UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PAULO CÉSAR SANFELICE

EMBALANDO E DESPACHANDO: A RELAÇÃO MÚTUA ENTRE MODELOS GEOMÉTRICOS E A APRENDIZAGEM ESCOLAR

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2017

PAULO CÉSAR SANFELICE

EMBALANDO E DESPACHANDO: A RELAÇÃO MÚTUA ENTRE MODELOS GEOMÉTRICOS E A APRENDIZAGEM ESCOLAR

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientadora: Patrícia Massae Kitani, Dra.

CURITIBA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S224e Sanfelice, Paulo César
2017 Embalando e despachando : a relação mútua entre modelos geométricos e a aprendizagem escolar / Paulo César Sanfelice .-- 2017.
66 f.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2017.
Bibliografia: f. 66.

1. Geometria - Estudo e ensino. 2. Solução de problemas. 3. Modelos matemáticos. 4. Funções (Matemática). 5. Derivados (Matemática). 6. Máxima e mínima. 7. GeoGebra (Programa de computador). 8. Serviço postal - Embalagens. 9. Matemática - Estudo e ensino. 10. Matemática - Dissertações. I. Kitani, Patrícia Massae, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 – 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba - UTFPR

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 37

"Embalando e despachando: a relação mútua entre modelos geométricos e a aprendizagem escolar"

por

Paulo César Sanfelice

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 11h30min do dia 11 de fevereiro de 2017. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Profa. Patrícia Massae Kitani, Dra.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Jorge Luis Torrejón Matos, Dr.
(PUCPR)

Profa. Olga Harumi Saito, Dra.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Márcio Rostirolla Adames, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

AGRADECIMENTOS

- À Deus por me fortalecer diariamente e me guiar em minhas ações.
- Aos meus pais Euclides Sanfelice e Pascoalina B. Ap. Sanfelice pelo reconhecimento e incentivo compartilhado nos momentos de dificuldades.
- À minha esposa Valquiria e aos meus filhos Vitor Renato e Paloma Vieira que sempre estiveram ao meu lado e me apoiaram em todos os momentos dessa jornada.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- À minha orientadora professora Drª. Patrícia Massae Kitani, pela oportunidade que me concedeu de vivenciar um relacionamento pautado em atributos de uma pessoa nobre de alma.
- Ao coordenador do PROFMAT da UTFPR, professor Dr. Márcio Rostirolla Adames, no período em que finalizei meus estudos.
- Aos professores do PROFMAT pelos ensinamentos e sabedoria.
- Aos amigos da Turma 2014, em especial Júlio César e Rodrigo, que dividiram comigo vários momentos de alegrias e angústias.

RESUMO

SANFELICE, Paulo César. EMBALANDO E DESPACHANDO: A RELAÇÃO MÚTUA ENTRE OS MODELOS GEOMÉTRICOS E A APRENDIZAGEM ESCOLAR. 67 p. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017.

Este trabalho apresenta uma proposta de abordagem de modelação matemática voltada principalmente aos últimos anos da educação básica. Com base nos pressupostos da resolução de problemas, explora-se diversos conteúdos com significação. O fenômeno social a ser modelado consiste no formato e variações nas dimensões de embalagens a serem despachadas pelos Correios. As representações geométrica, gráfica e algébrica serão valorizadas no decorrer do desenvolvimento das atividades. A título de aprofundamento dos estudos, serão sugeridas algumas articulações possíveis entre conteúdos da educação básica e da graduação, como por exemplo, entre a função quadrática e estudo de máximos e mínimos, limites e derivadas.

Palavras-chave: Ensino de matemática, Resolução de problemas, Modelagem, Função quadrática, Diferenciabilidade, GeoGebra, Pontos de máximo e mínimo

ABSTRACT

SANFELICE, Paulo César. PACKING AND DISPATCHING: THE MUTUAL RELATIONSHIP BETWEEN GEOMETRIC MODELS AND SCHOOL LEARNING. 67 p. Dissertation - Professional Master's Program in Mathematics in National Network - PROFMAT, Universidad Technologic Federal of Paraná. Curitiba, 2017.

This work presents a proposal for a mathematical modeling approach focused mainly on the last years of basic education. Based on the assumptions of solving problem, it explores several meaningful content. The social problem to be modeled consists of the format and variations in the dimensions of packages to be despatched by the Correios. The geometric, graphic and algebraic representations will be valued during the development of activities. In order to deepen the studies, it will be suggested some possible articulations between contents of basic and undergraduate education, for example, between the quadratic function and study of maximum and minimum, limits and derivatives.

Keywords: Mathematics teaching, Solving problem, Modeling, Quadratic function, Differentiation, GeoGebra, Maximum and minimum points

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em tempos onde cada vez mais se faz comum a prática de adquirir um produto que esteja a venda em qualquer lugar do planeta, torna-se imprescindível pensar se há limitações ou restrições quanto ao formato e dimensões deste produto, que impessam ou dificultam o seu correto processo de logística.

Com base nos estudos realizados no PROFMAT e com algumas informações disponibilizadas pelos Correios, quanto ao formato e dimensões das embalagens, observou-se a necessidade de realizar uma análise investigativa sobre as possíveis variações que alguns formatos de embalagens podem sofrer para que estas cumpram com as condições determinadas pela empresa. Tal análise só se fez possível graças ao arcabouço teórico dos conhecimentos adquiridos em algumas disciplinas que compõem o programa de mestrado.

A título de evidenciar e nortear os direcionamentos dos estudos segue uma sugestão de problematização, cujo processo de elaboração de uma resposta consistente perpassaria por todos os estudos aqui direcionados:

> "Comprei um objeto de presente para meu sobrinho que reside no município de Serra, região metropolitana de Vitória – ES. Como resido em Curitiba – PR terei de contratar os serviços de uma empresa que seja especializada na logística de envio de produtos para realizar o envio deste presente. A primeira empresa que me veio em mente foram os Correios. Será que consigo despachar esse presente através do correio?"

1.1 JUSTIFICATIVA

Esta dissertação tem por justificativa subsidiar o leitor com uma proposta de articulação entre a resolução de problemas, concebida aqui como uma metodologia de ensino e a modelagem matemática, enquanto estratégia passível de fornecer ao estudante contextos oriundos de sua prática social e, portanto, geradores de interesse e significação aos conhecimentos matemáticos.

Para fundamentar a área de Matemática, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), cita que

> a Matemática pode ser vista como uma fonte de modelos para fenômenos que nos cercam. Esses modelos compreendem não somente os conceitos, mas as relações entre eles, procedimentos e representações de diversas ordens. (BNCC, 2016, p. 116).

E, finaliza o parágrafo estabelecendo uma relação entre uma caixa de sapatos e um paralelepípedo retângulo (modelo matemático abstrato). Tanto esta quanto as demais recomendações presentes no documento tem como base facilitar o processo de ensino e aprendizagem, agregando significação aos conceitos, o que está atrelado ao recurso da contextualização de problemas que, para o Ensino Médio, sugere que ocorra de forma cíclica: contextualizar, descontextualizar e novamente contextualizar e, depois, reiniciar este movimento.

Reforçando a importância da contextualização, como fonte para organizar o conhecimento a BNCC aponta que

> Promover a curiosidade, imaginação e investigação apresentará características diferentes em diferentes etapas ainda que, sempre que possível, os conhecimentos sejam contextualizados, antes de se promover a generalização e a abstração. (BNCC, 2015, p. 10).

Corroborando com essa concepção, a Educação Matemática Escolar é concebida aqui como um movimento em constante transformação, cuja tríade aluno, conhecimento e professor, se reorganiza na constante ação entre o professor e o aluno, mediada pelo conhecimento matemático que necessita de organização. Tal organização e sistematização fundamentam-se principalmente na forma como o professor concebe o ensinar e, consequentemente, direciona o aprender e apoiado nesta concepção, vai à busca de estudos e pesquisas que organizem sua prática.

Para efeito de nortear os fundamentos adotados, tanto na escrita textual quanto na elaboração e encaminhamento das tarefas de estudo que permeiam toda ação pedagógica (organização do processo de ensino e aprendizagem), na proposta neste trabalho optou-se por fazer uso da Teoria da Atividade desenvolvida por Leontiev e nos estudos de Davidov, que ganham força no Brasil com a reorganização proposta por Moura (2010) (Atividade Orientadora de Ensino).

Em poucas palavras, esses autores consideram que a aprendizagem é mediada culturalmente de modo que depende de interações sociais, ocorrendo nas relações do sujeito com os meios natural e social, por meio de instrumentos e signos socialmente constituídos e utilizados (VERTUAN, BORSSOI e ALMEIDA, 2013). Conforme afirma Oliveira (2000, p. 14), com base em Vygotsky: "A trajetória do desenvolvimento humano se dá, portanto, 'de fora para dentro', por meio da internalização de processos interpsicológicos", ou seja, o desenvolvimento se dá do interpsíquico para intrapsíquico, do social para o individual.

Quanto à relevância do contexto cultural e social, na mediação da aprendizagem, os Princípios Orientadores da Base Nacional Comum Curricular estabelecem entre os objetivos relacionados à aprendizagem e ao desenvolvimento dos estudantes, no que tange o direito à educação, garantir que os estudantes ao longo da vida escolar possam

> relacionar conceitos e procedimentos da cultura escolar àqueles do seu contexto cultural; articular conhecimentos formais às condições de seu meio e se basear nesses conhecimentos para a condução da própria vida, nos planos social, cultural, e econômico. (BNCC, 2015, p. 08).

Partindo do pressuposto de que a modelagem matemática constitui uma excelente fonte de riqueza à contextualização, pois subsidia o ensino da matemática com situações oriundas de modelos que, por conseguinte, são passíveis de problematizações, as quais, encaminhadas sob o viés da resolução de problemas, organizam e favorecem o ensino e aprendizagem tem-se uma indicação do porquê de sugerir uma proposta que articule ambas, em uma ação docente propícia a render bons frutos no pomar dos conhecimentos.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Estruturar uma abordagem que permita ampliar a construção conceitual, tanto de funções de uma variável, quanto de duas vairáveis, contribuindo com o processo de sistematização do pensamento e, por conseguinte na formação humana.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Situar a resolução de problemas com uma metodologia viável à articulação entre o conhecimento científico e sociocultural.

- Modelar um fenômeno de cunho social.
- Articular a geometria à aritmética e à álgebra.
- Aplicar os conhecimentos sobre funções de uma variável, através da inserção dos conceitos de: taxa média de variação, limites e derivadas.
- Conceituar e explorar os conceitos e as propriedades de funções de duas variáveis.

2 MODELAR E RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Como, tanto a resolução de problemas quanto a modelagem matemática, são linhas de ações pedagógicas com uma vasta coletânea de pesquisas, artigos e livros, optou-se por analisar cada uma segundo sua especificidade.

A resolução de problemas, por exemplo, adquire diferentes concepções dependendo do momento e enfoque adotado em seus estudos (linha de pesquisa e realidade educacional, entre outros). Já a modelagem matemática constitui uma das estratégias metodológicas que, na última década do século passado, ganhou destaque como geradora de interesse e significação no aprendizado de novos conceitos. Esta estratégia se fundamenta na análise do processo de modelação de fenômenos naturais e sociais que tenham sentido e significado para os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Portanto, mesmo partilhando de um objetivo comum: contribuir com o desenvolvimento intelectual do aluno, no que diz respeito aos aspectos específicos do saber matemático, cada qual (resolução de problemas e modelagem matemática) apresenta suas particularidades, que serão tratadas nos tópicos seguintes.

2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A título de elucidar qualquer dúvida que o leitor possa vir a ter quanto ao uso do termo "resolução de problemas", inicia-se este tópico deixando claro que a análise de diferentes literaturas da área no que tange uma relação temporal tem indicado, além de diferentes teorias, diferentes designações para essa perspectiva, como "solução de problemas" ou mesmo "resolução de problemas". Dentro dos estudos e pesquisas realizados, optou-se aqui pela grafia "resolução de problemas".

Entre os autores que se reportam a este tema como solução de problemas, cita-se Brito, que define a solução de problemas como

> "um processo cognitivo que visa transformar uma dada situação em uma situação dirigida a um objetivo, quando um método óbvio de solução não está disponível para o solucionador, apresentando quatro características básicas: é cognitiva, é um processo, é dirigida a um objetivo e é pessoal, pois depende do conhecimento prévio do indivíduo... refere-se a uma

> atividade mental superior ou de alto nível e envolve o uso de conceitos e princípios para atingir a solução." (BRITO, 2006, p. 18).

O Conselho Nacional dos Professores de Matemática (NCTM – National Council of Teachers of Mathematics), em sua publicação Princípios e Normas para a Matemática Escolar enfatiza a singularidade existente entre a resolução de problemas e o aprendizado em matemática, o que pode ser confirmado nesta citação, na obra de John A. Van de Walle:

> "Resolver problemas não é apenas uma meta da aprendizagem matemática, mas também um modo importante de fazê-la. A resolução de problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, portanto, não deve ser apenas uma parte isolada do programa de matemática. A Resolução de Problemas em Matemática deve envolver todas as cinco áreas de conteúdo descritas nos padrões da NCTM. Os bons problemas integrarão múltiplos tópicos e envolverão a matemática significativa." (NCTM, 2000, p. 52 apud VAN DE WALLE, John, 2009, p. 57).

Corroborando com a relevância do domínio da resolução de problemas, para com o ensino da matemática escolar, a Base Nacional Comum Curricular condiciona, no tópico voltado à componente curricular (e área de conhecimento) da Matemática, a formação plena do cidadão à apropriação do conhecimento matemático. Para atender a estas condições, indica a organização do raciocínio cumprindo com cinco objetivos gerais, entre os quais, enfatiza explicitamente a resolução de problemas em um deles, "Resolver problemas, criando estratégias próprias para sua resolução, desenvolvendo imaginação e criatividade" (BNCC, 2015, p. 118) e, analisando o teor dos demais objetivos, constata-se vínculo com essa perspectiva.

O fortalecimento do ensino da matemática escolar ocorrerá por meio da resolução de problemas, entendida aqui como uma perspectiva metodológica deste componente curricular, perpassando e incorporando algumas concepções tidas como ideais, historicamente falando como meta, processo e habilidade básica (SMOLE e DINIZ, 2001, p. 87. Adaptado.)

> [...] a Resolução de Problemas corresponde a um modo de organizar o ensino o qual envolve mais que aspectos puramente metodológicos, incluindo uma postura frente ao que é ensinar e, consequentemente, do que significa aprender. Daí a escolha do termo "perspectiva", cujo significado "uma certa forma de ver" ou "um certo ponto de vista" corresponde a ampliar a conceituação de Resolução de Problemas como simples metodologia ou conjunto de orientações didáticas". (SMOLE e DINIZ, 2001, p. 89).

Dependendo da concepção adotada, a resolução de problemas pode ser concebida como um conteúdo, passando a ser ensinada e encaminhada, como um conjunto de conhecimentos e procedimentos aplicáveis com vistas a solucionar um problema, pois "pode ser categorizada como um tipo de aprendizagem se for considerado que ocorre a aprendizagem dos procedimentos de solução do problema e a ampliação dos conceitos e princípios envolvidos para a solução". (BRITO, 2006, p. 21).

A eficácia no processo de resolução de problemas está condicionada ao entendimento do problema e a correta mobilização de recursos cognitivos necessários para este fim. Portanto, o êxito na resolução está diretamente relacionado tanto ao desenvolvimento do domínio da leitura, escrita, cálculo e conceitos prévios quanto ao estudo e aprendizado das heurísticas, ou seja, do conjunto de regras e métodos que visam a descoberta, a invenção ou a resolução de problemas, base para o domínio da resolução de problemas.

Polya escreve em *How to Solve It* que ao estudar as heurísticas modernas "procuramos entender o processo de resolução de problemas, especialmente as operações mentais tipicamente úteis nesse processo" (POLYA, 1945 apud KRULIK, 1997, p. 13). Em seus estudos, Polya indica existir uma correlação direta entre a melhoria no entendimento das estratégias gerais de resolução de problemas e a influência positiva deste processo no ensino da matemática.

