

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELÉTRICA  
CURSO DE ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

JULIO YUZO YASSUDA

**DESENVOLVIMENTO, MODELAGEM, IDENTIFICAÇÃO E  
CONTROLE DE UM MÓDULO DIDÁTICO *BALL AND BEAM***

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**CORNÉLIO PROCÓPIO**

**2019**

JULIO YUZO YASSUDA

**DESENVOLVIMENTO, MODELAGEM, IDENTIFICAÇÃO E  
CONTROLE DE UM MÓDULO DIDÁTICO *BALL AND BEAM***

Proposta para Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao curso superior de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Ravazzi Pires  
da Silva

**CORNÉLIO PROCÓPIO**

**2019**



**Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Campus Cornélio Procópio  
Departamento Acadêmico de Elétrica  
Curso de Engenharia de Controle e Automação**



**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Júlio Yuzo Yassuda**

**Desenvolvimento, Modelagem, Identificação e Controle de um Módulo Didático Ball and Beam**

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 16:00hs do dia 30/05/2019 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação no programa de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

---

Prof(a). Dr(a). Emerson Ravazzi Pires da Silva - Presidente (Orientador)

---

Prof(a). Dr(a). Cristiano Marcos Agulhari - (Membro)

---

Prof(a). Dr(a). Luiz Francisco Sanches Buzachero -  
(Membro)

A folha de aprovação assinada encontra-se na coordenação do curso.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente aos meus pais, Lira Mabe Yassuda e Mikio Yassuda, pelo amor, incentivo e apoio imensurável para me ajudar e me dar oportunidade de uma vida melhor.

Agradeço ao meu amor, Thais Miyuki Kaihatu, por me apoiar e incentivar para tornar esse sonho uma realidade.

Agradeço aos meus amigos, Carolina Rampasso Soares e Felipe Yudi Fulini que me apoiaram no desenvolvimento do projeto, não medindo esforços para me ajudar.

Agradeço também ao professor doutor Emerson Ravazzi Pires da Silva por toda sua sabedoria, tranquilidade e dedicação em seu trabalho, me apoiando e incentivando para superar todas as dificuldades encontradas ao longo do projeto.

Por fim, agradeço a todos que tive a oportunidade de conhecer e conviver, a cada um que me fez pensar e aprender mais um pouco sobre a vida e sobre este vasto mundo.

## RESUMO

YASSUDA, Julio Yuzo. **DESENVOLVIMENTO, MODELAGEM, IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE DE UM MÓDULO DIDÁTICO *BALL AND BEAM***. 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019.

Com a grande deficiência em estudos de aplicações práticas de controle devido ao alto custo e às elevadas proporções físicas de plantas industriais, surgiram os módulos didáticos que, comumente, representam processos industriais, porém em escala reduzida. Entretanto, devido ao seu elevado custo relativo, esses módulos costumam ser de difícil aquisição, não só pela instituição local, como também por outras instituições de ensino. Dessa forma, este trabalho propõe o desenvolvimento de um módulo didático *ball and beam* de baixo custo de fabricação, além da modelagem e identificação do sistema e a implementação de um controlador Proporcional Derivativo (PD).

Palavras-chave: Módulo didático, Baixo custo, *Ball and Beam*, Controle de posição.

## ABSTRACT

YASSUDA, Julio Yuzo. **DEVELOPMENT, MODELING, IDENTIFICATION AND CONTROL OF A BALL AND BEAM DIDACTIC MODULE.** 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019.

With the great deficiency in studies of practical applications of control due to the high cost and the large physical proportions of industrial plants, the didactic modules appeared which commonly represent industrial processes, but in small scale. However, due to their high relative cost, these modules are often difficult to acquire, not only by the local institution, but also By other educational institutes. Wherefore, this work proposes the development of a ball and beam module of low-cost manufacturing, in addition, the modeling, the system identification of the and the implementation of a Proportional Derivative (PD) controller.

**Keywords:** Didactic Module, Low-Cost, Ball and beam, Position Control.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Modelo <i>ball and beam</i> . .....	18
Figura 2: Sistema de malha aberta. ....	21
Figura 3: Sistema de malha fechada. ....	22
Figura 4: Diagrama de blocos do controlador PID. ....	24
Figura 5: <i>Ball and Beam</i> desenvolvido. ....	25
Figura 6: Arduino® Mega2560. ....	26
Figura 7: (a) Sensor SHARP® GP2Y0A21YK0F; (b) Princípio de funcionamento. ....	27
Figura 8: Servo Motor SG5010 TowerPro®. ....	28
Figura 9: Fonte ajustável para protoboard. ....	28
Figura 10: Interface de controle Simulink®. ....	29
Figura 11: Comparação entre a resposta real e a resposta identificada do sistema. ....	32
Figura 12: Comparação das respostas de malha aberta do sistema. ....	33
Figura 13: Resposta ao degrau com amplitude 8 cm do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano. ....	37
Figura 14: Sinal de controle do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano ao degrau com amplitude 8 cm. ....	37
Figura 15: Resposta ao degrau com amplitude 8 cm do sistema via sintonia PD usando o modelo identificado. ....	38
Figura 16: Sinal de controle do sistema via sintonia PD usando o modelo identificado ao degrau com amplitude 8 cm. ....	39
Figura 17: Comparação entre as respostas do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano e o modelo identificado ao degrau com amplitude 8 cm. ....	39
Figura 18: Resposta ao degrau com amplitudes variadas do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano. ....	41
Figura 19: Sinal de controle do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano ao degrau de amplitudes variadas. ....	41
Figura 20: Resposta ao degrau de amplitude variadas do sistema via sintonia PD usando o modelo identificado. ....	42
Figura 21: Sinal de controle do sistema via sintonia PD usando o modelo identificado a resposta degrau com amplitudes diversas. ....	43
Figura 22: Comparação entre as resposta dos sistemas via sintonia usando o modelo lagrangeano e o modelo identificado ao degrau com amplitudes diversas. ....	43

Figura 23: Resposta ao degrau com perturbação do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano.....	44
Figura 24: Sinal de controle do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano ao resposta degrau com perturbação.....	45
Figura 25: Resposta ao degrau com perturbação do sistema via sintonia PD usando o modelo identificado. ....	46
Figura 26: Sinal de controle do sistema via sintonia PD usando o modelo identificado ao degrau com perturbação. ....	46
Figura 27: Comparação entre as respostas do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano e o modelo identificado ao degrau com perturbação.....	47



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Relações entre entrada, tipo do sistema, constante de erro e erros estacionários. ....	23
Tabela 2: Influencia dos termos $K_p$ , $K_i$ e $K_d$ no sistema. ....	24
Tabela 3: Especificações técnicas sensor SHARP®.....	27
Tabela 4: Valores medidos das variável.....	30
Tabela 5: Valores medidos de distância em função do tempo. ....	31
Tabela 6: Cálculos dos valores de $K_d$ e $K_p$ .. ....	35

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
1.2 Problema.....	12
1.2 Justificativa .....	12
1.3 Objetivos .....	12
1.3.1 Objetivo Geral.....	12
1.3.2 Objetivos Específicos.....	12
1.4 Estrutura do Trabalho .....	13
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>14</b>
2.1 Representação de Sistemas .....	14
2.2 Função de Transferência .....	14
2.3 Espaços de Estados .....	15
2.4 Conversão de Função de Transferência para Espaço de Estados .....	16
2.5 <i>Ball and Beam</i> .....	17
2.5.1 Modelagem do <i>Ball and Beam</i> .....	18
2.6 Identificação de Sistemas .....	20
2.6.1 Identificação do modelo <i>ball and beam</i> .....	20
2.7 Sistemas de Controle.....	21
2.7.3 Erros estacionários .....	22
2.7.4 Controlador PID .....	23
<b>3. MATERIAS E MÉTODOS.....</b>	<b>25</b>
3.1 Placa de comunicação .....	25
3.2 Sensor de distância infravermelho .....	26
3.3 Servo Motor.....	27
3.4 Fonte Ajustável para <i>Protoboard</i> .....	28
3.5 Interface de controle .....	28
<b>4. DESENVOLVIMENTO.....</b>	<b>30</b>
4.1 Modelagem Lagrangeana da função de transferência .....	30
4.2 Identificação da função de transferência.....	31
4.3 Comparação entre a modelagem e identificação .....	32
4.4 Projeto do controlador PD .....	33
4.4.1 Controlador PD a partir do modelo lagrangeano .....	34
4.4.2 Controlador PD a partir do modelo identificado .....	35
<b>5. RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>36</b>
5.1 Resposta ao degrau de amplitude constante .....	36

5.1.1 Controlador Projetado via Modelo lagrangeano.....	36
5.1.2 Controlador Projetado via Modelo identificado .....	38
5.1.3 Comparação dos resultados .....	39
5.2 Resposta ao degrau com variação de amplitude .....	40
5.2.1 Modelo lagrangeano .....	40
5.2.2 Modelo identificado.....	42
5.2.3 Comparação dos resultados .....	43
5.3 Resposta à perturbação .....	44
5.3.1 Modelo lagrangeano .....	44
5.3.2 Modelo identificado.....	45
5.3.3 Comparação das respostas .....	47
<b>6. CONCLUSÃO.....</b>	<b>48</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>49</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Com a crescente necessidade de se automatizar processos para obter uma maior confiabilidade e padronização dos mesmos, o controle torna-se um componente importante e intrínseco para tal. Com isso, o controle é parte integrante de sistemas como veículos espaciais, sistemas robóticos, sistemas de fabricação, e quaisquer outras operações industriais (LUGLI, 2015; OGATA, 2010).

Dentre os vários tipos de controle, o controle de posição é um dos mais utilizados na indústria, tendo uma vasta aplicação, por exemplo, em elevadores, em esteiras, em robôs e em fresas (DINIZ, 2007). Contudo, devido à magnitude dessas e outras aplicações e por questões econômicas, se torna inviável interrompê-las com o intuito de estudar estratégias de controle. Dessa forma, surgiram os módulos didáticos para o estudo de estratégias de forma prática, sendo um exemplo o módulo *ball and beam*.

O *ball and beam* é um módulo didático de controle de posição, que tem como objetivo equilibrar uma bola ao longo de um trilho a partir da atuação de um motor que altera a inclinação deste. Dessa maneira, é possível estudar a modelagem e identificação do sistema, comunicação sensor/atuador com o equipamento que comanda e monitora o módulo e as estratégias de controle, objetivando aplicá-las fisicamente em um sistema, sendo de grande utilidade principalmente na área acadêmica. Na literatura especializada, pode-se encontrar diversos trabalhos envolvendo o controle de um sistema *ball and beam*, destacando como aplicação de estratégias de controle a compensação do sistema por rede neural proposta por Xiaou Li e Wen Yu (2010), utilização de observador de modos deslizantes desenvolvida por Mohammad Luai Hammadih et al (2015) e a aplicação de controle robusto feita por Beauchamp Báez et al (2014).

Seguindo esse caminho, neste trabalho propõe-se o desenvolvimento de um módulo didático *ball and beam*, além da modelagem, identificação, e aplicação de um controlador Proporcional Derivativo (PD).

## 1.2 Problema

O estudo na área de controle geralmente tem grande deficiência quanto a aplicação prática, visto a dificuldade na aquisição de plantas industriais devido ao seu alto custo e elevadas proporções físicas (PEREIRA, 2009). Dessa forma, surgiram os módulos didáticos comerciais para preencher esta lacuna de forma parcial, pois estes ainda são de difícil acesso devido aos seus custos relativamente elevados. Tal fato, é evidente não apenas na realidade local, como também em outras instituições de ensino. Diante disto, nota-se a necessidade da criação de módulos didáticos replicáveis a preços acessíveis.

## 1.2 Justificativa

Diante da problemática apresentada, os módulos didáticos replicáveis e de baixo custo auxiliam no processo de aprendizado dos conceitos de controle ministrados em sala. Dessa forma, pode-se modelar e identificar o sistema e aplicar estratégias de controle clássicas e modernas, sendo flexível ao estudo desejado.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo Geral

Diante do problema apresentado e da justificativa, o seguinte trabalho tem como objetivo geral desenvolver, modelar e identificar o sistema, além da aplicação de um controlador Proporcional Derivativo (PD) em um módulo didático *ball and beam*.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Construir o módulo didático *ball and beam*
- Realizar a comunicação entre o módulo e o software MATLAB®/Simulink®
- Obter o modelo matemático do sistema dinâmico *ball and beam*, através da modelagem e identificação do sistema.
- Aplicar na prática um controlador Proporcional Derivativo (PD).

