

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

JANICELY FATIMA STRESSER

**ESTUDO DO CONTROLE DE VIBRAÇÃO DE UMA VIGA ENGASTADA POR
MEIO DE ABSORVEDORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÃO**

PATO BRANCO

2021

JANICELY FATIMA STRESSER

**ESTUDO DO CONTROLE DE VIBRAÇÃO DE UMA VIGA ENGASTADA POR
MEIO DE ABSORVEDORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÃO**

**Study of the vibration control of a cantilever beam by means of dynamic
vibration absorbers**

Dissertação apresentada como requisito para
obtenção do título de Mestra em Engenharia
Civil da Universidade Tecnológica Federal do
Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rogério Novak

Coorientador: Prof. Dr. Giovanni Bratti

PATO BRANCO

2021



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Pato Branco**



JANICELY FATIMA STRESSER

**ESTUDO DO CONTROLE DE VIBRAÇÃO DE UMA VIGA ENGASTADA POR MEIO DE ABSORVEDORES
DINÂMICOS DE VIBRAÇÃO**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Área de concentração: Materiais E Engenharia De Estruturas.

Data de aprovação: 31 de Agosto de 2021

Prof Paulo Rogerio Novak, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Diego Rizzotto Rossetto, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Giovanni Bratti, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Olavo M Silva, Doutorado - Feesc/Lva/Ufsc - Fundação Stemmer - Laboratório de Vibrações e Acústica - Ufsc

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 01/09/2021.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter me dado forças para continuar sempre, por ouvir minhas orações e por permitir alcançar meus objetivos.

Agradeço a minha família, meus pais João e Celia, minha irmã Fernanda, pelas palavras de apoio, orações, por acreditarem em meu potencial e por todo o suporte necessário no decorrer do mestrado.

Ao meu querido Egon por estar sempre a meu lado, me fazendo acreditar que posso mais que imagino. Devido a seu companheirismo, amizade, paciência, compreensão, apoio, alegria e amor, este trabalho pôde ser concretizado.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Paulo Rogerio Novak e Prof. Dr. Giovanni Bratti por todas as orientações, paciência e suporte em todos os momentos.

Aos professores do PPGEC pelo conhecimento compartilhado. Aos meus colegas e amigos, pelos momentos divididos juntos, por dividir comigo as angústias e alegrias.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente me incentivaram a ingressar nessa caminhada.

“Em tudo dai graças, porque esta é a vontade
de Deus...”

(1 Tessalonicenses 5:18)

RESUMO

Elementos estruturais do tipo viga habitualmente são utilizadas na construção civil, bem como em outras áreas da engenharia. Durante sua vida útil, estas estruturas, estão sujeitas a diferentes formas de carregamentos tanto estáticos quanto dinâmicos, que, em condições específicas podem assumir um estado de vibração que pode comprometer todo o sistema estrutural. O objetivo deste trabalho foi estudar os parâmetros ótimos de um Absorvedor Dinâmico de Vibração (ADV) para o controle de vibração de uma estrutura do tipo viga engastada. Para isso, uma análise dinâmica da estrutura primária, utilizando o Método de Elementos Finitos (MEF), foi realizada para identificar os modos de vibração e identificar a função resposta em frequência. A partir das características dinâmicas da estrutura primária, foram determinados os parâmetros ideais do ADV: rigidez, razão de massas e o amortecimento ótimo, para o controle da primeira frequência natural da viga. Os ADVs foram modelados como uma viga engastada com uma massa concentrada na ponta. Estes foram dimensionados de duas maneiras diferentes, a primeira considerando uma razão de frequências igual a um e amortecimento inserido após determinar os parâmetros de massa e rigidez, e a segunda para uma razão de frequências diferente de um e o amortecimento ótimo adicionado antes de determinar os parâmetros de massa e rigidez. Após o dimensionamento, os ADVs foram acoplados na estrutura primária e as análises dinâmicas foram realizadas novamente para cada ADV dimensionado, onde foi observado a redução na amplitude de vibração. Para o primeiro caso observou-se que os ADVs reduziram consideravelmente as amplitudes, no entanto operou como um sistema não sintonizado otimamente. No segundo caso os ADVs apresentaram bom desempenho na redução das amplitudes, no entanto, as respostas não foram satisfatórias para um dispositivo com parâmetros ótimos de dimensionamento. A este fato deve-se a diferença entre as frequências naturais calculadas teoricamente e numericamente. Para avaliar a diferença das respostas do segundo caso, o terceiro caso foi realizado através de uma análise teórica considerando o sistema em vibração livre, na qual os resultados mostraram-se apropriados para um dispositivo otimamente sintonizado. Para todos os ADVs dimensionados e acoplados à estrutura primária os resultados mostraram-se satisfatórios, de modo a mostrar a sua eficiência em relação ao controle do primeiro modo de vibração da viga estudada neste trabalho.

Palavras-chave: absorvedor dinâmico de vibração; análise dinâmica; controle de vibração.

ABSTRACT

Beam-type structural elements are commonly used in civil construction, as well as in other areas of engineering. During their useful life, these structures are subject to different forms of loading, both static and dynamic, which, under specific conditions, can assume a state of vibration that can compromise the entire structural system. The objective of this work was to study the optimal parameters of a Dynamic Vibration Absorber (DVA) for the vibration control of a cantilever beam type structure. For this, a dynamic analysis of the primary structure, using the Finite Element Method (FEM), was performed to identify the vibration modes and identify the frequency response function. From the dynamic characteristics of the primary structure, the ideal parameters of the DVA were determined: stiffness, mass ratio and optimal damping, for the control of the beam's first natural frequency. The DVAs were modeled as a cantilever beam with a concentrated mass at the tip. These were sized in two different ways, the first considering a frequency ratio equal to one and damping entered after determining the mass and stiffness parameters, and the second for a frequency ratio other than one and the optimum damping added before determining the mass and stiffness parameters. After dimensioning, the DVAs were coupled to the primary structure and the dynamic analyzes were performed again for each dimensioned DVA, where a reduction in vibration amplitude was observed. For the first case it was observed that the DVAs considerably reduced the amplitudes, however it operated as a system not optimally tuned. In the second case, the DVAs showed good performance in reducing amplitudes, however, the responses were not satisfactory for a device with optimal sizing parameters. This fact is due to the difference between the theoretically and numerically calculated natural frequencies. To assess the difference in the responses of the second case, the third case was performed through a theoretical analysis considering the system in free vibration, in which the results proved to be appropriate for an optimally tuned device. For all sized DVAs coupled to the primary structure, the results were satisfactory, in order to show their efficiency in relation to the control of the first vibration mode of the beam studied in this work.

Keywords: dynamic vibration absorber; dynamic analysis; vibration control.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Características e origem das cargas dinâmicas típicas.....	25
Figura 2: Análise modal teórica	27
Figura 3: Análise modal experimental	27
Figura 4: Função de aproximação por partes.....	30
Figura 5: Representação de um domínio bidimensional por uma coleção de triângulos e quadriláteros	31
Figura 6: Elemento SOLID186	32
Figura 7: Elementos do par de contato superfície-superfície e nó-superfície.....	34
Figura 8: Tipos de malhas	35
Figura 9: Viga em flexão	36
Figura 10: Modelo teórico do comportamento de uma estrutura com 1 GDL e sem amortecimento.....	42
Figura 11: Amplitude de deslocamento da massa m_1	42
Figura 12: Modelo teórico de uma estrutura com 1 GDL e sem amortecimento, na qual foi instalado um ADV	43
Figura 13: Amplitude dos deslocamentos da massa m_1 antes e depois da instalação do ADV.....	48
Figura 14: Frequências controladas por um ADV com $\mu = 0,10$ e por um ADV com $\mu = 0,25$	48
Figura 15: Variação de frequências controladas pelo ADV devido à variação do valor de μ	49
Figura 16: Modelo teórico do comportamento de uma estrutura com 1 GDL e sem amortecimento, na qual foi instalado um ADV.....	50
Figura 17: Amplitude do movimento da massa m_1 para $q = 0,95$ e $\mu = 0,15$, considerando diferentes valores de ζ_2	51
Figura 18: Amplitude do movimento da massa m_1 para $q = 0,85$ e $\mu = 0,15$, considerando diferentes valores de ζ_2	52
Figura 19: Amplitude do movimento da massa m_1 para $\mu = 0,15$ e $\zeta_2 = 0,192$, considerando diferentes valores de q	53
Figura 20: Fluxograma da metodologia.....	55
Figura 21: Modelo da estrutura primária	56
Figura 22: Parâmetro de qualidade de malha: razão de aspecto	58

Figura 23: Carregamento harmônico aplicado na extremidade da estrutura.....	59
Figura 24: FRF da viga sem o ADV.....	60
Figura 25: Análise transiente da viga sem ADV.....	61
Figura 26: Esquema do dimensionamento - Caso 1.....	61
Figura 27: Modelo do ADV.....	63
Figura 28: Comando <i>Point Mass</i>	66
Figura 29: Modelo do ADV com massa concentrada na ponta.....	67
Figura 30: Esquema do dimensionamento do ADV - Caso 2.....	67
Figura 31: Amortecimento inserido no programa computacional ANSYS®.....	68
Figura 32: Esquema de dimensionamento do ADV - Caso 3.....	70
Figura 33: Modelo teórico da estrutura sem amortecimento com ADV amortecido...	70
Figura 34: ADV acoplado na estrutura primária.....	74
Figura 35: Carregamento unitário na extremidade livre da estrutura primária.....	75
Figura 36: Erro associado as frequências naturais da viga.....	77
Figura 37: Erro da primeira frequência natural.....	77
Figura 38: Geometria da malha da viga.....	78
Figura 39: Erro associado as frequências naturais do ADV.....	79
Figura 40: Erro da primeira frequência natural do ADV.....	80
Figura 41: Geometria da malha do ADV.....	81
Figura 42: Malha do ADV.....	81
Figura 43: Vibração da viga com ADV acoplado: (a) Primeiro modo; (b) Segundo modo.....	83
Figura 44:FRF da viga com e sem ADV acoplado.....	84
Figura 45: FRF da viga com os ADVs acoplados – Caso 1.....	84
Figura 46: FRF dos ADVs acoplados na estrutura primária - Caso 1.....	85
Figura 47: Análise transiente - ADV 2 e ADV 5.....	86
Figura 48: FRF da viga com e sem o ADV acoplado - Caso 2.....	89
Figura 49: FRF da viga com ADVs amortecidos - Caso 2.....	89
Figura 50: FRF da viga com os ADVs acoplados - Caso 2.....	90
Figura 51: Análise transiente ADV 2 e ADV 5 - Caso 2.....	91
Figura 52: FRF da viga com os ADVs acoplados para o Caso 3.....	93
Figura 53: Análise transiente ADV 2 e ADV 5 – Caso 3.....	94

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Propriedades da estrutura primária	56
Tabela 2: Modos de vibração e frequências naturais da viga.....	58
Tabela 3: Propriedades do ADV	62
Tabela 4: Valores para análise teórica – Caso 3.....	71
Tabela 5: Análise de convergência de malha da estrutura primária.....	76
Tabela 6: Análise de convergência do ADV	79
Tabela 7: Análise da razão de aspecto	80
Tabela 8: Parâmetros de dimensionamento dos ADVs.....	81
Tabela 9: Frequência natural dos ADVs.....	82
Tabela 10: Resultados das frequências dos ADVs do Caso 1	83
Tabela 11: Amplitude de deslocamento da estrutura do Caso 1	86
Tabela 12: Parâmetros de dimensionamento dos ADVs	87
Tabela 13: Frequência dos ADVs do Caso 2	88
Tabela 14: Resultado das frequências do Caso 2.....	88
Tabela 15: Amplitude de deslocamento máximo do Caso 2	91
Tabela 16: Valores de massa, comprimento e frequências dos ADVs do Caso 2.....	92
Tabela 17: Amplitude de deslocamento máximo do Caso 3	94

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANSYS	<i>Analysis Systems Incorporated</i>
ADV	Absorvedor Dinâmico de Vibração
ADVA	Absorvedor Dinâmico de Vibração Ativo
ADVAd	Absorvedor Dinâmico de Vibração Adaptativo
ADVP	Absorvedor Dinâmico de Vibração Passivo
ADVPMM	Absorvedor Dinâmico de Vibração Passivo Multimodal
AME	Análise Modal Experimental
FRF	Função de Resposta em Frequência
FRI	Função de Resposta ao Impulso
GDL	Grau de Liberdade
MEF	Método de Elementos Finitos

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal da viga
c	Constante de amortecimento
C_c	Constante de amortecimento crítico
E	Módulo de elasticidade
f	Força externa por unidade de comprimento
f_n	Frequência natural (Hz)
f_h	Frequência do modo de vibração de maior interesse
F_0	Força inicial
I	Momento de inércia de área
k	Rigidez
K_{eq}	Rigidez equivalente
L	Comprimento
M	Momento fletor
m	Massa
M_{eq}	Massa equivalente
M_h	Massa da haste
q	Razão de frequências naturais
r	Razão de frequência forçada
t	Tempo
V	Força de Cisalhamento
w	Deslocamento vertical da viga de Euler-Bernoulli
ω_n	Frequência natural (rad/s)
w	Deflexão da viga
W	Deflexão máxima da viga

ρ	Densidade (kg/m ³)
ν	Coefficiente de Poisson
ζ	Fator de amortecimento
μ	Razão de massas
δ_{st}	Delta Estático
λ	Comprimento de onda
$[M]$	Matriz de massa
$[C]$	Matriz de amortecimento
$[K]$	Matriz de rigidez
x	Deslocamento do corpo
\dot{x}	Velocidade do corpo
X	Amplitude de deslocamento
\ddot{x}	Aceleração do corpo
E_n	Erro associado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Delimitação do tema.....	17
1.2	Objetivos	18
1.2.1	Objetivo Geral.....	18
1.2.2	Objetivos Específicos	18
1.3	Organização do trabalho	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
2.1	Controle de vibrações.....	20
2.2	Absorvedor dinâmico de vibração.....	21
2.2.1	Absorvedor dinâmico de vibração passivo	22
2.2.2	Absorvedor dinâmico de vibração ativo	22
2.2.3	Absorvedor dinâmico de vibração adaptativo	23
2.2.4	Absorvedor dinâmico de vibração multimodal	23
2.3	Análise dinâmica	24
2.3.1	Análise Modal	26
2.3.2	Análise Harmônica	28
2.3.3	Análise Transiente.....	29
2.4	Estudo da posição de acoplamento do ADV.....	29
2.5	Modelagem em elementos finitos	30
2.6	Tipos de elementos utilizados.....	32
2.6.1	Elemento SOLID186.....	32
2.6.2	Elementos CONTA174, CONTA175 E TARGE17	33
2.7	Malha	34
2.8	Precisão da malha	35
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	36
3.1	Viga de Euler-Bernoulli	36
3.2	Dimensionamento de absorvedores dinâmicos de vibração	41
3.2.1	Absorvedor dinâmico não amortecido	41
3.2.2	Absorvedor dinâmico amortecido	49
4	METODOLOGIA.....	55
4.1	Estrutura primária	56
4.1.1	Modelagem da estrutura primária.....	56

4.1.2	Análise dinâmica	59
4.2	Dimensionamento do ADV – Caso 1	61
4.3	Dimensionamento do ADV – Caso 2	67
4.4	Dimensionamento do ADV – Caso 3	69
4.4.1	Método de Runge-Kutta	71
4.5	Acoplamento do ADV na estrutura primária	73
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	76
5.1	Estrutura primária	76
5.2	Absorvedor dinâmico de vibração	78
5.3	Dimensionamento do ADV – Caso 1	81
5.3.1	Estrutura primária com ADV acoplado	82
5.4	Dimensionamento do ADV – Caso 2	87
5.4.1	Estrutura primária com ADV acoplado	88
5.5	Dimensionamento do ADV – Caso 3	92
5.5.1	Estrutura primária com ADV acoplado	93
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	96
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	97
	REFERÊNCIAS	98
	APÊNDICE A – Rotina para o dimensionamento dos ADVs	102

1 INTRODUÇÃO

Estruturas da construção civil, máquinas e equipamentos industriais estão frequentemente sujeitos a vibrações. Sendo assim, as vibrações indesejáveis podem comprometer seu correto funcionamento e sua integridade, causar desconforto a operadores e usuários. Diante disso, surge a necessidade de controlar os níveis de vibração, de maneira a assegurar condições de operação, segurança e conforto (DÍAZ, 2014).

Em vista disso, existem várias estratégias de controle de vibrações de sistemas mecânicos que utilizam técnicas baseadas na introdução de amortecimento, modificação e otimização do projeto estrutural e o uso de dispositivos de controle (MARQUES, 2000). Entretanto, o uso de Absorvedores Dinâmicos de Vibração (ADV), cuja invenção se deve a Herman Frahm (1911), tem se revelado uma eficiente estratégia.

Desde sua invenção por Frahm (1911), no início do século XX, o ADV tem sido utilizado para a atenuar a vibração de diversos tipos de estruturas e máquinas em diferentes ramos da atividade industrial. Frahm (1911) estudou e utilizou um ADV de um grau de liberdade para o controle de vibrações em projetos de eixos de hélices de navios (RAO, 2008). Durante anos, diversos tipos de absorvedores dinâmicos, assim como vários modelos matemáticos foram desenvolvidos para prever seu comportamento (BAVASTRI, 1997).

Em sua forma mais simples, o ADV é um dispositivo de parâmetros concentrados de massa, rigidez e amortecimento que ao ser inserido numa estrutura primária, cujas vibrações deseja-se atenuar, é capaz absorver energia vibratória, reduzindo as amplitudes do movimento no ponto de conexão (HUA, WONG, CHENG, 2018).

De acordo com Marques (2000) e Díaz (2014), existem quatro tipos de absorvedores dinâmicos de vibração: passivo, ativo, adaptativo e multimodal. O projeto de um ADV passivo conduz à escolha dos valores de inércia, amortecimento e rigidez e tem como base a sintonização de sua frequência natural à frequência de excitação harmônica. Embora os ADVs passivos apresentem as vantagens de serem independentes de fontes de energia externa e não causar instabilidade, é reconhecido

que estes dispositivos apresentam aplicabilidade limitada na medida que sua eficiência é reduzida quando a frequência é alterada (DEL CLARO, 2016).

Nessa direção, essa limitação vem sendo explorada. Den Hartog (1956) propôs um modelo de ADV com um grau de liberdade, aplicado a um sistema primário também com um grau de liberdade, considerando o sistema primário sem amortecimento e o ADV amortecido, com o propósito de determinar os parâmetros ótimos de ADVs passivos (massa, rigidez e amortecimento) para reduzir a vibração do sistema primário e ampliar a faixa de frequência operacional do ADV. Por isso, as metodologias de projeto ótimo de ADVs de parâmetros concentrados e contínuos são baseados em procedimentos numéricos propostas por Rade e Steffen Jr (1999), Cunha Jr (1999) e Rossato (2017).

1.1 Delimitação do tema

A presente pesquisa busca contribuir para o estudo dos parâmetros ótimos (massa, rigidez e amortecimento) para uma configuração de ADV passivo quando utilizado para o controle de vibração de uma estrutura do tipo viga engastada.

As estruturas do tipo viga, quando sujeitos a certos níveis de vibrações indesejáveis, são propensas a apresentar uma resposta ao carregamento aplicado, o que pode acarretar deslocamentos excessivos na estrutura. Por sua vez, podem ter seu correto funcionamento interrompido, sua integridade física comprometida, causar desconforto e comprometer a segurança dos usuários.

Frente a isso, foi realizado um estudo teórico e numérico através do Método de Elementos Finitos (MEF) com o programa computacional ANSYS®. Nele foi analisada uma viga engastada com e sem o acoplamento de um ADV para o controle do primeiro modo de vibração desta viga, chamada de estrutura primária. O ADV foi modelado como uma viga engastada com massa concentrada na ponta. Os parâmetros do ADV como comprimento da haste, massa concentrada na ponta, rigidez, razão de massas e amortecimento ótimo foram determinados de acordo com o equacionamento de Den Hartog (1972) para um ADV amortecido sintonizado otimamente.

Nesse contexto, a análise dinâmica da estrutura primária foi determinada através da análise modal, harmônica e transiente. Na análise modal foram

determinados os modos de vibração e as frequências naturais. Já nas análises harmônica e transiente foram determinadas as amplitudes de deslocamento da estrutura no domínio da resposta no tempo e na frequência.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é estudar os parâmetros ideais de um Absorvedor Dinâmico de Vibração (ADV) para o controle de vibração de uma estrutura do tipo viga engastada.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Realizar a análise dinâmica da estrutura primária e do absorvedor dinâmico de vibração utilizando o programa computacional ANSYS®;
- Determinar os parâmetros ótimos para um absorvedor dinâmico de vibrações;
- Realizar a análise dinâmica da estrutura primária com o ADV acoplado;
- Comparar os resultados obtidos antes e após o acoplamento do ADV;
- Analisar a influência da razão de massas e amortecimento ótimo no controle de vibrações da estrutura.

1.3 Organização do trabalho

Esta pesquisa possui seis capítulos, incluindo a introdução, delimitação do tema e objetivos. No Capítulo 2, apresenta-se uma revisão sobre o controle de vibrações enfatizando o Absorvedor Dinâmico de Vibração como um importante meio para redução e controle de vibrações. Além disso, são apresentados também os aspectos relacionados à posição de acoplamento de ADVs, assim como a modelagem em elementos finitos e algumas condições necessárias para a precisão dos resultados e considerações sobre a análise modal e análise dinâmica.

O capítulo 3 é dedicado a uma revisão teórica sobre os sistemas contínuos aplicados à vibração lateral de vigas representado pela teoria de Euler-Bernoulli, além de apresentar uma revisão da teoria clássica de ADVs e do método de otimização de Den Hartog (1972). Ainda é mostrada a formulação básica relativa aos ADVs com e sem amortecimento e os parâmetros para um ADV otimamente sintonizado.

A metodologia e o equacionamento utilizados no desenvolvimento deste trabalho são apresentados no capítulo 4. Dessa forma, o trabalho foi dividido em três partes: a primeira, Caso 1, consiste no estudo de uma viga engastada livre, na qual um ADV é dimensionado para uma razão de frequências igual a 1 e sem amortecimento ótimo. No Caso 2, consiste no dimensionamento do ADV para uma razão de frequências diferente de 1 e com amortecimento ótimo. E, no Caso 3, a partir dos resultados do Caso 2, as configurações do ADV otimamente sintonizado são aplicadas para um sistema em vibração livre.

No capítulo 5, são apresentados os resultados das simulações referentes aos casos 1,2 e 3, comparadas e discutidas.

Por fim, o capítulo 6 apresenta as considerações finais da pesquisa e propostas para estudos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será apresentado a importância do controle de vibrações dando ênfase ao o Absorvedor Dinâmico de Vibração (ADV), bem como as suas categorias passivo, ativo, adaptativo e passivo multimodal. Além disso, apresentar-se-á os aspectos relacionados a análise dinâmica, os conceitos relacionados ao acoplamento do ADV na estrutura primária, a utilização do método de elementos finitos para a modelagem e aquisição de resultados e por fim, os tipos de elementos utilizados e as condições necessárias para a geração e precisão da malha.

2.1 Controle de vibrações

Estudos sobre vibrações vêm se desenvolvendo desde os primeiros instrumentos musicais como apitos e tambores, quando foram descobertos em aproximadamente 4000 a.C. Em 132 d.C, o historiador e astrônomo chinês Zhang Heng desenvolveu um instrumento para medir abalos sísmicos com precisão, o primeiro sismógrafo, com o objetivo de alertar a população da chegada de um terremoto (RAO, 2008).

Em estruturas, os estudos se intensificaram a partir de 1940, após o colapso da ponte Tacoma Narrows, nos Estados Unidos. A incidência de ventos fortes em contato com ponte excitou a estrutura com uma frequência próxima a uma de suas frequências naturais, resultando no fenômeno conhecido como ressonância, desencadeando oscilações de grande amplitude em ambos os lados da pista que levou a estrutura ao colapso (BILLAH; SCANLAN, 1991).

Ao se tratar de vibrações, um dos primeiros assuntos é o fenômeno da ressonância, que ocorre quando a frequência de excitação externa coincide com uma das frequências naturais do sistema (RAO, 2008). Esse fato resulta em grandes oscilações da estrutura, elevadas amplitudes de deslocamento durante o período de excitação, proporcionando desconforto e insegurança aos ocupantes e reduzindo a vida útil da estrutura.

De acordo com Rao (2008), uma hipótese para o controle de vibrações é alterar as frequências na fonte de vibração, buscando evitar a sintonização dela com a frequência natural da estrutura analisada. No entanto, esse método nem sempre é

viável, pois algumas vibrações não podem ser modificadas, como por exemplo, a ação causada por um terremoto e as turbulências atmosféricas.

Uma das soluções para atenuar os impactos gerados pelas ações dinâmicas nas estruturas é a utilização de sistemas de controle de vibrações. Rao (2008) ainda ressaltava que existem métodos que podem ser utilizados para o controle de vibrações tais como: o controle de frequências naturais, a introdução de amortecimento, isolamento da vibração e a implantação de absorvedores dinâmicos de vibração.

O controle de frequências naturais é utilizado quando se busca evitar a sintonização da frequência de excitação com a frequência natural da estrutura analisada, ou seja, em situação de ressonância. A frequência natural pode ser alterada ao variar os parâmetros de massa e de rigidez. Já em relação ao amortecimento, é empregado quando o sistema necessita trabalhar em uma determinada faixa de frequência e não seja possível evitar a ressonância sob condições de operação.

No que tange ao isolamento de vibração, este consiste na inserção de um membro resiliente entre a massa vibratória e a fonte de vibração, de maneira a obter a redução da resposta dinâmica do sistema sob condições de vibração. Logo, o absorvedor dinâmico de vibração é aplicado para que as frequências naturais do sistema resultante não se aproximem da frequência de excitação, de modo a alterar a frequência natural do sistema para uma faixa de frequência de excitação diferente (RAO, 2008).

2.2 Absorvedor dinâmico de vibração

O absorvedor dinâmico de vibração é um dispositivo de parâmetros concentrados de massa, rigidez e amortecimento. Uma vez acoplado a uma dada estrutura, cujas vibrações se deseja atenuar, ele é capaz de absorver a energia vibratória no ponto de conexão (CUNHA JR, 1999).

Composto por massa, rigidez e amortecimento, o ADV é estruturado de acordo com os parâmetros de frequência natural da estrutura que se deseja controlar a vibração. A sintonização entre as frequências da estrutura e do ADV modifica a resposta do sistema, já que a energia de vibração, antes dissipada apenas pela estrutura, passa a ser amenizada pelo absorvedor (ROSA; HOLANDA, 2016).

Usualmente, um ADV deve ser sintonizado com o equipamento no qual será instalado e este deve funcionar de maneira adequada. Isto é feito por meio da modelagem do sistema completo, estrutura principal mais o ADV e pela determinação das frequências de excitação externa e vibração da estrutura (MEIROVITCH, 2001).

A utilização de ADVs para o controle de vibrações é bastante conhecida, por isso existem muitos projetos e abordagens diferentes para solucionar problemas de vibrações (DEL CLARO, 2016). Sendo assim, os ADVs podem ser distribuídos em categorias: passivo simples, ativo, adaptativos e passivo multimodal (DÍAZ, 2014). Cada um promove uma alteração nas propriedades de rigidez e amortecimento da estrutura, seja pela ação de forças externas ou pela adição de dispositivos externos.

2.2.1 Absorvedor dinâmico de vibração passivo

O absorvedor dinâmico de vibração passivo (ADVP) se resume à instalação de um ou mais dispositivos externos na estrutura que absorve ou consome parte da energia transmitida pelo carregamento dinâmico, isso reduz a dissipação dessa energia nos membros da estrutura principal (ÁVILA, 2002) e evita possíveis danos.

Caracterizado por ser independente de fontes de energia externa, simplicidade, instalação, manutenção, baixo custo e estabilidade (DÍAZ, 2014), a utilização do ADVP é restrita, já que são projetados de forma a funcionar eficientemente dentro de uma determinada faixa de frequência.

Segundo Ávila (2002), a magnitude das forças de controle dos ADVPs depende de sintonização e atua na sua frequência natural à frequência de excitação harmônica, cujo valor é admitido como fixo e, geralmente, é o primeiro modo de vibração da estrutura. Caso a frequência de excitação se altere para uma faixa diferente, o dispositivo perderá sua eficiência, sendo considerada como uma das principais desvantagens da utilização do dispositivo.

2.2.2 Absorvedor dinâmico de vibração ativo

O absorvedor dinâmico de vibração ativo (ADVA) consiste na aplicação de forças na estrutura, através de atuadores que recebem energia externa e a introduz

diretamente no sistema, geralmente na forma de esforço que se opõe à vibração da estrutura-base (ÁVILA, 2002; DEL CLARO, 2016). A sintonização dessa energia pode ser modificada de acordo com a solicitação inicial, tornando possível ampliar sua faixa de frequências de operação sem alterar sua massa, rigidez ou amortecimento (COREIA, 2018).