Uma pessoa bem sucedida em Matemática saberia raciocinar e pensar de maneira mais adequada. "Essa concepção popular reflete-se na ciência e na filosofia na medida em que, em muitas ocasiões, equiparam-se 'as regras do bom pensar' com os procedimentos algorítmicos e heurísticos usados na solução das tarefas matemáticas." (POZO, 1998, p. 44), ou seja, uma pessoa que sabe raciocinar terá mais facilidade no aprendizado do conhecimento matemático.

A título de curiosidade, há vários estudos que tratam tanto das *tipologias de problemas* quanto das *heurísticas* possíveis de serem utilizadas no processo de resolução de problemas. Porém, como o propósito deste texto é de subsidiar o leitor com alguns elementos e características/especificidades sobre o tema resolução de problemas, fica aqui como sugestão para o leitor aprofundar suas pesquisas caso considere oportuno.

Vale ressaltar que todo o direcionamento que será dado ao estudo das embalagens, tem como base-se e fundamento a *resolução de problemas* como linha metodológica.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

> O divórcio entre o pensamento e a experiência direta priva o primeiro de qualquer conteúdo real e transforma-o numa concha vazia de símbolos sem significado.
> (Adler, 1970. In: Biembengut, M. S., p. 10)

Ao fundamentar a área da Matemática, a Base Nacional Curricular Comum aponta que essa área

> pode ser vista como uma fonte de modelos para fenômenos que nos cercam. Esses modelos compreendem não somente os conceitos, mas as relações entre eles, procedimentos e representações de diversas ordens. (BNCC, 2016, p. 116).

O texto segue estabelecendo uma associação entre uma caixa de sapatos (objeto do mundo físico) e um paralelepípedo retângulo (modelo matemático abstrato). Ainda, compara a altura que uma bola atinge, ao ser lançada (ação do mundo físico) e um modelo matemático da função quadrática (abstração – lei analítica). Finaliza essa associação (entre mundo físico e abstrato) indicando que pode ser comparado a uma via de mão dupla, pois, podemos, para facilitar o estudo do modelo abstrato da figura geométrica esfera, associá-la ao objeto do mundo físico bola de futebol.

Essa associação entre o mundo físico e abstrato é que compõe a essência da modelagem matemática que, para Bassanezi (2002, p. 24), "*consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real*". Corroborando com Bassanezi, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio utilizam praticamente a mesma definição para modelagem matemática, apenas pressupondo que associação ou transposição, entre os problemas da realidade e matemáticos, sejam habilidades e não uma arte, conforme cita Bassanezi.

Com o intuito de facilitar o entendimento do processo que compõe a modelagem matemática, segue uma ilustração retirada do livro de Cálculo, volume 01 escrito por George B. Thomas (2009, p. 16) e que sintetiza bem a definição proposta por Bassanezi:

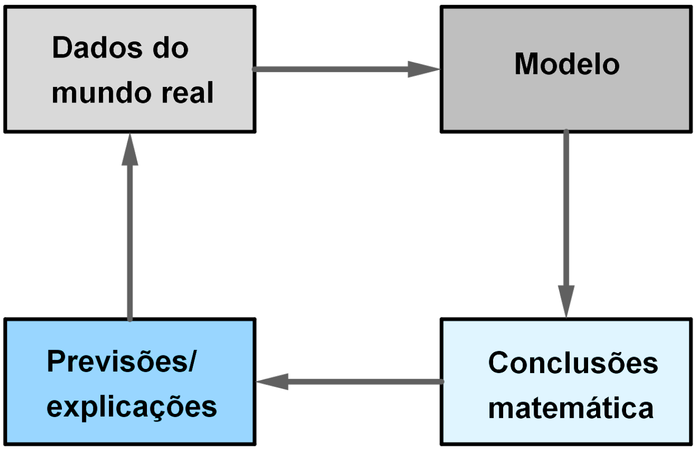


Figura 1: Fluxo do Processo de Modelagem, começando com um exame dos dados do mundo real (THOMAS, 2009, p. 16).

Quanto ao papel que a modelagem matemática pode desempenhar, no que tange a propiciar o aprendizado, Barbosa (2001, p. 03) relata que a modelagem gera "*um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade.*" Com relação ao objetivo que se pretende alcançar com a inserção, em sala de aula, de atividades de Modelagem Matemática, Barbosa (2006, p. 01) indica três perspectivas possíveis de serem adotadas:

> "*a pragmática, com ênfase no desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, a científica, com ênfase na aprendizagem dos conceitos matemáticos e a sócio-crítica, que sublinha a análise do papel dos modelos matemáticos na sociedade*".

Nos estudos aqui propostos, referentes ao dimensionamento de embalagens, tem-se como desafio e pretensão abordar, dentro do possível, as três perspectivas simultaneamente, ou seja, priorizar um enfoque que estruture a modelação com estratégia à resolução de problemas e à aprendizagem de conceitos, adotando para tanto as perspectivas pragmática e científica e, ao elevar as discussões para a relevância e compreensão do papel da Matemática na sociedade, bem como, de sua importância na formação social do conhecimento, direcionar as ações para a perspectiva sociocrítica. Nessa perspectiva, inclui-se o conhecimento reflexivo que Skovsmose (1990, apud Barbosa, 2003, p. 04), indica como "*a capacidade de discutir as implicações dos resultados matemáticos, decorrentes da resolução da situação-problema, na sociedade.*"

Logo, no início do parágrafo anterior, ao ser mencionada a modelagem foi utilizada, de modo proposital, à designação *modelação* como referência à estratégia da modelagem matemática, portanto faz-se necessário uma explicação. A modelação matemática é a essência da modelagem aplicada em cursos regulares (sala de aula), ou seja, é a realidade de ação pedagógica, em se tratando de modelagem no ambiente escolar, conforme caracteriza muito bem Biembengut:

> "Em cursos regulares, nos quais há um programa a ser cumprido – currículo – e uma estrutura espacial e organizacional nos moldes "tradicionais" (como é a maioria das instituições de ensino), o processo de modelagem precisa sofrer algumas alterações, levando em consideração principalmente o grau de escolaridade dos alunos, o tempo disponível que terão para o trabalho extraclasse, o programa a ser cumprido e o estágio em que o professor se encontra, seja em relação ao conhecimento da modelagem, seja no apoio por parte da comunidade escolar para implantar mudanças. O método que utiliza a essência da modelagem em cursos regulares, com programa, denominamos *modelação matemática*." (BIEMBENGUT, Maria Salett, 2009, p. 18).

Quanto à forma de encaminhar a modelação em sala de aula, a autora, cita que o professor poderá utilizar-se de um único tema por tópico, conteúdo ou período letivo. Ele poderá escolher o tema ou propor que os alunos escolham. Como o leitor já pode constatar, pelo próprio título neste trabalho, o tema faz menção ao processo manipulação e despacho de embalagens do ponto de vista geométrico (espacial). Em termos de aplicação dos estudos com os alunos (sala de aula), há de pensar na organização e controle do tempo das aulas e justamente para se evitar transtornos ou quaisquer inconvenientes no planejamento docente, é que a autora deixa claro que a escolha do tema auxilia muito no controle deste processo.

Em sala de aula, para desenvolver o conteúdo programático, tendo como pressuposto a modelação, o professor deverá seguir as mesmas etapas e subetapas sugeridas no processo de modelagem. São elas (adaptado de BIEMBENGUT, Maria Salett. *Modelagem Matemática no Ensino.* p. 20-22):

- Interação: ocorre sobre o tema, que deve ser detalhado e delimitado/direcionado a uma área em questão. A motivação dos alunos corresponde à forma com que o professor se envolve com o tema e demonstra seu entusiasmo e interesse.

- Matematização: ocorre sobre as questões levantadas acerca do tema que, por sua vez, devem ser filtradas e, entre elas, selecionada uma que servirá de foco para as pesquisas e investigações. Quando for necessário utilizar conhecimentos sobre um conteúdo matemático para dar continuidade ao processo ou obtenção de um resultado, o professor deverá entrar com a matemática necessária, para posteriormente dar continuidade ao processo.

- Modelo: trata-se da representação (geométrica, algébrica, gráfica, etc.) elaborada, que permite a resolução da questão selecionada (e outras similares). Essa representação pode ser considerada um *modelo matemático*.

Com o intuito de reforçar a importância e ganho de qualidade no processo de ensino e aprendizagem com a inserção de uma proposta embasada na metodologia da resolução de problemas apoiada, entre outras estratégias, na modelação matemática, finaliza-se este tópico transcrevendo quatro objetivos gerais – dos sete propostos na BNCC para a área da matemática no ensino fundamental e no ensino médio –, sendo três específicos a cada segmento e um comum a todos:

OBJETIVOS GERAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL

- Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender o mundo à sua volta.
- Desenvolver o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e a capacidade para criar/elaborar e resolver problemas.
- Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, sabendo selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente.

OBJETIVOS GERAIS NO ENSINO MÉDIO

- Aplicar conhecimentos matemáticos em situações diversas, na compreensão das demais ciências, de modo a consolidar uma formação científica geral.
- Desenvolver a autoestima e a perseverança na busca de soluções, trabalhando coletivamente, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.
- Analisar criticamente os usos da Matemática em diferentes práticas sociais e fenômenos culturais, para atuar e intervir na sociedade.

OBJETIVO GERAL COMUM AO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

- Estabelecer relações entre conceitos matemáticos de um mesmo eixo e entre os diferentes eixos (Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções), bem como entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Uma análise cautelosa destes objetivos, bem como, o fato de perfazerem um total de quatro dos sete objetivos gerais propostos, tanto para o Ensino Fundamental I (EFI) quanto para o Ensino Médio (EM), já evidencia a importância da resolução de problemas e da modelação no processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar.

2.3 METODOLOGIA POTENCIALIZADA POR UMA ESTRATÉGIA

Conceber a análise de problemas como ponto de partida para a apropriação de conceitos – por meio da estruturação de processos e procedimentos –, vinculada à estratégia metodológica da modelação matemática, redireciona o início do processo de ensino e aprendizagem para a linha de situações-problema. A situação emerge a partir de um modelo real e/ou adaptação deste (situação cotidiana) e, com base em alguns condicionantes ou restrições, organiza-se um modelo matemático, vinculando a este problematizações pertinentes e viáveis tanto ao tema quanto ao enfoque dos conteúdos.

Em uma das conferências apresentadas em 2008[1], no Congresso Internacional de Educação Matemática (México), English, Lesh e Fennewald, apresentaram e exploraram quatro questões relacionadas aos rumos que a resolução de problemas tem tomado neste início de século. Entre as questões, citamos uma que destaca e corrobora com o parágrafo anterior: "Por que modelos e perspectivas de modelação são uma poderosa alternativa para as visões existentes sobre resolução de problemas?".

E os autores concluem afirmando que:

> A pesquisa sobre resolução de problemas matemáticos estagnou durante grande parte da década de 90 e início deste século. Além disso, a pesquisa que foi conduzida não parece ter se acumulado num corpo substancial de conhecimento, orientado para o futuro, de como se pode efetivamente promover a resolução de problemas dentro e além da sala de aula. Esta falta de progresso é devida principalmente aos muitos anos de elaborações repetidas de concepções governadas por regras de

[1] Disponível em: www.upf.br/seer/index.php/rep/article/view/3502/2288.

> competência em resolução de problemas. Chegou a hora de considerar outras opções para avançar na pesquisa em resolução de problemas e desenvolvimento curricular – "nós temos destacado a necessidade de reexaminar as hipóteses de nível fundamental sobre o que significa compreender conceitos e processos de resolução de problemas matemáticos. Uma poderosa alternativa em que temos avançado é a de utilizar as perspectivas teóricas e as metodologias de pesquisa associadas a uma perspectiva de modelos e modelação (MMP) em ensino, aprendizagem e resolução problemas matemáticos". Adotar uma MMP significa ter pesquisadores que estudam desenvolvimentos de modelos e modelação dos estudantes e que naturalmente utilizam abordagens integradas para explorar o (co)desenvolvimento de conceitos matemáticos, processos de resolução de problemas, funções metacognitivas, disposições, crenças e emoções. Esses pesquisadores também veem processos desenvolvimentais de resolução de problemas, num modo semelhante àquele que fariam ao estudar o desenvolvimento de conceitos matemáticos em áreas temáticas como os números iniciais, a geometria e a álgebra. Além disso, os problemas utilizados são simulações atraentes, situações autênticas de resolução de problemas (por exemplo, a seleção de equipes esportivas para os Jogos Olímpicos) e engajam os alunos no pensar matemático que envolve criar e interpretar situações (descrevendo, explicando, comunicando) pelo menos, tanto quanto ele envolve computar, executar procedimentos e raciocinar dedutivamente (ENGLISH; LESH; FENNEWALD, 2008, p. 10-11).

Dada a relevância do Congresso e o direcionamento considerado necessário à resolução de problemas, nas palavras desses conferencistas, não há muito que discorrer sobre a importância e, por conseguinte, o ganho de qualidade que poderá ser proporcionado ao processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar ao articular a modelação matemática e a resolução de problemas.

3 O TRABALHO PEDAGÓGICO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Ancorado no objetivo geral da área da matemática, indicado na BNCC, comum ao Ensino Fundamental II e ao Ensino Médio, já citado neste texto ("Estabelecer relações entre conceitos matemáticos de um mesmo eixo e entre os diferentes eixos..."), a ação pedagógica será permeada por modelos que valorizem a comunicação entre eixos. Partindo do pressuposto de que o eixo Geometria favorece e possibilita a articulação entre os demais eixos, os estudos terão como ponto de partida modelos de cunho geométrico, os quais, por meio de questionamentos e/ou problematizações, propiciarão a inserção de atividades de aprendizagem (Tarefas de Estudo) que envolvam conteúdos, deste e de outros eixos como, por exemplo, álgebra e funções.

3.1 O ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

A linguagem matemática se manifesta através de diferentes formas de representação dos conceitos. Entre elas, a representação geométrica agrega elementos visuais constituintes de um conceito (abstração), mesmo antes da completa estruturação deste no consciente do aluno, contribuindo com o processo de formação e amadurecimento do conceito. Ciente de que o mundo físico e a comunicação, tanto oral quanto escrita (registros), servem de suporte ao desenvolvimento de ideias e, por conseguinte, à apropriação de conceitos, faz-se necessário utilizar objetos e desenhos (representações geométricas) no decorrer da aquisição do conceito de espaço e suas unidades conceituais, abstraindo características e atributos constituintes do conceito.

As ações a serem encaminhadas centrarão esforços, num primeiro momento, em propiciar a aquisição ou consolidação (reorganização) de unidades conceituais, constituintes do conceito de espaço e, posteriormente, com a inserção da necessidade de medir, envolver unidades conceituais vinculadas ao conceito de número concreto (funções comunicativas do número), finalizando, quando possível, com investigações e inferências quanto a variações numéricas (número abstrato).

Nas sugestões de modelos (caixas de produtos), partiremos da tridimensionalidade, com vistas a explorar a bi e unidimensionalidade. O desenvolvimento das atividades estão apoiadas nos estudos de Pais (1996, p. 66), que indica quatro elementos fundamentais que intervêm fortemente no processo de ensino e aprendizagem da geometria euclidiana plana e espacial, a saber: objeto, desenho, imagem mental e conceito. Como estes elementos serão apropriados na fundamentação dos estudos, convém realizar uma síntese de cada qual.

Por objeto, o autor entende algo palpável (mundo físico) e que possa ser associado à forma de alguns conceitos geométricos, por exemplo, um cubo construído com algum material (varetas, argila, cartolina, etc.) que se associa ao conceito de cubo (abstração). O objeto primitivo daria sustentação e respaldo a apropriação do conceito, que é científico, gradual e complexo. Por se tratar de um material estruturado e sistematizado pedagogicamente, o objeto munido dessa concepção passa a ser um suporte à aquisição de conceitos que possam ser correlacionados às suas características. Dessa forma, a gênese do processo está na abstração e generalização, sendo a manipulação apenas o início da ação.

