu orientador, prof. Dr. Claudio R. Ávila da Silva Jr., por acreditar na minha capacidade, pelo suporte e orientação, essenciais no desenvolvimento desta dissertação. Grande exemplo de pessoa e um excelente professor.

Agradeço aos colegas da UTFPR, que juntamente comigo perderam algumas horas de sono na resolução das listas de exercícios, em especial aos orientados do prof. Dr. Claudio R. Ávila da Silva Jr., que estiveram comigo nas dificuldades do desenvolvimento da dissertação e também na alegria dos sucessos obtidos, dentro e fora da UTFPR.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro, essencial para o desenvolvimento do trabalho.

“Tudo parece impossível até que seja  
feito.”

Nelson Mandela

## RESUMO

BEZERRA, Thiago Castro. **QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO DE PRIDDLE VIA METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS (2017)**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

O estudo de um componente estrutural, é mais realístico quando se admite que o componente já possua trincas. A área que estuda este fenômeno é a mecânica da fratura. O componente que possui trinca e é submetido a esforços cíclicos, tende a falhar por fadiga. Este estudo apresenta cotas que “envelopam” a solução numérica aproximada da evolução da trinca. São estimados momentos estatísticos das cotas superior e inferior, afim de se obter resultados mais realísticos com relação a propagação da trinca, visto a existência de incerteza sobre os parâmetros dos modelos de evolução da trinca. As cotas são determinadas via metodologia *Fast Crack Bounds*, sendo está comparada com a solução numérica aproximada obtida pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. A randomização dos parâmetros do modelo, é executada através de Simulação de Monte Carlo. Para a quantificação da incerteza, da cota superior, inferior e da solução numérica, são considerados exemplos “clássicos” da mecânica da fratura, onde a função de correção do fator de intensidade de tensão é conhecida: placa com largura infinita, placa com largura finita e trinca central e placa com largura finita e trinca na aresta. O trabalho apresenta os desvios relativos do primeiro e segundo momento estatístico, bem como os ganhos computacionais na resolução do problema de valor inicial que descrevem a propagação da trinca. Em todos os casos analisados, a metodologia *Fast Crack Bounds* apresentou menor tempo computacional, quando comparada à solução numérica do problema, sendo no mínimo 411,23% mais eficaz para o parâmetro  $a_0$ , até 8.296,29% para o parâmetro  $K_c$ .

**Palavras Chaves:** Mecânica da Fratura, Fast Crack Bounds, Momentos Estatísticos.

## ABSTRACT

BEZERRA, Thiago Castro. **UNCERTAINTY QUANTIFICATION OF THE PRIDDLE MODEL THROUGH THE METHODOLOGY FAST CRACK BOUNDS (2017)**. Dissertation (Master in Mechanical Engineering) – Post-Graduate Program in Mechanical and Materials Engineering, Federal Technological University of Paraná, Curitiba, 2017.

The study of a structural component is more realistic when it is admitted that the component already has cracks. The area that studies this phenomenon is the fracture mechanics. The component which is cracked and subjected to cyclic stresses tends to fail due to fatigue. This study presents upper and lower bounds that "envelop" the approximate numerical solution of the evolution of the crack. The statistical moments of the upper and lower bounds are estimated, to obtain more realistic results in relation to the crack propagation, considering the existence of uncertainty about the parameters of the evolution models of the crack. Upper and lower bounds are determined using the Fast Crack Bounds methodology, being compared to the approximate numerical solution obtained by the fourth-order Runge-Kutta method. The randomization of the model parameters and execution through the Monte Carlo Simulation. For the quantification of the uncertainty, the upper and lower bounds and the numerical solution, "classic" examples of fracture mechanics are considered, where the correction function of the tensile strength factor is known: Infinite width plate, finite width plate a centered crack and finite width plate a border-cracked. The work presents the relative deviations of the first and second statistical moments, as well as the computational gains in solving the initial value problem that describe the propagation of the crack. In all cases analyzed, the Fast Crack Bounds methodology presented lower computational time when compared to the numerical solution of the problem, being at least 411.23% more effective for the parameter  $a_0$ , up to 8,296.29% for the parameter  $K_c$ .

**Key Words:** Fracture Mechanics, Fast Crack Bounds, Statistical Moments.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Etapas do processo de evolução da trinca.....	26
Figura 2.2 – Aspecto macroscópico da fratura por fadiga .....	27
Figura 2.3 – Modos de abertura de trinca .....	28
Figura 2.4 – Trinca em uma placa infinita sob tração.....	29
Figura 2.5 – Estado de tensões em um ponto próximo a trinca, modelo de Irwin .....	30
Figura 2.6 – Falha por fadiga – Tamanho de trinca por ciclos aplicados .....	31
Figura 2.7 – Diagrama $\log (da / dN) \times \log (\Delta K)$ .....	32
Figura 2.8 – Aproximação entre a solução numérica e exata .....	35
Figura 2.9 – Exemplo de dispersão dos resultados experimentais .....	38
Figura 3.1 – Sequência da implementação computacional .....	49
Figura 4.1 – Cotas para o exemplo: Placa com largura finita e trinca na aresta .....	54
Figura 4.2 – $\log (da/dN) \times \log (\Delta K)$ - Problema determinístico .....	54
Figura 4.3 – Exemplo 1 – Placa infinita – Trinca central .....	56
Figura 4.4 – Exemplo 1 – Primeiro momento estatístico – $a_0 \cdot 1$ .....	56
Figura 4.5 – Exemplo 1 – Segundo momento estatístico – $a_0 \cdot 1$ .....	57
Figura 4.6 – Exemplo 1 – Desvios relativos – Primeiro momento estatístico – $a_0 \cdot 1$ ..	57
Figura 4.7 – Exemplo 1 – Desvios relativos – Segundo momento estatístico – $a_0 \cdot 1$ .	58
Figura 4.8 – Exemplo 1 – Desvio relativo – Lei de Evolução de Trincas – $a_0 \cdot 1$ .....	59
Figura 4.9 – Exemplo 1 – Segundo momento estatístico – $m_p \cdot 1 - a^*=1,4a_0$ .....	60
Figura 4.10 – Exemplo 1 – Segundo momento estatístico – $m_p \cdot 1 - a^*=1,45a_0$ .....	60
Figura 4.11 – Exemplo 1 – Primeiro momento estatístico – $\Delta K_{th} \cdot 3$ .....	63
Figura 4.12 – Exemplo 1 – Segundo momento estatístico – $\Delta K_{th} \cdot 3$ .....	63
Figura 4.13 – Exemplo 2 – Placa finita – Trinca central .....	67

Figura 4.14 – Exemplo 2 – Primeiro momento estatístico – $C_p$ .1 .....	68
Figura 4.15 – Exemplo 2 – Segundo momento estatístico – $C_p$ .1 .....	68
Figura 4.16 – Exemplo 2 – Desvios relativos – Primeiro momento estatístico – $C_p$ .1 .....	69
Figura 4.17 – Exemplo 2 – Desvios relativos – Segundo momento estatístico – $C_p$ .1 .....	69
Figura 4.18 – Exemplo 2 – Desvio relativo – Lei de Evolução de Trincas – $C_p$ .1 .....	70
Figura 4.19 – Exemplo 2 – Segundo momento estatístico – $a_0$ .3 .....	73
Figura 4.20 – Exemplo 2 – Primeiro momento estatístico – $\Delta K_{th}$ .3 .....	73
Figura 4.21 – Exemplo 2 – Segundo momento estatístico – $\Delta K_{th}$ .3 .....	74
Figura 4.22 – Exemplo 3 – Placa finita – Trinca aresta .....	78
Figura 4.23 – Exemplo 3 – Primeiro momento estatístico – $a_0$ .1 .....	78
Figura 4.24 – Exemplo 3 – Segundo momento estatístico – $a_0$ .1 .....	79
Figura 4.25 – Exemplo 3 – Segundo momento estatístico – $C_p$ .1 .....	79
Figura 4.26 – Exemplo 3 – $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$ – $C_p$ .1 .....	80
Figura 4.27 – Exemplo 3 – Primeiro momento estatístico – $K_c$ .1 .....	81
Figura 4.28 – Exemplo 3 – Primeiro momento estatístico – $m_p$ .3 .....	83
Figura 4.29 – Exemplo 3 – Segundo momento estatístico – $m_p$ .3 .....	83
Figura 4.30 – Exemplo 3 – $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$ – $m_p$ .3 .....	84
Figura 4.31 – Exemplo 1 - Médias aritmética e geométrica – Primeiro momento estatístico - $a_0$ .1 .....	88
Figura 4.32 – Exemplo 1 – Médias aritméticas e geométricas – Segundo momento estatístico – $a_0$ .1 .....	89

Figura 4.33 – Exemplo 1 – Desvio relativo das médias – Primeiro momento estatístico-- $a_0.1$ .....	90
Figura 4.34 – Exemplo 1 – Desvio relativo das médias – Segundo momento estatístico – $a_0.1$ .....	91

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Estimativa do primeiro momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a$ ) – Exemplo 1 – Caso I.....	61
Tabela 4.2 – Estimativa do segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ) – Exemplo 1 – Caso I.....	61
Tabela 4.3 – Tempos computacionais – Exemplo 1 – Caso I .....	62
Tabela 4.4 – Estimativa do primeiro momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a$ ) – Exemplo 1 – Caso II.....	64
Tabela 4.5 – Estimativa do segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ) – Exemplo 1 – Caso II.....	65
Tabela 4.6 – Tempos computacionais – Exemplo 1 – Caso II .....	65
Tabela 4.7 – Desvio relativo do primeiro momento estatístico ( $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a}$ ) – Exemplo 1....	66
Tabela 4.8 – Desvio relativo do segundo momento estatístico ( $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a^{(2)}}$ ) – Exemplo 1..	66
Tabela 4.9 – Desvio relativo da Lei de Evolução da Trinca para o primeiro momento estatístico ( $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_h}$ ) – Exemplo 1.....	67
Tabela 4.10 – Estimativa do primeiro momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a$ ) – Exemplo 2 – Caso I.....	71
Tabela 4.11 – Estimativa do segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ) – Exemplo 2 – Caso I.....	71
Tabela 4.12 – Tempos computacionais – Exemplo 2 – Caso I.....	72
Tabela 4.13 – Estimativa do primeiro momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a$ ) – Exemplo 2 – Caso II .....	75
Tabela 4.14 – Estimativa do segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ) – Exemplo 2 – Caso II.....	75

Tabela 4.15 – Tempos computacionais – Exemplo 2 – Caso II.....	76
Tabela 4.16 – Desvio relativo do primeiro momento estatístico ( $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a}$ ) – Exemplo 2..	76
Tabela 4.17 – Desvio relativo do segundo momento estatístico ( $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a^{(2)}}$ )–Exemplo 2..	77
Tabela 4.18 – Desvio relativo da Lei de Evolução da Trinca para o primeiro momento estatístico ( $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_h}$ ) – Exemplo 2.....	77
Tabela 4.19 – Estimativa do primeiro momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a$ ) – Exemplo 3 – Caso I .....	81
Tabela 4.20 – Estimativa do segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ) – Exemplo 3 – Caso I.....	82
Tabela 4.21 – Tempos computacionais – Exemplo 3 – Caso I.....	82
Tabela 4.22 – Estimativa do primeiro momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a$ ) – Exemplo 3 – Caso II .....	85
Tabela 4.23 – Estimativa do segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ) – Exemplo 3 – Caso II.....	85
Tabela 4.24 – Tempos computacionais – Exemplo 3 – Caso II.....	86
Tabela 4.25 – Desvio relativo do primeiro momento estatístico ( $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a}$ ) – Exemplo 3..	86
Tabela 4.26 – Desvio relativo do segundo momento estatístico ( $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a^{(2)}}$ )–Exemplo 3..	87
Tabela 4.27 – Desvio relativo da Lei de Evolução da Trinca para o primeiro momento estatístico ( $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_h}$ ) – Exemplo 3.....	87
Tabela 4.28 – Desvios Relativos para o Estimador do Primeiro Momento Estatístico ( $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_A}, \mathcal{E}_{\bar{\mu}_G}$ ) – Exemplo 1 .....	91
Tabela 4.29 – Desvios Relativos para o Estimador do Primeiro Momento Estatístico ( $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_A}, \mathcal{E}_{\bar{\mu}_G}$ ) – Exemplo 2 .....	92

Tabela 4.30 – Desvios Relativos para o Estimador do Primeiro Momento Estatístico ( $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_A}$ , $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_G}$ ) – Exemplo 3 .....	92
Tabela 4.31 – Desvios Relativos para o Estimador do Segundo Momento Estatístico ( $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_A^{(2)}}$ , $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_G^{(2)}}$ ) – Exemplo 1 .....	93
Tabela 4.32 – Desvios Relativos para o Estimador do Segundo Momento Estatístico ( $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_A^{(2)}}$ , $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_G^{(2)}}$ ) – Exemplo 2 .....	93
Tabela 4.33 – Desvios Relativos para o Estimador do Segundo Momento Estatístico ( $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_A^{(2)}}$ , $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_G^{(2)}}$ ) – Exemplo 3 .....	94
Tabela 4.34 – Síntese dos resultados: Desvios Relativos – Primeiro Momento Estatístico ( $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a}$ ) .....	96
Tabela 4.35 – Síntese dos resultados: Desvios Relativos – Segundo Momento Estatístico ( $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a^{(2)}}$ ) .....	97
Tabela 4.36 – Síntese dos resultados: Desvios Relativos – Lei de Evolução da Trinca ( $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_h}$ ) .....	98
Tabela 4.37 – Síntese dos resultados: Desvios máximos das médias aritméticas e geométricas – Primeiro momento estatístico ( $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_A}$ , $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_G}$ ) .....	99
Tabela 4.38 – Síntese dos resultados: Desvios máximos das médias aritméticas e geométricas – Segundo momento estatístico ( $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_A^{(2)}}$ , $\mathcal{E}_{\bar{\mu}_G^{(2)}}$ ) .....	100
Tabela 4.39 – Síntese dos resultados: Razão entre os tempos computacionais ....	101
Tabela 4.40 – Síntese dos resultados: Valor utilizado de $a^*$ .....	101

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
CATC	Carregamento com Amplitude de Tensão Constante
CATV	Carregamento com Amplitude de Tensão Variável
PVI	Problema de Valor Inicial
FCB	Fast Crack Bounds
RK4	Runge-Kutta de quarta ordem
SMC	Simulação de Monte Carlo
MF	Mecânica da Fratura
FIT	Fator de Intensidade de Tensão
EDO	Equação Diferencial Ordinária

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma$	Tensão
$E$	Módulo de elasticidade do material
$\gamma_s$	Densidade de energia superficial
$a$	Tamanho da trinca
$K$	Fator de intensidade de tensão
$f(\bullet)$	Função de correção do fator de intensidade de tensão
$da / dN$	Taxa de propagação do tamanho de trinca
$\Delta K$	Variação do fator de intensidade de tensão
$\Delta K_{th}$	Fator de intensidade de tensão inicial
$C$	Parâmetro do modelo de Paris-Erdogan
$m$	Parâmetro do modelo de Paris-Erdogan
$K_c$	Tenacidade a fratura
$h(\alpha, \Delta K)$	Lei de Evolução de Trincas
$\alpha$	Constante específica de cada modelo
$R$	Razão entre tensões
$C_F$	Parâmetros do modelo de Forman
$m_F$	Parâmetros do modelo de Forman
$C_p$	Parâmetro do modelo de Priddle
$m_p$	Parâmetro do modelo de Priddle
$K_{max}$	Fator de intensidade de tensão máximo
$\underline{a}$	Tamanho de trinca para cota inferior
$\bar{a}$	Tamanho de trinca para cota superior

$\Omega$	Espaço amostral
$\mathcal{F}$	$\sigma$ -álgebra de eventos
$\mathbf{P}$	Medida de probabilidade
$\omega$	Eventos randômicos
$\hat{\mu}_{\underline{a}}(N)$	Estimativa do primeiro momento estatístico - Cota inferior
$\hat{\mu}_a(N)$	Estimativa do primeiro momento estatístico – Tamanho de trinca
$\hat{\mu}_{\bar{a}}(N)$	Estimativa do primeiro momento estatístico – Cota superior
$\hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)}(N)$	Estimativa do segundo momento estatístico - Cota inferior
$\hat{\mu}_a^{(2)}(N)$	Estimativa do segundo momento estatístico – Tamanho de trinca
$\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}(N)$	Estimativa do segundo momento estatístico – Cota superior
$\sigma_{\underline{a}}^2(N)$	Variância – Cota inferior
$\sigma_a^2(N)$	Variância – Tamanho de trinca
$\sigma_{\bar{a}}^2(N)$	Variância – Cota superior
$\mu_{C_p}$	Média para o parâmetro do modelo de Priddle
$\mu_{m_p}$	Média para o parâmetro do modelo de Priddle
$\mu_{a_0}$	Média para o tamanho de trinca inicial
$\mu_{K_c}$	Média para a tenacidade a fratura
$\mu_{\Delta K_{th}}$	Média para o fator de intensidade de tensão inicial
$\delta_{C_p}$	Coefficiente de dispersão – Parâmetro do modelo de Priddle
$\delta_{m_p}$	Coefficiente de dispersão – Parâmetro do modelo de Priddle
$\delta_{a_0}$	Coefficiente de dispersão – Tamanho de trinca inicial

$\delta_{K_c}$	Coeficiente de dispersão – Tenacidade a fratura
$\delta_{\Delta K_{th}}$	Coeficiente de dispersão – Fator de intensidade de tensão inicial
$\xi(\bullet)$	Gerador de variáveis aleatórias
b	Largura da placa
N	Número de ciclos
$\varepsilon_{\hat{\mu}_a^-}$	Desvio relativo – Estimativa do valor esperado para cota superior
$\varepsilon_{\hat{\mu}_a^+}$	Desvio relativo – Estimativa do valor esperado para cota inferior
$\varepsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)-}}$	Desvio relativo – Estimativa do segundo momento estatístico para cota superior
$\varepsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)+}}$	Desvio relativo – Estimativa do segundo momento estatístico para cota inferior
$\varepsilon_{\hat{\mu}_h^-}$	Desvio relativo – Lei de Evolução da Trinca de Priddle para a cota superior
$\varepsilon_{\hat{\mu}_h^+}$	Desvio relativo – Lei de Evolução da Trinca de Priddle para a cota inferior
$\rho$	Razão de tempo computacional entre a solução numérica e cotas
$\bar{\mu}_A$	Média aritmética – Estimativa do primeiro momento estatístico
$\bar{\mu}_A^{(2)}$	Média aritmética – Estimativa do segundo momento estatístico
$\bar{\mu}_G$	Média geométrica – Estimativa do primeiro momento estatístico
$\bar{\mu}_G^{(2)}$	Média geométrica – Estimativa do segundo momento estatístico
$\varepsilon_{\bar{\mu}_A}$	Desvio Relativo – Média aritmética da estimativa do primeiro momento estatístico

$\mathcal{E}_{\bar{\mu}_A^{(2)}}$  Desvio Relativo – Média aritmética da estimativa do segundo momento estatístico

$\mathcal{E}_{\bar{\mu}_G}$  Desvio Relativo – Média geométrica da estimativa do primeiro momento estatístico

$\mathcal{E}_{\bar{\mu}_G^{(2)}}$  Desvio Relativo – Média geométrica da estimativa do segundo momento estatístico

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>21</b>
1.1	OBJETIVOS	22
	<i>Objetivo Geral</i>	22
	<i>Objetivos Específicos</i>	22
1.2	JUSTIFICATIVA	23
1.3	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	23
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>25</b>
2.1	PRINCÍPIO DE FALHAS POR FADIGA EM MATERIAIS METÁLICOS	25
2.2	MECÂNICA DA FRATURA	27
	<i>Mecânica da Fratura Linear Elástica</i>	27
2.3	PROPAGAÇÃO DE TRINCAS POR FADIGA	30
2.4	MODELOS DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS	33
	<i>Modelo de Forman</i>	34
	<i>Modelo de Priddle</i>	34
2.5	MÉTODOS NUMÉRICOS	35
	<i>Método de Runge-Kutta</i>	36
2.6	METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS	36
2.7	QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA NA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS	38
	<i>Momentos Estatísticos</i>	39
	<i>Simulação de Monte Carlo</i>	40
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	<b>42</b>
3.1	MATERIAIS	42
3.2	METODOLOGIA	42
3.3	METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS APLICADO AO MODELO DE PRIDDLE	43
3.4	ESTIMADORES DOS MOMENTOS ESTATÍSTICOS	45
3.5	SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	48
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>50</b>
4.1	RESULTADOS PARA O MODELO DE PRIDDLE	52

<i>Exemplo 1 – Placa Infinita – Trinca Central – Modelo de Priddle</i> .....	56
<i>Exemplo 2 – Placa finita – Trinca Central – Modelo de Priddle</i> .....	67
<i>Exemplo 3 – Placa finita – Trinca Aresta – Modelo de Priddle</i> .....	77
4.2 UMA APLICAÇÃO “PRÁTICA” DA METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS .....	87
4.3 SÍNTESE DOS RESULTADOS.....	94
<b>5 CONCLUSÃO</b> .....	<b>102</b>
5.1 TRABALHOS FUTUROS.....	103
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>104</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A maior causa das falhas que ocorrem em metais é devido ao fenômeno denominado fadiga. Conforme Callister Jr. (2011), a fratura do metal por fadiga ocorre em estruturas que estejam sujeitas a tensões dinâmicas e oscilantes. Este tipo de falha é de natureza frágil, mesmo em metais dúcteis, pois percebe-se que não ocorre uma deformação plástica considerável até a fratura do metal. A manifestação do dano em fadiga é uma trinca.

Uma metodologia para avaliar a “vida” sob fadiga do material é a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). Ela é aplicável em situações em que não há deformação plástica significativa durante a fratura (ANDERSON, 2005). Na MFLE existem vários modelos de propagação de trincas, os quais podem ser categorizados por Carregamentos com Amplitude de Tensão Constante (CATC) ou Variável (CATV).

Para a análise da propagação de trincas com CATC existem diversos modelos, como Paris-Erdogan (1963), Walker (1970), Forman (1967), Collipriest (1972), Priddle (1976), Wang (1994), entre outros (BEDEN, 2009; MILLER et al., 1981). Em geral estes modelos são formulados através de um Problema de Valor Inicial (PVI). O PVI descreve a evolução do tamanho de trinca ao longo dos ciclos de aplicação da carga.

Para a solução do PVI, existem métodos numéricos que obtêm uma aproximação da solução exata do problema, porém, em alguns casos esta solução exige muito tempo de computação “esforço computacional”. Com o intuito de diminuir o “esforço computacional” e obter cotas da solução numérica aproximada, Ávila e Santos (2015), propuseram uma metodologia que consiste em determinar cotas superior e inferior da função tamanho de trinca do modelo de propagação de trinca. Estas cotas “envelopam” a solução numérica aproximada.

Outro aspecto importante a ressaltar sobre os modelos de propagação de trincas, é a incerteza sobre os parâmetros dos modelos. Ghonem e Dore (1987) citam que a utilização de distribuições estatísticas ou modelos probabilísticos, torna-se necessário para realizar previsões mais confiáveis, acerca do crescimento da trinca.

Sendo assim, a proposta desta dissertação é realizar a quantificação da incerteza do modelo de Priddle através da metodologia *Fast Crack Bounds* (FCB). Para avaliar o desempenho da metodologia FCB na quantificação da incerteza, utilizam-se conjuntamente os métodos de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) e Simulação de Monte Carlo (SMC).

## 1.1 OBJETIVOS

### **Objetivo Geral**

A dissertação tem como objetivo geral realizar a quantificação da incerteza através dos estimadores dos momentos estatísticos das cotas superiores e inferiores para o tamanho de trinca, do modelo de evolução de trincas de Priddle.

### **Objetivos Específicos**

Para o desenvolvimento deste trabalho é necessário concluir os seguintes objetivos específicos:

1. Determinar cotas superior e inferior da função tamanho de trinca do modelo de evolução de trincas de Priddle, utilizando a metodologia FCB;
2. Implementar o método SMC para estimar os momentos estatísticos da solução numérica aproximada e cotas superior e inferior da função tamanho de trinca do modelo de Priddle;
3. Estimar os momentos estatísticos da solução numérica aproximada e das cotas superior e inferior da função tamanho de trinca;
4. Avaliar os resultados.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Muitos equipamentos estão sujeitos a esforços repetitivos e oscilantes durante sua utilização, sendo que em muitos casos é necessário realizar manutenções preventivas e/ou preditivas, como nos casos de automóveis e aviões, onde não é admissível uma falha no equipamento. Porém, o acompanhamento contínuo do equipamento pode ser oneroso, pois em problemas complexos as simulações numéricas apresentam alto custo computacional.

Sendo assim, este trabalho tem o objetivo de contribuir com a comunidade científica e com os profissionais da área da engenharia, apresentando uma aplicação da metodologia *Fast Crack Bounds*, para quantificação da incerteza das cotas superiores e inferiores. Comparado-as com a solução numérica do problema, mas com menor custo computacional.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação é organizada da seguinte forma:

Capítulo 1: É realizada uma introdução ao assunto, apresentado os objetivos geral e específicos a serem alcançados e a justificativa para o desenvolvimento do trabalho.

Capítulo 2: Nesta seção do trabalho apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre falhas por fadiga em materiais metálicos, mecânica da fratura, modelos de propagação de trincas, métodos numéricos aplicados à resolução dos modelos de evolução da trinca, metodologia FCB, momentos estatísticos em propagação de trincas e Simulação de Monte Carlo.

Capítulo 3: O capítulo descreve a metodologia utilizada na execução do trabalho e os recursos necessários.

Capítulo 4: Nesta seção do trabalho, são apresentados os resultados obtidos durante as simulações numéricas, e, os devidos comentários acerca dos resultados.

Capítulo 5: São apresentadas as conclusões obtidas no desenvolvimento desta dissertação.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo descreve-se o fenômeno da fadiga em materiais metálicos, mecânica da fratura, modelos de propagação de trincas, métodos numéricos aplicados à resolução dos modelos de evolução da trinca, metodologia FCB, momentos estatísticos em propagação de trincas e Simulação de Monte Carlo.

### 2.1 PRINCÍPIO DE FALHAS POR FADIGA EM MATERIAIS METÁLICOS

As falhas por fadiga em materiais metálicos são caracterizadas pela ruptura do material quando este é submetido à tensões variáveis, mesmo que as tensões máximas aplicadas estejam abaixo das tensões limite de resistência do material, e muitas vezes abaixo até do limite de escoamento do material (SHIGLEY, 1984).

Uma falha por fadiga é particularmente insidiosa porque acontece sem que haja qualquer aviso. A falha por fadiga apresenta fratura de aparência frágil, sem existência de deformação macroscópica na fratura e a sua superfície é quase sempre normal à direção da tensão principal de tração (DIETER, 1981).

De acordo com Dieter (1981), são três fatores necessários para causar falha por fadiga:

1. Uma tensão alta;
2. Uma flutuação na tensão aplicada;
3. Um alto número de ciclos de aplicação da tensão.

Além destes fatores, existem outros que podem influenciar a falha por fadiga, como corrosão, concentração de tensão, temperatura, sobrecarga, estrutura metalúrgica, tensões residuais e tensões combinadas (DIETER, 1981).

Uma falha por fadiga se inicia pela nucleação de uma trinca. Em materiais dúcteis a nucleação ocorre pelo deslizamento de planos cristalinos, decorrentes da deformação plástica do grão desfavoravelmente orientado. Após a nucleação de uma trinca, ocorre o crescimento de uma micro-trinca, nesta etapa as tensões cisalhantes é que são importantes, em geral as micro-trincas se formam nas

intrusões e se propagam paralelamente aos planos cristalinos de cisalhamento, coincidentes com o plano de máxima tensão de cisalhamento (ROSA, 2002). Posteriormente ao crescimento da micro-trinca, é observado um crescimento mais regular da macro-trinca, ou seja, a propagação da macro-trinca é perpendicular às tensões de tração (ROSA, 2002).

Schijve (2009), classifica a nucleação como a primeira etapa da vida de fadiga, já a propagação da trinca como sendo a segunda etapa do processo de fadiga, e por fim a ruptura do material, na figura 2.1 é possível ver a evolução destas etapas.



Figura 2.1 – Etapas do processo de evolução da trinca  
Fonte: Adaptado de Schijve (2009)

De acordo com Rosa (2002), em componentes sem entalhes, como corpos de provas, mais de 70% da vida é usada para nucleação da trinca, a segunda etapa do processo de fadiga é caracterizada pelo surgimento de marcas macroscópicas das sucessivas posições da frente da trinca (linhas de praia), a figura 2.2 demonstra uma representação da falha por fadiga em materiais dúcteis.

A necessidade de acelerar o projeto de componentes sujeitos ao fenômeno de propagação e crescimento de trincas, conduziu ao desenvolvimento de métodos para análise da fadiga de um componente estrutural, entre eles os *métodos da vida em tensão*, *vida em deformação* e *mecânica da fratura* (BANNANTINE et al., 1989).

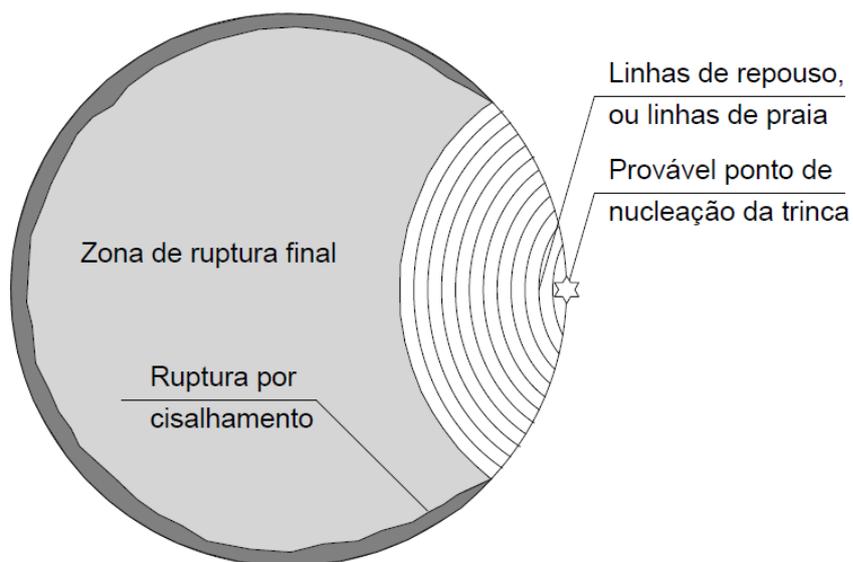


Figura 2.2 – Aspecto macroscópico da fratura por fadiga  
 Fonte: Adaptado de Rosa (2002)

## 2.2 MECÂNICA DA FRATURA

A premissa da Mecânica da Fratura (MF) é considerar que o material de um componente já possui alguma trinca. A trinca pode ser oriunda do processo de fabricação (extrusão, laminação, etc) e/ou solicitações dinâmicas (nucleação por fadiga) (ROSA, 2002). Com esta premissa, o estudo da MF busca quantificar os níveis aceitáveis de operação de um componente estrutural, sem que ocorra o colapso do componente.

### Mecânica da Fratura Linear Elástica

A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) descreve a magnitude e a distribuição do campo de tensões (linear elástico) na vizinhança a frente da trinca. De acordo com Bannantine et al. (1989), as hipóteses que são utilizadas para relacionar a magnitude e a distribuição do campo de tensões na vizinhança a frente da trinca na MFLE, são:

H1) Material linear elástico;

- H2) Pequenas deformações;
- H3) Estado plano de tensões ou deformações;
- H4) Geometria de propagação da trinca.

A geometria de propagação da trinca pode ser apresentada de três modos, figura 2.3.

