

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

LEILSON JOAQUIM ARAÚJO

**VIBRAÇÃO LIVRE E FLAMBAGEM DE PLACAS DE MINDLIN VIA
ELEMENTOS FINITOS *STRAIN GRADIENT***

DISSERTAÇÃO

CURITIBA-PR

2021

LEILSON JOAQUIM ARAÚJO

**VIBRAÇÃO LIVRE E FLAMBAGEM DE PLACAS DE MINDLIN VIA
ELEMENTOS FINITOS *STRAIN GRADIENT***

**FREE-VIBRATION AND BUCKLING ANALYSIS OF MINDLIN PLATES
USING STRAIN GRADIENT NOTATION ELEMENTS**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título Mestre em Engenharia Civil, do Programa De Pós-Graduação em Engenharia Civil / PPGEC), da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. João Elias Abdalla Filho, PhD.

CURITIBA-PR

2021



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito. Os usuários não têm que licenciar os trabalhos derivados sob os mesmos termos estabelecidos pelo autor do trabalho original.



**Ministério da Educação
Universidade
Tecnológica Federal do
ParanáCampus Curitiba**



LEILSON JOAQUIM ARAUJO

**VIBRAÇÃO LIVRE E FLAMBAGEM DE PLACAS DE MINDLIN VIA
ELEMENTOS FINITOS STRAINGRADIENT**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Construção Civil.

Data de aprovação: 28 de Maio
de 2021

Prof Joao Elias Abdalla Filho, Doutorado - Universidade

Tecnológica Federal do ParanáProf Ivan Moura Belo, Doutorado

- Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Roberto Dalledone Machado, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 29/10/2021.

Dedico este trabalho à minha amada Mãe, Antônia, que sempre foi a minha maior apoiadora nessa jornada e sei que está zelando por mim do céu.

AGRADECIMENTOS

Certamente estes parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas elas podem estar certas que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Agradeço primeiramente a Deus. Depois agradeço aos meus pais, Antônia e Valdino, minha irmã Leide, meu cunhado João Paulo e toda minha família que sempre me apoiou a perseguir meus sonhos e objetivos.

Agradeço ao meu orientador Prof. João Elias Abdalla Filho, PhD, pela sabedoria, ensinamentos, paciência e parcimônia com que me guiou nesta trajetória.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha amada noiva, Juliana, pela compreensão pelos momentos de ausência e o apoio que sempre demonstro. Agradeço ao meu amigo irmão Marcelo por mais de 19 anos de amizade.

Um agradecimento especial a parceria dos meus amigos de Curitiba que me acompanharam de perto nessa jornada José Gustavo, José Augusto, Rafael e Lucas William. Agradeço pela troca de conhecimentos e ensinamentos a meus “irmãos” de orientação, o já citado Lucas William e também Lucas Bortoli. Agradeço a meus demais amigos do mestrado Roberta, Luiz, Yeimy, Marcos, Jéssica, Eduardo, Williani, Larissa e Bruno.

Agradeço aos professores Alfredo, Wellington, Janine, Izzo, Shang e novamente João Elias com quem cursei disciplinas. A coordenadora Karina pela solicitude em resolver todas as pendências. Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

Agradeço a Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES por apoiar e fomentar esta pesquisa no período de março/2019 a março/2021.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Aprender é a única coisa que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende.” (Leonardo Da Vinci)

RESUMO

ARAUJO, Leilson Joaquim. **Vibração livre e flambagem de placas de Mindlin via elementos finitos *strain gradient*. 100 f.** Dissertação (Mestrado em engenharia civil) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2021.

O método dos elementos finitos (MEF) é um método aproximado para a solução de problemas do contínuo. Dentre as técnicas de formulação de elementos finitos, tem-se a notação *strain gradient*. Criada em meados da década de oitenta, essa notação possui como diferencial o fato de substituir os coeficientes arbitrários dos polinômios característicos por seus conteúdos com significados físicos. Assim sendo, a notação *strain gradient* é fisicamente interpretável. Ao se utilizar termos fisicamente interpretáveis, a notação *strain gradient* permite realizar uma análise *a-priori* do modelo de elementos finitos. Essa análise prévia possibilita que sejam identificados, antes da implementação computacional, termos espúrios inerentes à formulação. Muito comum são termos de cisalhamento parasítico, que são responsáveis pelo erro de modelagem denominado travamento por cisalhamento (enrijecimento artificial). A notação *strain gradient* permite a precisa eliminação dos termos espúrios, gerando um modelo de elementos finitos livre de cisalhamento parasítico e modos espúrios de energia nula. Existem outras metodologias que fazem o tratamento do travamento por cisalhamento usando a integração seletiva reduzida, como é o caso da formulação isoparamétrica. Todavia, metodologias como essa fazem o tratamento *a-posteriori* e não eliminam necessariamente por completo a fonte do erro. Este trabalho apresenta a aplicação da notação *strain gradient* na implementação do elemento finito de placa de Mindlin de quatro nós, com três graus de liberdade por nó, ou seja, doze graus de liberdade no total, livre de travamento por cisalhamento, na resolução de problemas modais de vibração livre e flambagem de placas. São estabelecidos comparativos entre a notação *strain gradient* com cisalhamento parasítico (**SGCP**), a notação isoparamétrica com integração seletiva reduzida (**ISO**) e a notação *strain gradient* sem cisalhamento parasítico (**SG**). As três diferentes abordagens são comparadas em exemplos que possuem respostas de referência (**REF**), permitindo a avaliação dos erros percentuais e convergência dos modelos à medida que as malhas são refinadas. Os resultados mostram o efeito danoso que o travamento por cisalhamento acarreta em análises de vibrações livres e flambagem, principalmente quando se trabalha com placas finas. Mostram também que **SG** apresenta, em geral, resultados mais próximos aos de **REF** comparados a **ISO**, sempre produzindo valores numericamente inferiores, o que se explica por se tratar de uma metodologia completamente livre de cisalhamento parasítico. Conclui-se que o modelo de elementos finitos *strain gradient* é uma alternativa eficiente para o cálculo de vibrações livres e flambagem de placas de Mindlin.

Palavras-chave: Notação *strain gradient*. Vibração livre e Flambagem de Placas. Elemento de Placa de Mindlin. Travamento por cisalhamento. Cisalhamento Parasítico.

ABSTRACT

ARAUJO, Leilson Joaquim. **Free-vibration and buckling analysis of Mindlin plates using strain gradient notation elements. 100 p.** Dissertation (Master Degree in Civil Engineering) - Federal Technology University - Paraná. Curitiba, 2021.

The finite element method (FEM) is an approximate method for the solution of continuum problems. Among the finite element formulation techniques, there is strain gradient notation. Created in the eighties, strain gradient notation is a physically interpretable which allows for the detailed a-priori analysis of the finite element model. The polynomial expansions are inspected and spurious terms responsible for modeling errors (shear locking) are identified in the shear strains polynomial expansions. The element is corrected by simply removing the spurious terms from the shear strains expansions. Other techniques also do the correction of shear locking. For instance, the isoparametric formulation applies selective reduced-order integration. However, this correction is *a-posteriori* the computational implementation, and it does not eliminate necessarily the errors completely. This research presents a plate finite element based on the strain notation approach for free vibration and buckling analyses of Mindlin plates. Comparisons are performed between the results provided by strain gradient notation with parasitic shear (**SGCP**), isoparametric formulation with selective reduced-order integration (**ISO**) and strain gradient notation without parasitic shear (**SG**). The three different approaches are compared in examples that are available in the literature (**REF**), allowing for the evaluation of percent errors and convergence of the models as the meshes are refined. Results show deleterious effects caused by shear locking in free-vibration and buckling analyzes. Especially when analyzing thin plates, **SG** presents, in general, results closer to **REF** compared to **ISO**, always producing numerically lower values. This is explained by the fact that the strain gradient element is completely locking-free. It is possible to conclude that the finite element model based on gradient strain notation presents itself as a valid alternative for calculation of free vibrations and buckling of Mindlin plates.

Keywords: Strain Gradient Notation. Plate free-vibration and buckling analyses. Locking-free Mindlin Plate Element. Shear Locking. Parasitic Shear.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Ilustração MEF	18
Figura 2- Representação Triângulo de Pascal	20
Figura 3- Elemento de Placa Mindlin.....	22
Figura 4- Linha elástica Teoria de Mindlin.....	23
Figura 5- Placa submetida a um carregamento de compressão uniaxial	30
Figura 6- Movimentos de corpo rígido.....	34
Figura 7- Esquema Notação Strain Gradient elemento de placa 12 graus de liberdade.....	37
Figura 8- Funcionamento Geral Rotinas <i>Strain Gradient</i>	48
Figura 9- Placa SSSS	51
Figura 10- Placa CCCC.....	52
Figura 11- Placa CCCF	53
Figura 12- Placa SSSS	54
Figura 13- Placa SCSC	54
Figura 14- Placa SSSF.....	55
Figura 15- Malhas de Análise.....	56
Figura 16- Frequências Naturais Placa SSSS.....	61
Figura 17- Convergências vibrações livres SSSS	63
Figura 18- Modos de vibração placa SSSS.....	65
Figura 19- Frequências Naturais Placa CCCC.....	68
Figura 20- Convergências vibrações livres CCCC	69
Figura 21- Modos de vibração placa CCCC.....	71
Figura 22- Frequências Naturais Placa CCCF	74
Figura 23- Convergências vibrações livres CCCF.....	76
Figura 24- Modos de vibração placa CCCF	77
Figura 25- Convegências flambagem SSSS	81
Figura 26- Convegências flambagem SCSC.....	85
Figura 27- Convegências flambagem SSSF	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Coeficientes para o deslocamento lateral w	38
Tabela 2- Coeficientes para os deslocamentos no plano, polinômios u e v	38
Tabela 3- Resultados malhas 9 elementos placa SSSS	59
Tabela 4- Resultados malhas 36 elementos placa SSSS	59
Tabela 5- Resultados malhas 144 elementos placa SSSS	60
Tabela 6- Resultados malhas 576 elementos placa SSSS	60
Tabela 7- Resultados malhas 9 elementos placa CCCC	66
Tabela 8- Resultados malhas 36 elementos placa CCCC	66
Tabela 9- Resultados malhas 144 elementos placa CCCC	67
Tabela 10- Resultados malhas 576 elementos placa CCCC	67
Tabela 11- Resultados malhas 9 elementos placa CCCF	73
Tabela 12- Resultados malhas 36 elementos placa CCCF	73
Tabela 13- Resultados malhas 144 elementos placa CCCF	73
Tabela 14- Resultados malhas 576 elementos placa CCCF	74
Tabela 15- Coeficiente de flambagem (kb) com $h = 0,01$ placa SSSS.....	79
Tabela 16- Coeficiente de flambagem (kb) com $h = 0,02$ placa SSSS.....	79
Tabela 17- Coeficiente de flambagem (kb) com $h = 0,05$ placa SSSS.....	79
Tabela 18- Coeficiente de flambagem (kb) com $h = 0,1$ placa SSSS.....	80
Tabela 19- Coeficiente de flambagem (kb) com $h = 0,2$ placa SSSS.....	80
Tabela 20- Coeficiente de flambagem (kb) com $h = 0,001$ placa SCSC	84
Tabela 21- Coeficiente de flambagem (kb) com $h = 0,05$ placa SCSC	84
Tabela 22- Coeficiente de flambagem (kb) com $h = 0,1$ placa SCSC	84
Tabela 23- Coeficiente de flambagem (kb) com $h = 0,2$ placa SCSC	84
Tabela 24- Coeficiente de flambagem (kb) com $h = 0,001$ placa SSSF.....	87
Tabela 25- Coeficiente de flambagem (kb) com $h = 0,05$ placa SSSF.....	87
Tabela 26- Coeficiente de flambagem (kb) com $h = 0,1$ placa SSSF.....	88
Tabela 27- Coeficiente de flambagem (kb) com $h = 0,2$ placa SSSF.....	88