Diferentemente dos ADVPs, os ADVAs podem se autoajustar para atenuar os níveis de vibrações em diferentes valores da frequência de excitação (DÍAZ, 2014). Neste dispositivo, uma força de controle é aplicada na massa do absorvedor por intermédio de um atuador, que recebe a informação da excitação pelos sensores acoplados na estrutura e avalia em tempo real a magnitude da força de reação necessária para ser aplicada, melhorando assim o desempenho do absorvedor (GÓMEZ, 2007).

2.2.3 Absorvedor dinâmico de vibração adaptativo

Os absorvedores dinâmicos de vibração adaptativos (ADVAd) são dispositivos, cujos parâmetros físicos (massa, rigidez e amortecimento) podem ser contínuos e automaticamente variados, de modo que eles estejam sempre sintonizados, independente de variações na frequência de excitação (DÍAZ, 2014).

Conforme Ospina (2008), por ser uma combinação das características dos absorvedores de vibração passivo e ativo, o ADVAd necessita da aplicação de forças menores nos atuadores, o que gera uma redução no custo e um desempenho mais eficiente em relação ao sistema passivo, aumentando a faixa de frequência em que ele funciona. Em caso de falta de energia, seu componente passivo proporciona proteção a estrutura. Portanto, ele supre as principais desvantagens dos controles passivo e ativo isoladamente.

2.2.4 Absorvedor dinâmico de vibração multimodal

De acordo com Rao (2008), o ADVP é projetado de tal modo que as frequências naturais do sistema sejam diferentes da frequência de excitação externa. Contudo, ele perde a eficiência caso a excitação e os parâmetros mudem. O sistema

ativo para a atenuação de vibrações requer um sistema de aquisição de sinais e um atuador capaz de fornecer a resposta em um curto período de tempo, logo, para os adaptativos tem-se a dificuldade de se obter a variação dos parâmetros de forma rápida e controlada.

Deste modo, para resolver estas questões, tem-se utilizado os absorvedores dinâmicos passivo multimodal (ADVPMM) que, sendo passivos, não necessitam de sistemas de aquisição de dados, nem de variação controlada de seus parâmetros construtivos. É um dispositivo que pode atuar simultaneamente em diferentes faixas de frequências, fazendo com que o sistema que tenha excitação externa variável possa ter seus níveis de vibrações reduzidos, independentemente da faixa de frequência de excitação (DÍAZ, 2014).

Sendo assim, é uma técnica que consiste em sintonizar os modos de vibrar do ADVPMM com os modos da estrutura primária. Ela proporciona a atenuação dos níveis de vibrações sem a necessidade do uso de múltiplos absorvedores dinâmicos de vibração passivo no controle de vibrações em diferentes faixas de frequências simultâneas (HARRIS, 2003).

2.3 Análise dinâmica

A análise dinâmica pode ser definida como o estudo do deslocamento de um corpo em função do tempo (SILVA, 2018). É uma ferramenta de caracterização do comportamento de uma estrutura quando submetida a esforços dinâmicos, quanto no prognóstico de possíveis danos causados por carregamentos, como em estruturas mais vulneráveis aos efeitos de vibração.

Lima e Santos (2008) descrevem que a dinâmica das estruturas tem por objetivo a determinação de deslocamentos, velocidades e acelerações de todos os elementos constituintes de uma estrutura submetida a cargas dinâmicas. Assim, uma estrutura ao vibrar, ou apresentar movimento vibratório, desloca-se ou se movimenta em torno de sua deformada estática. Se o seu comportamento é linear, a análise pode ser feita separadamente para as componentes estáticas e a dinâmica da carga e seus efeitos somados.

As estruturas são solicitadas por diferentes tipos de ações, estas podem ser caracterizadas como estáticas ou dinâmicas. As ações estáticas são aquelas cuja

resposta estrutural permanece constante ao longo do tempo, como o peso próprio e cargas permanentes. Ao passo que as ações dinâmicas se caracterizam por respostas que variam ao longo do tempo. Estas ações podem apresentar curta duração como sismos, impactos ou explosões, ou longa duração como vento, tráfego rodoviário, equipamentos mecânicos. Todas as ações tem caráter dinâmico, uma vez que variam de grandeza, direção ou sentido com o tempo (SILVA,2018).

De acordo com Clough e Penzien (1995), as ações dinâmicas podem ser classificadas como: harmônicas, periódicas, impulsivas e transientes, Figura 1. A carga é dita harmônica quando a sua variação no tempo pode ser representada por uma função senoidal. Este tipo de carga é característico de máquinas rotativas que apresentam massa desequilibrada como turbinas, geradores e bombas centrífugas. Já a carga periódica é aquela que apresenta repetições a um intervalo regular de tempo, chamado período. Exemplos para este tipo de carga podem ser observados em máquinas rotativas e pelo movimento humano rítmico sincronizado. A carga é denominada transiente quando apresenta variação arbitrária no tempo, sem periodicidade. Logo, vento, terremoto, ondas do mar e o tráfego de veículos sobre uma ponte são alguns exemplos deste tipo de carga. Por fim, a carga impulsiva trata-se de uma carga transiente, com a característica de ter uma duração muito curta.

Figura 1: Características e origem das cargas dinâmicas típicas. (a) harmônica, (b) periódica, (c) impulsiva, (d) transiente



Fonte: Clough e Penzien (1995)

Consoante a Silva (2018), a resposta estrutural aos carregamentos dinâmicos depende essencialmente de três parâmetros: massa, rigidez e amortecimento. A massa é determinada pela massa da estrutura e a parcela estática do carregamento (massa da estrutura e do motor que está sobre ela, por exemplo). Na sequência, a rigidez dependerá da geometria e dos materiais que compõem a estrutura (inércia e módulo de elasticidade). E o amortecedor pode representar um mecanismo interno ou externo à estrutura, capaz de dissipar energia.

Nos itens a seguir, é apresentado o conceito de análise modal, harmônica e transiente para a determinação dos parâmetros dinâmicos e resposta dinâmica de uma estrutura.

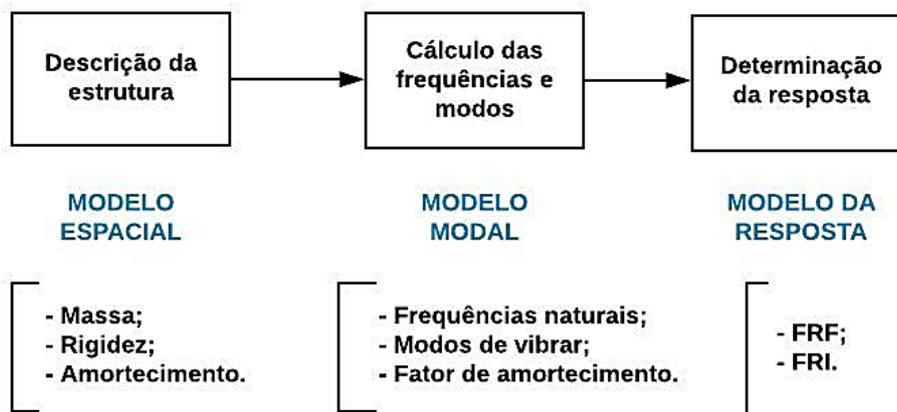
2.3.1 Análise Modal

A análise modal é um processo constituído de técnicas experimentais e teóricas que descreve a estrutura em termos de suas propriedades dinâmicas, que são as frequências naturais, modos de vibrar e amortecimento (FU; HE, 2001).

As frequências naturais indicam a taxa de oscilação livre da estrutura após interrompida a força que provocou o movimento, ou seja, o quanto a estrutura vibra quando não há forças atuando sobre ela. Já os modos de vibração são a forma como a estrutura vibra, relacionada a cada uma das suas frequências naturais. Logo, na estrutura, o amortecimento é a propriedade interna de dissipar energia (NÓBREGA; HANAI, 2005).

Conforme Ewins (2000), as vibrações de um sistema podem ser analisadas por duas formas diferentes: teórica e experimental. Cada forma é constituída de três fases. Inicialmente, o primeiro passo da análise teórica, Figura 2, trata da caracterização das propriedades físicas e geométricas da estrutura, em termos de suas matrizes de massa, rigidez e amortecimento, as quais definem um modelo espacial. Posteriormente, realiza-se a análise modal teórica do modelo espacial, determinando o chamado modelo modal composto pelas frequências naturais, seus modos de vibração e os fatores de amortecimento modal, que juntos constituem os parâmetros modais do sistema.

Figura 2: Análise modal teórica

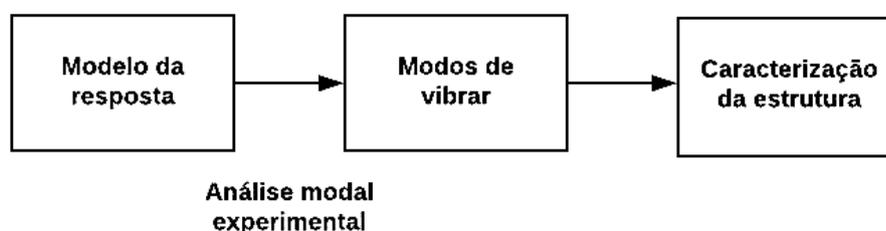


Fonte: Adaptado de Ewins (2000)

Em seguida, é realizada a análise da resposta da estrutura sob a influência de uma excitação. O modelo de resposta contém um conjunto de soluções em relação às quais as excitações possuem valores unitários, aplicados a determinados pontos da estrutura e para as frequências em uma faixa de interesse. O modelo de resposta consiste em um conjunto de funções de resposta em frequência (FRFs), ou de funções de resposta ao impulso (FRIs) e das respostas ao longo do tempo.

A análise modal experimental (AME), também denominada teste modal, é o caminho inverso da metodologia da análise teórica, Figura 3. Trata-se da medição da resposta da estrutura nas formas de FRFs e FRIs. Na sequência são determinadas as frequências naturais, modos de vibração e fatores de amortecimento. Por fim, é possível deduzir as propriedades de massa, rigidez e amortecimento a partir de técnicas de análises apropriadas (NOBREGA, 2004).

Figura 3: Análise modal experimental



Fonte: Adaptado de Ewins (2000)

De acordo com Rao (2008), a obtenção da FRF e suas variações é o principal objetivo de uma caracterização dinâmica experimental, pois é a base para a derivação dos parâmetros que caracterizam o modelo modal da estrutura. A técnica para

identificar os parâmetros modais da AME utiliza a medição com auxílio de acelerômetros, dos sinais de excitação e resposta da estrutura em estudo. Depois, os parâmetros da estrutura são feitos com uso de algoritmos, os quais permitem que se utilizem técnicas no domínio da frequência ou do tempo.

2.3.2 Análise Harmônica

A análise harmônica é realizada com o intuito de avaliar os modos de vibração que mais contribuem na resposta dinâmica da estrutura, porque a resposta dinâmica é dada em termos de espectro de frequências dos deslocamentos nodais. A análise da resposta harmônica é uma técnica usada para determinar a resposta de uma estrutura sob a ação de cargas que variam harmonicamente com o tempo, Eq. (2.1) (LOPES, 2012).

$$F(t) = F_0 \text{sen } \omega t. \quad (2.1)$$

Segundo Morgan (2015), no pacote computacional ANSYS®, a análise harmônica é a técnica utilizada para determinar a resposta do estado estacionário de uma estrutura a cargas senoidais (harmônicas) de uma determinada frequência. Madenci e Güven (2015) apresentam algumas condições para realizar uma análise harmônica utilizando o *software*, são elas:

- Todas as cargas devem ser funções senoidais de tempo;
- Todas as cargas devem possuir a mesma frequência;
- A estrutura deve exibir comportamento linear elástico.

Na análise harmônica, apenas o deslocamento da fase permanente é obtido, tendo em vista que a resposta não considera o deslocamento inicial aplicado. Sendo assim, os efeitos transitórios não são calculados.

2.3.3 Análise Transiente

A análise transiente é usada para determinar as respostas da estrutura sob a ação de cargas externas variáveis no tempo. Na fase transiente ocorrem os deslocamentos máximos referentes ao deslocamento inicial aplicado a estrutura. Por isto, esse tipo de análise é utilizado para determinar como ocorre a variação no domínio do tempo como os deslocamentos, velocidade, tensão, deformação, aceleração e energia absorvida, como uma resposta a qualquer combinação de cargas aplicadas (DEBELLA, 2019).

2.4 Estudo da posição de acoplamento do ADV

A eficiência do controle de vibrações por meio da utilização de absorvedores dinâmicos de vibrações está diretamente relacionada ao posicionamento deste no sistema principal.

Conforme Ozgüven e Çandir (1986), uma viga engastada/livre e sujeita a uma excitação tem maior efeito em sua extremidade livre, também é neste ponto onde o máximo de deslocamento ocorre. Portanto, quanto mais próximo do local se situem os ADVs, maior será a redução da resposta vibratória (LARA, 2007).

Uma vez que o ADV é acoplado na estrutura, dificilmente ele poderá atenuar todos os níveis vibratórios do sistema, por isso o estudo do posicionamento prévio do ADV é necessário. Da Silva (2005) mostrou que se um ADV é posicionado em um lugar inconveniente, por exemplo, sobre a linha nodal para um certo modo de interesse, este não será efetivo e seu controle sobre a vibração do sistema poderá ser extremamente reduzido para este modo.

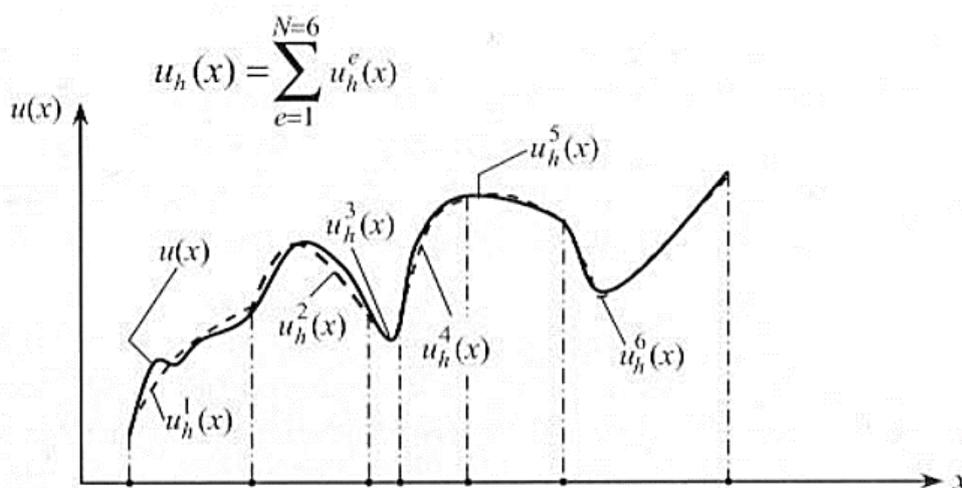
A localização ótima de Absorvedores Dinâmicos de Vibração tem sido estudada, pois se trata de uma metodologia de caráter geral que permite determinar a localização ótima de um sistema de absorvedores. Ela foi proposta por Petit *et al.* (2009), Latas (2015) e Silva e Bavastri (2019). O método apresenta-se adequado à localização ótima de ADVs, sobretudo quando a estrutura possuir uma densidade modal elevada dentro de uma faixa de frequência de interesse ampla.

2.5 Modelagem em elementos finitos

O método de elementos finitos (MEF) é uma ferramenta para a solução numérica de uma ampla gama de problemas de engenharia (CHANDRUPATLA *et al.*, 2002). É um procedimento para a análise de diferentes fenômenos físicos, que ocorrem em meios contínuos que são descritos por meio de equações diferenciais, com determinadas condições de contorno e, eventualmente, com condições iniciais (SOUZA, 2003).

Basicamente, o método de elementos finitos consiste em dividir o domínio de estudo em diversos subdomínios, ou seja, em elementos pequenos o bastante para que o erro associado a essa subdivisão seja o menor possível. Em cada elemento do domínio é aplicada uma função interpoladora, também conhecida como função base, ou função de forma, de modo a se ter uma solução em todo o elemento. A escolha dessa função de interpolação está intimamente relacionada ao erro do método e, portanto, deve ser escolhida adequadamente. A principal razão da procura de uma solução aproximada numa coleção de subdomínios é realizada devido ao fato de que é mais fácil representar uma função não trivial como uma coleção de polinomiais simples, Figura 4 (REDDY, 2006).

Figura 4: Função de aproximação por partes

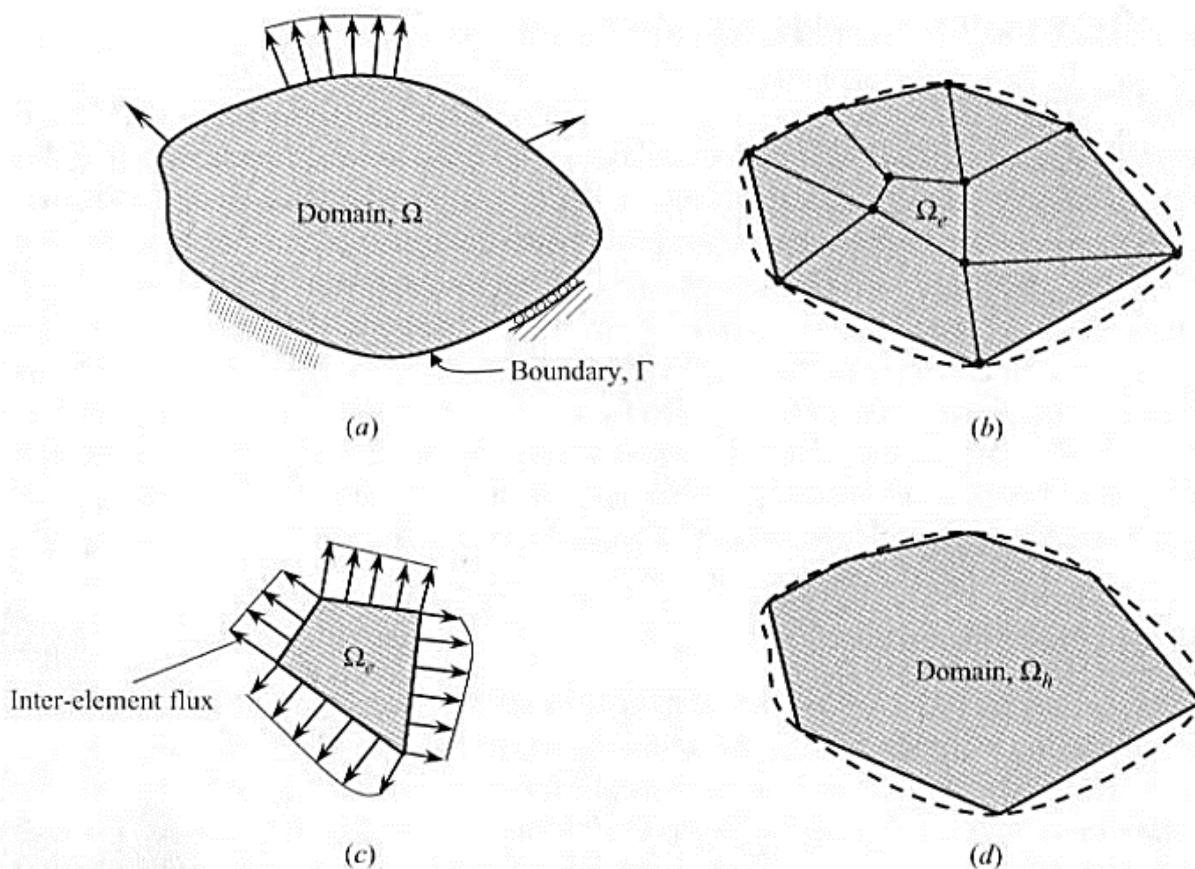


Fonte: Reddy (2006)

O método possui três características distintas que demonstram sua superioridade em relação a outros métodos. A primeira, um domínio geometricamente

complexo do problema, Figura 5(a), é representado como uma coleção de subdomínios geometricamente simples, chamados elementos finitos, Figura 5 (b). Cada elemento finito, Figura 5 (c), é visto como um domínio independente. A segunda característica é que cada uma delas versa sobre cada elemento finito, na qual equações algébricas entre as quantidades de interesse são desenvolvidas utilizando equações apropriadas do problema. Por fim, na terceira, as relações de todos os elementos são agrupadas mediante condições de continuidade ou descontinuidade entre elementos (REDDY, 2006).

Figura 5: Representação de um domínio bidimensional por uma coleção de triângulos e quadriláteros



Fonte: Reddy (2006)

Uma das formas utilizadas para a análise em elementos finitos é a utilização de *software*. O ANSYS® (*Analysis Systems Incorporated*) é um programa de simulação computacional que utiliza o MEF para o desenvolvimento de estudos e modelos numéricos em diversos campos científicos. Através da utilização desse sistema, é possível a modelagem de sistemas estruturais, problemas de escoamento,

transmissão de calor, bem como problemas dinâmicos modais e transientes (ABREU, 2016).

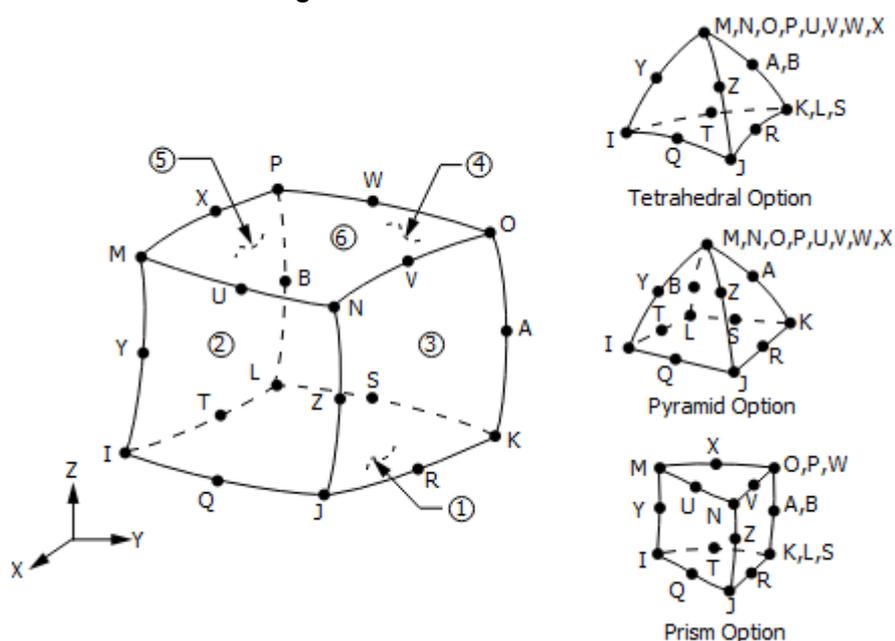
2.6 Tipos de elementos utilizados

A biblioteca do ANSYS® fornece uma variedade de elementos finitos, cada um para determinada função estrutural. Nos itens 2.6.1 e 2.6.2 são apresentadas as características dos elementos utilizados neste estudo. O detalhamento destes elementos pode ser encontrado no Help do ANSYS® (2017).

2.6.1 Elemento SOLID186

O SOLID 186 é um tipo de elemento quadrático tridimensional com três graus de liberdade por nó (translação nas direções x, y e z). O elemento é definido por vinte nós distribuídos, conforme o esquema apresentado na Figura 6. Ele é adequado para modelar malhas irregulares e pode ter qualquer orientação espacial.

Figura 6: Elemento SOLID186



Fonte: ANSYS® (2017)

O elemento permite a formulação de materiais com plasticidade, fluência e grandes deformações. Além de sua configuração hexaédrica, o SOLID186 pode apresentar uma configuração tetraédrica, piramidal ou prismática, o que permite adaptar-se à geometria do modelo.

2.6.2 Elementos CONTA174, CONTA175 E TARGE17

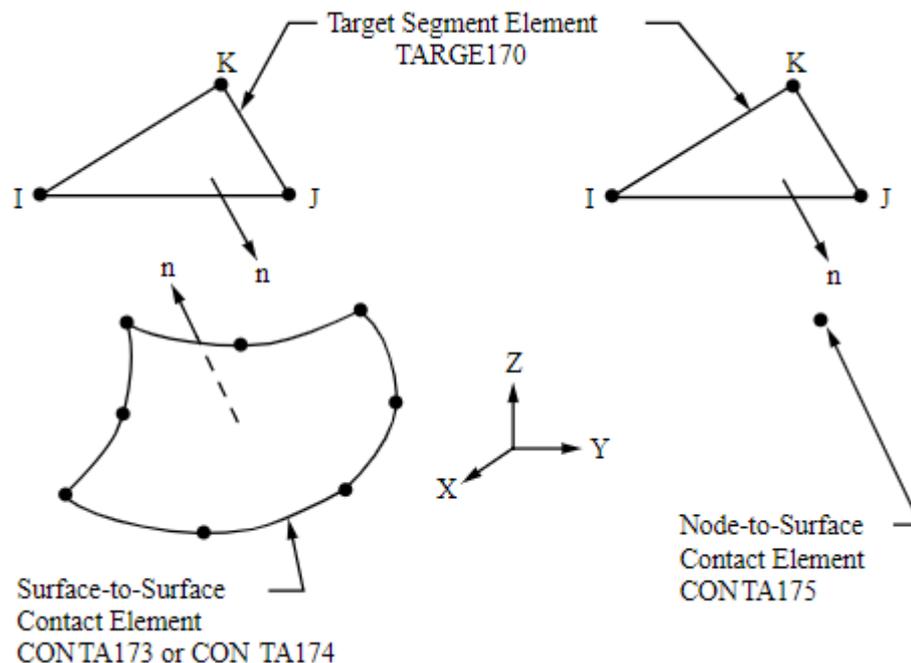
Os elementos CONTA174, CONTA175 e TARGE170 são usados em simulação numérica para representar a interface de objetos na análise de elementos finitos. Nessa direção, o CONTA174 é um elemento tridimensional de oito nós, utilizado para representar o contato e o deslizamento entre uma superfície deformável definida por este elemento. Ele se localiza na superfície dos elementos sólidos ou de casca tridimensional nos nós centrais e apresenta as mesmas características geométricas da superfície em que está conectado. Este elemento é aplicável para análises de contato estrutural e de acoplamento, como também pode ser utilizado para o contato geral e em pares.

O elemento CONTA175 é definido por um nó. Ele é utilizado para representar o contato e o deslizamento entre duas superfícies (entre um nó e uma superfície ou uma linha e uma superfície) e está localizado nas superfícies de elementos sólidos, de viga e de casca. O contato dele ocorre quando a superfície do elemento penetra um dos elementos alvo em uma superfície alvo especificada. Em virtude disso, aplica-se a análises estruturais e de acoplamento e pode ser utilizado para o contato geral e em pares.

Por fim, o TARGE170 é utilizado para representar as superfícies 'alvo' para elementos de contato associadas ao CONTA174 e ao CONTA175. Nele, os próprios elementos de contato se sobrepõem ao sólido, casca ou elementos de linha que descrevem o limite de um corpo deformável e estão potencialmente em contato com a superfície alvo, definida pelo TARGE170.

De modo geral, estes elementos são utilizados em conjunto, formando um par de contato. Em caso de contato de um nó com a superfície, utilizam-se os elementos TARGE170 e CONTA175. Para elementos sólidos em que o contato ocorre pela superfície, utilizam-se os elementos TARGE170 e CONTA174, como mostra a Figura 7.

Figura 7: Elementos do par de contato superfície-superfície e nó-superfície



Fonte: ANSYS® (2017)

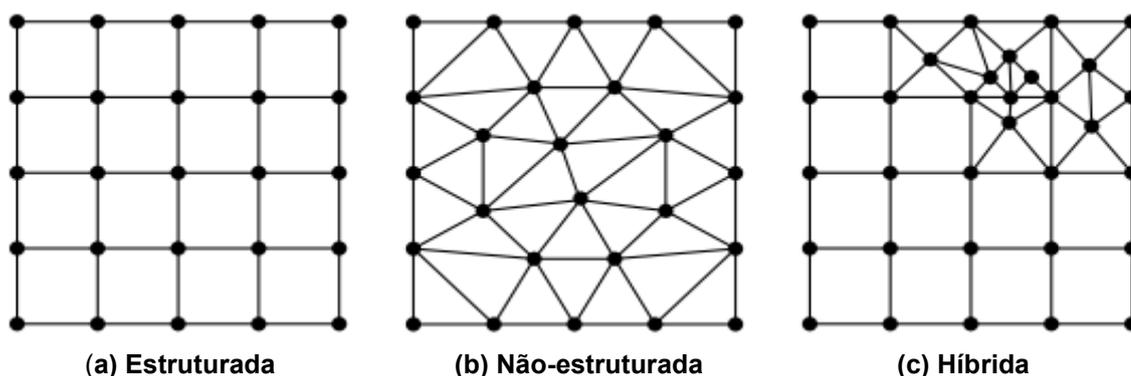
2.7 Malha

A malha representa a divisão dos elementos no objeto de estudo, por meio de equações que garantem o levantamento de vários pontos. Desse modo, a precisão das análises de elementos finitos é altamente dependente da qualidade da malha (DURAND *et al.*, 2019), assim como do modelamento, refinamento e de outros recursos adotados na simulação.