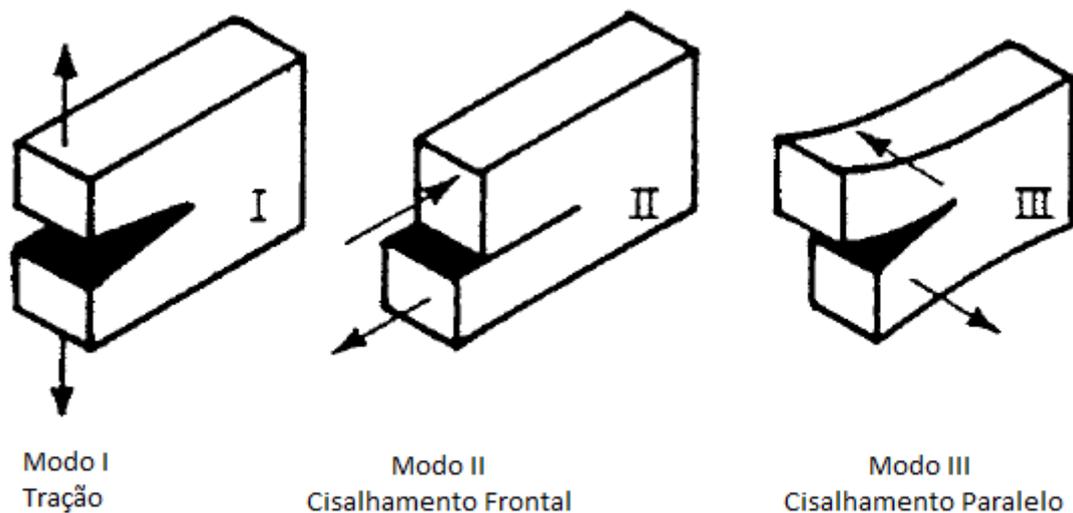


Figura 2.3 – Modos de abertura de trinca  
 Fonte: Adaptado de Bannantine et al., (1989)

Modo I – Tração: As faces da trinca são separadas (situação mais agressiva) devido a tensão de tração;

Modo II – Cisalhamento Frontal: As superfícies da trinca deslizam uma sobre a outra devido as tensões cisalhantes aplicadas no plano da trinca normal à aresta frontal;

Modo III – Cisalhamento Paralelo: As superfícies da trinca deslizam paralelamente à aresta frontal.

Historicamente, o estudo da MFLE iniciou-se em 1920. Griffith formulou o conceito de que uma trinca em um componente estrutural irá se propagar se a variação da energia de deformação elástica é maior do que a energia necessária para criar novas superfícies da trinca (BANNANTINE et al., 1989).

Porém, “a teoria de Griffith é aplicada, na sua forma original, apenas para um material frágil perfeito tal como o vidro” (DIETER, 1981). Na formulação do problema, Griffith considerou uma trinca em uma placa infinita sob carga de tração (Modo I), figura 2.4. Para este problema a teoria de Griffith define a tensão necessária para que ocorra a propagação da trinca, equação 2.1.

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}. \quad (2.1)$$

Sendo:

$\sigma$  = Tensão necessária para que ocorra a propagação da trinca;

$E$  = Módulo de elasticidade do material;

$\gamma_s$  = Densidade de energia superficial;

$a$  = Tamanho da trinca.

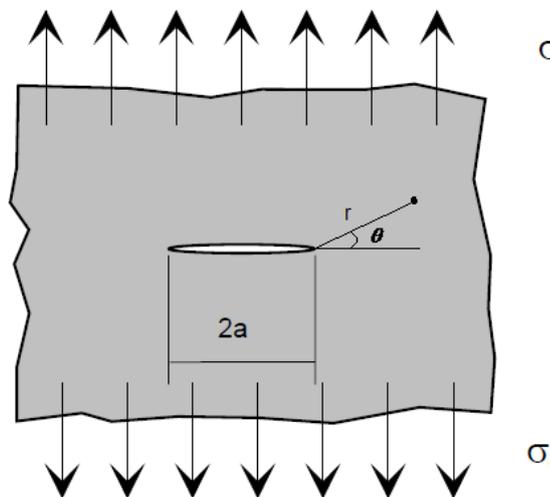


Figura 2.4 – Trinca em uma placa infinita sob tração  
Fonte: Adaptado de Rosa (2002)

Em meados de 1957, Irwin fez uma significativa contribuição ao estudo da MFLE, ele demonstrou que as tensões a frente da trinca são, de forma geral, representadas por,

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta). \quad (2.2)$$

Sendo  $(r, \theta)$  coordenadas polares de um ponto em relação à frente da trinca (figura 2.5) e  $K$  é o fator de intensidade de tensão (FIT) (IRWIN, 1957).

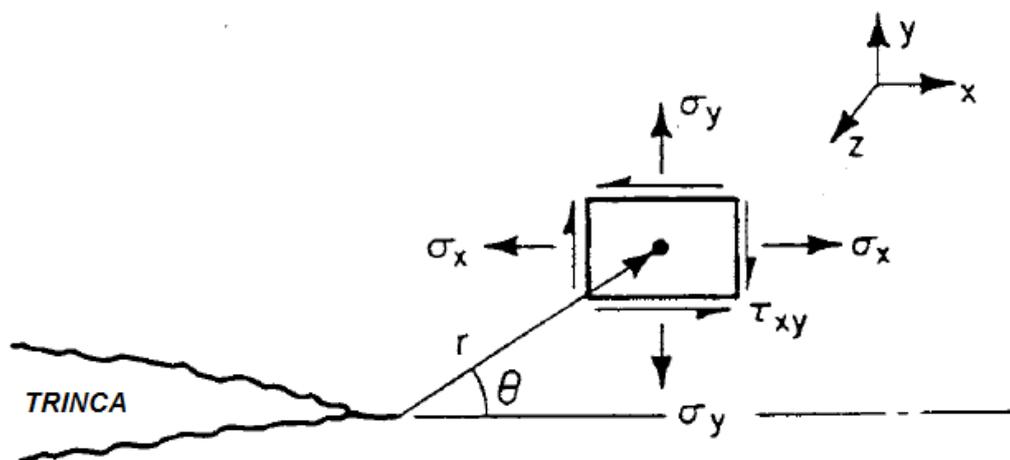


Figura 2.5 – Estado de tensões em um ponto próximo a trinca, modelo de Irwin  
Fonte: Adaptado de Bannantine et al., (1989)

Segundo Bannantine et al. (1989), o FIT define a magnitude das tensões na vizinhança da frente da trinca e é dependente da carga, tamanho e forma da trinca e geometria do componente estrutural, equação 2.3,

$$K = f(a)\sigma\sqrt{\pi a}. \quad (2.3)$$

Sendo que  $f(\bullet)$  é função de correção do fator de intensidade de tensão.

### 2.3 PROPAGAÇÃO DE TRINCAS POR FADIGA

Considerando a MFLE, um componente estrutural já possui trincas, outro fator que se deve levar em consideração é a variação do nível de tensão ao qual o componente estrutural está sendo submetido, pois quanto maior a variação de tensão, menor é a vida útil do componente estrutural. A figura 2.6 demonstra uma representação esquemática desta situação, apresenta-se três curvas do tamanho de trinca em função do número de ciclos, ao qual o componente está exposto.

Para os três casos apresentados é considerado um tamanho de trinca inicial igual a todos e a tensão mínima é zero. A variação na tensão para os três casos são

valores estritamente positivos e decrescentes,  $\Delta\sigma_1 > \Delta\sigma_2 > \Delta\sigma_3$ , isto é, a tensão aplicada a primeira curva é maior do que a tensão aplicada a segunda e está maior que na terceira (STEPHENS et al., 2000). Com a variação nas tensões decrescentes, tem-se uma vida de operação do componente estrutural crescente, ou seja,  $N_3 > N_2 > N_1$ .

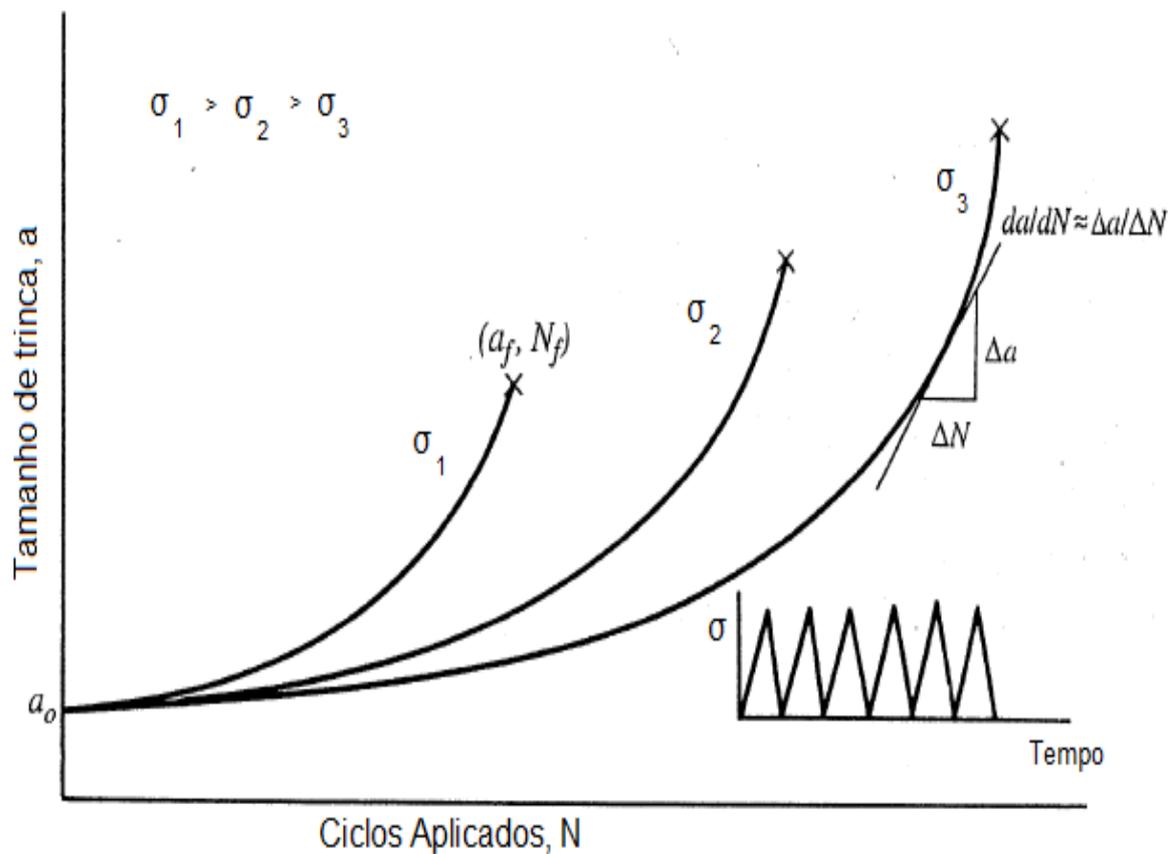


Figura 2.6 – Falha por fadiga – Tamanho de trinca por ciclos aplicados  
 Fonte: Adaptado de Stephens et al. (2000)

Segundo Stephens et al. (2000), ao aplicar os conceitos da MFLE ao gráfico da figura 2.6, obtém-se a taxa de propagação de trincas ( $da/dN$ ), em relação a variação do fator de intensidade de tensão  $\Delta K$ . A figura 2.7 apresenta uma curva sigmoideal, a qual é obtida do diagrama  $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$ . Este diagrama possui três regiões distintas.

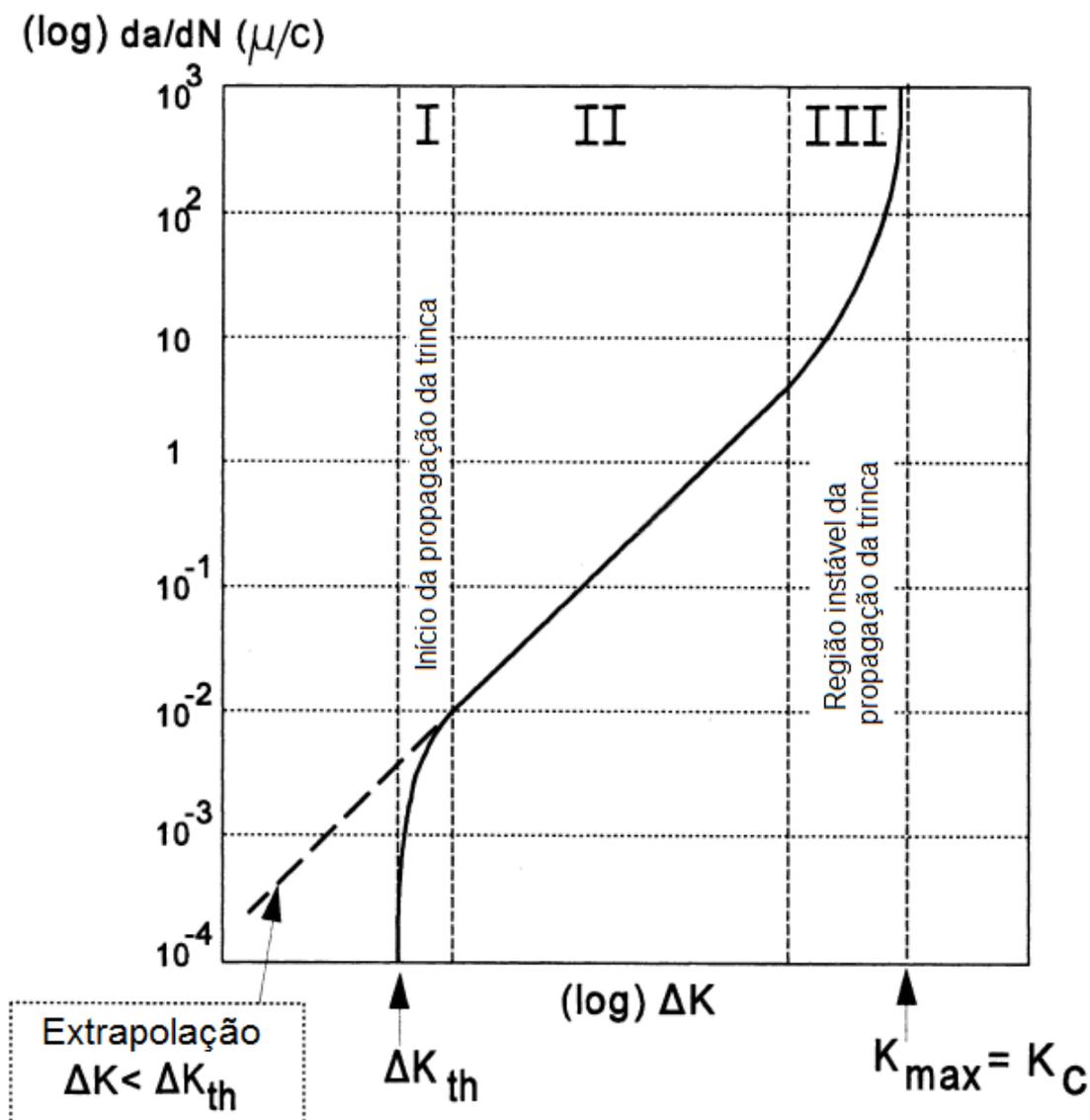


Figura 2.7 – Diagrama  $\log (da/dN) \times \log (\Delta K)$

Fonte: Adaptado de Schijve (2009)

A região I, representa o início da propagação da trinca. Como é possível observar no diagrama da figura 2.7, para que a trinca se propague, a variação do fator de intensidade de tensão ( $\Delta K$ ) deve ser igual ou maior que o fator de intensidade de tensão inicial ( $\Delta K_{th}$ ), ou seja,  $\Delta K \geq \Delta K_{th}$ . Para os casos em que  $\Delta K < \Delta K_{th}$ , mesmo em componentes sujeito a solicitações cíclicas, a trinca não apresentará uma propagação mensurável (STEPHENS et al., 2000).

O comportamento da curva na região II, é aproximadamente linear entre o  $\log (da/dN)$  x  $\log (\Delta K)$ . Os primeiros modelos, para estudo da evolução de trinca, foram desenvolvidos para observar o comportamento desta região. Paris-Erdogan (1963), formularam o comportamento na região II, conforme a equação 2.4,

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m, \quad (2.4)$$

sendo “C” e “m” coeficientes do material.

Na região III, a taxa de propagação de trinca por fadiga é muito alta e possui comportamento instável. Para pequenas variações do fator de intensidade de tensão a curva da taxa de propagação de trinca por fadiga se aproxima de uma assíntota vertical. Esta região, do diagrama da figura 2.7, é definida pelo ponto tenacidade à fratura  $K_c$  (STEPHENS et al., 2000).

## 2.4 MODELOS DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS

Os modelos matemáticos que descrevem a propagação de trincas, são geralmente definidos por um PVI, conforme equação 2.5,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathbb{R}^+), \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = h(\alpha, \Delta K), \quad \forall N \in (N_0, N_1), \\ a(N_0) = a_0; \end{array} \right. \quad (2.5)$$

sendo  $h(\alpha, \Delta K)$  a Lei de Evolução de Trincas e  $\alpha$  um vetor de parâmetros específicos de cada modelo.

Na literatura, é possível encontrar vários modelos de propagação de trincas, porém nem todos os modelos representam as três regiões do diagrama apresentado na figura 2.7 (BEDEN et al., 2009). Algumas representam apenas uma ou duas regiões, como por exemplo, a equação 2.4 representa apenas a região II. Outros modelos como os de Forman e Priddle representam mais de uma região, regiões II e III e regiões I à III, respectivamente (FORMAN et al., 1967; PRIDDLE, 1976).

### Modelo de Forman

Forman et al. (1967), aprimoraram o modelo de propagação de trincas de Paris-Erdogan (1963), equação 2.4. O modelo proposto por Forman considera o efeito da razão entre as tensões R, isto é,  $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$ , e a tenacidade a fratura  $K_c$ . Desta forma, o modelo de propagação de trincas de Forman representa as regiões II e III do diagrama apresentado na figura 2.7, na equação 2.6 tem-se o modelo proposto por Forman,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathbb{R}^+), \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = C_F \frac{(\Delta K)^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K}, \quad \forall N \in (N_0, N_1), \\ a(N_0) = a_0; \end{array} \right. \quad (2.6)$$

sendo " $C_F$ " e " $m_F$ " parâmetros do material para o modelo de Forman.

### Modelo de Priddle

Priddle (1976), propôs um modelo de propagação de trincas que é capaz de descrever as três regiões do diagrama apresentado na figura 2.7. O modelo de Priddle é definido pelo seguinte PVI,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathbb{R}^+), \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = C_p \left( \frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_c - K_{\max}} \right)^{m_p}, \quad \forall N \in (N_0, N_1), \\ a(N_0) = a_0. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Para este modelo de propagação de trincas, " $C_p$ " e " $m_p$ " são parâmetros do material,  $\Delta K$  é a variação do fator de intensidade de tensão,  $\Delta K_{th}$  representa o fator de intensidade de tensão inicial,  $K_c$  e  $K_{\max}$  são tenacidade a fratura e fator de intensidade de tensão máximo, respectivamente.

## 2.5 MÉTODOS NUMÉRICOS

Os modelos de propagação de trincas são equações diferenciais ordinárias (EDO) e são formulados como problemas de valor inicial (PVI), sendo que para sua solução em muitos casos não é possível obter a solução analítica do problema. Desta forma, é utilizado um método numérico para obter uma solução aproximada da solução exata. Na figura 2.8 é possível ver uma esquematização da aproximação obtida pela solução numérica com a solução exata.

Cunha (2000), enfatiza que a essência dos métodos numéricos está na discretização do contínuo. E esta discretização torna “finito” o problema e viabiliza sua solução. Na literatura encontram-se vários métodos numéricos, como o método das diferenças finitas, método de Euler, método de Runge-Kutta, entre outros.

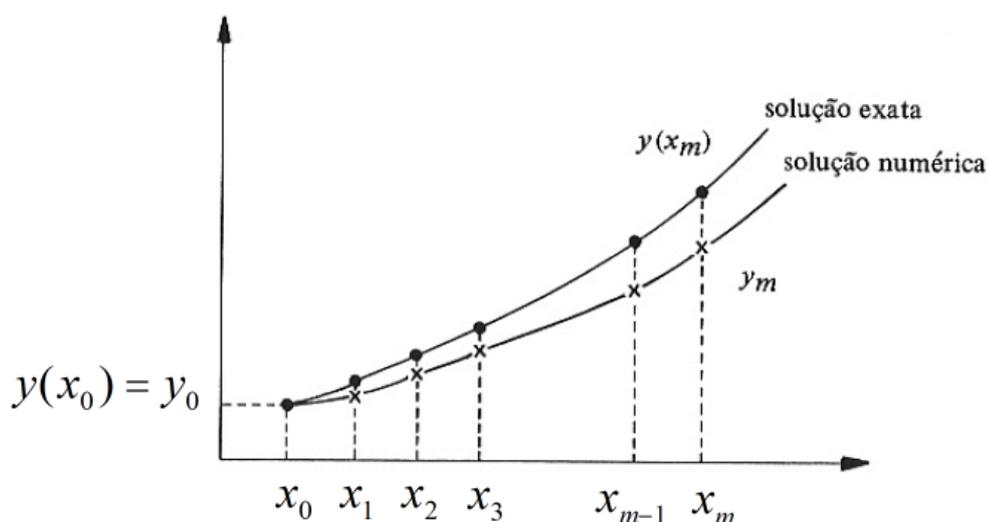


Figura 2.8 – Aproximação entre a solução numérica e exata  
Fonte: Barroso et al. (1987)

Os métodos de Runge-Kutta são os mais usados na resolução de problemas de valor inicial, dentre os quais o Método Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) é o mais usado por ser uma combinação de simplicidade, alta precisão e economia (CUNHA, 2000).

## Método de Runge-Kutta

Boyce e Diprima (2006), ressaltam que o erro de truncamento no método RK4 é na ordem  $h^4$  (passo), e é três ordens de grandeza mais preciso que o método de Euler.

A fórmula de RK4 é dada pela equação 2.8 (BOYCE, DIPRIMA, 2006).

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \\ k_1 = f(x_m, y_m); \\ k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1\right); \\ k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2\right); \\ k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3); \end{array} \right. , m = 0, 1, \dots, i \quad (2.8)$$

Sendo  $k_1$  o coeficiente angular no extremo esquerdo do intervalo  $[x_i, x_i + h]$ ,  $k_2$  é o coeficiente angular no ponto médio,  $k_3$  é a segunda aproximação do coeficiente angular do ponto médio e  $k_4$  é o coeficiente angular em  $(x_i + h)$  (BOYCE, DIPRIMA, 2006).

## 2.6 METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS

A metodologia *Fast Crack Bounds* consiste em determinar cotas superiores e inferiores para a função tamanho de trinca do modelo de propagação de trincas considerado. As cotas devem “envolver” a solução numérica aproximada do PVI referente a função tamanho de trinca. Esta metodologia foi apresentada no trabalho de Ávila e Santos (2015), e no trabalho de Machado Jr. (2015) foi denominada de *Fast Crack Bounds*.

Considere um modelo de propagação de trinca do tipo CATC, definido pela equação 2.5,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathbb{R}^+), \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = h(\alpha, \Delta K), \forall N \in (N_0, N_1), \\ a(N_0) = a_0; \end{array} \right.$$

Para aplicar a metodologia FCB a este modelo, é necessário realizar hipóteses na Lei de Evolução de Trincas. Por outro lado, a partir destas hipóteses assegura-se para a função tamanho de trinca a sua representação via série de Taylor de segunda ordem com resto de Lagrange, equação 2.9 (SANTOS, 2015).

$$a(N) = a_0(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta)(N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N]. \quad (2.9)$$

Por definição, as cotas inferior e superior atendem a seguinte desigualdade.

$$\underline{a}(N) \leq a(N) \leq \bar{a}(N), \forall N \in [N_0, N_1] \quad (2.10)$$

Sendo  $\underline{a}(N)$ ,  $\bar{a}(N)$  e  $a(N)$  as cotas inferior e superior do tamanho de trinca e a função tamanho de trinca, respectivamente (ÁVILA et al., 2016).

Ávila et al. (2016), utilizaram as seguintes hipóteses para a Lei de Evolução de Trincas de Paris-Erdogan:

$$\begin{array}{l} H1: \Delta\sigma(N) = \Delta\sigma_0, \forall N \in [N_0, N_1] \\ H2: \left\{ \begin{array}{l} f \in C^1([a_0, a_1]; \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}); \\ 0 < f(a_0) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ f'(a_0) \leq f'(x) \leq f'(y), \forall x, y \in [a_0, a_1]. \end{array} \right. \end{array}$$

A primeira hipótese é sobre o carregamento ( $\Delta\sigma$ ), que considera a variação do carregamento constante. A segunda hipótese é sobre a função de correção do fator de intensidade de tensão  $f(\bullet)$ , sua derivada é monótona crescente e contínua (ÁVILA et al., 2016).

As referidas cotas obtidas através da metodologia FCB, são comparadas com a solução numérica aproximada, obtida por RK4 e são validadas como cotas se atenderem a equação 2.10.

Ávila e Santos (2015), aplicaram a metodologia ao modelo de propagação de trincas de Forman, já no trabalho de Ávila et al. (2016), foi aplicado ao modelo de Paris-Erdogan. Santos (2015), estendeu o estudo aos modelos de Walker, McEvily e

Priddle. Machado Jr. (2015), aplicou a metodologia ao modelo de propagação de trincas de Colipriest.

## 2.7 QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA NA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS

O fenômeno de propagação de trincas é melhor representado quando se utiliza uma modelagem probabilística. Esta abordagem é justificada devido à dispersão nos parâmetros que definem os modelos de propagação de trincas (GHONEM, DORE, 1987). Um exemplo da dispersão pode ser observado na figura 2.9, os resultados experimentais apresentados neste exemplo, apresentam variações em torno de um valor médio.

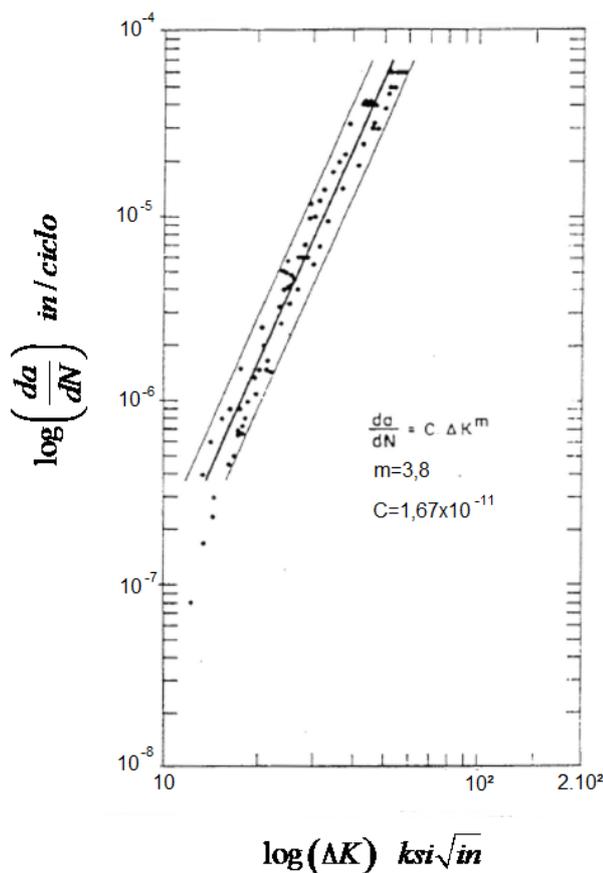


Figura 2.9 – Exemplo de dispersão dos resultados experimentais  
Fonte: Adaptado de Bannantine et al. (1989)

Considerando que os parâmetros dos modelos são variáveis aleatórias absolutamente contínuas o PVI é definido no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , em que  $\Omega$  um espaço amostral,  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra de eventos e  $\mathbf{P}$  uma medida de probabilidade (JAMES, 1981). A equação 2.5 pode ser reescrita conforme a equação 2.11 (LOPEZ, ÁVILA, 2015).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } a: (N_0, N_1) \times (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = h(\alpha(\omega), \Delta K(\omega)), \forall (N, \omega) \in (N_0, N_1) \times (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), \\ a(N_0, \omega) = a_0(\omega); \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Sendo  $\omega$  eventos randômicos simples de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

Para o PVI da equação 2.11, são analisados os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem.

### Momentos Estatísticos

James (1981), apresenta a seguinte definição:

**Definição 2.1** (Momento). Seja  $X$  uma variável aleatória, o valor  $E(X-b)^k$ , se existe, é chamado  $k$ -ésimo momento de  $X$  em torno de  $b$ , para  $b \in \mathbb{R}$ ,  $k=1,2,3,\dots,n$ . O  $k$ -ésimo momento em torno de zero,  $EX^k$ , é chamado simplesmente de  $k$ -ésimo momento de  $X$ .

A estimativa do primeiro momento estatístico é o valor esperado e a estimativa do segundo momento estatístico é a relação entre variância e valor esperado.

Moura (2017), apresenta o lema que define os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem para a função tamanho de trinca.

*Lema*

“Seja  $\{a(N, \omega_i)\}_{i=1}^{N_s}$ ,  $\{\underline{a}(N, \omega_i)\}_{i=1}^{N_s}$  e  $\{\bar{a}(N, \omega_i)\}_{i=1}^{N_s}$  o conjunto de um dado modelo CATC, Eq. (2.11) e as cotas inferior e superior, respectivamente”, então são válidas as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} (i) \hat{\mu}_{\underline{a}}(N) &\leq \hat{\mu}_a(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}(N), \forall N \in (N_0, N_1); \\ (ii) \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)}(N) &\leq \hat{\mu}_a^{(2)}(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}(N), \forall N \in (N_0, N_1). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sendo  $\hat{\mu}_{\underline{a}}(N)$ ,  $\hat{\mu}_a(N)$  e  $\hat{\mu}_{\bar{a}}(N)$  estimativa do valor esperado da cota inferior do tamanho de trinca, função tamanho de trinca e cota superior do tamanho de trinca, respectivamente, e  $\hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)}(N)$ ,  $\hat{\mu}_a^{(2)}(N)$  e  $\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}(N)$  estimativa do segundo momento estatístico para a cota inferior, tamanho de trinca e cota superior, respectivamente.

**Definição 2.2.** A variância calculada pela equação 2.13 é a melhor estimativa experimental para a variância (VUOLO, 1996).

$$\sigma_a^2(N) = \frac{1}{N_s - 1} \sum_{N=1}^{N_s} (a - \hat{\mu}_a)^2(N), \forall (N) \in (N_0, N_1). \quad (2.13)$$

Sendo  $\sigma_{\underline{a}}^2(N)$ ,  $\sigma_a^2(N)$  e  $\sigma_{\bar{a}}^2(N)$ , a variância da cota inferior, função tamanho de trinca e cota superior, respectivamente.

Desta forma, podemos determinar o estimador do momento estatístico de segunda ordem pela equação 2.14.

$$\hat{\mu}_a^{(2)}(N) = \sigma_a^2(N) + \frac{N_s}{N_s - 1} (\hat{\mu}_a)^2, \forall (N, \omega) \in (N_0, N_1) \times (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}). \quad (2.14)$$

## Simulação de Monte Carlo

Conforme Elishakoff (1999) o método de Simulação de Monte Carlo (SMC) é baseado na geração e simulação de amostras. O método se desenvolve em três etapas:

1. Geração de amostras, a partir de uma lei de probabilidade;
2. Para cada amostra, obter a solução do problema, realizações;
3. Análise estatística do conjunto de realizações.

Beck (1999), salienta que uma boa parte do trabalho envolvido na aplicação do método de SMC está na geração dos números aleatórios com a distribuição estatística desejada e que a utilização de computadores facilita esta tarefa.