- Analisar e comparar os resultados.

#### **1.4 Estrutura do Trabalho**

O trabalho está dividido em seis capítulos. No primeiro capítulo, é apresentada uma introdução geral sobre o tema, além do problema e os objetivos deste trabalho. Já no segundo capítulo, realiza-se uma revisão bibliográfica sobre os assuntos pertinentes ao desenvolvimento do projeto. No terceiro capítulo, são apresentados os materiais e métodos a serem utilizados para desenvolver o projeto. Ademais, no quarto capítulo, apresenta-se a modelagem e identificação do sistema, além da implementação dos controladores PD. Por sua vez, no quinto capítulo apresentam-se os resultados e discussões. Por fim, no sexto capítulo expõem-se as conclusões e considerações finais sobre o trabalho.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Representação de Sistemas

Os sistemas de controle são uma parte integrante da sociedade moderna. Dessa forma, para iniciar o estudo é preciso conhecer seu comportamento dinâmico através das equações que o representam, isto é, sua modelagem matemática. A partir dessa modelagem pode-se desenvolver técnicas de controle para melhorar o desempenho do sistema, visto que é possível mensurar seu comportamento e atuar de forma correta e eficaz. Com isso, os sistemas são representáveis de diversas formas, sendo as mais utilizadas a de função de transferência e de espaços de estados, que serão abordadas a seguir (NISE, 2012).

### 2.2 Função de Transferência

As funções de transferências são comumente utilizadas para caracterizar as relações de entrada e de saída de componentes ou sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais lineares e invariantes no tempo. Dessa forma, a função de transferência é definida como a relação entre a transformada de Laplace da saída, ou seja, função da resposta, e a transformada de Laplace da entrada, também conhecida como função de excitação, considerando todas as condições iniciais nulas (OGATA, 2010).

Considere o sistema linear invariante no tempo, definido pela seguinte equação diferencial, com condições iniciais nulas.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t), \quad (1)$$

sendo  $y(t)$  a saída do sistema e  $x(t)$  a entrada. Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da Equação (1), obtém-se:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_0 X(s) \quad (2)$$

Desse modo, com base na Equação (2) e na definição de função de transferência, obtém-se a função de transferência do sistema dada pela Equação (3):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (3)$$

Além disso, analisando a função de transferência acima, o maior valor de  $n$  determinará a ordem do sistema, sendo assim denominado de sistema de ordem  $n$ , para  $n \geq m$  (OGATA, 2010).

### 2.3 Espaços de Estados

A abordagem por espaço de estados, também conhecida como teoria de controle moderno, é um método para modelar, analisar e projetar sistemas de controle mais complexos. Tais complexidades podem ser notadas, por exemplo, em sistemas variantes no tempo e sistemas não lineares, que não podem ser representados a partir da modelagem por função de transferência (NISE, 2012).

Com isso, o vetor de estados é o menor conjunto de variáveis capaz de determinar o comportamento dinâmico desse sistema (NISE, 2012). A partir deste comportamento, é utilizado um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem para representá-las, tais como a Equação (4).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m. \end{aligned} \quad (4)$$

Este conjunto de equações diferenciais pode ser expresso na forma matricial como na Equação (5):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (5)$$



Nesta notação, a matriz coluna contendo as variáveis de estados é denominada vetor de estados  $x$ , a matriz coluna de entrada como  $u$ , e as matrizes que relacionam a taxa de variação ao estado do sistema e aos sinais de entrada como matrizes  $A$  e  $B$ . Além disso, pode-se relacionar a saída  $y$  do sistema com a matriz de estados através da matriz  $C$  e os sinais de entrada  $u$  com a saída a partir da matriz  $D$ . Desse modo, tem-se o seguinte conjunto de equações em espaço de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6)$$

$$y = Cx + Du \quad (7)$$

## 2.4 Conversão de Função de Transferência para Espaço de Estados

A partir da função de transferência e espaço de estados é possível representar um sistema de forma equivalente. Porém, existem muitas técnicas de controle que necessitam da representação por espaços de estados, ou mesmo o contrário. Dessa forma, pode-se realizar a conversão da forma de representação do sistema. Considere o sistema representado pela função de transferência (8):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (8)$$

Inicialmente, para realizar a conversão da representação deste sistema, é necessário obter sua representação por equações diferenciais. Com isso, realizando a multiplicação cruzada e aplicando a transformada inversa de Laplace, chega-se em (9) (NISE, 2012):

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u \quad (9)$$

Com a representação por equações diferenciais é determinado um conjunto de variáveis, chamadas variáveis de fase, na qual cada variável de estado subsequente é definida como sendo a derivada da variável do estado anterior, tendo assim as variáveis de fase (10) (NISE, 2012):

$$\begin{aligned}
 x_1 &= y \\
 x_2 &= \frac{dy}{dt} \\
 &\vdots \\
 x_n &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Aplicando a derivada em ambos os lados e realizando as substituições necessárias, tem-se (11):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_{n-1} + b_0u
 \end{aligned} \tag{11}$$

Por fim, organizando a Equação (11) em notação matricial, obtém-se a Equação (12):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u \tag{12}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

## 2.5 Ball and Beam

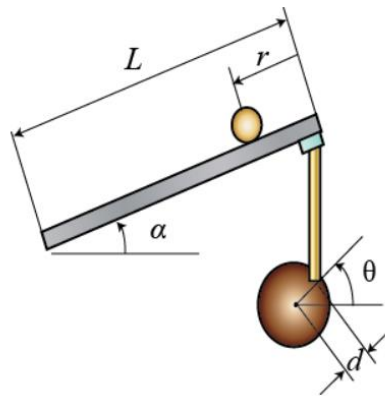
O *ball and beam* é um sistema de controle de posição em que um motor é responsável pela alteração do ângulo de um trilho em relação à horizontal, fazendo com que uma bola deslize com apenas um grau de liberdade ao longo de seu comprimento (WANG, 2007).

### 2.5.1 Modelagem do *Ball and Beam*

O *ball and beam* é um sistema mecânico que pode ser modelado através de vários métodos diferentes, tais como as modelagens newtoniana, lagrangeana e hamiltoniana (ROSA, 2008). Dessa forma, neste projeto será utilizada a modelagem lagrangeana para descrever a dinâmica do sistema. Além disso, esta dinâmica pode ser representada através dos dois modelos apresentados anteriormente, a função de transferência e o espaço de estados por ser uma dinâmica linear.

Considere a Figura 1, com a representação do sistema *ball and beam*:

**Figura 1: Modelo *ball and beam*.**



Fonte: <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=BallBeam&section=SystemModeling>.

Com base na Figura 1, obtém-se a equação de movimento lagrangeana para a dinâmica da bola, representada pela Equação (13) (ANAND,2017).

$$0 = \left( \frac{J}{R_{aio}^2} + m \right) \ddot{r} + mg \sin \alpha - mr\dot{\alpha}^2, \quad (13)$$

onde  $J$  é o momento de inércia da bola,  $R_{aio}$  o raio da bola,  $m$  a massa da bola,  $g$  a aceleração da gravidade,  $r$  a posição da bola no trilho e  $\alpha$  o ângulo entre o trilho e a horizontal.

Para fins de facilitar a modelagem e aplicação de técnicas de controle, linearizou-se a Equação (13) considerando  $\sin \alpha \approx \alpha$ , considerando  $\alpha \approx 0$  e  $\dot{\alpha} \approx 0$ , obtendo assim, a Equação (14).

$$\left(\frac{J}{R_{aio}^2} + m\right)\ddot{r} = -mga \quad (14)$$

Além disso, a equação que relaciona o ângulo entre o trilho e a horizontal com o ângulo do motor, é descrita pela Equação (15).

$$\alpha = \frac{d}{L}\theta, \quad (15)$$

sendo  $d$  o raio da engrenagem que liga o motor com o braço,  $L$  o comprimento do trilho e  $\theta$  o ângulo do motor.

Dessa forma, substituindo a Equação (15) na Equação (14), obtém-se a Equação (16) que representa a dinâmica do sistema *ball and beam*.

$$\left(\frac{J}{R_{aio}^2} + m\right)\ddot{r} = -mg\frac{d}{L}\theta \quad (16)$$

Com isso, aplicando a transformada de Laplace na Equação (16) encontra-se a função de transferência de segunda ordem da posição da bola ( $R$ ) pelo ângulo do motor ( $\theta$ ), dada pela Equação (17):

$$G(s) = \frac{R(s)}{\theta(s)} = -\frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R_{aio}^2} + m\right)s^2} \left[\frac{m}{rad}\right] \quad (17)$$

Além disso, é possível representar a dinâmica do sistema através da modelagem por espaços de estados apresentada pela Equação (18).

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R_{aio}^2} + m\right)} \end{bmatrix} \theta, \quad (18)$$

sendo  $r$  a posição da bola e  $\dot{r}$  a velocidade da bola ao longo do trilho.

Dessa maneira, a partir das representações do sistema, é possível aplicar diversas técnicas de controle, tais como as clássicas, por exemplo, controle

proporcional, proporcional integrativo e proporcional integrativo derivativo, até mesmo as modernas, como o controle robusto, LQR, adaptativo, entre outras (NISE, 2012).

## 2.6 Identificação de Sistemas

A identificação de sistemas é uma área de modelagem matemática que tem o objetivo de estudar e construir representações de modelos dinâmicos de sistemas reais a partir de dados experimentais. Tais representações pretendem descrever relações de causa e efeito entre as variáveis de entrada e saída (AGUIRRE, 2007).

Segundo HSIA (1977), muitos dos problemas de engenharia podem ser caracterizados como identificação de parâmetros, pois se tem o conhecimento prévio do modelo dinâmico do sistema. Assim, para a identificação de sistemas alguns procedimentos são necessários:

1. Coleta de dados;
2. Conjunto de modelos candidatos para identificação do sistema;
3. Identificação dos parâmetros;
4. Validação dos modelos.

### 2.6.1 Identificação do modelo *ball and beam*

Para a identificação do modelo *ball and beam*, utilizou-se o ensaio de identificação de malha aberta pela excitação degrau, coletando sua resposta temporal. Sendo de conhecimento prévio, a representação do modelo pela excitação é dada pela Equação (19).

$$g(t) = at^2 \quad (19)$$

Com a resposta temporal e o modelo conhecido, utilizou-se os comandos *fit* e *fittype* do software MATLAB® para a estimação do parâmetro  $a$ . Aplicando a transformada de Laplace na Equação (19), obtém-se a saída ao degrau, representada pela Equação (20).

$$Y_{degrau}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{R(s)}{\theta(s)} = \frac{1}{s} \cdot G_{ident}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{2a}{s^2} \left[ \frac{m}{rad} \right] \quad (20)$$

Assim, a função de transferência da representação dinâmica do sistema é dada pela Equação (21).

$$G_{ident}(s) = \frac{R(s)}{\theta(s)} = \frac{2a}{s^2} \left[ \frac{m}{rad} \right] \quad (21)$$

Para fins de validação da representação do sistema, comparou-se as respostas temporais dos dados coletados com a função obtida, analisando o erro apresentado entre as respostas.

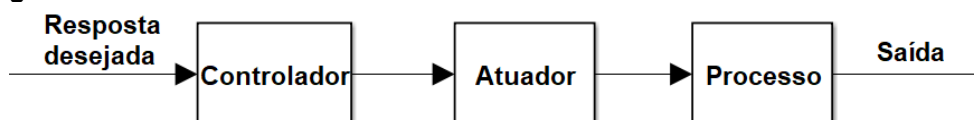
## 2.7 Sistemas de Controle

O controle de sistemas é realizado com o objetivo de se obter uma saída desejada com um desempenho requerido a partir de uma entrada específica do sistema estudado. Logo, pode-se alterar a dinâmica do sistema para atender às especificações estabelecidas. Com isso, através da modelagem matemática do sistema pela função de transferência ou por espaços de estados é possível projetar controladores clássicos e modernos para atender a estas especificações (NISE, 2010).