Knupp (2003) ressalta que a qualidade da malha pode afetar a eficiência das análises de várias maneiras. Isto é, quando os elementos são mal modelados podem dar origem a matrizes mal condicionadas que tendem a retardar ou impedir a convergência de soluções iterativas. Por outro lado, se a malha satisfaz os requisitos do sistema para uma determinada solução, não significa que é adequada para tratar qualquer análise para a qual possa ser utilizada.

Segundo Batista (2005), as malhas são classificadas em três grupos: as estruturadas, não-estruturadas e híbridas. As malhas estruturadas caracterizam-se por seus nós internos possuírem número constante de elementos adjacentes, Figura 8(a). Já as malhas não-estruturadas possuem nós internos com número de elementos adjacentes variável, Figura 8 (b) e as malhas híbridas não apresentam características bem definidas em relação aos nós internos e seus elementos adjacentes, Figura 8 (c).

Figura 8: Tipos de malhas



Fonte: Batista (2005)

Liseikin (1999) destaca que, em malhas estruturadas, todos os elementos apresentam o mesmo tamanho e os mesmos formatos geométricos, produzindo assim uma boa conectividade entre os elementos. Logo, as malhas não-estruturadas possuem elementos com tamanhos diferentes e estruturas diferentes, por conseguinte, a conectividade varia de ponto a ponto, desencadeando formas e tamanhos diferentes de elementos dentro da malha.

2.8 Precisão da malha

Embora o método de subdivisão e qualidade da malha seja importante para os resultados, determinar um tamanho mínimo ideal por meio de um estudo de convergência da malha contribui para a precisão dos resultados. Para isto, a malha deve ser refinada gradativamente até que a variação dos resultados seja considerada desprezível, de acordo com o nível de tolerância aceitável (SALOMÃO *et al.*, 2015).

Um dos aspectos importantes do MEF diz respeito à convergência de malha, embora seja um método aproximado, pode-se demonstrar que em uma malha consistente, à medida que o tamanho dos elementos finitos tende a zero e, conseqüentemente, a quantidade de nós tende ao infinito, a solução obtida converge para a solução exata do problema. À vista disto, a precisão da análise de convergência depende da quantidade de nós e elementos, do tamanho e tipo dos elementos presentes na malha (SOUZA, 2003).

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados os conceitos teóricos pertinentes a vibração lateral em vigas por meio da teoria de Euler-Bernoulli e as formulações básicas relativas aos Absorvedores Dinâmicos de Vibração (ADVs) passivos não amortecidos e para os ADVs com amortecimento, sendo ambos os tipos acoplados a uma estrutura primária não amortecida de um grau de liberdade.

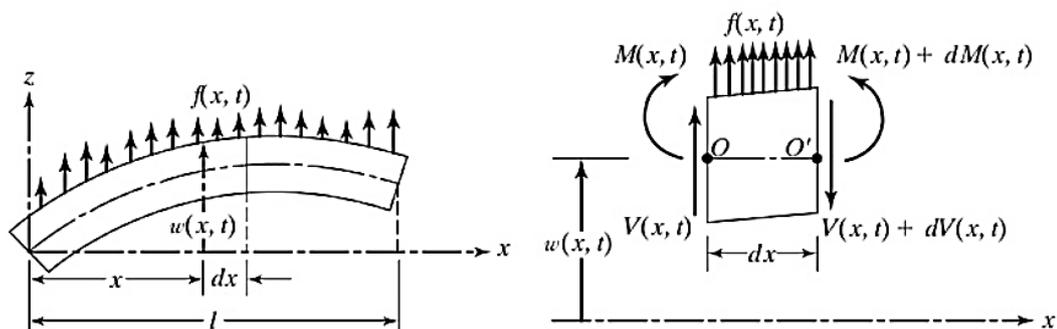
3.1 Viga de Euler-Bernoulli

A teoria clássica da viga de Euler-Bernoulli é um dos métodos de referência para a análise de estruturas lineares, isotrópicas e homogêneas. Para a análise de uma viga prismática uniforme, com seção transversal constante, sob a ação de um momento fletor em torno de seu eixo principal, são utilizadas algumas premissas sobre como a tensão deforma o material.

De acordo com Reddy (2004), dentre as premissas, a teoria assume que as seções transversais planas perpendiculares ao eixo da viga permanecem planas e perpendiculares ao eixo após a deformação. Outras hipóteses sobre a teoria elementar das vigas são apresentadas por Teixeira (2002):

- Há uma linha que não experimenta tração ou compressão (linha neutra) a que será posicionada ao longo do eixo longitudinal da viga;
- O material da viga é linearmente elástico, isotrópico e homogêneo;
- σ_y e σ_z são desprezíveis quando comparadas a σ_x ;
- O plano xz é o plano principal.

Figura 9: Viga em flexão



Fonte: Rao, (2008)

Considerando o diagrama de corpo livre do elemento viga mostrado na Figura 9 onde $M(x, t)$ é o momento fletor, $V(x, t)$ é a força de cisalhamento, $f(x, t)$ a força externa por unidade de comprimento da viga, tem-se que a força de inércia que age sobre o elemento da viga é dado pela expressão:

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

A equação do movimento da força na direção z será:

$$-(V + dV) + f(x, t) + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

Sendo ρ a densidade da massa e $A(x)$ a área de seção transversal da viga. Dessa forma, a equação do movimento do momento em relação ao eixo z que passa pelo ponto zero resulta em:

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (3.3)$$

Escrevendo,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad e \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad (3.4)$$

Desconsiderando os termos com potências de dx (pequenas deformações), as equações (3.3) e (3.4) podem ser escritas como:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0 \quad (3.6)$$

Substituindo a Eq. (3.6) na Eq. (3.5), tem-se:

$$-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (3.7)$$

Pela teoria elementar de flexão de vigas ou teoria das vigas delgadas, a relação entre o momento fletor e a deflexão pode ser expressa como:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \quad (3.8)$$

Sendo E o módulo de elasticidade linear (módulo de Young) e $I(x)$ o momento de inércia de área da seção transversal da viga em relação ao eixo y . Ao substituir a Eq. (3.7) na Eq. (3.9), obtém-se a equação de movimento para a vibração lateral de uma viga não uniforme, também conhecida como equação governante da vibração transversal de vigas de Euler-Bernoulli:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right] + \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (3.9)$$

Para a vibração livre de uma viga uniforme a Eq. (3.9) torna-se:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (3.10)$$

Na vibração livre $f(x, t) = 0$, portanto a Eq. (3.10) torna-se:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (3.11)$$

Supondo que o movimento harmônico seja dado por:

$$w(x, t) = W(x) \cos(\omega t - \theta) \quad (3.12)$$

Substituindo a Eq. (3.12) em Eq. (3.11), obtém-se a equação dos autovalores:

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - \rho A \omega^2 W = 0 \quad (3.13)$$

Para a vibração livre de uma viga uniforme torna-se:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \lambda^4 W = 0 \quad (3.14)$$

Sendo o autovalor (λ):

$$\lambda^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (3.15)$$

Logo, $\lambda = \lambda L$, obtém-se:

$$\omega_n = (\lambda L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \quad (3.16)$$

De acordo com Roy e Craig (1981), a solução para a Eq. (3.14) com λ definida na Eq. (3.15) pode ser expressa como:

$$W(x) = C_1 \sinh(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x) + C_3 \sinh(\lambda x) + C_4 \cosh(\lambda x) \quad (3.17)$$

Na Eq. (3.17), deve-se determinar as quatro constantes de amplitude C_1, C_2, C_3 e C_4 e o autovalor (λ), conforme a condição de contorno para a viga em balanço:

- Deslocamento e curvatura nulos na extremidade fixa:

$$W(0) = 0 \quad e \quad \frac{dW}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.18)$$

Portanto:

$$\frac{d^2W}{dx^2}_{x=L} = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{d^3W}{dx^3}_{x=L} = 0 \quad (3.20)$$

Derivando a Eq. (3.17), tem-se:

$$\frac{dW}{dx} = \lambda[C_1 \cosh(\lambda x) + C_2 \sinh(\lambda x) + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)] \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \lambda^2[C_1 \sinh(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x) + C_3 \sin(\lambda x) + C_4 \cos(\lambda x)] \quad (3.22)$$

$$\frac{d^3W}{dx^3} = \lambda^3[C_1 \cosh(\lambda x) + C_2 \sinh(\lambda x) + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)] \quad (3.23)$$

Substituindo a Eq. (3.17) e as Eqs. (3.21), (3.22) e (3.23) nas condições de contorno, chega-se ao seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ \lambda^2 \sinh(\lambda L) & \lambda^2 \cosh(\lambda L) & -\lambda^2 \sinh(\lambda L) & -\lambda^2 \cosh(\lambda L) \\ \lambda^3 \cosh(\lambda L) & \lambda^3 \sinh(\lambda L) & -\lambda^3 \cosh(\lambda L) & -\lambda^3 \sinh(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Com o intuito de obter a solução para o sistema acima, o determinante dos coeficientes deve ser nulo. Isto conduz à equação:

$$\cos(\lambda L) \cosh(\lambda L) + 1 = 0 \quad (3.25)$$

As raízes da Eq. (3.25) são os autovalores multiplicados pelo comprimento L . Assim, não existe solução analítica para as raízes da equação característica, o que requer uma solução numérica. Rao (2008) apresenta esses valores de $\lambda_n L$ e os quatro primeiros valores são:

$$\lambda_1 L = 1,875104$$

$$\lambda_2 L = 4,694091$$

$$\lambda_3 L = 7,854757$$

$$\lambda_4 L = 10,995541$$

Esses valores, substituídos na Eq. (3.16) e Eq. (3.17), determinam as frequências naturais e a deflexão (W) em função do comprimento da viga. A deflexão máxima é dada por:

$$W(x) = C_n [\text{sen}(\lambda_n x) - \text{senh}(\lambda_n x) - a_n (\text{cos}(\lambda_n x) - \text{cosh}(\lambda_n x))] \quad (3.26)$$

Sendo,

$$C_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

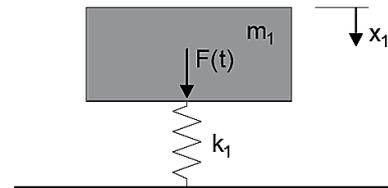
$$a_n = \left[\frac{\text{sen}(\lambda_n L) - \text{senh}(\lambda_n L)}{\text{cos}(\lambda_n L) - \text{cosh}(\lambda_n L)} \right]$$

3.2 Dimensionamento de absorvedores dinâmicos de vibração

3.2.1 Absorvedor dinâmico não amortecido

Considerando um sistema constituído por uma massa principal m_1 , ligada a uma mola de rigidez k_1 apresentado na Figura 10.

Figura 10: Modelo teórico do comportamento de uma estrutura com 1 GDL e sem amortecimento



Fonte: Adaptado de Rao (2008)

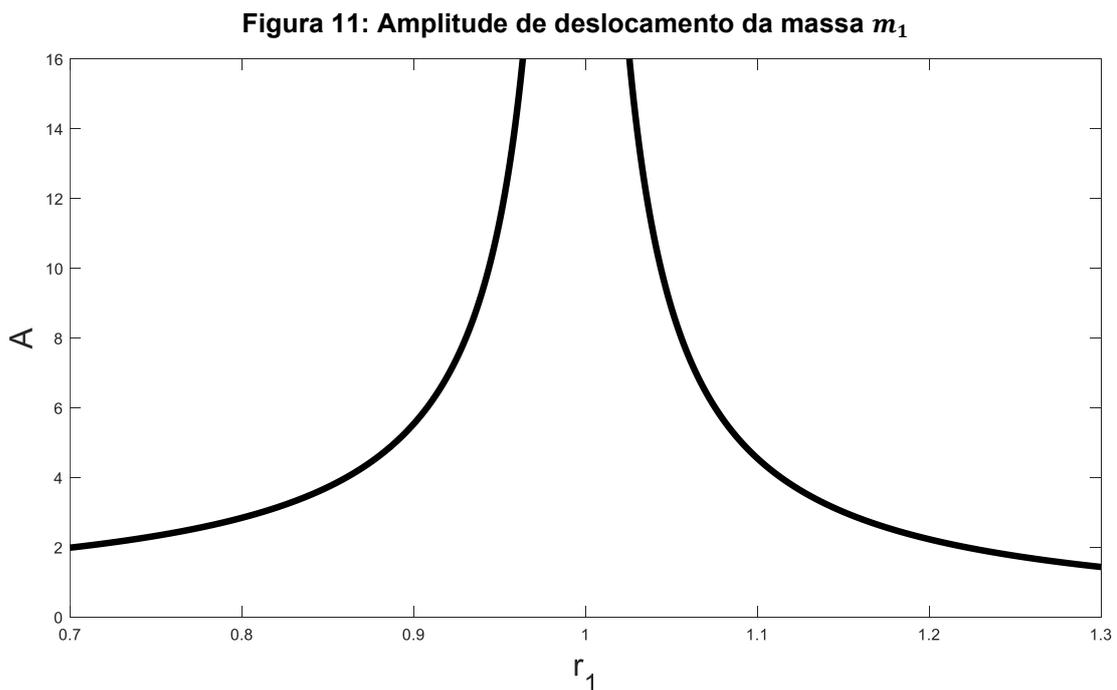
Ao apresentar um grau de liberdade (GDL), o sistema possui apenas uma frequência natural ω_1 , dada pela Eq. (3.27):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (3.27)$$

Quando sujeito a uma força harmônica $F(t) = F_0 \text{sen } \omega t$, a equação de equilíbrio dinâmico que rege seu movimento é:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 = F_0 \text{sen } \omega t \quad (3.28)$$

em que x_1 é o deslocamento da massa m_1 . A sua Função de Resposta em Frequência (FRF) é apresentada na Figura 11.

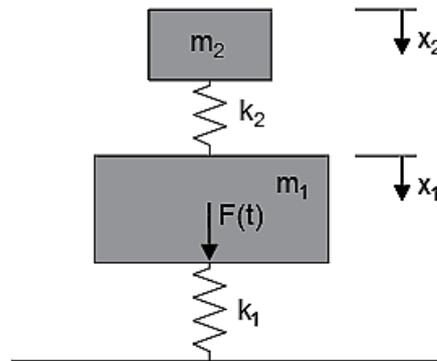


Fonte: Adaptado de Rao (2008)

Nela, o A representa a amplitude do movimento da massa m_1 . Diante dela, verifica-se a presença de uma frequência de excitação causadora de ressonância, ou seja, a amplitude da massa m_1 tende ao infinito. Atinge-se esta frequência quando a frequência de excitação é igual à frequência natural do sistema, isto é, $r = 1$.

A fim de atenuar os níveis vibratórios deste sistema, aqui denominado estrutura primária, adiciona-se um sistema vibratório secundário de um GDL, nesta ocasião denominado ADV, constituído por uma massa m_2 , ligada à massa m_1 através da mola de rigidez k_2 , obtendo-se um sistema com dois GDL, que possui duas frequências naturais. Sua representação esquemática é apresentada na Figura 12.

Figura 12: Modelo teórico de uma estrutura com 1 GDL e sem amortecimento, na qual foi instalado um ADV



Fonte: Adaptado de Rao (2008)

Quando uma ação harmônica, $F(t) = F_0 \text{sen } \omega t$, atua sobre a massa m_1 , as equações de equilíbrio dinâmico que regem o movimento deste novo sistema de dois GDL são:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_0 \text{sen } \omega t \quad (3.29)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (3.30)$$

em que x_2 é o deslocamento do ADV.

Fazendo as devidas diferenciações e manipulações em $F(t) = F_0 \text{sen } \omega t$ e substituindo nas Eqs. (3.29) e (3.30), a Função de Resposta em Frequência (FRF), tanto para a estrutura primária quanto para o ADV, são dadas por:

$$X_1 = F_0 \frac{(k_2 - m_2 \omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \quad (3.31)$$

$$X_2 = F_0 \frac{k_2}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \quad (3.32)$$

Sabendo que o deslocamento estático δ_{st} é dado por,

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k_1} \quad (3.33)$$

e efetuando algumas simplificações nas Eqs. (3.31) e (3.32), chega-se às expressões que apresentam o cálculo das amplitudes do movimento de cada uma das massas:

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]}{\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right) - \frac{k_2}{k_1}} \quad (3.34)$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right) - \frac{k_2}{k_1}} \quad (3.35)$$

As amplitudes dos movimentos das massas m_1 e m_2 são agora representados, respectivamente, pelos quocientes X_1/δ_{st} e X_2/δ_{st} , exprimindo a sua relação com o deslocamento estático. Introduzindo os coeficientes,

$$r_1 = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (3.36)$$

$$r_2 = \frac{\omega}{\omega_2} \quad (3.37)$$

em que o coeficiente ω_2 é a frequência natural do ADV, calculada por

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (3.38)$$

é possível simplificar as expressões (3.34) e (3.35), que adquirem o aspecto:

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{1 - r_2^2}{\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - r_1^2\right)(1 - r_2^2) - \frac{k_2}{k_1}} \quad (3.39)$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - r_1^2\right)(1 - r_2^2) - \frac{k_2}{k_1}} \quad (3.40)$$

Ressalta-se que o objetivo de um ADV é atenuar ao mínimo as vibrações de uma estrutura e, se possível, eliminá-las. Isto consiste em igualar a zero o numerador do segundo membro da Eq. (3.39):

$$1 - r_2^2 = 0 \quad (3.41)$$

obtendo-se:

$$r_2 = 1 \quad (3.42)$$

Quando $r_2 = 1$, a frequência de excitação é igual à frequência do ADV, ou seja, $\omega = \omega_2$. Logo, a relação (3.42) expressa que o movimento da massa m_1 é nulo quando a frequência de excitação ω , é igual à frequência natural do ADV ω_2 . Ao mesmo tempo, é uma condição inicial do problema que a frequência de excitação seja igual à frequência natural da massa principal, ou seja, $\omega = \omega_1$.

Nestas condições, o deslocamento máximo do ADV, em regime permanente, dado pela Eq. (3.40) que, considerando $r_2 = 1$, dá origem a:

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - r_1^2\right)(1 - 1^2) - \frac{k_2}{k_1}} \quad (3.43)$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = - \frac{1}{\frac{k_2}{k_1}}$$

$$X_2 = - \frac{F_0}{k_2}$$

Como $\omega_2 = \omega_1$, verifica-se que:

$$\omega_2 = \omega_1 \leftrightarrow \frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1} \leftrightarrow \frac{k_2}{k_1} = \frac{m_2}{m_1} \quad (3.44)$$

$$\omega_2 = \omega_1 \leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_2} = \frac{\omega}{\omega_1} \leftrightarrow r_2 = r_1$$

Designando por μ a razão de massas:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} \quad (3.45)$$

E considerando as relações (3.44), as Eqs. (3.39) e (3.40) adquirem a forma:

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{1 - r_2^2}{(1 + \mu - r_1^2)(1 - r_1^2) - \mu} \quad (3.46)$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{(1 + \mu - r_1^2)(1 - r_1^2) - \mu} \quad (3.47)$$

Este sistema, sendo constituído por duas massas e duas molas, apresenta dois GDL, aos quais correspondem a duas frequências naturais. Quando a frequência de excitação é igual uma frequência natural de um sistema, ele entra em ressonância, o que significa que a amplitude dos deslocamentos das massas tende ao infinito. As frequências naturais deste sistema podem ser obtidas fazendo com que os valores dados pelas Eqs. (3.46) e (3.47) apresentem amplitudes muito altas, tendendo ao infinito. Isto equivale a fazer com que os seus denominadores sejam nulos.

$$(1 + \mu - r_1^2)(1 - r_1^2) - \mu = 0 \quad (3.48)$$

Chegando-se à solução:

$$r_1 = \sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \pm \sqrt{\mu + \frac{\mu^2}{4}}} \quad (3.49)$$

ou

$$\omega_{1,2} = \omega_1 \sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \pm \sqrt{\mu + \frac{\mu^2}{4}}} \quad (3.50)$$

em que $\omega_{1,2}$ são as duas frequências naturais do sistema após a instalação do ADV. Seguindo o procedimento sugerido por Kelly (1996), considerando

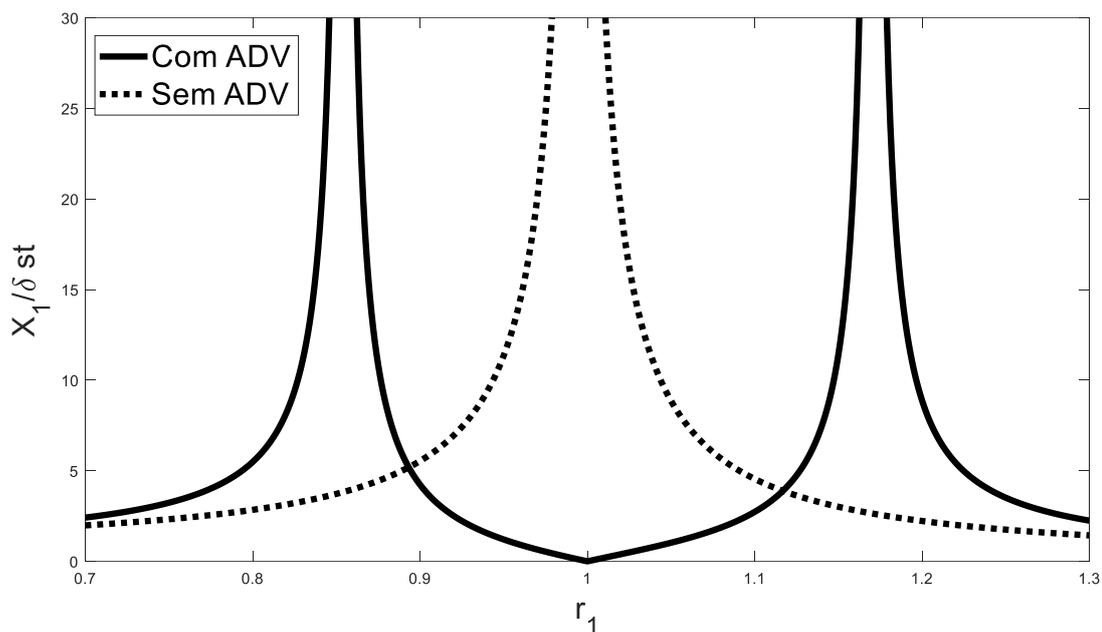
$$q = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (3.51)$$

e igualando os denominadores das equações (3.46) e (3.47) a zero, as frequências próprias do sistema podem ser obtidas por:

$$\omega_{a,b} = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + q^2(1 + \mu) \pm \sqrt{q^4(1 + \mu)^2 + 2(\mu - 1)q^2 + 1}} \quad (3.52)$$

A Figura 13 apresenta a FRF da massa principal, m_1 , antes e após do acoplamento do ADV. Antes da aplicação do ADV, o sistema possui apenas uma frequência. Após a sua instalação, o sistema apresenta duas frequências, uma inferior e outra superior à frequência original. Estas não são coincidentes com a frequência da solicitação. Dessa forma, verifica-se também que, para $r_1 = 1$, ou seja, para frequências de excitação iguais à frequência natural do sistema inicial, a amplitude da massa principal é nula.

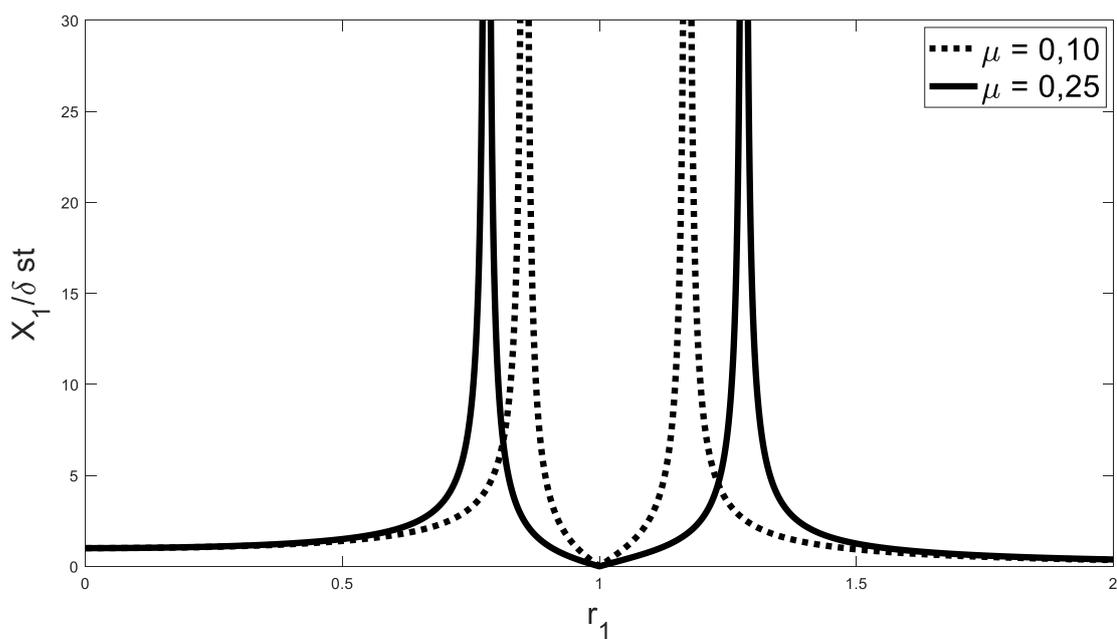
Figura 13: Amplitude dos deslocamentos da massa m_1 antes e depois da instalação do ADV



Fonte: Adaptado de Rao (2008)

A Figura 14 permite avaliar a influência do parâmetro μ no comportamento do ADV. Observa-se que a banda de frequências controladas pela sua aplicação aumenta com o valor de μ , ou seja, quanto maior a massa do ADV, maior a banda de frequências controladas.

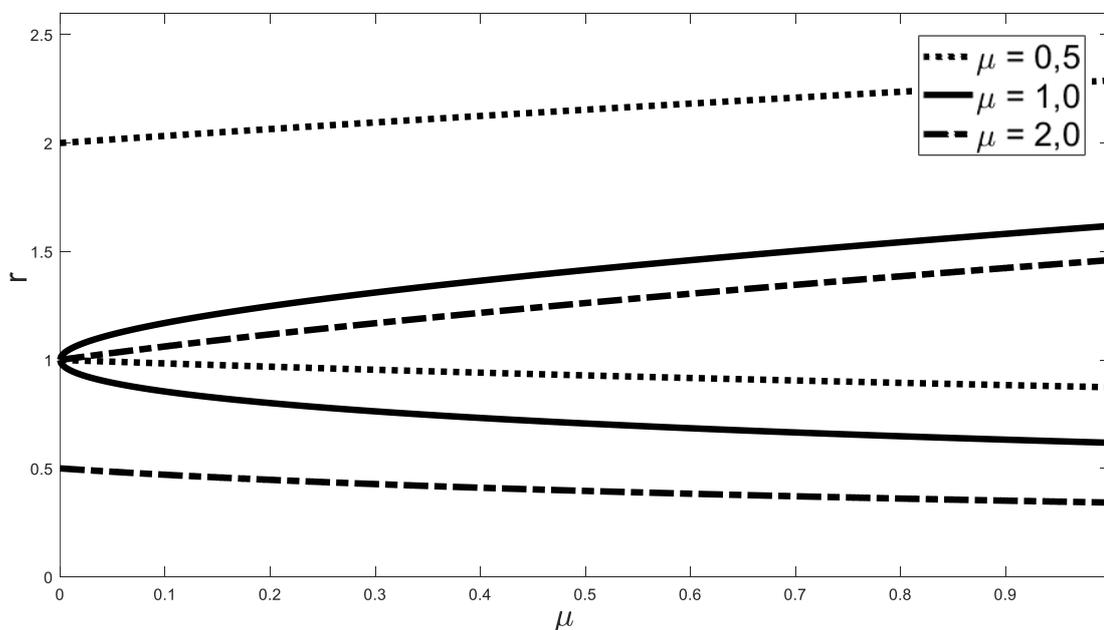
Figura 14: Frequências controladas por um ADV com $\mu = 0,10$ e por um ADV com $\mu = 0,25$.



Fonte: Adaptado de Rao (2008)

A Figura 15 apresenta o modo como se processa essa variação da banda de frequências controladas com a variação de μ .

Figura 15: Variação de frequências controladas pelo ADV devido à variação do valor de μ .