Neste trabalho, o método SMC é utilizado para obter estimativa dos momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”, utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem e a metodologia *Fast Crack Bounds*. O conjunto de amostras são gerados através de um algoritmo pré definido no software utilizado neste trabalho.

No trabalho de Lopez e Ávila (2015), a aproximação numérica das realizações do processo estocástico que descreve a propagação da trinca é avaliada usando um método RK4. Assim, para a  $i$ -ésima amostra dos parâmetros  $\{\alpha(\omega_i), a_0(\omega_i)\}$ , a solução numérica aproximada da  $i$ -ésima realização do processo estocástico “tamanho de trinca” é dada pela equação 2.15.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a_{k+1}(\omega_i) \in i^+, \text{ para cada } \omega_i \in \Omega; \\ a_{k+1}(\omega_i) = a_k(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{6}\right)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)(\omega_i), \forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ k_1(\omega_i) = h(\alpha(\omega_i), \Delta K); \\ k_2(\omega_i) = a_k(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right)k_1(\omega_i); \\ k_3(\omega_i) = a_k(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right)k_2(\omega_i); \\ k_4(\omega_i) = a_k(\omega_i) + (\Delta N)k_3(\omega_i); \\ a_0(\omega_i) = a(N_0, \omega_i). \end{array} \right. \quad (2.15)$$

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

Nesta seção da dissertação, apresenta-se os materiais e/ou equipamentos que são utilizados no desenvolvimento da dissertação e também quais os métodos empregados para a realização do trabalho.

#### 3.1 MATERIAIS

O presente trabalho consiste na determinação de cotas superior e inferior ao modelo de propagação de trincas de Priddle, simulações numéricas para avaliar sua eficiência e determinar os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem. Os algoritmos computacionais são implementados em um software de computação numérica. Nesta dissertação é utilizado o software MatLab e a configuração do computador é a seguinte: Memória Ram de 4 Gb DDR 3; Processador Intel Celeron N2820 (2,39 GHz); Sistema Operacional Windows 7.

A escolha para utilização do software MatLab se dá por dois motivos, o primeiro é que o programa é uma ferramenta de alto desempenho na resolução de cálculos e sua utilização no meio acadêmico é muito difundida; o segundo motivo é que a Universidade Tecnológica Federal do Paraná possui licença para a utilização do mesmo em seus laboratórios.

#### 3.2 METODOLOGIA

Neste trabalho é utilizada a metodologia *Fast Crack Bounds* para determinar as cotas superiores e inferiores do modelo de propagação de trincas. Para estas cotas, é realizada a estimativa dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem. É realizada uma comparação entre as cotas com a solução numérica, obtida via RK4.

### 3.3 METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS APLICADO AO MODELO DE PRIDDLE

A formulação matemática aplicada, consisti em determinar cotas ao modelo de propagação de trincas de Priddle através da metodologia FCB. O problema de valor inicial de Priddle é definido pelo seguinte PVI,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathbb{R}^+), \text{ tal que} \\ \frac{da}{dN} = C_p \left[ \frac{(\sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma) - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{(\sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma)}{(1-R)}} \right]^{m_p}, \forall N \in (N_0, N_1). \\ a(N_0) = a_0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Aplicando a expansão em série de Taylor com resto de Lagrange, equação 2.9, considerando as seguintes hipóteses (SANTOS, 2015):

$$\left. \begin{array}{l} f \in C^1(\mathbb{R}); \\ H1) \left\{ \begin{array}{l} 0 < f(a_0) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ f'(a_0) \leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \end{array} \right. \\ H2) m \geq 1. \end{array} \right\}$$

Fazendo a segunda derivada da equação 3.1,

$$\frac{d^2 a}{dN^2}(a(N)) = \frac{d}{dN} \left( \frac{da}{dN}(a(N)) \right) = \frac{d}{da} \left( \frac{da}{dN}(a(N)) \right) \frac{da}{dN}(a(N)) \quad (D.1)$$

Considerando:

$$\Delta K = u$$

$$\frac{da}{dN} = g \quad (D.2)$$

$$\frac{d^2 a}{dN^2}(a(N)) = \frac{d}{da} (g(u)) \frac{da}{dN}(a(N))$$

$$\frac{dg}{da} = \underbrace{\frac{dg}{du}}_A \underbrace{\frac{du}{da}}_B, \quad (D.3)$$

Resolvendo A:

$$\frac{dg}{du} = \frac{d}{du} \left\{ C_p \left[ \frac{u - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{u}{(1-R)}} \right]^{m_p} \right\}, \quad (D.4)$$

$$\frac{dg}{du} = C_p m_p \left[ \frac{u - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{u}{(1-R)}} \right]^{m_p-1} \left\{ \frac{1}{K_c - \frac{u}{(1-R)}} + \frac{u - \Delta K_{th}}{\left( K_c - \frac{u}{(1-R)} \right)^2} \cdot \frac{1}{(1-R)} \right\},$$

Resolvendo B:

$$\frac{du}{da} = \frac{d}{da} \Delta K = \frac{d}{da} (\Delta \sigma \sqrt{\pi a} f(a)), \quad (D.5)$$

$$\frac{du}{da} = \Delta \sigma \sqrt{\pi} \left( \frac{1}{2\sqrt{a}} f(a) + \sqrt{a} f'(a) \right) = \Delta K \left( \frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right),$$

Substituindo D.4 e D5 em D.3, temos:

$$\frac{dg}{da} = C_p m_p \Delta K \left[ \frac{u - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{u}{(1-R)}} \right]^{m_p-1} \left\{ \frac{1}{K_c - \frac{u}{(1-R)}} + \frac{u - \Delta K_{th}}{\left( K_c - \frac{u}{(1-R)} \right)^2} \cdot \frac{1}{(1-R)} \right\} \left( \frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right), \quad (D.6)$$

E por fim, substituindo D.6 em D.2, obtém-se a segunda derivada da equação 3.1:

$$\frac{d^2 a}{dN^2} (a(N)) = C_p^2 m_p \Delta K \left[ \frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{\Delta K}{(1-R)}} \right]^{2m_p-1} \left[ \frac{K_c - \frac{\Delta K_{th}}{(1-R)}}{\left( K_c - \frac{\Delta K}{(1-R)} \right)^2} \right] \left[ \frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right]. \quad (D.7)$$

A partir da equação 3.1 e D.7, obtém-se as cotas superior e inferior, respectivamente, equação 3.2 (SANTOS, 2015).

$$\left. \begin{array}{l}
a(N) - a_0 \leq C_p \\
a(N) - a_0 \geq C_p
\end{array} \right\} \left[ \begin{array}{l}
\left[ \frac{\Delta K(a_0) - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{\Delta K(a_0)}{(1-R)}} \right]^{m_p} + \frac{1}{2} C_p m_p \Delta K(a^*) \left[ \frac{\Delta K(a^*) - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{\Delta K(a^*)}{(1-R)}} \right]^{2m_p-1} \\
\left[ \frac{K_c - \frac{\Delta K_{th}}{(1-R)}}{\left( K_c - \frac{\Delta K(a^*)}{(1-R)} \right)^2} \right] \left[ \frac{1}{2a^*} + \frac{f'(a^*)}{f(a^*)} \right] (N - N_0) \\
\left[ \frac{\Delta K(a_0) - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{\Delta K(a_0)}{(1-R)}} \right]^{m_p} + \frac{1}{2} C_p m_p \Delta K(a_0) \left[ \frac{\Delta K(a_0) - \Delta K_{th}}{K_c - \frac{\Delta K(a_0)}{(1-R)}} \right]^{2m_p-1} \\
\left[ \frac{K_c - \frac{\Delta K_{th}}{(1-R)}}{\left( K_c - \frac{\Delta K(a_0)}{(1-R)} \right)^2} \right] \left[ \frac{1}{2a_0} + \frac{f'(a_0)}{f(a_0)} \right] (N - N_0)
\end{array} \right\} (N - N_0). \quad (3.2)$$

$$\forall N \in [N_0, N_1].$$

### 3.4 ESTIMADORES DOS MOMENTOS ESTATÍSTICOS

Após determinadas as cotas, é realizado a Simulação de Monte Carlo para obter estimativas dos momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”, afim de se obter os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem aos modelos de propagação de trincas.

Para determinar os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, as cotas inferior e superior deverão satisfazer as desigualdades apresentadas na equação 2.12. Desta maneira, podemos reescrever as cotas para o modelo de Priddle, equações 3.3 e 3.4.



## COTA SUPERIOR

$$\left\{ a(N, \omega) - a_0(\omega) \leq C_p(\omega) \right\} \cdot \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega)}f(a_0(\omega))) - \Delta K_{th}(\omega)}{K_c(\omega) - \frac{(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega)}f(a_0(\omega)))}{(1-R)}} \right]^{m_p(\omega)} \\ + \frac{1}{2} C_p(\omega) m_p(\omega) (\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega)}f(a^*(\omega))) \\ \left[ \frac{(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega)}f(a^*(\omega))) - \Delta K_{th}(\omega)}{K_c(\omega) - \frac{(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega)}f(a^*(\omega)))}{(1-R)}} \right]^{2m_p(\omega)-1} \\ \cdot \frac{K_c(\omega) - \frac{\Delta K_{th}(\omega)}{(1-R)}}{\left( K_c - \frac{(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega)}f(a^*(\omega)))}{(1-R)} \right)^2} \\ \cdot \left[ \frac{1}{2(a^*(\omega))} + \frac{f'(a^*(\omega))}{f(a^*(\omega))} \right] (N - N_0) \end{array} \right\} (N - N_0). \quad (3.4)$$

$$\forall (N, \omega) \in (N_0, N_1) \times (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

A modelagem da incerteza é realizada através de variáveis randômicas com distribuição uniforme e independentes.

Para o modelo de Priddle, os parâmetros com incerteza são apresentados na equação 3.5.

$$\begin{cases} C_p(\omega) = \mu_{C_p} + \sqrt{3} \cdot \delta_{C_p} \cdot \xi(\omega), & \forall \omega \in \Omega; \\ m_p(\omega') = \mu_{m_p} + \sqrt{3} \cdot \delta_{m_p} \cdot \xi(\omega'), & \forall \omega' \in \Omega; \\ a_0(\omega'') = \mu_{a_0} + \sqrt{3} \cdot \delta_{a_0} \cdot \xi(\omega''), & \forall \omega'' \in \Omega; \\ K_c(\omega''') = \mu_{K_c} + \sqrt{3} \cdot \delta_{K_c} \cdot \xi(\omega'''), & \forall \omega''' \in \Omega; \\ \Delta K_{th}(\omega''') = \mu_{\Delta K_{th}} + \sqrt{3} \cdot \delta_{\Delta K_{th}} \cdot \xi(\omega'''), & \forall \omega'''' \in \Omega. \end{cases} \quad (3.5)$$

Sendo  $\{\mu_{C_p}, \mu_{m_p}, \mu_{a_0}, \mu_{K_c}, \mu_{\Delta K_{th}}\}$  e  $\{\delta_{C_p}, \delta_{m_p}, \delta_{a_0}, \delta_{K_c}, \delta_{\Delta K_{th}}\}$ , médias e coeficientes de dispersão das variáveis randômicas, respectivamente. As variáveis aleatórias  $\xi(\bullet)$  são uniformes ( $U[-1,1]$ ) e estatisticamente independentes.

Os estimadores dos momentos estatísticos das cotas superiores e inferiores, são comparados com os estimadores obtidos para a solução numérica aproximada, método de RK4. Para o modelo de Priddle o método de RK4 é apresentado na equação 3.6.

$$\begin{cases} \text{Determinar } a_{k+1}(\omega_i) \in \mathbb{R}^+, \text{ para cada } \omega_i \in \Omega; \\ a_{k+1}(\omega_i) = a_k(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{6}\right)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)(\omega_i), \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}; \\ k_1(\omega_i) = C_p(\omega_i) \left[ \frac{(\sqrt{\pi a} f(a) \Delta \sigma) - \Delta K_{th}(\omega_i)}{K_c(\omega_i) - \frac{(\sqrt{\pi a} f(a) \Delta \sigma)}{(1-R)}} \right]^{m_p(\omega_i)}; \\ k_2(\omega_i) = a_k(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right)k_1(\omega_i); \\ k_3(\omega_i) = a_k(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right)k_2(\omega_i); \\ k_4(\omega_i) = a_k(\omega_i) + (\Delta N)k_3(\omega_i); \\ a_0(\omega_i) = a(N_0, \omega_i), \quad \forall (\omega_i) \in \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N_s}\}. \end{cases} \quad (3.6)$$

### 3.5 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

O modelo de propagação de trincas, descrito na seção anterior, é aplicado a exemplos clássicos da literatura (BANNANTINE et al., 1989). As cotas superiores e

inferiores, bem como a solução numérica do modelo de propagação de trincas, são implementados no software MatLab. É gerado um algoritmo que realiza uma comparação gráfica entre as soluções obtidas para os estimadores das cotas superior e inferior com a solução numérica. A figura 3.1 demonstra a sequência da implementação computacional.



Figura 3.1 – Sequência da implementação computacional  
Fonte: Próprio Autor (2017)

#### 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção do trabalho, estão apresentados os resultados obtidos nas simulações numéricas. Para a obtenção dos resultados, utilizou-se problemas clássicos da mecânica da fratura, dos quais, a função de correção do fator de intensidade de tensão é conhecido.

Para obter os estimadores dos momentos estatísticos, são geradas 10.000 amostras randômicas a cada parâmetro com incerteza. Para avaliar o desempenho da metodologia, funções de desvio relativo foram definidas para o primeiro e segundo momento estatístico das cotas superiores e inferiores, em relação aos momentos estatísticos da solução numérica, obtida através do método RK4-SMC, equações 4.1 e 4.2. Outro dado importante analisado, é o desvio relativo da Lei de Propagação do Modelo para o valor esperado, equação 4.3. Como medida de desempenho da metodologia, os tempos computacionais para obtenção da solução numérica e das cotas também foram comparados.

$$\begin{cases} \varepsilon_{\hat{\mu}_{\bar{a}}} (N) = 100. \left( \frac{\hat{\mu}_{\bar{a}} - \hat{\mu}_a}{\hat{\mu}_a} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N_1], \\ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\underline{a}}} (N) = 100. \left( \frac{\hat{\mu}_{\underline{a}} - \hat{\mu}_a}{\hat{\mu}_a} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N_1]. \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}} (N) = 100. \left( \frac{\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)} - \hat{\mu}_a^{(2)}}{\hat{\mu}_a^{(2)}} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N_1], \\ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)}} (N) = 100. \left( \frac{\hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)} - \hat{\mu}_a^{(2)}}{\hat{\mu}_a^{(2)}} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N_1]. \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{\hat{\mu}_{\bar{h}}} (N) = 100. \left( \frac{\hat{\mu}_{\bar{h}} - \hat{\mu}_h}{\hat{\mu}_h} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N_1], \\ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\underline{h}}} (N) = 100. \left( \frac{\hat{\mu}_{\underline{h}} - \hat{\mu}_h}{\hat{\mu}_h} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N_1]. \end{cases} \quad (4.3)$$

**Corolário 4.1 (Funções Desvios Relativos Cota Superior):**

Considere  $\{N \in \mathbb{R}^+ / N_0 \leq N \leq N_1\}$ , sendo  $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a}(N) : [N_0, N_1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  e  $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a^{(2)}}(N) : [N_0, N_1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  funções positivas e representam o desvio relativo dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem das cotas superiores obtidos via metodologia FCB:

$$\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a}(N) \geq 0;$$

$$\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a^{(2)}}(N) \geq 0.$$

**Demonstração do corolário 4.1**

Considerando  $\hat{\mu}_a(N)$ ,  $\hat{\mu}_a^{(2)}(N)$ ,  $\hat{\mu}_a(N)$  e  $\hat{\mu}_a^{(2)}(N)$  com  $N \in [N_0, N_1]$ , as estimativas dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem da cota superior e tamanho de trinca, respectivamente.

Tem-se que:

$$\hat{\mu}_a(N) \leq \hat{\mu}_a(N), \forall N \in [N_0, N_1];$$

$$\hat{\mu}_a^{(2)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(2)}(N), \forall N \in [N_0, N_1];$$

Logo, obtém-se as seguintes desigualdades:

$$\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a}(N) \geq 0;$$

$$\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a^{(2)}}(N) \geq 0.$$

**Corolário 4.2 (Funções Desvios Relativos Cota Inferior):**

Considere  $\{N \in \mathbb{R}^+ / N_0 \leq N \leq N_1\}$ , sendo  $\varepsilon_{\hat{\mu}_a}(N) : [N_0, N_1] \rightarrow \mathbb{R}^-$  e  $\varepsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)}}(N) : [N_0, N_1] \rightarrow \mathbb{R}^-$  funções negativas e representam o desvio relativo dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem das cotas inferiores obtidos via metodologia FCB:

$$\varepsilon_{\hat{\mu}_a}(N) \leq 0;$$

$$\varepsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)}}(N) \leq 0.$$

### Demonstração do corolário 4.2

Considerando  $\hat{\mu}_a(N)$ ,  $\hat{\mu}_a^{(2)}(N)$ ,  $\hat{\mu}_a(N)$  e  $\hat{\mu}_a^{(2)}(N)$  com  $N \in [N_0, N_1]$ , as estimativas dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem da cota inferior e tamanho de trinca, respectivamente.

Tem-se que:

$$\hat{\mu}_a(N) \leq \hat{\mu}_a(N), \forall N \in [N_0, N_1];$$

$$\hat{\mu}_a^{(2)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(2)}(N), \forall N \in [N_0, N_1];$$

Logo, obtém-se as seguintes desigualdades:

$$\varepsilon_{\hat{\mu}_a}(N) \leq 0;$$

$$\varepsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)}}(N) \leq 0.$$

## 4.1 RESULTADOS PARA O MODELO DE PRIDDLE

Para este modelo de propagação de trincas, utilizou-se os dados apresentados por Al-Rubaie et al. (2007), para uma Liga de Inconel 600. Além dos dados do material, outros são necessários, como tamanho de trinca inicial e variação

da tensão. Os valores numéricos dos parâmetros utilizados a todos os problemas, são apresentados no quadro 4.1.

Dados Utilizados – Modelo de Priddle		
Parâmetro	Valor	Unidade
$\mu_{C_p}$	2.55e-8	m/ciclo
$\mu_{m_p}$	1,151	-
$\mu_{K_c}$	40,08	MPa $\sqrt{m}$
$\mu_{\Delta K_{th}}$	6,38	MPa $\sqrt{m}$
$\mu_{a_0}$	0,0015	m
$\Delta\sigma$	119	MPa
R	0,1	-
b	0,1	m
N	900.000	Ciclos

Quadro 4.1 – Dados utilizados nas simulações para o modelo de Priddle  
Fonte: Próprio autor (2017)

Adiciona-se aos valores descritos no quadro 4.1, outro dado muito importante, o valor de  $a^*$ . Conforme Santos (2015), o valor de  $a^*$  é determinado por inspeção, ele deve assegurar que a cota superior não seja violada pela solução numérica aproximada. Caso a cota superior seja violada pela solução numérica, um novo  $a^*$  deve ser determinado.

Inicialmente é utilizado um  $a^*=1,4a_0$  para o exemplo 1 – Placa Infinita;  $a^*=1,4a_0$  para o exemplo 2 – Placa com Largura Finita e Trinca Central;  $a^*=1,8a_0$  para o exemplo 3 – Placa com Largura Finita e Trinca na Aresta. Estes valores asseguram que a cota superior não é violada ao longo do intervalo de análise para um problema determinístico, figura 4.1.

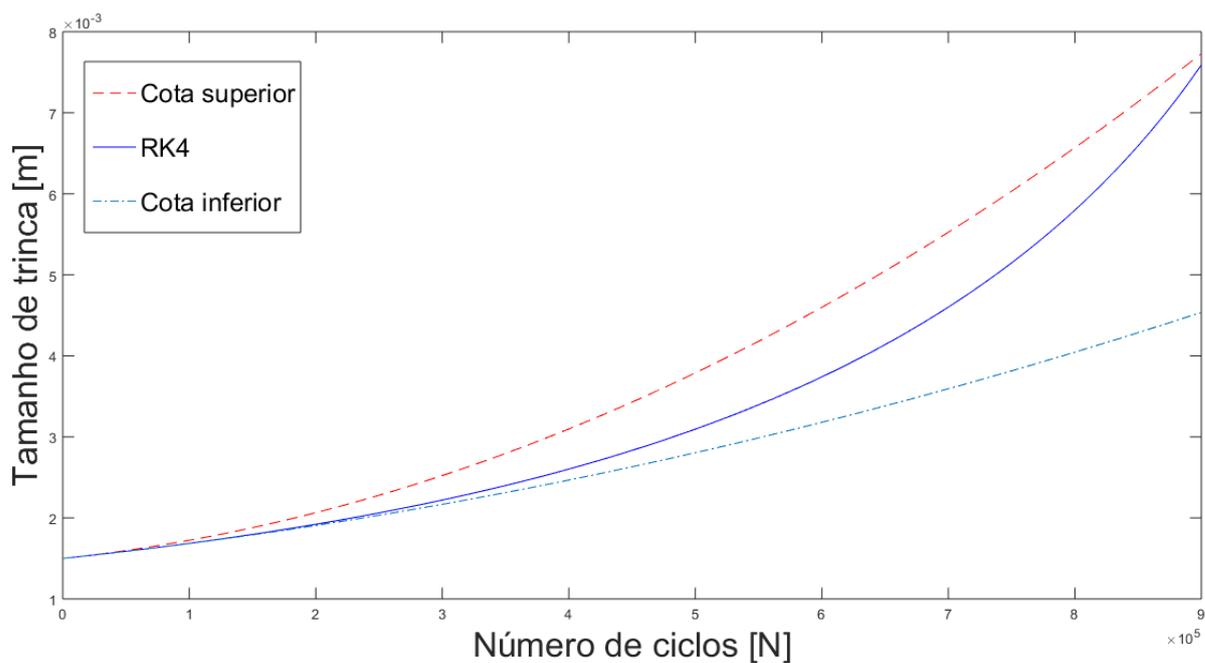


Figura 4.1 – Cotas para o exemplo: Placa com largura finita e trinca na aresta  
 Fonte: Próprio Autor (2017)

Para o problema determinístico da figura 4.1, foi plotado o diagrama  $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$ , figura 4.2.

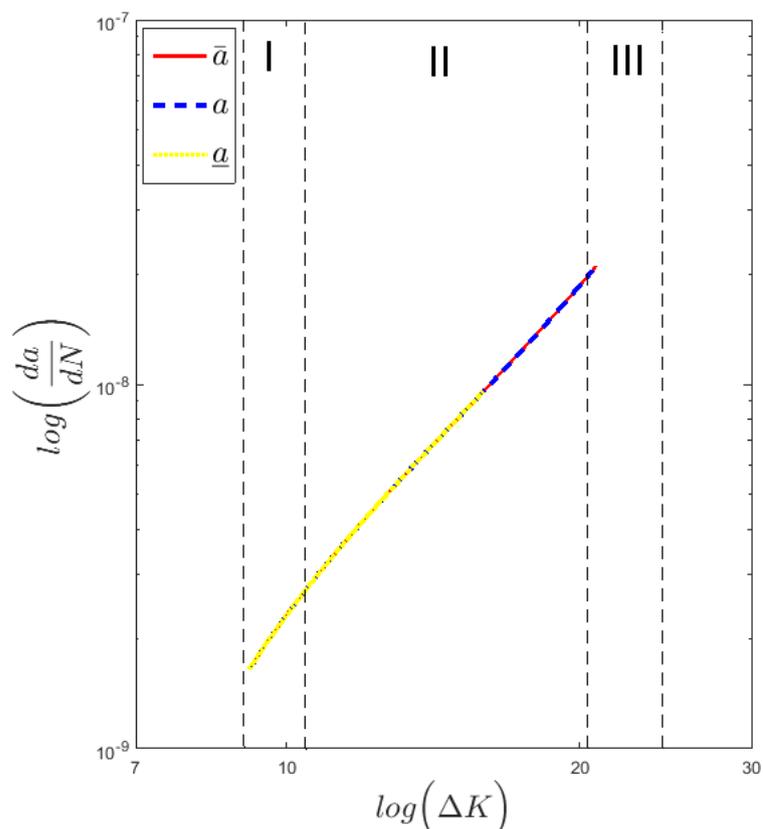


Figura 4.2 –  $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$  - Problema determinístico  
 Fonte: Próprio Autor (2017)

São obtidos resultados para dois casos de dispersão:

- I. O primeiro caso considera uma dispersão de 1/10, o coeficiente de dispersão fica definido conforme equação 4.4.

$$\begin{cases} \delta_{C_p} = (1/10)\mu_{C_p}; \\ \delta_{m_p} = (1/10)\mu_{m_p}; \\ \delta_{a_0} = (1/10)\mu_{a_0}; \\ \delta_{K_c} = (1/10)\mu_{K_c}; \\ \delta_{\Delta K_{th}} = (1/10)\mu_{\Delta K_{th}}. \end{cases} \quad (4.4)$$

- II. O segundo caso considera uma dispersão de 3/10, o coeficiente de dispersão fica definido conforme equação 4.5.

$$\begin{cases} \delta_{C_p} = (3/10)\mu_{C_p}; \\ \delta_{m_p} = (3/10)\mu_{m_p}; \\ \delta_{a_0} = (3/10)\mu_{a_0}; \\ \delta_{K_c} = (3/10)\mu_{K_c}; \\ \delta_{\Delta K_{th}} = (3/10)\mu_{\Delta K_{th}}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Para simplificar a apresentação dos resultados, para os casos em análise, utiliza-se a classificação apresentada no quadro 4.2.

CLASSIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS		
Parâmetro	Caso I	Caso II
$C_p$	$C_p .1$	$C_p .3$
$m_p$	$m_p .1$	$m_p .3$
$K_c$	$K_c .1$	$K_c .3$
$\Delta K_{th}$	$\Delta K_{th} .1$	$\Delta K_{th} .3$
$a_0$	$a_0 .1$	$a_0 .3$

Quadro 4.2 – Classificação dos parâmetros  
Fonte: Próprio Autor (2017)

### Exemplo 1 – Placa Infinita – Trinca Central – Modelo de Priddle

Para o primeiro exemplo, considerou-se uma placa infinita e trinca central, figura 4.3. Sendo a função de correção do fator de intensidade de tensão dado por (BANNANTINE et al., 1989), equação (4.6):

$$f(a) = 1. \quad (4.6)$$

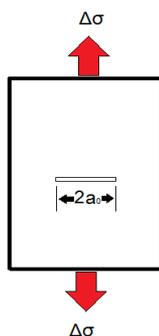


Figura 4.3 – Exemplo 1 – Placa infinita – Trinca central  
Fonte: Próprio Autor (2017)

A seguir, é apresentada a quantificação da incerteza para o caso I, sendo avaliado o primeiro e o segundo momento estatístico dos parâmetros com incerteza. As figuras 4.4 e 4.5 apresentam os momentos estatísticos para o caso  $a_0.1$ .

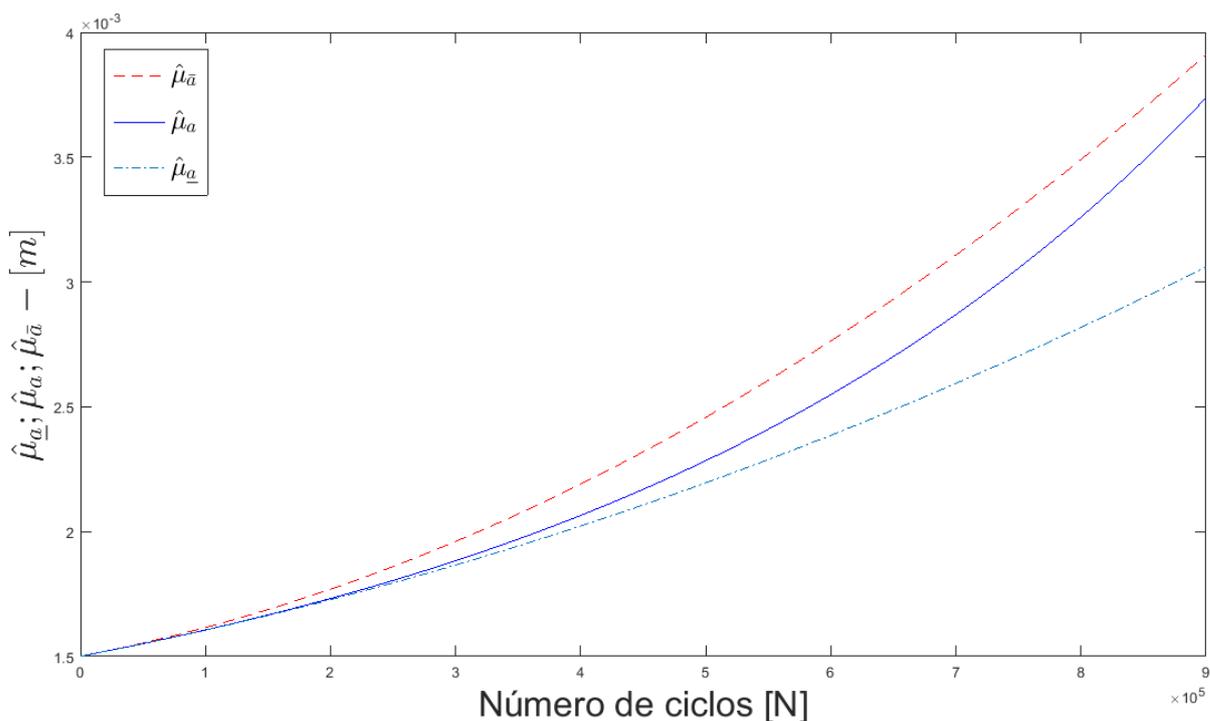


Figura 4.4 – Exemplo 1 – Primeiro momento estatístico –  $a_0.1$   
Fonte: Próprio Autor (2017)

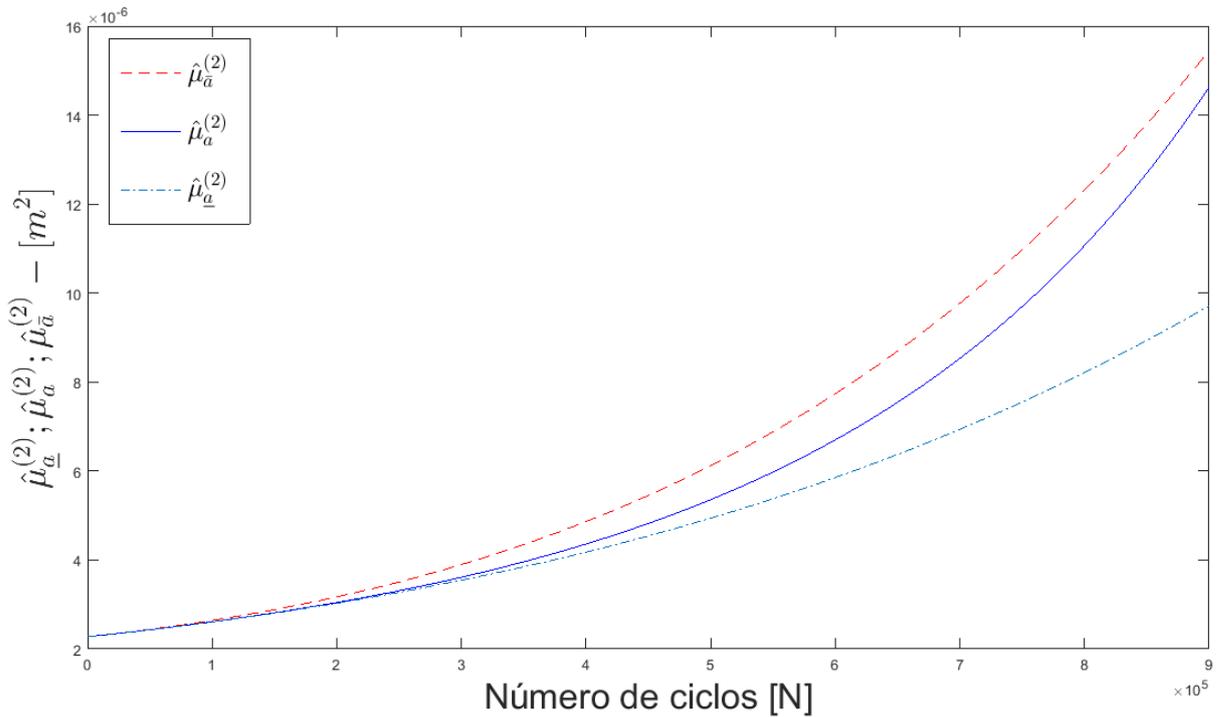


Figura 4.5 – Exemplo 1 – Segundo momento estatístico –  $a_0.1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

Para o caso  $a_0.1$ , é possível observar que os dois momentos estatísticos obtidos satisfazem as desigualdades da equação 2.12, sendo assim, atende-se a metodologia FCB. Os desvios relativos aos estimadores dos momentos estatísticos, para este parâmetro, estão representados nas figuras 4.6 e 4.7.