Assim como o objeto, o desenho (que é de natureza concreta) não apresenta características abstratas e gerais do conceito. Pais destaca que o uso de desenhos na geometria plana é mais simples do que na geometria espacial, pois nesta última envolve *perspectivas*, uma característica da tridimensionalidade que é de difícil assimilação para os alunos. O leitor deve perceber que ao "desenhar" um quadrado, se o fizer indicando a congruência entre lados e ângulos, agrega simbolismos inerentes ao conceito, porém, veja que ao fazê-lo já detém o domínio conceitual.

Quanto à imagem mental, o autor aponta que se relaciona ao conceito, pois envolve abstração; porém, por envolver também a subjetividade, há determinado afastamento da natureza científica. Apesar da dificuldade em definir o que seria uma imagem mental, Pais cita que

> o indivíduo tem uma dessas imagens mentais quando ele é capaz de enunciar, de forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos. Assim como as noções geométricas são ideias abstratas e, portanto, estranhas à sensibilidade exterior do homem, a formação de imagens mentais é uma consequência quase que exclusiva do trabalho com desenhos e objetos. (Pais, 1996, p. 70)

Quanto ao conceito geométrico, por ser geral e abstrato, é formalizado gradualmente (pouco a pouco), em um processo dialético entre o mundo físico e o mundo das ideias. A cerca da compreensão dessa natureza abstrata e geral do conceito geométrico, bem como de sua apropriação pelo aluno, Pais cita que

> passa, efetivamente, por um longo processo evolutivo no qual o aluno pode, inclusive, reviver dificuldades ocorridas na própria evolução histórica do conceito. Neste sentido, estabelece-se uma necessidade de análise das possíveis correlações existentes entre o processo evolutivo da formação histórica do conceito e as etapas pelas quais o aluno passa no transcurso da aprendizagem. É neste processo de conceitualização que o aluno lança mão de recursos que lhe são mais próximos e disponíveis, entrando em cena as representações por objetos e desenhos e, posteriormente, pelas imagens mentais.

Nessa perspectiva, a representação de um conceito pressupõe a existência de certo nível de formalização, o que justifica o fato de o aluno em um nível preliminar de aprendizagem identificar o conceito em sua representação (limitação física) – ao ver um traço no papel, por exemplo, "vê" a reta. Pressupondo, a partir do discorrido, certo entendimento quanto aos quatro elementos geométricos indicados por Pais, dar-se-á continuidade à aos estudos dos modelos geométricos, atrelando à estes a mensuração e por conseguinte, a análise das possibilidades de variações em sua estrutura dimensional.

3.2 DO CONCRETO AO ABSTRATO: A GENERALIZAÇÃO DO NÚMERO

Dentre as diferentes representações simbólicas da linguagem matemática, a representação algébrica apresenta um vasto potencial de escrita e síntese, pois, ao atribuir à letra o significado numérico, além de expandir o potencial da escrita numérica, otimiza esse processo (escrita sincopada) e expande o conceito de variação à quantidades ainda não conhecidas.

Segundo os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* a Norma da Álgebra dá ênfase às relações entre quantidades, incluindo funções; às formas de representar relações matemáticas; e à análise da variação. Para os professores dessa Associação (*NCTM*), o fato de as relações funcionais poderem ser expressas através de notação simbólica, permite que ideias matemáticas complexas possam ser descritas de forma sucinta e as variações, analisadas com maior grau de eficácia.

Conforme indicado no segundo parágrafo do tópico anterior, os estudos que serão aqui realizados partem da análise de modelos geométricos, porém, ao inserir a medição e o conceito de variação, que num primeiro momento se dará de forma numérica, exigirão extrapolações para variações com quantidades desconhecidas, ou seja, tais estudos também irão gerar a necessidade da escrita e análise de modelos algébricos.

Essa necessidade e potencial de articulação é ratificada pelos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* que afirma que “a álgebra encontra-se, também, intimamente relacionada à geometria e a análise de dados.” O documento enfatiza que, ao considerar a álgebra como um “fio condutor curricular”, os professores centrariam seus esforços em construir uma base sólida, com ênfase na preparação de um trabalho algébrico mais aprofundado, indicando que a experiência sistemática com padrões desenvolveria a compreensão de função e a experiência com os números e as suas propriedades, constituiria a base para o trabalho posterior com os símbolos e expressões algébricas.

As *Normas* para a Álgebra estabelecer para os programas de ensino do pré-escolar ao 12º ano, quatro habilidades que deverão ser assimiladas por todos os alunos, a saber:

- Compreender padrões, relações e funções.
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos.
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas.
- Analisar a variação em diversos contextos.

Ao direcionar os estudos dos modelos geométricos para a análise de variações quantitativas, pretende-se perpassar e incorporar essas quatro habilidades, pois, exigirá do aluno a compreensão de padrões, e, por conseguinte a escrita funcional, utilizando-se para tanto da elaboração e análise de modelos analíticos, voltados ao contexto da logística de dimensionamento de embalagens para o transporte (contexto social).

Essa articulação entre os eixos (Geometria – Álgebra) se fundamenta nas orientações da *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)* ao estabelecer entre seus pressupostos, para a área da Matemática no Ensino Médio, que

> O estudo das funções, por exemplo, deve priorizar aspectos relacionados à variação entre grandezas, permitindo que o/a estudante desenvolva efetivamente o pensamento funcional, em substituição às habilidades relativas à simples manipulação simbólico-algébrica, normalmente privilegiada pela escola.

Só para constar, além da utilização da letra com a conotação de variação e/ou relacionamento funcional, há outros dois usos possíveis, que são muito bem fundamentados nas pesquisas de Ursini e Trigueros (2001), que após analisarem as diferentes estratégias possíveis de serem usadas na resolução de problemas que envolvem símbolos, propuseram três categorias principais, no que tange o uso da letra, e que designaram por "modelo 3UV", a saber: incógnita, número generalizado e variável numa relação funcional. Como incógnita, representaria um valor particular desconhecido ou de uma constante. Como número generalizado, representaria a expressão de uma generalização e, como variável, argumento ou parâmetro de uma função *(In, Relações Funcionais e o Conceito de Variável em alunos do 8º Ano, p. 198).*

3.3 MODELOS GEOMÉTRICOS: UMA ANÁLISE MATEMÁTICA

Visto que os primeiros conhecimentos de natureza geométrica derivam de resultados empíricos relacionados à necessidade humana de medições de terras e cálculos de áreas e volumes (Egito Antigo) entre outros, optou-se, pela análise de modelos geométricos que venham ao encontro da necessidade humana do entendimento e melhor uso possível do espaço (otimização).

O uso do espaço terá como premissa, a análise e cumprimento de normas/condições que regulamentam toda e qualquer ação referente à organização e envio de embalagens de um local para outro. O ponto de partida dos estudos é um levantamento teórico (pesquisa) de documentos que regulamentam e/ou normatizam o envio de uma "encomenda", cuja embalagem possua o formato de pacote ou caixa, dado que o serviço seja executado por uma empresa que tenha tradição na logística de transporte de documentos e produtos (encomendas).

Só para constar, em se tratando do envio de encomendas, as pesquisas foram direcionadas à normatização disponibilizada pela empresa de maior relevância e historicidade no Brasil, ou seja, os Correios. Portanto, os modelos a serem estudados terão como premissa a adequação as condições previstas e regulamentadas pelos correios, visto que nas simulações, será esta a empresa responsável pelo recebimento, envio e correto destino dessas embalagens (modelos geométricos).

Visando favorecer o processo de ensino e aprendizagem da geometria euclidiana, se sugeri articular os *quatro elementos* propostos por Pais (tópico 2.1 do 2º capítulo), que serão instigados em vários momentos no decorrer da resolução de problemas, estando alguns destes, vinculados à modelação. O próprio modelo geométrico elaborado, a partir de uma suposta embalagem, se constitui em objeto (1º elemento) associado ao conceito de prisma regular.

Os alunos que tiverem a oportunidade de se envolver com as atividades, que serão aqui denominadas de *Tarefas de Estudos*, em alguns momentos serão instigados a representar, através de desenhos (2º elemento), tanto sólidos geométricos, quanto suas variações e padronizações (generalizações). É fato que, para representar um sólido geométrico, o aluno deve apoiar-se em suas imagens mentais (3º elemento) que, por conseguinte, estará subordinada ao conceito envolvido (4º elemento) que, a partir da ação cognitiva desencadeada, tende a se reorganizar e/ou refinar, sendo esse o maior objetivo com o desenvolvimento e execução dos estudos aqui direcionados!

Reforçando o que foi relatado, os estudos terão como meta provocar a articulação entre vários conteúdos e, por conseguinte, eixos. A Geometria é o ponto de partida, que atrelada a necessidade de medições adentrará ao eixo Grandezas e Medidas, que por sua vez, partindo do número como medida, conduzirá o estabelecimento de relações e o estudo de variações que, amparados na escrita algébrica, introduzirá a necessidade do estudo/domínio de conteúdos pertencentes ao eixo Álgebra e Funções.

3.3.1 A NORMATIZAÇÃO PARA O ENVIO DE ENCOMENDAS

Os Correios disponibilizam, em seu site, na seção “Para você”, tópico “Precisa de ajuda”, item “Limites de dimensões e de peso”, três tabelas que sintetizam todas as condições e especificações que devem ser cumpridas, a risca, por toda e qualquer encomenda que será despachada. Há especificações para o envio de:

- Pacote e Caixa;
- Envelope;
- Rolo.

Em se tratando de potencial para nossos estudos matemáticos, as três tabelas possuem informações/dados que propiciam análises e investigações, porém, a tabela “Pacote e Caixa” e a “Rolo”, além de possuir algumas informações adicionais, possibilita a introdução do estudo de conteúdos mais consistentes (complexos), portanto, num primeiro momento, poder-se-á direcionar os estudos para as duas tabelas. Com o intuito de fechar ou restringir um pouco mais as ações ou foco de estudo, optou-se por centrar os estudos na tabela “Pacote e Caixa”, porém, a título de sugestão o leitor irá constatar que a tabela “rolo” também fornece algumas condições interessantes para subsidiar um estudo para objetos e modelos cilíndricos.

A Figura 2 mostra a forma como é apresentada as tabelas com estas informações.

Pacote e Caixa	Mínimo	Máximo
Comprimento (C)	16 cm	105 cm
Largura (L)	11 cm	105 cm
Altura (A)	2 cm	105 cm
Soma máxima das dimensões: C + L + A	-	200 cm

Envelope	Mínimo	Máximo
Comprimento (C)	16 cm	60 cm
Largura (L)	11 cm	60 cm
O serviço de encomendas PAC não permite postagem de documento, somente encomenda. Caso haja uma encomenda de pequeno porte que seja colocada em envelope, deve ser utilizado o valor mínimo para altura que é de 2cm, para base de cálculo (somente para clientes com contrato).		

Rolo	Mínimo	Máximo
Comprimento (C)	18 cm	105 cm
Diâmetro (D)	5 cm	91 cm
Soma máxima das dimensões: C + (2 x D)	-	200 cm

Figura 2: Tabela “Limites de Dimensões e de Peso” (CORREIOS, 2016).

Conforme descrito, com o intuito de otimizar nossos estudos optamos por restringir, neste momento, nossas análises às embalagens que atendam as especificações da categoria “Pacote e Caixa”.

A Figura 3 apresenta a tabela “Pacote e Caixa” com as informações desta categoria.

Pacote e Caixa	Mínimo	Máximo
Comprimento (C)	16 cm	105 cm
Largura (L)	11 cm	105 cm
Altura (A)	2 cm	105 cm
Soma máxima das dimensões: C + L + A	-	200 cm

Figura 3: Tabela "Pacote e Caixa" (CORREIOS, 2016).

4 AS TAREFAS DE ESTUDOS

"A arte de pensar é a arte de fazer perguntas inteligentes."
(Rubem Alves)

Somos sabedores que a melhor maneira de envolver alguém em uma atividade é levá-lo a pensar sobre a mesma. Para tanto, partimos da premissa que bons questionamentos levam o aluno a refletir.

As atividades, nomeadas cada qual aqui como *Tarefa de Estudos*, têm como objetivo questionar e instigar o aluno a refletir sobre determinado conteúdo. Ao tomar contato com cada uma das *Tarefas de Estudos* que se seguem, o leitor irá perceber que sua organização possui um encadeamento cognitivo respeitando a hierarquização dos conteúdos que compõe a Educação Básica, ou seja, o nível de complexidade e aprofundamento vai se ampliando gradativamente.

4.1 *TAREFA DE ESTUDOS - INTERPRETAÇÃO E ANÁLISE*

Após interpretar e analisar as condições estabelecidas pelos Correios em relação ao despacho de embalagem com o formato de um pacote ou caixa, explique se é possível este produto ser despachado pelo correio, caso o adquira pela internet (loja virtual):

a) Imagem do produto embalado:

Figura 4: "Produto" (Loja.Tray.com.br, 2016).

b) Características do produto:

Especificações:

- Violão Acústico
- Corpo em Linden
- Binding em ABS branco
- Escala e Cavalete em Dark Maple
- Braço em Solid Basswood
- Tarraxas Douradas com Madrepérola
- Trastes em Níquel Silver
- Encordoamento em nylon
- Tensor Dual Action
- Tamanho: aprox. 100cm x 37cm x 10cm
- Marca: Michael

Observações:

- Produto novo a pronta entrega com garantia e nota fiscal;
- Medidas da embalagem: aprox. 104cm x 45cm x 15cm
- Peso do produto na embalagem: aprox. 2,350kg
- Garantia de 3 meses contra defeito de fabricação

Figura 5: "Características do Produto" (Loja.Tray.com.br, 2016).

Objetivos

- Estabelecer um comparativo entre os dados presentes na tabela "Pacote e Caixa" e as especificações do produto a ser adquirido, a fim de se certificar se o mesmo atende as condições determinada para o despacho, via correio.

Obs.: Para que o aluno estabeleça um comparativo, será necessário interpretar, analisar e refletir, sobre os dados, tanto da tabela, quanto do quadro com as informações e características do produto, que apresenta a embalagem com o formato de um prisma reto de base trapezoidal. Deve-se analisar de quais medidas da caixa se referem as medidas indicada para a embalagem. Feito um comparativo o aluno decidirá se atende ou não as condições para o envio do produto e argumentar, com propriedade sobre o porquê da decisão tomada.

Conteúdos envolvidos:

- leitura e interpretação de tabelas e quadros;

- medidas de Comprimento;
- noções básicas de sólidos (dimensões e arestas).

4.2 *TAREFA DE ESTUDOS: REPRESENTANDO ALGEBRICAMENTE*

Elabore uma tabela que contenha as variações possíveis para uma caixa que será despachada pelo correio, onde as dimensões sofrem aumento unitário. Em seguida, represente algebricamente essas variações e, fazendo uso desta escrita, calcule as maiores dimensões que esta caixa pode ter.

Sugestão de elaboração de tabela:

1. Tabela com aumentos unitários:

   Tabela de possibilidades com aumentos unitários do comprimento, da largura e da altura e análise dos comprimento das condições estabelecidas.

Possibilidades				
Comprimento (C)	Largura (L)	Altura (A)	$C + L + A \leq 200$	Cumpre a condição
16 cm	11 cm	2 cm	$16 + 11 + 2 = 29$	Verdadeiro
17 cm	12 cm	3 cm	$17 + 12 + 3 = 32$	Verdadeiro
18 cm	13 cm	4 cm	$18 + 13 + 4 = 35$	Verdadeiro
...	...	...	...	...

Tabela 1: Aumentos Unitários do comprimento, da largura e da altura.

2. Generalização do padrão existente (escrita algébrica):

Possibilidades				
Comprimento (C)	Largura (L)	Altura (A)	$C + L + A \leq 200$	Cumpre a condição
16 cm	11 cm	2 cm	$16 + 11 + 2 = 29$	Verdadeiro
17 cm	12 cm	3 cm	$17 + 12 + 3 = 32$	Verdadeiro
18 cm	13 cm	4 cm	$18 + 13 + 4 = 35$	Verdadeiro
...	...	...	...	...
$(16 + x)$ cm	$(11 + x)$ cm	$(2 + x)$ cm	$29 + 3x \leq 201$	Falso

Tabela 2: Expressão algébrica para comprimento, largura e altura.