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÔNIMOS

SGCP:	<i>Strain Gradient</i> com Cisalhamento Parasfítico
SG:	<i>Strain Gradient</i>
REF:	Solução de Referência
ISO:	Notação Isoparamétrica com integral reduzida
SSSS:	Bordas: Apoiada-Apoiada-Apoiada-Apoiada
SSSF:	Bordas: Apoiada-Apoiada-Apoiada-Livre
SCSC:	Bordas: Apoiada-Engastada-Apoiada-Engastada
CCCF:	Bordas: Engastada-Engastada-Engastada-Livre
CCCC:	Bordas: Engastada-Engastada-Engastada-Engasta

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 OBJETIVO	16
1.1.1 OBJETIVO GERAL	16
1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	16
1.2 JUSTIFICATIVA	16
1.3 DELIMITAÇÃO E ORGANIZAÇÃO	17
2 REFERENCIAL TEÓRICO	18
2.1 MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS	18
2.1.1 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	19
2.1.2 CONVERGÊNCIA E ERROS	20
2.2 PLACAS MINDLIN	21
2.3 AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA MATRIZ	24
2.4 ANÁLISE DINÂMICA E VIBRAÇÕES LIVRES DE PLACAS	26
2.5 ANÁLISE DE FLAMBAGEM EM PLACAS	29
2.6 NOTAÇÃO <i>STRAIN GRADIENT</i>	33
2.6.1 ELEMENTO DE PLACA MINDLIN DE 4 NÓS NA NOTAÇÃO <i>STRAIN GRADIENT</i>	37
2.6.2 MATRIZ DE MASSA ELEMENTO DE PLACA MINDLIN COM 12 GRAUS DE LIBERDADE	45
3 METODOLOGIA	47
3.1 MÉTODO DE PESQUISA	47
3.2 ANÁLISE DOS ERROS E CONVERGÊNCIA	49
3.3 EXEMPLOS ANÁLISE DINÂMICA MODAL	51
3.3.1 PLACA COM AS 4 EXTREMIDADES APOIADAS (SSSS)	51
3.3.2 PLACA COM 4 EXTREMIDADES ENGASTADAS (CCCC)	52
3.3.3 PLACA COM 3 EXTREMIDADES ENGASTADAS E 1 LIVRE (CCCF)	52
3.4 EXEMPLOS ANÁLISE DE FLAMBAGEM	53
3.4.1 PLACA COM AS 4 EXTREMIDADES APOIADAS (SSSS)	53
3.4.2 PLACA COM 2 EXTREMIDADES APOIADAS E 2 ENGASTADAS (SCSC)	54
3.4.3 PLACA COM 3 EXTREMIDADES APOIADAS E 1 LIVRE (SSSF)	55
3.5 CRITÉRIOS DE ANÁLISE	55
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	58
4.1 EXEMPLOS ANÁLISE DINÂMICA MODAL	58
4.1.1 PLACA SSSS	58
4.1.2 PLACA CCCC	66
4.1.3 PLACA CCCF	72
4.2 EXEMPLOS ANÁLISE DE FLAMBAGEM	78
4.2.1 PLACA SSSS	78

4.2.2 PLACA SCSC	83
4.2.3 PLACA SSSF	87
5 CONCLUSÃO	90
REFERÊNCIAS	93

1 INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos (MEF) representa o contínuo a partir da discretização em um número de pequenas regiões, denominadas, elementos finitos, apresenta soluções aproximadas para o meio geral. As equações que governam a representação discreta do problema contínuo são formadas pela combinação de matrizes de rigidez e vetores de força individuais para cada elemento (DOW, 1999).

A modelagem por elementos finitos apresenta uma ferramenta cada vez mais utilizada para a elaboração de projetos de engenharia. Neste sentido, a diminuição das suas limitações (e erros) é de crucial importância para o desenvolvimento de modelos que permitam análises mais precisas e próximas ao real (DOW e BYRD, 1990).

Na engenharia estrutural, placas são definidas como sendo elementos planos em que uma dimensão (espessura " h ") possui valor muito inferior as outras duas dimensões, deformando-se primeiramente em flexão, com deslocamentos na direção da espessura (JAREK, 2007). A teoria de placas de Mindlin, inclui os efeitos das deformações cisalhantes transversais, considera que seção transversal se mantém plana, mas não necessariamente perpendicular a tangente da linha elástica na configuração deformada (VAZ, 2011).

A análise dinâmica de uma estrutura pode ser definida como uma extensão da análise estática, o termo dinâmica acrescenta a variação no tempo e a consequência em termos de resposta da estrutura (CHOPRA, 2014). Por meio de análises dinâmicas e simulações pode-se determinar como a estrutura responde aos seus requisitos funcionais através da sua resposta ao carregamento dinâmico aplicado (CLOUGH, 2003). A primeira parte da análise dinâmica, chamada análise modal, visa obter as frequências naturais e modos de vibração para o funcionamento estrutural da peça analisada (HIBBELER, 2010).

O MEF é comumente utilizado para o cálculo de respostas dinâmicas nas estruturas. Desta forma o melhoramento de modelos baseados em elementos finitos aplicados a dinâmica estrutural é uma área de investigação atual e com aplicações de crescente importância (CHOPRA, 2014). Com os processos de melhoramento de modelos de elementos finitos aplicados à dinâmica estrutural procuram-se corrigir a

modelagem das características dinâmicas de uma estrutura, de forma que seja possível realizar simulações mais precisas e com menos erros embutidos.

Quando um componente estrutural está submetido a esforços de compressão, há uma deflexão lateral do elemento, que poderá se tornar instável, esse fenômeno é definido como flambagem. Por vezes, placas são submetidas a cargas de compressão elevadas atuantes no seu plano médio, o que pode levar a ocorrência do fenômeno de flambagem. O método dos elementos finitos possui grande aplicação na análise de flambagem de placas pois possibilita a análise de problemas de geometria e carregamentos complexos, onde soluções analíticas são difíceis e muitas vezes nem podem ser obtidas (OLIVEIRA, 2009).

A notação *strain gradient* apresentada por Dow et al. (1985) é uma alternativa de formulação do método dos elementos finitos, onde os coeficientes arbitrários dos polinômios característicos são substituídos por expressões com significado físico associado.

Ao longo dos anos inúmeras dissertações de mestrado e teses de doutorado, associadas a notação *strain gradient* foram desenvolvidas, como é o caso de ABDALLA (1992), FAGUNDES (2002), SCHUNEMANN (2004), BELO (2006), WOLFF (2019) e BORTOLI (2020). Além disso, artigos em periódicos e congressos de renome já foram publicados, para citar alguns DOW (1985, 1985, 1988, 1989, 1990 1994 e 1999) e ABDALLA et al. (1994, 2004, 2006, 2008, 2016, 2017 e 2020). Este trabalho apresenta uma aplicação computacional para a técnica dos elementos finitos formulados na notação *strain gradient* em análise dinâmica das estruturas.

Nesta pesquisa são utilizados elementos finitos de placa, formulados na notação *strain gradient*, na resolução de problemas de vibração livre e flambagem de placas de Mindlin. São resolvidos exemplos que possuem respostas na literatura para investigar a qualidade dos elementos *strain gradient* na resolução de problemas envolvendo vibração livre e flambagem de placas de Mindlin.

Nos últimos anos, inúmeros trabalhos estudam vibrações livres, análise dinâmica (modal) por elementos finitos de placa do tipo Mindlin, tais como (SENJANOVIĆ, 2017), (MOHAMMADI NIA, 2018), (LUONG, 2018), (BELOUNAR, 2019) e (WU, 2020). Outros tantos trabalhos apresentam análises de flambagem para placas de Mindlin, é o caso de (RUOCCO et. al, 2017), (HUANG et. al, 2017), (WANKHADE et al, 2020), (BEERHORST e BABU, 2020).

Alguns dos trabalhos que tratam vibrações livre e/ou flambagem de placas apresentam preocupação em solucionar erros de modelagem que se manifestam através travamento por cisalhamento, tais trabalhos fazem-se valer de procedimentos numéricos (o principal deles a aplicação de integração numérica de ordem reduzida) como forma de tratamento para travamento do modelo, como é o caso de (BUCZKOWSKI, 2017), (WANG, 2019), (KATILI,2019) e (TRAN, 2020).

Todavia, não foi encontrado na literatura trabalhos que investiguem, dentro da análise de vibração livre e flambagem de placas de Mindlin, diretamente os efeitos dos chamados termos de cisalhamento parasítico (ou termos espúrios) nas respostas (frequências naturais e coeficientes de flambagem). Este trabalho ao se utilizar a notação *strain gradient* com e sem termos espúrios, visa promover uma investigação dos efeitos danosos que tais termos podem causar nos resultados finais.

O desenvolvimento da notação *strain gradient* permite a integração direta das equações para a determinação da matriz de rigidez do elemento, sem a utilização do mapeamento aplicado a outras formulações, nem a integração por pontos de Gauss.

Os diferenciais alcançados pela notação *strain gradient* permitem o desenvolvimento de novos elementos competitivos. Apesar de inúmeros trabalhos com aplicações da notação *strain gradient* para problemas estáticos, apenas os trabalhos de HORTA (2020) e BORTOLI (2020) que investiga a aplicação da notação na resolução de problemas dinâmicos, e não foram encontrados trabalhos em que se aplique elementos *strain gradient* na análise de flambagem.

Nesta pesquisa apresenta-se a aplicação da notação *strain gradient* na formulação e implementação do elemento finito de placa com doze graus de liberdade na análise de vibração livre e flambagem de placas de Mindlin. A partir de exemplos que possuem respostas na literatura, são estabelecidos comparativos entre o elemento na notação *strain gradient* com e sem termos espúrios, e com o elemento de placa de doze graus de liberdade formulado da notação isoparamétrica com integração seletiva reduzida. São avaliados os erros relativos e a convergência dos diferentes modelos de cálculo.

1.1 OBJETIVO

1.1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral desse trabalho é calcular vibração livre e flambagem de placas de Mindlin via elementos finitos strain gradient, verificando a influência do cisalhamento parasítico nas frequências naturais e coeficientes de flambagem de exemplos abordados.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos desse trabalho são:

1. Aplicar o modelo de elemento finitos na notação *strain gradient* no cálculo de vibrações livres e flambagem em exemplos de placas de Mindlin;
2. Validar os resultados obtidos pela notação *strain gradient* a partir de respostas de referência encontradas na literatura;
3. Avaliar a influência dos termos de cisalhamento parasítico e conseqüentemente do travamento por cisalhamento no elemento de placa de doze graus de liberdade a partir da comparação da notação strain gradient com e sem cisalhamento parasítico;
4. Estabelecer comparativos entre a notação *strain gradient* e a notação isoparamétrica com integração reduzida seletiva;
5. Analisar as diferenças percentuais encontradas entre as metodologias de cálculo e as respostas de referência;
6. Analisar a convergência dos modelos à medida que as malhas adotadas são refinadas.

1.2 JUSTIFICATIVA

Essa pesquisa se justifica pela necessidade de tratamento do travamento por cisalhamento no elemento de placa de Mindlin de doze graus de liberdade, como

apresentado em trabalhos anteriores, a notação *strain gradient* é eficiente no tratamento desse erro ao permitir a precisa eliminação dos termos espúrios, gerando um modelo de elementos finitos livre de cisalhamento parasítico e modos espúrios de energia nula.

1.3 DELIMITAÇÃO E ORGANIZAÇÃO

Essa dissertação apresenta a aplicação da notação *strain gradient* na formulação e implementação do elemento finito de placa com doze graus de liberdade na análise de vibração livre e flambagem de placas de Mindlin. Essa aplicação se dá por intermédio de rotinas computacionais desenvolvidas em linguagem MATLAB.