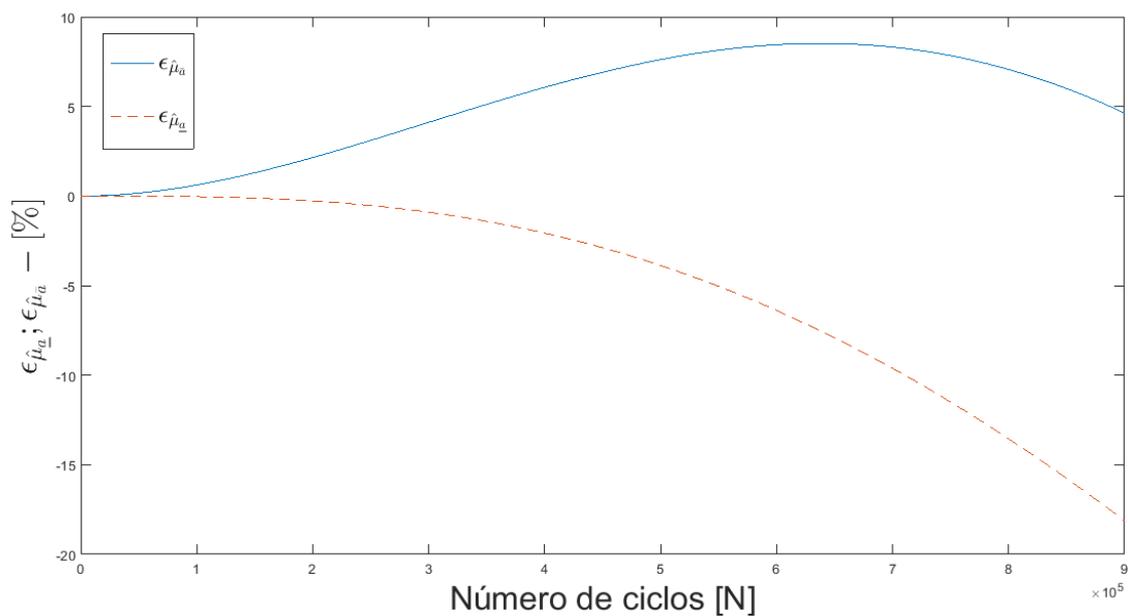


Figura 4.6 – Exemplo 1 – Desvios relativos – Primeiro momento estatístico –  $a_0.1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

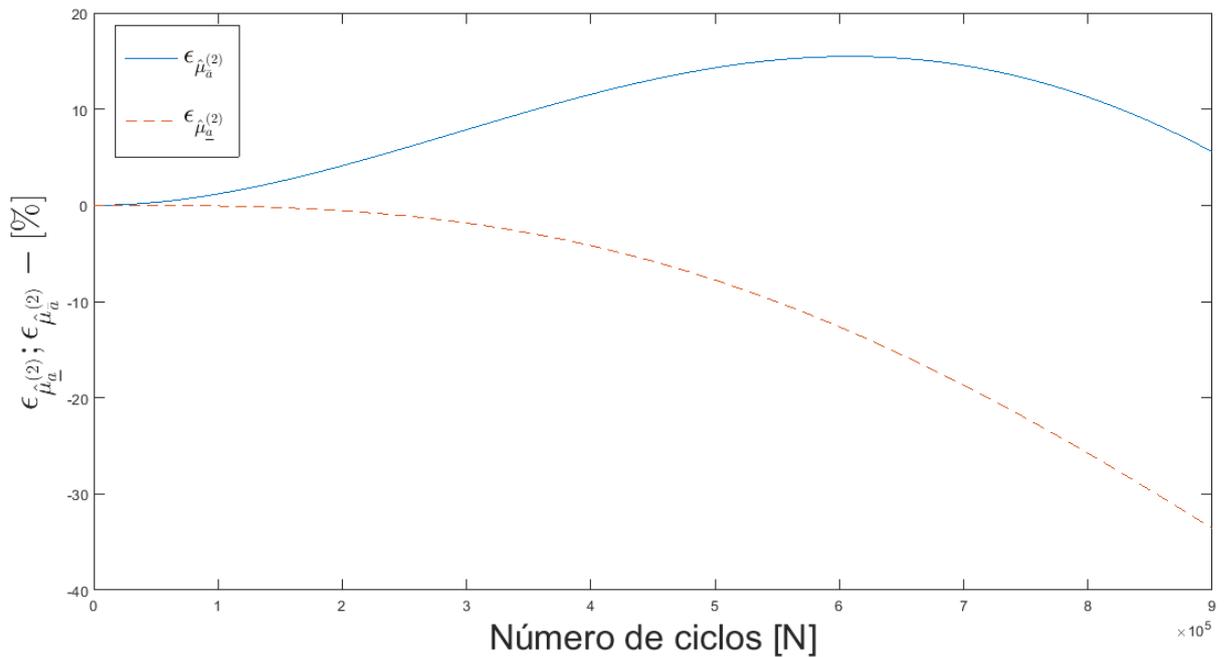


Figura 4.7 – Exemplo 1 – Desvios relativos – Segundo momento estatístico –  $a_0.1$   
 Fonte: Próprio Autor (2017)

Para o primeiro momento estatístico, o desvio relativo máximo para a cota superior é de 8,51% e para a cota inferior o desvio relativo mínimo é -18,10%. O desvio relativo máximo para a cota superior do segundo momento estatístico, caso  $a_0.1$ , é de 15,47% e para a cota inferior o desvio relativo mínimo é -33,55%.

O desvio relativo do primeiro momento estatístico da Lei de Evolução da Trinca para o caso  $a_0.1$  está representado na figura 4.8. Para este caso é possível averiguar que o desvio relativo máximo para a cota superior é de 14,25% e para a cota inferior o desvio relativo mínimo é -25,85%.

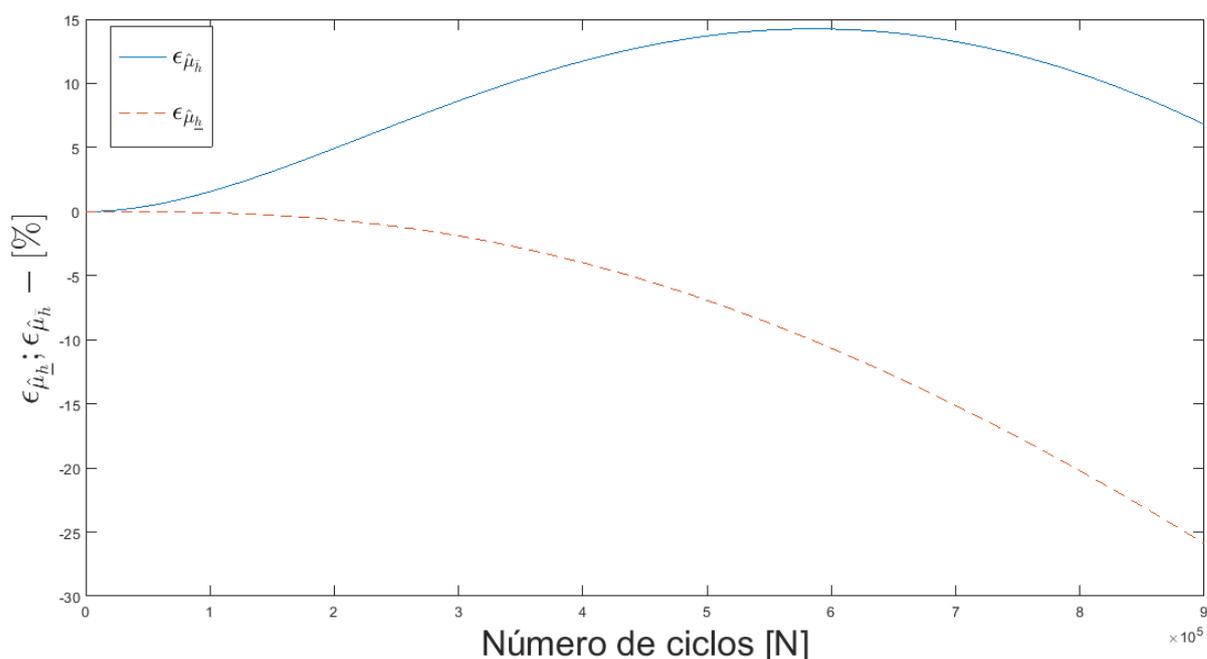


Figura 4.8 – Exemplo 1 – Desvio relativo – Lei de Evolução de Trincas –  $a_0.1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

Os casos  $m_p.1$  e  $K_c.1$  violaram a cota superior para o segundo momento estatístico. Sendo assim, o valor de  $a^*$  foi ajustado para ambos os casos, para  $m_p.1$   $a^*=1,45a_0$  e para  $K_c.1$   $a^*=1,41a_0$ . Nas figuras 4.9 e 4.10, apresentam-se as estimativas do segundo momento estatístico para o caso  $m_p.1$ , com a cota violada e com valor de  $a^*$  ajustado, respectivamente.

Os demais parâmetros analisados no caso I  $\{\Delta K_{th}.1$  e  $C_p.1\}$ , apresentaram comportamento similar ao obtido pelo caso  $a_0.1$ . As tabelas 4.1 e 4.2 apresentam os valores obtidos para os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, das cotas e soluções numéricas.

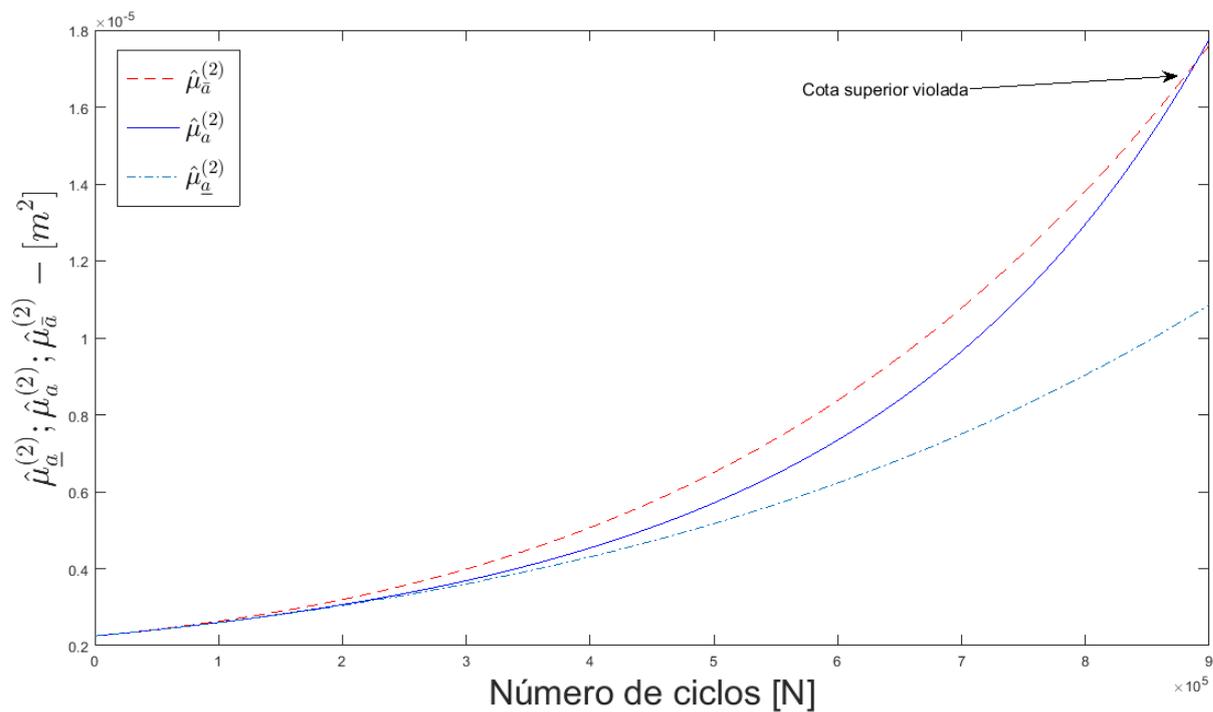


Figura 4.9 – Exemplo 1 – Segundo momento estatístico –  $m_p \cdot 1 - a^* = 1,4a_0$

Fonte: Próprio Autor (2017)

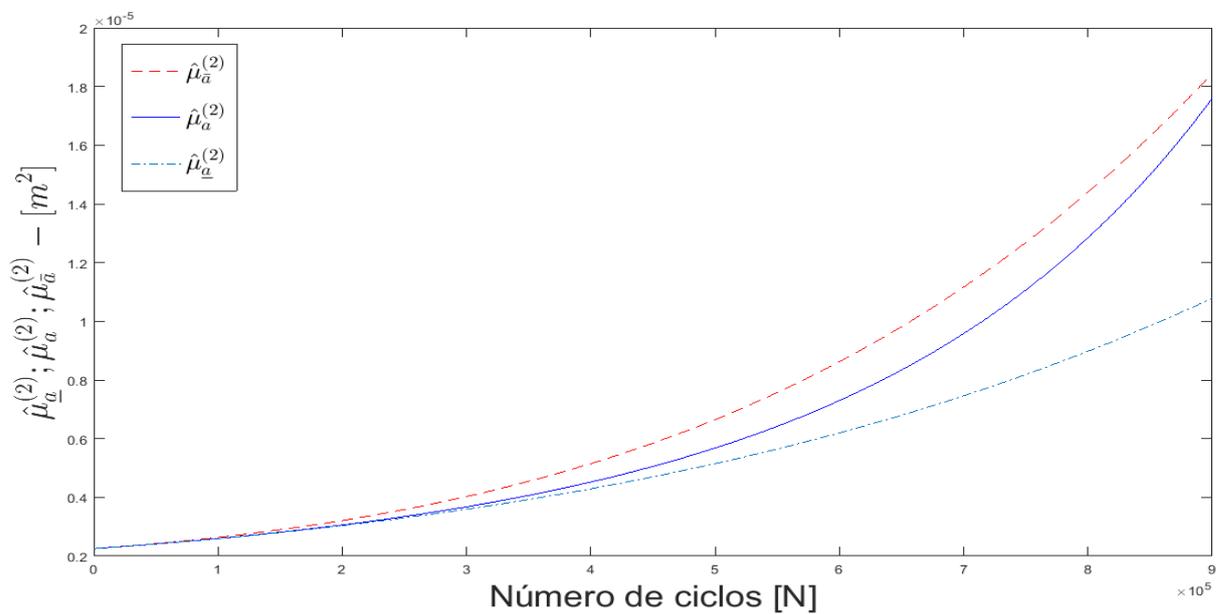


Figura 4.10 – Exemplo 1 – Segundo momento estatístico –  $m_p \cdot 1 - a^* = 1,45a_0$

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.1 – Estimativa do primeiro momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a$ ) – Exemplo 1 – Caso I [ $10^{-3}$  m]

Parâmetros		N [ $10^5$ ciclos]								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_p$	$\bar{a}(N)$	1,61	1,76	1,95	2,18	2,45	2,76	3,11	3,49	3,92
	$a(N)$	1,60	1,73	1,88	2,06	2,28	2,55	2,87	3,27	3,75
	$\underline{a}(N)$	1,60	1,72	1,86	2,01	2,19	2,38	2,59	2,81	3,05
$m_p$	$\bar{a}(N)$	1,62	1,78	1,99	2,25	2,55	2,89	3,27	3,70	4,18
	$a(N)$	1,61	1,74	1,91	2,11	2,35	2,65	3,01	3,45	4,00
	$\underline{a}(N)$	1,61	1,74	1,89	2,05	2,24	2,45	2,68	2,93	3,20
$a_0$	$\bar{a}(N)$	1,61	1,76	1,95	2,18	2,45	2,76	3,10	3,48	3,90
	$a(N)$	1,60	1,73	1,88	2,06	2,28	2,54	2,86	3,25	3,73
	$\underline{a}(N)$	1,60	1,72	1,86	2,02	2,19	2,38	2,59	2,81	3,05
$K_c$	$\bar{a}(N)$	1,61	1,77	1,98	2,22	2,51	2,83	3,20	3,62	4,07
	$a(N)$	1,60	1,73	1,89	2,08	2,32	2,61	2,97	3,42	4,00
	$\underline{a}(N)$	1,60	1,73	1,87	2,03	2,21	2,41	2,63	2,86	3,11
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	1,61	1,76	1,96	2,19	2,46	2,77	3,12	3,50	3,93
	$a(N)$	1,60	1,73	1,88	2,07	2,29	2,56	2,89	3,30	3,80
	$\underline{a}(N)$	1,60	1,72	1,86	2,02	2,20	2,39	2,60	2,83	3,08

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.2 – Estimativa do segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ) – Exemplo 1 – Caso I [ $10^{-6}$  m<sup>2</sup>]

Parâmetros		N [ $10^5$ ciclos]								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_p$	$\bar{a}(N)$	2,60	3,12	3,84	4,80	6,06	7,69	9,75	12,33	15,52
	$a(N)$	2,57	2,99	3,54	4,26	5,23	6,53	8,32	10,81	14,34
	$\underline{a}(N)$	2,57	2,97	3,47	4,08	4,81	5,69	6,73	7,96	9,40
$m_p$	$\bar{a}(N)$	2,63	3,20	4,02	5,14	6,64	8,61	11,15	14,37	18,42
	$a(N)$	2,59	3,05	3,67	4,51	5,67	7,29	9,56	12,83	17,57
	$\underline{a}(N)$	2,59	3,03	3,59	4,28	5,14	6,19	7,45	8,97	10,77
$a_0$	$\bar{a}(N)$	2,64	3,16	3,89	4,85	6,11	7,72	9,76	12,30	15,43
	$a(N)$	2,61	3,04	3,61	4,35	5,35	6,69	8,52	11,05	14,61
	$\underline{a}(N)$	2,60	3,02	3,54	4,17	4,93	5,84	6,93	8,21	9,70
$K_c$	$\bar{a}(N)$	2,61	3,16	3,93	4,98	6,37	8,18	10,50	13,44	17,11
	$a(N)$	2,58	3,01	3,59	4,37	5,43	6,91	9,03	12,16	16,97
	$\underline{a}(N)$	2,58	2,99	3,51	4,15	4,93	5,86	6,97	8,29	9,85
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	2,61	3,14	3,88	4,87	6,18	7,87	10,02	12,72	16,07
	$a(N)$	2,57	3,01	3,58	4,35	5,39	6,81	8,79	11,59	15,62
	$\underline{a}(N)$	2,57	2,99	3,51	4,15	4,94	5,89	7,03	8,38	9,98

Fonte: Próprio Autor (2017)

A tabela 4.3 apresenta a relação dos tempos computacionais para a solução numérica – método de RK4 e das cotas – metodologia FCB, para os casos I.

Tabela 4.3 – Tempos computacionais – Exemplo 1 – Caso I			
Parâmetros	$\bar{a}$ e $\underline{a}$ [s]	$a$ [s]	$\rho = a / (\bar{a} \text{ e } \underline{a})$ [%]
$C_p$	9,21	359,25	3.900,65
$m_p$	8,99	357,12	3.972,41
$a_0$	52,71	359,32	681,69
$K_c$	9,26	358,57	3.872,24
$\Delta K_{th}$	8,98	356,80	3.973,27

Fonte: Próprio Autor (2017)

Após analisar os dados para o caso I, isto é, parâmetros com dispersão de 1/10, apresenta-se abaixo os dados para o caso II, ( $\delta = 3/10$ ).

Os casos  $\{\Delta K_{th}.3, m_p.3, a_0.3 \text{ e } C_p.3\}$  apresentaram comportamentos similares. Nestes casos, o estimador do momento estatístico de primeira e segunda ordem da solução numérica violou o estimador da cota superior. Sendo assim, os casos  $\{\Delta K_{th}.3, m_p.3, a_0.3 \text{ e } C_p.3\}$  tiveram os valores de  $a^*$  ajustados para  $\{1,85 a_0, 2,1 a_0, 1,65 a_0 \text{ e } 1,5 a_0\}$ , respectivamente. As figuras 4.11 e 4.12 apresentam os gráficos dos estimadores do momento estatístico de primeira e segunda ordem de  $\Delta K_{th}.3$ , após as devidas considerações.

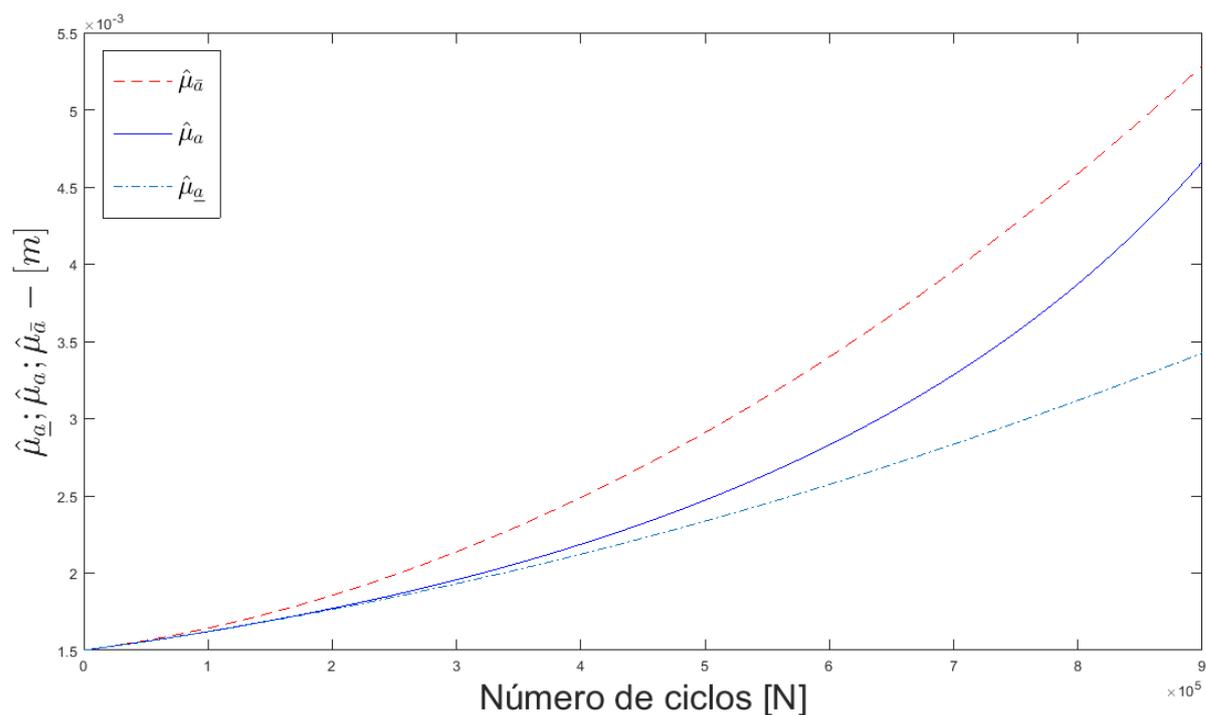


Figura 4.11 – Exemplo 1 – Primeiro momento estatístico –  $\Delta K_{in}.3$

Fonte: Próprio Autor (2017)

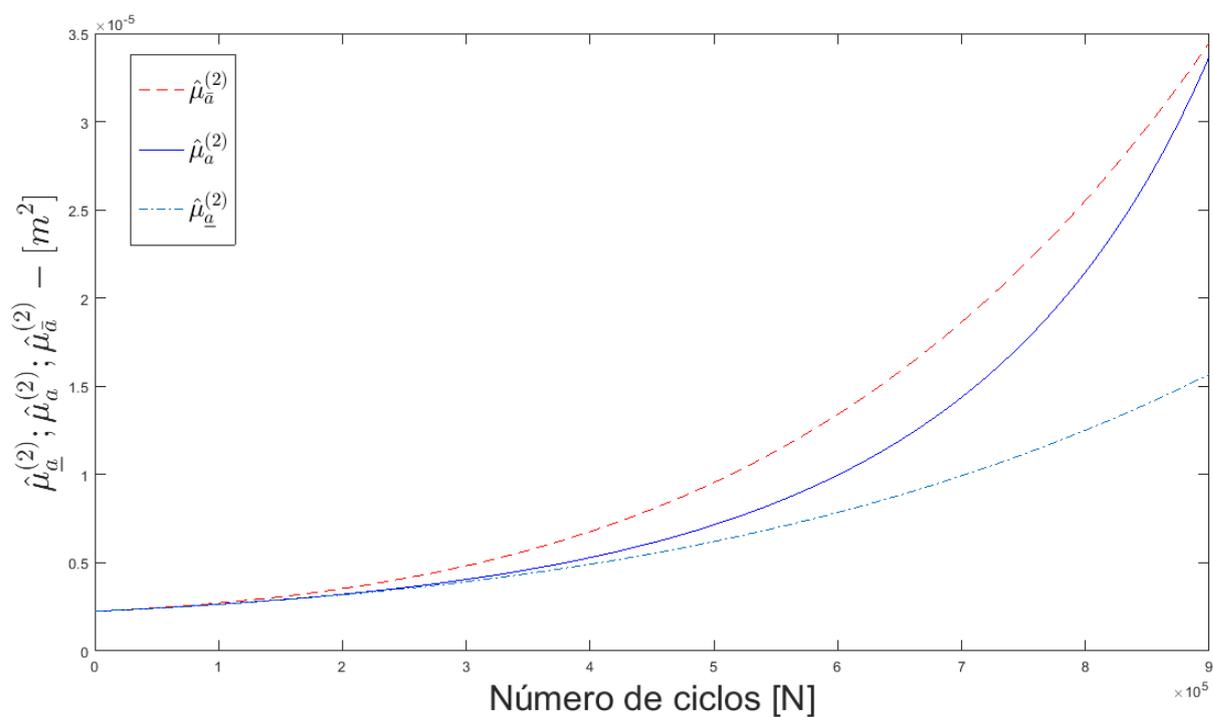


Figura 4.12 – Exemplo 1 – Segundo momento estatístico –  $\Delta K_{in}.3$

Fonte: Próprio Autor (2017)

Ao avaliar o caso  $K_c.3$ , para o primeiro momento estatístico, verificou-se um comportamento instável obtido do valor esperado da solução numérica. Em alguns

pontos, a estimativa do primeiro momento estatístico para a evolução da trinca, apresenta fechamento do tamanho de trinca. Desta forma, observou-se que o modelo de propagação de Priddle é muito “instável” com coeficiente de dispersão de 3/10 sobre o valor de  $K_c$ , para  $N=900.000$  ciclos.

Nas tabelas 4.4 e 4.5 apresentam-se os valores obtidos das cotas superior, inferior e solução numérica dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, para todos os casos II avaliados.

Tabela 4.4 – Estimativa do primeiro momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a$ ) – Exemplo 1 – Caso II [ $10^{-3}$ m]										
Parâmetros		N [ $10^5$ ciclos]								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_p$	$\bar{a}(N)$	1,61	1,78	1,99	2,25	2,56	2,92	3,32	3,77	4,27
	$a(N)$	1,60	1,73	1,88	2,08	2,32	2,62	3,00	3,48	4,11
	$\underline{a}(N)$	1,60	1,72	1,86	2,02	2,20	2,40	2,61	2,85	3,10
$m_p$	$\bar{a}(N)$	1,69	1,99	2,39	2,89	3,48	4,18	4,98	5,88	6,88
	$a(N)$	1,67	1,89	2,18	2,55	3,00	3,54	4,22	5,06	6,12
	$\underline{a}(N)$	1,67	1,88	2,15	2,46	2,82	3,23	3,69	4,19	4,74
$a_0$	$\bar{a}(N)$	1,62	1,80	2,03	2,31	2,64	3,03	3,47	3,96	4,50
	$a(N)$	1,60	1,73	1,89	2,08	2,31	2,59	2,94	3,36	3,90
	$\underline{a}(N)$	1,60	1,73	1,87	2,03	2,21	2,41	2,63	2,86	3,12
$K_c$	$\bar{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	$a(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	1,64	1,85	2,13	2,48	2,90	3,39	3,95	4,58	5,28
	$a(N)$	1,62	1,77	1,95	2,18	2,47	2,82	3,28	3,86	4,65
	$\underline{a}(N)$	1,61	1,76	1,93	2,12	2,33	2,57	2,83	3,11	3,42

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.5 – Estimativa do segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ) – Exemplo 1 – Caso II [ $10^{-6}$ m <sup>2</sup> ]										
Parâmetros		N [ $10^5$ ciclos]								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_p$	$\bar{a}(N)$	2,62	3,19	4,03	5,20	6,80	8,94	11,75	15,37	19,97
	$a(N)$	2,57	3,00	3,59	4,39	5,53	7,17	9,61	13,38	19,47
	$\underline{a}(N)$	2,57	2,98	3,50	4,15	4,93	5,89	7,05	8,43	10,08
$m_p$	$\bar{a}(N)$	2,90	4,14	6,24	9,56	14,58	21,83	31,97	45,72	63,91
	$a(N)$	2,82	3,76	5,30	7,74	11,55	17,46	26,55	40,67	63,31
	$\underline{a}(N)$	2,81	3,72	5,10	7,16	10,09	14,17	19,67	26,95	36,35
$a_0$	$\bar{a}(N)$	2,91	3,60	4,58	5,92	7,70	10,02	13,02	16,83	21,60
	$a(N)$	2,86	3,42	4,17	5,18	6,56	8,50	11,24	15,21	21,12
	$\underline{a}(N)$	2,86	3,40	4,07	4,91	5,95	7,21	8,73	10,56	12,72
$K_c$	$\bar{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	$a(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	2,71	3,53	4,82	6,75	9,53	13,39	18,61	25,50	34,41
	$a(N)$	2,64	3,21	4,04	5,28	7,13	9,95	14,34	21,43	33,61
	$\underline{a}(N)$	2,63	3,18	3,92	4,91	6,19	7,84	9,91	12,49	15,66

Fonte: Próprio Autor (2017)

A tabela 4.6 apresenta a relação dos tempos computacionais para a solução numérica – método de RK4 e das cotas – metodologia FCB, para os casos II.

Tabela 4.6 – Tempos computacionais – Exemplo 1 – Caso II			
Parâmetros	$\bar{a}$ e $\underline{a}$ [s]	$a$ [s]	$\rho = a / (\bar{a} \text{ e } \underline{a})$ [%]
$C_p$	8,97	361,75	4.032,88
$m_p$	8,96	357,53	3.990,29
$a_0$	53,63	470,33	876,99
$K_c$	9,00	526,90	5.854,44
$\Delta K_{th}$	9,02	479,08	5.311,30

Fonte: Próprio Autor (2017)

Nas tabelas 4.7, 4.8 e 4.9 a seguir, são apresentados os desvios relativos para os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, para tamanho de trinca e desvio relativo do valor esperado da Lei de Evolução da Trinca, respectivamente.