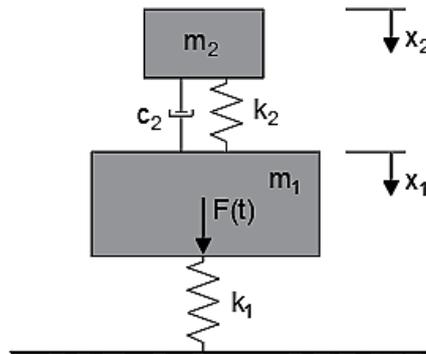
Fonte: Adaptado de Rao (2008)

Verifica-se na figura acima que quando μ está próximo de zero, o sistema se aproxima de um grau de liberdade. Logo, à medida que a massa do ADV aumenta no sentido de se aproximar da massa do sistema primário, surgem duas novas frequências que se distanciam da frequência natural do sistema primário à medida que a massa do ADV aumenta (RIBEIRO, 2015).

3.2.2 Absorvedor dinâmico amortecido

Após a análise do comportamento do ADV no controle de vibrações de estruturas sujeitas a ações harmônicas, torna-se possível o estudo do funcionamento dos ADVs. Admite-se que ao ADV estudado na seção anterior é adicionado a um dispositivo capaz de lhe proporcionar amortecimento e a estrutura principal não possuir amortecimento, como mostra a Figura 16.

Figura 16: Modelo teórico do comportamento de uma estrutura com 1 GDL e sem amortecimento, na qual foi instalado um ADV



Fonte: Adaptado de Rao (2008)

Considerando o sistema de 2 GDL, Figura 16, sob a ação de uma força harmônica $F(t) = F_0 \text{ sen } \omega t$, as equações de equilíbrio dinâmico são:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_0 \text{ sen } \omega t \quad (3.53)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \quad (3.54)$$

Ao fazer as devidas derivações de $F(t) = F_0 \text{ sen } \omega t$ e suas manipulações, quando substituídas nas Eqs. (3.53) e (3.54), obtém-se:

$$X_1 = F_0 \frac{(k_2 - m_2 \omega^2 + i \omega c_2)}{[(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - m_2 \omega^2 k_1] + i \omega c_2 (k_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2)} \quad (3.55)$$

$$X_2 = F_0 \frac{(k_2 + i \omega c_2)}{[(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - m_2 \omega^2 k_1] + i \omega c_2 (k_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2)} \quad (3.56)$$

Utilizando as ferramentas matemáticas usadas por Den Hartog (1972), as Eqs. (3.55) e (3.56) são reescritas como:

$$\frac{X_1}{F_0} = \sqrt{\frac{(k_2 - m_2 \omega^2)^2 + (c_2 \omega)^2}{[(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - m_2 k_2 \omega^2]^2 + \omega^2 c_2^2 (k_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2)^2}} \quad (3.57)$$

$$\frac{X_2}{F_0} = \sqrt{\frac{k_2^2 + (c_2 \omega)^2}{[(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - m_2 k_2 \omega^2]^2 + \omega^2 c_2^2 (k_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2)^2}} \quad (3.58)$$

Introduzindo ζ_2 como o fator de amortecimento do ADV

$$\zeta_2 = \frac{c_2}{c_c} = \frac{c_2}{2 m_2 \omega_2} \quad (3.59)$$

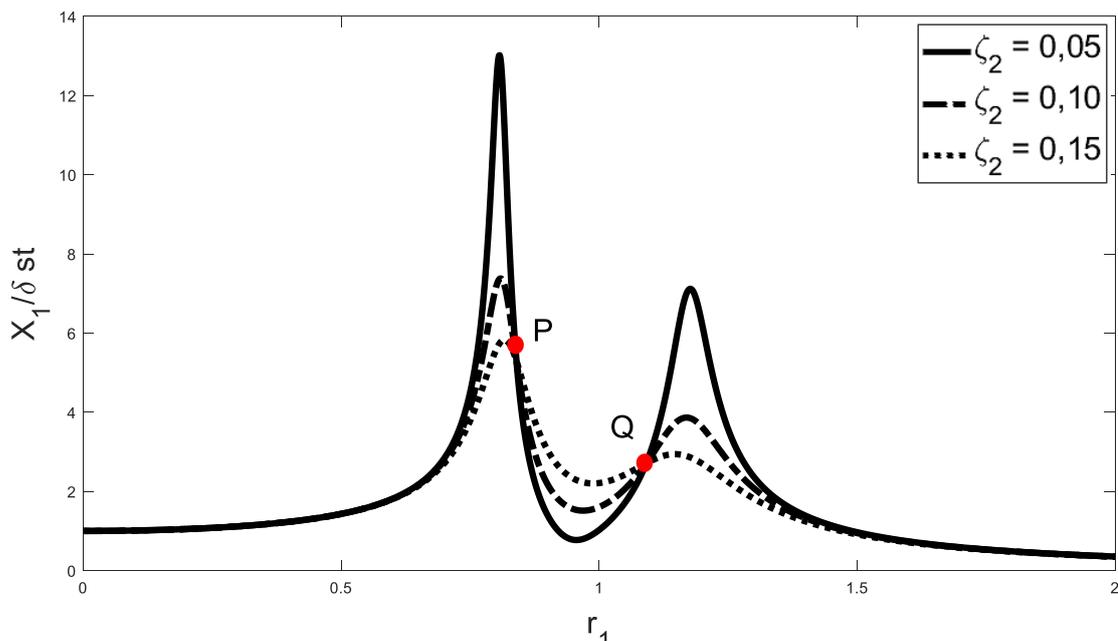
e com recurso aos coeficientes q , r e μ , apresentados na seção anterior, recordando que $\delta_{st} = F_0/k_1$. De modo simplificado, as equações (3.57) e (3.58) podem ser reescritas como:

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \sqrt{\frac{(2 \zeta_2 r_1 q)^2 + (r_1^2 - q^2)^2}{(2 \zeta_2 r_1 q)^2 [1 - r_1^2(1 + \mu)]^2 + \{r_1^4 - [1 + (1 + \mu)q^2] r_1^2 + q^2\}^2}} \quad (3.60)$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \sqrt{\frac{(2 \zeta_2 q)^2 + q^4}{(2 \zeta_2 r_1 q)^2 [1 - r_1^2(1 + \mu)]^2 + \{r_1^4 - [1 + (1 + \mu)q^2] r_1^2 + q^2\}^2}} \quad (3.61)$$

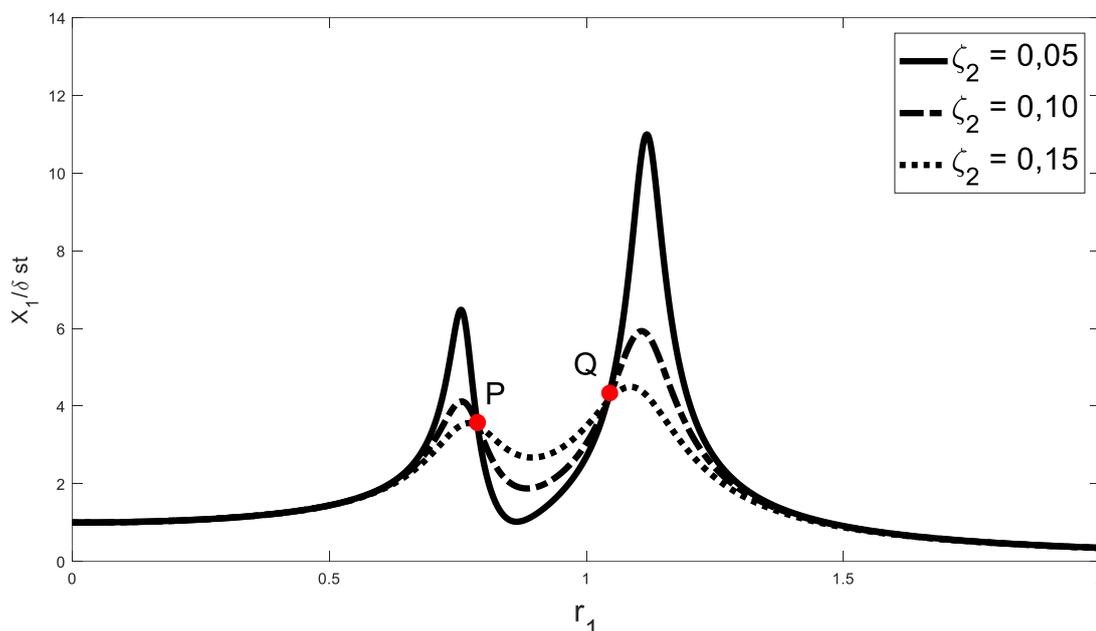
A Eq. (3.60) representa a FRF pontual relativa ao sistema primário. Na Figura 17, apresenta-se o traçado da Eq. (3.60) para vários valores de ζ_2 , com $q = 0,95$ e $\mu = 0,15$. E, na Figura 18 o mesmo é apresentado para $q = 0,85$ e $\mu = 0,15$.

Figura 17: Amplitude do movimento da massa m_1 para $q=0,95$ e $\mu=0,15$, considerando diferentes valores de ζ_2



Fonte: Adaptado de Rao (2008)

Figura 18: Amplitude do movimento da massa m_1 para $q=0,85$ e $\mu=0,15$, considerando diferentes valores de ζ_2



Fonte: Adaptado de Rao (2008)

Em ambas as figuras se verifica a existência de dois picos na proximidade das frequências naturais do sistema, correspondentes aos fenômenos de ressonância e de um mínimo próximo de $r_1 = 1$, frequência-alvo do ADV. No entanto, mais conclusões podem ser extraídas na análise das figuras. Ademais, observa-se na Figura 17 e na Figura 18 que, independentemente do valor de ζ_2 , todas as curvas passam por dois pontos fixos, também denominados pontos invariantes, designados por P e Q. Por outro lado, verifica-se que a posição relativa de P e Q é função de q , ou seja, variando o valor de q , é possível fazer um ponto subir e o outro descer. Por isso, é possível encontrar um valor de q tal que a altura dos pontos P e Q seja a mesma.

Sendo assim, a curva desejável é aquela em que a amplitude dos dois picos é igual, pois é aquela em que a faixa de frequências sobre as quais o ADV exerce o seu efeito é maior. Esta é encontrada ao se fazer com que a altura de P e de Q seja a mesma e quando P e Q coincidam com os picos.

Observando as figuras, constata-se que a inclinação da curva dos pontos P e Q é função de ζ_2 . Assim, torna-se possível encontrar um valor de ζ_2 que faça com que os pontos correspondam aos picos de amplitude, ou seja, nestes pontos a inclinação será nula. Tais valores de q e ζ_2 correspondem aos parâmetros ótimos. É conveniente salientar que os parâmetros ótimos do ADV são obtidos de modo que os pontos P e

Q corresponderem aos deslocamentos máximos da estrutura, isto é, procurou-se minimizar a amplitude dos deslocamentos.

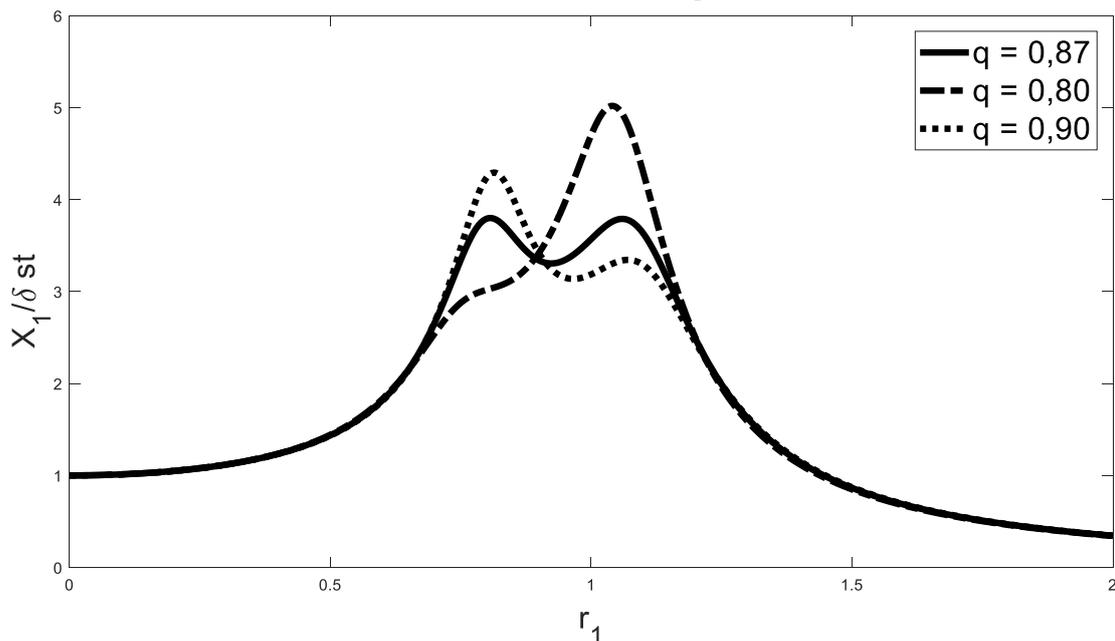
Para tanto, é necessário determinar os valores de r_1 correspondentes às abcissas dos pontos fixos para os quais X_1/δ_{st} é independente de ζ_2 . De acordo com Den Hartog (1972), estes pontos podem ser localizados quando valores de ζ_2 são substituídos e igualados na Eq. (3.60), o que resulta em:

$$r_1^4 - 2r_1^2 \left(\frac{1 + q^2 + \mu q^2}{2 + \mu} \right) + \frac{2q^2}{2 + \mu} = 0 \quad (3.62)$$

Esta é uma equação quadrática em r_1^2 e apresenta duas raízes. Estas raízes indicam os valores da razão de frequências, r_1^P e r_1^Q , que correspondem aos pontos P e Q. As ordenadas de P e Q podem ser determinadas ao substituir os valores de r_1^P e r_1^Q na Eq. (3.59). Den Hartog (1972) constata que o absorvedor de vibração mais eficiente é o ADV cujas ordenadas dos pontos sejam iguais, Figura 19, quando,

$$q = \frac{1}{1 + \mu} \quad (3.63)$$

Figura 19: Amplitude do movimento da massa m_1 para $\mu = 0.15$ e $\zeta_2 = 0.192$, considerando diferentes valores de q



Fonte: Adaptado de Rao (2008)

Articula-se que um absorvedor de vibração está sintonizado quando o absorvedor satisfizer a Eq. (3.63). No entanto, essa equação não aponta um valor ótimo de ζ_2 e o valor correspondente de X_1/δ_{st} . O valor ótimo de amortecimento pode ser determinado fazendo a curva de resposta X_1/δ_{st} , seja a mais plana possível nos picos P e Q.

Para determinar o valor de ζ_2 ótimo, substitui-se a Eq. (3.63) em (3.60) para que a equação resultante seja aplicável ao caso de sintonia ótima. A inclinação da curva X_1/δ_{st} é determinada por meio da modificação e diferenciação da Eq. (3.59) em relação à r_1 . Dessa forma, igualando a inclinação a zero nos pontos P e Q, obtém-se:

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{\mu \left\{ 3 - \sqrt{\frac{\mu}{\mu + 2}} \right\}}{8(1 + \mu)^3}} \quad \text{para o ponto P} \quad (3.64)$$

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{\mu \left\{ 3 + \sqrt{\frac{\mu}{\mu + 2}} \right\}}{8(1 + \mu)^3}} \quad \text{para o ponto Q} \quad (3.65)$$

Sendo os dois valores diferentes de ζ_2 fornecidos pelas expressões (3.64) e (3.65), sugere-se para ζ_2 ótimo um valor médio dos dois. O seu valor é dado por:

$$\zeta_2 \text{ ótimo} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad (3.66)$$

O valor ótimo correspondente de X_1/δ_{st} , torna-se:

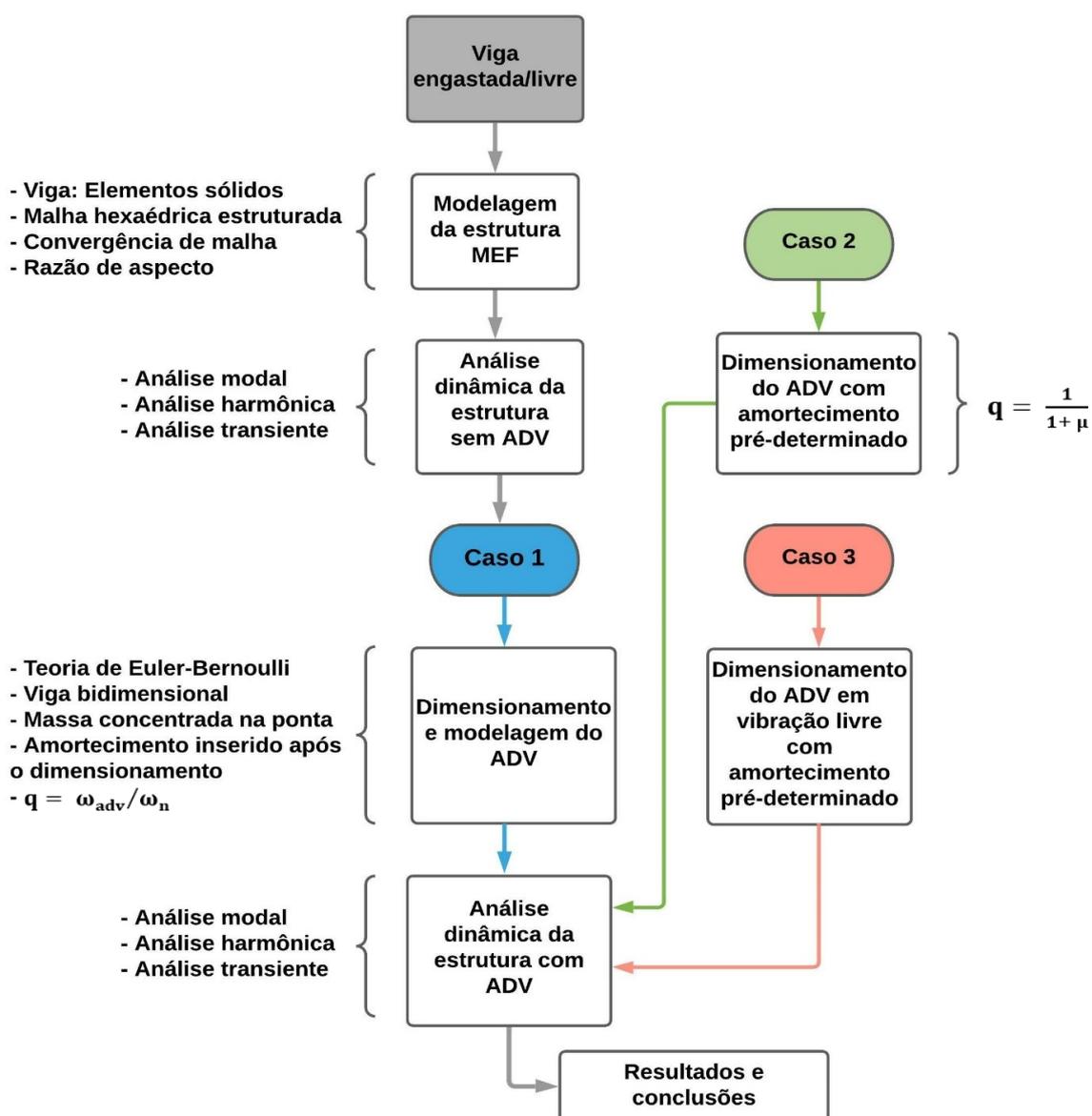
$$\left(\frac{X_1}{\delta_{st}}\right)_{\text{ótimo}} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \quad (3.67)$$

4 METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentados os procedimentos para a realização deste estudo.

A partir da estrutura de uma viga engastada, suas características e análise dinâmica, os ADVs foram dimensionados e inseridos na estrutura. O dimensionamento dos ADV foi dividido em três casos, aqui denominados Caso 1, Caso 2 e Caso 3. Sendo assim, os procedimentos utilizados para os parâmetros são apresentados no fluxograma, Figura 20, bem como nas seções a seguir.

Figura 20: Fluxograma da metodologia

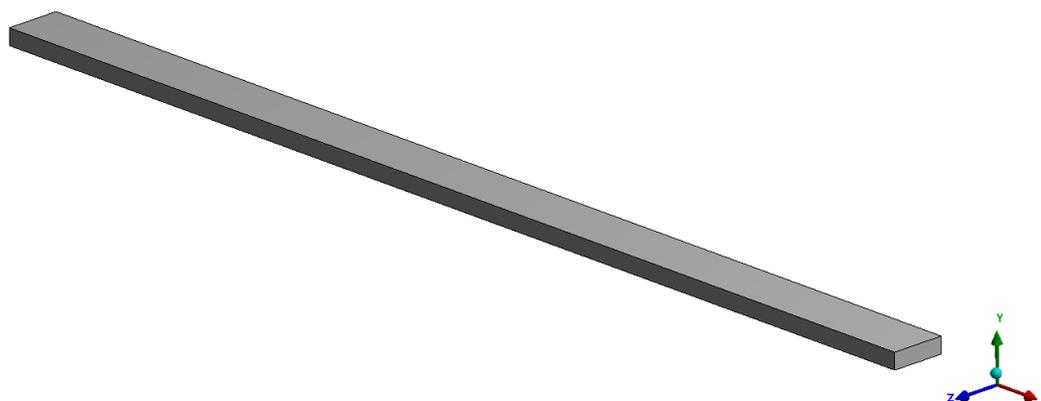


Fonte: Autoria própria (2021)

4.1 Estrutura primária

Neste trabalho, a estrutura usada para análise e aplicação do ADV, chamada de estrutura primária, foi uma viga de aço engastada em uma das extremidades e livre na outra, com seção transversal retangular e constante ao longo de seu comprimento, como mostra a Figura 21.

Figura 21: Modelo da estrutura primária



Fonte: A autoria própria (2021)

As propriedades do material que a compõem, assim como as principais dimensões geométricas da estrutura primária são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1: Propriedades da estrutura primária

Propriedades	Dimensões
Comprimento (m)	2,00
Largura (m)	0,10
Espessura (m)	0,03
Densidade - ρ (Kg/m ³)	7850
Módulo de Elasticidade - E (GPa)	200
Coefficiente de Poisson - ν	0,30

Fonte: A autoria própria (2021)

4.1.1 Modelagem da estrutura primária

A estrutura foi modelada como um sólido flexível do tipo SOLID186, um elemento que não requer uma discretização extremamente fina, o que reduz o tempo

de análise estrutural (LAZZARI, 2016). A condição de contorno usada foi o engaste aplicado na seção transversal da extremidade da viga, ou seja, condição que restringe os seis graus de liberdade (translação e rotação em torno dos eixos x, y e z).

A malha utilizada foi construída usando elementos hexaédricos. Dessa forma, utilizando elementos tridimensionais, a malha foi gerada com refinamento local e proporcional ao comprimento de onda, a partir da teoria das ondas flexurais apresentado por Fahy e Gardonio (2007, p. 1-23). O tamanho do elemento de malha foi calculado desde as propriedades da estrutura primária e da frequência natural de interesse. Para isto, foi necessário calcular primeiramente o número de onda k e o comprimento de onda λ . Sendo assim, o número de onda relaciona-se com a frequência natural conforme apresentado na Eq. (3.15) da Seção 3.1. E, mediante o valor de k , pode ser obtido o comprimento de onda λ , de acordo com as seguintes equações:

$$k = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m}{EI}} \quad (4.1)$$

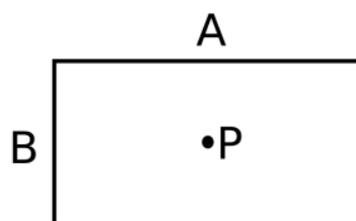
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (4.2)$$

Conforme o ANSYS® (17.0), para elementos tridimensionais são necessários ao menos seis elementos por comprimento de onda. Em vista disso, de modo a assegurar que a malha utilizada seja confiável e que se obtenha resultados com maior precisão, foi realizada a análise de convergência. A análise foi realizada alterando o tamanho dos elementos até chegar a um valor constante dos resultados.

Ainda, em relação à distribuição dos elementos da malha e, considerando que o tamanho do elemento deve ser menor que o comprimento de onda (ALFORD, KELLY, BOORE, 1974), foi determinada a razão de aspecto.

A razão de aspecto pode ser definida como a razão do maior para o menor comprimento de aresta de um elemento de malha. No que tange aos elementos hexaédricos, a relação de aspecto é definida como o tamanho da borda mínima do elemento dividido pelo tamanho da borda máxima do elemento (ANSYS, 2017), como mostra a Figura 22.

Figura 22: Parâmetro de qualidade de malha: razão de aspecto



Fonte: Dose (2015)

Considerando A como a maior aresta e B a menor do elemento da malha, a razão de aspecto é dada por:

$$\text{Razão de aspecto} = \frac{A}{B} \quad (4.3)$$

Segundo Dose (2015), o valor da relação deve ser o próximo possível de 1,0. Quando aplicadas as condições de contorno e realizada a análise de convergência, bem como a razão de aspecto, desenvolveu-se uma análise modal com o intuito de determinar as frequências naturais e os modos de vibração da viga, sendo extraídos os três primeiros modos em flexão e suas respectivas frequências naturais. Na Tabela 2 são apresentados os três primeiros modos em flexão da viga, calculados numericamente e comparados com os calculados analiticamente pela teoria de Euler-Bernoulli, Eq.3.15.

Tabela 2: Modos de vibração e frequências naturais da viga

Modo	Frequência Analítica (Hz)	Frequência Numérica (Hz)	Diferença (Hz)	Forma modal
1	6,1154	6,1315	0,0161	
2	38,3243	38,385	0,0607	
3	107,3091	107,320	0,0109	

Fonte: Autoria própria (2021)

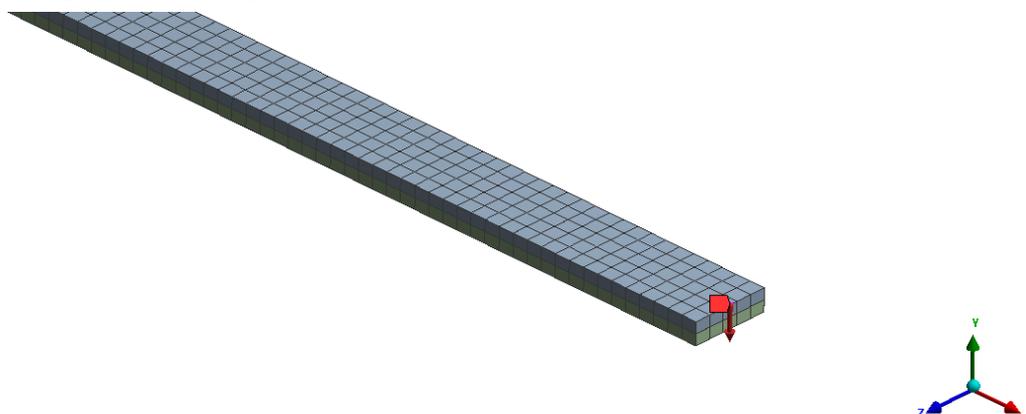
4.1.2 Análise dinâmica

A análise dinâmica foi realizada no programa computacional ANSYS®. Ao passo que para a análise harmônica e transiente foram utilizados os elementos CONTA175 e TARGE170. Estes elementos foram utilizados para representar o contato do carregamento harmônico unitário em um nó estrutura da viga.

Inicialmente, para verificar o comportamento da estrutura primária, quando em oscilação, realizou-se a análise modal, na qual foram verificados os seis primeiros modos de vibração e as frequências naturais.

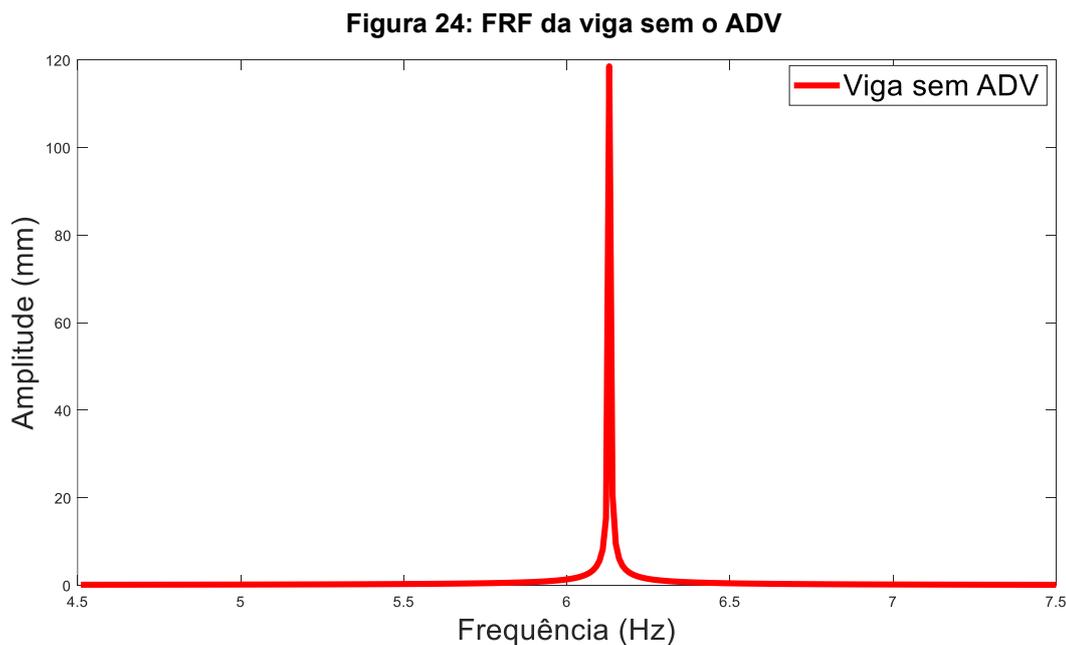
A fim de verificar a resposta da estrutura no domínio da frequência e identificar o ponto de maior deslocamento, foi realizada a análise harmônica. A função resposta em frequência (FRF) foi simulada para verificar o deslocamento da estrutura quando excitada. Para isso, um carregamento harmônico unitário do tipo $F(t) = F_0 \text{sen } \omega t$ com $F_0 = 1\text{N}$ foi aplicado na direção transversal (eixo y), na extremidade livre da viga, como mostra a Figura 23.