O trabalho é dividido em cinco capítulos:

1. Introdução: Capítulo inicial, possui o intuito de mostrar ao leitor uma visão geral da pesquisa, o porquê de se investigar o elemento *strain gradient*, os objetivos, as justificativas e finalidades;
2. Referencial teórico: Apresenta as teorias e definições necessárias para o entendimento da pesquisa, abordando o método dos elementos finitos, as placas de Mindlin, análises modais de frequências naturais e flambagem, o capítulo se encerra com uma descrição aprofundada da notação *strain gradient* e do elemento de placa de doze graus de liberdade formulado nessa metodologia;
3. Metodologia: Nesse capítulo são apresentadas as técnicas e métodos de pesquisa utilizados nas análises, são descritos os exemplos de placas de Mindlin adotadas e são definidos os critérios de análise;
4. Resultados e Discussões: Neste capítulo são apresentados os resultados para as placas exemplos definidas no capítulo anterior, são apresentadas discussões acerca das diferentes metodologias de cálculo, avaliando os erros percentuais e as convergências;
5. Conclusão: São apresentadas as conclusões obtidas a partir dos resultados da pesquisa, ressaltando as vantagens e desvantagens de cada uma das metodologias empregadas e apresenta-se sugestões para trabalhos futuros.

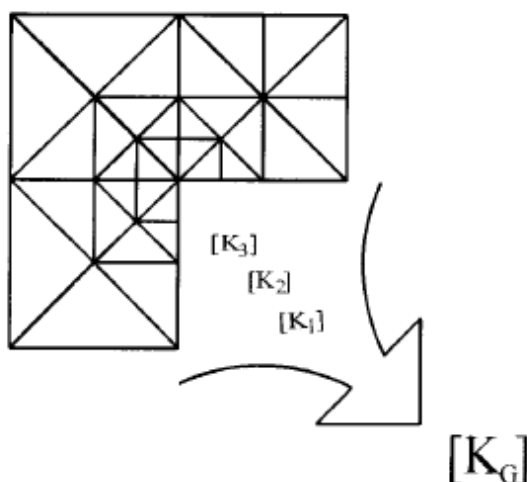
2 REFERENCIAL TEÓRICO

Esse capítulo se inicia apresentando o embasamento teórico para o método dos elementos finitos. Em seguida, apresentam-se as hipóteses de cálculo aplicadas para as placas do tipo Mindlin. Subsequentemente, são apresentados os procedimentos para análise de vibração livre e flambagem. Por último, apresenta-se a notação *strain gradient* de forma geral e aplicada para a formulação do elemento de placa Mindlin com doze graus de liberdade.

2.1 MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS

No método dos elementos finitos, um problema contínuo é subdividido em uma representação física discreta, que consiste em um número de finitas regiões, denominadas, elementos finitos. As equações que governam a representação discreta do problema contínuo são formadas pela combinação das matrizes de rigidez e vetores forças para os elementos individuais. Essas equações são resolvidas para produzir uma solução aproximada para o sistema contínuo analisado (COOK et al., 2002). Esse processo é ilustrado na Figura 1.

Figura 1- Ilustração MEF



Fonte: DOW (1999)

Observa-se no esquema da Figura 1, que o modelo de elementos finitos é uma aproximação do modelo do contínuo, de forma que ao se juntar as soluções individuais se atinge valores próximos aos reais.

Um elemento finito individualmente pode ser visualizado como uma pequena parte da estrutura. Ao se computar a resposta de todas essas pequenas partes se obtém a resposta para a estrutura como um todo (ASSAN, 2010). Dessa forma, pode-se definir o MEF como sendo um método de aproximação do contínuo a partir de (HUEBNER, 2001):

- Subdivisão do domínio em um número finito de subdomínios (elementos finitos), atribuição de parâmetros e obtenção das respostas individuais para cada um destes subdomínios;
- A solução do domínio geral é o conjunto das soluções individuais para cada elemento, e obedece às mesmas leis e conceitos aplicados as partes discretas.

2.1.1 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

O método dos elementos finitos soluciona problemas contínuos por aproximação. O domínio é discretizado em partes, elementos, resulta-se em uma malha com n pontos nodais. Para que isso ocorra são aplicadas aproximações conforme apresentadas na Equação 1 (COOK et al., 2002).

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i \cdot u_i \quad (1)$$

Sendo $u(x)$ a solução aproximada de elementos finitos sobre o domínio, n é o número total elementos na malha, N_i são as funções de interpolação associadas aos nós i e u_i .

As funções ou polinômios aproximadores são funções que representam o campo de deslocamento a qual o elemento é capaz de modelar. Um polinômio $p(x)$

de grau n na variável local x possui todos os termos, de ordem zero até n , conforme a Equação 2 (BATHE, 2014).

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots a_n \cdot x^n \quad (2)$$

A fim de facilitar a visualização dos termos mínimos necessários para gerar uma expansão completa em (x, y) de um determinado grau, usa-se o triângulo de Pascal, como na Figura 2.

Figura 2- Representação Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal					Grau do polinômio, p	Número de termos, n	
		1			0	(constante)	1
	x		y		1	(linear)	3
	x^2	xy		y^2	2	(quadrático)	6
x^3	x^2y		xy^2	y^3	3	(cúbico)	10
x^4	x^3y	x^2y^2	xy^3	y^4	4	(quártico)	15

Fonte: Adaptado de BATHE (2014)

Todavia, existem elementos que não utilizam polinômios completos (é o caso do elemento abordado neste trabalho, o elemento de placa do tipo Mindlin, com doze graus de liberdade). Esses elementos apesar de satisfazerem com precisão aceitável o comportamento cinemático do domínio, possuem erros contidos em suas funções.

2.1.2 CONVERGÊNCIA E ERROS

Uma solução em elementos finitos deve convergir, a medida em que se aumenta os graus de liberdade, número de elementos, deve sempre tender a mais próximo da solução exata do problema (COOK et al., 2002).

Todavia, por vezes, em problemas de maior complexidade, em especial em análise dinâmica das estruturas, é comum ser inviável se obter de soluções analíticas exatas das equações diferenciais do movimento (DÍEZ, 2000). Para atingir a convergência monotônica, os elementos devem ser completos e compatíveis com a

malha (GRÄTSCH, 2005). Deve-se satisfazer os critérios de completude (as funções de deslocamento, e suas derivadas, devem ser contínuas no interior do elemento) e de compatibilidade (os deslocamentos devem ser contínuos tanto no interior quanto nos limites do elemento (BOLAND, 1990).

Shear locking ou travamento por cisalhamento em tradução livre, é um tipo de erro muito comum na aplicação convencional da técnica dos elementos finitos. Esse problema é causado pelo uso das mesmas funções de interpolação para todos os campos de deslocamentos (para vigas, placas e cascas. Para problemas da elasticidade, o problema se deve ao uso de polinômios incompletos), fazendo com que ocorra a inserção de termos espúrios na formulação (BAIER-SAIP, 2020). Quando há a presença do cisalhamento parasítico não se consegue reproduzir o comportamento real de estruturas esbeltas (ABDALLA, 2020).

A forma mais comum de diminuição e/ou eliminação do travamento parasítico é a adoção de integração reduzida seletiva (NAMPALLY, 2020). Todavia, em alguns elementos, ao se aplicar a integração reduzida para se eliminar os termos espúrios, elimina-se também termos de mesma ordem que compõem as equações de compatibilidade. Essa eliminação errônea introduz modos espúrios de energia nula (*spurious zero-energy-modes*), uma outra forma de erro de modelagem devido a eliminação inadvertida de termos corretos presentes na formulação ((OSAMA et. al 2005); (ZIENKIEWICZ et. al, 2013) e (WOLFF, 2019)).

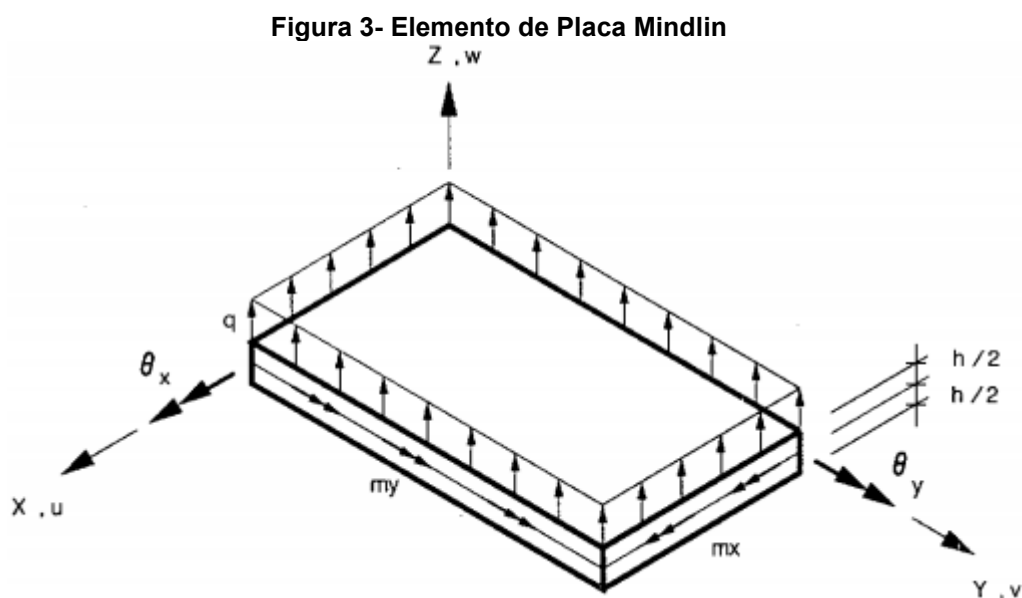
Na notação *strain gradient* os termos espúrios são identificados *a-priori*, isto é, podem ser identificados e eliminados durante o processo de formulação do elemento. Com a eliminação dos termos espúrios pode-se obter elementos livres de travamento por cisalhamento e respostas mais próximas as reais (ABDALLA, 2016). Este trabalho análises de convergência e de erros percentuais, para vibrações livres e flambagem de placas de Mindlin, utilizando o elemento finito *strain gradient* com doze graus de liberdade, ressalta-se que o elemento já fora previamente formulado e aplicado para análises estáticas nos trabalhos de Dow e Bird (1988 e 1990).

2.2 PLACAS MINDLIN

Placas são estruturas bidimensionais em que a superfície média fica contida em um plano. A dimensão de uma placa, localizada em uma direção normal ao plano

de sua superfície média é denominada espessura, representada por h ou t , geralmente medida na direção do eixo Z . Uma placa é caracterizada por possuir uma espessura relativamente pequena em comparação com as dimensões de seu plano médio XY (BORESI, 1993).

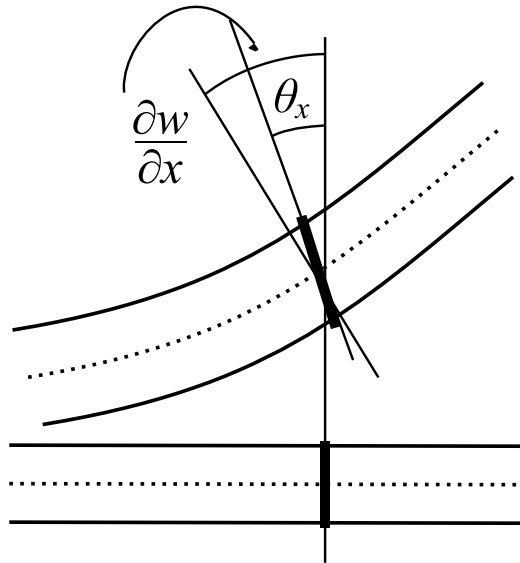
As placas diferem das estruturas do estado plano (ou chapas), devido a direção em que as cargas atuam sobre elas. Nas estruturas do estado plano as cargas atuam no mesmo plano da estrutura, nas placas a flexão, as cargas atuam na direção normal ao seu plano médio, isto é, na direção Z (VAZ, 2011). As rotações relacionadas aos eixos x e y , são definidas respectivamente como, θ_x e θ_y . Exemplo de placa é apresentado na Figura 3.



Fonte: VAZ (2011)

A teoria de Mindlin para placas apresenta como hipótese que a seção transversal se mantém plana, mas não necessariamente perpendicular a tangente da linha elástica na configuração deformada, como mostrado na Figura 4.