3. Adaptação da escrita algébrica às restrições e cálculo da incógnita x:

Possibilidades				
Comprimento (C)	Largura (L)	Altura (A)	$C + L + A \leq 200$	Cumpre a condição
16 cm	11 cm	2 cm	$16 + 11 + 2 = 29$	Verdadeiro
17 cm	12 cm	3 cm	$17 + 12 + 3 = 32$	Verdadeiro
18 cm	13 cm	4 cm	$18 + 13 + 4 = 35$	Verdadeiro
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(16 + x)$ cm	$(11 + x)$ cm	$(2 + x)$ cm	$29 + 3x \leq 201$	Falso
$(16 + x)$ cm	$(11 + x)$ cm	$(2 + x)$ cm	$29 + 3x \leq 198$	Verdadeiro

$x \leq 56.\overline{3}$ cm

Tabela 3: Análise de Condição 01.

Possibilidades				
Comprimento (C)	Largura (L)	Altura (A)	$C + L + A \leq 200$	Cumpre a condição
16 cm	11 cm	2 cm	$16 + 11 + 2 = 29$	Verdadeiro
17 cm	12 cm	3 cm	$17 + 12 + 3 = 32$	Verdadeiro
18 cm	13 cm	4 cm	$18 + 13 + 4 = 35$	Verdadeiro
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(16 + x)$ cm	$(11 + x)$ cm	$(2 + x)$ cm	$29 + 3x = 201$	Falso
$(16 + x)$ cm	$(11 + x)$ cm	$(2 + x)$ cm	$29 + 3x = 198$	Verdadeiro
$(16 + 57)$ cm	$(11 + 57)$ cm	$(2 + 57)$ cm	$29 + 171 = 200$	Verdadeiro

$x = 57$ cm

Tabela 4: Análise de Condição 02.

Para aumentos unitários, as maiores dimensões que uma caixa pode assumir, em conformidade com as condições indicada na tabela, será:

- comprimento: 73 cm;
- largura: 68 cm;
- altura: 59 cm.

Objetivos:

- desenvolver um modelo de tabela (alfabetização estatística) que contemple as orientações descritas na tarefa;
- representar aritmeticamente intervalos de variações;
- representar algebricamente intervalos de variações;
- elaborar uma inequação ou equação que articule o padrão de variação à condição “soma máxima das dimensões”, descrita na tabela de especificações “Pacote e Caixa”;

- calcular o valor de uma incógnita em uma equação.

Obs.: As condições indicadas na Tabela 3, tanto para cada dimensão quanto para a soma destas, é que definirá o intervalo de variação das dimensões, na escrita tabular.

Conteúdos envolvidos:

- leitura e interpretação de tabelas;
- elaboração de tabelas;
- expressão algébrica;
- equação do 1º grau;
- inequação do 1º grau.

4.3 *TAREFA DE ESTUDOS: REPRESENTANDO EM GRÁFICO*

Represente em um gráfico as variações possíveis para uma caixa, que possui 60 cm de comprimento e formato de um prisma retangular, dado que atenda as especificações do correio.

a) Modelo de caixa com o formato de um prisma retangular, onde A e L representam altura e largura, respectivamente:

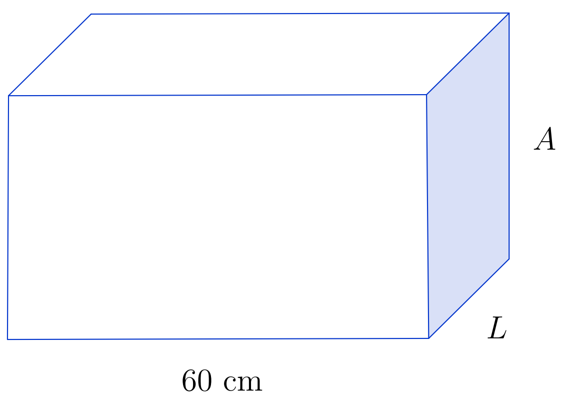


Figura 6: Modelo de Caixa 01.

b) Escrita algébrica adaptada à condição indicada na tabela "Pacote e Caixa", Tabela 4:

$$
\begin{aligned}
60\text{cm} + L + A &\leq 200\text{cm} \\
L + A &\leq (200 - 60)\text{cm} \\
L + A &\leq 140 \\
L &\leq (140 - A)\text{cm} \\
A &\leq (140 - L)\text{cm}.
\end{aligned}
$$

Escrevendo como uma função matemática, onde $f(x)$ representa a altura da caixa e x sua largura:

$$f(x) = 140 - x.$$

Com o apoio de um aplicativo, será proposta a construção gráfica desta função. Deixamos claro que, em nossos estudos, optamos por fazer uso do *Geogebra* para gerar todas as imagens relativas a gráficos de funções, visto que se trata de um software livre que reúne Álgebra e Geometria é possível de ser utilizado em todos os níveis de ensino.

Inicialmente temos o gráfico da função f definido de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, sem restrições ou limitações, ou seja, em notação de conjunto, tem-se $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$:

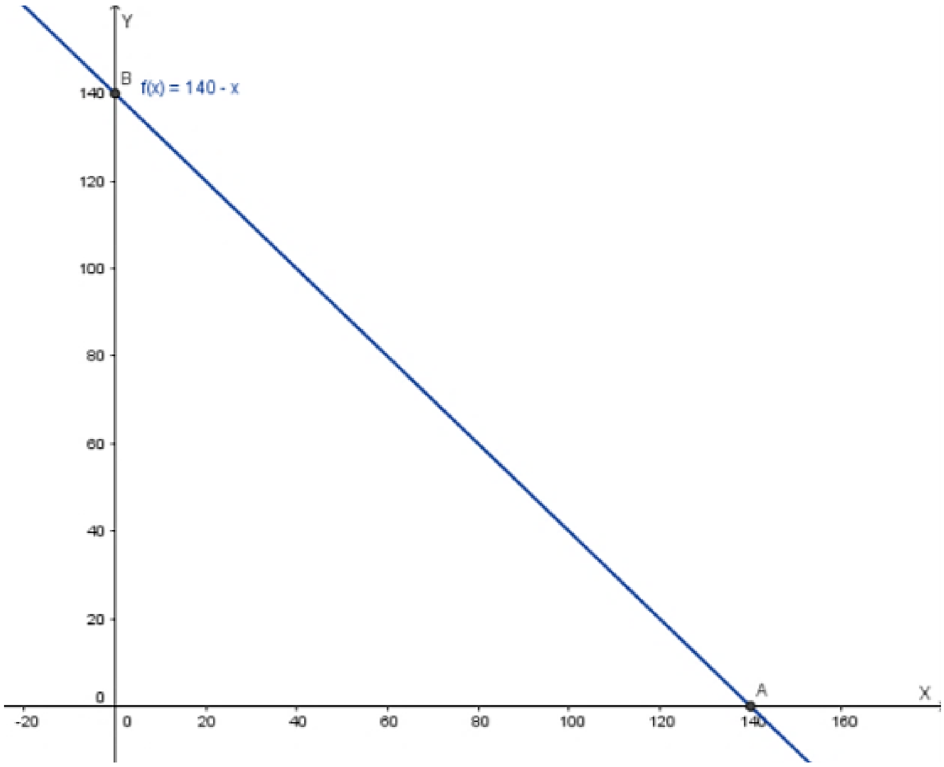


Figura 7: Gráfico Geral de $f(x) = 140 - x$.

Conforme pôde constatar, o gráfico representa uma função linear decrescente, ou seja, seu coeficiente angular ou taxa de variação é dado por $a = -1$. Visto que foi indicada a ideia de taxa de variação como sinônimo de coeficiente angular, o professor poderá aproveitar o suporte gráfico para inserir em sala o conceito de *Taxa Média de Variação.*

Pode-se contrapor mais de uma definição, por exemplo, Dante (2013, p. 75) define especificamente para a função afim, conforme pode ser constatado nos grifos do autor:

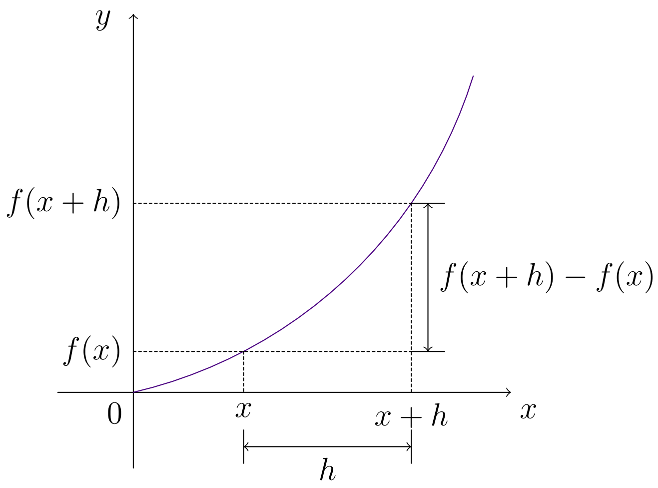
Taxa de variação média da função afim $f(x) = ax + b$

Em qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quando damos um acréscimo h à variável x, passando de x para $x+h$, há, em correspondência, um acréscimo $f(x+h) - f(x)$ no valor da função.

Definição 1 *Dados x e $x + h$ números reais, com $h \neq 0$ o número*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

chama-se ***taxa de variação média da função f no intervalo*** $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}]$.



Dados x e $x+h$ números reais, com $h \neq 0$, e a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, sua taxa de variação média em relação a x é dada pelo número:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

Portanto,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a.$$

Já George B. Thomas (2009, p. 68), estende esse conceito a uma função qualquer, vinculando-o ao conceito de reta secante.

Taxas médias de variação e retas secantes

Dada uma função arbitrária $y = f(x)$, calculamos a taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ dividindo a variação do valor de y, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, pelo comprimento $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ do intervalo ao longo do qual a variação ocorre.

Definição 2 (Taxa média de variação num intervalo) *A* ***taxa média de variação*** *de $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ é*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Geometricamente, a taxa de variação de f no intervalo $[x_1, x_2]$ é o coeficiente angular da reta que passa nos pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$ (Figura 8). Em geometria, uma reta que une dois pontos de uma curva é uma secante em relação à curva. Portanto, a taxa média de variação de f desde x_1 até x_2 é igual ao coeficiente angular da secante PQ.

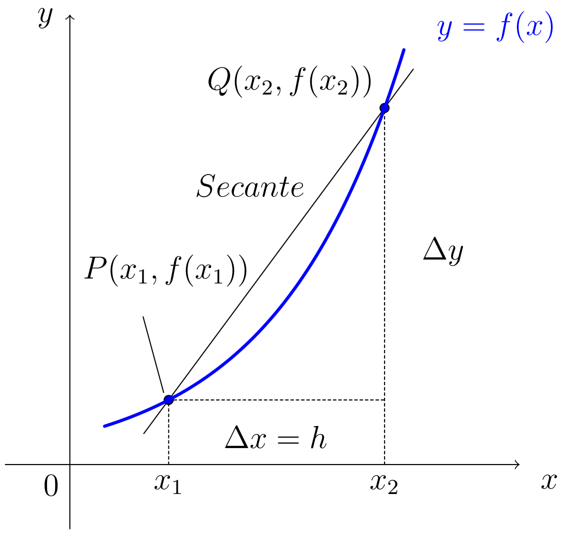


Figura 8: Uma reta secante ao gráfico de $y = f(x)$.

A extensão geométrica proposta por Thomas dá a possibilidade de o professor questionar seus alunos sobre o que ocorrerá, com a reta secante, caso o intervalo dado por x_1 e x_2 vá reduzindo de tamanho, isto é h vá tendendo a zero. Neste momento o professor poderá introduzir a noção de derivada, como poderá ser observado mais à frente.

Dando continuidade, faz-se necessário articular os estudos das funções a situações reais do cotidiano, isto é, por meio de questionamentos, levar o aluno a investigar e adaptar o gráfico às condições dadas pelos Correios, o que irá gerar a necessidade de interpretar, identificar e destacar, na escrita gráfica, o intervalo de reta (segmento), para o qual cada variação de dimensão (dada pelo eixo da abscissa e da ordenada) se enquadre às condições indicadas na tabela “Pacote e Caixa”, Figura 3.

Ao realizar esta análise, o aluno estará fazendo jus ao processo de modelação em sua essência, estabelecendo vínculos entre modelos matemáticos (geométrico e algébrico) e uma situação real modelada. O resultado dessa análise segue em destaque no gráfico (negritado - segmento $\overline{AE}$), agora adaptado ao estudo do fenômeno social:

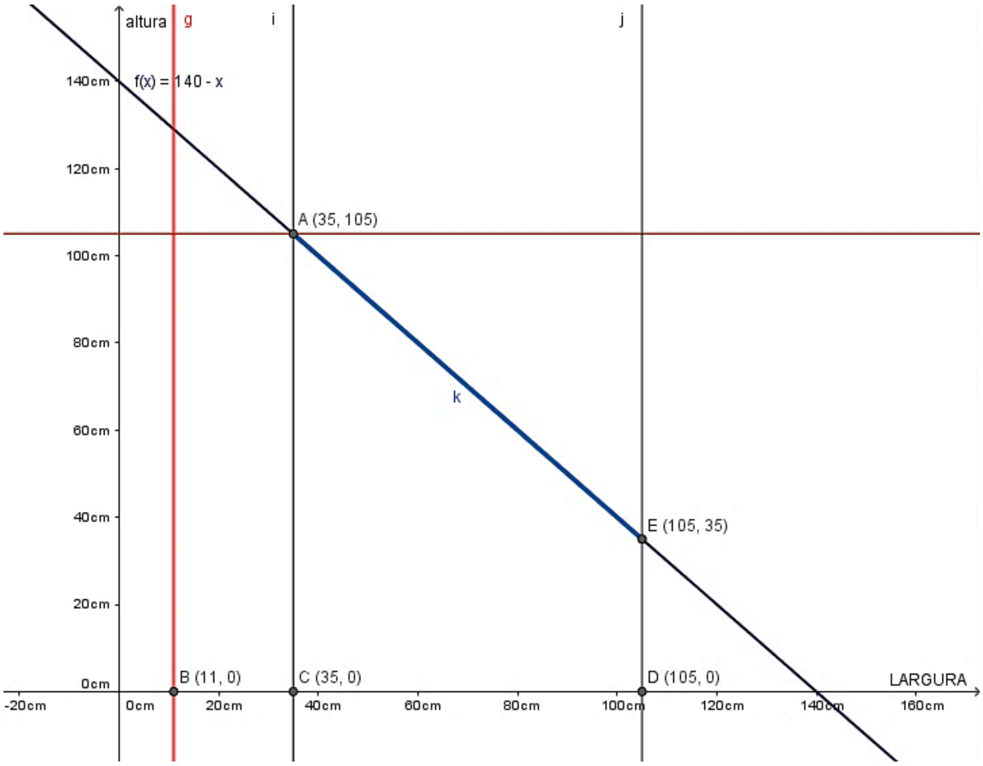


Figura 9: Gráfico Modelado de $f(x) = 140 - x$.

Perceba que, num primeiro momento, quando o aluno for contrapor as variações das dimensões da altura (A) e da largura (L) da caixa, com o gráfico de f terá a opção de escolher qual das duas dimensões irá vincular a qual dos dois eixos. Porém, seja qual for sua opção, ao adaptar sua escrita gráfica às condições indicadas para as dimensões desconhecidas, irá constatar que tal escolha será indiferente, pois, o menor valor que a variável x poderá assumir será 35 cm, logo supera tanto a altura mínima (11 cm) quanto a largura mínima (2 cm), indicadas na tabela "Pacote e Caixa", Figura 3.