### 2.7.1 Sistema de malha aberta

Os sistemas de controle denominados de malha aberta são aqueles em que o sinal de saída não exerce nenhuma ação de controle no sistema, ou seja, o sinal de saída não é medido nem realimentado para a comparação da entrada (OGATA, 2010). A Figura 2 representa um sistema de malha aberta.

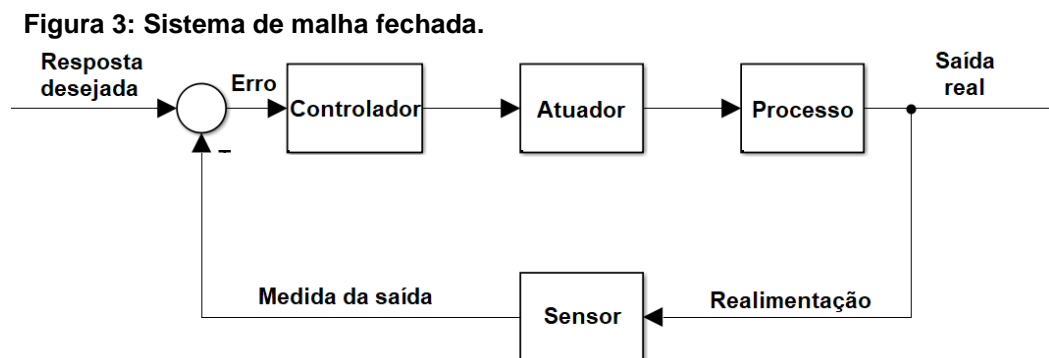
**Figura 2: Sistema de malha aberta.**



Fonte: DORF; BISHOP (2013).

### 2.7.2 Sistema de malha fechada

São sistemas de controle com ramo de realimentação, em que o sinal de erro, que é a diferença entre o sinal de entrada e o de realimentação, atua realimentando o controlador, de modo a minimizar o erro e acertar a saída do sistema ao valor desejado (OGATA, 2010). Tal sistema é ilustrado na Figura 3.



Fonte: DORF; BISHOP (2013).

### 2.7.3 Erros estacionários

O erro estacionário é a diferença entre a entrada e a saída para uma entrada de teste prescrita quando o tempo tende ao infinito (NISE, 2012). Os erros em um sistema de controle podem ser atribuídos a muitos fatores, tais como a incapacidade de um sistema de seguir determinados tipos de sinais de entrada, imperfeições nos componentes do sistema, atritos estáticos, folga e deriva de amplificadores, entre outros (OGATA, 2010).

Com isso, qualquer sistema de controle físico apresenta, inerentemente, erros estacionários a certos tipos de entrada (degrau, rampa e parábola). Tal erro é determinado pelo tipo do sistema analisado e a entrada aplicada. O tipo do sistema se baseia na quantidade de integrações presentes na função de transferência de malha aberta. Um sistema do Tipo 0 é dito um sistema que não possui nenhum integrador, já um sistema do Tipo 1, tem apenas um integrador (OGATA, 2010). Assim, na Tabela 1, está presente o erro estacionário de acordo com o tipo do sistema e ao tipo de entrada.

**Tabela 1: Relações entre entrada, tipo do sistema, constante de erro e erros estacionários.**

Entrada	Fórmula do erro	Tipo 0		Tipo 1		Tipo 2	
		Constante de erro	Erro	Constante de erro	Erro	Constante de erro	Erro
Degrau, $u(t)$	$\frac{1}{1 + K_x}$	$K_x = \text{constante}$	$\frac{1}{1 + K_x}$	$K_x = \infty$	0	$K_x = \infty$	0
Rampa, $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	$\infty$	$K_v = \text{constante}$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parábola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	$\infty$	$K_a = 0$	$\infty$	$K_a = \text{constante}$	$\frac{1}{K_a}$

Fonte: adaptado NISE (2012).

sendo  $K_x$  a constante de posição à entrada degrau,  $K_v$  a constante de velocidade à entrada rampa e  $K_a$  a constante de aceleração à entrada parábola.

#### 2.7.4 Controlador PID

O controle PID se tornou umas das topologias de controle mais comuns e amplamente utilizadas na indústria, visto sua simplicidade construtiva e capacidade de operar dentro de uma larga faixa de condições ambientes (DORF; BISHOP, 2013). Este controlador se baseia na comparação entre uma referência desejada e a saída da planta para a excitação de um sinal de controle, a fim de que a saída da planta rastreie a referência desejada. A equação no domínio do tempo da dinâmica desse controlador é dada por (22).

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (22)$$

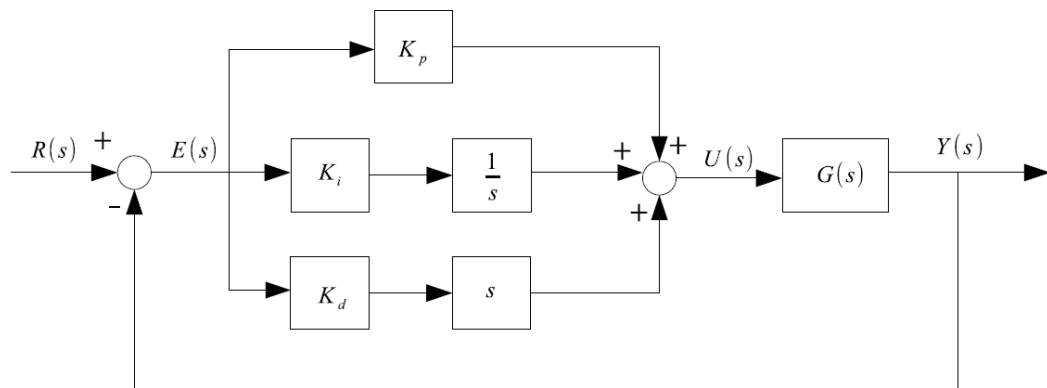
sendo  $e(t)$  o erro entre o sinal de referência e a saída do sistema no instante  $t$ . A função de transferência no domínio de Laplace do respectivo sistema de controle é dada pela Equação (23).

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s. \quad (23)$$

Este controlador, como visto na equação anterior, é baseado em três termos principais, sendo eles o termo proporcional  $K_p$ , o integral  $K_i$  e o derivativo  $K_d$ . Cada um desses termos possui sua relevância na ação do controlador e pode ser ajustado de acordo com a tipo de resposta desejada. O sistema de controle PID pode ser visto na Figura 4.



**Figura 4: Diagrama de blocos do controlador PID.**



Fonte: OGATA (2010).

A ação de controle proporcional é aplicada com a finalidade de melhorar a resposta do sistema atuando proporcionalmente ao erro. Por sua vez, a ação de controle integral tem por objetivo diminuir e eliminar erros de regime permanente com a adição de um polo situado na origem. Porém, pode inserir oscilações transitórias no sistema, degradando a estabilidade. Por fim, a ação do controle derivativo se baseia na taxa de variação do erro, de forma a aplicar uma ação corretiva, aumentando o amortecimento do sistema e diminuindo oscilações. Tal influência dos termos  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  sobre o sistema pode ser vista na Tabela 2, em que  $T_r$  é o tempo de subida,  $M_o$  o máximo de sobressinal,  $T_s$  o tempo de assentamento e  $e_{ss}$  o erro de regime estacionário. Para mais informações vide Ogata (2010).

**Tabela 2: Influencia dos termos  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  no sistema.**

	$T_r$	$M_o$	$T_s$	$e_{ss}$	Estabilidade
$K_p$	Decresce	Aumenta	Aumenta pouco	Decresce	Degrada
$K_i$	Decresce pouco	Aumenta	Aumenta	Decresce muito	Degrada
$K_d$	Decresce pouco	Decresce	Decresce	Influi pouco	Melhora

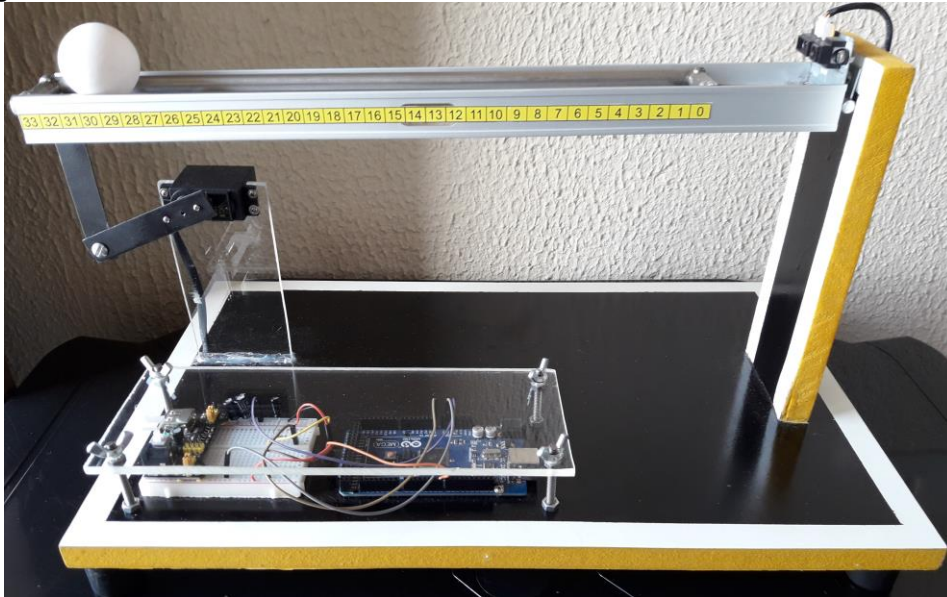
Fonte: Lie et al. (2006).

Considerando o modelo matemático do *ball and beam*, nota-se que o sistema é do Tipo 2 (presença de dois integradores) não necessitando da ação integrativa para anular o erro de regime para uma entrada degrau e rampa (vide Tabela 1). Assim, neste trabalho será aplicado um controlador Proporcional Derivativo (PD) como estratégia de controle.

### 3. MATERIAS E MÉTODOS

Para a construção do módulo didático, buscou-se a utilização de materiais de baixo custo e de fácil acesso, a fim de permitir a sua replicabilidade. Assim, o sistema físico desenvolvido está ilustrado na Figura 5.

Figura 5: *Ball and Beam* desenvolvido.



Fonte: Autoria Própria.

No módulo desenvolvido, foi utilizado um servo motor como atuador para alterar a inclinação do trilho, a ser acionado pelo sinal oriundo de uma placa de comunicação Arduino® Mega2560. Por sua vez, o controle e o processamento de dados é realizado pelo software Simulink®, com base no sinal de posição da bola a partir do sensor de distância infravermelho.

A seguir, descreve-se brevemente os materiais e equipamentos utilizados para o desenvolvimento do *ball and beam*, bem como a interface de comunicação e controle desenvolvida no Simulink®.

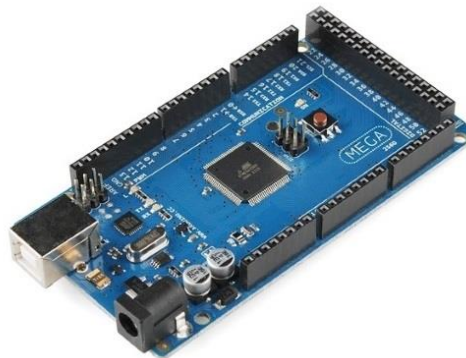
#### 3.1 Placa de comunicação

A placa de comunicação tem como objetivo principal receber a leitura de distância da bolinha, enviando-a para a estrutura de controle, bem como enviar o sinal

de controle para o servo motor por meio de um sinal PWM (*Pulse-Width Modulation*) alterando a inclinação do trilho, resultando na variação da posição da bolinha.

Assim, utilizou-se a placa microcontroladora Arduino® Mega2560, visto a sua fácil interação com o software Simulink® e aquisição. O Arduino® é uma plataforma de *hardware open source*, de fácil utilização, ideal para a criação de dispositivos que permitem interação com o ambiente e utilizam como entradas sensores de temperatura, luz, som, distância etc., e como saídas LEDs, motores, *displays*, auto-falantes etc., criando possibilidades ilimitadas de aplicações (SOUZA et al., 2011). A placa Arduino® Mega2560 é apresentada na Figura 6.