Figura 4- Linha elástica Teoria de Mindlin



Fonte: VAZ (2011)

Essa teoria possui como hipóteses cinemáticas (VAZ, 2011):

- Qualquer ponto $P(x, y)$ na superfície média move-se apenas na direção z , ou seja, possui apenas deslocamento $w(x, y)$;
- A deformação longitudinal vertical é nula em qualquer ponto da placa, $\varepsilon_z = 0$;
- Uma linha reta e normal à superfície média antes do carregamento e que corta o plano médio da placa no ponto $P(x, y)$ permanece reta após a aplicação do carregamento;
- A componente de tensão na direção normal ao plano médio é pequena, podendo ser desprezada nas relações tensão-deformação;
- As rotações são pequenas, confundindo-se com suas tangentes;
- O material é homogêneo e de comportamento elástico-linear.

Tem-se o funcional de energia $\Pi(u)$, associado ao equilíbrio de corpo da placa, de forma que a variação do funcional de energia deve ser igual a zero, ao se aplicar o princípio da conservação da energia é possível se concluir que a energia potencial total é superestimada, e a energia de deformação U será sempre subestimada na formulação em deslocamentos de elementos finitos de placa (VAZ, 2011):

$$\begin{aligned}
\Pi(u) &= U + W \\
\delta\Pi(u) &= \delta U + \delta W = 0 \\
\Pi(u) &= U + W = -U
\end{aligned} \tag{3}$$

Nas placas de Mindlin as deformações devido às tensões de cisalhamento devem ser consideradas. As variáveis independentes são o deslocamento $w(x, y)$, e as rotações θ_x e θ_y . Sendo que, o funcional de energia de deformação (U) possui apenas derivadas de primeira ordem das variáveis independentes, tendo como requisito de continuidade das funções de interpolação C^0 (COOK et al., 2002).

Definem-se os deslocamentos $u(x, y, z)$ e $v(x, y, z)$ em função das rotações, e as deformações como sendo:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = z\theta_y \\ v(x, y, z) = -z\theta_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z\theta_{y,x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\theta_{x,y} \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z(\theta_{y,y} - \theta_{x,x}) \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = w_{,y} - \theta_x \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = w_{,x} + \theta_y \end{cases}$$

Matricialmente,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \\ w_{,y} - \theta_x \\ w_{,x} + \theta_y \end{Bmatrix} \tag{5}$$

2.3 AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA MATRIZ

Considere $A = [a_{jk}]$ uma matriz $n \times n$. Tendo a Equação (vetorial) 6:

$$Ax = \lambda x \tag{6}$$

Onde λ é um número. Um valor de λ tal que $x \neq 0$ seja uma solução do sistema chamado de autovalor ou valor característico da matriz A . As soluções correspondentes $x \neq 0$ são chamadas de autovetores ou vetores característicos associados ao autovalor λ (BOLDRINI et al, 1984).

Problemas para a determinação de autovalores de uma matriz A , são conhecidos como problemas de autovalores e podem ser determinados da seguinte forma.

Têm-se o problema de autovalor ilustrado na Equação 7.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Esse sistema linear homogêneo de equações tem uma solução não trivial se e somente se o determinante da matriz dos coeficientes é zero, tal qual na Equação 8 (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987):

$$\left\{ D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \right. \quad (8)$$

$D(\lambda)$ é chamado de determinante característico e a equação 8 recebe o nome de equação característica da matriz A .

Desenvolvendo $D(\lambda)$ obtemos o polinômio de grau n em função de λ . Esse polinômio é conhecido como polinômio característico de A .

2.4 ANÁLISE DINÂMICA E VIBRAÇÕES LIVRES DE PLACAS

Os problemas de análise dinâmica são dos mais complexos que a engenharia enfrenta. Nesses problemas os carregamentos possuem magnitude, direção e/ou sentido que variam com o tempo. A resposta estrutural é dependente do tempo se o carregamento é dependente do tempo (AKSU, 1997). Dessa forma a resposta estrutural a tal carregamento também é variável. Isso acarreta numa complexidade a mais em relação a problemas com carregamentos estáticos (HAMEDANI, 2012).

É conveniente considerar a análise dinâmica dividida em três partes:

- Formulação das equações de movimento;
- Cálculo das propriedades vibratórias (vibrações livres);
- Cálculo da resposta dinâmica a uma carga que varia com o tempo (vibrações forçadas).

Como exemplo, temos a equação governante para análise dinâmica para sistemas de um grau de liberdade:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (9)$$

Sendo,

- m : A massa do sistema;
- $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$: A aceleração;
- c : O amortecimento;
- $\dot{u} = \frac{du}{dt}$: Velocidade;
- k : Rigidez;
- u : Deslocamento;
- $p(t)$: Carregamento externo que varia com o tempo, denominado carregamento dinâmico.

É possível definir a equação para análise dinâmica a partir de elementos finitos, como é apresentado na Equação 10 (THAN, 2017). Para um elemento de volume V e área superficial S , o equilíbrio de trabalho se torna (COOK et al., 2002):

$$\int \{\delta u\}^T \{F\} dV + \int \{\delta u\}^T \{\Phi\} dS + \sum_{i=1}^n \{\delta u\}_i^T \{p\}_i \quad (10)$$

$$= \int (\{\delta u\}^T \rho \{\ddot{u}\} + \{\delta u\}^T c \{\dot{u}\} + \{\sigma\}) dV$$

Sendo:

- $\{F\}$: Forças de corpo;
- $\{\Phi\}$: Força de superfície;
- $\{p\}_i$: Carregamento concentrado;
- $\{\delta u\}_i$: Deslocamento virtual dos carregamentos concentrados num total de n pontos;
- ρ : Densidade de massa;
- $\{\varepsilon\}$: Deformação;
- $\{\sigma\}$: Tensão;
- $\{u\}$: Deslocamento;
- $\{\dot{u}\}$: Velocidade;
- $\{\ddot{u}\}$: Aceleração;
- c : Parâmetro de viscosidade;
- $\{\delta u\}$: Deslocamento virtual;
- $\{\delta \varepsilon\}$: Deformação virtual correspondente a $\{\delta u\}$;

Em notação matricial tem-se:

$$\{u\} = [N]\{d\}; \quad \{\dot{u}\} = [N]\{\dot{d}\}; \quad \{\ddot{u}\} = [N]\{\ddot{d}\}; \quad \{\varepsilon\} = [B]\{d\}; \quad (11)$$

As funções de forma $[N]$ são funções no espaço e os deslocamentos nodais $\{d\}$ são funções do tempo.

Combinando as equações 10 e 11 tem-se,

$$\{\delta d\}^T \left[\int \rho [N]^T [N] dV \{\ddot{d}\} + \int c [N]^T [N] dV \{\dot{d}\} \right. \\ \left. + \int [B]^T \{\sigma\} dV - \int [N]^T \{F\} dV + \int [N] \{\Phi\} dS - \sum_{i=1}^n \{p\}_i \right] = 0 \quad (12)$$

Assume-se que os carregamentos concentrados $\{p\}_i$ são aplicados nos nós. Sendo que as duas primeiras integrais são chamadas de matriz de massa e matriz de amortecimento, definidas respectivamente como:

$$[m] = \int \rho [N]^T [N] dV; \quad [c] = \int c [N]^T [N] dV \quad (13)$$

Uma estrutura vibra em decorrência de excitações causadas e/ou suas propriedades de massa, rigidez e amortecimento. Ao se tratar com estruturas de múltiplos graus de liberdade, a estrutura vibrará em diferentes formas, assumindo variadas frequências e modos de vibração.

Após encerrado o efeito que causou a oscilação da estrutura (força ou deslocamento), a taxa de oscilação livre com que a estrutura continua a vibrar é denominada frequência natural de vibração. A chamada análise modal determina as frequências naturais de vibração da estrutura e os modos naturais associados.

As frequências e modos naturais são determinados por uma série de motivos. Por exemplo, numa situação de projeto, frequentemente interessa que a frequência de carregamento fique abaixo da primeira frequência natural, que se dá o nome de frequência fundamental, ou pelo menos interessa evitar que a frequência de excitação fique próxima de uma das frequências do sistema.

Um sistema de vibração livre não amortecidas, com $F(t) = 0$, isto é n equações diferenciais podem ser resumidas pela Equação 14, onde $[M]$ e $[K]$ são as matrizes de massa e rigidez respectivamente. As frequências naturais de vibração livre de um sistema não amortecido com n graus de liberdade são definidas por Equação 15 (CHOPRA, 2014):

$$[M]\ddot{u}(t) + [K]u(t) = 0 \quad (14)$$

$$u(t) = \phi_n q_n(t) \quad (15)$$

Sendo ϕ_n a forma de vibração do modo natural n que não possui variação ao longo do tempo, e $q_n(t)$ é o deslocamento ao longo do tempo que é descrito pela Equação 16.

$$q_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \text{sen}(\omega_n t) \quad (16)$$

Sendo que A_n e B_n são constantes que dependem das condições de contorno iniciais. Ao se combinar as Equações 15 e 16 obtém-se a Equação 17 que descreve o deslocamento $u(t)$.

$$u(t) = \phi_n [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \quad (17)$$

Ao substituir o deslocamento e $u(t)$ e sua respectiva segunda derivada na Equação 14 e multiplicando por ϕ_n , obtém-se a Equação 18.

$$(-\omega_n^2 [M] \phi_n + [K] \phi_n) q_n(t) = 0 \quad (18)$$

Considerando o sistema em repouso, $u(t) = 0$, e conseqüentemente $q_n(t) = 0$. Obtém-se a chamada solução trivial do problema, que se trata de um problema de autovalores e autovetores, tem-se que a solução trivial $\phi_n = 0$ não é válida, pois indicaria que ocorre o movimento oscilatório do sistema. Sendo assim, a solução não trivial é obtida na Equação 19:

$$\begin{aligned} [K] \phi_n &= \omega_n^2 [M] \phi_n \\ \det([K] - \omega_n^2 [M]) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

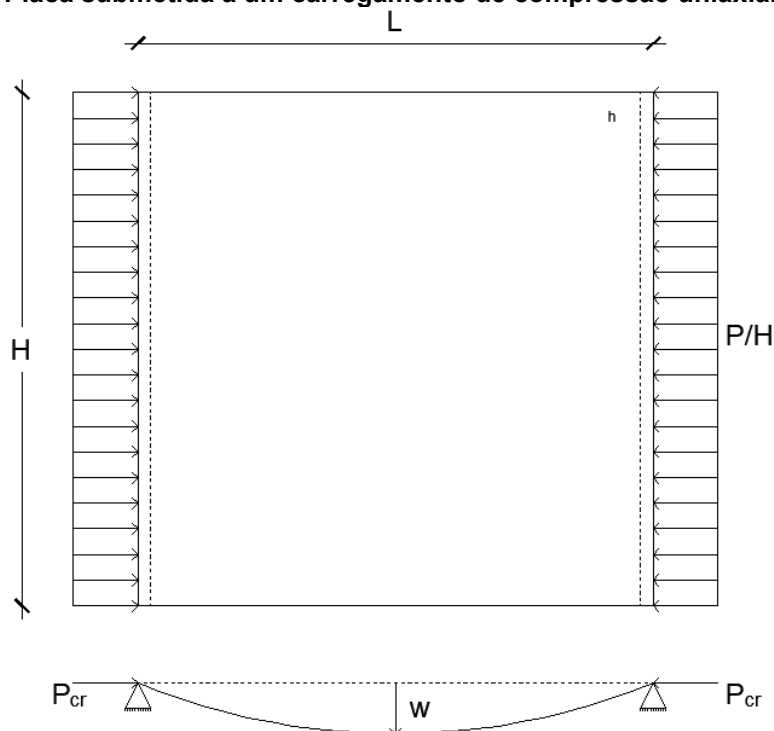
Com as frequências naturais calculadas, pode-se substituir na Equação 20 e obter os modos de vibração que podem ser estruturados na matriz singular apresentada na Equação 20, conhecida como matriz modal para o problema de autovalores, onde j indica o grau de liberdade, e cada coluna um modo natural de vibração.

$$\phi_{jn} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \quad (20)$$

2.5 ANÁLISE DE FLAMBAGEM EM PLACAS

Placas quando sujeitas a carregamentos de compressão apresentam um comportamento mecânico que gera deflexão lateral, denominado de flambagem. Na Figura 5 observa-se uma placa de comprimento L , largura H e espessura h , sujeita a um carregamento de compressão uniaxial aplicado no centro da espessura da placa (Åkesson, 2007).