Tabela 4.7 – Desvio relativo do primeiro momento estatístico ( $\varepsilon_{\hat{\mu}_a}$ ) – Exemplo 1 [%]									
Parâmetros		Caso I				Caso II			
		$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$	$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$
$C_p$	$\bar{a}(N)$	0,62	4,15	8,47	4,33	0,84	5,68	11,34	3,88
	$\underline{a}(N)$	-0,03	-0,92	-6,55	-18,62	-0,04	-1,15	-8,41	-24,50
$m_p$	$\bar{a}(N)$	0,70	4,60	9,07	4,38	1,49	9,26	17,93	12,44
	$\underline{a}(N)$	-0,04	-1,06	-7,30	-20,02	-0,07	-1,55	-8,81	-22,48
$a_0$	$\bar{a}(N)$	0,61	4,10	8,43	4,64	1,01	7,14	16,77	15,34
	$\underline{a}(N)$	-0,03	-0,90	-6,37	-18,10	-0,03	-0,95	-6,90	-20,10
$K_c$	$\bar{a}(N)$	0,68	4,55	8,70	1,77	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-0,04	-1,05	-7,58	-22,14	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	0,61	4,04	8,04	3,46	1,35	9,26	20,11	13,37
	$\underline{a}(N)$	-0,03	-0,93	-6,63	-18,86	-0,04	-1,26	-9,04	-26,48

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.8 – Desvio relativo do segundo momento estatístico ( $\varepsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)}}$ ) – Exemplo 1 [%]									
Parâmetros		Caso I				Caso II			
		$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$	$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$
$C_p$	$\bar{a}(N)$	1,25	8,52	17,69	8,25	1,71	12,15	24,69	2,59
	$\underline{a}(N)$	-0,07	-1,85	-12,86	-34,46	-0,08	-2,42	-17,77	-48,22
$m_p$	$\bar{a}(N)$	1,41	9,49	18,13	4,82	3,01	17,75	25,05	0,94
	$\underline{a}(N)$	-0,08	-2,21	-15,08	-38,67	-0,15	-3,59	-18,84	-42,58
$a_0$	$\bar{a}(N)$	1,17	7,84	15,46	5,60	1,56	9,96	17,98	2,28
	$\underline{a}(N)$	-0,07	-1,83	-12,61	-33,55	-0,08	-2,21	-15,09	-39,76
$K_c$	$\bar{a}(N)$	1,38	9,44	18,29	0,84	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-0,08	-2,13	-15,22	-41,95	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	1,22	8,20	15,53	2,89	2,77	19,13	34,48	2,38
	$\underline{a}(N)$	-0,07	-1,93	-13,54	-36,08	-0,09	-3,03	-21,23	-53,39

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.9 – Desvio relativo da Lei de Evolução da Trinca para o primeiro momento estatístico ( $\varepsilon_{\hat{\mu}_h}$ ) – Exemplo 1 [%]									
Parâmetros		Caso I				Caso II			
		$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$	$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$
$C_p$	$\bar{a}(N)$	1,57	8,74	14,28	6,36	2,13	11,91	18,90	5,60
	$\underline{a}(N)$	-0,09	-1,93	-10,93	-26,54	-0,11	-2,41	-13,80	-34,00
$m_p$	$\bar{a}(N)$	1,79	9,71	15,28	6,47	2,67	12,65	19,70	13,46
	$\underline{a}(N)$	-0,10	-2,24	-12,12	-28,50	-0,12	-2,16	-9,83	-23,69
$a_0$	$\bar{a}(N)$	1,54	8,61	14,23	6,81	2,56	14,92	28,19	22,66
	$\underline{a}(N)$	-0,08	-1,88	-10,64	-25,85	-0,08	-1,99	-11,41	-28,34
$K_c$	$\bar{a}(N)$	1,72	9,38	14,19	2,48	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-0,10	-2,16	-12,27	-30,26	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	1,09	6,52	11,42	4,57	8,98	33,40	43,40	22,30
	$\underline{a}(N)$	-0,06	-1,51	-9,34	-24,25	-0,28	-4,48	-18,88	-41,00

Fonte: Próprio Autor (2017)

### Exemplo 2 – Placa finita – Trinca Central – Modelo de Priddle

Neste segundo exemplo, considera-se uma placa com largura finita e uma trinca central, figura 4.13. A função de correção do fator de intensidade de tensão dado por (BANNANTINE et al., 1989), equação (4.7):

$$f(a) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}. \quad (4.7)$$

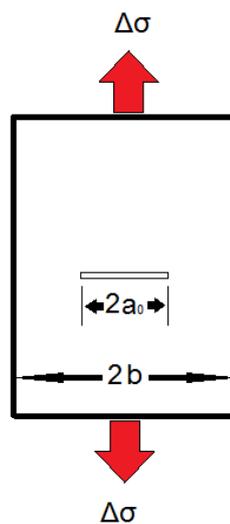


Figura 4.13 – Exemplo 2 – Placa finita – Trinca central  
Fonte: Próprio Autor (2017)

Nas figuras 4.14 e 4.15 apresentam-se os estimadores dos momentos estatísticos para o caso  $C_p.1$ .

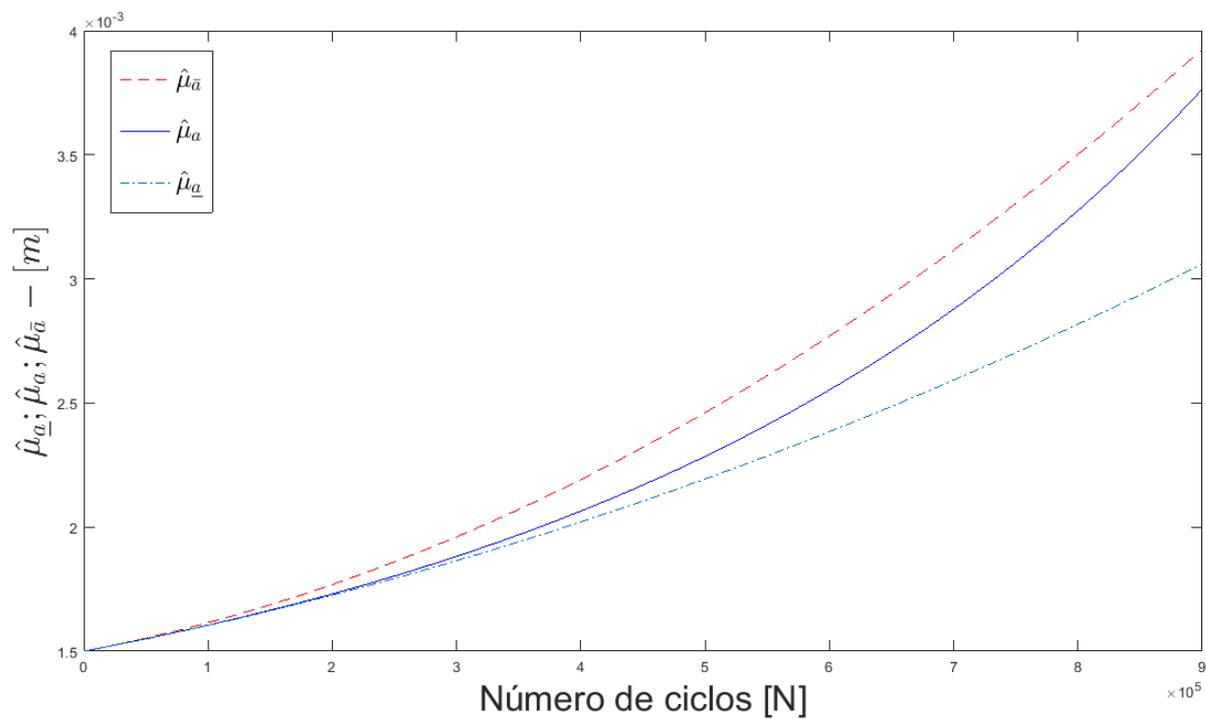


Figura 4.14 – Exemplo 2 – Primeiro momento estatístico –  $C_p.1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

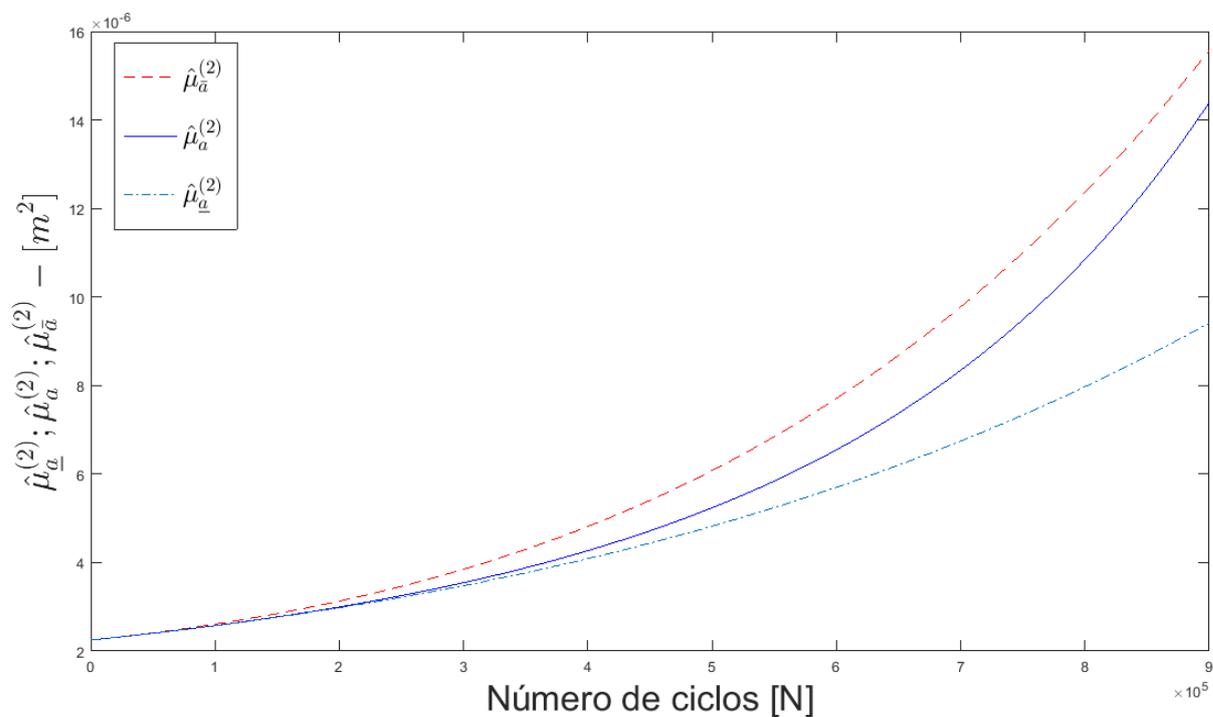


Figura 4.15 – Exemplo 2 – Segundo momento estatístico –  $C_p.1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

Para o caso  $C_p.1$ , é possível observar que os dois momentos estatísticos obtidos satisfazem as desigualdades da equação 2.12, sendo assim, atende-se à metodologia FCB. Os desvios relativos dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, para este caso, estão representados nas figuras 4.16 e 4.17, respectivamente.

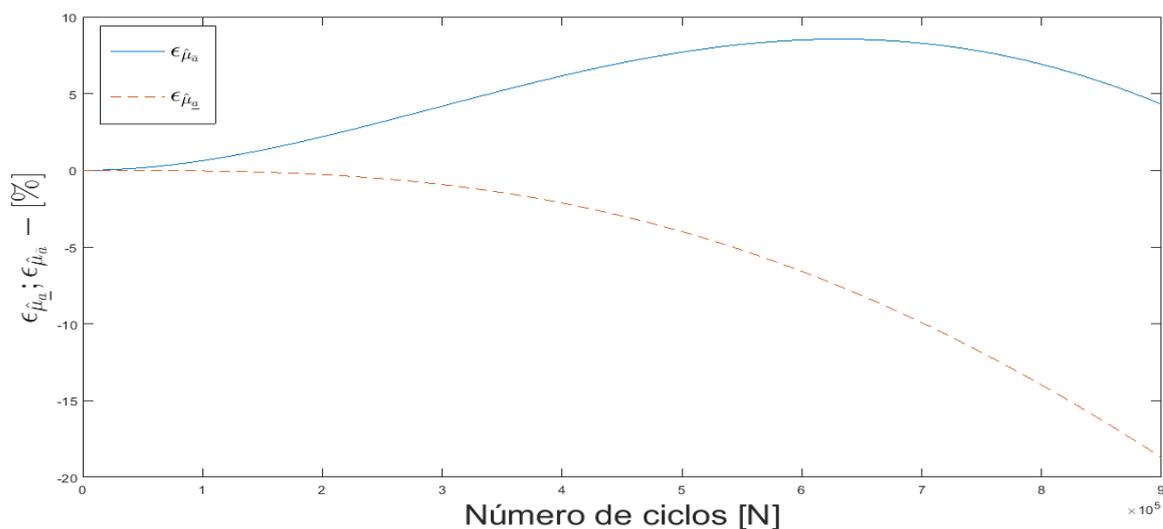


Figura 4.16 – Exemplo 2 – Desvios relativos – Primeiro momento estatístico –  $C_p.1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

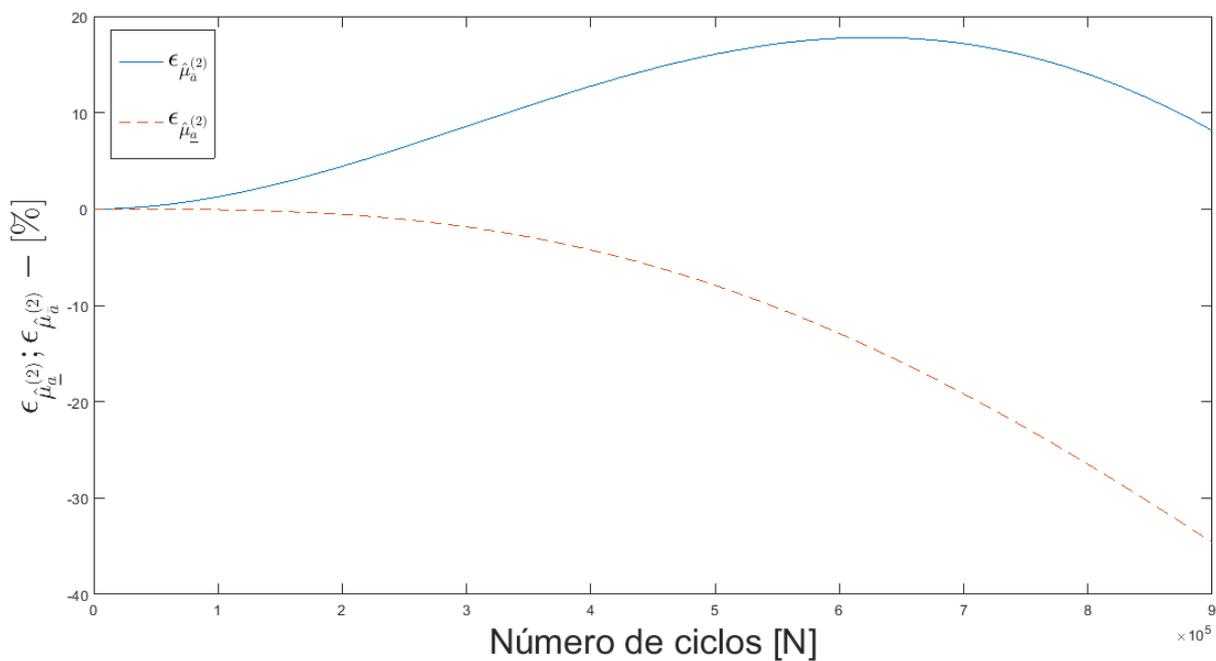


Figura 4.17 – Exemplo 2 – Desvios relativos – Segundo momento estatístico –  $C_p.1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

Para o primeiro momento estatístico, o máximo desvio para a cota superior é de 8,54%, enquanto para a cota inferior é de -18,68%. Para o segundo momento estatístico, o desvio relativo máximo para a cota superior é de 17,82% e para a cota inferior o desvio relativo mínimo é -34,57%.

O desvio relativo do estimador do valor esperado da Lei de Evolução de Trincas para o caso  $C_p.1$ , está representado na figura 4.18. Para este caso, é possível averiguar que o desvio relativo máximo para a cota superior é de 14,36% e para a cota inferior o desvio relativo mínimo é -26,68%.

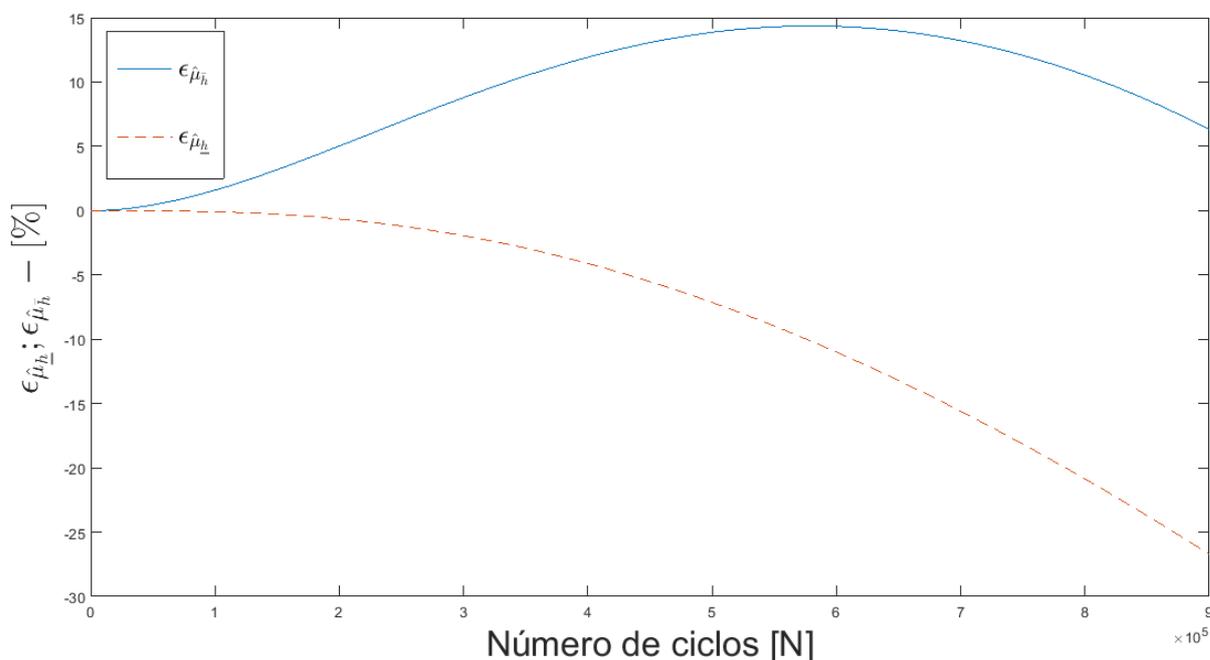


Figura 4.18 – Exemplo 2 – Desvio relativo – Lei de Evolução de Trincas –  $C_p.1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

Os casos  $m_p.1$  e  $K_c.1$  tiveram a cota superior violada para o segundo momento estatístico. Os valores de  $a^*$  foram ajustados para os casos  $m_p.1$  e  $K_c.1$ ,  $1,45a_0$  e  $1,41a_0$ , respectivamente.

Os demais parâmetros analisados no caso I, deste exemplo,  $\Delta K_{th}.1$  e  $a_0.1$ , apresentam resultados similares ao obtido pelo parâmetro  $C_p.1$ . Nas tabelas 4.10 e 4.11 estão apresentados os valores coletados das cotas e soluções numéricas para os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem.

Tabela 4.10 – Estimativa do primeiro momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a$ ) – Exemplo 2 – Caso I [ $10^{-3}$  m]

Parâmetros		N [ $10^5$ ciclos]								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_p$	$\bar{a}(N)$	1,61	1,76	1,95	2,19	2,46	2,76	3,11	3,49	3,92
	$a(N)$	1,60	1,73	1,88	2,06	2,28	2,55	2,87	3,27	3,76
	$\underline{a}(N)$	1,60	1,72	1,86	2,01	2,19	2,38	2,59	2,81	3,05
$m_p$	$\bar{a}(N)$	1,62	1,78	1,99	2,23	2,52	2,85	3,22	3,64	4,10
	$a(N)$	1,61	1,74	1,91	2,11	2,35	2,65	3,02	3,46	4,01
	$\underline{a}(N)$	1,61	1,74	1,89	2,06	2,25	2,46	2,68	2,93	3,20
$a_0$	$\bar{a}(N)$	1,61	1,77	1,96	2,19	2,46	2,76	3,11	3,49	3,91
	$a(N)$	1,60	1,73	1,88	2,06	2,28	2,55	2,87	3,27	3,75
	$\underline{a}(N)$	1,60	1,72	1,86	2,02	2,20	2,39	2,60	2,82	3,06
$K_c$	$\bar{a}(N)$	1,61	1,77	1,98	2,22	2,51	2,84	3,21	3,63	4,08
	$a(N)$	1,60	1,73	1,89	2,08	2,32	2,61	2,97	3,43	4,02
	$\underline{a}(N)$	1,60	1,73	1,87	2,03	2,21	2,41	2,63	2,86	3,12
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	1,61	1,77	1,96	2,20	2,47	2,78	3,13	3,52	3,95
	$a(N)$	1,60	1,73	1,89	2,07	2,30	2,57	2,91	3,32	3,82
	$\underline{a}(N)$	1,60	1,73	1,87	2,03	2,20	2,40	2,61	2,85	3,09

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.11 – Estimativa do segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ) – Exemplo 2 – Caso I [ $10^{-6}$  m<sup>2</sup>]

Parâmetros		N [ $10^5$ ciclos]								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_p$	$\bar{a}(N)$	2,60	3,12	3,84	4,80	6,07	7,70	9,76	12,35	15,55
	$a(N)$	2,57	2,99	3,54	4,26	5,23	6,54	8,33	10,83	14,37
	$\underline{a}(N)$	2,57	2,97	3,47	4,08	4,81	5,69	6,73	7,96	9,40
$m_p$	$\bar{a}(N)$	2,63	3,19	3,99	5,07	6,51	8,40	10,82	13,89	17,73
	$a(N)$	2,59	3,05	3,68	4,52	5,69	7,31	9,61	12,90	17,71
	$\underline{a}(N)$	2,59	3,03	3,59	4,29	5,15	6,20	7,47	8,99	10,81
$a_0$	$\bar{a}(N)$	2,64	3,18	3,91	4,88	6,14	7,76	9,81	12,36	15,51
	$a(N)$	2,61	3,05	3,62	4,37	5,38	6,73	8,59	11,15	14,77
	$\underline{a}(N)$	2,61	3,03	3,56	4,19	4,96	5,88	6,97	8,26	9,78
$K_c$	$\bar{a}(N)$	2,61	3,16	3,94	4,99	6,39	8,21	10,55	13,52	17,22
	$a(N)$	2,58	3,02	3,59	4,37	5,44	6,94	9,08	12,26	17,18
	$\underline{a}(N)$	2,58	3,00	3,52	4,16	4,93	5,87	6,99	8,32	9,88
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	2,61	3,15	3,89	4,90	6,22	7,93	10,11	12,84	16,22
	$a(N)$	2,58	3,02	3,59	4,37	5,42	6,87	8,88	11,72	15,82
	$\underline{a}(N)$	2,58	3,00	3,52	4,17	4,97	5,93	7,08	8,45	10,07

Fonte: Próprio Autor (2017)

A tabela 4.12 apresenta a relação dos tempos computacionais para a solução numérica – método de RK4 e das cotas – metodologia FCB, para os casos I do segundo exemplo.

Tabela 4.12 – Tempos computacionais – Exemplo 2 – Caso I			
Parâmetros	$\bar{a}$ e $\underline{a}$ [s]	$a$ [s]	$\rho = a / (\bar{a} \text{ e } \underline{a})$ [%]
$C_p$	8,98	377,78	4.206,90
$m_p$	9,37	375,97	4.012,48
$a_0$	91,89	377,88	411,23
$K_c$	8,92	380,06	4.260,76
$\Delta K_{th}$	8,89	373,58	4.202,24

Fonte: Próprio Autor (2017)

Assim como no exemplo 1, após analisar os dados para o caso I, apresenta-se abaixo os dados para o caso II.

Ao avaliar os casos  $a_0.3$  e  $m_p.3$ , observa-se que o estimador do segundo momento estatístico não satisfaz a desigualdade dada pela equação 2.12. Já para os casos  $C_p.3$  e  $\Delta K_{th}.3$ , a cota superior foi violada em ambos os estimadores dos momentos estatísticos avaliados.

Para satisfazer as desigualdades da equação 2.12, os valores de  $a^*$  para os casos  $a_0.3$ ,  $m_p.3$ ,  $C_p.3$  e  $\Delta K_{th}.3$ , foram alterados para  $\{1,65a_0, 2,15a_0, 1,50a_0 \text{ e } 1,85a_0\}$ , respectivamente. Com estas alterações, as estimativas dos momentos estatísticos, para as cotas superior e inferior, enveloparam as estimativas dos momentos estatísticos para a solução numérica dos casos apresentados.

A figura 4.19 apresenta o segundo momento estatístico para o caso  $a_0.3$ , após o ajuste no valor de  $a^*$ . Nas figuras 4.20 e 4.21 apresentam-se os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem para o caso  $\Delta K_{th}.3$ , com o valor de  $a^*$  ajustado.

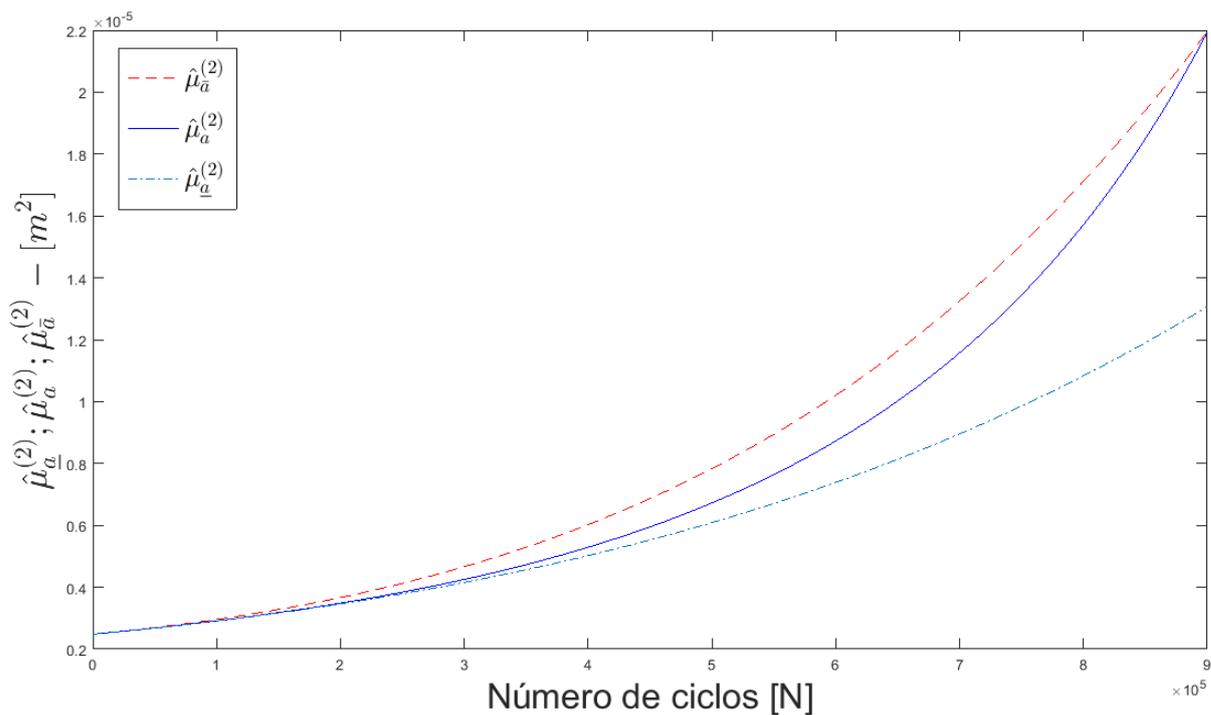


Figura 4.19 – Exemplo 2 – Segundo momento estatístico –  $a_0.3$

Fonte: Próprio Autor (2017)

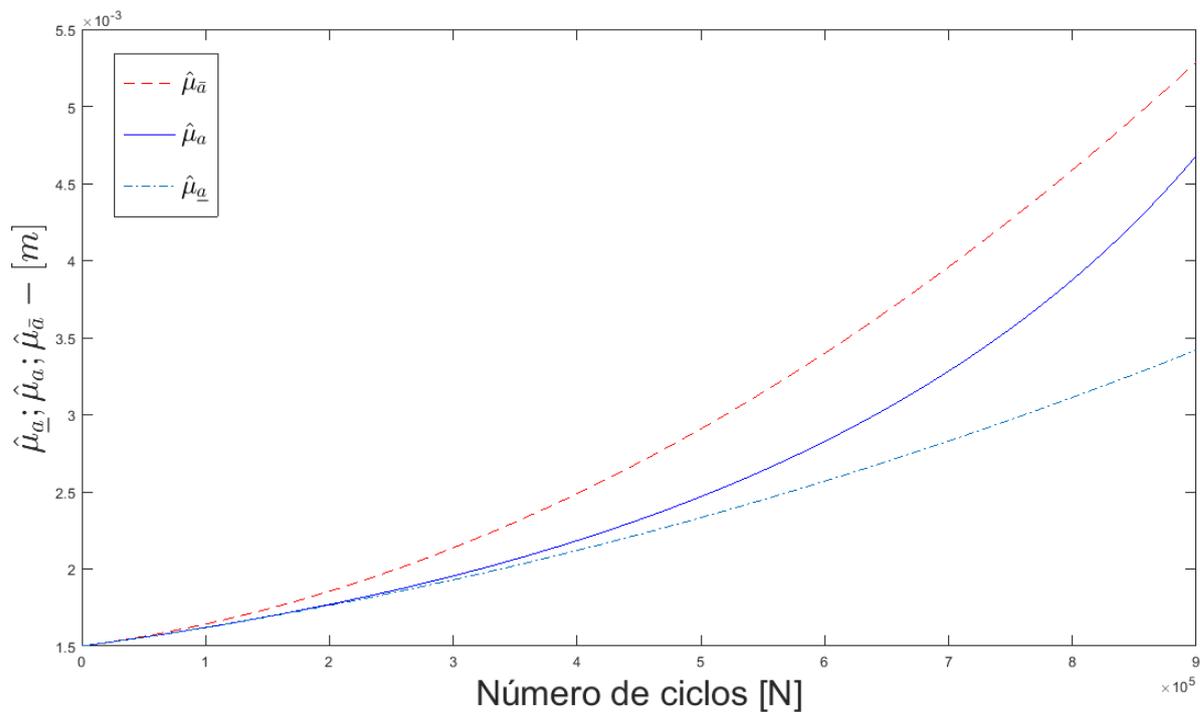


Figura 4.20 – Exemplo 2 – Primeiro momento estatístico –  $\Delta K_{th}.3$

Fonte: Próprio Autor (2017)

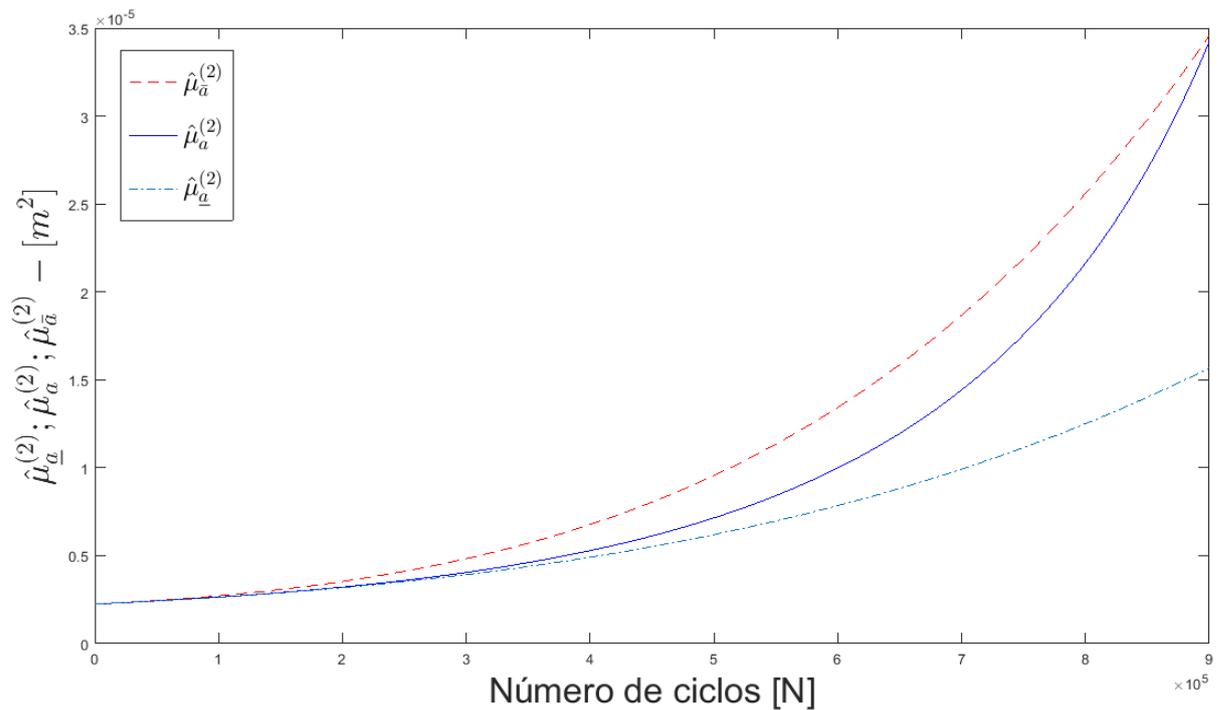


Figura 4.21 – Exemplo 2 – Segundo momento estatístico –  $\Delta K_{th}.3$

Fonte: Próprio Autor (2017)

De maneira similar ao exemplo 1, ao avaliar o caso  $K_c.3$ , para o primeiro momento estatístico, verificou-se um comportamento instável obtido do valor esperado da solução numérica. Em alguns pontos, a estimativa do primeiro momento estatístico para a evolução da trinca apresenta fechamento do tamanho de trinca. Assim como no exemplo 1, o modelo de propagação de Priddle é “instável”, com coeficiente de dispersão de 3/10 sobre o valor de  $K_c$ .