Figura 23: Carregamento harmônico aplicado na extremidade da estrutura



Fonte: Autoria própria (2021)

A análise dinâmica foi realizada com o carregamento descrito, com as condições de contorno aplicáveis para uma viga engastada/livre (em balanço) e considerando um intervalo entre 4,5 Hz e 7,5 Hz e 300 pontos na frequência. Assim, a resposta harmônica serve de referência para conferir o valor das frequências naturais de vibração para os modos transversais considerados. Em vista disso, a resposta vibratória da estrutura primária para o primeiro modo de vibração foi 6,13 Hz, com um deslocamento máximo de 118,61 mm, como mostra a Figura 24.



Já a análise transiente foi realizada para verificar a resposta da estrutura em termos de deslocamento na extremidade livre da viga ao longo do tempo. A partir de um carregamento unitário, representado por uma excitação harmônica, este foi aplicado de modo semelhante à força aplicada para a resposta harmônica, Figura 23.

Em face ao exposto, a análise foi desenvolvida em três etapas: inicialmente, considerou o tempo de 0,01 segundos quando a excitação harmônica foi aplicada. Para as etapas seguintes, consideraram-se os tempos de 0,11 e 5 segundos.

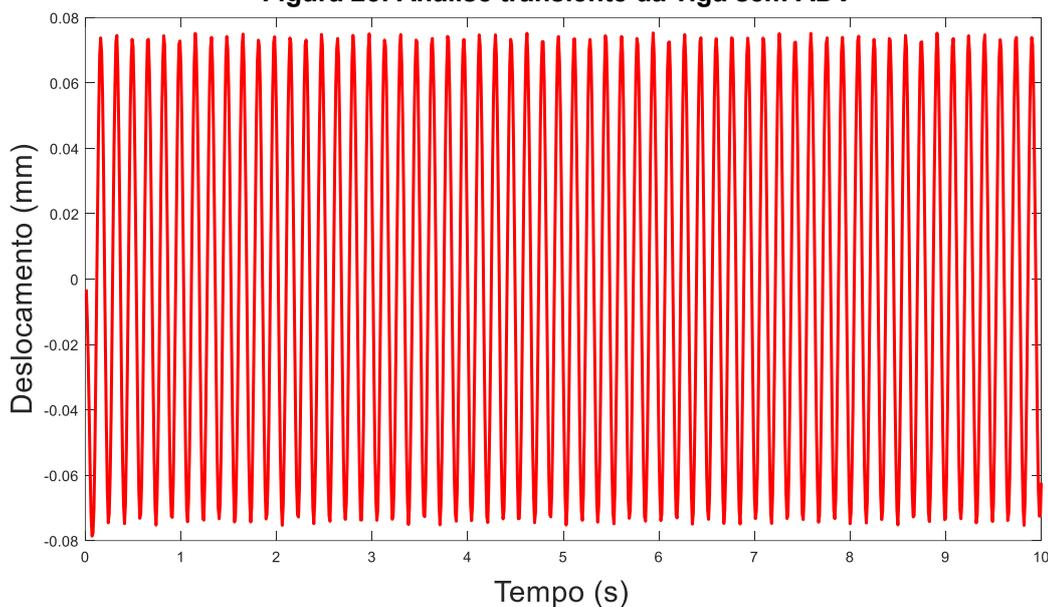
Segundo Morgan (2015), a etapa na qual o carregamento é aplicado requer um tempo menor. Desse modo, para uma maior precisão dos resultados, o intervalo de tempo deve ser determinado por:

$$\Delta t = \frac{1}{20} f_h \quad (4.4)$$

onde f_h : frequência do modo de vibração de maior interesse.

A frequência de interesse foi a primeira frequência natural, ou seja, 6,1315 Hz. Por meio da Eq. (4.4), o intervalo de tempo considerado na análise transiente foi de 0,008155s, na qual a amplitude de deslocamento máxima foi de 0,0752 mm, como mostra a Figura 25.

Figura 25: Análise transiente da viga sem ADV

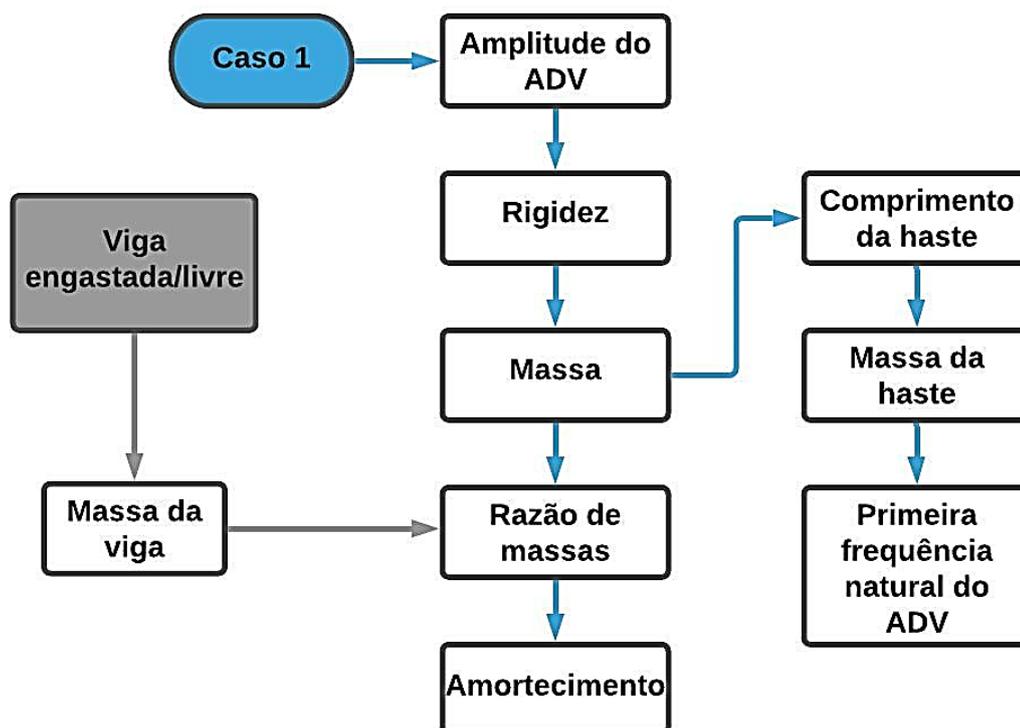


Fonte: Autoria própria (2021)

4.2 Dimensionamento do ADV – Caso 1

A Figura 26 ilustra esquematicamente as etapas da metodologia para o dimensionamento dos ADVs para o Caso 1.

Figura 26: Esquema do dimensionamento - Caso 1



Fonte: Autoria própria (2021)

O ADV considerado foi constituído por uma haste de alumínio com seção transversal uniforme e uma massa pontual em sua extremidade. As propriedades do material são apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3: Propriedades do ADV

Propriedades	Dimensões
Largura – b (m)	0,015
Espessura – e (m)	0,0012
Massa da haste	M_h^*
Massa concentrada	M_{adv}^*
Densidade – ρ (Kg/m ³)	2710
Coefficiente de Poisson - ν	0,33
Módulo de Elasticidade - E (GPa)	70

* Os valores da massa da haste (M_h) e massa concentrada (M_{adv}) foram calculados a partir da razão de massas (μ) para cada ADV.

Fonte: Autoria própria (2021)

Com vistas a analisar o comportamento da estrutura de modo a não alterar o valor da rigidez durante as simulações, os valores referentes à largura e espessura foram mantidos constantes. Para este caso, foi considerada a razão de frequências naturais (q) igual a 1. Ou seja, $q = \omega_{adv}/\omega_n$.

Assim, a modelagem inicial do ADV foi desenvolvida a partir da imposição da amplitude de deslocamento do ADV (X_{adv}) dada por (INMAN, 2018):

$$X_{adv} = \frac{F_0}{K_{adv}} \quad (4.5)$$

onde:

F_0 = Força inicial;

K_{adv} = Rigidez do ADV.

A amplitude de oscilação do ADV foi considerada de forma que o material utilizado suporte o deslocamento e permaneça na região linear, ou seja, satisfaça a hipótese de pequenos deslocamentos. Considerando $F_0 = 1N$, a rigidez do ADV é definida por:

$$K_{adv} = \frac{F_0}{X_{adv}} \quad (4.6)$$

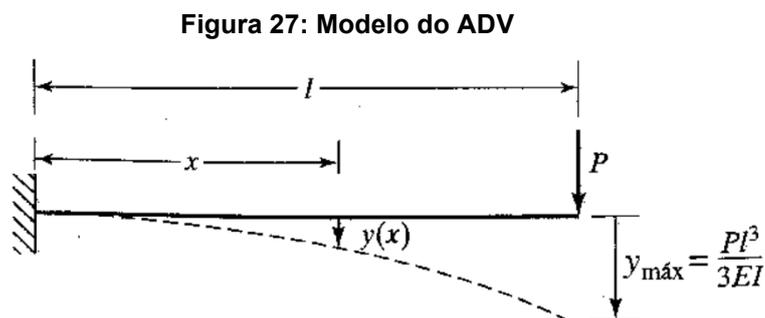
De acordo com Rao (2008), como apresentado na Seção 3.2, ao introduzir um ADV não amortecido em um sistema de 1 GDL, para que a amplitude de vibração seja nula, a primeira frequência do ADV deve ser idêntica à frequência natural da estrutura primária. A massa do ADV pode ser determinada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{adv}}{M_{adv}}} \quad (4.7)$$

Isolando M_{adv} a massa pontual é dada por:

$$M_{adv} = \frac{K_{adv}}{\omega_n^2} \quad (4.8)$$

A haste foi considerada como tendo massa desprezível com seção transversal uniforme e uma massa pontual. Já o ADV pode ser modelado como uma viga em balanço com uma carga concentrada P , aplicada na extremidade livre, como mostra a Figura 27 .



Fonte: Rao, 2008

Segundo Rao (2008), a deflexão transversal da viga δ , devido à uma carga P , é dada por:

$$\delta = \frac{PL_{adv}^3}{3EI} \quad (4.9)$$

A partir da relação entre a carga P e a deflexão transversal δ , a rigidez do ADV k_{adv} foi determinada por:

$$k_{adv} = \frac{3EI}{L_{adv}^3} \quad (4.10)$$

onde:

E = Módulo de elasticidade do material da haste;

I = Momento de inércia do ADV;

L_{adv} = Comprimento da haste.

Diante do valor da rigidez, determina-se o comprimento da haste do ADV, L_0 . Este foi determinado através da equação (RAO,2008):

$$L_0 = \sqrt[3]{\frac{3EI}{\omega_n^2 m}} \quad (4.11)$$

A modelagem proposta por Rao (2008) não considera a massa da haste, no entanto, para este trabalho, foi considerada a massa da viga(haste) para se obter maiores precisões. Por este motivo, o ADV foi modelado utilizando a Teoria de Euler-Bernoulli, como uma viga bidimensional apresentada na Seção 3.1.

A partir das dimensões da seção transversal da haste, bem como o valor de L_0 , a massa da haste é dada por:

$$M_h = b \cdot e \cdot L_0 \cdot \rho_{adv} \quad (4.12)$$

De acordo com Blevins (1979), a partir do valor da massa da haste, a primeira frequência natural da viga engastada em uma das extremidades e livre na outra com massa concentrada é dada por:

$$\omega_{1(adv)} = \sqrt{\frac{3EI}{\left(M_h \frac{33}{140} + M_{adv}\right) L_{adv}^3}} \quad (4.13)$$

onde:

$\omega_{1,adv}$ = Primeira frequência natural da viga engastada-livre;

M_h = Massa da haste;

M_{adv} = Massa concentrada na extremidade livre da viga;

L_{adv} = Comprimento total da haste do adv.

Isolando o comprimento L_{adv} na Eq. (4.13) chega-se à:

$$L_{adv} = \sqrt[3]{\frac{3EI}{\left(M_h \frac{33}{140} + M_{adv}\right) \omega_{1(adv)}^2}} \quad (4.14)$$

Com o comprimento da haste do ADV, a rigidez equivalente do ADV, $K_{eq(adv)}$ é dada por:

$$K_{eq(adv)} = \frac{3EI}{L_{adv}^3} \quad (4.15)$$

A partir da rigidez equivalente e da primeira frequência da estrutura primária ω_n , a massa equivalente do ADV é dada por:

$$M_{eq(adv)} = \frac{K_{eq(adv)}}{\omega_n^2} \quad (4.16)$$

A rigidez e a massa equivalente da estrutura primária se relacionam com as dimensões indicadas na Tabela 1 da Seção 5.1, por meio das relações:

$$K_{eq(viga)} = \frac{3EI}{L^3} \quad (4.17)$$

$$M_{eq(viga)} = \frac{K_{eq(viga)}}{\omega_n^2} \quad (4.18)$$

A partir dos valores das massas equivalentes, equações (4.16) e (4.18), para o ADV e para a viga, a relação de massas é dada por:

$$\mu = \frac{M_{eq(adv)}}{M_{eq(viga)}} \quad (4.19)$$

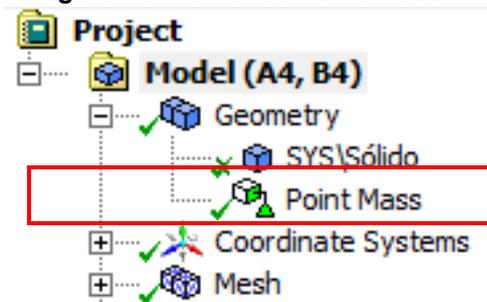
Ao se aplicar um ADV não amortecido na estrutura para eliminar o pico de resposta ressonante, naturalmente surge dois picos laterais ao anterior. No entanto, quando a excitação se aproximar destes valores, a estrutura ainda sofrerá grandes amplitudes de vibração. Estes dois picos laterais podem ser reduzidos através da adição de amortecimento no ADV.

Para analisar o amortecimento aplicado ao ADV, considerando a razão de massas, o amortecimento ótimo foi calculado pela Eq. (3.66) da Seção 3.2.2.

$$\zeta_{2 \text{ ótimo}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad (4.20)$$

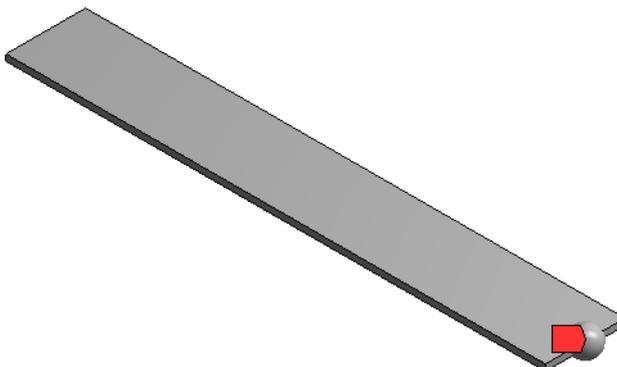
O ADV foi modelado como o elemento SOLID186. Já os elementos CONTA175 e TARGE170 foram utilizados para representar a massa pontual inserida em um nó na estrutura do ADV e os elementos CONTA174 e TARGE170 para o contato entre a haste e a massa. A massa concentrada na ponta da haste foi inserida utilizando o comando *Point Mass* do ANSYS®, Figura 28, em um nó da geometria da haste, conforme apresentado na Figura 29.

Figura 28: Comando *Point Mass*



Fonte: ANSYS® (2017)

Figura 29: Modelo do ADV com massa concentrada na ponta



Fonte: Autoria própria (2021)

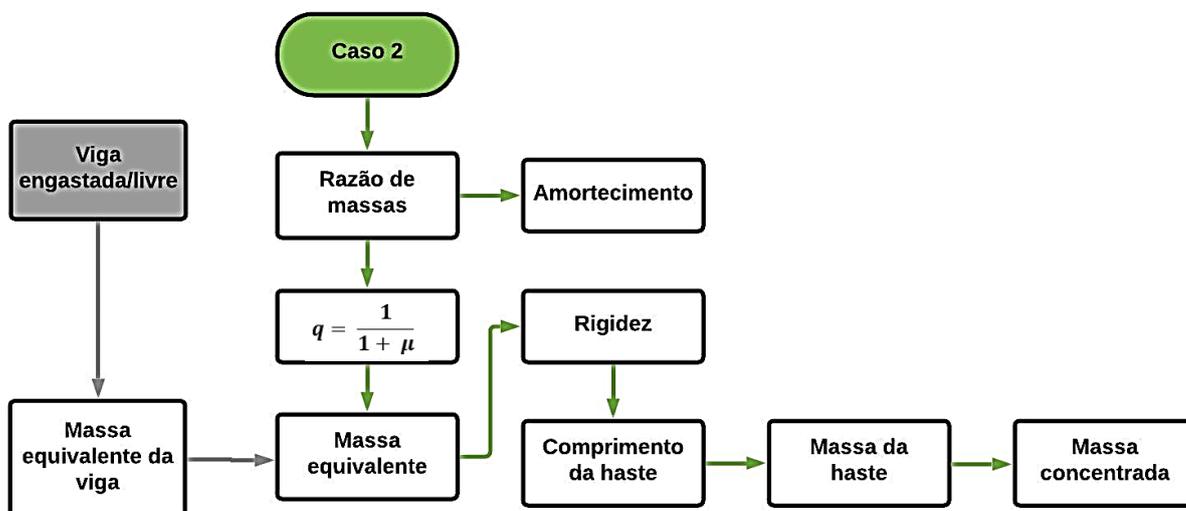
A partir da teoria de Fahy e Gardonio (2007), apresentado pela Eq. (4.1) e (4.2), para obter resultados mais precisos, foi realizado a razão de aspecto, a análise de convergência e o estudo do tamanho do elemento de malha.

Após definido o tamanho do elemento da malha, realizou-se a análise modal, na qual os seis primeiros modos de vibração e as frequências naturais foram obtidos.

4.3 Dimensionamento do ADV – Caso 2

A Figura 30 ilustra esquematicamente as etapas da metodologia para o dimensionamento dos ADVs para o Caso 2.

Figura 30: Esquema do dimensionamento do ADV - Caso 2



Fonte: Autoria própria (2021)

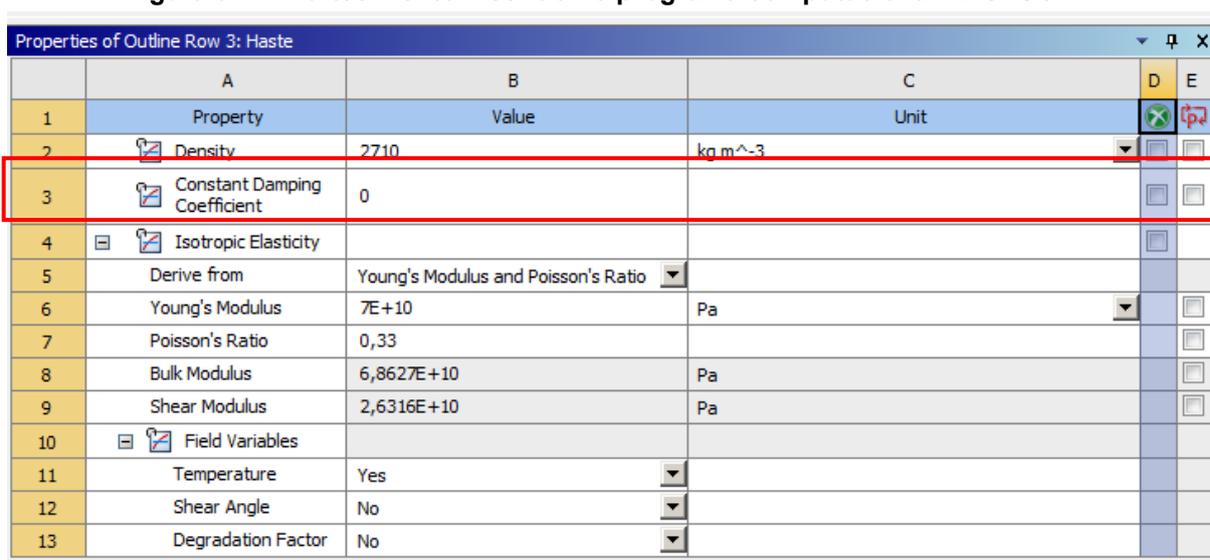
O objetivo de estudo do Caso 2 é o dimensionamento de ADV para outros valores de q , uma vez que, de acordo com Rao (2008, p. 330), o ADV é mais eficiente quando atende a Eq. (3.63), $q = \frac{1}{1+\mu}$.

Dessa forma, a partir do valor da razão de massas (μ), Eq. (3.45), a razão de frequências é determinada e o valor do amortecimento ótimo é calculado pela Eq.

$$(3.66), \zeta_{2 \text{ ótimo}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}}$$

Após determinado o valor do amortecimento ótimo para o ADV, ele foi adicionado no programa computacional ANSYS®. Na guia “Dados de Engenharia”, em que se pode adicionar ou especificar as propriedades do material, inseriu-se o amortecimento ótimo utilizando a propriedade *Constant Damping Coefficient*, como mostra a Figura 31.

Figura 31: Amortecimento inserido no programa computacional ANSYS®



	A	B	C	D	E
1	Property	Value	Unit		
2	Density	2710	kg m ⁻³		
3	Constant Damping Coefficient	0			
4	Isotropic Elasticity				
5	Derive from	Young's Modulus and Poisson's Ratio			
6	Young's Modulus	7E+10	Pa		
7	Poisson's Ratio	0,33			
8	Bulk Modulus	6,8627E+10	Pa		
9	Shear Modulus	2,6316E+10	Pa		
10	Field Variables				
11	Temperature	Yes			
12	Shear Angle	No			
13	Degradation Factor	No			

Fonte: Autoria própria (2021)

Com o valor da frequência natural da estrutura primária, ω_n , e sabendo que $q = \omega_{adv}/\omega_n$, Eq. (3.51) da Seção 4.3, é a razão de frequências naturais do sistema, a frequência do ADV é obtida ao se isolar ω_{adv} .

$$\omega_{adv} = q \cdot \omega_n \quad (4.21)$$

A massa equivalente do ADV é determinada a partir da razão de massas e da massa equivalente da viga, Eq. (4.16) e (4.18) da Seção 4.2. Com os valores da massa equivalente e da frequência do ADV, determina-se a rigidez equivalente.

$$M_{eq2(adv)} = \mu \cdot M_{eq(viga)} \quad (4.22)$$

$$k_{eq2(adv)} = \omega_{adv}^2 \cdot M_{eq2(adv)} \quad (4.23)$$

A partir das características físicas e geométricas do ADV e com o valor da rigidez equivalente, determina-se o comprimento da haste:

$$L_{adv(2)} = \sqrt[3]{\frac{3EI}{k_{eq2(adv)}}} \quad (4.24)$$

Com o comprimento, a massa da haste $M_{h(2)}$ é dada por:

$$M_{h(2)} = b \cdot e \cdot L_{adv(2)} \cdot \rho_{(adv)} \quad (4.25)$$

A massa concentrada é calculada como:

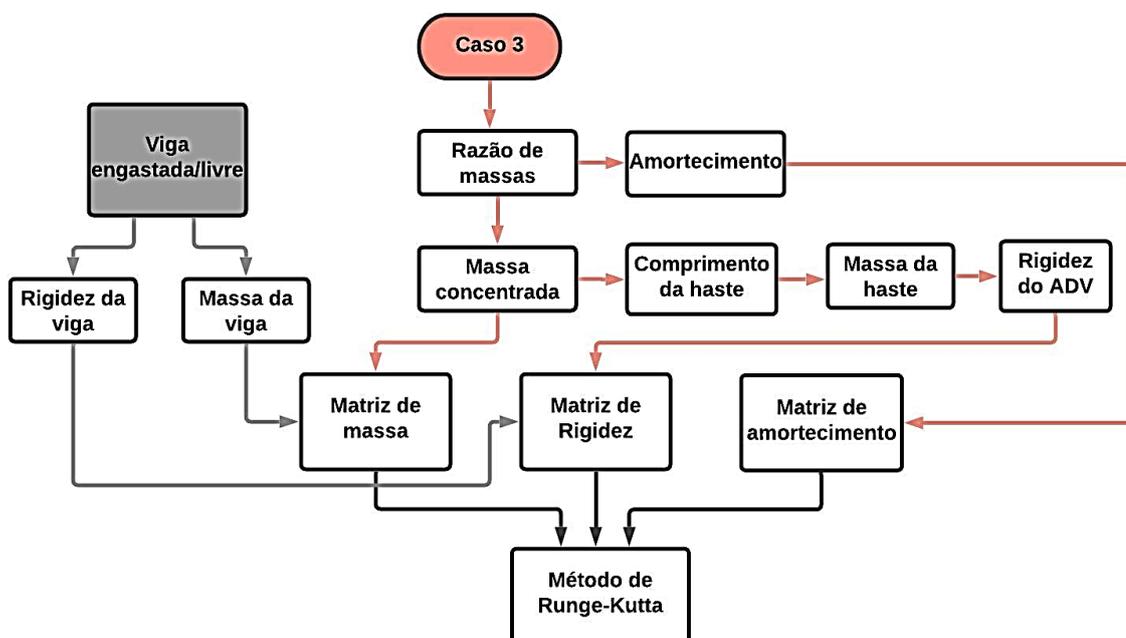
$$M_{adv(2)} = M_{eq2(adv)} - \frac{33}{140} \cdot M_{h(2)} \quad (4.26)$$

A partir dos valores de $L_{adv(2)}$ e $M_{adv(2)}$, o ADV é modelado conforme descrito na seção 4.2.

4.4 Dimensionamento do ADV – Caso 3

A Figura 32 apresenta esquematicamente as etapas da metodologia para o dimensionamento dos ADVs para o Caso 3.

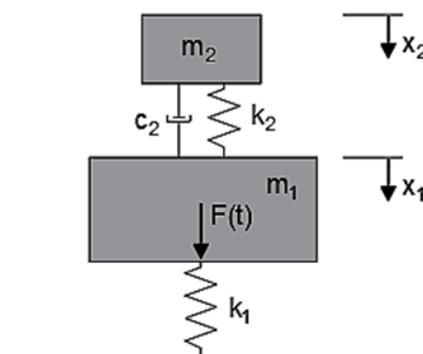
Figura 32: Esquema de dimensionamento do ADV - Caso 3



Fonte: Autoria própria (2021)

Considera-se um sistema em vibração livre, em que o ADV amortecido é acoplado a uma estrutura primária não amortecida, como mostra a Figura 33.

Figura 33: Modelo teórico da estrutura sem amortecimento com ADV amortecido



Fonte: Adaptado de Rao (2008)

Diante disso, os valores utilizados para o desenvolvimento teórico são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4: Valores para análise teórica – Caso 3

Propriedades	Valor
ω_{adv} (rad/s)	38,5257
m_1 (Kg)	11,37
k_1 (N/m)	$1,687 \cdot 10^4$
m_2 (Kg)	*
k_2 (N/m)	*
c_2	*

* Os valores referentes a massa (m_2), rigidez (k_2) e a constante de amortecimento (c_2) foram calculados de acordo com a razão de massas (μ).

Fonte: A autoria própria (2021)

4.4.1 Método de Runge-Kutta

As equações do movimento na forma matricial escrevem-se:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.27)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

A constante de amortecimento crítico, C_c e a constante de amortecimento c_2 do sistema são dadas por:

$$C_c = 2 \cdot M_{eq(adv)} \omega_{adv} \quad (4.29)$$

$$c_2 = \zeta \cdot C_c$$

E sendo

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \{f(t)\} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

A partir dos valores da matriz de massa, amortecimento e rigidez, aplicou-se o Método de Runge-Kutta de quarta ordem. Isto é, um método utilizado na solução numérica de problemas com equações diferenciais ordinárias.