Figura 5- Placa submetida a um carregamento de compressão uniaxial



Fonte: Adaptado de Åkesson (2007)

Se o carregamento aplicado na placa atinge o valor crítico, P_{cr} , a placa sofre uma deformação, w , de forma repentina, que pode ocasionar a perda da capacidade de suporte do carregamento, levando ao colapso da estrutura. Se aplicado uma carga inferior a carga crítica (P_{cr}), não ocorrerá o fenômeno de flambagem, essa carga provocaria uma deformação, mas após sua retirada a estrutura retornaria a sua configuração inicial (Wang e Wang, 2007).

As placas Mindlin, podem ser analisadas pelo método dos elementos finitos, desconsiderando os termos com terceira ou mais alta potência do gradiente de deslocamentos, define-se a energia de deformação, U , pela Equação 21 (Hinton, 1988).

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T Q \epsilon dV + \frac{1}{2} \int_V \gamma^T Q_c \gamma dV + \int_V (\sigma^0)^T \epsilon^L dV \quad (21)$$

Sendo que,

$$\epsilon^L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 \right) \\ \frac{du}{dx} \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dx} \frac{dw}{dy} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Ao se integrar a energia de deformação ao longo da espessura, h , escreve-se U como na Equação 23:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_A \epsilon^T D_f \epsilon dA + \frac{1}{2} \int_A \gamma^T D_c \gamma dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A \left[\left(\frac{dw}{dx} \right) \left(\frac{dw}{dy} \right) \right] \sigma_*^{0T} \begin{bmatrix} \left(\frac{dw}{dx} \right) \\ \left(\frac{dw}{dy} \right) \end{bmatrix} h dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A \left[\left(\frac{d\theta_x}{dx} \right) \left(\frac{d\theta_x}{dy} \right) \right] \sigma_*^{0T} \begin{bmatrix} \left(\frac{d\theta_x}{dx} \right) \\ \left(\frac{d\theta_x}{dy} \right) \end{bmatrix} \frac{h^3}{12} dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A \left[\left(\frac{d\theta_y}{dx} \right) \left(\frac{d\theta_y}{dy} \right) \right] \sigma_*^{0T} \begin{bmatrix} \left(\frac{d\theta_y}{dx} \right) \\ \left(\frac{d\theta_y}{dy} \right) \end{bmatrix} \frac{h^3}{12} dA \end{aligned} \quad (23)$$

Onde,

$$\sigma_*^0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^0 & \tau_{xy}^0 \\ \tau_{xy}^0 & \sigma_y^0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

A equação de estabilidade então se torna um problema de autovalores e autovetores apresentado na Equação 25 (a), em 25 (b) mostra-se a obtenção das cargas críticas de flambagem, e em 25 (c) apresenta como se calcula a rigidez à flexão aplicada para a obtenção do coeficiente de flambagem obtido por 25 (d).

$$[K - \lambda K_G]a^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{a})$$

$$P_{cr} = P\lambda \quad (\text{b})$$

$$D_f = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (\text{c}) \quad (25)$$

$$k_b = \frac{L^2 P_{cr}}{\pi^2 D_f} \quad (\text{d})$$

Sendo que K é a matriz de rigidez global, K_G é a matriz de rigidez geométrica e λ é a constante que os carregamentos no plano devem ser multiplicados para causar a flambagem. O vetor a^i é o modo de vibração de flambagem e r é o número total de graus de liberdade. P_{cr} é a carga crítica de flambagem, P é o carregamento aplicado no plano. D_f é a rigidez flexural da placa, E é o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson. k_b é o coeficiente de flambagem, L é o tamanho do lado da placa (no caso dessa fórmula adotada como quadrada).

A matriz geométrica K_G pode ser escrita como sendo.

$$K_G = K_{Gb} + K_{Gs} \quad (26)$$

Sendo que K_{Gb} é a parte da matriz geométrica referente a flexão e é dada pela Equação 27.

$$K_{Gb} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_b^T \sigma_*^0 G_b h \det|J| d\xi d\eta \quad (27)$$

Para um nó i tem-se:

$$G_b = \begin{bmatrix} \frac{dN}{dx} & 0 & 0 \\ \frac{dN}{dy} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

A contribuição o cisalhamento é obtido pela Equação 29:

$$\begin{aligned}
K_{G_S} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_{S1}^T \sigma_*^0 G_{S1} \frac{h^3}{12} \det|J| d\xi d\eta \\
& + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_{S2}^T \sigma_*^0 G_{S2} \frac{h^3}{12} \det|J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{30}$$

Onde G_{S1} e G_{S2} são dadas por:

$$G_{S1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN}{dy} & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$G_{S2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dN}{dx} \\ 0 & 0 & \frac{dN}{dy} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Com a matriz de rigidez $[K]$ e a matriz de rigidez geométrica K_G calculadas, resolve-se o problema de autovalores e autovetores da Equação 25, obtêm-se os valores de λ , calcula-se as cargas críticas de flambagem (P_{cr}) e os respectivos coeficientes de flambagem (k_b).

2.6 NOTAÇÃO STRAIN GRADIENT

A notação *strain gradient* foi desenvolvida e apresentada detalhadamente por Dow na década de oitenta. A premissa básica do uso da notação *strain gradient* é que os coeficientes desconhecidos usuais, denominados como coordenadas generalizadas, nos polinômios de deslocamento podem ser definidos em termos de coeficientes do gradiente de deformação, que são fisicamente interpretáveis (DOW; BYRD, 1988).

Ao se utilizar coeficientes fisicamente interpretáveis, possibilita-se a remoção de termos espúrios de deformação normal presentes nas equações de deformação cisalhante a-priori ao processo de modelagem, eliminando desta forma os erros provenientes da inserção de tais termos.

A formulação da notação *strain gradient* pode ser obtida com o uso expansão de séries de Taylor, quando se realizam sucessivas integrações por partes do funcional

que descreve a deformação. A equação, que descreve tal comportamento é apresentada a seguir (DOW et. all, 1985).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x)}{n!} (x - x_0)^n \quad (33)$$

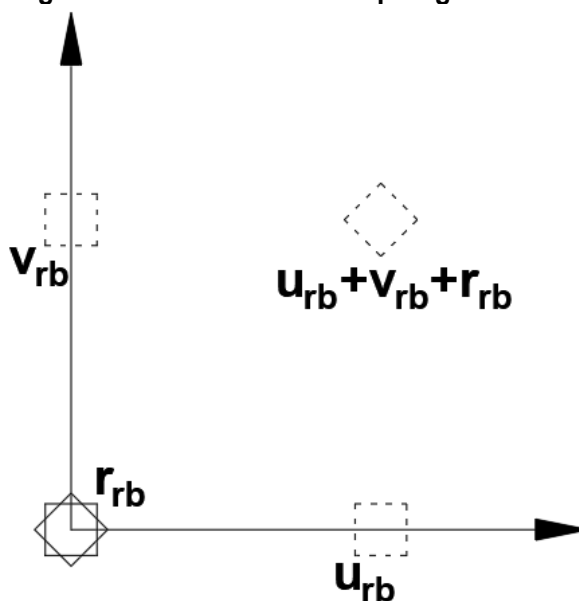
Ao se aplicar a expansão de Taylor aos polinômios que descrevem os deslocamentos nodais dos elementos finitos, denominados u para os deslocamentos horizontais, e v para os verticais, pode se obter o polinômio em função do gradiente de deformação como apresentado a seguir.

$$u(x, y, z) = (u_{rb})_0 + \frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y \dots \quad (34)$$

$$v(x, y, z) = (v_{rb})_0 + \frac{\partial v}{\partial x} x + \frac{\partial v}{\partial y} y \dots$$

Pode-se definir os movimentos de corpo rígido como os representados na Figura 6, sendo as variações entorno de “x” e “y” correlacionadas com as deformações lineares e angulares do sólido estudado, como mostrado na matriz da equação (DOW, 1985).

Figura 6- Movimentos de corpo rígido



Fonte: Adaptado de DOW (1999)

As variáveis u e v são os deslocamentos de um ponto do elemento finito, assim como r a rotação, sobrescritas pelo índice rb , de *rigid body*, ou movimentos do corpo rígido.

Sendo que,

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ r_{rb} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{35}$$

Através das devidas manipulações algébricas, pode se obter os coeficientes arbitrários a partir das suas componentes de deformações que possuem significado físico, e podem ser avaliados a priori, evitando a inserção de erros de modelagem na formulação dos elementos. O elemento na notação *strain gradient* possui como uma distribuição de deformação definida a partir da combinação linear de estados de deformação. A partir da avaliação das expressões do campo de deslocamento em função dos gradientes de deformação para cada nó do elemento, obtém-se uma relação entre os deslocamentos nodais e o vetor dos gradientes de deformação, essa relação é apresentada na Equação 36 (Belo, 2006).

$$\{d\} = [\varphi]\{\varepsilon_{sg}\}\tag{36}$$

Sendo que $\{d\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais, $[\varphi]$ é a matriz com as coordenadas nodais que relaciona os deslocamentos do elemento finito com os possíveis estados de deformação definidos como $\{\varepsilon_{sg}\}$.

As deformações normais e distorções angulares podem ser obtidas pela Equação 37.

$$\{\varepsilon\} = [T_{sg}]\{\varepsilon_{sg}\}\tag{37}$$

Onde $[T_{sg}]$ é a matriz de coordenadas nodais que associa o vetor de deformações $\{\varepsilon\}$ com os gradientes de deformação. As matrizes $[\varphi]$ e $[T_{sg}]$ são matrizes de transformação (Belo, 2006).

Admitindo que seja um sistema conservativo (somente forças conservativas efetuam trabalho, energia mecânica permanece constante) a energia de deformação do sistema com volume do corpo, Ω pode ser definida por Equação 38 e ao se aplicar a Lei de Hooke, expressa-se as tensões em termos das deformações como mostrado na Equação 39, onde $[c]$ é a matriz constitutiva dos materiais.

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\sigma\}\{\varepsilon\} d\Omega \quad (38)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T [c] \{\varepsilon\} d\Omega \quad (39)$$

Unindo as equações 37 a 49 pode-se escrever a energia de deformação como na Equação 40 e pode-se definir a energia associada aos modos de deformação do elemento na Equação 41. E escreve-se a energia de deformação de forma compacta em Equação 42.

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [\varphi]^{-T} \left(\int_{\Omega} [T_{sg}]^T [c] [T_{sg}] d\Omega \right) [\varphi]^{-1} \{d\} \quad (40)$$

$$[U_M] = \int_A \{T_{sg}\}^T [c] \{T_{sg}\} dz dA \quad (41)$$

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [\varphi]^{-T} [U_M] [\varphi]^{-1} \{d\} \quad (42)$$

A energia de deformação do elemento se relaciona com a matriz de rigidez do elemento pela Equação 43, onde, $[K]$ é a matriz de rigidez do elemento e pode ser isolada e escrita pelas Equações 44 e 45.