**Figura 6: Arduino® Mega2560.**



Fonte: <https://www.filipeflop.com/produto/placa-mega-2560-r3-cabo-usb-para-arduino/>

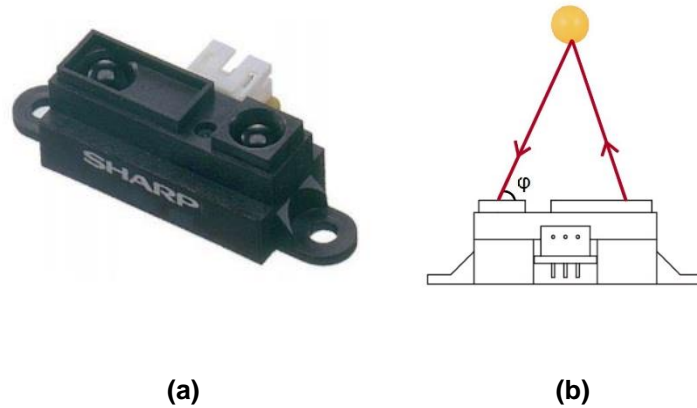
### 3.2 Sensor de distância infravermelho

Para realizar a aquisição da distância da bolinha com uma melhor precisão, foi utilizado um sensor infravermelho SHARP® GP2Y0A21YK0F (vide Figura 7 (a)), um sensor composto por uma combinação de diodo emissor, circuito oscilador, receptor e circuito de processamento de sinal. Dessa forma, este sensor utiliza um método de triangulação para determinar a distância de um objeto. Para isso, um feixe de luz infravermelho é emitido e se propaga até colidir com o objeto. Após colidir com o objeto, esse feixe é refletido, formando um triângulo entre o diodo emissor, objeto e o receptor (ALCÂNTARA, 2013).

Com isso, o feixe refletido incide no receptor e é transmitido ao circuito de processamento de sinal que determinará o ângulo de deflexão ( $\varphi$ ), como ilustra a Figura 7 (b). Este ângulo varia de acordo com a distância do objeto. Desse modo, o

sensor calcula a distância através desse ângulo de deflexão e emite uma tensão no pino de saída de acordo com a distância do objeto (ALCÂNTARA, 2013).

Figura 7: (a) Sensor SHARP® GP2Y0A21YK0F; (b) Princípio de funcionamento.



Fonte: (a) Datasheet SHARP® (2015); (b) Autoria Própria.

A Tabela 3 apresenta as principais especificações deste sensor.

Tabela 3: Especificações técnicas do sensor SHARP®.

Especificação	Faixa de Operação/ Valor
Tensão operacional	4,5 a 5,5 V
Consumo de corrente	30 mA
Distância medida	10 a 80 cm

Fonte: Autoria Própria.

### 3.3 Servo Motor

O servo motor é uma máquina síncrona composta por uma parte fixa (estator), que tem a função de conduzir o fluxo magnético, uma parte móvel (rotor), que é composto por ímãs permanentes dispostos linearmente e com um gerador de sinais, *resolver*. Com isso, o servo motor tem uma boa precisão quanto ao posicionamento e controle de rotação (OTTOBONI, 2002).

Portanto, para a realização deste projeto, foi utilizado um servo motor SG5010 TowerPro® como ilustra a Figura 8, devido à sua boa precisão e à sua fácil interação com a plataforma Arduino®.

Figura 8: Servo Motor SG5010 TowerPro®.



Fonte: <https://www.robocore.net/loja/servos/servo-sg5010>

### 3.4 Fonte Ajustável para *Protoboard*

A fonte ajustável de *protoboard* é comumente utilizada nos circuitos eletrônicos de baixa tensão com a finalidade de alimentá-los, transformando a tensão alternada da rede elétrica em contínua. Além disso, a fonte regula a tensão de acordo com a necessidade, podendo fornecer 3,3V ou 5V.

Neste projeto, foi utilizada a fonte ajustável de *protoboard* devido à insuficiência da corrente fornecida pelo Arduino® ao sensor SHARP® para que este opere em sua corrente nominal. A Figura 9 ilustra a fonte ajustável de *protoboard*.

Figura 9: Fonte ajustável para protoboard.



Fonte: <https://www.filipeflop.com/produto/fonte-ajustavel-protoboard/>.

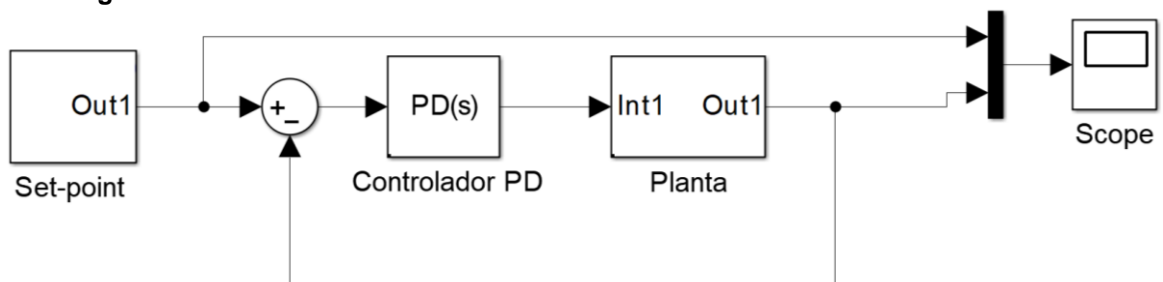
### 3.5 Interface de controle

O MATLAB® é um *software* interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico cujo elemento básico de informação é uma matriz, podendo realizar análises numéricas, de dados, cálculos matriciais, processamento de sinais, entre outras aplicações (SILVA, 2002). Já o Simulink®, é uma ferramenta de simulação integrada ao MATLAB®, que permite modelar, simular e analisar sistemas dinâmicos, além da integração com diversos softwares e hardwares, tais como a placa Arduino® aqui utilizada. Dessa forma, através de sua interface gráfica é possível criar modelos sob

a forma de diagrama de blocos, facilitando a interação do usuário (COELHO et al., 2014).

Utilizando o pacote Support Package for Arduino®, desenvolvido pela MathWorks (2013), conectou-se a placa de comunicação ao software. Assim, o sensor realiza a leitura da posição da bolinha com frequência de 40 Hz. Da mesma forma, após o processamento desse sinal pelo Simulink®, o sinal de controle é enviado para a placa com a mesma frequência, para que o servo motor atue devidamente. A Figura 10 representa o diagrama de blocos, desenvolvido no ambiente Simulink®.

**Figura 10: Interface de controle Simulink®.**



**Fonte: Aatoria Própria.**

## 4. DESENVOLVIMENTO

Nesta seção, apresenta-se o desenvolvimento do sistema de controle, partindo da obtenção da função de transferência do sistema modelado e identificado, até o projeto dos ganhos do controlador PD a partir dos polos de malha fechada estipulados.

### 4.1 Modelagem Lagrangeana da função de transferência

Com base na modelagem Lagrangeana apresentada na Seção 2.5.1, que apresenta a função de transferência do sistema *ball and beam*, foram realizadas as medições necessárias para a obtenção do modelo matemático, tais medições estão apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4: Valores medidos das variáveis.

Variável	Valor
$R_{aio}$	0,02 m
$d$	0,06 m
$g$	9,81 m/s <sup>2</sup>
$L$	0,405 m
$m$	0,003 Kg
$J$	$8,0 \cdot 10^{-7} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ ( $J = \frac{2}{3} mRa^2$ )

Fonte: Autoria Própria.

sendo  $Ra$  o raio da bola,  $d$  o raio da engrenagem que liga o motor com o braço,  $g$  a aceleração da gravidade,  $L$  o comprimento do trilho e  $\theta$  o ângulo do motor,  $m$  a massa da bolinha e  $J$  o momento de inércia da bolinha.

A partir das medições e da Equação (17), obteve-se a função de transferência do módulo didático representado pela Equação (24).

$$G_{model}(s) = \frac{R(s)}{\theta(s)} = \frac{1,744}{s^2} \left[ \frac{m}{rad} \right] \quad (24)$$

## 4.2 Identificação da função de transferência

Para realizar a identificação da função de transferência do módulo, utilizou-se o ensaio de identificação em malha aberta através da resposta ao degrau, apresentada na Seção 2.6.1. Com isso, posicionou-se o ângulo do servo motor 45 graus abaixo da posição de equilíbrio do sistema, realizando, através do sensor infravermelho as medições da posição da bolinha sobre o trilho em um intervalo de tempo determinado. Tal procedimento foi realizado 10 vezes, sendo medições apresentadas na Tabela 5.

**Tabela 5: Distância medidas em função do tempo.**

<b>Tempo (s)</b>	<b>Distância (cm)</b>
0,0	0,000
0,1	1,242
0,2	1,212
0,3	2,194
0,4	3,077
0,5	5,189
0,6	8,059
0,7	10,579
0,8	14,214
0,9	16,818
1,0	20,909
1,1	25,200
1,2	30,000

**Fonte: Autoria Própria.**

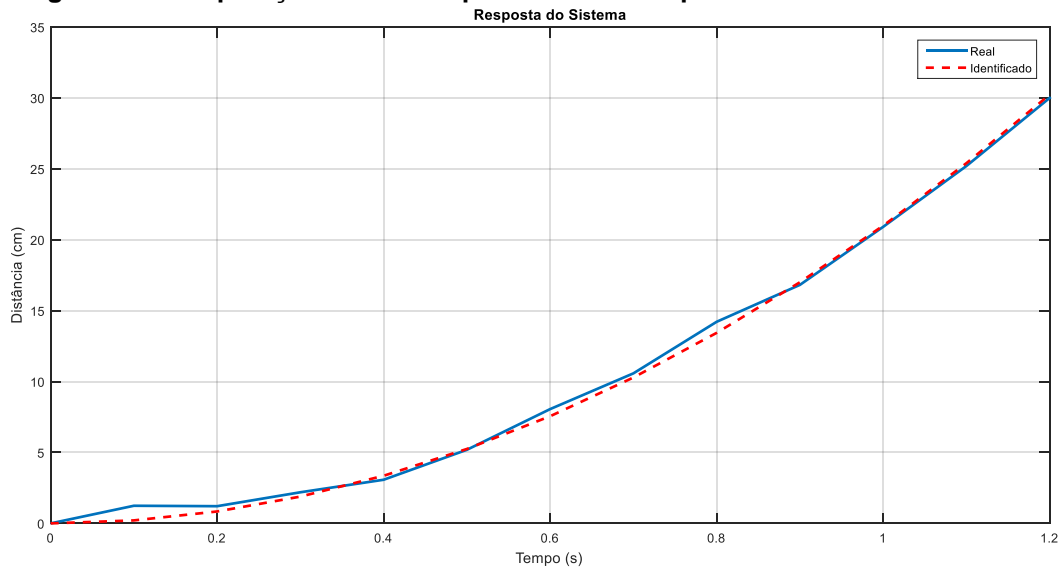
Com as medições realizadas e o modelo conhecido (Equação (21)), apresentado na Seção 2.6.1, estimou-se o parâmetro  $a$  através dos comandos *fit* e *fittype* do software MATLAB®. Logo, a função de transferência do sistema é dada pela Equação (25).

$$G_{ident}(s) = \frac{R(s)}{\theta(s)} = \frac{2,099}{s^2} \left[ \frac{m}{rad} \right] \quad (25)$$

Para a validação do modelo identificado, comparou-se a resposta real com a resposta do modelo, dada pela Equação (25). A validação está presente na Figura (11).