De acordo com Rao (2008), no método de Runge-Kutta, as equações matriciais de movimento, Eq. (4.28), são usadas para expressar o vetor de aceleração como:

$$\ddot{\vec{x}}(t) = [M]^{-1}(\vec{F}(t) - [C]\dot{\vec{x}}(t) - [K]\vec{x}(t)) = \{f(t)\} \quad (4.31)$$

Considerando os deslocamentos, bem como as velocidades como incógnitas, o vetor $\vec{X}(t)$ é definido como:

$$\vec{X}(t) = \begin{Bmatrix} \vec{x}(t) \\ \dot{\vec{x}}(t) \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

de modo que,

$$\dot{\vec{X}} = \begin{Bmatrix} \dot{\vec{x}} \\ \ddot{\vec{x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\vec{x}} \\ \ddot{\vec{x}}(t) = [M]^{-1}(\vec{F} - [C]\dot{\vec{x}} - [K]\vec{x}) \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Organizando a Eq. (4.33), obtém-se:

$$\dot{\vec{X}}(t) = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[k] & -[M]^{-1}[c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}(t) \\ \dot{\vec{x}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ [M]^{-1}\vec{F}(t) \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

ou seja,

$$\dot{\vec{X}}(t) = \vec{f}(\vec{X}, t) \quad (4.35)$$

Onde:

$$\vec{f}(\vec{X}, t) = [A]\dot{\vec{X}}(t) + \vec{F}'(t) \quad (4.36)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[m]^{-1}[k] & [m]^{-1}[c] \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\vec{F}'(t) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ [M]^{-1}\vec{F}(t) \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Com isso, a fórmula de recorrência para avaliar $\vec{X}(t)$ em diferentes pontos de t_i (RAO, 2008), de acordo com o método de quarta ordem torna-se:

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \frac{1}{6} [\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4] \quad (4.39)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \vec{K}_1 &= h\vec{f}(\vec{X}_i, t_i) \\ \vec{K}_2 &= h\vec{f}\left(\vec{X}_i + \frac{1}{2}\vec{K}_1, t_i + \frac{1}{2}h\right) \\ \vec{K}_3 &= h\vec{f}\left(\vec{X}_i + \frac{1}{2}\vec{K}_2, t_i + \frac{1}{2}h\right) \\ \vec{K}_4 &= h\vec{f}(\vec{X}_i + \vec{K}_3, t_{i+1}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

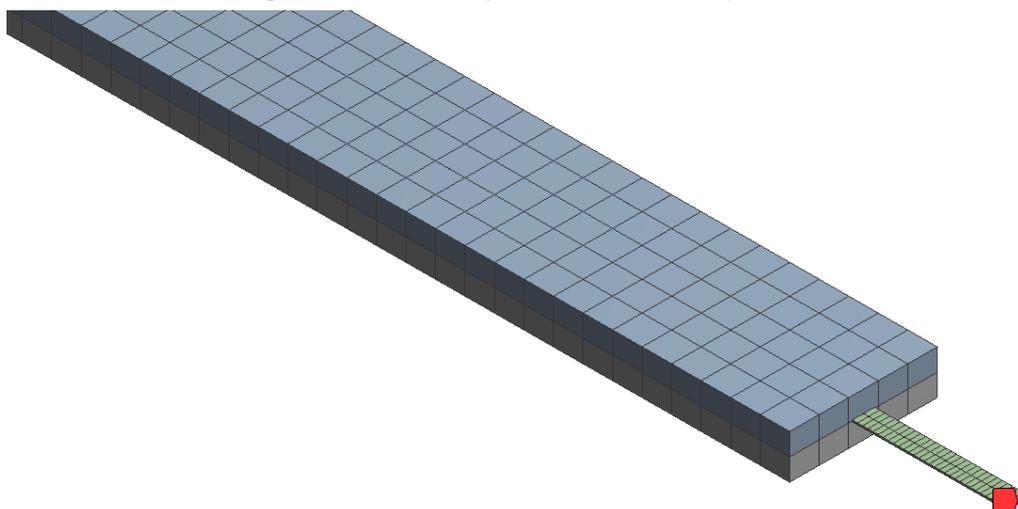
A equação do erro é dada por:

$$E_n = \vec{X}(y_n) - \vec{X}_n \quad (4.41)$$

A partir da aplicação do método, a resposta no domínio do tempo e a FRF foi calculada para uma força impulsiva aplicada na estrutura primária e no ADV.

4.5 Acoplamento do ADV na estrutura primária

Após a modelagem e análise dinâmica da estrutura primária, bem como o dimensionamento do ADV, este foi inserido na extremidade livre da viga, próximo à linha neutra da estrutura primária, por meio do contato entre a face correspondente livre da viga e a face da haste do ADV, como mostra a Figura 34.

Figura 34: ADV acoplado na estrutura primária

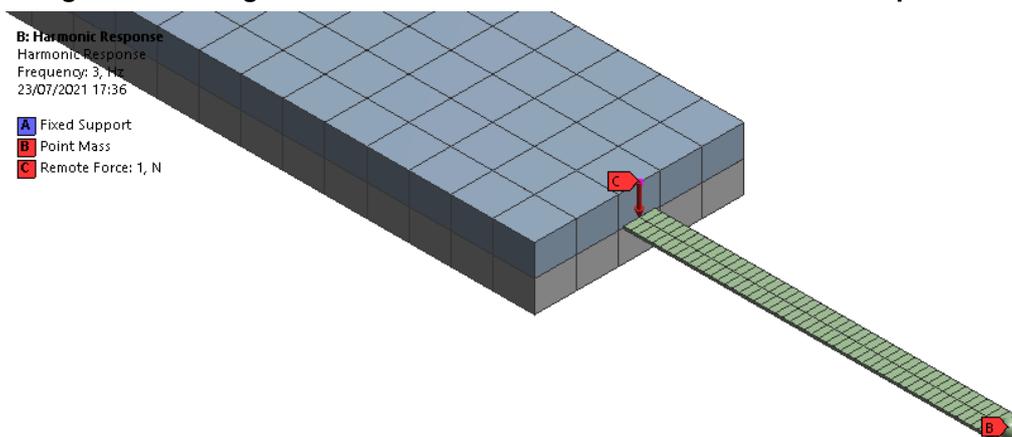
Fonte: Autoria própria (2021)

A condição de contorno aplicada à estrutura primária é o engaste aplicado a superfície de menor seção transversal da viga e o ponto de acoplamento do ADV na viga. A conexão foi realizada na extremidade livre da viga próximo à linha neutra da estrutura primária por meio do contato entre a face correspondente à extremidade livre da viga e a face haste do ADV, utilizando os elementos CONTA174 e TARGE170. Do mesmo modo, os elementos CONTA175 e TARGE170 foram utilizados para análise harmônica e transiente para representar o contato do carregamento harmônico e impulsivo em um nó na estrutura da viga.

Com o acoplamento, são criadas conexões entre a superfície da viga e do ADV. O contato utilizado foi do tipo *Bonded*, que considera que as superfícies em contato estão coladas uma na outra. Essa configuração se aplica a todas as regiões de contato como superfícies, sólidos, linhas, faces e arestas (ANSYS®, 2017). No entanto, apenas esta conexão não foi suficiente para obter a precisão dos resultados, principalmente em relação à função resposta em frequência.

Para a viga com o ADV acoplado, realizou-se a análise modal, em que foram verificados os modos de vibração e as frequências naturais, a fim de fazer um comparativo antes e depois do acoplamento do ADV na estrutura. Para verificar o deslocamento da estrutura quando excitada, foi feita a análise harmônica para simular a FRF do sistema com uma força unitária aplicada na extremidade da viga utilizando as mesmas condições do sistema sem ADV próximo à região do acoplamento, como mostra a Figura 35.

Figura 35: Carregamento unitário na extremidade livre da estrutura primária



Fonte: Autoria própria (2021)

Como na estrutura sem o ADV foi realizada a análise transiente para verificar a resposta da estrutura ao longo do tempo, de modo semelhante a força aplicada para a resposta harmônica, uma excitação harmônica foi aplicada na extremidade livre da viga, conforme apresentado na Figura 35.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados das simulações encontrados teórica e numericamente, realizadas para a estrutura da viga antes e após o acoplamento, bem como para o dimensionamento dos ADVs.

5.1 Estrutura primária

Segundo proposto na metodologia, ao simular a estrutura para que a análise dinâmica apresente precisão nos resultados, foi realizada uma análise de convergência de malha do modelo. A partir das Eqs. (4.1) e (4.2), considerando a primeira frequência natural com valor de 6,1315 Hz e 12 elementos por comprimento de onda, obteve-se um comprimento de onda (λ) igual a 313,64 mm.

Para não haver modificações nos valores das frequências em cada simulação, optou-se por não alterar o valor dos elementos correspondentes à espessura da viga, que ficou igual a 15 mm. Frente ao valor próximo ao tamanho de comprimento de onda calculado, foi realizada a análise de convergência de malha, alterando-se o tamanho do elemento, como mostra a Tabela 5, em que é possível observar que os valores de frequência natural convergem quando os tamanhos de elementos se tornam menores que 80mm.

Tabela 5: Análise de convergência de malha da estrutura primária

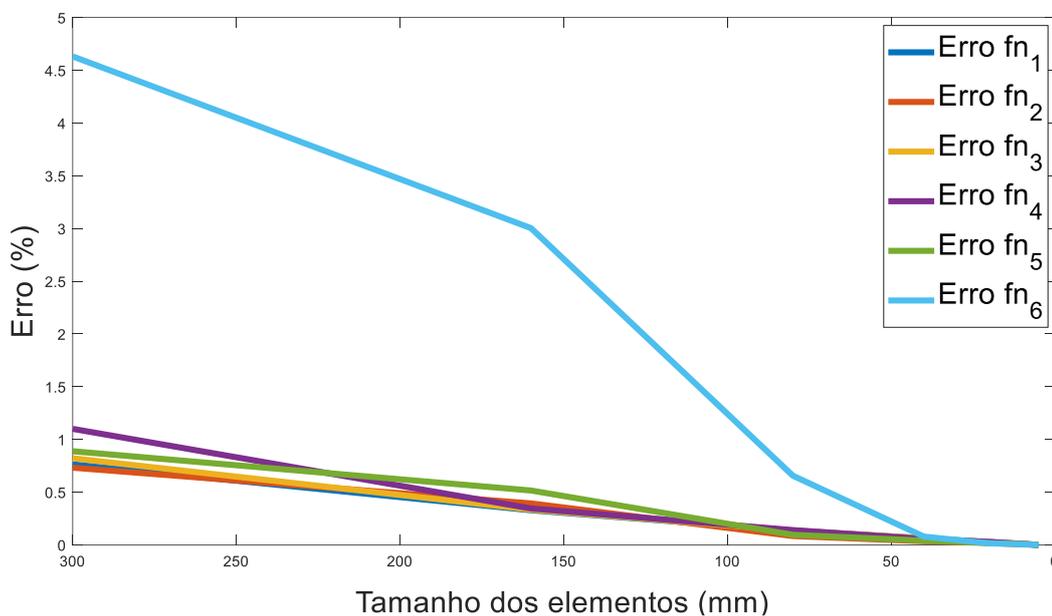
Tamanho do elemento (mm)	Frequências naturais (Hz)					
	f_{n1}	f_{n2}	f_{n3}	f_{n4}	f_{n5}	f_{n6}
300	6,1767	20,517	38,690	108,470	127,310	213,950
160	6,1500	20,448	38,503	107,660	126,840	210,620
80	6,1318	20,385	38,427	107,440	126,310	205,820
40	6,1337	20,375	38,399	107,350	126,240	204,640
20	6,1315	20,372	38,385	107,320	126,210	204,510
10	6,1304	20,369	38,379	107,300	126,200	204,490
5	6,1299	20,368	38,375	107,290	126,190	204,480

Fonte: Autoria própria (2021)

A Figura 36 apresenta os erros associados em relação à diferença dos valores das seis primeiras frequências naturais. Diante disso, o erro associado à sexta

frequência natural para o tamanho dos elementos de 80 mm foi de aproximadamente 0,65%.

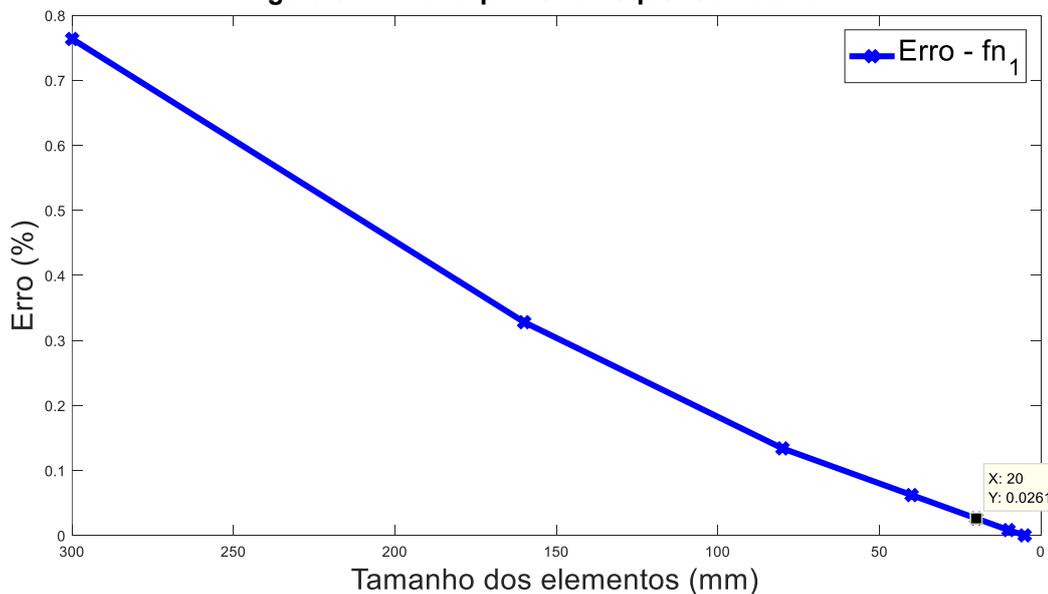
Figura 36: Erro associado as frequências naturais da viga



Fonte: Autoria própria (2021)

Na Figura 37 é apresentado o erro referente à primeira frequência. Observe-se que para tamanhos menores que 40 mm o erro se torna menor que 0,1%. Para os elementos de tamanho 20 mm, o erro da primeira frequência é de aproximadamente 0,03%.

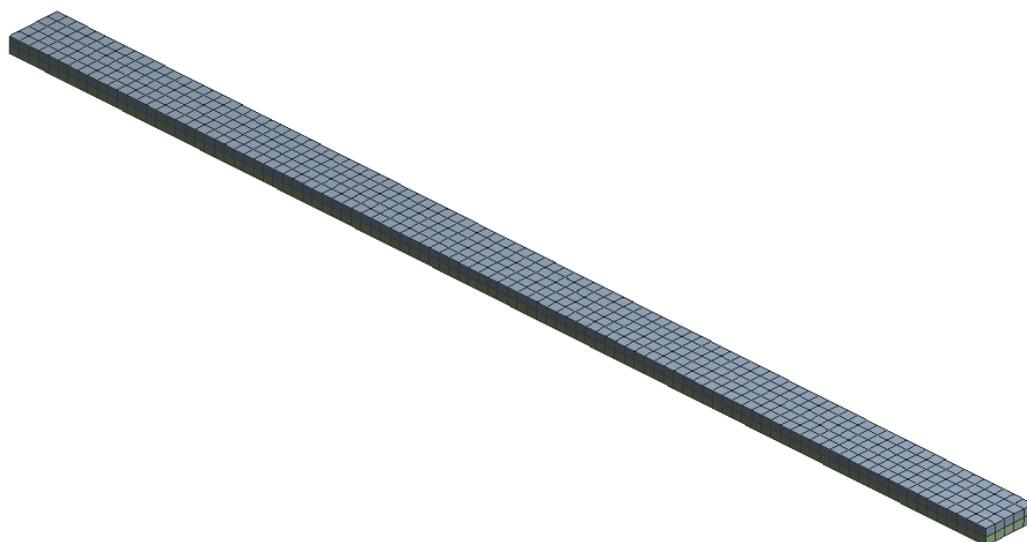
Figura 37: Erro da primeira frequência natural



Fonte: Autoria própria (2021)

Para verificar a qualidade da malha, a razão de aspecto, Eq. (4.3), foi calculada a partir dos valores da análise de convergência. Ao considerar o elemento com tamanho 20 mm de comprimento, 20 mm de largura e 15 mm de espessura, a razão de aspecto calculada a partir dos valores da seção transversal foi de 1,334. Por este motivo que essa configuração de malha, com 1000 elementos e 6345 nós, foi a utilizada para as simulações deste estudo, como pode ser visto na Figura 38.

Figura 38: Geometria da malha da viga



Fonte: Autoria própria (2021)

5.2 Absorvedor dinâmico de vibração

Semelhante à estrutura primária, foi realizado o estudo do tamanho do elemento de malha para obter resultados precisos da estrutura com ADV. A partir das Eqs. (4.1) e (4.2) e considerando 12 elementos por comprimento de onda, obteve-se um comprimento de onda (λ) igual a 39,18 mm.

A fim de facilitar a junção dos nós ao ser acoplado a estrutura primária, bem como não modificar os valores das frequências em cada simulação, optou-se por não alterar os valores dos elementos correspondentes à largura e espessura da haste. Para a largura foram definidos elementos de 7,5 mm e espessura 1,2 mm.

A partir de um valor próximo ao tamanho de comprimento de onda calculado e considerando a haste com 101,6 mm, foi realizada a análise de convergência de malha alterando-se o tamanho do elemento. Os resultados são apresentados na Tabela 6.

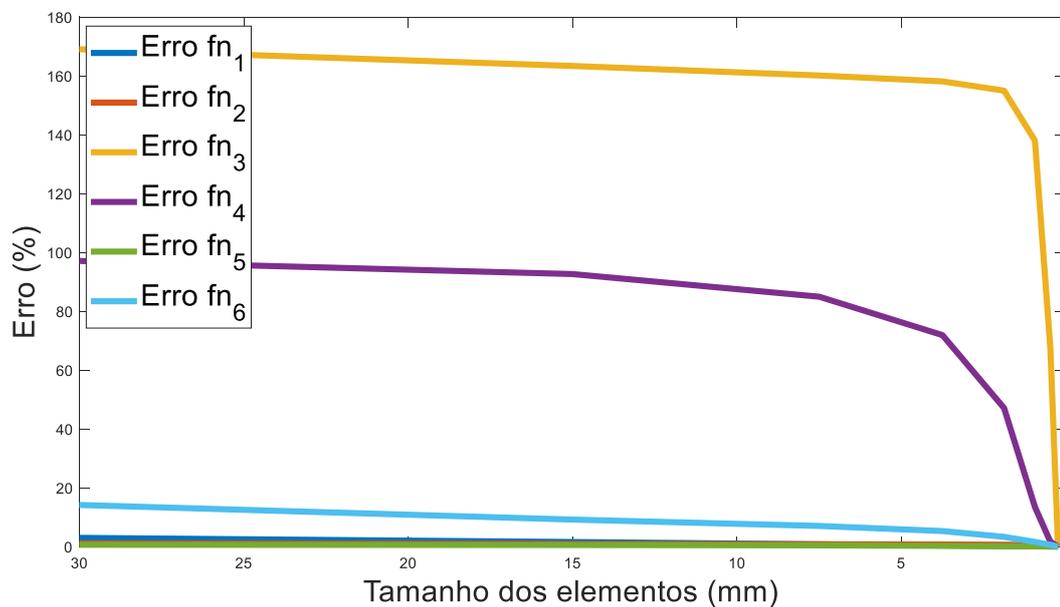
Tabela 6: Análise de convergência do ADV

Comprimento do elemento (mm)	Número de elementos	Frequências (Hz)					
		f_{n1}	f_{n2}	f_{n3}	f_{n4}	f_{n5}	f_{n6}
30	8	6,3591	75,963	420,91	834,27	1262,2	1547,0
15	14	6,2722	75,858	412,01	815,36	1261,4	1479,6
7,5	28	6,2236	75,769	406,95	782,81	1259,8	1450,3
3,75	56	6,2001	75,708	403,82	727,58	1257,6	1426,8
1,875	110	6,1885	75,651	398,89	622,60	1256,1	1400,1
0,9375	218	6,1824	75,574	372,31	480,32	1255,3	1376,6
0,46875	434	6,1790	75,440	262,21	430,31	1254,9	1363,4
0,23438	868	6,1767	75,185	156,45	423,31	1254,7	1355,3

Fonte: Autoria própria (2021)

Na Figura 39 são apresentados os erros associados em relação à diferença dos valores das seis primeiras frequências naturais. Observa-se que, para a terceira e quarta frequência, quanto maior o tamanho do elemento maior é o erro associado.

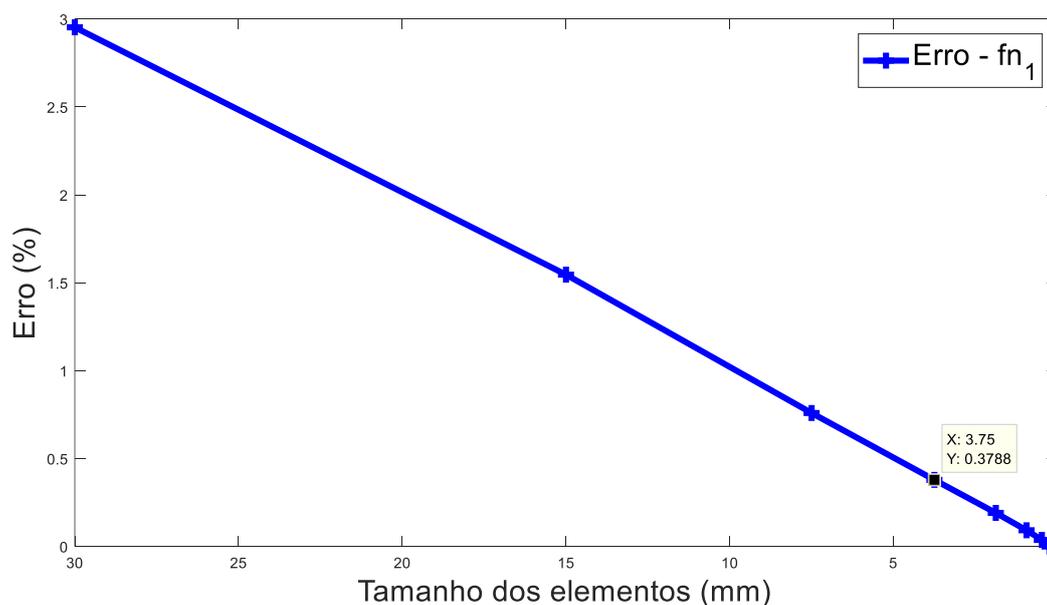
Figura 39: Erro associado as frequências naturais do ADV



Fonte: Autoria própria (2021)

A Figura 40 apresenta o gráfico com a análise de convergência para a primeira frequência natural. Nelas, verifica-se que, para o elemento com 3,75 mm, o erro foi de aproximadamente 0,38%, por isso essa configuração foi utilizada para as simulações deste estudo.

Figura 40: Erro da primeira frequência natural do ADV



Fonte: Autoria própria (2021)

A razão de aspecto foi realizada mediante os valores da análise de convergência, isto é, cada elemento da malha com o tamanho de 3,75mm de comprimento, 7,5mm de largura e 1,2mm de espessura. Assim, o valor obtido a partir dos valores da maior e menor aresta foi de 6,25. Considerando que a razão de aspecto deve ser próxima de 1,0, realizaram-se alguns testes relacionados à análise modal, alterando-se o comprimento dos elementos da malha para verificar a influência da razão de aspecto nos modos de vibração e frequências naturais, como mostra a Tabela 7.

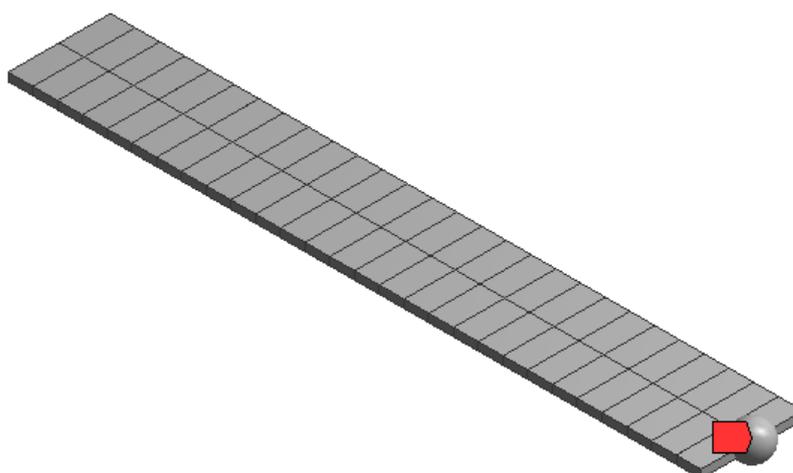
Tabela 7: Análise da razão de aspecto

Tamanho de elemento (c x l x e) (mm)	Frequências (Hz)					
	f_{n1}	f_{n2}	f_{n3}	f_{n4}	f_{n5}	f_{n6}
1 x 1 x 1	6,1825	75,453	396,95	623,21	1233,8	1410,0
1,2 x 1,2 x 1,2	6,1829	75,477	398,13	640,63	1232,6	1413,9
3,75 x 3,75 x 1,2	6,1884	75,628	402,82	736,04	1240,5	1428,8
7,5 x 3,75 x 1,2	6,1857	75,670	400,87	672,2	1254,8	1408,7
11,25 x 3,75 x 1,2	6,1946	75,741	403,71	744,42	1255,6	1430,1

Fonte: Autoria própria (2021)

A partir dos resultados, observa-se que a maior diferença entre os valores da primeira frequência natural foi de 0,0121 Hz. Dessa forma, a malha foi construída com 56 elementos e 545 nós, como mostra a Figura 41.

Figura 41: Geometria da malha do ADV



Fonte: Autoria própria (2021)

5.3 Dimensionamento do ADV – Caso 1

Para análise da influência dos parâmetros de dimensionamento do ADV no comportamento do sistema e para a razão de frequências (q) igual a 1, Eq. (3.51), seis ADVs foram dimensionados para razões de massa variando de 0,005 a 0,5, conforme apresentado na Seção 4.2. A Tabela 8 apresenta os valores de razão de massa (μ) e amortecimento ótimo (ζ) para o cada ADV dimensionado.

Tabela 8: Parâmetros de dimensionamento dos ADVs

Parâmetros	ADV 1	ADV 2	ADV 3	ADV 4	ADV 5	ADV 6
μ	0,005	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5
ζ	0,043	0,0934	0,1273	0,1679	0,2191	0,2357
M_{adv} (kg)	0,0556	0,2904	0,5833	1,1748	2,9767	5,9767
L_{adv} (mm)	174,3	101,6	80,6	63,8	46,8	37,1

Fonte: Autoria própria (2021)

A partir dos valores de dimensionamento apresentados na Tabela 8, os ADVs foram calculados teórica e numericamente por meio do programa ANSYS®. Os

valores referentes à primeira frequência natural teórica e numérica são apresentados na Tabela 9.

Tabela 9: Frequência natural dos ADVs

	μ	ζ	f_n (Hz) Calculada	f_n (Hz) ANSYS®	Diferença	Erro (%)
ADV 1	0,005	0,043	6,1315	6,1782	0,0467	0,76
ADV 2	0,025	0,0934	6,1315	6,2001	0,0686	1,12
ADV 3	0,05	0,1273	6,1315	6,2156	0,0841	1,37
ADV 4	0,1	0,1679	6,1315	6,2344	0,1029	1,68
ADV 5	0,25	0,2191	6,1315	6,2735	0,1423	2,26
ADV 6	0,5	0,2357	6,1315	6,2849	0,1534	2,50

Fonte: Autoria própria (2021)

Em relação aos valores de diferença obtidos das frequências calculadas e a modelada no ANSYS®, observa-se que quanto maior a razão de massas, maior é o erro. Como a razão de frequências é igual a 1, todas as frequências calculadas têm o mesmo valor. Logo, em relação às frequências obtidas numericamente, percebe-se que quanto maior a razão de massas, maior a frequência natural.

5.3.1 Estrutura primária com ADV acoplado

Partindo do dimensionamento dos ADVs apresentados na Tabela 8, eles foram inseridos na estrutura primária. Assim, foi realizada a análise modal da viga com o ADV acoplado. Diante disso, os valores das frequências naturais dos seis primeiros modos de vibração da estrutura após o acoplamento para cada ADV dimensionado são apresentados na Tabela 10.