Nas tabelas 4.13 e 4.14 é possível verificar os valores obtidos das cotas superior, inferior e solução numérica no primeiro e segundo momento estatístico, para todos os casos II avaliados.

Tabela 4.13 – Estimativa do primeiro momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a$ ) – Exemplo 2 – Caso II [ $10^{-3}$  m]

Parâmetros		N [ $10^5$ ciclos]								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_p$	$\bar{a}(N)$	1,61	1,78	2,00	2,26	2,57	2,93	3,33	3,79	4,29
	$a(N)$	1,60	1,73	1,89	2,08	2,32	2,63	3,01	3,50	4,14
	$\underline{a}(N)$	1,60	1,72	1,87	2,03	2,21	2,40	2,62	2,85	3,11
$m_p$	$\bar{a}(N)$	1,69	2,00	2,40	2,91	3,53	4,24	5,06	5,98	7,01
	$a(N)$	1,67	1,89	2,18	2,55	3,00	3,55	4,23	5,08	6,17
	$\underline{a}(N)$	1,67	1,88	2,15	2,46	2,82	3,23	3,69	4,19	4,74
$a_0$	$\bar{a}(N)$	1,63	1,81	2,04	2,32	2,66	3,05	3,49	3,99	4,53
	$a(N)$	1,61	1,75	1,91	2,10	2,34	2,62	2,98	3,42	3,97
	$\underline{a}(N)$	1,61	1,74	1,89	2,05	2,24	2,44	2,66	2,90	3,16
$K_c$	$\bar{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	$a(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	1,64	1,85	2,13	2,48	2,90	3,39	3,95	4,58	5,28
	$a(N)$	1,62	1,76	1,95	2,18	2,46	2,82	3,28	3,87	4,67
	$\underline{a}(N)$	1,61	1,76	1,92	2,11	2,33	2,56	2,82	3,11	3,41

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.14 – Estimativa do segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ) – Exemplo 2 – Caso II [ $10^{-6}$  m<sup>2</sup>]

Parâmetros		N [ $10^5$ ciclos]								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_p$	$\bar{a}(N)$	2,62	3,20	4,04	5,23	6,85	9,02	11,87	15,54	20,22
	$a(N)$	2,57	3,01	3,60	4,41	5,56	7,23	9,72	13,58	19,88
	$\underline{a}(N)$	2,57	2,99	3,51	4,16	4,95	5,92	7,09	8,49	10,15
$m_p$	$\bar{a}(N)$	2,92	4,20	6,38	9,86	15,14	22,80	33,54	48,14	67,49
	$a(N)$	2,82	3,76	5,30	7,73	11,54	17,45	26,59	40,94	64,53
	$\underline{a}(N)$	2,82	3,72	5,10	7,14	10,06	14,11	19,58	26,79	36,10
$a_0$	$\bar{a}(N)$	2,95	3,66	4,66	6,01	7,82	10,19	13,23	17,10	21,93
	$a(N)$	2,91	3,48	4,24	5,28	6,71	8,71	11,55	15,69	21,90
	$\underline{a}(N)$	2,90	3,45	4,15	5,01	6,08	7,38	8,94	10,82	13,05
$K_c$	$\bar{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	$a(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	2,71	3,53	4,82	6,76	9,54	13,41	18,64	25,56	34,51
	$a(N)$	2,64	3,21	4,04	5,28	7,13	9,96	14,39	21,59	34,16
	$\underline{a}(N)$	2,63	3,18	3,92	4,90	6,19	7,83	9,91	12,49	15,66

Fonte: Próprio Autor (2017)

A tabela 4.15 apresenta a relação dos tempos computacionais para a solução numérica – método de RK4 e das cotas – metodologia FCB, para os casos II.

Tabela 4.15 – Tempos computacionais – Exemplo 2 – Caso II			
Parâmetros	$\bar{a}$ e $\underline{a}$ [s]	$a$ [s]	$\rho = a / (\bar{a} \text{ e } \underline{a})$ [%]
$C_p$	8,72	362,65	4.158,83
$m_p$	8,77	362,84	4.137,28
$a_0$	90,70	532,45	587,04
$K_c$	8,90	738,37	8.296,29
$\Delta K_{th}$	8,91	551,51	6.189,78

Fonte: Próprio Autor (2017)

Nas tabelas 4.16, 4.17 e 4.18 a seguir, estão apresentados os desvios relativos do primeiro momento estatístico, segundo momento estatístico e valor esperado da Lei de Evolução da Trinca, respectivamente.

Tabela 4.16 – Desvio relativo do primeiro momento estatístico ( $\varepsilon_{\hat{\mu}_a}$ ) – Exemplo 2 [%]									
Parâmetros		Caso I				Caso II			
		$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$	$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$
$C_p$	$\bar{a}(N)$	0,64	4,17	8,48	4,30	0,85	5,73	11,37	3,53
	$\underline{a}(N)$	-0,03	-0,92	-6,57	-18,68	-0,04	-1,17	-8,53	-24,92
$m_p$	$\bar{a}(N)$	0,63	4,10	7,57	2,03	1,59	9,93	19,50	13,67
	$\underline{a}(N)$	-0,04	-1,07	-7,34	-20,16	-0,07	-1,55	-8,88	-23,12
$a_0$	$\bar{a}(N)$	0,61	4,08	8,35	4,40	1,00	7,01	16,25	14,17
	$\underline{a}(N)$	-0,03	-0,90	-6,41	-18,23	-0,03	-0,97	-7,02	-20,48
$K_c$	$\bar{a}(N)$	0,69	4,57	8,71	15,51	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-0,04	-1,06	-7,65	-22,41	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	0,61	4,05	8,00	3,24	1,36	9,31	20,21	12,98
	$\underline{a}(N)$	-0,03	-0,95	-6,70	-19,05	-0,04	-1,26	-9,09	-26,89

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.17 – Desvio relativo do segundo momento estatístico ( $\varepsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)}}$ ) – Exemplo 2									
[%]									
Parâmetros		Caso I				Caso II			
		$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$	$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$
$C_p$	$\bar{a}(N)$	1,25	8,55	17,73	8,17	1,73	12,27	24,73	1,68
	$\underline{a}(N)$	-0,07	-1,85	-12,90	-34,57	-0,09	-2,46	-18,04	-48,93
$m_p$	$\bar{a}(N)$	1,28	8,42	14,87	0,09	3,21	19,07	27,59	1,40
	$\underline{a}(N)$	-0,08	-2,23	-15,18	-38,94	-0,15	-3,60	-19,03	-43,93
$a_0$	$\bar{a}(N)$	1,17	7,80	15,23	5,03	1,53	9,69	16,92	0,16
	$\underline{a}(N)$	-0,07	-1,84	-12,69	-33,79	-0,08	-2,24	-15,32	-40,39
$K_c$	$\bar{a}(N)$	1,39	9,49	18,31	0,23	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-0,08	-2,15	-15,37	-42,46	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	1,23	8,22	15,46	2,52	2,79	19,24	34,54	1,02
	$\underline{a}(N)$	-0,07	-1,95	-13,66	-36,35	-0,09	-3,04	-21,40	-54,16

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.18 – Desvio relativo da Lei de Evolução da Trinca para o primeiro momento estatístico ( $\varepsilon_{\hat{\mu}_h}$ ) – Exemplo 2 [%]									
Parâmetros		Caso I				Caso II			
		$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$	$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$
$C_p$	$\bar{a}(N)$	1,57	8,77	14,33	6,33	2,16	12,01	18,93	5,11
	$\underline{a}(N)$	-0,09	-1,94	-10,97	-26,68	-0,11	-2,45	-14,00	-34,58
$m_p$	$\bar{a}(N)$	1,67	8,89	13,13	3,08	5,47	27,32	44,71	30,45
	$\underline{a}(N)$	-0,11	-2,31	-12,52	-29,41	-0,24	-4,07	-18,04	-41,39
$a_0$	$\bar{a}(N)$	1,54	8,57	14,09	6,46	2,50	14,54	27,20	20,95
	$\underline{a}(N)$	-0,08	-1,89	-10,70	-26,06	-0,09	-2,01	-11,54	-28,83
$K_c$	$\bar{a}(N)$	1,76	9,66	14,81	2,31	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-0,10	-2,23	-12,79	-32,05	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	1,94	9,98	14,77	5,01	1,83	11,85	24,50	16,09
	$\underline{a}(N)$	-0,11	-2,32	-12,22	-28,56	-0,05	-1,60	-10,83	-31,21

Fonte: Próprio Autor (2017)

### Exemplo 3 – Placa finita – Trinca Aresta – Modelo de Priddle

No terceiro exemplo, considera-se uma placa com largura finita e uma trinca na aresta, figura 4.22. Sendo a função de correção do fator de intensidade de tensão dado por (BANNANTINE et al., 1989), equação (4.8):

$$f(a) = 1,122 - 0,231\left(\frac{a}{b}\right) + 10,55\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21,72\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30,39\left(\frac{a}{b}\right)^4. \quad (4.8)$$

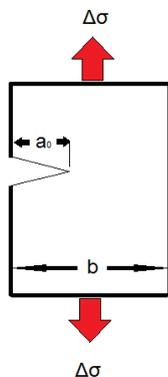


Figura 4.22 – Exemplo 3 – Placa finita – Trinca aresta  
Fonte: Próprio Autor (2017)

Para o caso  $a_0.1$  do exemplo 3, a cota superior do primeiro momento estatístico foi violada pela estimativa da solução numérica. Para este caso, foi utilizado o valor de  $a^* = 2a_0$ . Desta forma, as cotas para o primeiro e segundo momento estatístico atendem as desigualdades da equação 2.12. Nas figuras 4.23 e 4.24 estão apresentados os gráficos dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem para o caso  $a_0.1$ , após ajuste do  $a^*$ .

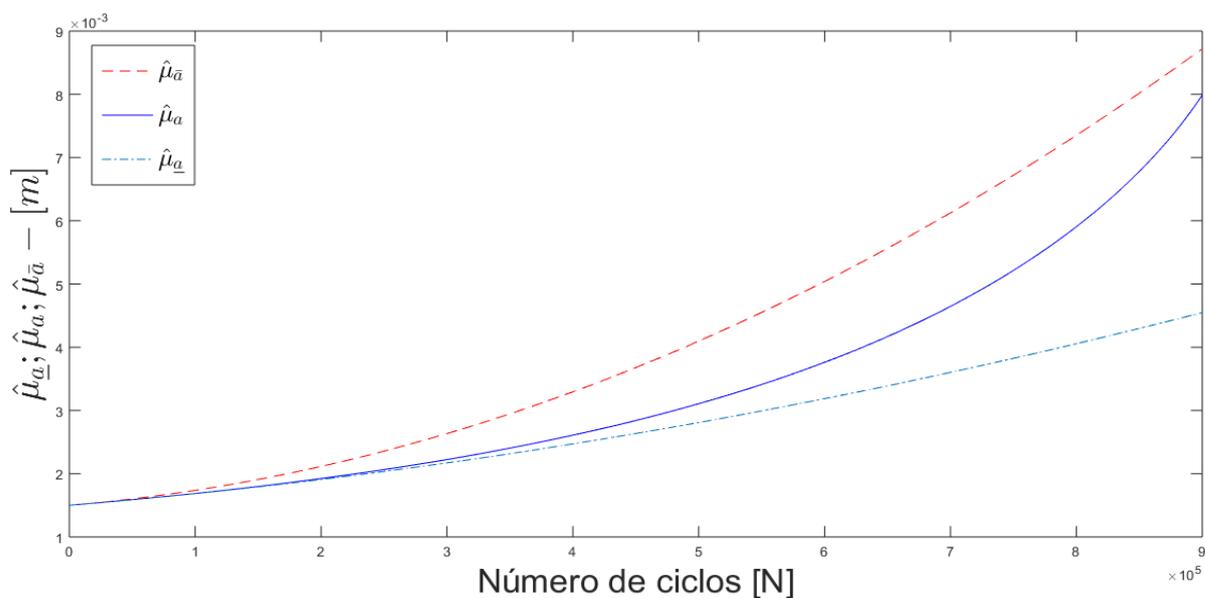


Figura 4.23 – Exemplo 3 – Primeiro momento estatístico –  $a_0.1$   
Fonte: Próprio Autor (2017)

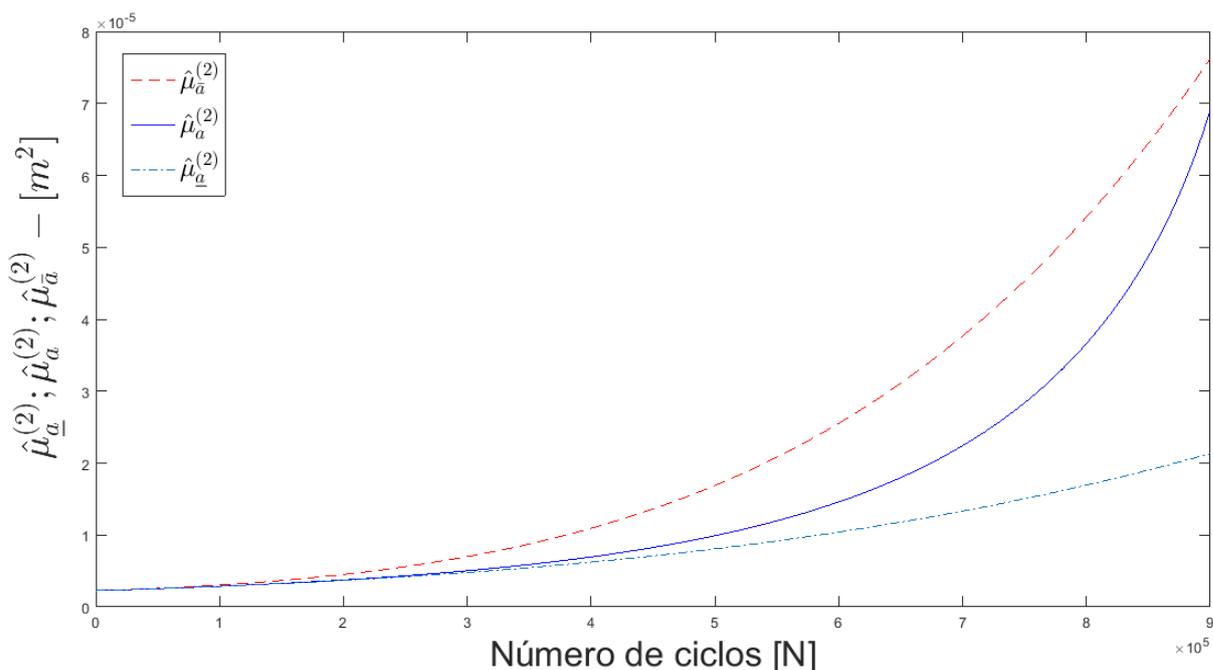


Figura 4.24 – Exemplo 3 – Segundo momento estatístico –  $a_0.1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

Nos casos  $C_p.1$ ,  $m_p.1$  e  $\Delta K_{th}.1$  deste exemplo, o segundo momento estatístico para a solução numérica, torna-se uma assíntota vertical quando se aproximada de 900.000 ciclos, na figura 4.25 é possível observar este comportamento para o caso  $C_p.1$ . Este comportamento é característico quando a solução da Lei de Evolução de Trincas atinge a região III da curva sigmoidal, figura 4.26, caso  $C_p.1$ .

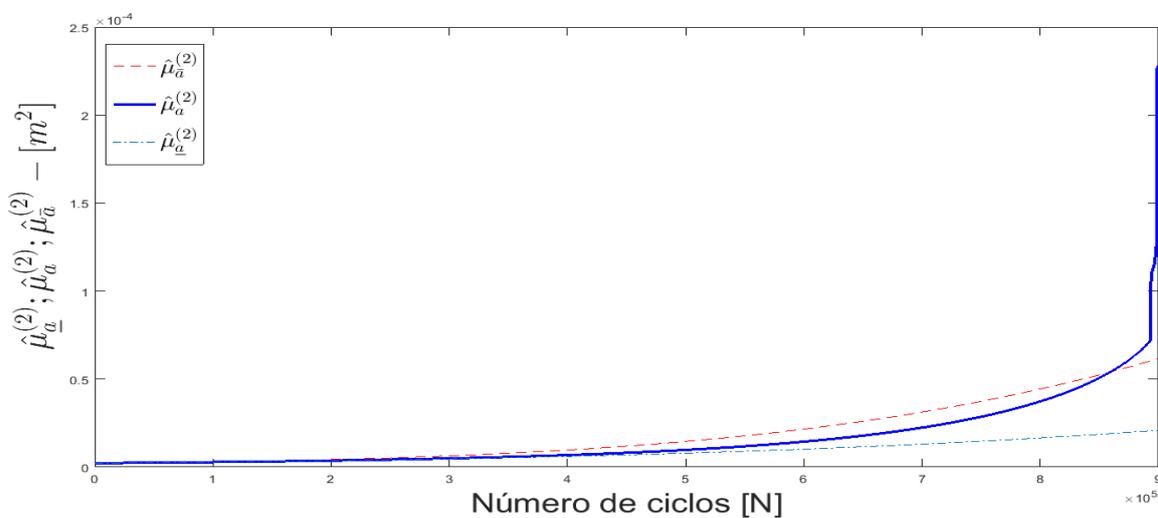


Figura 4.25 – Exemplo 3 – Segundo momento estatístico –  $C_p.1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

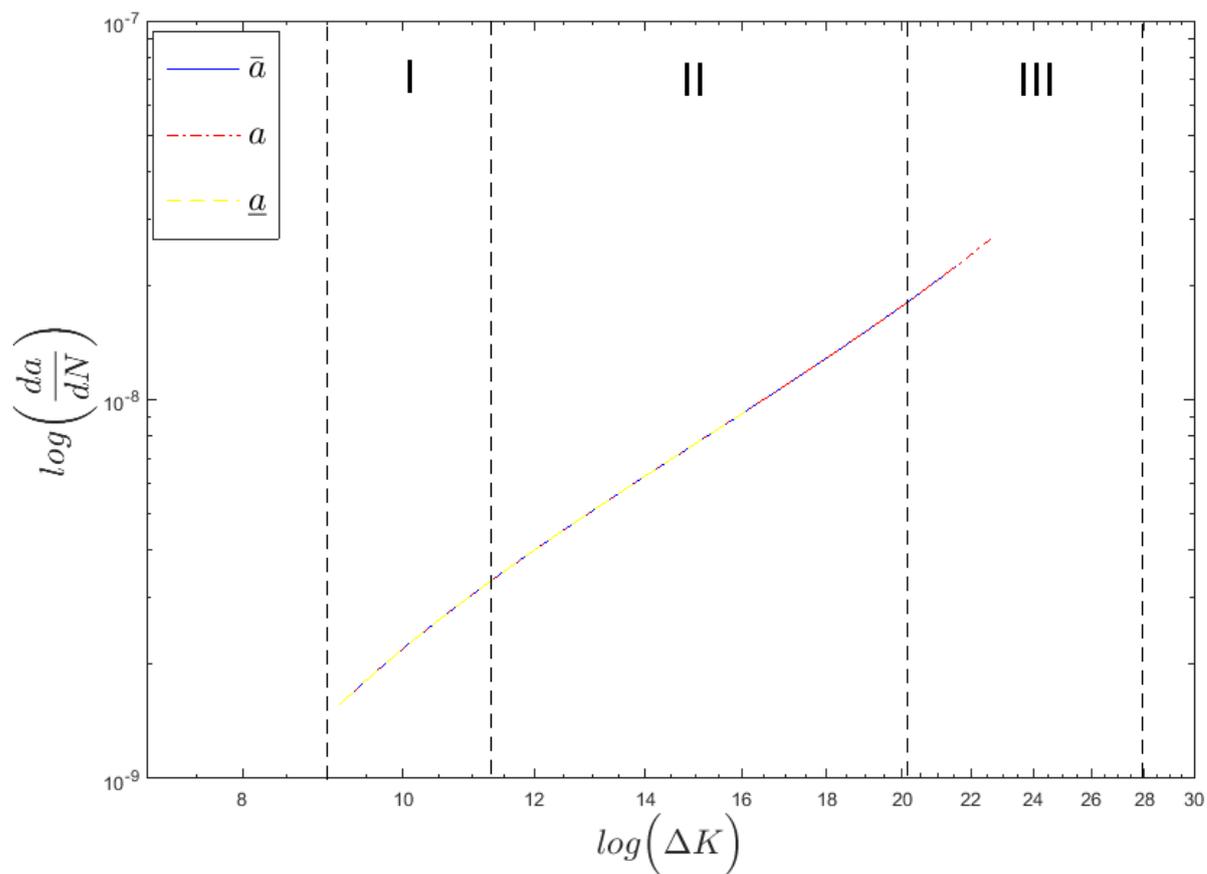


Figura 4.26 – Exemplo 3 –  $\log(da/dN) \times \log(\Delta K) - C_p .1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

Apenas a mudança no valor de  $a^*$  para os casos  $C_p .1$ ,  $m_p .1$  e  $\Delta K_{th} .1$ , não é a solução para o problema da cota superior, visto o crescimento abrupto do segundo momento estatístico. Estes casos foram avaliados até 850.000 ciclos.

Para o caso  $m_p .1$ , foi utilizado o valor de  $a^*=2a_0$  e para o caso  $\Delta K_{th} .1$ ,  $a^*=1,9a_0$ . Após estas considerações, as cotas enveloparam a solução numérica, conforme pode ser observado nas tabelas 4.19 e 4.20.

Para o caso  $K_c .1$ , a solução numérica demonstrou-se instável após 650.000 ciclos. Sendo assim, para este caso, foi realizada uma quantificação da incerteza até o ciclo 650.000, figura 4.27.

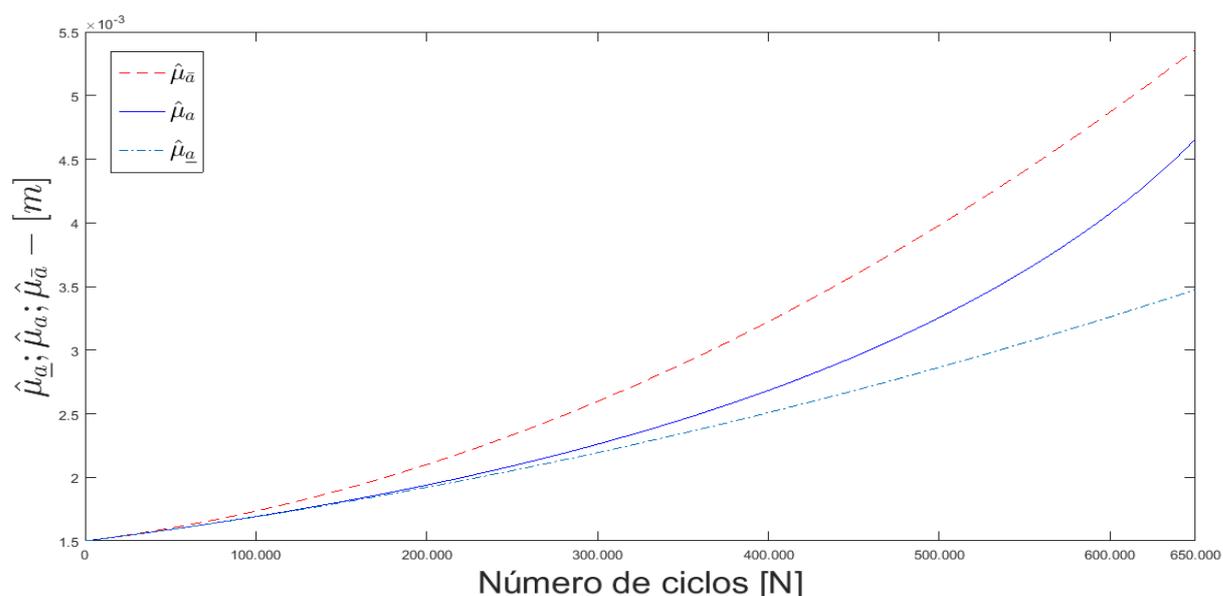


Figura 4.27 – Exemplo 3 – Primeiro momento estatístico –  $K_c .1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

Nas tabelas 4.19 e 4.20, encontram-se os valores para o primeiro e segundo momento estatístico, avaliados no exemplo 3 – Caso I.

Tabela 4.19 – Estimativa do primeiro momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a$ ) – Exemplo 3 – Caso I [ $10^{-3}$ m]										
Parâmetros		N [ $10^5$ ciclos]								
		1	2	3	4	5	6	7 <sup>1</sup>	8	9 <sup>2</sup>
$C_p$	$\bar{a}(N)$	1,72	2,06	2,52	3,10	3,79	4,61	5,54	6,59	7,16
	$a(N)$	1,68	1,92	2,22	2,60	3,10	3,77	4,67	5,97	6,90
	$\underline{a}(N)$	1,68	1,90	2,16	2,46	2,80	3,18	3,59	4,05	4,29
$m_p$	$\bar{a}(N)$	1,74	2,12	2,65	3,32	4,14	5,10	6,20	7,45	8,13
	$a(N)$	1,69	1,94	2,25	2,66	3,19	3,89	4,85	6,25	7,32
	$\underline{a}(N)$	1,69	1,92	2,19	2,51	2,87	3,27	3,71	4,20	4,45
$a_0$	$\bar{a}(N)$	1,73	2,11	2,63	3,29	4,09	5,03	6,11	7,34	8,71
	$a(N)$	1,68	1,92	2,22	2,60	3,10	3,75	4,64	5,89	7,97
	$\underline{a}(N)$	1,68	1,90	2,16	2,46	2,80	3,18	3,60	4,05	4,54
$K_c$	$\bar{a}(N)$	1,73	2,09	2,59	3,22	3,97	4,86	5,35	-	-
	$a(N)$	1,69	1,93	2,25	2,68	3,25	4,06	4,65	-	-
	$\underline{a}(N)$	1,68	1,92	2,19	2,50	2,86	3,25	3,47	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	1,72	2,08	2,57	3,19	3,94	4,82	5,83	6,97	7,59
	$a(N)$	1,68	1,92	2,22	2,61	3,12	3,78	4,69	6,02	7,00
	$\underline{a}(N)$	1,68	1,90	2,17	2,47	2,81	3,19	3,61	4,07	4,31

Fonte: Próprio Autor (2017)

<sup>1</sup> Caso  $K_c .1$  é avaliado até o ciclo 650.000.

<sup>2</sup> Casos  $C_p .1$ ,  $m_p .1$  e  $\Delta K_{th} .1$  são avaliados até o ciclo 850.000.

Tabela 4.20 – Estimativa do segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ) – Exemplo 3 – Caso I [ $10^{-6}$ m <sup>2</sup> ]										
Parâmetros		N [ $10^5$ ciclos]								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_p$	$\bar{a}(N)$	2,96	4,26	6,39	9,68	14,56	21,54	31,21	44,26	52,28
	$a(N)$	2,84	3,69	4,94	6,83	9,74	14,42	22,35	37,16	50,43
	$\underline{a}(N)$	2,83	3,63	4,70	6,10	7,90	10,18	13,04	16,56	18,61
$m_p$	$\bar{a}(N)$	3,03	4,54	7,13	11,26	17,55	26,73	39,66	57,35	68,32
	$a(N)$	2,86	3,78	5,15	7,26	10,60	16,04	25,45	43,80	62,37
	$\underline{a}(N)$	2,86	3,72	4,88	6,44	8,47	11,09	14,41	18,55	20,98
$a_0$	$\bar{a}(N)$	3,04	4,51	6,98	10,91	16,85	25,48	37,60	54,13	76,11
	$a(N)$	2,88	3,75	5,03	6,94	9,89	14,57	22,37	36,53	68,88
	$\underline{a}(N)$	2,87	3,69	4,79	6,22	8,06	10,40	13,32	16,91	21,31
$K_c$	$\bar{a}(N)$	3,00	4,42	6,82	10,63	16,42	24,85	30,30	-	-
	$a(N)$	2,86	3,76	5,13	7,29	10,89	17,61	23,84	-	-
	$\underline{a}(N)$	2,85	3,69	4,82	6,33	8,28	10,78	12,27	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	2,99	4,38	6,70	10,35	15,81	23,69	34,70	49,63	58,85
	$a(N)$	2,84	3,71	5,00	6,95	9,98	14,87	23,23	39,21	54,31
	$\underline{a}(N)$	2,84	3,65	4,75	6,20	8,07	10,45	13,45	17,15	19,31

Fonte: Próprio Autor (2017)

A tabela 4.21 apresenta a relação dos tempos computacionais para a solução numérica – método de RK4 e das cotas – metodologia FCB, para os casos I.

Tabela 4.21 – Tempos computacionais – Exemplo 3 – Caso I			
Parâmetros	$\bar{a}$ e $\underline{a}$ [s]	$a$ [s]	$\rho = a / (\bar{a} \text{ e } \underline{a})$ [%]
$C_p$	8,51	382,25	4.491,77
$m_p$	8,46	391,62	4.629,07
$a_0$	94,28	401,27	425,61
$K_c$	6,52	299,78	4.597,85
$\Delta K_{th}$	8,49	374,74	4.413,89

Fonte: Próprio Autor (2017)

Nos casos  $a_0.3$ ,  $m_p.3$ ,  $C_p.3$  e  $\Delta K_{th}.3$ , quando estão próximos a 700.000 ciclos, o segundo momento estatístico torna-se uma assíntota vertical, sendo assim, nestes casos o intervalo de análise foi modificado.