**Figura 11: Comparação entre a resposta real e a resposta identificada do sistema.**



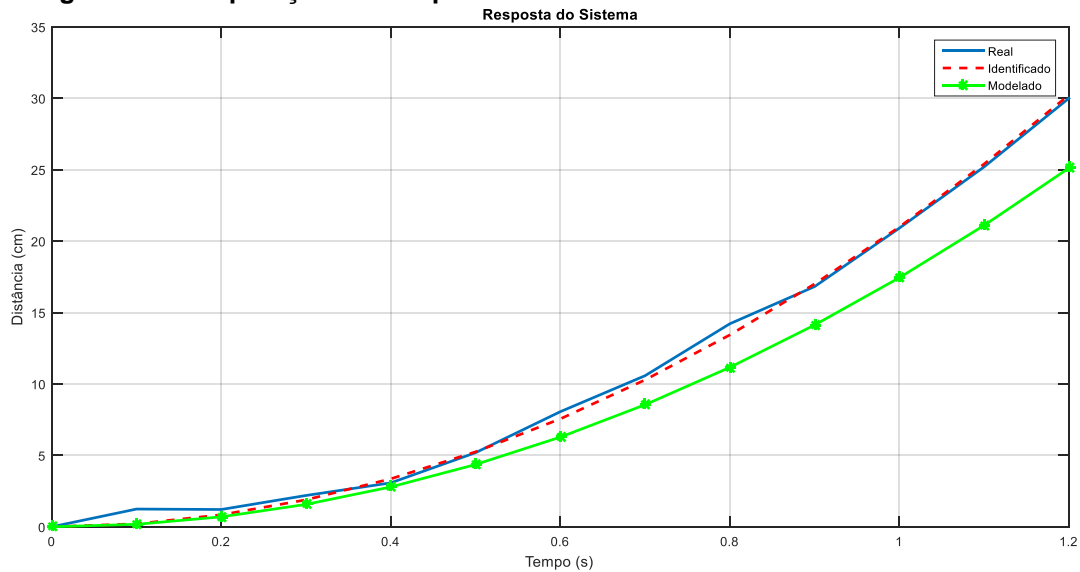
**Fonte: Autoria Própria.**

Analisando a Figura 11, nota-se que o sistema identificado obteve uma dinâmica próxima do sistema real, chegando-se numa boa representação do sistema *ball and beam*.

### 4.3 Comparação entre a modelagem e identificação

Para fins de comparação e maior acurácia da representação dinâmica do módulo didático objetivando a sintonia do controlador, as respostas do sistema modelado (Equação 24) e identificado (Equação 25) estão plotadas na Figura 12, juntamente com a resposta real obtida a partir da Tabela 5.

**Figura 12: Comparação das respostas de malha aberta do sistema.**



**Fonte: Autoria Própria.**

Analisando o gráfico apresentado na Figura 12, observa-se que dentre os modelos obtidos o que melhor representa o sistema físico *ball and beam* é o modelo identificado. Este resultado pode ser explicado pelo fato de que a identificação contempla, nesta situação, informações adicionais que podem ter sido desconsideradas no conjunto de equações do modelo lagrangeano.

Assim, com a finalidade de demonstração da influência desta informação serão comparadas as respostas do sistema compensado pelo controlador sintonizado pela representação lagrangeana e pela identificada.

#### 4.4 Projeto do controlador PD

Após obter as representações da dinâmica do sistema, o próximo passo é realizar a sintonia do controlador considerando as funções de transferência obtidas através da modelagem e da identificação. É de conhecimento prévio que a estrutura do controlador PD é dada pela Equação (26).

$$G_{control}(s) = K_p + K_d s, \quad (26)$$

sendo  $K_p$  o ganho proporcional e  $K_d$  o ganho derivativo.

Assim, para a sintonia do controlador PD foram considerados os polos de malha fechada desejados. Tais polos foram obtidos através de diversos testes

computacionais e simulações no modelo. Os polos desejados estão apresentados na Equação (27).

$$p_{1,2} = -1,5745 \pm 1,9540i \quad (27)$$

Com os polos de malha fechada desejados, obtém-se o polinômio desejado dado pela Equação (28).

$$s^2 + 3,149s + 6,297 \quad (29)$$

Com isso, é comparado o polinômio desejado com o polinômio característico de malha fechada do sistema compensado com a finalidade de determinar os parâmetros do controlador.

Para o projeto, realizou-se a implementação do controlador PD para ambas as funções de transferências apresentadas.

#### 4.4.1 Controlador PD a partir do modelo lagrangeano

Considerando o modelo lagrangeano apresentado pela Equação (24), Seção 4.1, tem-se a função de transferência de malha fechada do sistema compensado dada pela Equação (30).

$$M_{model} = \frac{1,744(K_p + K_d s)}{s^2 + 1,744K_d s + 1,744K_p} \quad (30)$$

Igualando os termos dos polinômios desejado e característicos, Equações (29) e (30), encontra-se os valores de  $K_p$  e  $K_d$  apresentados na Tabela (6).

$$s^2 + 1,744K_d s + 1,744K_p = s^2 + 3,149s + 6,297$$

**Tabela 6: Cálculos dos valores de  $K_p$  e  $K_d$ .**

Termo s	Termo independente
$1,744K_d s = 3,149s$	$1,744K_p = 6,297$

$$K_d = 1,8$$

$$K_p = 3,6$$

Fonte: Autoria Própria.

Com isso, obtém-se a função de transferência do controlador dada pela Equação (31).

$$G_{control_{model}}(s) = 3,6 + 1,8s \quad (31)$$

#### 4.4.2 Controlador PD a partir do modelo identificado

Para a sintonia do controlador, foi utilizado o mesmo procedimento apresentado na Seção 4.4.1. Considerando o polinômio desejado, Equação (29), obtém-se a função de transferência do controlador dada pela Equação (32).

$$G_{control_{ident}}(s) = 3,0 + 1,5s \quad (32)$$

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com o projeto do controlador desenvolvido e o módulo didático construído, realizaram-se implementações práticas para validar o controlador no sistema *ball and beam*, bem como observar seu comportamento dinâmico. Os testes foram realizados considerando os dois controladores sintonizados a partir das funções de transferência do modelo lagrangeano e identificado. Assim, realizaram-se testes no sistema com *setpoint* tipo entrada degrau unitário de amplitude constante e variada, através da interface de comunicação desenvolvida no software Simulink®. Além disso, realizaram-se testes no sistema com a presença de perturbações com o objetivo de analisar a ação de controle no sistema.

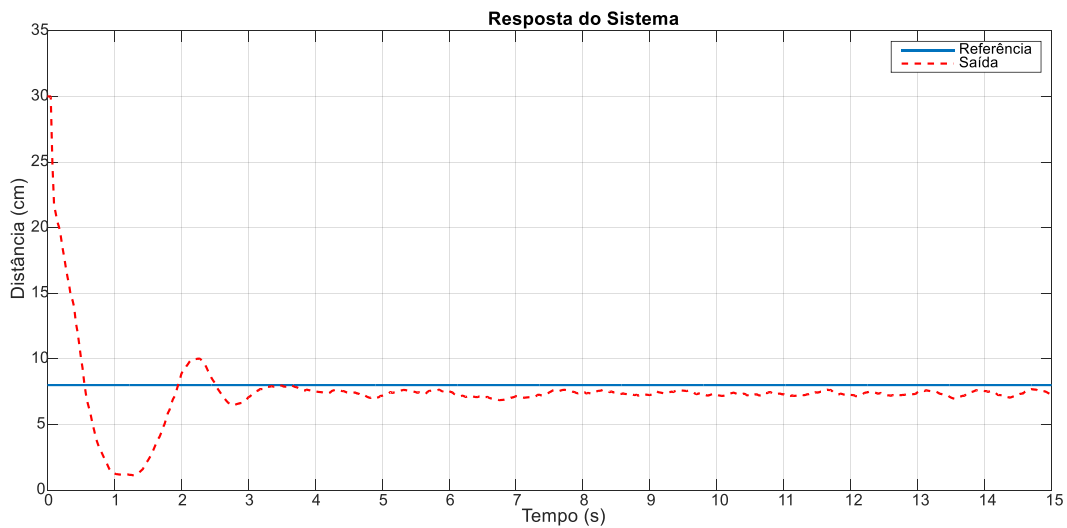
### 5.1 Resposta ao degrau de amplitude constante

A resposta ao degrau se baseia na aplicação de um sinal de referência no sistema analisando seu comportamento dinâmico. Com isso, será analisado a resposta do sistema *ball and beam* à excitação degrau com amplitude constante.

#### 5.1.1 Controlador Projetado via Modelo lagrangeano

O sistema compensado foi excitado com degrau de amplitude constante de 8 cm. A Figura 13 mostra a comparação entre o sinal de saída,  $r(t)$ , obtido experimentalmente e o sinal de referência,  $\theta(t)$ . Nota-se que o sistema se acomodou em aproximadamente 3 segundos, entretanto o erro de regime não foi nulo como esperado. Tal fato se deve ao modelo lagrangeano não representar de forma fiel a dinâmica do sistema real, visto que informações adicionais podem ter sido desconsideradas no conjunto de equações da modelagem.

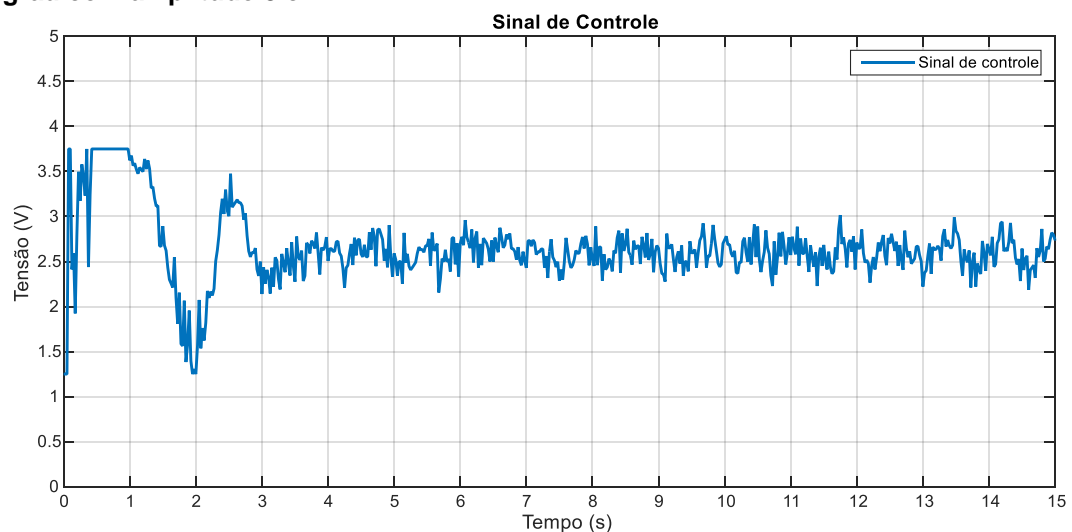
**Figura 13: Resposta ao degrau com amplitude 8 cm do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano.**



**Fonte: Autoria Própria.**

Já a Figura 14 apresenta o sinal de controle  $u(t)$  durante o controle do sistema. Vale ressaltar que o sinal de controle não é nulo neste sistema, pois o equilíbrio do trilho se dá quando o servo motor está posicionado em um ângulo de 90 graus. Convertendo este ângulo em tensão, tem-se 2,5 V, indicando baixo sinal de controle. No início, o sinal de controle se mostrou bastante oscilatório com amplitudes elevadas. Depois de 3 segundos, percebe-se uma pequena variação do sinal aplicado em torno de 2,5 V, demonstrando que o sistema entrou em regime estacionário.

**Figura 14: Sinal de controle do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano ao degrau com amplitude 8 cm.**

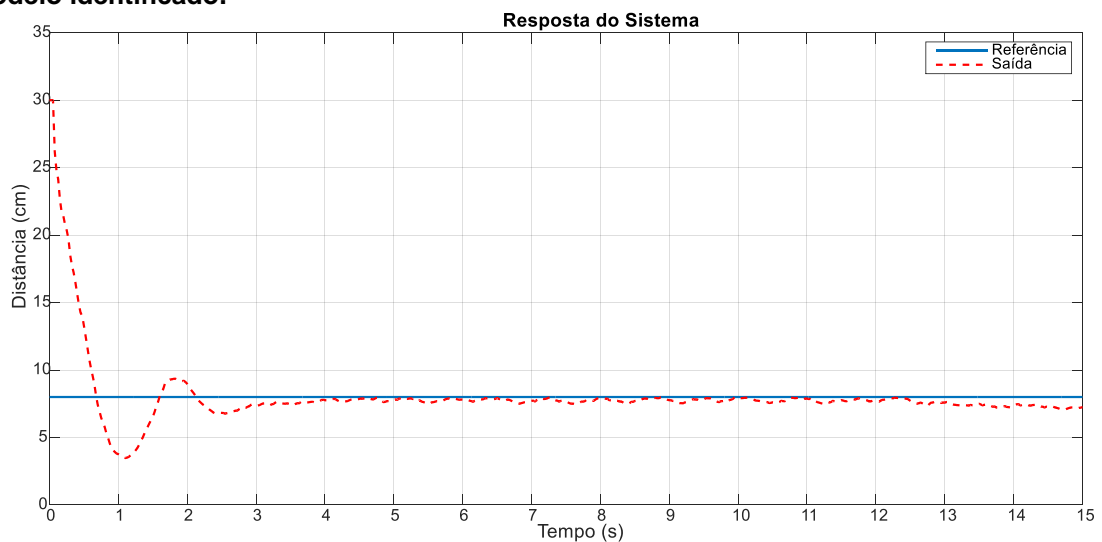


**Fonte: Autoria Própria.**

### 5.1.2 Controlador Projetado via Modelo identificado

Utilizando a mesma metodologia apresentada na Seção 5.1.1, aplicou-se um degrau de amplitude constante de 8 cm. A resposta do sistema compensado pode ser vista na Figura 15. Analisando a resposta do sistema, nota-se que o sistema se acomoda em proximamente 3 segundos e o erro de regime está praticamente nulo, como esperado.