Se questionado quanto ao domínio e imagem da função modelada, verificar-se-á que houve uma restrição, passando ambos a ser indicado por um intervalo do conjunto dos reais, ou seja, $f : [35, 105] \to [35, 105]$. Pode-se dizer que as variações possíveis, entre a largura e altura, ocorreram no gráfico de f entre os pontos $(35, 105)$ e $(105, 35)$, cuja medida se equivale ao da diagonal de um quadrado de lado 70 cm, ou seja, $70\sqrt{2}$ cm.

Objetivos:

- representar sólidos;
- elaborar escrita algébrica que articule um padrão de variação à condição dada

(em nossos estudos: “Soma máxima das dimensões” – descrita na tabela de especificações “Pacote e Caixa”, Figura 3);

- transpor a escrita de uma representação para outra (escrita algébrica para escrita funcional);
- representar graficamente uma lei analítica, dada por uma função afim;
- analisar e moldar uma representação gráfica a um fenômeno.

Conteúdos envolvidos:

- leitura e interpretação de tabelas;
- representação espacial de sólidos (perspectivas);
- expressão algébrica;
- equação e inequação do 1º grau;
- função afim (representação algébrica e gráfica).

4.4 *TAREFA DE ESTUDOS: MÁXIMOS E MÍNIMOS*

Uma embalagem, com formato de um prisma retangular, possui 60 cm de comprimento. Dado que essa embalagem será despachá-la pelo correio, qual deverá ser a medida das outras duas dimensões para que sua área total seja máxima?

a) Modelo de embalagem com o formato de um prisma retangular:

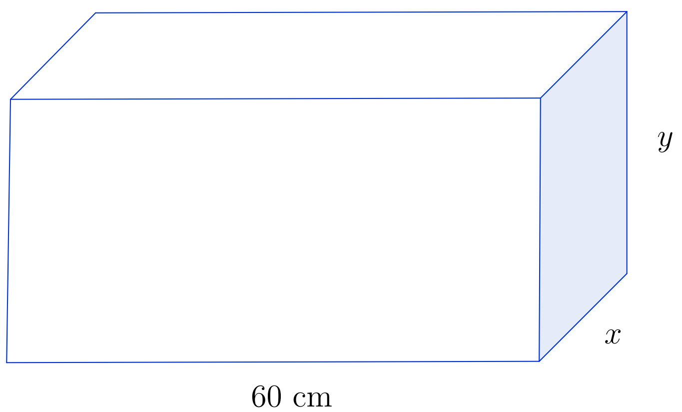


Figura 10: Modelo de Caixa 02.

b) A área da embalagem será dada por:

$$\mathcal{A} = 2 \cdot 60x + 2 \cdot 60y + 2xy,$$
$$\mathcal{A} = 2xy + 120x + 120y.$$

Sendo o comprimento uma medida conhecida e que, para obtermos a área máxima da embalagem teremos de respeitar a condição estabelecida pelos Correios de que a soma máxima das três dimensões não pode ultrapassar 200 cm, temos a equação:

$$x + y + 60 = 200,$$
$$x + y = 140.$$

Se condicionarmos uma variável, a altura y (variável dependente) em função da variação da outra dimensão desconhecida, a largura x (variável independente), e substituirmos na fórmula da área indicada no item "b", a mesma será reescrita como:

$$\mathcal{A} = 2x(140 - x) + 120x + 120(140 - x). \qquad (1)$$

Após aplicar a propriedade distributiva e realizar as simplificações possíveis temos:

$$\mathcal{A} = -x^2 + 140x + 8400. \qquad (2)$$

Adaptando à notação de função, teremos:

$$f(x) = -x^2 + 140x + 8400.$$

Visto que se trata de uma função quadrática com coeficiente angular negativo (parábola com concavidade voltada para baixo) e foram solicitadas as medidas das duas dimensões desconhecidas, para que a área da caixa seja máxima, será necessário realizar o estudo do ponto de máximo da função, pois a área máxima será representada geometricamente pela maior das ordenadas de f, ou seja, pela ordenada do ponto de máximo de f.

A outra coordenada do ponto de máximo, ou seja, a abscissa de f representa justamente a medida de uma das dimensões da caixa, no momento em que esta assume área máxima. Conforme se constata nas explicações dadas, o pleno entendimento da variação da função depende, num primeiro momento, da análise gráfica de seu comportamento, portanto será direcionado um estudo de seu gráfico.

Assim como na seção 4.3, a opção é iniciar com a construção de $f(x) = -x^2 + 140x + 8400$, sem restrições ou limitações, com o intuito do aluno visualizar o gráfico de f:

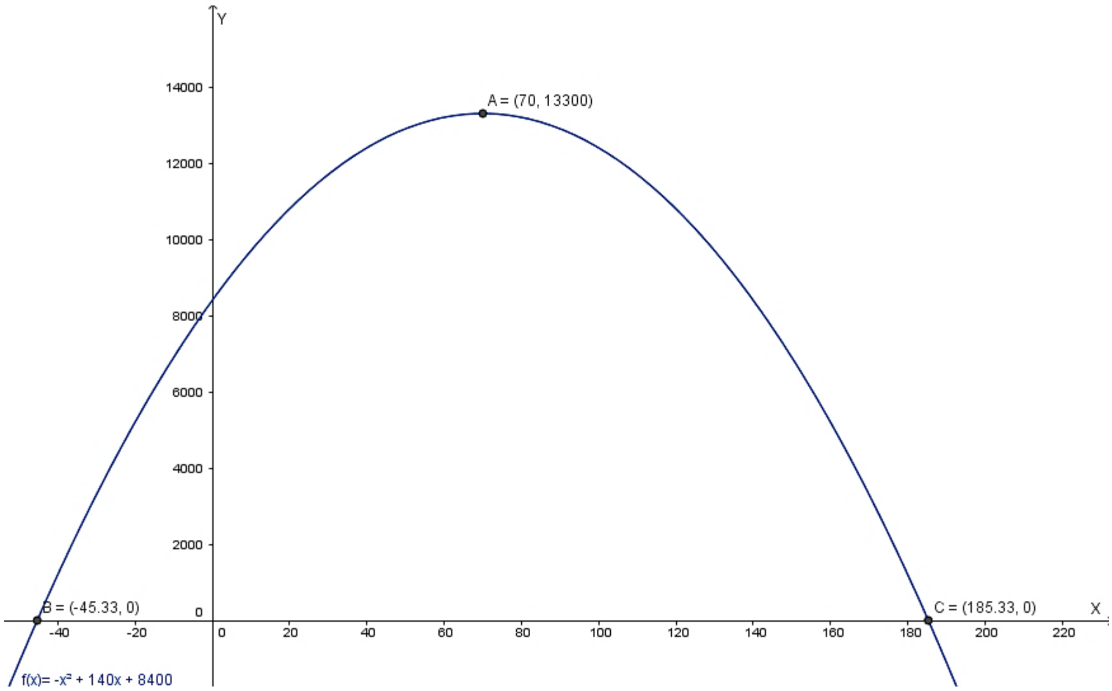


Figura 11: Gráfico de $f(x) = -x^2 + 140x + 8400$.

Assim como na seção 4.3, a próxima etapa consiste em adaptar f às restrições da embalagem com área máxima possível de ser despachada, ou seja, a função será modelada às condições determinadas pelo correio. A Figura 12 apresenta o gráfico com todas as informações já inseridas.

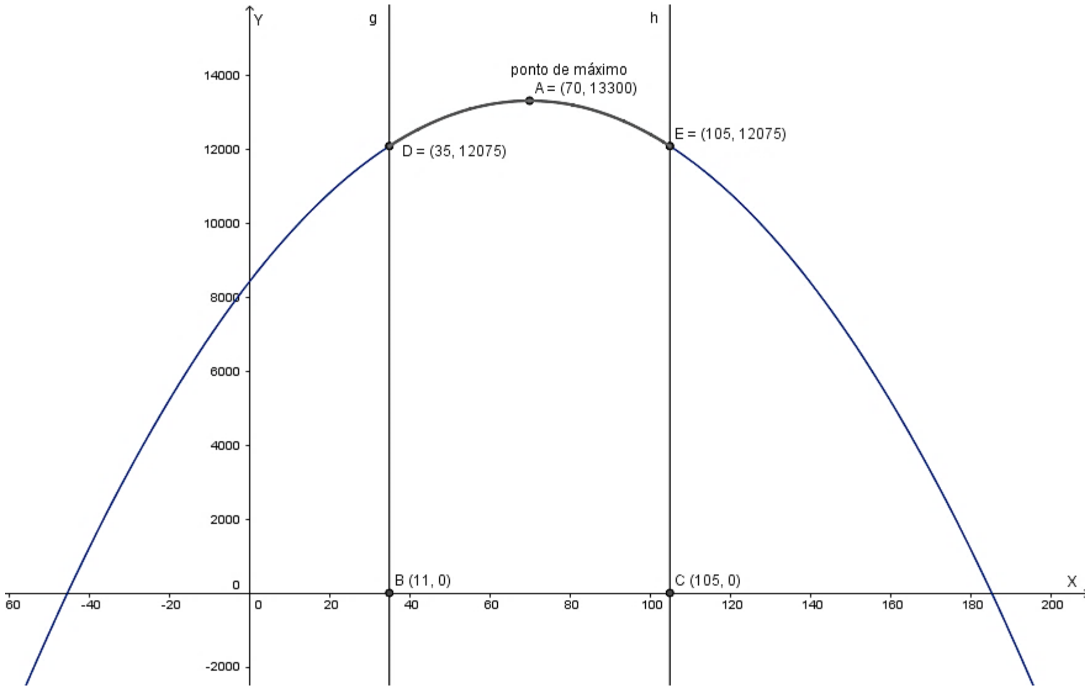


Figura 12: Gráfico de $f(x) = -x^2+140x+8400$ com as restrições estabelecidas.

A parte do gráfico de f que atende as condições da largura x (mínima e máxima), foi destacado com espessura maior da curva. Perceba que A, o ponto de máximo de f, se situa no interior do intervalo. O recurso utilizado do GeoGebra para determinar e indicar o ponto de máximo procurado foi o ícone "otimização". A questão agora consiste em o aluno não apenas construir (com o apoio do professor) este gráfico, mas sim em entender além de cada ferramenta ou recurso utilizado, cada elemento possível de ser analisado em f.

No Ensino Médio, o conteúdo função quadrática é abordado de forma detalhada, enfatizando além das características desta função, sua aplicabilidade. Portanto, um aluno do Ensino Médio terá condições de compreender e calcular o ponto de máximo ou mínimo de uma função quadrática, porém, algumas correlações acabam sendo deixadas de lado e com isso se perde a oportunidade de expandir (articular) a compreensão deste conteúdo tão importante ao processo de modelação. Por exemplo, a articulação entre taxa de variação média e coeficiente angular acaba se restringindo aos estudos da função afim (grifos do autor Dante – parte da Tarefa 4.3), no entanto, nada impede o professor de expandir tal análise e correlação aos estudar outras funções.

Note que essa possibilidade foi mencionada, na seção 4.3, a partir da definição que George B. Thomas propôs para taxa de variação média. Do ponto de vista geométrico a principal contribuição dada pelo autor foi inserir o conceito de secante a uma curva, o que não faria sentido para as funções afins.

Partindo da aproximação dos pontos sobre uma curva (secantes à curva), pode-se introduzir o conceito de tangente como sendo o limite da aproximação entre dois pontos, quando estes tendem a se sobrepor. Em termos algébricos, o valor deste limite seria dado pela imagem que f tende a assumir, quando substituímos na função valores cada vez mais próximos de determinada coordenada x_0. Uma definição inicial (informal) proposta por George B. Thomas (2009, p. 70) para limite:

Definição 3 *Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0 exceto talvez em x_0. Se $f(x)$ ficar arbritariamente próximo de L (tão próximo quanto quisermos), para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0, dizemos que f tem limite L quando x tende a x_0 e escrevemos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

que se lê "o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é L".

Segue a definição formal, dada por George B. Thomas (2009, p. 86) na mesma obra:

Definição 4 (Limite de uma função) *Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0 exceto talvez em x_0. Dizemos que o **limite de $f(x)$, conforme x se aproxima de x_0, é o número L**, e escrevemos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se para cada número $\epsilon > 0$ existir um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para todos os valores de x,

$$0 <\mid x - x_0 \mid< \delta \qquad \Rightarrow \qquad \mid f(x) - L \mid< \epsilon.$$

Retomando a análise do gráfico da parábola, Figura 12, após indicar o ponto de máximo A de f, o professor explica a seus alunos como tal ponto foi obtido. Para tanto poderá, além de introduzir o cálculo e a obtenção das coordenadas do ponto de máximo por meio das coordenadas do vértice (x_v e y_v), questioná-los sobre o fato de f ser ou não contínua no intervalo entre os pontos D e E, bem como se os extremos D e E fazem parte do domínio de f, confrontando, para tanto, com as informações disponibilizadas pelos Correios.

Dado que $D \in D_f$ e $E \in D_f$ e f é contínua no intervalo $[D, E]$, o professor poderá inserir e debater o Teorema de Weierstrass. Segue o teorema enunciado (GUIDORIZZI, 2001, p. 122):

Teorema 1 (de Weierstrass) *Se f for contínua em $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em $[a, b]$.*

O Teorema de Weierstrass nos indica que se f for contínua em $[D, E]$ então existirão x_1 e x_2 em $[D, E]$ tais que $f(x_1)$ é o valor mínimo de f em $[D, E]$ e $f(x_2)$ é o valor máximo de f em $[D, E]$ então f assumirá em $[D, E]$ valor mínimo e valor máximo.

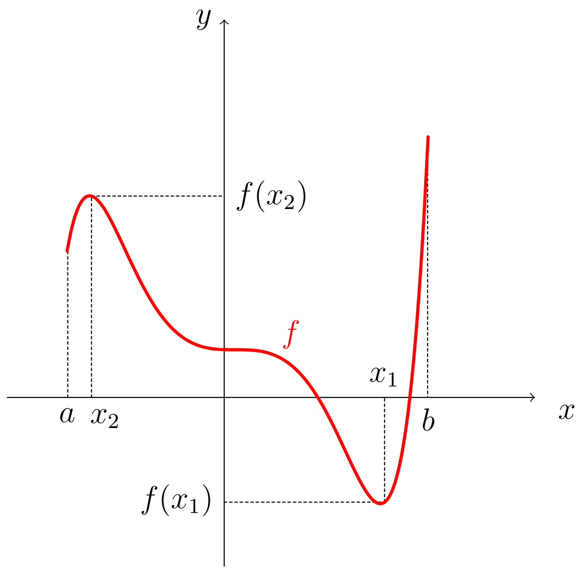


Figura 13: Função Contínua em um Intervalo $[a, b]$.

Em nosso caso, para $x_1 = 35$ (menor largura da caixa) teremos a área total mínima da caixa dado por 12.075 cm^2. Já para $x_2 = 70$ teremos a área total máxima da caixa dado por 13.300 cm^2. Em sala, haverá uma grande probabilidade de vários alunos, que não tenham dedicado a devida atenção à interpretação do comando presente na tarefa de estudo, indicar as coordenadas $(70, 13.300)$ como resposta ao problema, sendo que, o solicitado foi a medida da altura e largura da caixa para que sua área seja máxima, ou seja, a largura que em nosso gráfico foi indicada por x será os 70 cm, porém, a altura y não se faz presente no gráfico. Para obtê-la o aluno terá de substituir a medida 70 cm na igualdade proveniente da condição determinada pelo correio (onde se faz presente a variável y) e isolá-la na equação, donde obterá para y também a medida 70 cm. Portanto, duas das seis faces da caixa terá formato quadrangular!

Outra forma de obter as coordenadas do ponto de máximo será recorrer à derivada da função, para tanto, o professor poderá retomar os estudos sobre taxa média de variação (ver seção 4.3) e a definição dada de limite. A partir desses estudos o professor poderá inserir o conceito de derivada que tem como base o limite entre a variação de pontos que se aproximam de um determinado ponto, até o momento em que a distância entre estes pontos se aproxime de zero, ou seja, conforme já dito anteriormente, geometricamente seria a aproximação de pontos que determinam secantes, até que estas se transformem em uma tangente. A derivada de f em determinado ponto fornece o coeficiente angular da tangente ao gráfico de f neste ponto. Segue a introdução e a definição da derivada de uma função (GUIDORIZZI, 2001, p. 136-138):

Sejam f uma função e p um ponto de seu domíno. Limites do tipo

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

ocorrem de modo natural tanto na geometria quanto na física.