Para o caso  $m_p .3$ , utiliza-se  $a^* = 2,5a_0$ , nas figuras 4.28 e 4.29, têm-se os gráficos dos estimadores dos momentos estatísticos, primeira e segunda ordem, respectivamente.

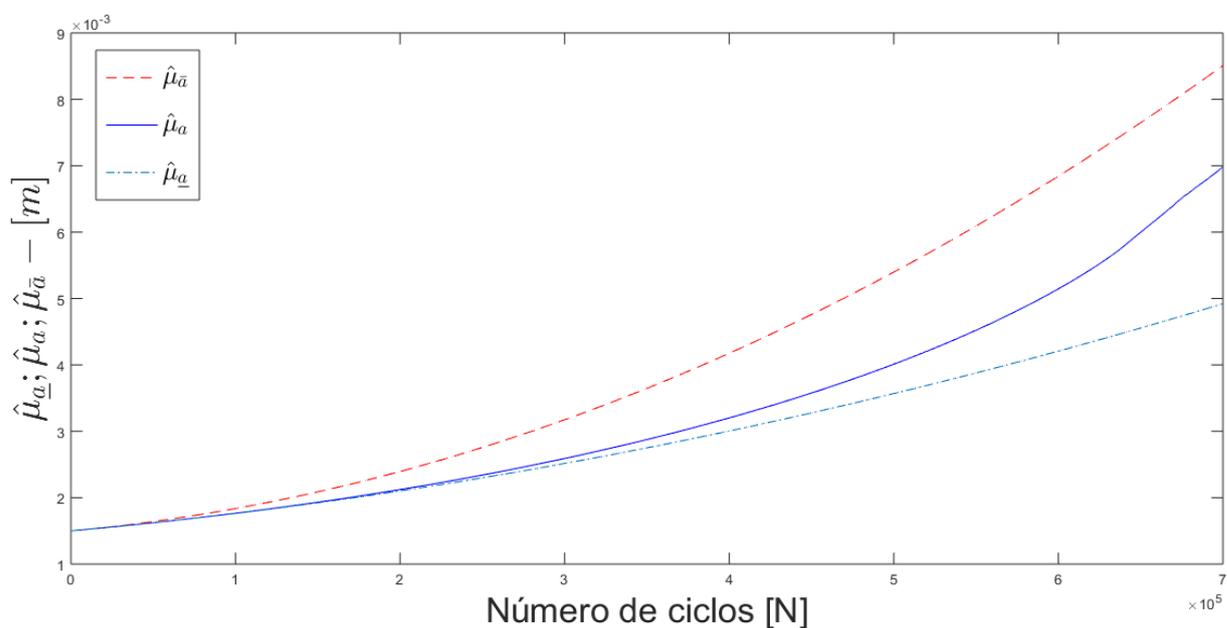


Figura 4.28 – Exemplo 3 – Primeiro momento estatístico –  $m_p .3$

Fonte: Próprio Autor (2017)

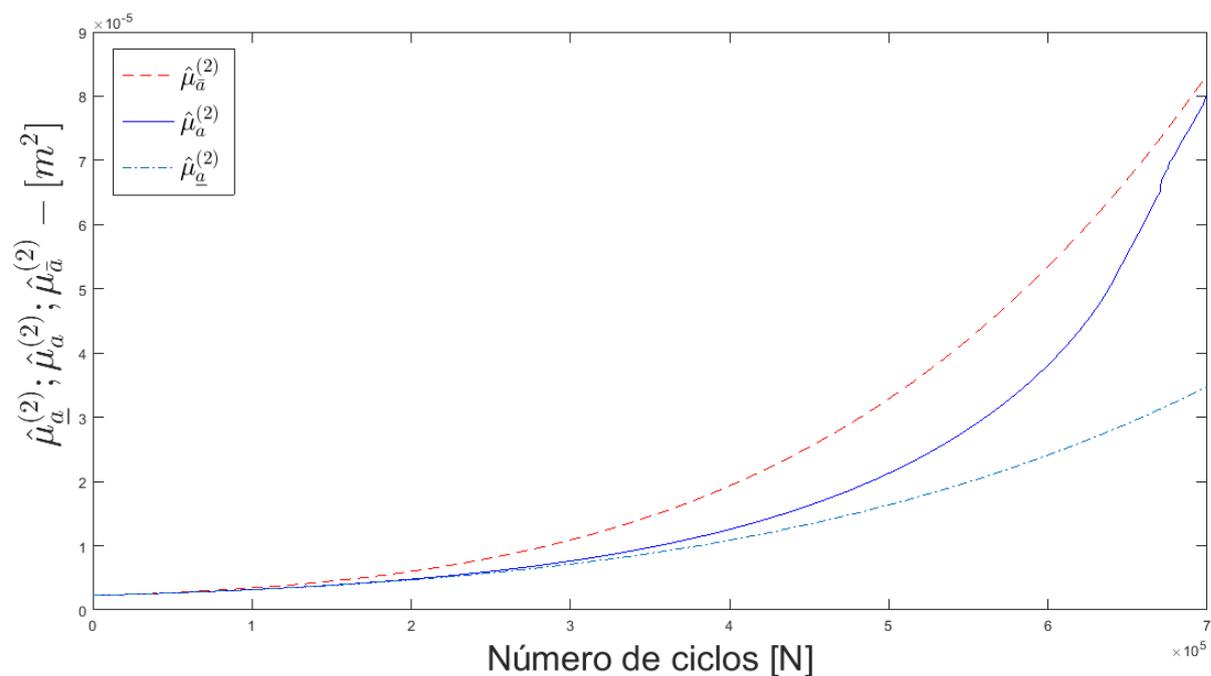


Figura 4.29 – Exemplo 3 – Segundo momento estatístico –  $m_p .3$

Fonte: Próprio Autor (2017)

Também cabe ressaltar, que apesar de estar verificando até o ciclo 700.000, o caso  $m_p.3$  atinge as três regiões do gráfico  $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$ , figura 4.30.

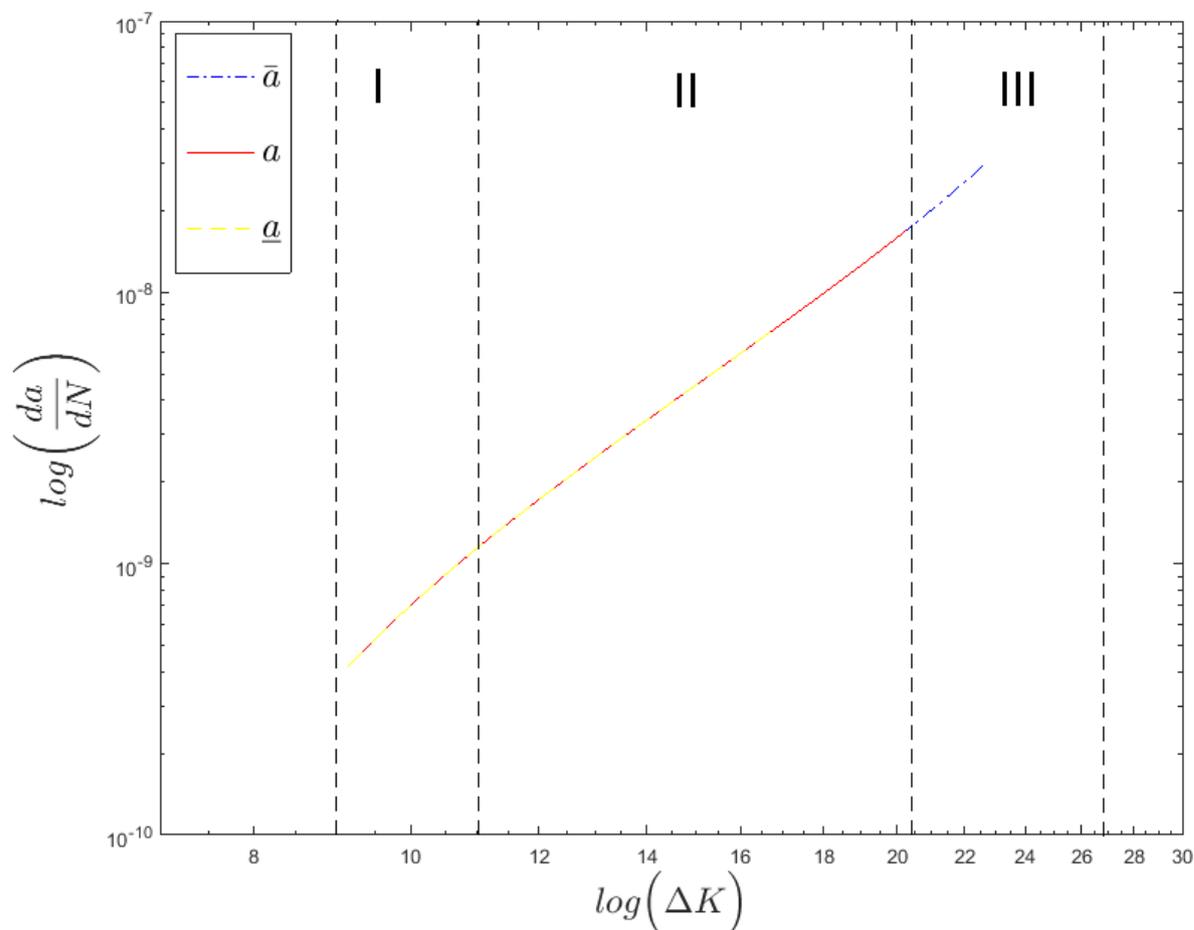


Figura 4.30 – Exemplo 3 –  $\log(da/dN) \times \log(\Delta K) - m_p.3$

Fonte: Próprio Autor (2017)

De maneira análoga ao caso  $m_p.3$ , o caso  $a_0.3$  foi avaliado até o ciclo 700.000 e  $a^* = 1,9a_0$ . Já os casos  $C_p.3$  e  $\Delta K_{th}.3$  foram avaliados até o ciclo 650.000, e para  $\Delta K_{th}.3$  foi utilizado  $a^* = 1,9a_0$ . Nas tabelas 4.22 e 4.23, estão descritos os valores dos momentos estatísticos, para os parâmetros analisados.

Assim como nos exemplos 1 e 2, para o caso  $K_c.3$ , o estimador da solução numérica teve comportamento instável, não sendo possível quantificar a incerteza deste parâmetro com o coeficiente de dispersão de  $\delta_{K_c} = 3/10$ .

Tabela 4.22 – Estimativa do primeiro momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a$ ) – Exemplo 3 – Caso II [ $10^{-3}$  m]

Parâmetros		N [ $10^5$ ciclos]						
		1	2	3	4	5	6	7 <sup>3</sup>
$C_p$	$\bar{a}(N)$	1,72	2,08	2,56	3,18	3,92	4,78	5,27
	$a(N)$	1,68	1,93	2,25	2,68	3,27	4,12	4,73
	$\underline{a}(N)$	1,68	1,91	2,18	2,49	2,84	3,24	3,45
$m_p$	$\bar{a}(N)$	1,83	2,39	3,16	4,16	5,39	6,83	8,49
	$a(N)$	1,76	2,12	2,58	3,19	4,00	5,13	6,97
	$\underline{a}(N)$	1,76	2,09	2,51	3,00	3,56	4,20	4,91
$a_0$	$\bar{a}(N)$	1,73	2,09	2,58	3,19	3,94	4,82	5,82
	$a(N)$	1,68	1,92	2,23	2,64	3,17	3,91	5,03
	$\underline{a}(N)$	1,68	1,91	2,18	2,48	2,83	3,21	3,64
$K_c$	$\bar{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-
	$a(N)$	-	-	-	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	1,73	2,11	2,62	3,26	4,04	4,95	5,46
	$a(N)$	1,69	1,95	2,28	2,73	3,33	4,22	4,88
	$\underline{a}(N)$	1,69	1,93	2,21	2,54	2,92	3,33	3,56

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.23 – Estimativa do segundo momento estatístico para tamanho de trinca das cotas e solução numérica ( $\hat{\mu}_a^{(2)}$ ) – Exemplo 3 – Caso II [ $10^{-6}$  m<sup>2</sup>]

Parâmetros		N [ $10^5$ ciclos]						
		1	2	3	4	5	6	7
$C_p$	$\bar{a}(N)$	2,99	4,40	6,81	10,69	16,64	25,37	31,04
	$a(N)$	2,85	3,75	5,17	7,48	11,52	19,39	26,79
	$\underline{a}(N)$	2,84	3,68	4,82	6,36	8,39	11,01	12,58
$m_p$	$\bar{a}(N)$	3,41	5,98	10,86	19,27	32,81	53,37	83,21
	$a(N)$	3,15	4,77	7,60	12,52	21,24	38,04	79,94
	$\underline{a}(N)$	3,15	4,67	7,11	10,84	16,31	24,08	34,71
$a_0$	$\bar{a}(N)$	3,29	4,79	7,23	10,97	16,49	24,39	35,33
	$a(N)$	3,16	4,23	5,83	8,34	12,42	19,55	34,36
	$\underline{a}(N)$	3,16	4,15	5,50	7,30	9,64	12,64	16,44
$K_c$	$\bar{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-
	$a(N)$	-	-	-	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-	-	-	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	3,05	4,61	7,31	11,66	18,30	28,01	34,29
	$a(N)$	2,90	3,93	5,60	8,41	13,38	23,24	32,99
	$\underline{a}(N)$	2,89	3,85	5,22	7,13	9,73	13,17	15,27

Fonte: Próprio Autor (2017)

<sup>3</sup> Casos  $C_p$ .3 e  $\Delta K_{th}$ .3 são avaliados até o ciclo 650.000.

A tabela 4.24 apresenta a relação dos tempos computacionais para a solução numérica – método de RK4 e das cotas – metodologia FCB, para os casos II.

Parâmetros	$\bar{a}$ e $\underline{a}$ [s]	$a$ [s]	$\rho = a / (\bar{a} \text{ e } \underline{a})$ [%]
$C_p$	6,84	291,46	4.261,11
$m_p$	7,03	444,57	6.323,89
$a_0$	92,56	432,24	466,98
$K_c$	8,95	582,05	6.503,35
$\Delta K_{th}$	7,03	406,71	5.785,34

Fonte: Próprio Autor (2017)

Nas tabelas 4.25 à 4.27 a seguir, encontram-se os valores obtidos para os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, para o tamanho de trinca e Lei de Evolução da Trinca.

Parâmetros		Caso I				Caso II			
		$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$	$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$7.10^5$
$C_p$	$\bar{a}(N)$	2,23	13,61	22,27	3,80	2,39	14,00	16,03	11,24
	$\underline{a}(N)$	-0,10	-2,43	-15,60	-37,77	-0,12	-3,12	-21,44	-27,07
$m_p$	$\bar{a}(N)$	2,86	17,67	30,99	10,99	3,97	22,49	33,01	21,89
	$\underline{a}(N)$	-0,10	-2,55	-15,95	-39,14	-0,13	-2,88	-18,17	-29,46
$a_0$	$\bar{a}(N)$	2,92	18,39	33,98	9,25	2,51	15,28	23,26	15,68
	$\underline{a}(N)$	-0,09	-2,38	-15,25	-42,98	-0,10	-2,61	-17,76	-27,70
$K_c$	$\bar{a}(N)$	2,49	14,85	19,57	-	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-0,11	-2,89	-19,90	-	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	2,56	15,84	27,45	8,36	2,50	14,64	17,32	11,91
	$\underline{a}(N)$	-0,10	-2,43	-15,59	-38,36	-0,12	-3,01	-20,98	-27,00

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.26 – Desvio relativo do segundo momento estatístico ( $\varepsilon_{\hat{\mu}_a^{(2)}}$ ) – Exemplo 3 [%]									
Parâmetros		Caso I				Caso II			
		$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$	$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$7.10^5$
$C_p$	$\bar{a}(N)$	4,53	29,30	49,30	3,68	4,96	31,74	30,79	15,88
	$\underline{a}(N)$	-0,20	-4,86	-29,38	-63,08	-0,25	-6,66	-43,22	-53,01
$m_p$	$\bar{a}(N)$	5,83	38,26	66,61	9,54	7,96	42,91	40,29	4,09
	$\underline{a}(N)$	-0,21	-5,24	-30,85	-66,36	-0,28	-6,40	-36,68	-56,58
$a_0$	$\bar{a}(N)$	5,80	38,86	74,80	10,49	4,10	23,86	24,73	2,80
	$\underline{a}(N)$	-0,20	-4,78	-28,60	-69,06	-0,23	-5,69	-35,32	-52,15
$K_c$	$\bar{a}(N)$	5,11	32,98	41,13	-	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-0,23	-5,91	-38,76	-	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	5,19	34,02	59,31	8,35	5,14	30,35	20,51	3,93
	$\underline{a}(N)$	-0,20	-4,91	-29,69	-64,42	-0,26	-6,83	-43,31	-53,71

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.27 – Desvio relativo da Lei de Evolução da Trinca para o primeiro momento estatístico ( $\varepsilon_{\hat{\mu}_h}$ ) – Exemplo 3 [%]									
Parâmetros		Caso I				Caso II			
		$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$9.10^5$	$1.10^5$	$3.10^5$	$6.10^5$	$7.10^5$
$C_p$	$\bar{a}(N)$	4,24	22,29	34,40	6,83	4,55	22,80	24,64	17,56
	$\underline{a}(N)$	-0,19	-3,92	-21,96	-52,64	-0,23	-5,01	-29,71	-37,10
$m_p$	$\bar{a}(N)$	5,57	29,71	50,85	22,57	11,17	57,76	100,05	76,10
	$\underline{a}(N)$	-0,20	-4,19	-22,90	-55,91	-0,36	-6,52	-36,23	-57,07
$a_0$	$\bar{a}(N)$	5,55	30,26	54,20	19,78	4,76	24,98	36,22	25,46
	$\underline{a}(N)$	-0,18	-3,84	-21,48	-60,53	-0,20	-4,20	-24,85	-38,08
$K_c$	$\bar{a}(N)$	4,74	24,24	30,45	-	-	-	-	-
	$\underline{a}(N)$	-0,22	-4,63	-27,75	-	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{a}(N)$	6,66	31,64	47,29	16,36	3,51	19,39	24,40	17,37
	$\underline{a}(N)$	-0,26	-4,75	-24,02	-55,51	-0,17	-3,93	-26,53	-34,35

Fonte: Próprio Autor (2017)

## 4.2 UMA APLICAÇÃO “PRÁTICA” DA METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS

Nesta seção, apresenta-se uma simples aplicação da metodologia *Fast Crack Bounds*, para obter uma aproximação numérica do tamanho de trinca, a partir das cotas superiores e inferiores. A aproximação numérica é definida pelas médias aritméticas e geométricas, equações 4.9 e 4.10, respectivamente.

$$\begin{cases} \bar{\mu}_A = \frac{(\hat{\mu}_{\bar{a}} + \hat{\mu}_a)}{2} & [m]; \\ \bar{\mu}_A^{(2)} = \frac{(\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)} + \hat{\mu}_a^{(2)})}{2} & [m^2]. \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} \bar{\mu}_G = \sqrt{(\hat{\mu}_{\bar{a}} \cdot \hat{\mu}_a)} & [m]; \\ \bar{\mu}_G^{(2)} = \sqrt{(\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)} \cdot \hat{\mu}_a^{(2)})} & [m^2]. \end{cases} \quad (4.10)$$

Sendo  $\bar{\mu}_A$ ,  $\bar{\mu}_A^{(2)}$ ,  $\bar{\mu}_G$  e  $\bar{\mu}_G^{(2)}$ , médias aritméticas dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem e médias geométricas dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, respectivamente.

Nas figuras 4.31 e 4.32, apresentam-se as médias aritméticas e geométricas, dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem para o caso  $a_0.1$  - exemplo 1.

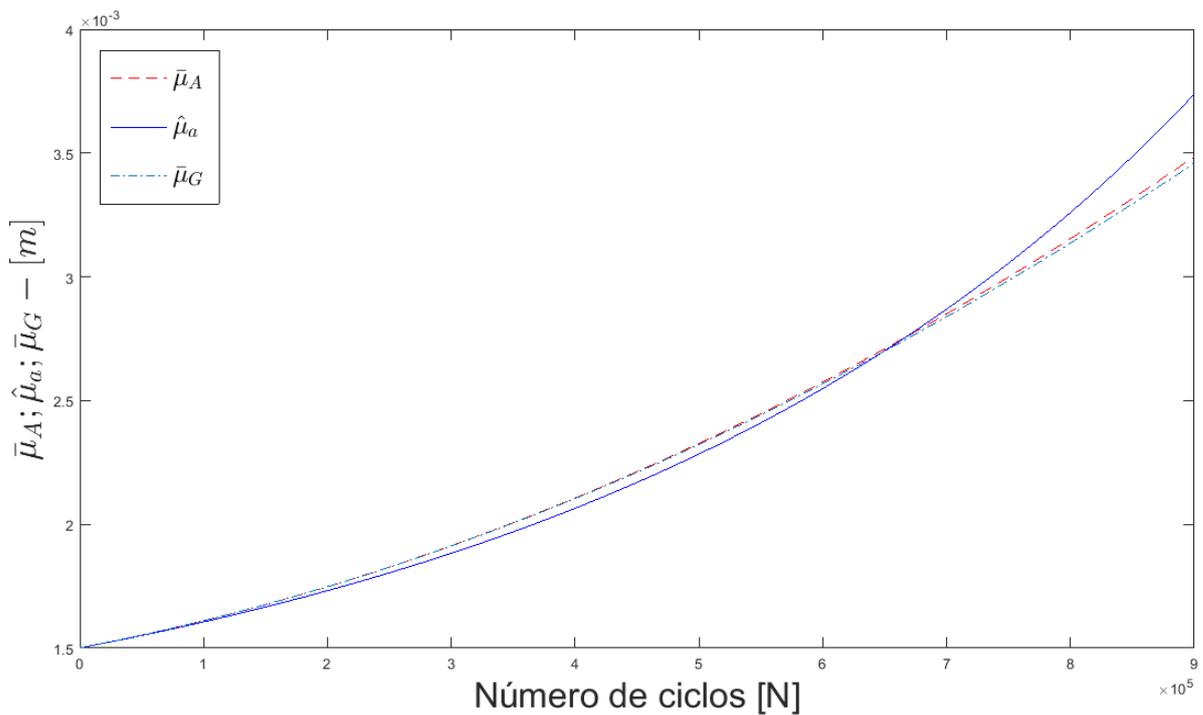


Figura 4.31 – Exemplo 1 - Médias aritmética e geométrica – Primeiro momento estatístico -  $a_0.1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

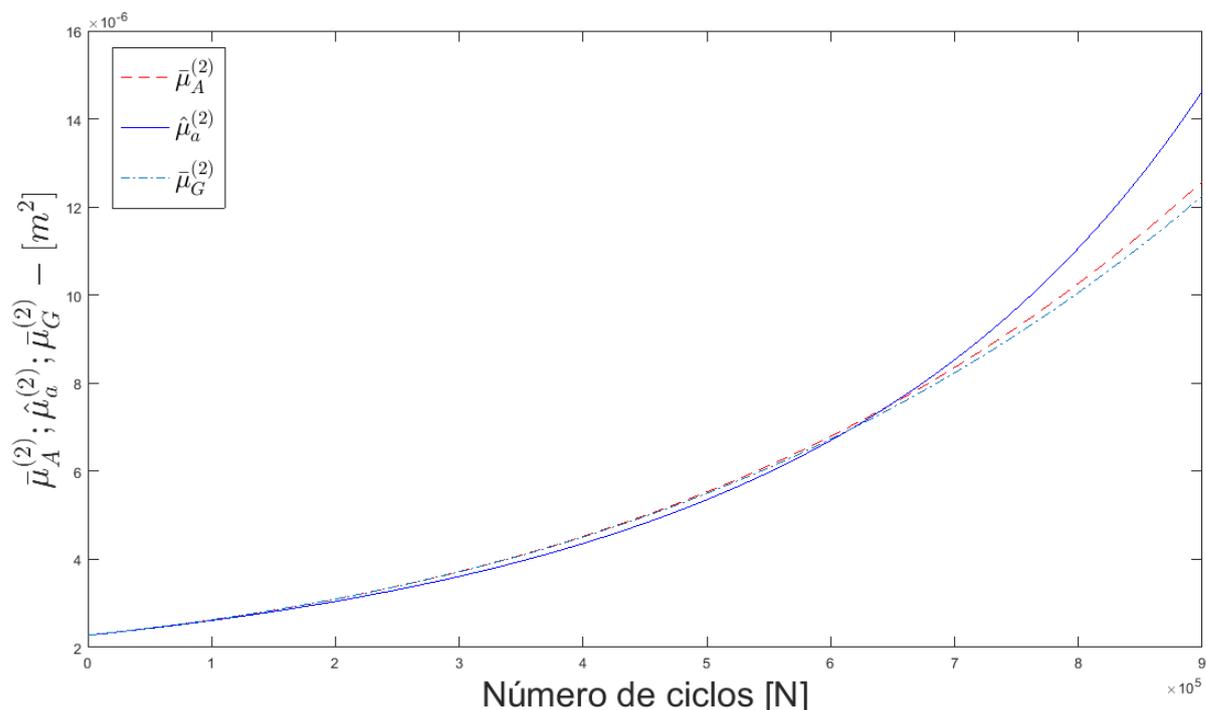


Figura 4.32 – Exemplo 1 – Médias aritméticas e geométricas – Segundo momento estatístico –  $a_0.1$   
 Fonte: Próprio Autor (2017)

Ao observar as figuras 4.31 e 4.32, percebe-se que as curvas das médias aritméticas e geométricas cruzam com as estimativas dos momentos estatísticos. Este comportamento é decorrente do significativo afastamento da cota inferior em relação a estimador do momento estatístico da solução numérica, quando se aproxima de 700.000 ciclos.

Para determinar os desvios relativos das médias aritméticas e geométricas dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, utilizam-se as equações 4.11 e 4.12.

$$\begin{cases} \varepsilon_{\bar{\mu}_A} = 100. \left( \frac{\bar{\mu}_A - \hat{\mu}_a}{\hat{\mu}_a} \right) \quad [\%]; \\ \varepsilon_{\bar{\mu}_G} = 100. \left( \frac{\bar{\mu}_G - \hat{\mu}_a}{\hat{\mu}_a} \right) \quad [\%]. \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{\bar{\mu}_A^{(2)}} = 100 \cdot \left( \frac{\bar{\mu}_A^{(2)} - \hat{\mu}_a^{(2)}}{\hat{\mu}_a^{(2)}} \right) & [\%]; \\ \varepsilon_{\bar{\mu}_G^{(2)}} = 100 \cdot \left( \frac{\bar{\mu}_G^{(2)} - \hat{\mu}_a^{(2)}}{\hat{\mu}_a^{(2)}} \right) & [\%]. \end{cases} \quad (4.12)$$

Nas figuras 4.33 e 4.34 observam-se os desvios relativos das médias aritméticas e geométricas para os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, caso  $a_0.1$  - exemplo 1.

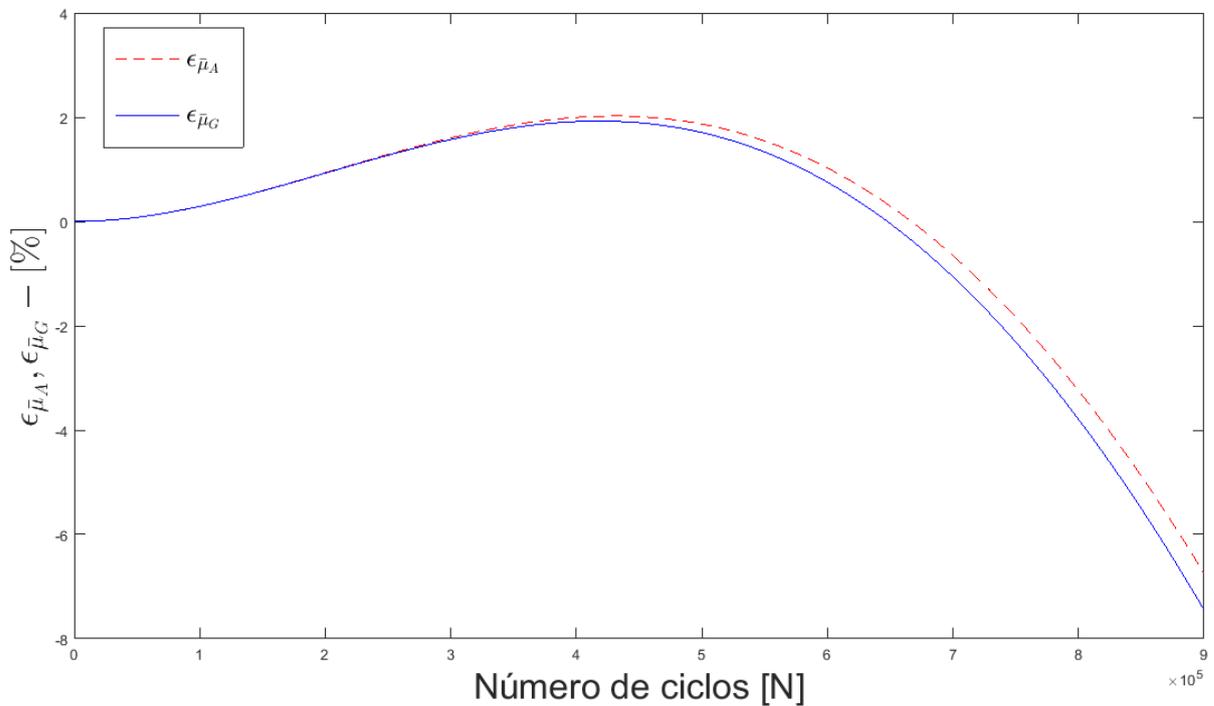


Figura 4.33 – Exemplo 1 – Desvio relativo das médias – Primeiro momento estatístico--  $a_0.1$

Fonte: Próprio Autor (2017)

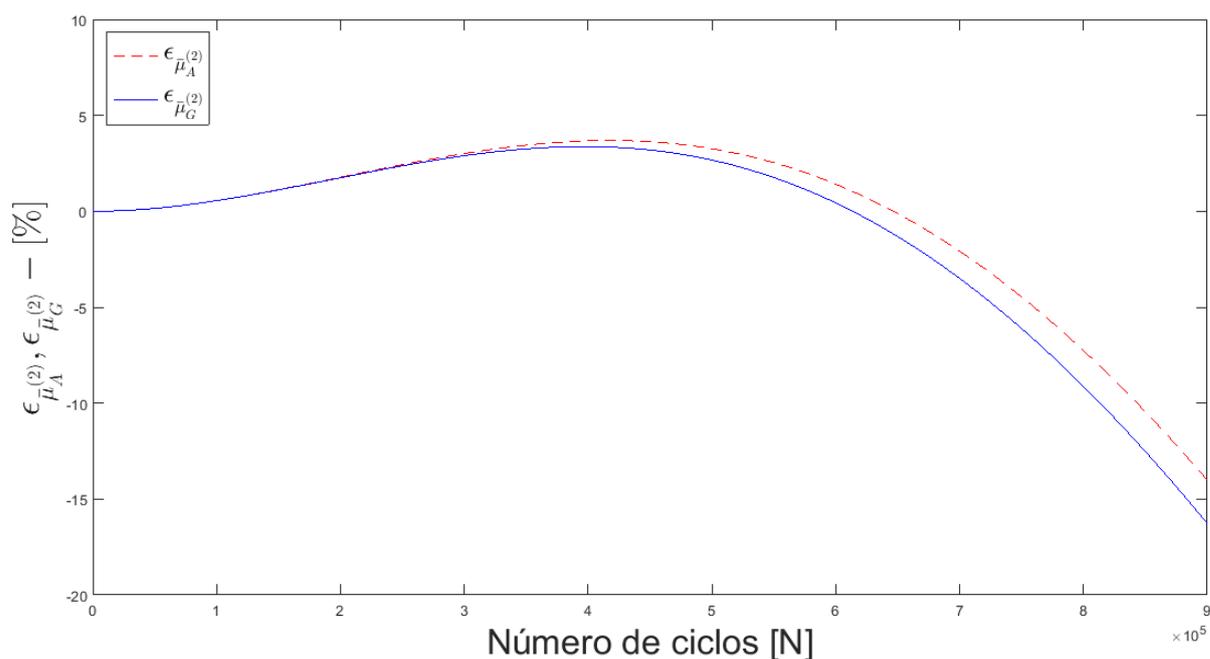


Figura 4.34 – Exemplo 1 – Desvio relativo das médias – Segundo momento estatístico –  $a_0.1$   
 Fonte: Próprio Autor (2017)

Os desvios relativos das médias aritméticas e geométricas para os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, para todos os casos analisados, estão descritos nas tabelas 4.28 à 4.33.