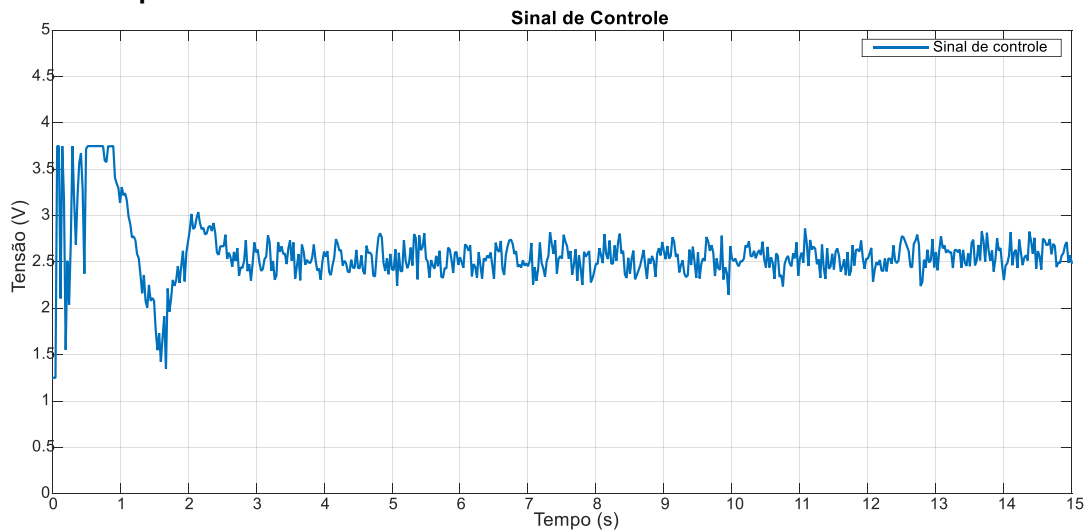
**Figura 15: Resposta ao degrau com amplitude 8 cm do sistema via sintonia PD usando o modelo identificado.**



**Fonte: Autoria Própria.**

A Figura 16 mostra a ação do sinal de controle  $u(t)$  do sistema compensado. Nota-se o mesmo efeito da posição de equilíbrio do trilho (ângulo de 90 graus no servo motor) no sinal de controle. Inicialmente, o sinal apresentou amplitudes bem elevadas e um comportamento oscilatório. No decorrer do tempo, essas oscilações passaram a ser pequenas em torno de 2,5 V, indicando regime estacionário.

**Figura 16: Sinal de controle do sistema via sintonia PD usando o modelo identificado ao degrau com amplitude 8 cm.**

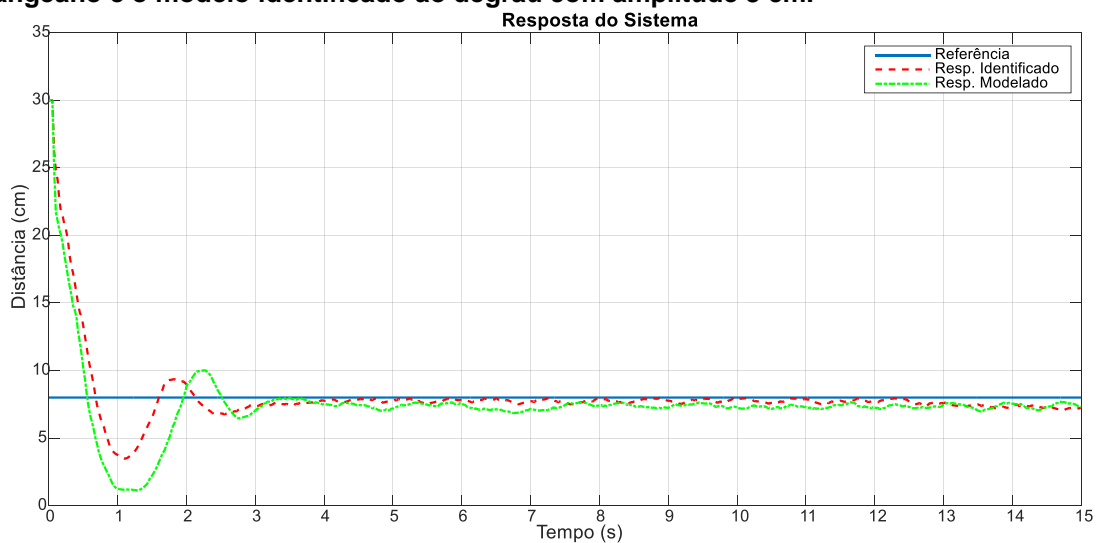


Fonte: Autoria Própria.

### 5.1.3 Comparação dos resultados

Como foi mencionado na Seção 4.1, na modelagem do sistema algumas informações importantes da dinâmica podem ter sido desconsideradas. Dessa forma, para a análise, compararam-se as respostas obtidas através do controlador implementado via modelo lagrangeano e modelo identificado. A Figura 17 apresenta a comparação.

**Figura 17: Comparação entre as respostas do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano e o modelo identificado ao degrau com amplitude 8 cm.**



Fonte: Autoria Própria.



Analisando as respostas apresentadas, nota-se que o sistema compensado pelo controlador projetado via modelo identificado obteve uma resposta mais rápida e próxima da referência adotada. O acontecimento pode ser explicado pelo fato de a identificação do sistema apresentar uma melhor representação da dinâmica do sistema real (modelo mais fiel).

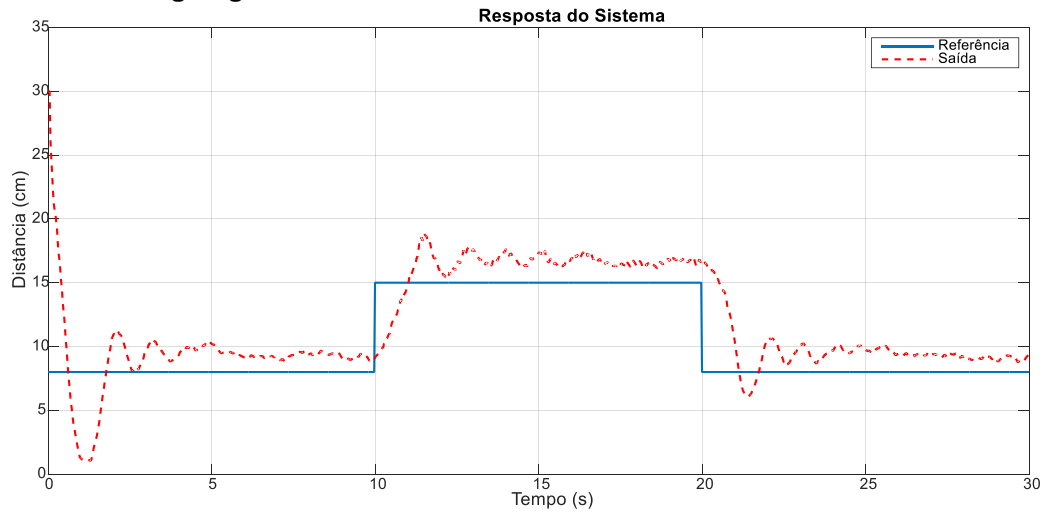
## **5.2 Resposta ao degrau com variação de amplitude**

Com a finalidade de realizar mais testes no sistema compensado, o mesmo foi excitado com um degrau de amplitude 8 cm durante 10 segundos. Após este tempo, alterou-se a amplitude para 15 cm até o tempo de 20 segundos. Por fim, alterou-se a amplitude para 8 cm novamente, mantendo-se até o final da implementação. O *setpoint* será aplicado ao sistema compensado pelo controlador projetado via modelo e via identificação.

### **5.2.1 Modelo lagrangeano**

Compensando o sistema com o controlador apresentado na Equação (31) e aplicando o degrau de amplitudes variadas, obteve-se a resposta do sistema apresentada pela Figura 18. Nota-se que a resposta apresentou comportamento semelhante à referência, porém o sistema apresentou erro de regime permanente, ou seja, não conseguiu seguir a referência adotada.

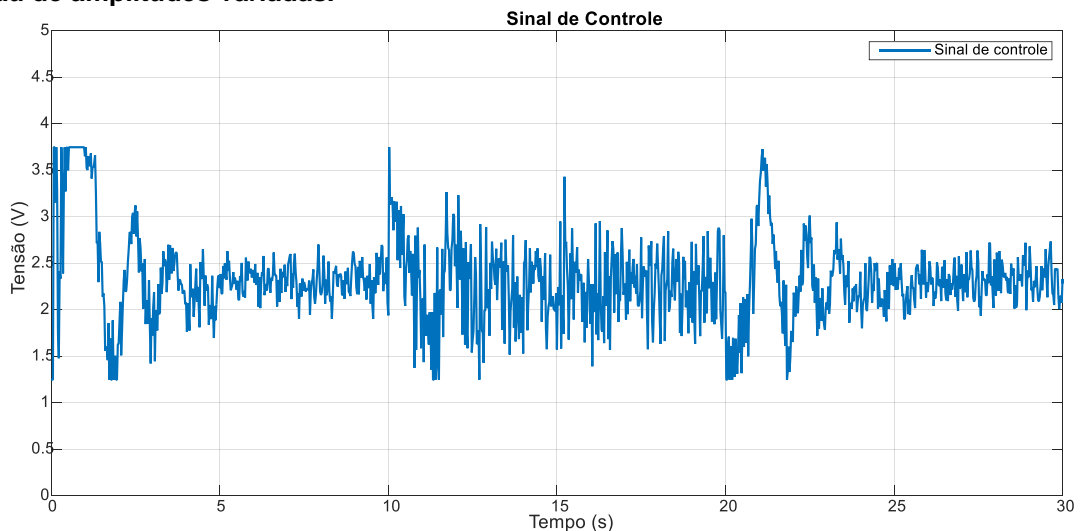
**Figura 18: Resposta ao degrau com amplitudes variadas do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano.**



**Fonte: Autoria Própria.**

A Figura 19 mostra o sinal de controle do sistema. Percebe-se que o sinal de controle apresentou grandes amplitudes no começo da excitação e nos tempos de 10 e 20 segundos, quando se alterou a amplitude do degrau. Além disso, nota-se que na amplitude de 15 cm (entre 10 e 20 segundos) o sinal apresentou uma maior oscilação em relação a amplitude de 8 cm (antes de 10 segundos e depois de 20 segundos), tal situação é evidente devido a erros de leitura pelo sensor quanto a distâncias elevadas.