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [K] \{d\} \quad (43)$$

$$[K] = [\varphi]^{-T} \left(\int_A \{T_{sg}\}^T [c] \{T_{sg}\} dz \right) dA [\varphi]^{-1} \quad (44)$$

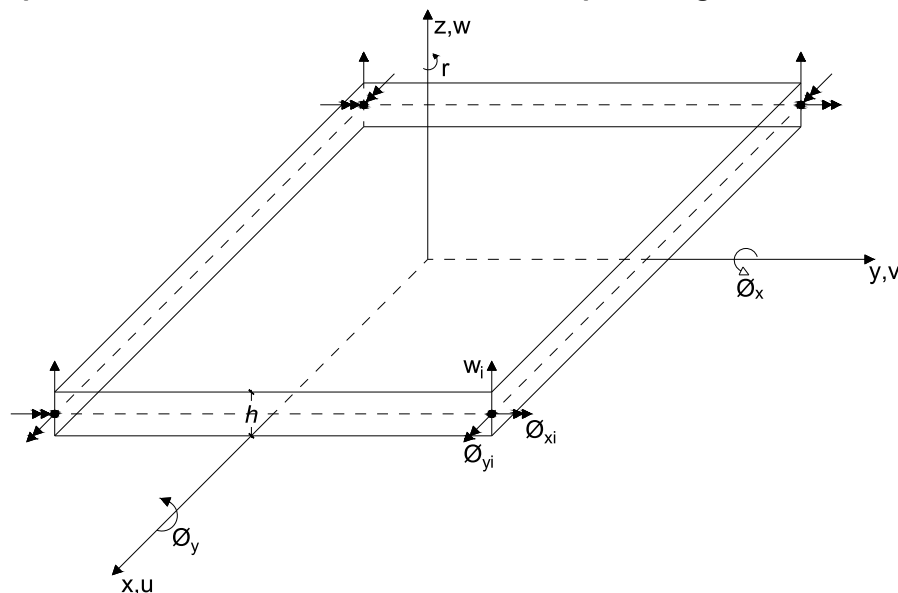
$$[K] = [\varphi]^{-T} [U_M] [\varphi]^{-1} \quad (45)$$

Ao se observar a matriz de rigidez formulada na notação *strain gradient* e se comparar com a matriz formulado por outras metodologias (como a isoparamétrica), nota-se que na notação *strain gradient* não se faz necessário a aplicação de integração numérica para o cálculo da matriz de rigidez, evitando a ocorrência dos erros associados a esse processo, fazendo com a que os elementos formulados na notação *strain gradient* possuam uma capacidade modelagem precisa e acurada (Belo, 2006).

2.6.1 ELEMENTO DE PLACA MIDLIN DE 4 NÓS NA NOTAÇÃO STRAIN GRADIENT

Neste item a apresenta-se o processo de formulação do elemento de placa do tipo Mindlin na notação *strain gradient* utilizado para as análises desse trabalho. O elemento escolhido possui 4 nós, e são considerados 3 graus de liberdade por nó, sendo, o deslocamento (transversal) ao longo do eixo z denominado por w e as rotações nos eixos x e y respectivamente ϕ_x e ϕ_y .

Figura 7- Esquema Notação Strain Gradient elemento de placa 12 graus de liberdade



Fonte: Adaptado de DOW (1990)

Na formulação padrão do elemento Mindlin de quatro nós, os deslocamentos independentes, nos eixos x , y , e z são dados por Equação 46:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = a_1z + a_2xz + a_3yz + a_4xyz \\ v(x, y, z) = b_1z + b_2xz + b_3yz + b_4xyz \\ w(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \end{cases} \quad (46)$$

A variação linear em z contida em u e v incorpora a restrição cinemática que pressupõe que as seções transversais permaneçam planas após as deformações. As rotações em uma placa Mindlin são definidas em termos dos deslocamentos como:

$$\begin{aligned} \phi_x &= \frac{\partial u}{\partial z} = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ \phi_y &= -\frac{\partial v}{\partial z} = -(b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy) \end{aligned} \quad (47)$$

Os coeficientes arbitrários (a_i , b_i e c_i) podem ser obtidos em função dos gradientes de deformação de forma automática por meio Tabelas 1 e 2 apresentadas por Dow (1990).

Tabela 1- Coeficientes para o deslocamento lateral w

i	Termo	c_i para w
1	1	$(w)_0$
2	x	$\left(\frac{\gamma_{xz}}{2} - \phi_x\right)_0$
3	y	$\left(\frac{\gamma_{yz}}{2} + \phi_y\right)_0$
4	x^2	$\left(\frac{\gamma_{xz,x} - \varepsilon_{x,z}}{2}\right)_0$
5	xy	$\left(\frac{-\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2}\right)_0$
6	y^2	$\left(\frac{(\gamma_{yz,y} - \varepsilon_{y,z})}{2}\right)_0$

Fonte: Dow (1990)

Tabela 2- Coeficientes para os deslocamentos no plano, polinômios u e v

i	Termo	a_i para u	b_i para v
1	z	$\left(\phi_x + \frac{\gamma_{xz}}{2}\right)_0$	$\left(\frac{\gamma_{yz}}{2} - \phi_y\right)_0$
2	xz	$(\varepsilon_{x,z})_0$	$\left(\frac{\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} - \gamma_{xz,y}}{2}\right)_0$
3	yz	$\left(\frac{\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2}\right)_0$	$(\varepsilon_{y,z})_0$

4	x^2z	$\left(\frac{\varepsilon_{x,xz}}{2}\right)_0$	$\left(\frac{\gamma_{xy,xz} - \varepsilon_{x,yz}}{2}\right)_0$
5	xyz	$(\varepsilon_{x,yz})_0$	$(\varepsilon_{y,xz})_0$
6	y^2z	$\left(\frac{\gamma_{xy,yz} - \varepsilon_{y,xz}}{2}\right)_0$	$\left(\frac{\varepsilon_{y,yz}}{2}\right)_0$

Fonte: Dow (1990)

Os polinômios característicos dos deslocamentos e das rotações em função dos gradientes de deformação são:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= \left(\phi_x + \frac{\gamma_{xz}}{2}\right)_0 z + (\varepsilon_{x,z})_0 xz + \left(\frac{\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2}\right)_0 yz \\
 &\quad + (\varepsilon_{x,yz})_0 xyz \\
 v(x, y, z) &= \left(\frac{\gamma_{yz}}{2} - \phi_y\right)_0 z + \left(\frac{\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} - \gamma_{xz,y}}{2}\right)_0 xz + (\varepsilon_{y,z})_0 yz \\
 &\quad + (\varepsilon_{y,xz})_0 xyz \\
 w(x, y) &= (w)_0 + \left(\frac{\gamma_{xz}}{2} - \phi_x\right)_0 x + \left(\frac{\gamma_{yz}}{2} + \phi_y\right)_0 y \\
 &\quad + \left(\frac{\gamma_{yz,y} - \varepsilon_{y,z}}{2}\right)_0 xy \\
 \phi_x &= \left(\phi_x + \frac{\gamma_{xz}}{2}\right)_0 + (\varepsilon_{x,z})_0 x + \left(\frac{\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2}\right)_0 y \\
 &\quad + (\varepsilon_{x,yz})_0 xy \\
 \phi_y &= \left(\phi_y - \frac{\gamma_{yz}}{2}\right)_0 + \left(\frac{-\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2}\right)_0 x - (\varepsilon_{y,z})_0 y \\
 &\quad - (\varepsilon_{y,xz})_0 xy
 \end{aligned} \tag{48}$$

Para uma melhor compreensão da metodologia da notação *strain gradient*, o procedimento para obtenção dos coeficientes é aqui detalhado. Por se tratar de um elemento de placa adota-se que os deslocamentos são constantes ao longo da espessura, fazendo com que os polinômios possam ser escritos em função do plano x, y . Desta forma os polinômios para o deslocamento transversal e rotações modeladas pelo elemento aqui aplicado podem ser escritos em termos de coeficientes desconhecidos como sendo:

$$\begin{cases} w(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \\ \phi_x(x, y) = d_1 + d_2x + d_3y + d_4xy \\ \phi_y(x, y) = e_1 + e_2x + e_3y + e_4xy \end{cases} \quad (49)$$

Para escrever os polinômios em termos do gradiente de deformação, usa-se o procedimento apresentado por Abdalla et. al. (2008). Inicia-se avaliando as expressões gerais na origem do elemento, e obtém os seguintes termos:

$$\begin{aligned} c_1 &= (w)_0 \\ d_1 &= (\phi_x)_0 \\ e_1 &= (\phi_y)_0 \end{aligned} \quad (50)$$

Seguindo, aplica as definições de tensão cisalhante no plano γ_{xy} e a definição da rotação contida no plano apresentada na Equação 54.

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (51)$$

Prosseguindo, utiliza-se as definições das tensões de cisalhamento γ_{xz} e γ_{yz} avaliadas na origem para obter os termos:

$$\begin{aligned} c_2 &= (\gamma_{xz})_0 - (\phi_x)_0 \\ c_3 &= (\gamma_{yz})_0 + (\phi_y)_0 \end{aligned} \quad (52)$$

Em seguida, aplicando as definições de deformações ε_x e ε_y e seus derivativos do gradiente de deformação $\varepsilon_{x,y}$, $\varepsilon_{y,x}$, $\varepsilon_{x,z}$ e $\varepsilon_{y,z}$, ao os avaliar na origem encontra-se os termos:

$$\begin{aligned} d_1 &= (\varepsilon_{x,z})_0 \\ e_2 &= (\varepsilon_{y,z})_0 \end{aligned} \quad (53)$$

Também são utilizados os derivativos das deformações de cisalhamento $\gamma_{xy,z}$, $\gamma_{yz,x}$ e $\gamma_{xz,y}$ avaliados na origem, resultando em três equações que são resolvidas simultaneamente para se obter os coeficientes:

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{1}{2} (-\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y})_0 \\ d_3 &= \frac{1}{2} (\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y})_0 \end{aligned} \quad (54)$$

$$e_3 = \frac{1}{2}(-\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y})_0$$

Por último, utiliza-se dos derivativos de segunda ordem das deformações normais $\varepsilon_{x,yz}$ e $\varepsilon_{y,xz}$ avaliados na origem para se obter os coeficientes:

$$\begin{aligned} d_4 &= (\varepsilon_{x,yz})_0 \\ e_4 &= (\varepsilon_{y,xz})_0 \end{aligned} \quad (55)$$

Com o detalhamento dos coeficientes em função dos gradientes de deformação, podemos classificar tais termos em:

- $(w)_0$, $(\phi_x)_0$ e $(\phi_y)_0$: Movimentos de corpo rígido;
- $(\gamma_{xz})_0$ e $(\gamma_{yz})_0$: Deformações constantes;
- $(\varepsilon_{x,z})_0$ e $(\varepsilon_{y,z})_0$: Deformações por flexão de primeira ordem;
- $(\gamma_{xy,z})_0$, $(\gamma_{yz,x})_0$ e $(\gamma_{xz,y})_0$: Deformações por cisalhamento de primeira ordem;
- $(\varepsilon_{x,yz})_0$ e $(\varepsilon_{y,xz})_0$: Deformações por flexão de segunda ordem.

Aplicando as definições da teoria da elasticidade, as expressões para as deformações podem ser obtidas em função dos coeficientes do gradiente de deformação, e são apresentados na Equação 56.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (\varepsilon_{x,z})_0 z + (\varepsilon_{x,yz})_0 yz \\ \varepsilon_y &= (\varepsilon_{y,z})_0 z + (\varepsilon_{y,xz})_0 xz \\ \gamma_{xy} &= (\gamma_{xy,z})_0 z + (\varepsilon_{x,yz})_0 xz + (\varepsilon_{y,xz})_0 yz \\ \gamma_{xz} &= (\gamma_{xz})_0 + (\varepsilon_{x,z})_0 x + (\gamma_{xz,y})_0 y + (\varepsilon_{x,yz})_0 xy \\ \gamma_{yz} &= (\gamma_{yz})_0 + (\gamma_{yz,x})_0 x + (\varepsilon_{y,z})_0 y + (\varepsilon_{y,xz})_0 xy \end{aligned} \quad (56)$$

Por se tratar de uma notação fisicamente interpretável, é possível avaliar a priori as capacidades de modelagem do elemento. A partir dessa avaliação nota-se que as expressões para o cálculo das deformações normais (de flexão) possuem apenas termos dessa natureza, todos correspondentes a expansão da série de Taylor. Todavia, as expressões para o cálculo das deformações de cisalhamento possuem termos que não pertencem a sua expansão da série de Taylor, tratam-se de termos derivativos das deformações normais $(\varepsilon_{x,yz})_0$, $(\varepsilon_{y,xz})_0$, $(\varepsilon_{x,z})_0$, $(\varepsilon_{x,yz})_0$, $(\varepsilon_{y,z})_0$ e $(\varepsilon_{y,xz})_0$ destacados na Equação 56.