Tabela 4.28 – Desvios Relativos para o Estimador do Primeiro Momento Estatístico $(\varepsilon_{\bar{\mu}_A}, \varepsilon_{\bar{\mu}_G})$ – Exemplo 1 [%]									
Parâmetros		Caso I [ $10^5$ ciclos]				Caso II [ $10^5$ ciclos]			
		1	3	6	9	1	3	6	9
$C_p$	$\bar{\mu}_A(N)$	0,29	1,61	0,95	-7,14	0,40	2,26	1,46	-10,31
	$\bar{\mu}_G(N)$	0,29	1,58	0,67	-7,85	0,40	2,20	0,98	-11,44
$m_p$	$\bar{\mu}_A(N)$	0,32	1,76	0,88	-7,82	0,71	3,85	4,56	-5,02
	$\bar{\mu}_G(N)$	0,32	1,72	0,55	-8,63	0,70	3,71	3,70	-6,63
$a_0$	$\bar{\mu}_A(N)$	0,28	1,60	1,03	-6,72	0,49	3,09	4,93	-2,38
	$\bar{\mu}_G(N)$	0,28	1,56	0,76	-7,42	0,48	3,01	4,26	-4,00
$K_c$	$\bar{\mu}_A(N)$	0,32	1,74	0,56	-10,18	-	-	-	-
	$\bar{\mu}_G(N)$	0,32	1,71	0,23	-10,98	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{\mu}_A(N)$	0,28	1,55	0,70	-7,69	0,65	4,00	5,53	-6,55
	$\bar{\mu}_G(N)$	0,28	1,52	0,43	-8,37	0,65	3,86	4,52	-8,70

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.29 – Desvios Relativos para o Estimador do Primeiro Momento Estatístico ( $\varepsilon_{\bar{\mu}_A}$ , $\varepsilon_{\bar{\mu}_G}$ ) – Exemplo 2 [%]									
Parâmetros		Caso I [ $10^5$ ciclos]				Caso II [ $10^5$ ciclos]			
		1	3	6	9	1	3	6	9
$C_p$	$\bar{\mu}_A(N)$	0,29	1,62	0,95	-7,19	0,40	2,28	1,41	-10,69
	$\bar{\mu}_G(N)$	0,29	1,59	0,67	-7,90	0,40	2,22	0,92	-11,83
$m_p$	$\bar{\mu}_A(N)$	0,29	1,51	0,11	-9,06	0,75	4,19	5,30	-4,72
	$\bar{\mu}_G(N)$	0,29	1,48	-0,16	-9,74	0,75	4,03	4,34	-6,51
$a_0$	$\bar{\mu}_A(N)$	0,28	1,59	0,96	-6,91	0,48	3,01	4,61	-3,15
	$\bar{\mu}_G(N)$	0,28	1,55	0,69	-7,60	0,48	2,94	3,96	-4,71
$K_c$	$\bar{\mu}_A(N)$	0,32	1,75	0,53	-10,43	-	-	-	-
	$\bar{\mu}_G(N)$	0,32	1,71	0,19	-11,23	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{\mu}_A(N)$	0,28	1,55	0,64	-7,90	0,66	4,02	5,55	-6,95
	$\bar{\mu}_G(N)$	0,28	1,52	0,37	-8,58	0,65	3,89	4,53	-9,11

Fonte: Próprio Autor (2017)

Para o exemplo 3, os casos  $C_p.1$ ,  $m_p.1$  e  $\Delta K_{th}.1$  foram avaliados até o ciclo 850.000 e o caso  $K_c.1$  até o ciclo 650.000. Já os casos  $m_p.3$  e  $a_0.3$  foram avaliados até o ciclo 700.000, os casos  $C_p.3$  e  $\Delta K_{th}.3$  até o ciclo 650.000.

Tabela 4.30 – Desvios Relativos para o Estimador do Primeiro Momento Estatístico ( $\varepsilon_{\bar{\mu}_A}$ , $\varepsilon_{\bar{\mu}_G}$ ) – Exemplo 3 [%]									
Parâmetros		Caso I [ $10^5$ ciclos]				Caso II [ $10^5$ ciclos]			
		1	3	6	9	1	3	6	7
$C_p$	$\bar{\mu}_A(N)$	1,06	5,59	3,33	-16,98	1,13	5,43	-2,70	-7,91
	$\bar{\mu}_G(N)$	1,06	5,28	1,58	-19,63	1,12	5,08	-4,52	-9,92
$m_p$	$\bar{\mu}_A(N)$	1,38	7,56	7,52	-14,07	1,91	9,80	7,42	-3,78
	$\bar{\mu}_G(N)$	1,37	7,08	4,92	-17,81	1,89	9,06	4,32	-7,27
$a_0$	$\bar{\mu}_A(N)$	1,41	8,00	9,36	-16,86	1,20	6,33	2,75	-6,00
	$\bar{\mu}_G(N)$	1,40	7,50	6,56	-21,07	1,19	5,95	0,68	-8,54
$K_c$	$\bar{\mu}_A(N)$	1,19	5,98	-0,16	-	-	-	-	-
	$\bar{\mu}_G(N)$	1,18	5,60	-2,13	-	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{\mu}_A(N)$	1,23	6,70	5,93	-15,00	1,19	5,81	-1,82	-7,54
	$\bar{\mu}_G(N)$	1,22	6,31	3,72	-18,27	1,18	5,44	-3,71	-9,61

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.31 – Desvios Relativos para o Estimador do Segundo Momento Estatístico ( $\varepsilon_{\bar{\mu}_A^{(2)}}, \varepsilon_{\bar{\mu}_G^{(2)}}$ ) – Exemplo 1 [%]									
Parâmetros		Caso I [ $10^5$ ciclos]				Caso II [ $10^5$ ciclos]			
		1	3	6	9	1	3	6	9
$C_p$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	0,58	3,33	2,41	-13,10	0,81	4,86	3,45	-22,81
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	0,58	3,20	1,26	-15,77	0,81	4,61	1,25	-27,11
$m_p$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	0,66	3,63	1,52	-16,92	1,42	7,07	3,10	-20,82
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	0,66	3,47	0,15	-19,82	1,41	6,54	0,74	-23,87
$a_0$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	0,55	3,00	1,42	-13,97	0,73	3,87	1,44	-18,74
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	0,55	2,89	0,45	-16,23	0,73	3,69	0,08	-21,50
$K_c$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	0,65	3,65	1,53	-20,55	-	-	-	-
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	0,65	3,49	0,14	-23,49	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	0,57	3,13	0,99	-16,59	1,33	8,05	6,62	-25,50
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	0,57	3,00	-0,05	-18,90	1,32	7,48	2,91	-30,92

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.32 – Desvios Relativos para o Estimador do Segundo Momento Estatístico ( $\varepsilon_{\bar{\mu}_A^{(2)}}, \varepsilon_{\bar{\mu}_G^{(2)}}$ ) – Exemplo 2 [%]									
Parâmetros		Caso I [ $10^5$ ciclos]				Caso II [ $10^5$ ciclos]			
		1	3	6	9	1	3	6	9
$C_p$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	0,59	3,34	2,41	-13,19	0,82	4,90	3,34	-23,62
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	0,58	3,21	1,26	-15,87	0,82	4,64	1,10	-27,94
$m_p$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	0,59	3,09	-0,15	-19,42	1,52	7,73	4,27	-21,26
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	0,59	2,96	-1,29	-21,82	1,51	7,13	1,63	-24,59
$a_0$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	0,55	2,97	1,27	-14,38	0,72	3,72	0,80	-20,11
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	0,54	2,86	0,30	-16,61	0,71	3,55	-0,49	-22,73
$K_c$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	0,65	3,67	1,46	-21,11	-	-	-	-
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	0,65	3,50	0,06	-24,05	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	0,57	3,13	0,89	-16,91	1,34	8,10	6,56	-26,56
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	0,57	3,00	-0,15	-19,21	1,33	7,52	2,83	-31,94

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.33 – Desvios Relativos para o Estimador do Segundo Momento Estatístico ( $\varepsilon_{\bar{\mu}_A^{(2)}}, \varepsilon_{\bar{\mu}_G^{(2)}})$ – Exemplo 3 [%]									
Parâmetros		Caso I [ $10^5$ ciclos]				Caso II [ $10^5$ ciclos]			
		1	3	6	9	1	3	6	7
$C_p$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	2,16	12,21	9,95	-29,70	2,35	12,54	-6,21	-18,56
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	2,13	10,91	2,67	-38,13	2,31	10,88	-13,82	-26,21
$m_p$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	2,80	16,50	17,87	-28,40	3,84	18,25	1,80	-26,24
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	2,76	14,45	7,33	-39,29	3,75	15,65	-5,75	-32,77
$a_0$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	2,80	17,04	23,13	-29,28	1,93	9,08	-5,29	-24,67
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	2,75	14,98	11,73	-41,53	1,90	8,07	-10,18	-29,86
$K_c$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	2,43	13,53	1,18	-	-	-	-	-
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	2,40	11,85	-7,03	-	-	-	-	-
$\Delta K_{th}$	$\bar{\mu}_A^{(2)}(N)$	2,49	14,55	14,81	-28,03	2,43	11,76	-11,39	-24,88
	$\bar{\mu}_G^{(2)}(N)$	2,46	12,88	5,83	-37,91	2,40	10,20	-17,34	-30,64

Fonte: Próprio Autor (2017)

### 4.3 SÍNTESE DOS RESULTADOS

As funções desvios relativos do tamanho de trinca, para os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem das cotas inferiores, são monótonas crescentes, enquanto para as cotas superiores não. Para uma análise comparativa entre os resultados obtidos, os dados foram agrupados nas tabelas 4.34 à 4.40.

A tabela 4.34, apresenta os desvios relativos máximos e mínimos, referente ao primeiro momento estatístico das cotas superior e inferior, em todos os casos analisados. Durante a análise do primeiro momento estatístico, observou-se que o menor desvio para a cota superior é obtido no parâmetro  $m_p$  (7,58%), para o caso I do exemplo 2, e que o maior desvio também está no parâmetro  $m_p$  (34,85%), mas para o caso II e exemplo 3. Já para cota inferior, o desvio relativo mínimo encontra-se no parâmetro  $a_0$  (-42,98%), caso I e exemplo 3.

Na tabela 4.35, estão os resultados dos desvios relativos para o segundo momento estatístico. Assim como, para o estimador do momento estatístico de

primeira ordem, os maiores desvios encontram-se no exemplo 3. É importante ressaltar que para a maioria dos parâmetros do exemplo 3, o caso I apresentou desvios maiores que o caso II, este fato é decorrente de que a avaliação do caso II ocorre até o ciclo 650.000 enquanto no caso I, vários parâmetros são avaliados até o ciclo 850.000.

A tabela 4.36, apresenta a síntese dos resultados para os momentos estatísticos de primeira ordem da Lei de Evolução de Trincas.

Nas tabelas 4.37 e 4.38, expõem-se os desvios máximos para as médias aritméticas e geométricas dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, respectivamente. Para o primeiro momento estatístico, o desvio relativo máximo para as médias aritméticas e geométricas são de  $|16,98\%|$  e  $|21,07\%|$ , nos casos  $C_p.1$  e  $a_0.1$ , ambos do exemplo 3. Na avaliação do segundo momento estatístico, os maiores desvios relativos para as médias aritméticas e geométricas são de  $|29,70\%|$  e  $|41,53\%|$ , nos casos  $C_p.1$  e  $a_0.1$ , ambos do exemplo 3.

A tabela 4.39, apresenta uma medida de desempenho da metodologia FCB, isto é, uma comparação entre os tempos computacionais obtidos das cotas e solução numérica. As cotas concluíram a análise computacional de forma mais eficaz que a solução numérica proposta em todos os casos. Para os parâmetros  $a_0$ , observa-se as menores razões percentuais entre os tempos computacionais. Isto decorre de que a cota inferior, equação (3.3), possui termos dependentes do tamanho de trinca inicial, os quais devem ser recalculados a cada amostra do parâmetro  $a_0$ . Mesmo assim, a análise computacional da cota nestes casos foi no mínimo 411% mais eficaz que a solução numérica.

Por fim, a tabela 4.40 apresenta os valores de  $a^*$  utilizados durante as análises dos problemas, para os três exemplos avaliados em todos casos analisados.

Tabela 4.34 – Síntese dos resultados: Desvios Relativos – Primeiro Momento  
Estatístico ( $\varepsilon_{\hat{\mu}_a}$ ) [%]

	Exemplo 1			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$
$C_p$	8,52	-18,62	11,36	-24,50
$m_p$	9,10	-20,02	18,18	-22,48
$a_0$	8,51	-18,10	18,05	-20,10
$K_c$	8,70	-22,14	-	-
$\Delta K_{th}$	8,90	-18,86	20,64	-26,48
	Exemplo 2			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$
$C_p$	8,54	-18,68	11,38	-24,92
$m_p$	7,58	-20,16	19,83	-23,12
$a_0$	8,41	-18,23	17,31	-20,48
$K_c$	8,71	-22,41	-	-
$\Delta K_{th}$	8,01	-19,05	20,72	-26,89
	Exemplo 3			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$
$C_p$	22,64	-37,77	19,93	-27,07
$m_p$	31,05	-39,14	34,85	-29,46
$a_0$	33,99	-42,98	24,50	-27,70
$K_c$	22,29	-25,35	-	-
$\Delta K_{th}$	27,58	-38,36	21,18	-27,00

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.35 – Síntese dos resultados: Desvios Relativos – Segundo Momento  
Estatístico ( $\mathcal{E}_{\hat{\mu}_a^{(2)}}$ ) [%]

	Exemplo 1			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$
$C_p$	17,78	-34,46	24,69	-48,22
$m_p$	18,14	-38,67	26,22	-42,58
$a_0$	15,47	-33,55	18,04	-39,76
$K_c$	18,31	-41,95	-	-
$\Delta K_{th}$	15,55	-36,08	34,78	-53,39
	Exemplo 2			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$
$C_p$	17,82	-34,57	24,74	-48,93
$m_p$	15,03	-38,94	28,64	-43,93
$a_0$	15,24	-33,79	17,07	-40,39
$K_c$	18,34	-42,46	-	-
$\Delta K_{th}$	15,48	-36,35	34,88	-54,16
	Exemplo 3			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$
$C_p$	50,46	-63,08	45,35	-53,01
$m_p$	67,51	-66,36	55,75	-56,58
$a_0$	74,91	-69,06	33,27	-52,15
$K_c$	50,75	-48,53	-	-
$\Delta K_{th}$	60,16	-64,42	39,31	-53,71

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.36 – Síntese dos resultados: Desvios Relativos – Lei de Evolução da Trinca ( $\varepsilon_{\hat{\mu}_h}$ ) [%]

	Exemplo 1			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$
$C_p$	14,31	-26,54	19,04	-34,00
$m_p$	15,36	-28,50	19,72	-23,69
$a_0$	14,25	-25,85	28,76	-28,34
$K_c$	14,45	-30,26	-	-
$\Delta K_{th}$	11,43	-24,25	44,03	-41,00
	Exemplo 2			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$
$C_p$	14,36	-26,68	19,11	-34,58
$m_p$	13,40	-29,41	44,88	-41,39
$a_0$	14,11	-26,06	27,63	-28,83
$K_c$	15,04	-32,05	-	-
$\Delta K_{th}$	14,97	-28,56	25,06	-31,21
	Exemplo 3			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$	$\bar{a}(N)$	$\underline{a}(N)$
$C_p$	34,75	-52,64	30,46	-37,10
$m_p$	50,90	-55,91	100,59	-57,07
$a_0$	54,65	-60,53	37,73	-38,08
$K_c$	34,27	-34,97	-	-
$\Delta K_{th}$	47,54	-55,51	28,42	-34,35

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.37 – Síntese dos resultados: Desvios máximos das médias aritméticas e geométricas – Primeiro momento estatístico ( $\varepsilon_{\bar{\mu}_A}$ ,  $\varepsilon_{\bar{\mu}_G}$ ) [%]

	Exemplo 1			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{\mu}_A$	$\bar{\mu}_G$	$\bar{\mu}_A$	$\bar{\mu}_G$
$C_p$	-7,14	-7,85	-10,31	-11,44
$m_p$	-7,82	-8,63	5,30	-6,63
$a_0$	-6,72	-7,42	5,11	4,65
$K_c$	-10,18	-10,98	-	-
$\Delta K_{th}$	-7,69	-8,37	-6,55	-8,70
	Exemplo 2			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{\mu}_A$	$\bar{\mu}_G$	$\bar{\mu}_A$	$\bar{\mu}_G$
$C_p$	-7,19	-7,90	-10,69	-11,83
$m_p$	-9,06	-9,74	5,93	-6,51
$a_0$	-6,91	-7,60	4,87	-4,71
$K_c$	-10,43	-11,23	-	-
$\Delta K_{th}$	-7,90	-8,58	-6,95	-9,11
	Exemplo 3			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{\mu}_A$	$\bar{\mu}_G$	$\bar{\mu}_A$	$\bar{\mu}_G$
$C_p$	-16,98	-19,63	-7,91	-9,92
$m_p$	-14,07	-17,81	12,36	10,64
$a_0$	-16,86	-21,07	7,66	-8,54
$K_c$	6,82	-7,28	-	-
$\Delta K_{th}$	-15,00	-18,27	-7,54	-9,61

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.38 – Síntese dos resultados: Desvios máximos das médias aritméticas e geométricas – Segundo momento estatístico (  $\varepsilon_{\bar{\mu}_A^{(2)}}$ ,  $\varepsilon_{\bar{\mu}_G^{(2)}}$  ) [%]

	Exemplo 1			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{\mu}_A^{(2)}$	$\bar{\mu}_G^{(2)}$	$\bar{\mu}_A^{(2)}$	$\bar{\mu}_G^{(2)}$
$C_p$	-13,10	-15,77	-22,81	-27,11
$m_p$	-16,92	-19,82	-20,82	-23,87
$a_0$	-13,97	-16,23	-18,74	-21,50
$K_c$	-20,55	-23,49	-	-
$\Delta K_{th}$	-16,59	-18,90	-25,50	-30,92
	Exemplo 2			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{\mu}_A^{(2)}$	$\bar{\mu}_G^{(2)}$	$\bar{\mu}_A^{(2)}$	$\bar{\mu}_G^{(2)}$
$C_p$	-13,19	-15,87	-23,62	-27,94
$m_p$	-19,42	-21,82	-21,26	-24,59
$a_0$	-14,38	-16,61	-20,11	-22,73
$K_c$	-21,11	-24,05	-	-
$\Delta K_{th}$	-16,91	-19,21	-26,56	-31,94
	Exemplo 3			
	Caso I		Caso II	
	$\bar{\mu}_A^{(2)}$	$\bar{\mu}_G^{(2)}$	$\bar{\mu}_A^{(2)}$	$\bar{\mu}_G^{(2)}$
$C_p$	-29,70	-38,13	-18,56	-26,21
$m_p$	-28,40	-39,29	-26,24	-32,77
$a_0$	-29,28	-41,53	-24,67	-29,86
$K_c$	16,37	-19,12	-	-
$\Delta K_{th}$	-28,03	-37,91	-24,88	-30,64

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.39 – Síntese dos resultados: Razão entre os tempos computacionais [%]

Parâmetros	Exemplo 1		Exemplo 2		Exemplo 3	
	Caso I	Caso II	Caso I	Caso II	Caso I	Caso II
	$\rho$	$\rho$	$\rho$	$\rho$	$\rho$	$\rho$
$C_p$	3.900,65	4.032,88	4.206,90	4.158,83	4.491,77	4.261,11
$m_p$	3.972,41	3.990,29	4.012,48	4.137,28	4.629,07	6.323,89
$a_0$	681,69	876,99	411,23	587,04	425,61	466,98
$K_c$	3.872,24	5.854,44	4.260,76	8.296,29	4.597,85	6.503,35
$\Delta K_{th}$	3.973,27	5.311,30	4.202,24	6.189,78	4.413,89	5.785,34

Fonte: Próprio Autor (2017)

Tabela 4.40 – Síntese dos resultados: Valor utilizado de  $a^*$ 

Parâmetros	Exemplo 1		Exemplo 2		Exemplo 3	
	Caso I	Caso II	Caso I	Caso II	Caso I	Caso II
$C_p$	$1,4a_0$	$1,5a_0$	$1,4a_0$	$1,5a_0$	$1,8a_0$	$1,8a_0$
$m_p$	$1,45a_0$	$2,1a_0$	$1,45a_0$	$2,15a_0$	$2a_0$	$2,5a_0$
$a_0$	$1,4a_0$	$1,65a_0$	$1,4a_0$	$1,65a_0$	$2a_0$	$1,9a_0$
$K_c$	$1,41a_0$	$1,4a_0$	$1,41a_0$	$1,4a_0$	$1,8a_0$	$1,8a_0$
$\Delta K_{th}$	$1,4a_0$	$1,85a_0$	$1,4a_0$	$1,85a_0$	$1,9a_0$	$1,9a_0$

Fonte: Próprio Autor (2017)

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho de dissertação, foi realizada a quantificação da incerteza do modelo de propagação de trincas de Priddle, utilizando-se a metodologia *Fast Crack Bounds* com o método de Simulação de Monte Carlo.

Foram utilizados três exemplos “clássicos” da mecânica da fratura, isto é, placa infinita, placa com largura finita e trinca central e placa com largura finita e trinca na aresta. Estes exemplos, foram escolhidos por serem muito utilizados na análise de problemas de propagação de trincas e suas funções de correção do fator de intensidade de tensão são conhecidas.

Ao quantificar-se a incerteza para o exemplo 1 - Caso I, alguns ajustes foram necessários no valor de  $a^*$  para que as cotas do primeiro e segundo momento estatístico envelopassem a solução numérica, satisfazendo assim as desigualdades propostas pela equação 2.12. O mesmo procedimento foi adotado no Caso II, em que foram necessários ajustes no valor de  $a^*$  para que a cota superior envelopasse os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem. O exemplo 2, demonstrou comportamentos similares aos apresentados no exemplo I, em que foram necessários ajustes no valor de  $a^*$  em ambos os casos. Durante a análise do caso I para o exemplo 3, além de alguns ajustes no valor de  $a^*$ , foram necessários ajustes no número de ciclos para alguns parâmetros. A análise randômica de alguns parâmetros, demonstrou que o estimador da solução numérica para o segundo momento estatístico tende ao infinito, tornando uma assíntota vertical. Tal comportamento é característico quando se analisa a região III do diagrama  $\log (da/dN) \times \log (\Delta K)$ . Assim como no caso I do exemplo 3, durante a análise do caso II, foram necessários ajustes no número de ciclos dos parâmetros analisados.

Em todos os exemplos, o caso  $K_c .3$  gerou instabilidade à solução numérica, isto é, quando submetido ao coeficiente de dispersão de 3/10, caso II. O modelo de Priddle se mostrou muito “sensível” a variações no valor deste parâmetro, o que impossibilitou quantificar a incerteza neste parâmetro, quando o coeficiente de dispersão é  $\delta = 3/10$ .

Apesar de realizarmos uma análise estocástica do tamanho de trinca, exigindo um esforço computacional maior, a metodologia *Fast Crack Bounds*, demonstrou-se muito eficaz, comparada a solução numérica. Pois os tempos computacionais das cotas foram de até 8.296% mais eficaz. Durante a análise dos parâmetros  $a_0$ , a razão entre os tempos computacionais foram menores, mas mesmo assim, no mínimo 411% mais eficaz.

Após aplicarmos um conceito prático da metodologia FCB, observou-se que os desvios das médias aritméticas e geométricas para o primeiro momento estatístico foram relativamente baixos em relação a solução numérica do problema. Demonstrando a aplicabilidade e eficácia da metodologia *Fast Crack Bounds*.

## 5.1 TRABALHOS FUTUROS

Em trabalhos futuros, é importante quantificar a incerteza para outros modelos de propagação de trincas, quando se aplica a metodologia *Fast Crack Bounds*, como por exemplo: Modelo de Forman e Modelo Walker. Neste trabalho, quantificou-se a incerteza sobre a condição Carregamento com Amplitude de Tensão Constante (CATC), deixa-se como sugestão: a quantificação da incerteza quando utiliza-se Carregamento com Amplitude de Tensão Variável (CATV).

Outro aspecto que se pode servir de estudo em uma nova pesquisa é referente ao parâmetro  $a^*$ , que neste trabalho foi determinado de forma empírica. Encontrar uma função para o parâmetro  $a^*$ , que possa ser utilizada nas cotas superiores.

E por fim, fica como sugestão, a implementação de outros parâmetros (materiais diferentes), na quantificação da incerteza do modelo de Priddle via metodologia *Fast Crack Bounds*.

## REFERÊNCIAS

AL-RUBAIE, Kassim S.; GODEFROID, Leonardo B.; LOPES, Jadir A. M. Statistical modeling of fatigue crack growth rate in Inconel alloy 600. **INTERNATIONAL JOURNAL OF FATIGUE**. v. 29, p. 931-940, 2007.

ANDERSON, T. L. **FRACTURE MECHANICS: Fundamentals and Applications**. 3<sup>rd</sup> ed. New York, USA: CRC, 2005.

ÁVILA, S. Jr. C. R.; SANTOS, R. V. Bounds for the Propagation Model of Crack Forman. **INTERNATIONAL JOURNAL OF SCIENCES: Basic and Applied Research**. v. 22, n. 2, p. 219-231, 2015.

ÁVILA, S. Jr. C. R.; SANTOS, R. V.; BECK, A. T. Analytical Bounds for Efficient Crack Growth Computation. **APPLIED MATHEMATICAL MODELLING**, .v. 40, p. 2312-2321, 2016.

BANNANTINE, J. A. et al. **FUNDAMENTALS OF METAL FATIGUE ANALYSIS**. New Jersey: Prentice Hall, 1989.

BARROSO, Leônidas C. et al. **CÁLCULO NUMÉRICO: Com Aplicações**. 2 ed. São Paulo, SP: HARBRA, 1987.

BECK, André T. **UM MÉTODO PARA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE PARA ELEMENTOS FINITOS**. 1999. 129 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.

BEDEN, S. M.; ABDULLAH, S.; ARIFFIN, A. K., Review of Fatigue Crack Propagation Models for Metallic Components. **EUROPEAN JOURNAL OF SCIENTIFIC RESEARCH**. v. 28, n. 3, p. 364-397, 2009.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ELEMENTARES E PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO**. 8 ed. LTC, 2006.

CALLISTER JR. William D. **CIÊNCIA E ENGENHARIA DE MATERIAIS: Uma Introdução**. 7 ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2011.

COLLIPRIEST, J. E. An experimentalist's view of the surface flaw problem. **AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS**. p. 43-62. 1972.

CUNHA, M. Cristina C. **MÉTODOS NUMÉRICOS**. 2 ed. rev. ampl. Campinas, SP: Unicamp, 2000.

DIETER, George E. **METALURGIA MECÂNICA**, 2 ed. Rio de Janeiro, RJ: Guanabara Dois, 1981.

ELISHAKOFF, Isaac. **PROBABILISTIC THEORY OF STRUCTURES**. 2<sup>nd</sup> ed. Mineola, New York, Dover, 1999.

FORMAN, R. G.; KEANEY, V. E.; ENGLE, R. N. Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. **JOURNAL OF BASIC ENGINEERING**, v.89, p. 549-463, 1967.

GHONEM, H; DORE, S. Experimental Study of the Constant-Probability Crack Growth Curves Under Constant Amplitude Loading, **ENGINEERING FRACTURE MECHANICS**. v. 27, n. 1, p. 1-25, 1987.

IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate. **JOURNAL OF APPLIED MECHANICS**. v. 24, p. 361-364. 1957.

JAMES, Barry R. **PROBABILIDADE**: Um curso em nível intermediário. São Paulo, SP: Hamburg, 1981.

LOPEZ, Rafael H.; ÁVILA, S. Jr. Claudio. R. A non-intrusive methodology for the representation of crack growth stochastic processes. **MECHANICS RESEARCH COMMUNICATIONS**. v. 64, p. 23-28, 2015.

MACHADO Jr., Waldir Mariano. **APLICAÇÃO DA METODOLOGIA “FAST BOUNDS CRACK” PARA A ESTIMATIVA EFICIENTE DA EVOLUÇÃO DO TAMANHO DE TRINCA**. 2015. 65 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

MILLER, M. S.; GALLAGHER, J. P. An analysis of several fatigue crack growth rate (FCGR) descriptions. **FATIGUE CRACK GROWTH MEASUREMENT AND DATA ANALYSIS**, ASTM STP 738. **AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS**. p. 205-251, 1981.

MOURA, Lucas Gimenis. **ESTABELECIMENTO DE COTAS VIA MÉTODO FAST CRACK BOUNDS PARA OS MOMENTOS ESTATÍSTICOS DO TAMANHO DE TRINCA DO MODELO DE COLLIPRIEST**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

PARIS, P.; ERDOGAN, F. A critical analysis of crack propagation laws. **JOURNAL OF FLUIDS ENGINEERING**. v. 85, p. 528-533. 1963

PRIDDLE, E. K. High cycle fatigue crack propagation under random and constant amplitude loadings. **INTERNATIONAL JOURNAL OF PRESSURE VESSELS AND PIPING**, v. 4, n. 2, p. 89-117, 1976.

ROSA, Edison. **ANÁLISE DE RESISTÊNCIA MECÂNICA DE PEÇAS E COMPONENTES ESTRUTURAIS: Mecânica da Fratura e Fadiga**. Florianópolis, SC: GRANTE, 2002

SANTOS, Rodrigo Villaca. **DESENVOLVIMENTO DE UMA NOVA METODOLOGIA ESTABELECIDO COTAS PARA A EVOLUÇÃO DE TRINCAS PARA MODELOS DE CARREGAMENTO COM AMPLITUDE DE TENSÃO CONSTANTE**. 2015. 116 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

SCHIJVE, J. **FATIGUE OF STRUCTURES AND MATERIALS**. 2<sup>nd</sup> ed. Delft, Netherlands: Springer, 2009.

SHIGLEY, Joseph E. **ELEMENTOS DE MÁQUINAS**. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1984. 1v.

STEPHENS, Ralph I. et al. **METAL FATIGUE IN ENGINEERING**. 2<sup>nd</sup> ed. New York, USA: Wiley-Interscience, 2000.

VUOLO, José Henrique. **FUNDAMENTOS DA TEORIA DE ERROS**. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

WALKER, K. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7076-T6 aluminum. Effect of environment and complex load history on fatigue life. **AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS**. p. 1–14. 1970

WANG, Wei; CHENG, Thomas. Fatigue Crack Growth Rate of Metal by Plastic Energy Damage Accumulation Theory. **JOURNAL OF ENGINEERING MECHANICS**, p. 776-795, 1994.