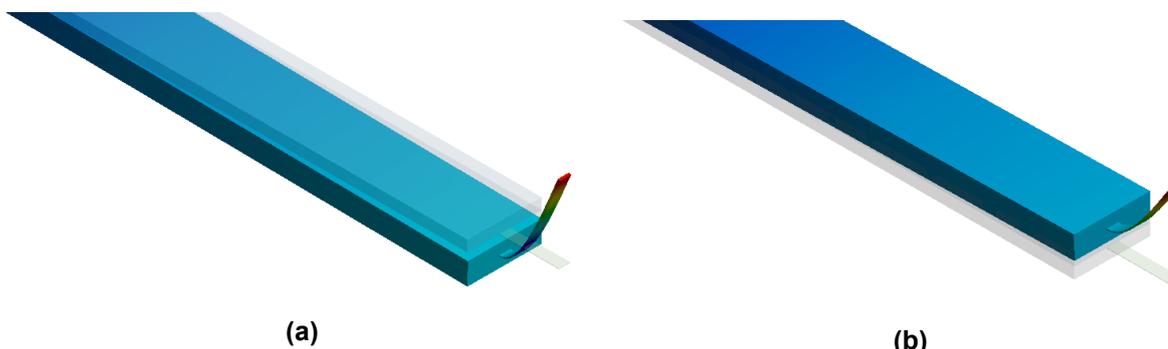
Tabela 10: Resultados das frequências dos ADVs do Caso 1

Frequência (Hz)						
Modo de vibrar	ADV 1	ADV 2	ADV 3	ADV 4	ADV 5	ADV 6
1	5,9042	5,6510	5,4683	5,2211	4,7584	4,2944
2	6,3974	6,6933	6,9227	7,2637	7,9694	8,7971
3	20,299	20,065	19,789	19,273	17,941	16,248
4	38,382	38,401	38,418	38,45	38,543	38,69
5	76,321	75,722	75,377	75,111	74,946	75,273
6	107,28	107,31	107,32	107,33	107,37	107,4

Fonte: Autoria própria (2021)

Na Figura 43(a) e Figura 43 (b) são apresentados os dois primeiros modos de vibração do Caso 1 com o ADV 3 em que é possível observar a influência do dispositivo.

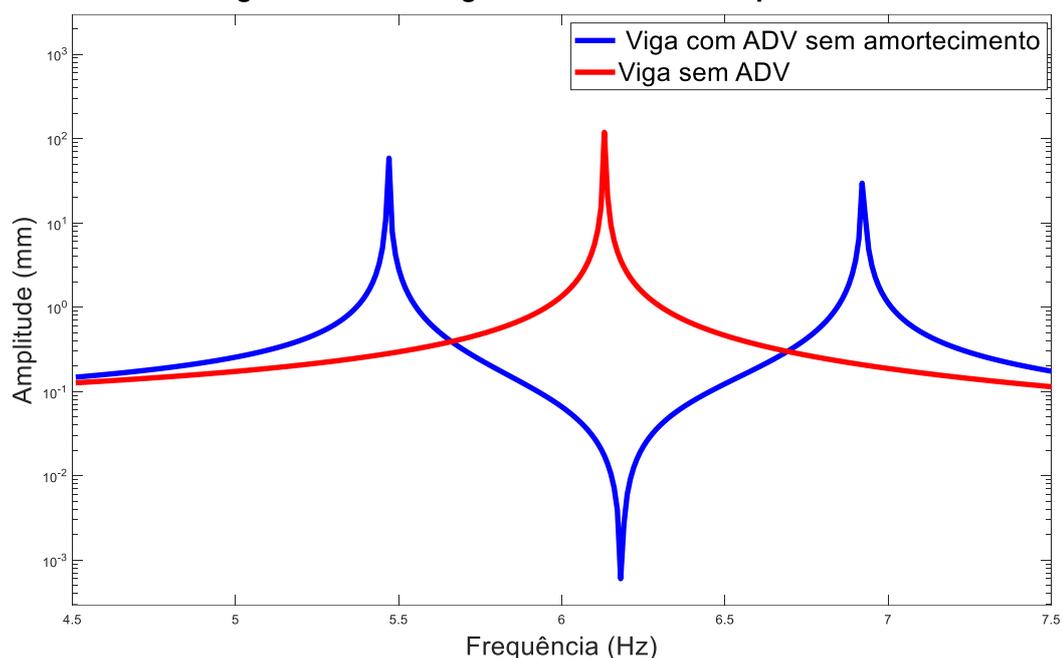
Figura 43: Vibração da viga com ADV acoplado: (a) Primeiro modo; (b) Segundo modo



Fonte: Autoria própria (2021)

A resposta harmônica da viga sem o ADV foi 6,13 Hz e a amplitude 118,6 mm. Após a inserção dos ADVs, essa frequência foi dividida em duas, a primeira com amplitude de 58,52 mm e frequência 5,47 Hz e a segunda com 29,57 mm e frequência 6,92 Hz. Dessa forma, mostra-se que o ADV funcionou para dividir o pico de resposta da primeira frequência natural em outras duas com amplitudes menores, conforme pode ser observado na Figura 44.

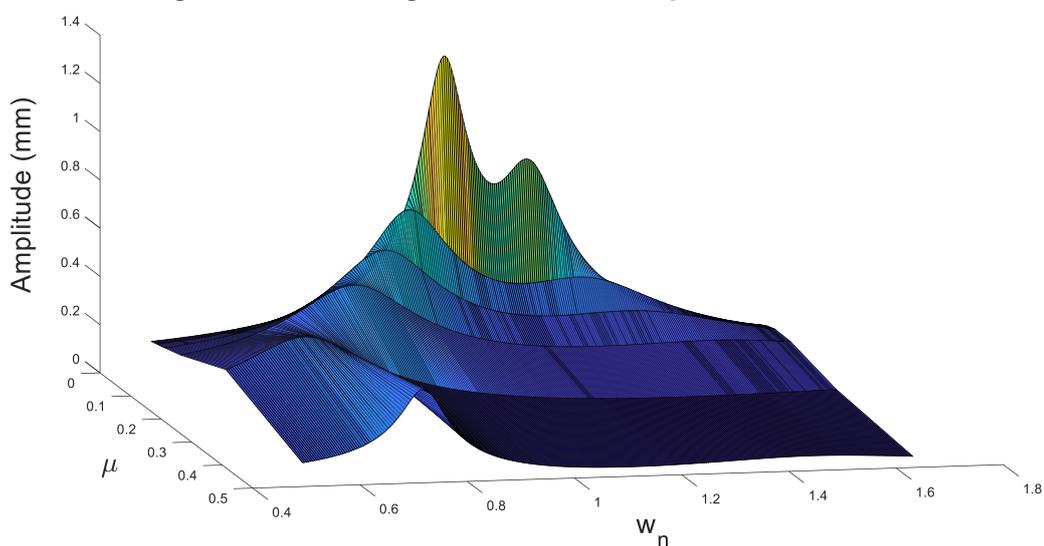
Figura 44: FRF da viga com e sem ADV acoplado



Fonte: Autoria própria (2021)

A Figura 45 apresenta a FRF da estrutura após o acoplamento dos ADVs. Nela, observa-se que quanto maior a razão de massas, menor é a amplitude.

Figura 45: FRF da viga com os ADVs acoplados - Caso 1

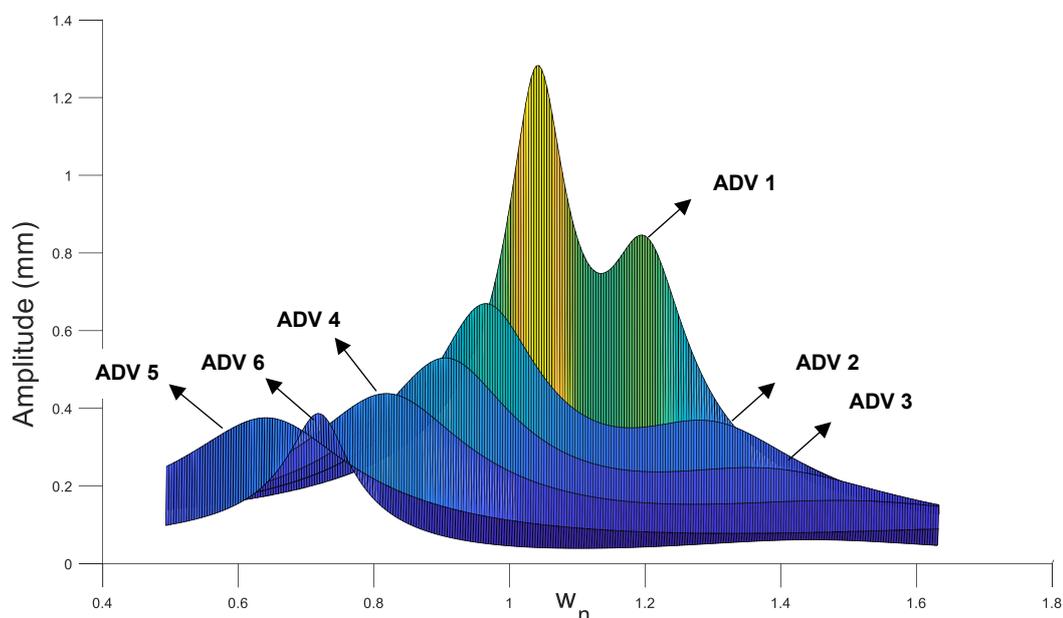


Fonte: Autoria própria (2021)

Em relação à Figura 45 e à Figura 46, observa-se que a amplitude do primeiro pico é maior que a do segundo para todos os ADVs. À medida que a razão de massas aumenta, a amplitude do primeiro pico diminui de maneira constante, até a razão de massas igual a 0,25 (ADV 5). Para a razão de massas igual a 0,5 (ADV 6), a amplitude

do primeiro pico aumentou. Em relação ao segundo pico, verifica-se que o ele também diminui à medida que a razão de massas aumenta. No entanto, a partir das razões de massa de 0,25 e 0,5, o pico é praticamente eliminado.

Figura 46: FRF dos ADVs acoplados na estrutura primária - Caso 1



Fonte: Autoria própria (2021)

Na Figura 45 e Figura 46 é possível observar que os ADVs dimensionados reduziram significativamente a amplitude de vibração. Contudo, para nenhuma configuração de ADVs os resultados mostraram-se próximos do esperado para um ADV otimamente sintonizado, ou seja, com os dois picos com amplitudes aproximadamente iguais. Fato que se justifica pela forma como os ADVs foram dimensionados na Seção 4.2.

A comparar as informações da Figura 46 com os valores apresentados na Tabela 9, percebe-se que quanto maior o erro, maior a distância dos picos na curva de resposta em relação à frequência alvo. À medida que a razão de massas aumenta, o erro também aumenta. Nota-se que o erro entre os valores das frequências calculadas e modeladas interfere significativamente no resultado, assim como o aumento da razão de massas e amortecimento ótimo.

A Tabela 11 apresenta os valores de deslocamento máximo da estrutura antes e após o acoplamento dos ADVs. Nela, observa-se que até a razão de massas igual a 0,25, o deslocamento máximo diminui à medida que a razão de massas aumenta

para os ADVs acoplados com amortecimento. Logo, em relação à razão de massas igual a 0,5, a amplitude aumenta.

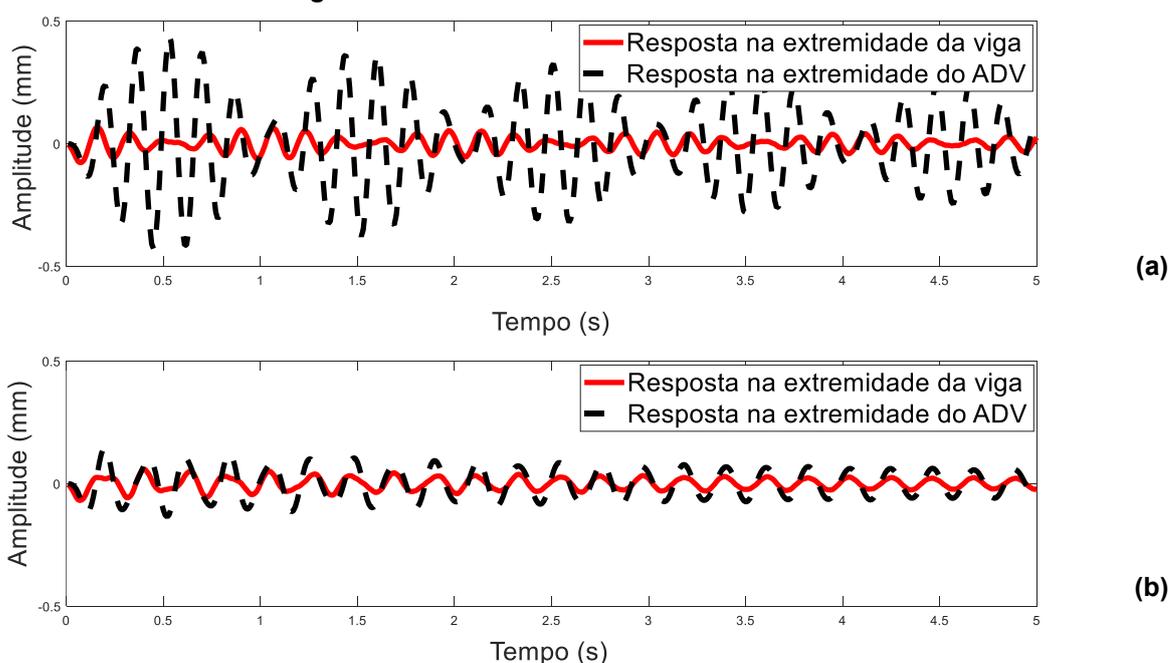
Tabela 11: Amplitude de deslocamento da estrutura do Caso 1

	Sem ADV	ADV não amortecido	ADV's amortecidos					
			ADV 1	ADV 2	ADV 3	ADV 4	ADV 5	ADV 6
μ	-	0,05	0,005	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5
Frequência (Hz)	6,13	6,13	5,95	5,74	5,59	5,34	4,89	4,41
Amplitude (mm)	118,6	0,07	1,26	0,66	0,52	0,43	0,37	0,39

Fonte: Autoria própria (2021)

A análise transiente para o Caso 1 foi realizada para o ADV 2 e ADV 5. A amplitude de deslocamento para $\mu = 0,025$, (a), Figura 47(a) foi de 0,07 mm na extremidade livre da viga e na extremidade do ADV foi de 0,44 mm. Para $\mu = 0,25$, Figura 47 (b), a amplitude máxima na extremidade da viga foi de 0,06 mm e na ponta do ADV 0,15 mm.

Figura 47: Análise transiente - ADV 2 e ADV 5



Fonte: Autoria própria (2021)

Como apresentado na Figura 47, as respostas na extremidade da viga estão próximas para ambos os ADVs. Já em relação à resposta do ADV, observa-se que a amplitude é maior que a da viga.

Em relação ao ADV 2, observa-se que ele apresentou um resultado satisfatório no controle de vibrações quando a frequência de excitação é igual ou próxima a frequência natural do modo de vibração para o qual foi dimensionado.

5.4 Dimensionamento do ADV – Caso 2

Para a razão de frequências (q) diferente de 1, seis ADVs foram dimensionados, conforme apresentado na Seção 4.3. A Tabela 12 apresenta os valores de razão de massa e amortecimento ótimo para os ADVs.

Tabela 12: Parâmetros de dimensionamento dos ADVs

Parâmetros	ADV 1	ADV 2	ADV 3	ADV 4	ADV 5	ADV 6
μ	0,005	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5
ζ	0,043	0,0934	0,1273	0,1679	0,2191	0,2357
M_{adv} (kg)	0,0548	0,2830	0,5675	1,1362	2,8418	5,6843
L_{adv} (mm)	175,8	104,1	84,0	68,8	55,2	49,5

Fonte: Autoria própria (2021)

Com base no dimensionamento dos ADVs, foram calculados teórica e numericamente fazendo uso do programa computacional ANSYS®. Os valores referentes à primeira frequência natural do ADV, bem como a diferença entre a frequência teórica e numérica são apresentadas na Tabela 13, na qual se pode observar que quanto maior a razão de massas, menor é o valor da razão de frequências (q) e menor a frequência natural. Do mesmo modo, verifica-se que à medida que a razão de massas aumenta, maior é o erro.

Tabela 13: Frequência dos ADVs do Caso 2

	μ	ζ	q	f_n (Hz) Calculada	f_n (Hz) ANSYS®	Diferença	Erro (%)
ADV 1	0,005	0,043	0,9950	6,1010	6,1343	0,0333	0,55
ADV 2	0,025	0,0934	0,9756	5,9820	6,0401	0,0587	0,97
ADV 3	0,05	0,1273	0,9524	5,8395	5,9027	0,0632	1,08
ADV 4	0,1	0,1679	0,9091	5,5741	5,6417	0,0676	1,21
ADV 5	0,25	0,2191	0,8000	4,9052	4,9771	0,0719	1,46
ADV 6	0,5	0,2357	0,6667	4,0877	4,1489	0,0612	1,50

Fonte: Autoria própria (2021)

5.4.1 Estrutura primária com ADV acoplado

Diante dos valores de dimensionamento dos ADVs que foram acoplados na estrutura primária, os valores das frequências naturais referentes aos seis primeiros modos de vibração são apresentados na Tabela 14.

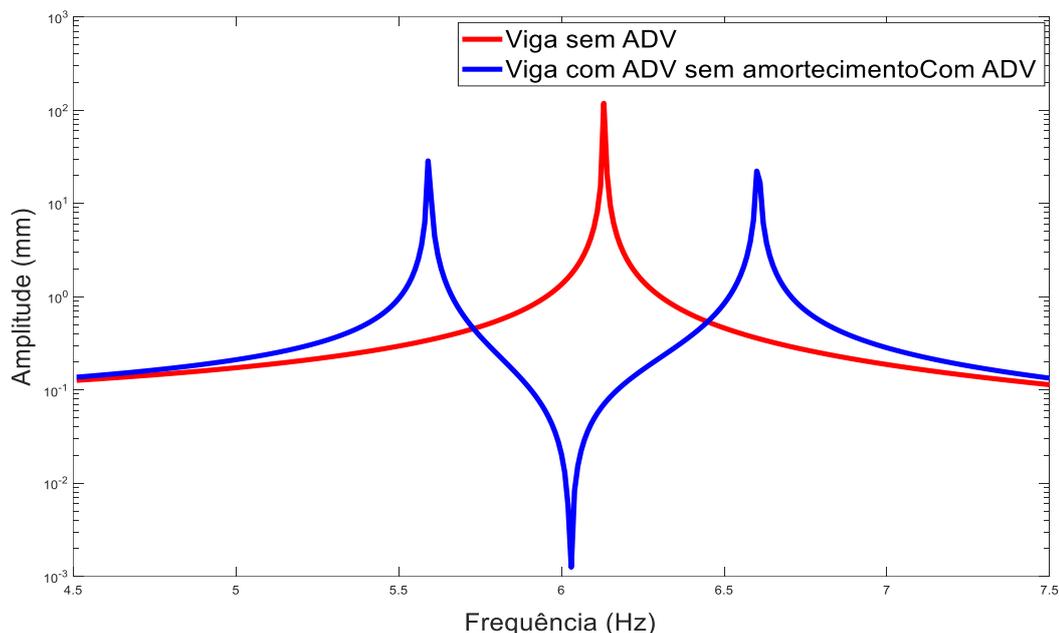
Tabela 14: Resultado das frequências do Caso 2

Modo de vibrar	ADV 1	ADV 2	ADV 3	ADV 4	ADV 5	ADV 6
1	5,8897	5,5928	5,3498	4,9939	4,2851	3,5426
2	6,3763	6,6043	6,7414	6,8943	7,0729	7,1217
3	20,299	20,07	19,798	19,285	17,940	16,158
4	38,382	38,399	38,414	38,437	38,483	38,516
5	75,896	74,056	72,135	69,12	63,053	56,934
6	107,28	107,31	107,32	107,33	107,35	107,35

Fonte: Autoria própria (2021)

Ao realizar a análise harmônica, considera-se o pico de resposta da viga sem ADV acoplado. Após a inserção do ADV que é dividido em dois, o primeiro apresenta a frequência igual a 5,59 Hz e a amplitude 28,62 mm e o segundo com 6,6 Hz e amplitude 22,27 mm, como mostra a Figura 48.

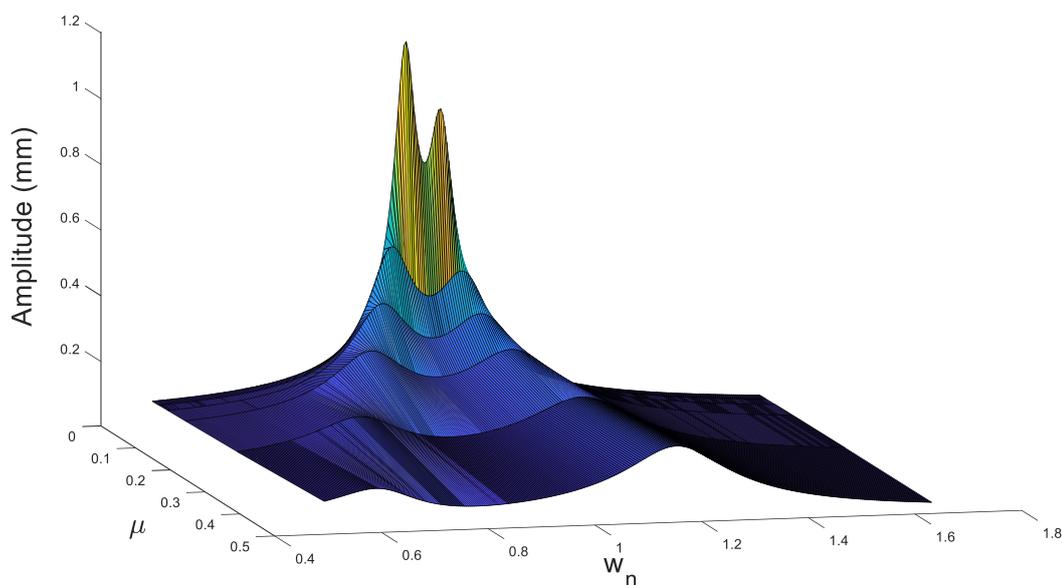
Figura 48: FRF da viga com e sem o ADV acoplado - Caso 2



Fonte: Autoria própria (2021)

A Figura 49 apresenta a FRF da estrutura após o acoplamento dos ADVs otimamente sintonizados. Observa-se que quanto maior a razão de massas, menor é a amplitude.

Figura 49: FRF da viga com ADVs amortecidos - Caso 2

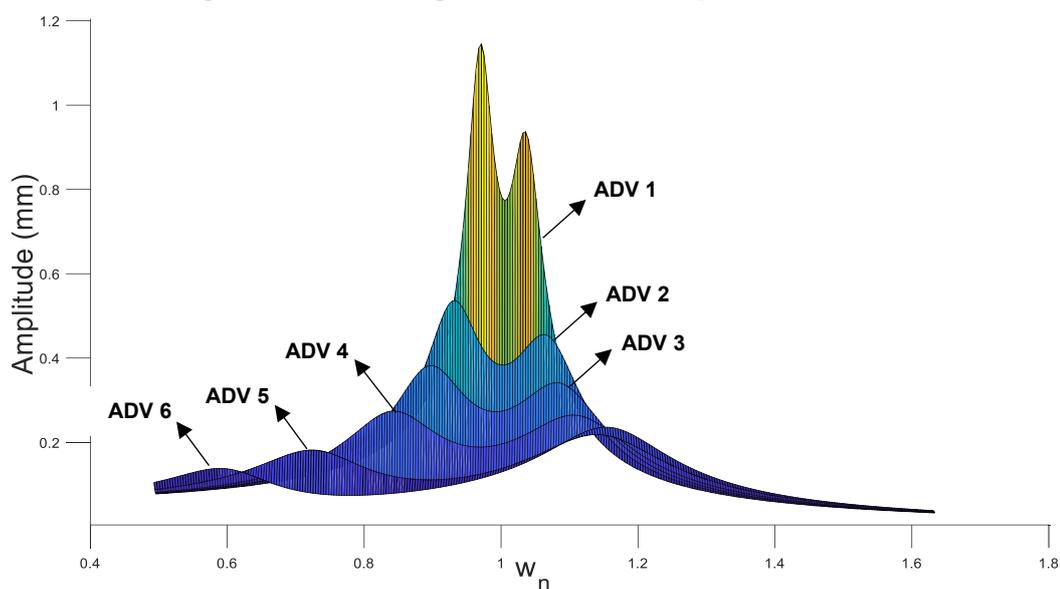


Fonte: Autoria própria (2021)

Na Figura 50, é possível observar que a curva de resposta do ADV 2, ADV 3 e ADV 4, com $\mu = 0,025$, $0,05$ e $0,1$, respectivamente, foram as que mais se

aproximaram do resultado esperado para um ADV otimamente sintonizado, ou seja, com os picos aproximadamente na mesma altura. Logo, os ADVs 5 e 6, com $\mu = 0,25$ e $0,5$, respectivamente, apresentaram as menores amplitudes de deslocamento. No entanto, os picos apresentaram amplitudes diferentes, na qual o segundo pico apresentou amplitude maior que o primeiro, resultado não esperado para um ADV sintonizado otimamente.

Figura 50: FRF da viga com os ADVs acoplados - Caso 2



Fonte: Autoria própria (2021)

A curva mais próxima para um sistema otimamente sintonizado foi para o ADV 4, com $\mu = 0,1$ e $\zeta = 0,1679$.

Ao observar os resultados apresentados pela Figura 50, é possível comparar com os valores de erro apresentados na Tabela 13. Percebe-se que quanto maior a razão de massas, maior o erro, assim como quanto maior for o erro associado, menor a diferença de amplitude entre os picos da curva de resposta da FRF.

A Tabela 15 apresenta os valores de deslocamento máximo da estrutura sem e com os ADVs acoplados a viga. Nota-se que quanto maior a razão de massas e amortecimento, menor é a amplitude de deslocamento.

Tabela 15: Amplitude de deslocamento máximo do Caso 2

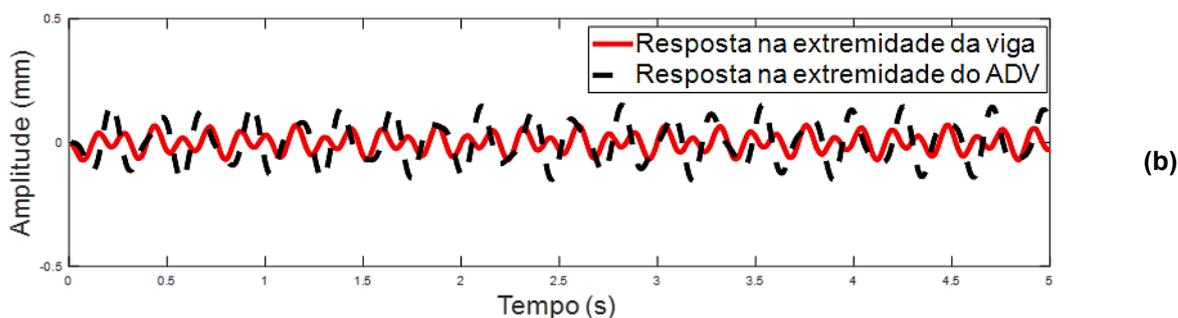
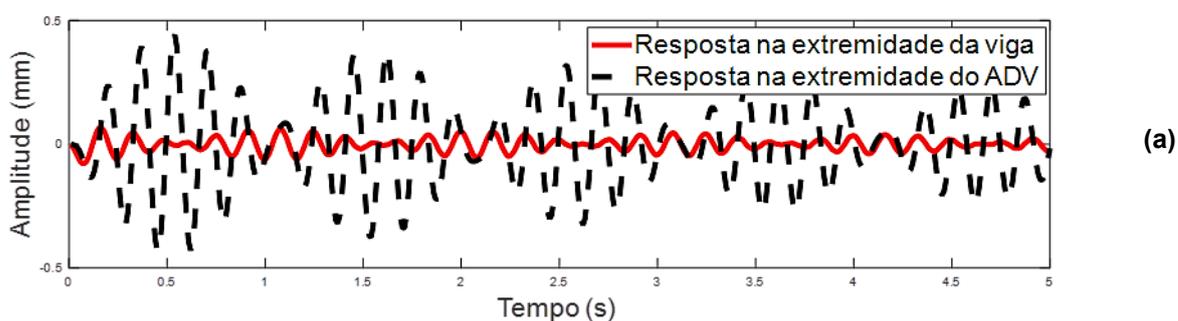
	Sem ADV	ADV não amortecido	ADVs amortecidos					
			ADV 1	ADV 2	ADV 3	ADV 4	ADV 5	ADV 6
μ	-	0,05	0,005	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5
Frequência (Hz)	6,13	6,13	5,94	5,71	5,49	5,17	6,98	7,08
Amplitude (mm)	118,6	0,07	1,14	0,54	0,38	0,27	0,22	0,24

Fonte: Aatoria própria (2021)

Os valores de deslocamento máximo apresentados na Tabela 15 podem ser comparados com os resultados da Figura 50. Nela, observa-se que o deslocamento máximo diminui à medida que a razão de massas aumenta até a razão de massas igual a 0,25 para os ADVs acoplados com amortecimento. Logo, em relação à razão de massas igual a 0,5, a amplitude aumenta.