Consideremos, por exemplo, o problema de definir *reta tangente* ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. Evidentemente, tal reta deve passar pelo ponto $(p, f(p))$; assim a reta tangente fica determinada se dissermos qual deve ser seu coeficiente angular. Consideremos, então, a reta s_x que passa pelos ponto $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$.

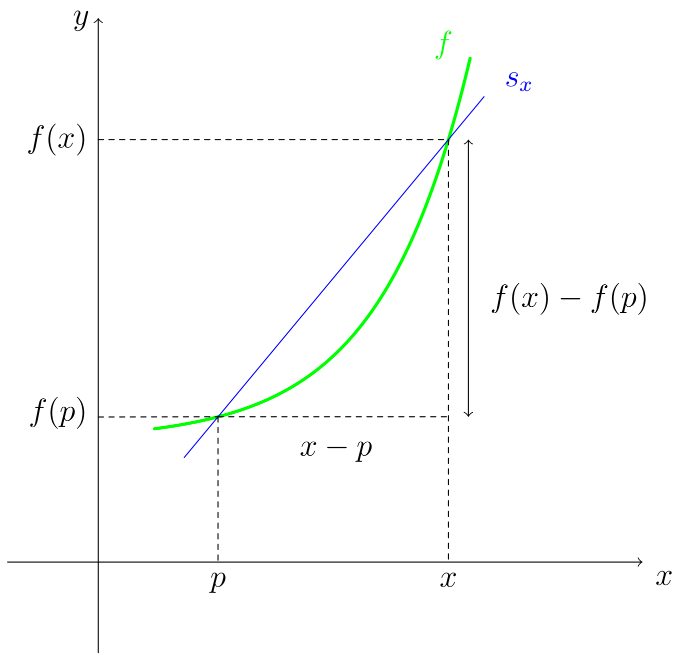


Figura 14: Gráfico secante s_x de f.

$$\text{Coeficiente angular de } s_x = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Quando x tende a p, o coeficiente angular de s_x tende a $f'(p)$ onde

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Observe que $f'(p)$ (leia: f linha de p) é apenas uma notação para indicar o valor do limite acima. Assim, à medida que x vai se aproximando de p, a reta s_x vai tendendo para a posição da reta t de equação

$$y - f(p) = f'(p)(x - p).$$

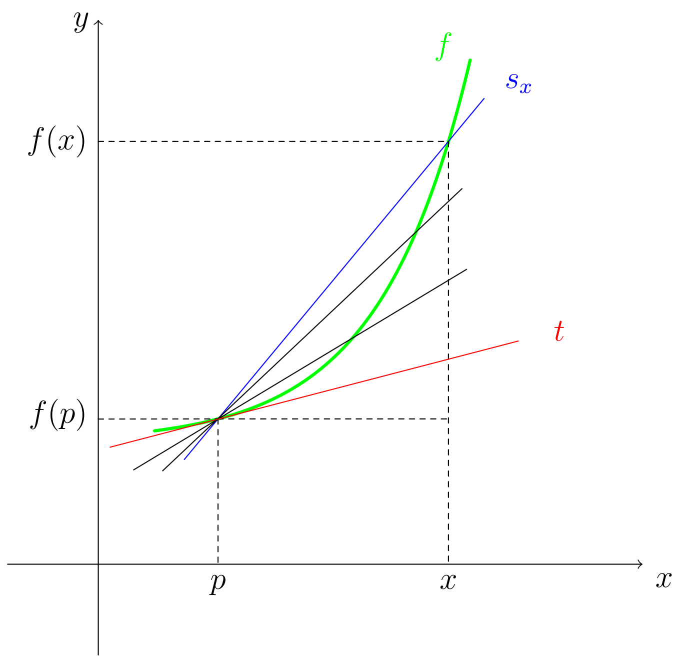


Figura 15: Gráfico tangente t de f

Definição 5 *Seja f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$ (leia: f linha de p). Assim

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Dizemos que f é *derivável* ou *diferenciável* em $A \subset D_f$ se f for derivável em cada $p \in A$. Diremos, simplesmente, que f é uma função *derivável* ou *diferenciável* de f for derivável em cada ponto de seu domínio.

Das propriedades dos limites temos que

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}.$$

Assim

$$f'(p)=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \qquad \text{ou} \qquad f'(p)=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}.$$

Frequentemente, usamos expressões do tipo $y=f(x)$, $p=f(q)$, $u=f(v)$ etc. para indicar uma função. Em $y=f(x)$, y é a *variável dependente* e x é a *variável independente*; em $u=f(v)$, u é a *variável dependente* e v é a *variável independente*.

Se a função vem dada por $y=f(x)$, a notação, devida a Leibniz, $\dfrac{dy}{dx}$ (leia: derivada de y em relação a x) é usada para indicar a derivada de f em x: $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$.

Nos estudos aqui direcionados, como f retrata uma função quadrática de concavidade voltada para baixo, perceba que ponto A (indicado na Figura 11, como o ponto de máximo), se localizará em uma posição onde a reta tangente possua inclinação nula em relação ao eixo das abscissas, ou seja, a tangente se situa paralelamente ao eixo x. Por outro lado, como a derivada da função em um ponto fornece o coeficiente angular da tangente neste ponto, conclui-se que derivando f e igualando-a a zero, obteremos a coordenada x de A (particularidade do Teorema do Valor Médio - TVM). Segue os cálculos que ratificam a conclusão:

$$f(x)=-x^2+140x+8400. \tag{3}$$

Derivando f, temos:

$$f'(x)=-2x+140.$$

Como em $[D,E]$ para qualquer coordenada x, quando substituída em f', fornecerá o coeficiente angular da tangente no ponto determinado por essa coordenada então, para obter a coordenada x de A, basta fazer $f'(x)=0$ e substituir na igualdade:

$$0=-2x+140.$$

Donde $x=70$.

Observe que A cumpre com a condição necessária para ser um ponto de máximo local (GUIDORIZZI, 2001, p. 280):

Teorema 2 *Seja f uma função derivável em p, onde p é um ponto interior a D_f. Uma condição necessária para que p seja ponto de máximo ou mínimo local é que $f'(p) = 0$.*

Na função 3 estudada, perceba que A também cumpre com as condições de ser um ponto crítico de f, como pode ser constatado na definição (THOMAS, 2009, p. 269):

Definição 6 (Ponto Crítico) *Um ponto interior do domínio de uma função f onde f' é zero ou indefinida é um **ponto crítico** de f.*

Assim, os únicos pontos do domínio em que uma função pode assumir valores extremos são os pontos críticos e as extremidades.

Note que em $f'(x)$ se for substituído para x, qualquer valor menor que 70, irá resultar um valor maior que zero para a derivada, ou seja, determina tangentes com coeficientes angulares positivos, portanto indicará que f é crescente neste intervalo. Por outro lado, para valores maiores que 70, as tangentes resultantes terão coeficientes angulares negativos, ou seja, neste intervalo f será decrescente.

A partir da definição da derivada e da relação desta com o crescimento ou decrescimento de f o professor terá condições de direcionar os estudos para máximos e mínimos globais, para tanto, segue uma sugestão de encaminhamento dado por Guidorizzi (2001, p. 272):

Definição 7 *Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que $f(p)$ é o valor máximo global de f ou que p é um ponto de máximo global de f se, para todo $x \in D_f$, $f(x) \leq f(p)$. Se, para todo $x \in D_f$, $f(x) \geq f(p)$, diremos então que $f(p)$ é o valor mínimo global de f ou que p é um ponto de mínimo global de f.*

Veja que no caso estudado (Figura 12), para $x = 70$ temos que, para todo $x \in [D, E]$, $f(x) \leq f(70)$, donde $x = 70$ é a coordenada do ponto de máximo global, portanto, além de A ser máximo local também é o ponto de máximo global de f.

Guidorizzi (2001) reforça e detalha o fato do ponto de máximo (ou de mínimo) de uma função poder ser identificado e/ou localizado através do estudo de seu crescimento e decrescimento. Veja:

> Uma boa maneira de se determinar os pontos de máximo e de mínimo de uma função f é estudá-la com relação a crescimento e decrescimento. Sejam $a < b < c$ se f for crescente em $]a, c]$ e decrescente em $[c, b[$, então c será um ponto de máximo local de f; se f for decrescente em $]a, c]$ e crescente em $[c, b[$, então c será um ponto de mínimo local de f. (GUIDORIZZI, 2001, p. 273).

Para a função estudada, f é crescente em $[11, 70]$ e decrescente em $[70, 105]$, donde se confirma, através do estudo do comportamento de f, que A também é um ponto de máximo local de f.

Discorrido os diferentes procedimentos para o cálculo do ponto de máximo A na função estudada, optou-se por finalizar o estudo da seção 4.4 com inserção de um outro procedimento para obter a concavidade de uma curva qualquer em determinado intervalo. No Ensino Médio, o aluno aprende que para analisar a concavidade de um função quadrática, basta analisar o sinal do coeficiente que acompanha a variável "x^2", porém, não nos restringindo ao grau dois de uma função polinomial e fazendo uso de conhecimentos sobre derivadas, pode-se determinar a concavidade a partir da análise do sinal da derivada de 2ª ordem da função, ou seja, derivar novamente a função. Veja como Guidorizzi (2001, p. 239) enuncia esse Teorema:

Teorema 3 *Seja f uma função que admite derivada até a 2ª ordem no intervalo aberto I.*

a) Se $f''(x) > 0$ em I, então f terá a concavidade para cima em I.

b) Se $f''(x) < 0$ em I, então f terá a concavidade para baixo em I.

Apesar do processo de derivar novamente uma função ser análogo ao da primeira derivação, segue uma formalização deste processo (GUIDORIZZI, 2001, p. 161):

Definição de Derivada de Ordem Superior de uma Função de Uma Variável Real

Sejam f uma função e A o conjunto dos x para os quais $f'(x)$ existe. A função $f' : A \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto f'(x)$, denomina-se função derivada ou, simplesmente, derivada de f; diremos, ainda, que f' é a derivada de 1ª ordem de f. A derivada de 1ª ordem de f é também indicada por $f^{(1)}$.

A derivada de f' denomina-se derivada de 2ª ordem de f e é indicada por

f'' ou $f^{(2)}$, assim, $f'' = (f')'$. De modo análogo, define-se as derivadas de ordens superiores a 2 de f.

Adaptando a conclusão do teorema sobre a concavidade à função estudada, tem-se, partindo de f:

$$f(x) = -x^2 + 140x + 8400.$$

Derivando f a primeira vez:

$$f'(x) = -2x + 140$$

Derivando agora a derivada de f, ou seja, derivando f duas vezes:

$$f''(x) = -2.$$

Veja que $f''(x) < 0$, donde a função estudada será representada por uma curva (parábola) com concavidade voltada para baixo, conforme constatado no gráfico construído!

Objetivos:

- representar sólidos;
- elaborar a escrita de uma fórmula (área total - condição dada no problema);
- elaborar escrita algébrica que articule um padrão de variação à condição dada (Soma máxima das dimensões - tabela "Pacote e Caixa");
- transpor a escrita de uma representação para outra;
- representar, algebricamente, uma lei analítica, dada por uma função quadrática;

Conteúdos envolvidos:

- leitura e interpretação de tabelas;
- representação espacial de sólidos (perspectivas);
- expressão algébrica;
- equação e inequação do 1º grau;
- equação do 2º grau;
- função quadrática (representação algébrica e gráfica).

4.5 *TAREFA DE ESTUDOS: CALCULANDO VOLUME*

Uma embalagem, com formato de um prisma retangular, possui 60 cm de comprimento. Pretendendo despachá-la, pelo correio, qual deverá ser a medida das outras duas dimensões para que seu volume seja máximo?

a) Modelo de embalagem com o formato de um prisma retangular:

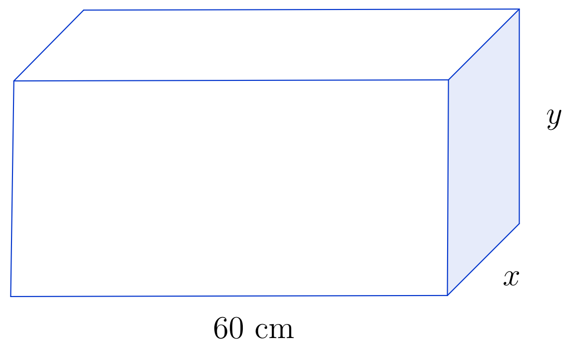


Figura 16: Modelo de Caixa 03.

b) O volume da embalagem será dado por:

$$V = 60xy.$$

Dado que o comprimento é uma medida conhecida e que, assim como no cálculo da área máxima, para um volume máximo teremos de ter a soma máxima das três dimensões (indicada pelos correios) como 200 cm. Temos como condicionar uma variação, por exemplo, a altura y (variável dependente) em função da variação da outra dimensão desconhecida, por exemplo, a largura x (variável independente) e substituirmos na fórmula do volume, que poderá ser reescrita como:

$$V = 60x(140 - x) = 8400x - 60x^2.$$

Assim como na tarefa de estudo anterior, se indicarmos a variação do volume por uma função, essa poderá ser expressa como:

$$f(x) = -60x^2 + 8400x.$$

O gráfico, construído no *GeoGebra*, será representado novamente por uma parábola de concavidade voltada para baixo. O gráfico da função já modelada, ou seja, adaptado as condições do fenômeno é apresentado na Figura 17:

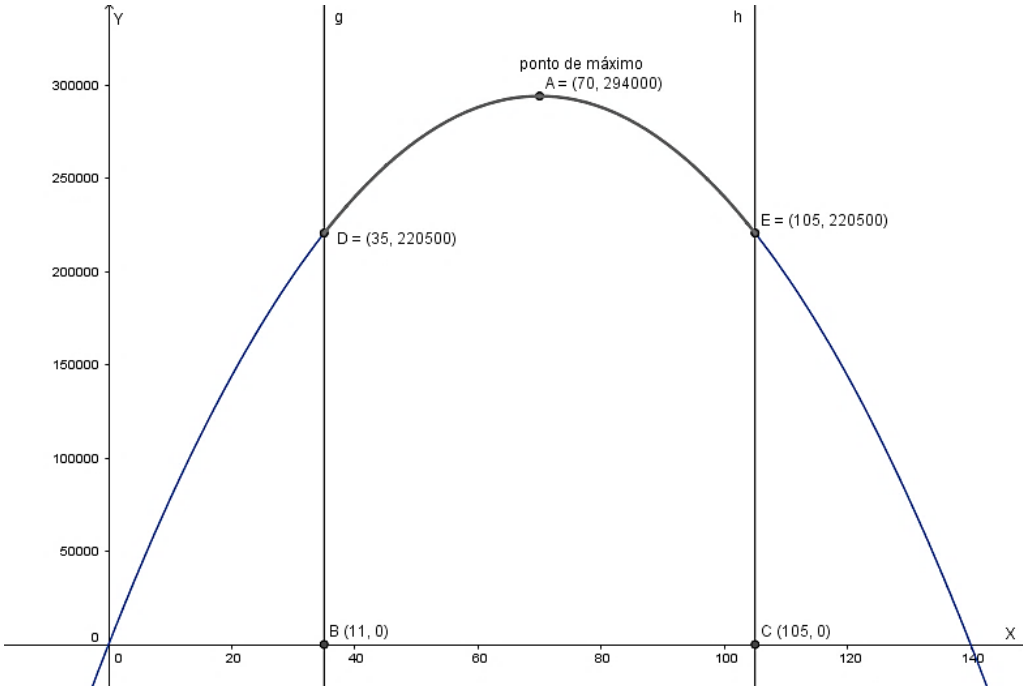


Figura 17: Gráfico Modelado de $f(x) = -60x^2 + 8400x$.