**Figura 19: Sinal de controle do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano ao degrau de amplitudes variadas.**

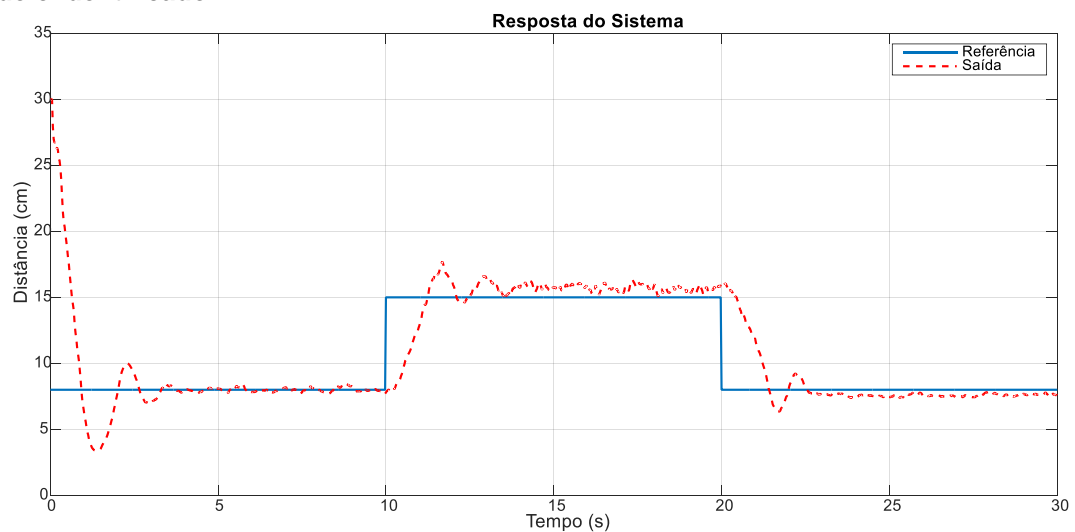


**Fonte: Autoria Própria.**

### 5.2.2 Modelo identificado

A Figura 20 apresenta a resposta do sistema compensado e referência degrau de amplitudes variadas. Para a realização desta implementação, utilizou-se a mesma metodologia apresentada na Seção 5.2.1. Percebe-se que o sistema apresentou comportamento semelhante à referência. Além disso, o erro de regime permanente apresentou-se praticamente nulo, como esperado.

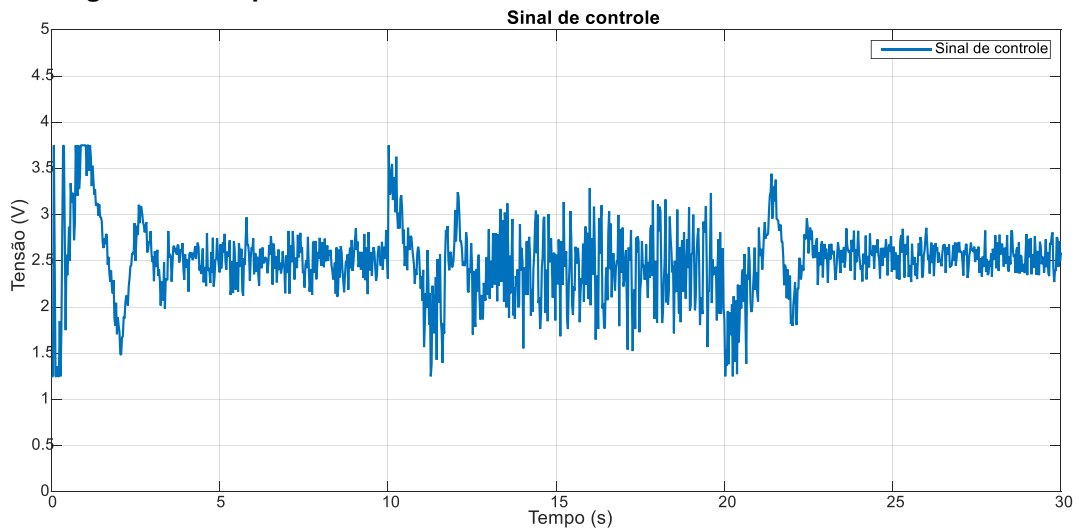
**Figura 20: Resposta ao degrau de amplitude variadas do sistema via sintonia PD usando o modelo identificado.**



**Fonte: Autoria Própria.**

Já a Figura 21, mostra o sinal de controle do sistema compensado. O sinal apresentou um comportamento semelhante ao apresentado na Figura 19, podendo ser explicada pelos mesmos fatores mencionados na Seção 5.2.1.

**Figura 21: Sinal de controle do sistema via sintonia PD usando o modelo identificado a resposta degrau com amplitudes diversas.**

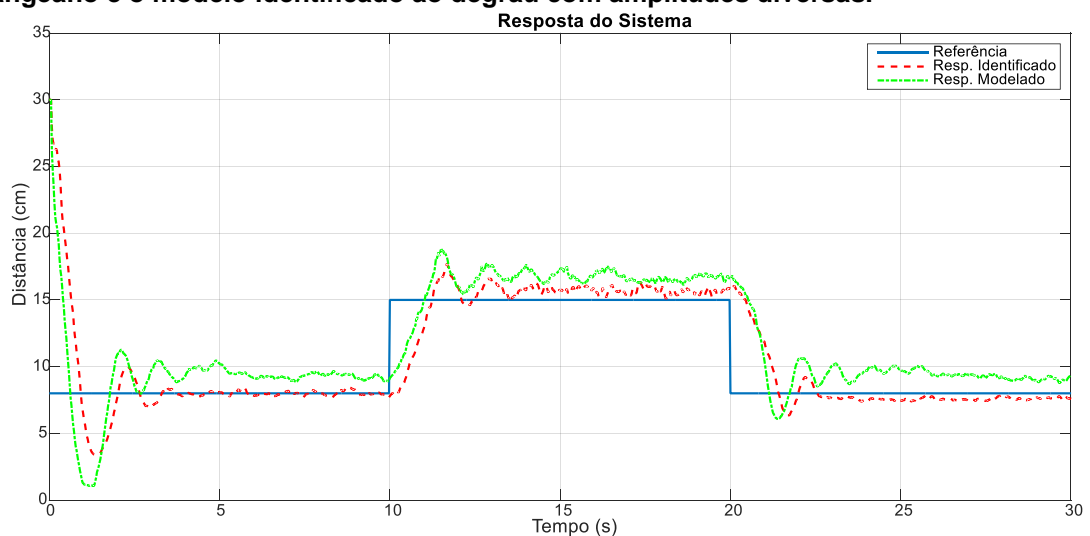


**Fonte: Autoria Própria.**

### 5.2.3 Comparação dos resultados

A Figura 22 apresenta a comparação das respostas do sistema controlado. Nota-se que a resposta compensada quando a sintonia é realizada via modelo identificado apresentou uma melhor performance, conseguindo praticamente anular o erro de regime. Entretanto, os dois controladores apresentaram semelhanças em relação ao sinal de controle (referência).

**Figura 22: Comparação entre as resposta dos sistemas via sintonia usando o modelo lagrangeano e o modelo identificado ao degrau com amplitudes diversas.**



**Fonte: Autoria Própria.**

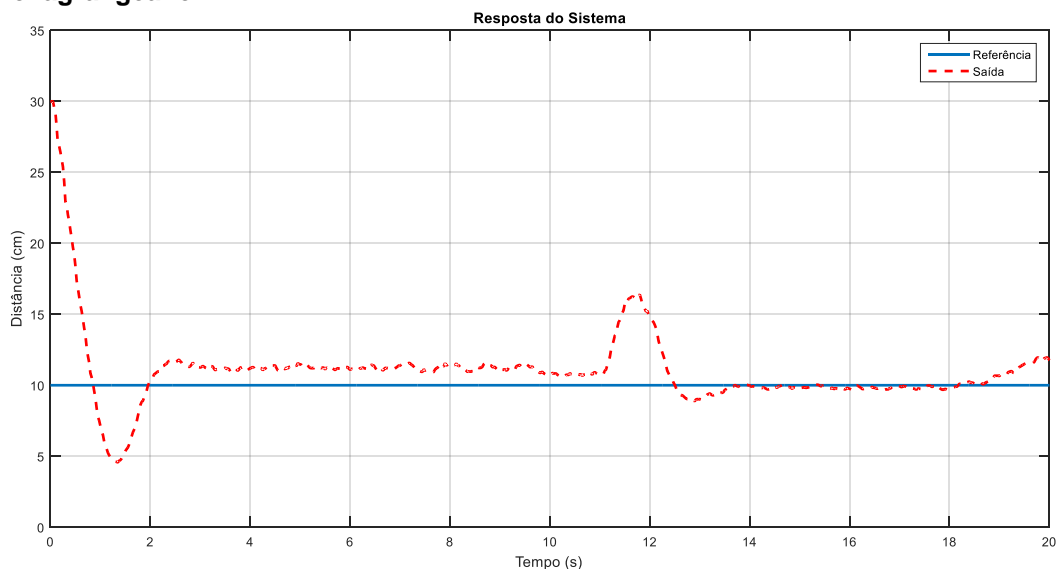
### 5.3 Resposta à perturbação

Para analisar a performance do sistema de controle, foi realizada uma implementação no sistema considerando um *setpoint* do tipo degrau com amplitude de 10 cm. No instante de 10 segundos é inserida uma perturbação via um degrau na bolinha, deslocando-a do equilíbrio. O degrau foi inserido no sistema compensado pelos dois controladores PD sintonizados.

#### 5.3.1 Modelo lagrangeano

A Figura 23 mostra a resposta do sistema à entrada ao degrau. Observe que após 10 segundos ocorreu uma perturbação (pico), porém o sistema de controle conseguiu compensar em aproximadamente 3 segundos. Entretanto, nota-se que o sistema apresentou erro de regime permanente que pode ser influenciado pela desconsideração de algumas características predominantes na representação da dinâmica do sistema.

**Figura 23: Resposta ao degrau com perturbação do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano.**

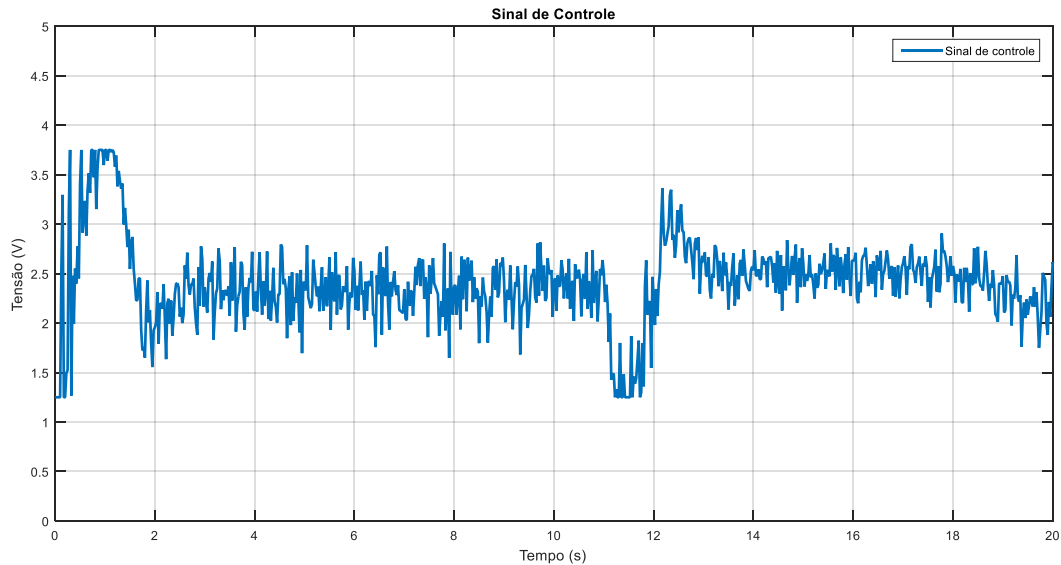


**Fonte: Autoria Própria.**

A Figura 24 mostra o sinal de controle aplicado durante a implementação na presença de perturbação. Inicialmente, tem-se um pico no sinal de controle para a compensação do sistema. Após entrar em regime, no instante de aproximadamente

10 segundos, há a presença de um vale seguido de um pico evidenciando a ação do controlador para corrigir a perturbação.