Esses termos espúrios são chamados de cisalhamento parasítico (*parasitic shear*), e são responsáveis por aumentar a energia de deformação cisalhante do elemento indevidamente quando ativados na deformação do elemento, isto é, são a causa do erro chamado de travamento por cisalhamento (*shear locking*).

A razão para a ocorrência de tais termos espúrios é a adoção de polinômios inconsistentes para o deslocamento w e as rotações ϕ_x e ϕ_y , o polinômio para w tem que ser de uma ordem mais alta do que os polinômios das rotações ϕ_x e ϕ_y , pois a deformação por cisalhamento transversal é definida como a soma das rotações primeiros e primeiras derivadas do deslocamento transversal, no caso aqui estudado, os três polinômios possuem a mesma ordem (Dow e Bird, 1990). A vantagem da notação *strain gradient* é que tais termos podem ser identificados e eliminados antes da computação da matriz de rigidez do elemento. As expressões para as deformações cisalhantes corrigidas são apresentadas na Equação 57.

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= (\gamma_{xy,z})_0 z \\ \gamma_{xz} &= (\gamma_{xz})_0 + (\gamma_{xz,y})_0 y \\ \gamma_{yz} &= (\gamma_{yz})_0 + (\gamma_{yz,x})_0 x\end{aligned}\tag{57}$$

O processo para obtenção da matriz de rigidez na formulação *strain gradient* segue a ordem a seguir (DOW; BYRD, 1990).

Tem-se o gradiente de deformação, seus 12 termos independentes são,

$$\{\varepsilon_{sg}\} = \begin{bmatrix} (w)_0 \\ (\phi_x)_0 \\ (\phi_y)_0 \\ (\varepsilon_{x,z})_0 \\ (\varepsilon_{x,yz})_0 \\ (\varepsilon_{y,z})_0 \\ (\varepsilon_{y,xz})_0 \\ (\gamma_{xy,z})_0 \\ (\gamma_{xz})_0 \\ (\gamma_{xz,y})_0 \\ (\gamma_{yz})_0 \\ (\gamma_{yz,x})_0 \end{bmatrix}\tag{58}$$

E o vetor de deslocamentos nodais:

$$\{d\} = \begin{bmatrix} (w)_{0_1} \\ (\phi_x)_{0_1} \\ (\phi_y)_{0_1} \\ (w)_{0_2} \\ (\phi_x)_{0_2} \\ (\phi_y)_{0_2} \\ (w)_{0_3} \\ (\phi_x)_{0_3} \\ (\phi_y)_{0_3} \\ (w)_{0_4} \\ (\phi_x)_{0_4} \\ (\phi_y)_{0_4} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Combinando os deslocamentos nodais e os gradientes de deformação conforme a Equação 36 é possível obter a matriz $[\varphi]$. A matriz $[\varphi]$ dispõe os termos em x e y até o número de nós do elemento, atribui para o i -ésimo subíndice da equação 63 valores de 1 a 4, sendo que o resultado obtido seja uma matriz com a mesma ordem dos graus de liberdade do elemento, 12x12.

$$i = 1:4$$

$$[\varphi]_{12 \times 12}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & y_i & -x_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x_i y_i}{2} & -\frac{x_i}{2} & \frac{x_i y_i}{2} & \frac{y_i}{2} & \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -y_i & -x_i y_i & -\frac{x_i}{2} & 0 & \frac{x_i}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{x}{2} \\ 0 & 0 & 1 & x_i & x_i y_i & 0 & 0 & \frac{y_i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} & 0 & -\frac{y_i}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (60)$$

Para o prosseguimento da dedução da matriz de rigidez se faz necessário a definição do vetor de deformações $\{\varepsilon\}$, como sendo:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Dando prosseguimento, com o vetor das deformações e os gradientes de deformações, utilizando a Equação 36 é possível obter a matriz de transformação $[T_{sg}]$ que é aqui apresentada com os termos espúrios, sofrendo de cisalhamento parasítico representada por $[T_{sg}^{cp}]$, que é mostrada na Equação 62. e a matriz sem os termos espúrios e consequentemente livre dos erros de formulação decorrentes do cisalhamento parasítico representada por $[T_{sg}]$, que é mostrada na Equação 63.

$$[T_{sg}^{cp}]_{5 \times 12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z & yz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & xz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & xz^* & 0 & yz^* & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^* & xy^* & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y^* & xy^* & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$[T_{sg}]_{5 \times 12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z & yz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & xz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (63)$$

Os termos destacados com * são os termos espúrios, que são retirados para a formação da matriz de rigidez livre de travamento por cisalhamento. Ressalta-se que a presença de tais termos é inerente ao processo de formulação do elemento, e por possuí a característica de utilizar coeficiente fisicamente interpretáveis a notação *strain gradient* apresenta como vantagem a possibilidade da remoção desses termos a-priori do cálculo da matriz de rigidez, o que leva a uma matriz de rigidez livre de travamento por cisalhamento.

Dando sequência ao processo de formulação da matriz de rigidez, na Equação 64 apresenta-se os parâmetros e a matriz constitutiva dos materiais:

$$D = \frac{E * h^3}{12 * (1 - \nu^2)}$$

$$G = \frac{E}{2 * (1 + \nu)}$$

$$[c]_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} D & D\nu & 0 & 0 & 0 \\ D\nu & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D\left(\frac{1-\nu}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Gkh & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Gkh \end{bmatrix} \quad (64)$$

Sendo que os parâmetros:

- E : Módulo de elasticidade;
- G : Módulo de elasticidade transversal;
- h : Espessura;
- ν : Coeficiente de Poisson;
- D : Rigidez a flexão;
- k : fator de correção para a variação parabólica da tensão de cisalhamento transversal na direção z , kh é denominado espessura efetiva. Para placas homogêneas Cook (2002) indica o valor usual de $k = \frac{5}{6}$, todavia esse valor pode variar de acordo com as condições de contorno adotadas;
- $[c]$: Matriz constitutiva para placas Mindlin isotrópicas.

Seguindo, com a matriz de transformação $[T_{sg}]$ e a matriz constitutiva $[c]$, utiliza-se a Equação 37 e obtém-se a matriz de energia de deformação $[U_M]$ para o elemento de placa como mostrado na Equação 65:

$$[U_M]_{12 \times 12} = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-t/2}^{t/2} [T_{sg}]_{12 \times 5}^T [c]_{5 \times 5} [T_{sg}]_{5 \times 12} dz dx dy \quad (65)$$

Por fim, com a matriz de energia $[U_M]$ e a matriz com as coordenadas nodais $[\varphi]$, obtém-se a matriz de rigidez $[K]$ para o elemento de placa na notação *strain gradient* pela Equação 66.

$$[K]_{12 \times 12} = [\varphi]_{12 \times 12}^{-T} [U_M]_{12 \times 12} [\varphi]_{12 \times 12}^{-1} \quad (66)$$

2.6.2 MATRIZ DE MASSA ELEMENTO DE PLACA MINDLIN COM 12 GRAUS DE LIBERDADE

Para a realização da análise modal neste trabalho, se faz uso da matriz de massa para o elemento de placa com doze graus, deduzida pela Equação 67 apresentada por Ferreira (2007).

$$M = \int_A \rho \cdot N^t \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \cdot N \, dA \quad (67)$$

Após efetuado os cálculos para o elemento de placa Mindlin, com 4 nós, 12 graus de liberdade, tem-se a matriz de massa na sua forma final como apresentada na Equação 68.

$$[M] = \frac{(\rho \cdot a \cdot b \cdot t)}{36} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{300} & 0 & 0 & \frac{1}{600} & 0 & 0 & \frac{1}{1200} & 0 & 0 & \frac{1}{600} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{300} & 0 & 0 & \frac{1}{600} & 0 & 0 & \frac{1}{1200} & 0 & 0 & \frac{1}{600} \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{600} & 0 & 0 & \frac{1}{300} & 0 & 0 & \frac{1}{600} & 0 & 0 & \frac{1}{1200} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{600} & 0 & 0 & \frac{1}{300} & 0 & 0 & \frac{1}{600} & 0 & 0 & \frac{1}{1200} \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1200} & 0 & 0 & \frac{1}{600} & 0 & 0 & \frac{1}{300} & 0 & 0 & \frac{1}{600} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1200} & 0 & 0 & \frac{1}{600} & 0 & 0 & \frac{1}{300} & 0 & 0 & \frac{1}{600} \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{600} & 0 & 0 & \frac{1}{1200} & 0 & 0 & \frac{1}{600} & 0 & 0 & \frac{1}{300} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{600} & 0 & 0 & \frac{1}{1200} & 0 & 0 & \frac{1}{600} & 0 & 0 & \frac{1}{300} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Sendo:

- $[M]$: Matriz de massa;
- ρ : Densidade;
- a e b : Lados da placa;
- t : Espessura.

3 METODOLOGIA

Este capítulo apresenta os meios que se emprega para alcançar os objetivos do trabalho, descreve a pesquisa, apresenta os recursos, procedimentos e ensaios necessários para que os dados sejam obtidos e analisados.

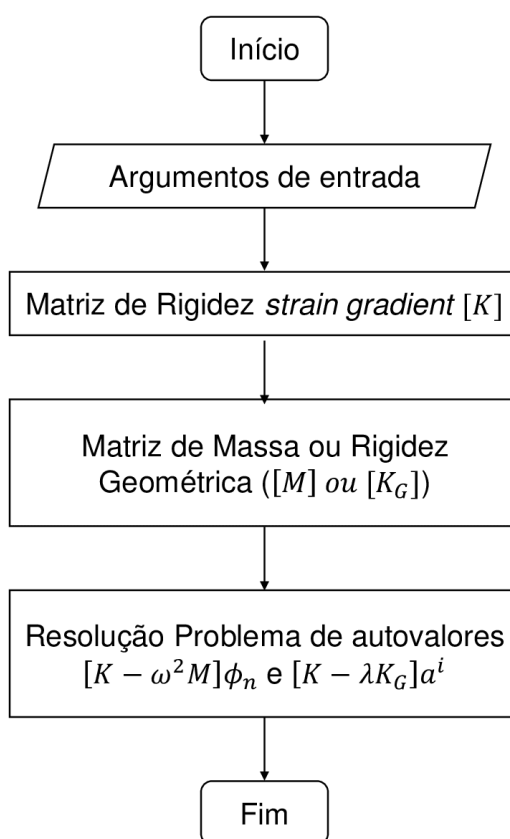
3.1 MÉTODO DE PESQUISA

O método de pesquisa aplicado no trabalho consiste na implementação computacional de um elemento finito de placa, Mindlin, de quatro nós, doze graus de liberdade, três por nó (translação no eixo Z, rotações nos eixos X e Y), formulado na notação *strain gradient* como descrito no capítulo anterior. Aplica-se o elemento para análise dinâmica modal de placas (calculando frequências naturais e modos de vibração) e análise de flambagem (obtendo os coeficientes de flambagem e os modos de flambagem).

Realiza-se modelagens com o elemento na notação *strain gradient*, em placas com diferentes características físicas, geométricas e variadas condições de contorno. O intuito de efetuar análises com o mesmo elemento, para problemas com características distintas, é investigar os resultados, identificar padrões de comportamento, e, estabelecer comparativos com outras abordagens (analíticas e/ou numéricas).

Os cálculos da notação isoparamétrica utilizada para fins de comparação são efetuados pelas rotinas fornecidas por Ferreira (2007 e 2009). Para os cálculos do elemento na notação *strain gradient* foram desenvolvidas rotinas computacionais em linguagem MatLab, essas rotinas foram criadas a partir da mesma sequência lógica aplicada por Ferreira (2007 e 2009), a Figura 8 mostra o funcionamento dessas aqui desenvolvidas.

Figura 8- Funcionamento Geral Rotinas *Strain Gradient*



Fonte: Autoria Própria

Os algoritmos dão início, em seguida leem os parâmetros de entrada estabelecidos, que são as características físicas e geométricas adotadas para cada exemplo, em seguida computa-se a matriz de rigidez seguindo o que fora apresentado na seção 2.6.1, então computa-se a matriz de massa nas rotinas de análise modal, e a matriz de rigidez geométrica no caso das rotinas para flambagem, por fim, resolve-se os problemas de autovalores e autovetores, encontrando os resultados almejados e encerrando o processo computacional.