Analogamente ao ocorrido na tarefa de estudos anterior, as medidas da largura e da altura que determinam o volume máximo, serão dadas respectivamente, pela abscissa do ponto de máximo, e pelo valor calculado para y na igualdade condicionada pelo correio (soma das dimensões). Novamente a largura será 70 cm e a altura 70 cm, ou seja, duas das seis faces da caixa serão quadrangulares.

Assim como na tarefa anterior, é possível o professor aproveitar a função e seu gráfico para articular e aprofundar o estudo de conteúdos que transcendam a educação básica, inserindo a ideia de taxa média de variação, limites, derivada, análise de crescimento e decrescimento de f, enfim todas as análises já realizadas podem ser retomadas ou, caso o professor prefira, poderá deixar para encaminhar todas as análises e articulações nesta tarefa e, na função quadrática da tarefa anterior, encaminhar apenas os estudos dos conteúdos costumeiramente presentes no Ensino Médio. Entendida esta sugestão, não há o porquê repetir os estudos e análises já desenvolvidos, portanto, a análise desta tarefa de estudos se finaliza por aqui.

Com o intuito de estender os estudos, a última tarefa a ser explorada, retrata uma situação onde as três dimensões são desconhecidas, portanto, irá requerer novamente o estudo de conteúdos que vão além da educação básica (funções de várias variáveis).

4.6 *TAREFA DE ESTUDOS: DIMENSÃO E VOLUME MÁXIMO*

Uma embalagem possui o formato de um prisma retangular. Quais deverão ser suas dimensões, para que possa ser despachada pelo correios, e seu volume seja máximo?

a) Modelo de embalagem com o formato de um prisma retangular:

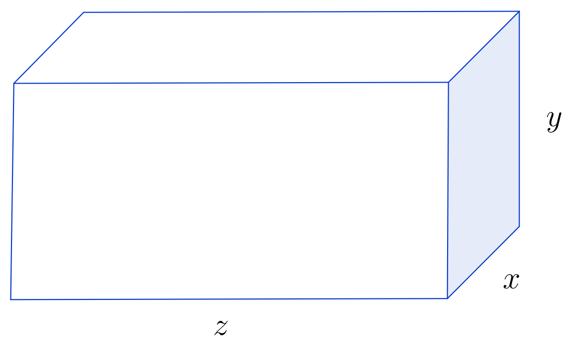


Figura 18: Modelo de Caixa 04.

b) O volume da embalagem, neste caso, será dado por:

$$V = xyz.$$

Assim como no cálculo do volume máximo da tarefa anterior, ter-se-á de substituir nesta fórmula, uma das variáveis que será isolada na equação proveniente da condicionante da soma máxima das três dimensões (indicada pelos correios). Dado que as três dimensões são desconhecidas, optou-se por isolar o comprimento z (variável dependente) em função da altura y (variável independente) e da largura x (variável independente) e substituir na fórmula do volume, que será reescrita como:

$$V = xy(200 - x - y) = 200xy - x^2y - xy^2.$$

Indicando a variação do volume por uma função, que neste caso será de duas variáveis, essa será escrita por:

$$f(x, y) = 200xy - x^2y - xy^2.$$

Em funções de duas variáveis independentes, normalmente as variáveis são indicadas por x e y e o domínio de f representa uma região do plano xy.

Visto que a função de duas variáveis não é um conteúdo normalmente explorado no ensino médio, convém defini-la formalmente (GUIDORIZZI, 2001, p. 148):

Uma função de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : A \to \mathbb{R}$, onde A é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Uma tal função associa, a cada par $(x, y) \in A$, um único número $f(x, y) \in \mathbb{R}$. O conjunto A é o domínio de f e será indicado por D_f. O conjunto

$$Imf = \{f(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D_f\}$$

é a imagem de f. As palavras *aplicação* e *transformação* são sinônimas de função.

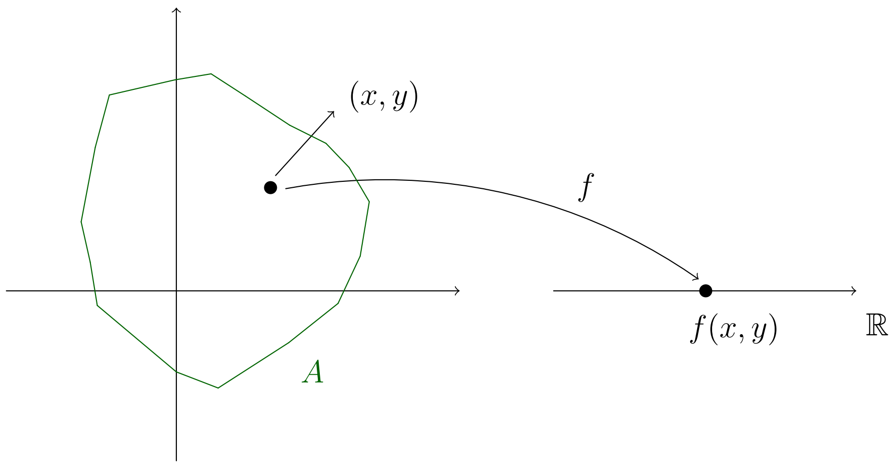


Figura 19: Função de Duas Variáveis Reais a Valores Reais: f transforma o par (x, y) no número $f(x, y)$.

Na Figura 19, o domínio A de f, representa uma região do plano xy (subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e a imagem de f será representada pelo conjunto dos números obtidos a partir de uma transformação de todos os pontos que compõe essa região A.

Devido às limitação do *GeoGebra* na elaboração de gráficos em $3D$, optou-se por construir esse gráfico (função do volume máximo) com o software *Wolfram Alpha* (ambiente de simulação que plota gráficos de todos os estilos). Com o objetivo de entender melhor o formato de superfície que f gera, a sua visualização pode ser vista na Figura 20:

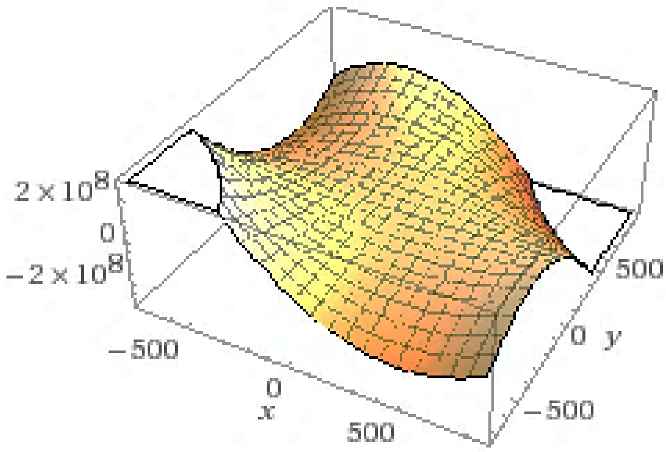


Figura 20: Gráfico de $f(x) = 200xy - x^2y - xy^2$.

Nas tarefas anteriores, cujas funções eram de uma variável, foi visto que para obter uma das coordenadas do ponto máximo, poder-se-ia derivar f, igualá-la a zero e depois analisar a concavidade com a derivada de 2ª ordem.

Pergunta: Será que para funções com mais de uma variável pode ser utilizado esse mesmo método? Caso possa, será que o procedimento para derivar a função será o mesmo? Geometricamente essa derivada representa uma reta tangente? A busca por respostas a estas e outras perguntas é que norteia os estudos da tarefa desta seção.

De fato o estudo para funções de várias variáveis reais a valores reais estende o estudo das funções de uma variável. Conforme indicado, para funções de uma variável, o cálculo da taxa média de variação é realizada fazendo um acréscimo h à variável independente x, em seguida, dividindo a variação correspondente de f, $f(x+h) - f(x)$, por h; e, finalmente fazendo h tender para zero. Podemos aplicar procedimento análogo às funções de várias variáveis.

De fato, seja f uma função de duas variáveis reais a valores reais. Primeiro damos a uma das variáveis, digamos x, um acréscimo h; em seguida, dividimos a variação correspondente de f, $f(x+h, y) - f(x, y)$, por h; e, finalmente, fazemos h tender para zero. Isto nos leva ao conceito de derivada parcial de f em relação a x, que definiremos a seguir:

Definição 8 *A derivada parcial de f em relação a x em um ponto (x, y) é definida como sendo o valor do limite*

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

se este limite existir.

De modo análogo definimos a derivada parcial em relação a y.

Definição 9 *A derivada parcial de f em relação a y em um ponto (x, y) é definida como sendo o valor do limite*

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

se este limite existir.

A interpretação geométrica das derivadas parciais é a seguinte:

Quando derivamos em relação a x mantemos a variável y fixa. Com isto temos uma função de uma variável x, $z = f(x, y_0)$. O gráfico desta função de uma variável x é a curva C_1, obtida pela interseção do gráfico de f com o plano $y = y_0$. A curva C_1 tem uma reta tangente T_1 no ponto P do gráfico de f no plano $y = y_0$. A derivada parcial $f_x(x_0, y_0)$ representa então, a tangente do ângulo α, que é o ângulo que a reta tangente T_1 forma com a reta $y = y_0$ paralela ao eixo x, ou seja, ela é a inclinação da reta tangente ao gráfico de $z = f(x, y_0)$ no ponto P no plano $y = y_0$.

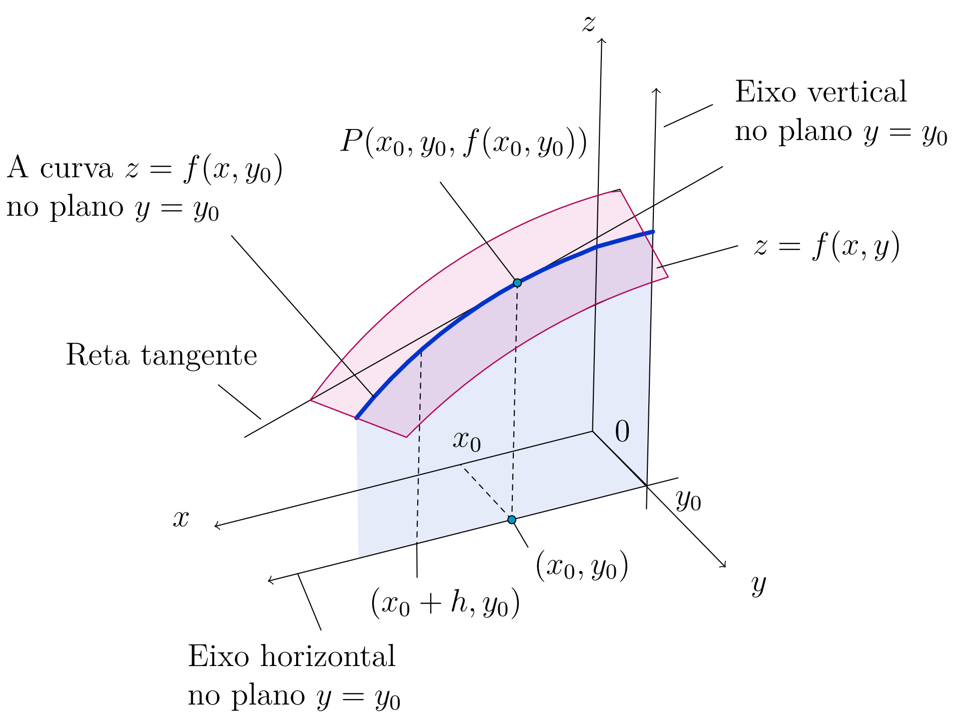


Figura 21: Interseção do plano $y = y_0$ com a superfície $z = f(x, y)$ visto de um ponto acima do primeiro quadrante do plano xy.

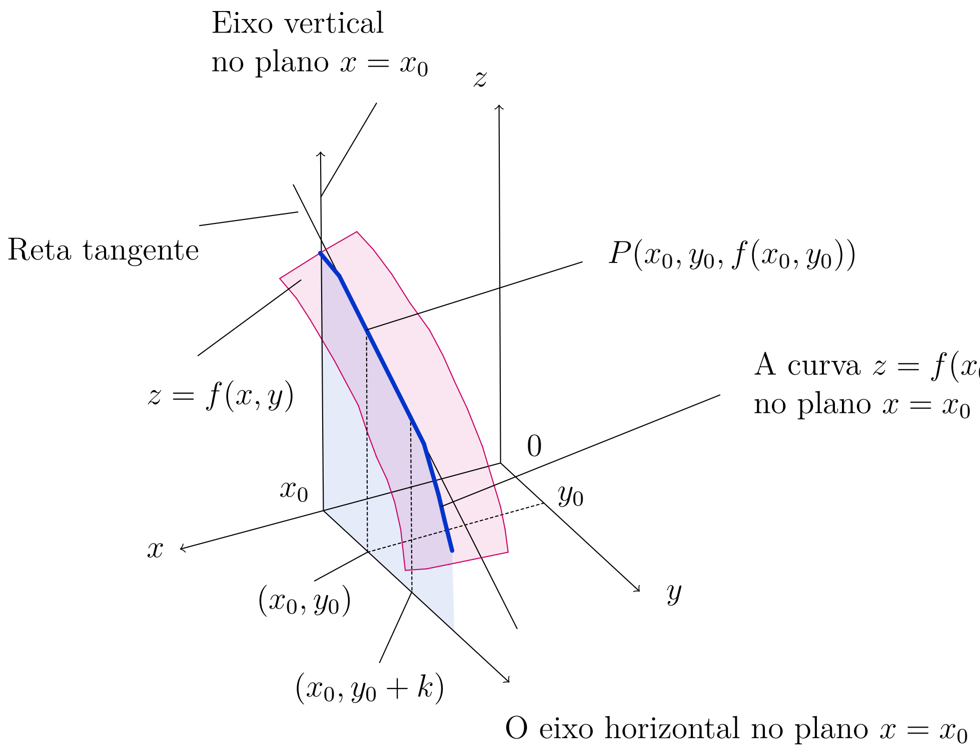


Figura 22: Interseção do plano $x = x_0$ com a superfície $z = f(x, y)$ visto de um ponto acima do primeiro quadrante do plano xy.

No caso de funções de uma variável, a reta que tangencia o gráfico da função nos pontos de máximos e mínimos são paralelos ao eixo x. No caso de duas variáveis, no lugar das retas tangentes aparecem os planos tangentes. Os planos que tangenciam o gráfico da função nos pontos de máximos e mínimos são paralelos ao plano determinado pelos eixo x e y. Para definir um plano basta ter um ponto e um vetor normal ao plano. Para o plano tangente o vetor normal pode ser determinado pelas derivadas parcias.

As derivadas parciais f_x e f_y de uma função $z = f(x, y)$ são, também, funções de duas variáveis. Assim podemos considerar novamente suas derivadas parciais, chamadas derivadas parciais de segunda ordem de $z = f(x, y)$.

Como no processo de obtenção do ponto de máximo (caso exista) serão necessários cálculos que envolvem derivadas parciais de 2^a ordem, segue definição:

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\\
f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\\
f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\\
f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

Do mesmo modo podemos ter derivadas parciais de 3^a ordem, 4^a ordem, ...

Para funções de uma variável o conceito de derivada e diferenciabilidade de uma função coincidem. Vejamos agora o conceito de diferenciabilidade para funções de duas variáveis.

Definição 10 *Uma função $z = f(x, y)$ é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$, se, e só se, existem constantes m e n, tais que,*

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + m\Delta x + n\Delta y + \epsilon,$$

onde $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\epsilon}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0,\ \Delta x = x - x_0$ *e* $\Delta y = y - y_0$.

Neste caso, $m = f_x(x_0, y_0)$ e $n = f_y(x_0, y_0)$. (É possível demonstrar isto, mas iremos omitir.) Portanto, se uma função é diferenciável em um ponto P, ela tem derivadas parciais em P. A recíprova nem sempre é verdadeira, ou seja, a simples existência das derivadas parciais não implica em diferenciabilidade.