**Figura 24: Sinal de controle do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano ao resposta degrau com perturbação.**

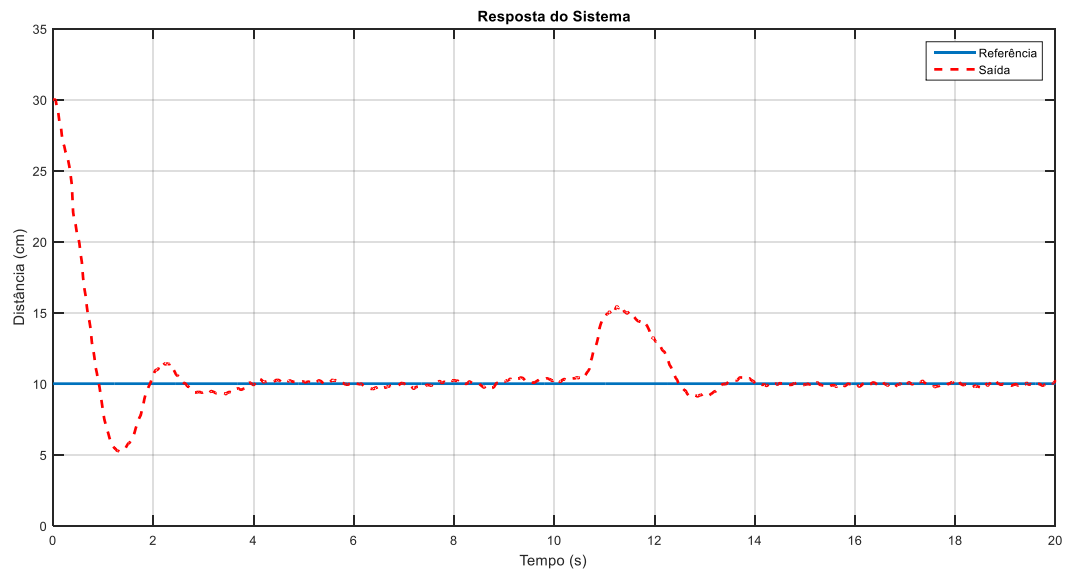


**Fonte: Autoria Própria.**

### 5.3.2 Modelo identificado

Seguindo a mesma metodologia para o modelo identificado, a Figura 25 apresenta a resposta do sistema à entrada degrau. Inicialmente, o sistema entrou em regime em aproximadamente 3 segundos. No instante de 10 segundos, tem-se a presença de um pico indicando a ocorrência de uma perturbação. Dentro de 3 segundos o sistema entrou em regime permanente novamente. Além disso, o erro de regime estacionário apresentado pela resposta foi praticamente nulo o que era esperado.

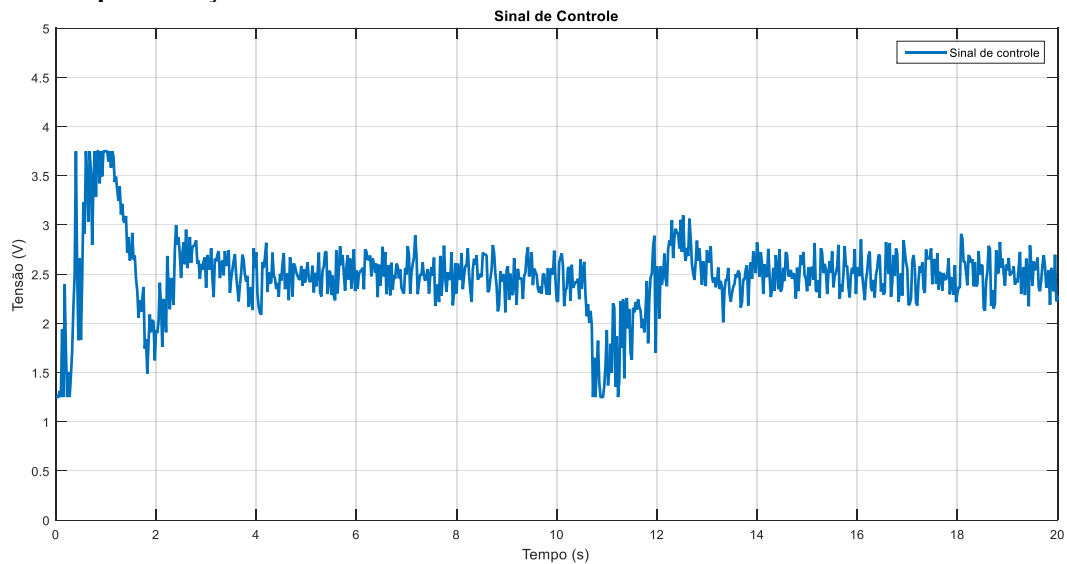
**Figura 25: Resposta ao degrau com perturbação do sistema via sintonia PD usando o modelo identificado.**



Fonte: Autoria Própria.

A Figura 26 exibe o sinal de controle do sistema a resposta ao degrau. O comportamento apresentado é semelhante ao da Figura 24. Com isso, a dinâmica pode ser justificada pelos mesmos motivos evidenciados anteriormente.

**Figura 26: Sinal de controle do sistema via sintonia PD usando o modelo identificado ao degrau com perturbação.**

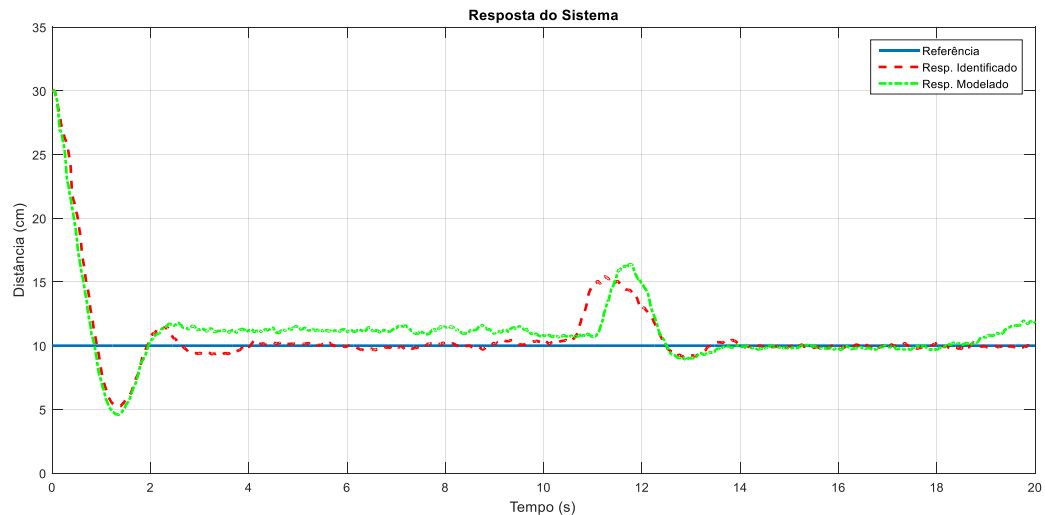


Fonte: Autoria Própria.

### 5.3.3 Comparação das respostas

A Figura 27 ilustra a comparação entre as respostas a entrada degrau com a presença de perturbação no instante 10 segundos. Pode-se perceber que as respostas apresentaram comportamentos semelhantes, porém, a resposta do sistema compensado pelo controlador projetado via modelo identificado apresentou uma resposta mais rápida e com erro de regime permanente praticamente nulo. Tal fato se dá pela melhor aproximação da dinâmica do sistema real, considerando alguns parâmetros desconsiderados na modelagem.

**Figura 27: Comparação entre as respostas do sistema via sintonia PD usando o modelo lagrangeano e o modelo identificado ao degrau com perturbação.**



Fonte: Autoria Própria.



## 6. CONCLUSÃO

O objetivo principal deste trabalho foi o desenvolvimento, modelagem, identificação e controle de um módulo didático *ball and beam*, sendo seus resultados validados através de testes experimentais. Os materiais e métodos utilizados permitiram também o desenvolvimento de tópicos relacionados ao sensoriamento, comunicação, alimentação, controle e identificação de sistemas.

Utilizaram-se materiais de baixo custo visando a replicabilidade do módulo. Além disso, foram comparados os modelos do sistema lagrangeano com o identificado a fim de analisar a conformidade da representação dinâmica do sistema em questão. Foi visto, que o sistema identificado apresentou melhores resultados, visto que ao identificar o sistema é levado em conta alguns parâmetros desconsiderados na modelagem.

Para o controle do sistema, foi implementado um controlador Proporcional Derivativo através dos polos de malha fechada desejados, que foram escolhidos a partir de diversos testes computacionais e simulações no modelo. O controlador foi projetado considerando as duas representações, o modelo lagrangeano e o modelo identificado. Os controladores apresentaram comportamentos semelhantes nos testes experimentais realizados, entretanto, o controlador sintonizado pelo modelo identificado apresentou uma melhor performance.

No mais, o trabalho exposto possui perspectivas para aprimoramento e desenvolvimento de trabalhos futuros, tais como na melhoria da precisão de captura da distância da bolinha ao longo do trilho, a utilização de outras estratégias de controle como controle robusto através de normas  $H_2$  e  $H_\infty$ , controladores do tipo LQR, controle chaveado, entre outros.

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. **Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais**. 3. ed. Belo Horizonte, MG: UFMG, 2007.
- ANAND, Prasad. **Dynamics and Control of a Ball and Beam System**. IJRITCC p.1332-1339, 2017.
- ALCÂNTARA, Caroline A. et al. **Medição de distância dos obstáculos utilizando sensores de infravermelho e plataforma arduino**. Departamento de Engenharia Elétrica, UFBA, 2013.
- BÁEZ, Beauchamp et al. **Control robusto del sistema de bola y viga**. 12. Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology, Guayaquil, Equador, 22 jul. 2014.
- COELHO, João Paulo et al. **Introdução ao Simulink**. Instituto Politécnico de Bragança, Portugal, 2014.
- CONTROL TUTORIALS FOR MATLAB & SIMULINK. **Ball and Beam**. Equipe CONTROL TUTORIALS, 2018. Disponível em: < <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=BallBeam&section=SystemModeling> >. Acesso em: 5 set. 2018.
- DINIZ, Eber de Castro et al. **Simulação de controle de posição de um motor de indução trifásico utilizando controle vetorial indireto**. Revista Tecnológica, Fortaleza, v. 28, n. 2, p. 238-244, dez. 2007.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 12. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2013.
- HAMMADIH, Mohammad Luai et al. **Interpolating sliding mode observer for a ball and beam system**. International Journal of Control. 9. ed., v.89, p. 1879-1889, 15 abr. 2015.

HSIA, Tien C., **System Identification**, D. C. Heath and Company, Estados Unidos, 1977.

LI, Y.; ANG, K. H.; CHONG, G. C. Y. **PID control system analysis and design**. IEEE ControlSystems Magazine, v. 26, n. 1, p. 32–41, 2006.

LI, Xiaoou; YU, Wen. **Synchronization of ball and beam systems with neural compensation**. International Journal of Control. 3. ed., v.8, p. 491-496, 5 jun. 2010.

LUGLI, Alexandre Baratella et al. **Sistema aplicado de controle de posição utilizando algoritmo PID**. 2015. 7f. SAISEE - II Seminário de Automação Industrial e Sistemas Eletro-Eletrônicos, Santa Rita do Sapucaí – MG, 04 mar. 2015.

MATHWORKS, Simulink Team. **Simulink Support Package for Arduino Hardware**. Disponível em: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/40312-simulink-support-package-for-arduino-hardware>. Acesso em: 29 abr. 2019.

NISE, Norman S. **Engenharia de sistemas de controle**. 6. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2012.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2010.

OTTOBONI, Augusto. **Servo-acionamentos**. Mecatrônica Atual, n.6, out. 2002. Disponível em: [http://w3.ufsm.br/fuentes/index\\_arquivos/servo.pdf](http://w3.ufsm.br/fuentes/index_arquivos/servo.pdf). Acesso em: 12 set. 2018.

PEREIRA, J. P. P. et al. **Kit educacional para controle e supervisão aplicado a nível**. Holos, 2009.

ROSA, Ricardo M. S. **Modelagem newtoniana, lagrangeana e hamiltoniana de sistemas mecânicos discretos**. Departamento de Matemática Aplicada, UFRJ, 2008.

SARAIVA, Felipe de Andrade. **Métodos de sintonia de controladores PID**. 2011. 45 f. p. Trabalho de conclusão de curso - Centro Universitário LA SALLE, Canoas, RS.

SILVA, Natã Goulart da. **Apostila MATLAB**. Universidade Federal de São João Del Rei, UFSJ, 2002.

SOUZA, A. R et al. **A placa arduino: uma opção de baixo custo para experiências de física assistidas pelo PC**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, n.1, p1702, 2011.

WANG, Wei. **Control of Ball and Beam System**. School of Mechanical Engineering, The University of Adelaide, Austrália, 2007.