A análise transiente foi realizada para o ADV 2, Figura 51(a) e ADV 5, Figura 51 (b). O primeiro caso, para $\mu = 0,025$, a amplitude máxima na extremidade do ADV foi de 0,44 mm e na extremidade livre da viga foi de 0,068 mm. Para $\mu = 0,25$, a resposta na extremidade do ADV foi de 0,15 mm de amplitude e de 0,07 mm na extremidade livre da viga.

Figura 51: Análise transiente ADV 2 e ADV 5 - Caso 2



Fonte: Aatoria própria (2021)

Conforme apresentado, ambos os ADVs foram satisfatórios. No que tange à diferença de uma curva para outra, Figura 51(b), observa-se que as amplitudes na extremidade da viga estão próximas, contudo, a amplitude do ADV é maior, o que justifica estar otimamente sintonizado. Em relação ao ADV 2, observa-se o fenômeno do batimento, no qual a frequência do ADV está próxima da frequência natural da estrutura.

Ao analisar os resultados da Figura 51 e Tabela 15 percebe-se que quanto maior a razão de massas, menor o deslocamento em relação ao valor de deslocamento máximo. Desse modo, mostra-se que o amortecimento contribui significativamente para o bom funcionamento do sistema.

5.5 Dimensionamento do ADV – Caso 3

A Tabela 16 apresenta os valores de massa concentrada, o comprimento da haste, bem como as frequências calculadas teórica e numericamente para os ADVs dimensionados no Caso 2. Neste caso, mesmo encontrando-se otimamente sintonizado, a curva de resposta apresentou diferença nas amplitudes dos picos.

Tabela 16: Valores de massa, comprimento e frequências dos ADVs do Caso 2

	Caso 2		f_n (Hz)	f_n (Hz)
	M_{adv} (kg)	L_{adv}(mm)	Calculada	ANSYS®
ADV 1	0,0548	175,8	6,1010	6,1343
ADV 2	0,2830	104,1	5,9820	6,0401
ADV 3	0,5675	84,0	5,8395	5,9027
ADV 4	1,1362	68,8	5,5741	5,6417
ADV 5	2,8418	55,2	4,9052	4,9771
ADV 6	5,6843	49,5	4,0877	4,1489

Fonte: Autoria própria (2021)

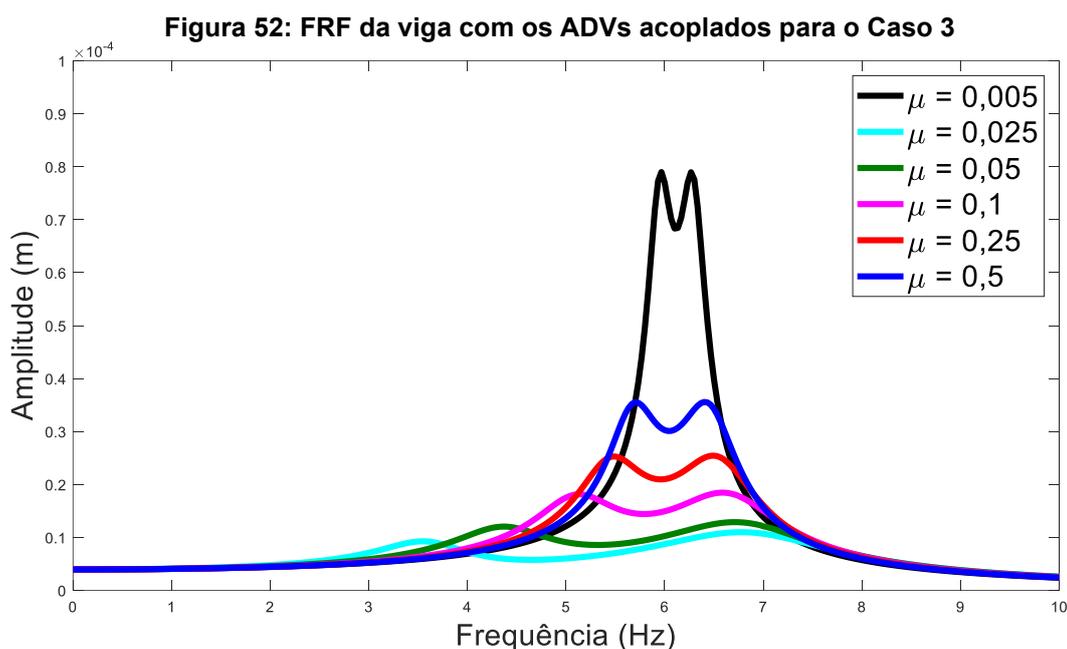
Observa-se na Tabela 16 a diferença da massa pontual e o comprimento da haste para cada tipo de ADV. Em relação aos valores da primeira frequência natural teórica e numérica dos ADVs, verificou-se a diferença nos resultados quando comparado com a teoria, na qual os valores das frequências deveriam ser iguais. Esse

fato pode ser observado com os valores das frequências e amplitudes obtidas pela análise harmônica apresentadas na Seção 5.41, Figura 50.

Para analisar essa diferença, utilizando os artifícios propostos na Seção 3.4, foram realizadas novas simulações teóricas considerando a diferença obtida entre os valores teóricos e numéricos.

5.5.1 Estrutura primária com ADV acoplado

Utilizando o método de Runge-Kutta e levando em conta um sistema em vibração livre com um impulso aplicado na extremidade livre da viga, a FRF do sistema foi determinada. A Figura 52 apresenta as respostas no domínio da frequência para cada ADV dimensionado.



Fonte: Autoria própria (2021)

Nota-se que por meio do ajuste calculado a partir da diferença entre as frequências teóricas e numéricas, a amplitude de ambos os picos das frequências está próxima. Dessa forma, verifica-se que todos os ADVs se apresentam otimamente sintonizados com os picos de amplitude praticamente iguais.

Com base nos resultados apresentados na Figura 52, percebe-se que o valor de q , apresentado na Seção 4.4, é uma correção da frequência amortecida, pois sem amortecimento o sistema apresenta um comportamento como se q fosse igual a 1.

Em face disso, à medida que aumenta a razão de massas e o valor do amortecimento, não se deseja igualar a frequência natural, mas a frequência amortecida do sistema.

A Tabela 17 apresenta os valores da amplitude de deslocamento máximo com os ADVs acoplados na estrutura. Nela, observa-se que quanto maior a razão de massas, menor é a amplitude.

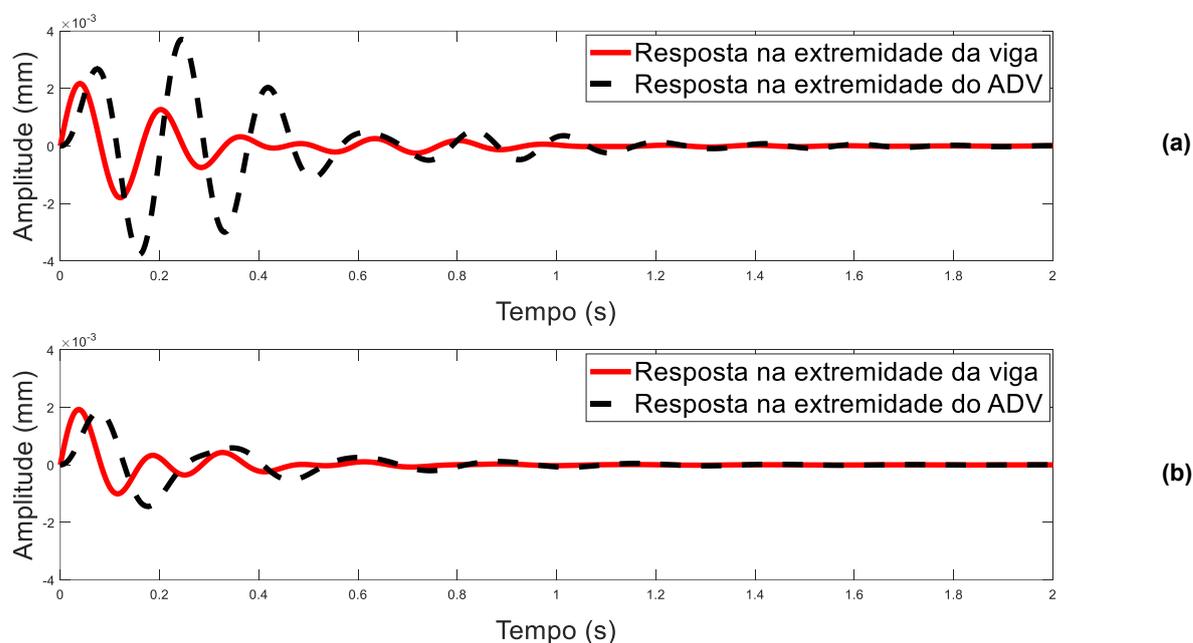
Tabela 17: Amplitude de deslocamento máximo do Caso 3

	Sem ADV	ADV 1	ADV 2	ADV 3	ADV 4	ADV 5	ADV 6
μ	-	0,005	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5
Frequência (Hz)	6,13	5,97	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8
Amplitude (mm)	118,6	0,079	0,036	0,025	0,018	0,013	0,011

Fonte: Autoria própria (2021)

No domínio do tempo, considera-se o sistema em vibração livre e uma força impulsiva inserida na estrutura primária para o ADV 2 e ADV 5. Os resultados podem ser observados na Figura 53(a) e (b).

Figura 53: Análise transiente ADV 2 e ADV 5 – Caso 3



Verifica-se na Figura 53 (a) e (b) a redução da amplitude ao longo do tempo. Em relação à primeira $\mu = 0,025$, a amplitude máxima na estrutura da viga foi de 2,18

mm e na extremidade do ADV 3,68 mm. Para $\mu = 0,25$, a amplitude de deslocamento na viga foi de 1,93 mm e na extremidade do ADV 1,85 mm.

Ao comparar os valores apresentados na Tabela 17 e na Figura 53 em relação ao valor de deslocamento máximo, percebe-se que quanto maior a razão de massas, menor a amplitude de deslocamento, evidenciando que o amortecimento também contribui significativamente ao bom funcionamento do sistema em vibração livre.

No que se refere aos resultados obtidos, nota-se a entre diferença dos valores teóricos em relação aos valores numéricos. No equacionamento e simulação teórica, de acordo com a teoria proposta por Rao (2008), a massa da haste é considerada desprezível. Todavia, devido à configuração utilizada e a haste ter sido modelada como uma viga retangular com largura e espessura pequenas, mas não suficientes para serem desprezadas, os efeitos da presença da massa na haste culminaram com a diferença dos resultados numéricos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente pesquisa, a resposta dinâmica de uma estrutura do tipo viga foi analisada antes e depois do acoplamento de um dispositivo do tipo Absorvedor Dinâmico de vibração (ADV), com o objetivo de avaliar a capacidade do ADV controlar a vibração da viga.

Sendo assim, o estudo da convergência da malha é fundamental para realizar uma análise pelo método de elementos finitos (MEF), assim como o tipo de elemento utilizado para as simulações. A partir das características dinâmicas da viga base, os ADVs foram dimensionados e acoplados na estrutura. Desse modo, os ADVs foram modelados como uma viga engastada/livre com uma massa concentrada em sua extremidade. Partindo da teoria clássica dos ADVs, os parâmetros ótimos relacionados à razão de massas e amortecimento foram determinados para o controle da primeira frequência natural da viga.

Para o Caso 1 foi considerado a razão de frequências igual a um, isto é, a primeira frequência do ADV deveria ser a mesma da estrutura primária com o objetivo de inserir o amortecimento após determinar os parâmetros de massa e rigidez. Os ADVs dimensionados e acoplados na estrutura foram capazes de controlar as vibrações e reduzir as amplitudes. No entanto, os picos de frequência não estavam alinhados, isto é, os resultados não se mostraram próximos do esperado para um ADV sintonizado.

Para o Caso 2, os ADVs foram dimensionados com o amortecimento ótimo, considerando a razão de frequências diferente de um. Os ADVs inseridos na estrutura foram eficientes no controle das vibrações na redução das amplitudes e os picos de amplitude estavam praticamente alinhados. Todavia, o valor da frequência natural teórica divergiu do valor calculado numericamente por meio do Método de Elementos Finitos.

No Caso 3, através da vibração livre, buscou-se analisar a diferença dos valores apresentados pelo Caso 2. Nele, a disparidade dos valores mostrou a influência nos resultados encontrados. Assim, verificou-se que a diferença de amplitude dos picos ocorreu devido a um erro numérico entre a frequência calculada teórica e numericamente obtida pelo Método de Elementos Finitos.

Em relação à análise transiente, para os três casos estudados, constatou-se que os ADVs acoplados na estrutura mostraram-se eficientes para o controle das

amplitudes de deslocamento quando acoplados na extremidade livre da viga. No que se refere ao ADV, observou-se que a amplitude de deslocamento foi maior que a da viga e que este diminui à medida que a razão de massas aumenta.

Por meio dos resultados analisados nesse estudo, é evidente que todos os ADVs dimensionados, tanto teórica quanto numericamente, ponderando as configurações adotadas, foram capazes de reduzir consideravelmente as amplitudes de vibrações da estrutura estudada.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

- Dimensionamento do ADV para o controle de mais modos de vibração da estrutura primária;
- Aplicação do ADV em outros tipos de estruturas;
- Reproduzir experimentalmente as soluções com o objetivo de avaliar os resultados obtidos nesse trabalho;
- Implementação de algoritmos de otimização para os parâmetros construtivos do ADV.

REFERÊNCIAS

- ABREU, J. F. A. C. **Estudo computacional via ANSYS de vigas, arcos e anéis com restrições de contato impostas por bases elásticas**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2016.
- ALFORD, R. M.; KELLY, K. R.; BOORE, D. Mt. **Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation**. *Geophysics*, v. 39, n. 6, p. 834-842, 1974.
- ANSYS, Inc. **ANSYS Workbench User's Guide**. Release 17.0, Canonsburg, PA: ANSYS, Inc., 2017.
- ANSYS® Product Launcher Release 17.0. **ANSYS 17.0 Help**.
- AVILA, S.M. **Controle híbrido para atenuação de vibrações em edifícios**. Tese de Doutorado, Pós Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- BATISTA, V.H.F. **Geração de malhas não-estruturadas tetraédricas utilizando um método de avanço de fronteira**. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, 2005.
- BILLAH, K. Y; SCANLAN, R. H. Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. **American Journal of Physics**, v. 59, n. 2, p. 118-124, 1991.
- BLEVINS, R. D. **Formulas for natural frequency and mode shape**. Van Nostrand Reinhold Company. 1979.
- CHANDRUPATLA, T. R.; BELEGUNDU, A. D.; RAMESH, T. & RAY, C. **Introduction to finite elements in engineering** (Vol. 2). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN. **Dynamics of Structures**. 3ª. ed. Berkeley: Computers & Structures, 2003.
- COREIA, C. R. T. **Aplicação de sistemas de absorvedores dinâmicos em estruturas**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2018.
- CUNHA JR. S. S. **Avaliação Numérica e Experimental de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Ativos e Adaptativos**. Tese de Doutorado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, MG, 2004.
- DA SILVA, C. T. **Projeto e Localização Ótimos de Sistemas de Neutralizadores Dinâmicos Viscoelásticos Usando Algoritmos Genéticos**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2005.

- DEBELLA, L.B.C. **Análise dinâmica transiente pelo método dos elementos finitos generalizados**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia de Construção Civil, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019.
- DEL CLARO, V. T. S. **Concepção e avaliação numérica e experimental de um absorvedor dinâmico de vibrações termicamente sintonizável**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, 2016.
- DEN HARTOG, J.P. **Mechanical Vibrations**. New York: Mcraw-Hill, 1956.
- DEN HARTOG, J.P. **Vibrações nos sistemas mecânicos**. São Paulo, 1972.
- DÌAZ, Y. A. M. **Um Estudo dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Multimodais**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 2014.
- DOSE, Bastian. **CFD Simulations of a 2.5 MW wind turbine using ANSYS CFX and OpenFOAM**. 2013. Tese de Doutorado. MSc Thesis, UAS Kiel and FhG IWES, Germany.
- DURAND, R.; PANTOJA-ROSETO, B. G.; OLIVEIRA, V. A general mesh smoothing method for finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 158, p. 17-30, 2019.
- EWINS, D.J. **Modal testing: theory, practice and application**. 2.ed. RSP, 2000.
- FAHY, F. J.; GARDONIO, P. Sound and structural vibration: radiation, transmission and response. **Elsevier**, 2007. p.1-23.
- FRAHM, H. **Device for Damping Vibrations of Bodies**, U.S. Patent, 989,958, 1911.
- FU, Z.F; HE, J. **Modal analysis**. Elsevier, 2001.
- GÓMEZ, A.L.Z. **Controle de vibrações em edifícios submetidos à ação de cargas dinâmicas utilizando amortecedor de massa sintonizado na forma de pêndulo**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, DF. Agosto, 2007.
- HARRIS, A. F. **Multi-Degree of Freedom Passive and Active Vibration Absorbers for the Control of Structural Vibration**. Master's Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2003.
- HUA, Y; WONG, W; CHENG, L. Optimal design of a beam-based dynamic vibration absorber using fixed-points theory. **Journal of Sound and Vibration**, v. 421, p. 111-131, 2018.
- INMAN, D.J. **Vibrações Mecânicas**. 4. Ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.
- KELLY, S. G. **Fundamentals of Mechanical Vibrations**. 2nd Ed. McGraw-Hill, New York, 1996
- KNUPP, P. M. Algebraic mesh quality metrics for unstructured initial meshes. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 39, n. 3, p. 217-241, 2003.

LARA, V.L.A. **Controle de Vibrações em Vigas Metálicas com Distintas Configurações de Apoio Utilizando Amortecedores de Massa Sintonizados**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

ŁATAS, W. Optimal positions of tunable translational and rotational dynamic absorbers in global vibration control in beams. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, v. 53, n. 2, p. 467-476, 2015.

LAZZARI, P.M. **Simulação numérica das etapas construtivas de pontes estaiadas através do método dos elementos finitos**. Tese de Doutorado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

LIMA, S. S; SANTOS, S. H. C. **Análise dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

LISEIKIN, V.D. **Grid generation methods**. Berlin: Springer, 1999.

LOPES, E.D.C. **Análise dinâmica não linear de pisos mistos considerando-se os efeitos da interação parcial e das ligações viga-coluna e viga-viga**. Tese de Doutorado, Departamento de engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2012.

MADENCI, E; GUVEN, I. **The finite element Method and Applications in Engineering Using ANSYS**. Springer, 2015.

MARQUES, R.F.A. **Estudo Teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Ativos e Adaptativos**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, 2000.

MEIROVITCH, L. **Fundamentals of vibrations**. McGraw-Hill, New york, 2001.

MORGAN, K. **Shock & vibration using ANSYS mechanical**. ANSYS, 2015.

NÓBREGA, P.G.B; HANAI, J.B. A Análise Modal na Avaliação de Estruturas de Concreto Pré-moldado. **1º Encontro Nacional de Pesquisa-Projeto-Produção em Concreto pré-moldado**. São Carlos, 2005.

ÖZGÜVEN, H. N; ÇANDIR, B. Suppressing the First and Second Resonances of Beams by Dynamic Vibration Absorbers. **Journal of Sound and Vibration**, v.111, no.3, p.377-390, 1986.

OSPINA, C.S. **Otimização de amortecedores de massa sintonizados, múltiplos e interligados, para controle de vibrações em edifícios altos**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2008.

PETIT, F; LOCCUFIER, M; AEYELS, D. On the attachment location of dynamic vibration absorbers. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 131, n. 3, 2009.

RADE, D. A. STEFFEN Jr., V., 1999, Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Over a Frequency Band, **Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference**, Kissimee, FL, pp.188-193.

RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 420 p. ISBN 978-85-7605-200-5, 2008.

REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. New York: McGraw-Hill, 2004.

RIBEIRO, V. H. **Diagnose de falhas utilizando observadores de estado em placas de kirchoff com absorvedores dinâmicos de vibração**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita de Filho” - UNESP, Ilha Solteira, 2015.

ROSA, R. C. HOLANDA, R.V. Redução de vibração em uma viga bi-apoiada com Neutralizador Dinâmico de Vibrações instalado. **Tecnia**, v. 1, n. 1, p. 133-148, 2016.

ROSSATO, L. V. **Otimização de amortecedores de massa sintonizados em estruturas submetidas a um processo estacionário**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

ROY, R.; CRAIG, JR. **Structural dynamics: An introduction to computer methods**. Editora John Wiley&sons, 1981.

SALOMÃO, Í. L; VELASCO, V. L.S.; SOTELINO, E.D. Análise numérica da eficiência de lajes nervuradas tridirecionais. **Revista CIATEC-UPF**, v. 7, n. 2, 2015.

SILVA, A. R. D. **Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas** - Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/UFOP, Ouro Preto, 2009.

SILVA, R.L. **Identificação e localização de danos estruturais de concreto por meio de análise modal, experimental e numérica**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, 2018.

SILVA, F.E.C; BAVASTRI, C.A. A methodology for an optimal design of physical parameters, positions, and viscoelastic materials of simple dynamic absorbers for passive vibration control. **Journal of Vibration and Control**, v. 25, n. 6, p. 1133-1147, 2019.

SOUZA, R.M. **O Método dos Elementos Finitos aplicado ao Problema de Condução de Calor**. Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia, Universidade Federal do Pará, Belém, 2003.

TEIXEIRA, G. M. **Análise de impacto em vigas usando-se o método de integração explícita no tempo**. Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 2002.

APÊNDICE A – Rotina para o dimensionamento dos ADVs

CASO 1

```

% DADOS VIGA BASE
B=0.1;H=0.03;L=2;
E=2e11;
Rho=7850;
M1=B*H*L*Rho;
I=B*(H^3)/12;
K1=(3*E*I)/(L^3);
% PRIMEIRA FREQUENCIA DA VIGA
Wvigabaseansys=6.1315*2*pi;% Frequência calculada numericamente
fvig=Wvigabaseansys/(2*pi);
KeqAnsys=3*E*I/(L^3);%rigidez
MeqAnsysvigabase=KeqAnsys/Wvigabaseansys^2; %massa equivalente viga base
ansys
%% ADV
% DIMENSÕES DO ADV
b=0.015; h=0.0012;Eadv=7e10;rho=2710;
Iadv=(b*(h^3)/12);
% AMPLITUDE DA MASSA SECUNDÁRIA
X2=;
% FORÇA APLICADA
F0=1;
% DETERMINAR K2 E M2 DO ADV
k2=F0/X2;
m2=k2/(Wvigabaseansys^2); % Livro do Rao, eq. 9,137
%COMPRIMENTO DA HASTE
L2= ((3*Eadv*Iadv)/((Wvigabaseansys^2)*m2))^(1/3);
%MASSA DA HASTE
mh=b*h*L2*rho;
% ERRO
erro=1e-6;
deltaL2=1; % Chute para entrar no loop
while deltaL2>=erro
    L22=((3*Eadv*Iadv)/(Wvigabaseansys^2*(m2+mh*33/140)))^(1/3);
    mhh=b*h*L22*rho;
    deltaL2 = abs(L2-L22);
    L2=L22;
    mh=mhh;
end
% PRIMEIRA FREQUENCIA DO ADV
fadv=sqrt(3*Eadv*Iadv/((mh*(33/140)+m2)*L2^3))/(2*pi);
wadvansys=(6.1782*2*pi);%freq. do Adv obtida pelo Ansys
kk=3*Eadv*Iadv/(L2^3);% rigidez equivalente adv
MeqAdv=kk/wadvansys^2;%massa equivalente adv ansys
% h=((33/140)*mh)+m2;
% AMORTECIMENTO ÓTIMO ADV
u=MeqAdv/MeqAnsysvigabase; %Mviga=0,24*M1 - analítico
qs2=sqrt((3*u)/(8*(1+u)^3));% amortecimento ótimo Rao

```

CASO 2

```

% DADOS VIGA BASE
B=0.1;H=0.03;L=2;
E=2e11;
Rho=7850;
M1=B*H*L*Rho;
I=B*(H^3)/12;
K1=(3*E*I)/(L^3);
%%
u=;% Razão de massas
f=1/(1+u)% Razão de frequências forçada
wn=6.1315;% Frequência viga base calculada numericamente
wa=f*wn% Frequência do ADV
qs=((3*u)/(8*(1+u)^3))^(1/2)% Fator de amortecimento
g=1;
meq=u*11.3697;
k2=(wa*2*pi)^2*meq;
%%DADOS DO ADV
b=0.015; h=0.0012;Eadv=7e10;rho=2710;
Iadv=(b*(h^3)/12);
Ladv=((3*Eadv*Iadv)/(k2))^(1/3)%Comprimento da haste
mh=b*h*Ladv*rho% Massa da haste
m2=meq-(33/140)*mh % Massa concentrada
%
D=((2*qs*g)^2)+(f^4);
Ea=((2*qs*g)^2)*((g^2-1+u*g^2)^2);
F=(u*f^2*g^2-((g^2-1)*(g^2-f^2)))^2;
X2= sqrt(D/(Ea+F))*(1/K1)%Amplitude do ADV
%
A=((2*qs*g)^2)+(g^2-f^2)^2;
B=((2*qs*g)^2)*((g^2-1+u*g^2)^2);
C=(u*f^2*g^2-((g^2-1)*(g^2-f^2)))^2;
X1=sqrt(A/(B+C))*(1/K1)%Amplitude da Viga

```

CASO 3

```

% DADOS DO ADV
Eadv=7e10;
badv=0.015;
hadv=0.0012;
Iadv=(badv*(hadv^3))/12;
ro=2710; %kg/m³
f1=6.1315; %hz
w1=2*pi*f1;
% ADV
rm=0.005;
f=1/(1+rm); %f=wadv/wportico
w2=(f*w1);%-(2*pi*0.0815);
'Massa equivalente da viga'
psi1=0;
Ep=2e11;
bp=100/1000;
hp=30/1000;
Ip=(bp*(hp^3))/12;
Lp=2000/1000;
densidade_p=7850; %kg/m³
% Modelo equivalente com molas em série
Kp=(3*Ep*Ip)/Lp^3;
Wp=f1*2*pi;
Mp=Kp/(Wp^2); %kg
'Massa equivalente do ADV'
Meq2=rm*Mp
L=((3*Eadv*Iadv)/(((w2)^2)*Meq2))^(1/3)
k2=(3*Eadv*Iadv)/(L^3);

Mv=L*badv*hadv*ro; %kg
m21=Meq2-(33/140)*Mv
'Amortecimento ótimo RAO pg 331'
psi2=(3*rm/(8*((1+rm)^3)))^(1/2)

m1=Mp;
m2=Meq2;

k1=Kp;
k2=k2;

M=[m1 0
   0 m2];

K=[k1+k2 -k2
   -k2 k2];

cc1=2*m1*Wp
c1=psi1*cc1;
cc2=2*m2*w2
c2=psi2*cc2
C=[c1+c2 -c2
   -c2 c2];

ti=0
tf=30
tspan = [ti: 0.001: tf];

```

```

xx1=0
v1=1/(M(1,1))
x2=0
v2=0
y0 = [xx1;v1;x2;v2];

%[t,y] = ode45('Dfunc_resp_imp_geral', tspan, y0);
[t,y]=ode45(@ (t,y)Dfunc_resp_imp_geral1(t,y,K,m1,m2,C),tspan,y0);
[y1,tx1] = resample(y(:, 1),t,30001);
[y2,tx2] = resample(y(:, 3),t,30001);

figure(1)
plot(tx1,y1);
xlabel('t');
ylabel('x_1(t)');
figure(2)
plot(tx2,y2);
xlabel('t');
ylabel('x_2(t)');

%%FFT
[N,r]=size(tx1);
dt=(tx1(5)-tx1(4));
fd=1/(2*dt);
Nd=N/2;

freq=linspace(0,fd,Nd);
y_fft1=fft(y1)/Nd;
y_fft2=fft(y2)/Nd;

figure(4)
plot(freq,abs(y_fft1(1:Nd)))
xlabel('Frequência [Hz]')
ylabel('Amplitude_1 [m]')
axis([0 10 0 1e-2])

figure(5)
plot(freq,abs(y_fft2(1:Nd)))
xlabel('Frequência [Hz]')
ylabel('Amplitude_2 [m]')
%axis([0 10 0 1e-3])

% Autovalores e Autovetores
[V,D]=eig(K,M)

%%Matriz de estado
A= [zeros(2),eye(2);-inv(M)*K,-inv(M)*C];
S=eig(A)

```