De modo intuitivo, dizemos que uma função $z = f(x, y)$ é diferenciável num ponto (x_0, y_0), se existir um plano, não vertical, tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Como no caso de funções de uma variável temos o seguinte resultado:

Teorema 4 *Se $z = f(x, y)$ é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$, então, f é contínua em P_0.*

Mostrar que uma função é diferenciável usando sua definição nem sempre é fácil. O próximo teorema nos mostra que a continuidade das derivadas parciais garante sua diferenciabilidade.

Teorema 5 *Se as derivadas parciais f_x e f_y existem em uma vizinhança de $P_0 = (x_0, y_0)$, e são contínuas em P_0, então f é diferenciável em P_0.*

Além das derivadas parciais e da diferenciabilidade, no caso de funções de duas variáveis, existem as derivadas direcionais. Não iremos adentrar neste conceito mas a sua utilidade no estudo de máximos e mínimos seria para demonstrar o Teste da derivada de segunda ordem, que iremos omitir mas que pode ser encontrada em diversos livros de cálculo como por exemplo no livro “Cálculo”, vol. 2, de George B. Thomas ou no livro “Aprendendo Cálculo de Várias Variáveis” de Waldecir Bianchini.

Vamos agora encaminhar as definições e conceitos para o objetivo desta tarefa, que é o estudo de ponto de máximo. Assim como no caso de uma variável, existem os extremos locais e absolutos que iremos definir formalmente aqui:

Definição 11 *Dada uma função $z = f(x, y)$, um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é chamado de*

a) um ponto de máximo local de f se existir um disco aberto

$$D_r(P_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ para todo $(x, y) \in D_r(P_0)$. O valor $f(x_0, y_0)$ é chamado de valor máximo local de f.

b) um ponto de mínimo local de f se existir um disco aberto $D_r(P_0)$ tal que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo $(x, y) \in D_r(P_0)$. O valor $f(x_0, y_0)$ é chamado de valor mínimo local de f.

Se no item a) da definição acima a condição $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ valer para todos os pontos do domínio de f, então P_0 é chamado de ponto de máximo absoluto de f e seu valor de valor máximo absoluto de f. Do mesmo modo, se no item b), a condição $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ valer para todos os pontos do domínio de f, então P_0 é chamado de ponto de mínimo absoluto de f e seu valor de valor mínimo absoluto de f.

Um valor máximo ou mínimo local de f é chamado genericamente de valor extremo local de f e o respectivo ponto é chamado de ponto extremo local de f.

Definição 12 *Um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é chamado ponto crítico de f se as derivadas parciais satisfazem*

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$$

ou, então, alguma delas não existe.

O próximo teorema nos dá as condições necessárias para a existência de extremos locais para uma função $z = f(x, y)$.

Teorema 6 *Se f tem extremo local em P_0, então, P_0 é um ponto crítico.*

Demonstração: Vamos considerar o caso em que P_0 é um ponto de máximo local. Neste caso, P_0 também é um ponto de máximo local para a função de uma variável $g(x) = f(x, y_0)$. Assim, sua derivada $\dfrac{dg}{dx}(x_0) = f_x(P_0) = 0$ ou não existe. Analogamente, para a função $h(y) = f(x_0, y)$, conclui-se que $\dfrac{dh}{dy}(x_0) = f_y(P_0) = 0$ ou não existe.

A demonstração para o caso em que P_0 é mínimo é análoga.

Se aplicarmos este teste na função estudada, e igualarmos as derivadas parciais de primeira ordem à zero, teremos:

$$f_x(x, y) = 200y - 2xy - y^2 = (200 - 2x - y)y = 0$$

$$f_y(x, y) = 200x - x^2 - 2xy = (200 - x - 2y)x = 0$$

Os pontos críticos são $(0, 0)$, $(0, 200)$, $(200, 0)$ e $\left(\dfrac{200}{3}, \dfrac{200}{3}\right)$. Como o volume não pode ser zero, os três primeiros pontos críticos não podem ser valores máximos, pois, possuem ao menos uma coordenada nula. Portanto, restou apenas o ponto $\left(\dfrac{200}{3}, \dfrac{200}{3}\right)$ como candidato a ponto de máximo. Para saber se esse ponto é realmente o ponto de máximo este deverá atender à primeira condição do Teorema a seguir, que consiste de um teste da derivada de segunda ordem para extremos locais. Segue o teorema:

Teorema 7 (Teste da derivada de segunda ordem para valores extremos locais) *Suponha que f e suas derivadas parciais de primeira e segunda ordens sejam contínuas em um disco centrado em (a, b) e que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Então*

i) f tem um máximo local em (a, b) se $f_{xx} < 0$ e $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ em (a, b).

ii) f tem um mínimo local em (a, b) se $f_{xx} > 0$ e $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ em (a, b).

iii) f tem um ponto de sela em (a, b) se $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ em (a, b).

iv) O teste é inconclusivo em (a, b) *se* $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ *em* (a, b).

Nesse caso, devemos encontrar outra maneira de determinar o comportamento de f *em* (a, b).

Como no caso de função de uma variável, nem todos os pontos críticos são pontos extremos, mesmo que as derivadas parciais existam. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local, um mínimo local, ou ainda, nenhum dos dois.

Como no teorema anterior cita o caso de ocorrer um ponto de sela, segue a definiç ao, seguida de uma ilustração para auxiliar na compreensão da definição (THOMAS, 2009, p.352):

Definição 13 *Uma função diferenciável* f *tem um ponto de sela em um ponto crítico* (a, b) *se em todo disco aberto centrado em* (a, b) *existem pontos* (x, y) *do domínio de* f, *onde* $f(x, y) > f(a, b)$ *e pontos onde* $f(x, y) < f(a, b)$. *O ponto correspondente* $(a, b, f(a, b))$ *na superfície* $z = f(x, y)$ *é chamado ponto de sela da superfície.*

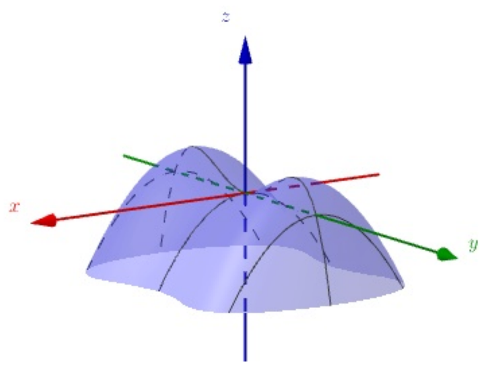


Figura 23: Pontos de sela na origem.

Aplicando a primeira condição do Teste da derivada de segunda ordem para extremos locais no $\left(\frac{200}{3}, \frac{200}{3}\right)$ da função, temos:

$$f_{xx}(x, y) = -2y,$$
$$f_{yy}(x, y) = -2x,$$
$$f_{xy}(x, y) = 200 - 2x - 2y.$$

Donde:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4xy - 4(100 - x - y)^2.$$

Primeiramente, para o ponto em questão temos que:

$$f_{xx}\left(\frac{200}{3}, \frac{200}{3}\right) = -2\left(\frac{200}{3}\right) = -\frac{400}{3} < 0$$

E, temos que:

$$\left[f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right]\left(\frac{200}{3}, \frac{200}{3}\right) = 4 \cdot \frac{200}{3} \cdot \frac{200}{3} - 4\left(100 - \frac{200}{3} - \frac{200}{3}\right)^2,$$
$$\left[f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right]\left(\frac{200}{3}, \frac{200}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{200}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{300}{3} - \frac{200}{3} - \frac{200}{3}\right)^2,$$
$$\left[f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right]\left(\frac{200}{3}, \frac{200}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{200}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{100}{3}\right)^2 > 0.$$

Logo, o ponto $\left(\frac{200}{3}, \frac{200}{3}\right)$ fornece o volume máximo para a caixa estudada.

As dimensões procuradas serão:

- Comprimento: $\left(\frac{200}{3}\right)$ cm ou aproximadamente 67 cm;
- Largura: $\left(\frac{200}{3}\right)$ cm ou aproximadamente 67 cm;
- Altura: $\left(\frac{200}{3}\right)$ cm ou aproximadamente 67 cm;

Só para constar, a caixa de maior volume cujas três dimensões sejam desconhecidas e que atenda as condições do correio teria o formato de um cubo.

Para encerrar as análises de variações de caixa, segue um exemplo de um problema, extraído do livro de Cálculo de Thomas (2009, p. 355-356), que em vários pontos se assemelha a este último problema estudado:

Exemplo 1 (Resolvendo um problema de volume com uma condição) *Uma empresa de entregas aceita apenas caixas retangulares cujos comprimentos e perímetros da seção transversal não ultrapassem* 108 *pol. Encontre as dimensões de uma caixa aceitável de maior volume possível.*

Solução

Sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura da caixa retangular, respectivamente. Então o perímetro da seção transversal é $2y + 2z$. Queremos maximizar o volume $V = xyz$ da caixa satisfazendo $x + 2y + 2z = 108$ (a maior caixa para entregas aceita pela empresa). Assim, podemos escrever o volume da caixa como uma função de duas variáveis.

$$\begin{aligned} V(y, z) &= (108 - 2y - 2z)yz \\ &= 108yz - 2y^2z - 2yz^2. \end{aligned}$$

Fazendo as derivadas parciais de primeira ordem iguais a zero, temos os pontos críticos $(0, 0)$, $(0, 54)$, $(54, 0)$ e $(18, 18)$. O volume é zero em $(0, 0)$, $(0, 54)$ e $(54, 0)$, os quais não são os valores máximos.No ponto $(18, 18)$, aplicamos o teste da derivada segunda (T,eorema 7).

$$V_{yy} = -4z \qquad V_{zz} = -4y \qquad V_{yz} = 108 - 4y - 4z.$$

Então,

$$V_{yy}V_{zz} - V_{yz}^2 = 16yz - 16(27 - y - z)^2.$$

Portanto,

$$V_{yy}(18, 18) = -4(18) < 0$$

e

$$\left[V_{yy}V_{zz} - V_{yz}^2\right]\Big|_{(18,18)} = 16(18)(18) - 16(-9)^2 > 0$$

implica que (18, 18) fornece um volume máximo. As dimensões da caixa são $x = 108 - 2(18) - 2(18) = 36$ pol, $y = 18$ pol e $z = 18$ pol. O volume máximo é $V = (36)(18)(18) = 11.664$ pol^3 ou $6,75$ pés^3.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O grande desafio do ensino da matemática gira em torno do desenvolvimento de procedimentos e estratégias que facilitem e potencializem a aquisição dos diversos conceitos científicos pelos estudantes. Ao longo do tempo foram organizados e reorganizados no âmbito escolar (processo de didatização), de acordo com as necessidades e demandas da sociedade.

Corroborando com esse desafio, foi proposto o desenvolvimento de um estudo fundamentado na resolução de problemas e na modelagem matemática como estratégia de ensino.

Perceba que a proposta é contribuir com uma sugestão de organização e desenvolvimento de um rol de conteúdos que permeiam a Educação Básica, subsidiando o leitor com algumas possibilidades de articulação e expansão conceitual, no que diz respeito a viabilizar a inserção de conteúdos que, costumeiramente, fazem parte da grade do curso de matemática, em nível de graduação.

Pelo teor e direcionamento dos estudos, é perceptível que o docente que desejar direcionar suas ações pedagógicas, tendo como base os estudos aqui sugeridos, terá de realizar readequações na ordem de alguns conteúdos que se encontram dispostos nos livros didáticos do Ensino Médio, ou seja, terá de abrir mão de uma grade curricular linear (em termos de organização didática proposta nos livros) e reorganizar, em alguns momentos, o processo de ensino e aprendizagem.

É óbvio que o docente terá total liberdade para combinar apenas parte dos estudos aqui desenvolvidos em sua prática docente, por exemplo, caso considere a última tarefa de estudos (Seção 4.6) muito complexa para sua realidade de sala (nível de cognição de seus alunos), nada o impede de não realizar esse desenvolvimento, sem a preocupação de gerar qualquer lacuna no aprendizado das outras tarefas de estudos, visto que o êxito do aprendizado vinculado às demais tarefas, não depende do desenvolvimento desta.

Outra ação possível é de reorganizar as tarefas de estudos inserindo e incentivando mais pesquisas com seus alunos, tendo com base questionamentos que desperte a curiosidade destes, por exemplo, na tabela “Pacote e Caixa” disponibilizada pelos Correios, se constata que para cada uma das três dimensões foi indicada uma medida mínima e máxima, porém, para a condição que diz respeito a soma das três dimensões ($C + L + A$), perceba que a tabela não indicada uma medida mínima, delimita apenas pela soma máxima 200 cm. Provavelmente os alunos vão se atentar à essa questão e o professor terá a possibilidade de fomentar pesquisas, junto a instituição, ou simplesmente podar seu aluno retirando esse debate do centro das atenções, o que sob a óptica da modelação e investigação matemática, não seria a melhor decisão.

Para finalizar, reforçamos que o objetivo principal é expandir conhecimentos a cerca de processos e procedimentos, com o objetivo de oportunizar a apropriação e/ou amadurecimento, tanto do conceito de espaço quanto de número e suas variações, e os possíveis desdobramentos em unidades conceituais a serem exploradas em atividades de aprendizagem vinculadas ao tema. Para tanto, deverá ser instaurado um ambiente de interesse e coletividade, onde o elemento desencadeador da ação docente será o ato de gerar a necessidade de busca por conhecimento, que vá ao encontro da superação de obstáculos cognitivos oriundos da resolução de problemas. As pesquisas, que venham a suprir tais necessidades e demandas, serão fundamentadas em alguns conteúdos relacionados às funções tanto de uma variável, quanto de duas variáveis, requerendo a extrapolação para o estudo de limites e derivadas!

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. **24ª Reunião Anual da ANPED**, ANPED, Caxambu, 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e a perspectiva sócio-crítica. **2º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, SBEM, São Paulo, 2003.

BARBOSA, J. C. **3º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, SBEM, Águas de Lindóia, 2006.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BIANCHINI, W. **Aprendendo cálculo de várias variáveis**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 2016.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum**: Área de matemática. Brasília, 2015.

BRITO, M. R. F. **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Editora Alínea, 2006.

CORREIOS. Disponível em: <https://www.correios.com.br/para-voce/precisa-de-ajuda/limites-de-dimensoes-e-de-peso>. Acesso em: 27 out. 2016.

DANTE, L. R. **Contextos & aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 43–65.

ENGLISH, L.; LESH, R.; FENNEWALD, T. Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ICME, 11., 2008, Monterrey, México. **A resolução de problemas na educação matemática**: onde estamos? e para onde iremos? Passo Fundo: Editora UFP, jan./jun 2013. v. 20, n. 1, p. 88–104. Disponível em: <http://www.upf.br/seer/index.php/rep/article/view/3502/2288>. Acesso em: 25 jan. 2016.

GEOGEBRA. Versão 5.0. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 12 jan. 2017.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2001. 1 v.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2001. 2 v.

KRULIK, S.; REYS, R. E. (Orgs.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

LOJA Tray. Disponível em: <http://loja.tray.com.br/loja/produto-101717-2277-violao_acustico_rosa_classico_cordas_nylon_folk_vm07_michael>. Acesso em: 31 out. 2016.

MOURA, M. D. et al. A atividade orientadora de ensino: como unidade entre ensino e aprendizagem. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205–229, jan./abr. 2010.

OLIVEIRA, M. K. d. **O pensamento de Vygotsky como fonte de reflexão sobre a educação**. 2. ed. Campinas: UNICAMP, n. 35, 2000. 11–18 p.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, UNICAMP, Campinas, n. 6, 1996.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

VERTUAN, R. E.; BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. d. O papel da mediação e da intencionalidade em atividades de modelagem matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, UFSCAR, São Paulo, v. 7, n. 3, p. 63–80, 2013.

WALLE, J. V. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WEIR, M. D.; HASS, J.; R, G. F. **Cálculo (George B. Thomas)**. Tradução Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. 11. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009. 2 v.

WEIR, M. D.; HASS, J.; R, G. F. **Cálculo (George B. Thomas Jr.)**. Tradução Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. 11. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009. 1 v.

WOLFRAM Alpha. Disponível em: <http://www.wolframalpha.com/>. Acesso em: 16 jan. 2017.