A notação *strain gradient* possui como diferencial em relação a outras abordagens do método dos elementos finitos, o fato de utilizar coeficientes fisicamente interpretáveis, o que possibilita a identificação dos termos espúrios de cisalhamento parasítico e eliminação dos mesmos *a-priori*, eliminando a fonte de erros de modelagem de travamento por cisalhamento (*shear locking*).

Para conferir confiabilidade aos resultados, investigam-se exemplos abordados previamente na literatura, dessa forma, é possível verificar se os resultados dessa pesquisa são validados. Os resultados obtidos com a notação *strain gradient*

com e sem termos espúrios, bem como os da notação isoparamétrica são submetidos a análises de convergência e de erros como demonstrado a seguir.

3.2 ANÁLISE DOS ERROS E CONVERGÊNCIA

Resultados obtidos pela análise de elementos finitos possuem erro, nesse caso por erro entende-se a diferença entre os resultados obtidos pela análise por elementos finitos e a solução exata do modelo matemático.

Duas deficiências de modelagem amplamente documentadas estão presentes nos elementos da placa Mindlin. Esses dois erros de modelagem são denominados de cisalhamento parasítico e travamento de cisalhamento, respectivamente.

O cisalhamento parasítico ocorre devido à presença de termos espúrios inerentes ao processo de formação do método dos elementos finitos. Estes termos espúrios de cisalhamento parasítico são introduzidos nas expressões de deformação por cisalhamento durante o processo de formulação (ABDALLA, 1994).

O travamento por cisalhamento é caracterizado por elementos que se tornam artificialmente ou erroneamente rígidos. O travamento, faz com que ocorra uma representação insuficiente das deformações de flexão e cisalhamento, causando deformações de cisalhamento parasíticas ou artificiais, que não deveriam ocorrer (ZIENKIEWICZ et. al, 2018).

Na formulação dos elementos finitos na notação *strain gradient*, os termos espúrios são retirados no processo, antes de se realizar os cálculos, evitando assim o aparecimento de tais erros. Dessa forma, visa-se avaliar o erro numérico atrelado a cada uma das formulações de elementos finitos. Tal erro é estimado a partir da comparação entre a solução numérica de elementos finitos e soluções encontradas na literatura, adotadas como “exatas”. A equação para obtenção dos valores desse erro é apresentada a seguir.

$$e(\%) = \left| \frac{\text{Solução exata} - \text{Solução EF}}{\text{Solução exata}} * 100 \right| \quad (69)$$

Neste trabalho, tal erro percentual é avaliado nos valores encontrados para frequências naturais e coeficientes de flambagem de placas. Para se estabelecer as comparações, faz-se uso de problemas com placas quadradas que possuem respostas na literatura. Os dados gerais adotados (módulo de elasticidade, espessura, massa específica, etc.) são genéricos em procedimento similar ao adotado por Hilton e Owem (1985).

Para compreender o funcionamento das diferentes abordagens na análise dinâmica modal e de flambagem de placas, é feito um estudo de convergência para os valores das frequências naturais e coeficientes de flambagem à medida que as malhas são refinadas.

A melhor forma de refino de malha é a combinação de diferentes metodologias de refino (refinos r e/ou h e/ou p), a malha deve ser discretizada de forma estratégica, adotando-se elementos cuja ordem polinomial seja adequada, posicionando os nós em pontos chave e variando o número de elementos até que haja uma convergência aceitável para os resultados.

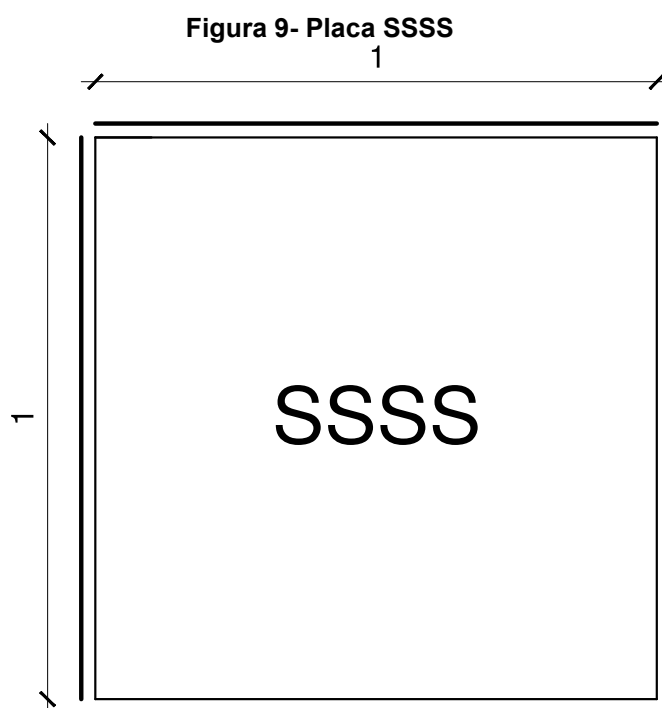
Nessa pesquisa adotam-se malhas, em que, as malhas com maior número de graus de liberdade contêm estritamente as malhas anteriores, fazendo com que a convergência, uma vez que o modelo seja compatível e equilibrado, ocorra de forma monotônica.

3.3 EXEMPLOS ANÁLISE DINÂMICA MODAL

Nessa seção serão apresentados os exemplos adotados na análise dinâmica modal realizadas na pesquisa. Ressalta-se que são adotadas placas quadradas, com diferentes vinculações, a escolha dessas placas se dá devido ao fato de possuírem soluções de referência¹ encontradas na literatura.

3.3.1 PLACA COM AS 4 EXTREMIDADES APOIADAS (SSSS)

O primeiro exemplo abordado para análise dinâmica modal, trata-se da placa quadrada, em que todas extremidades dessa placa se encontram apoiadas, SSSS (esse exemplo também será abordado na análise de Flambagem) sua configuração é apresentada na Figura 9.

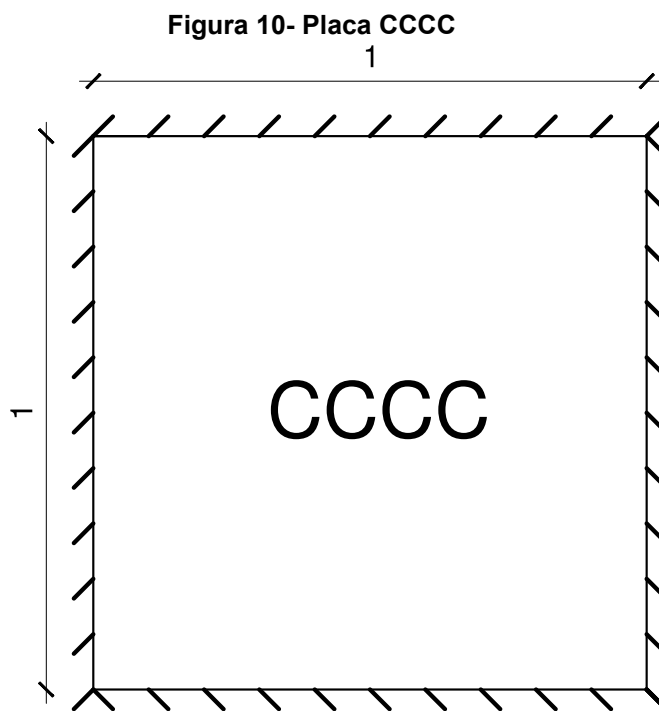


Fonte: Autoria Própria

¹ Soluções obtidas por modelos analíticos e/ou outras formas numéricas que sejam respaldados em trabalhos publicados previamente.

3.3.2 PLACA COM 4 EXTREMIDADES ENGASTADAS (CCCC)

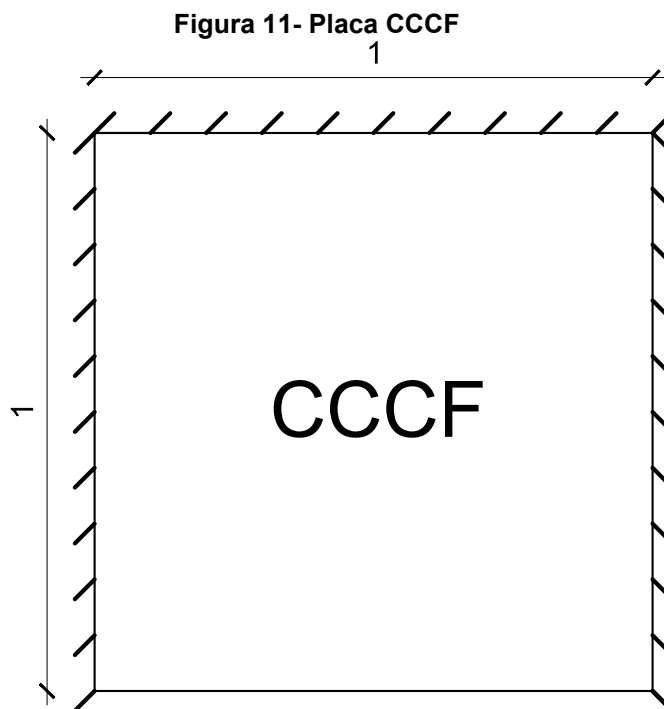
O segundo problema abordado é o exemplo da placa quadrada, em que as quatro extremidades dessa placa se encontram engastadas, denominada CCCC, é apresentada na Figura 10.



Fonte: Autoria Própria

3.3.3 PLACA COM 3 EXTREMIDADES ENGASTADAS E 1 LIVRE (CCCF)

Por fim, finaliza-se as análises dinâmicas modais, abordando a placa quadrada com três bordas engastadas e uma livre, denominada CCCF, a Figura 11 o modelo do exemplo.



Fonte: Autoria Própria

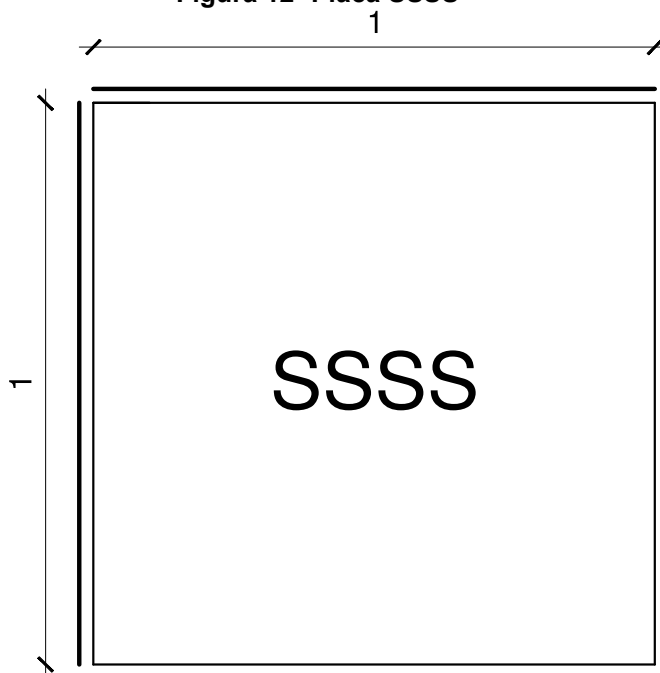
3.4 EXEMPLOS ANÁLISE DE FLAMBAGEM

Nessa seção apresenta-se os exemplos abordados na análise de flambagem. A escolha de tais exemplo segue a mesma lógica dos exemplos da seção anterior, tratam-se de placas quadradas com respostas encontradas na literatura.

3.4.1 PLACA COM AS 4 EXTREMIDADES APOIADAS (SSSS)

O primeiro exemplo abordado para análise de flambagem, trata-se de uma placa quadrada, semelhante a apresentada em 3.3.1, em que todas bordas dessa placa se encontram apoiadas, SSSS, sua representação é reapresentada na Figura 12.

Figura 12- Placa SSSS

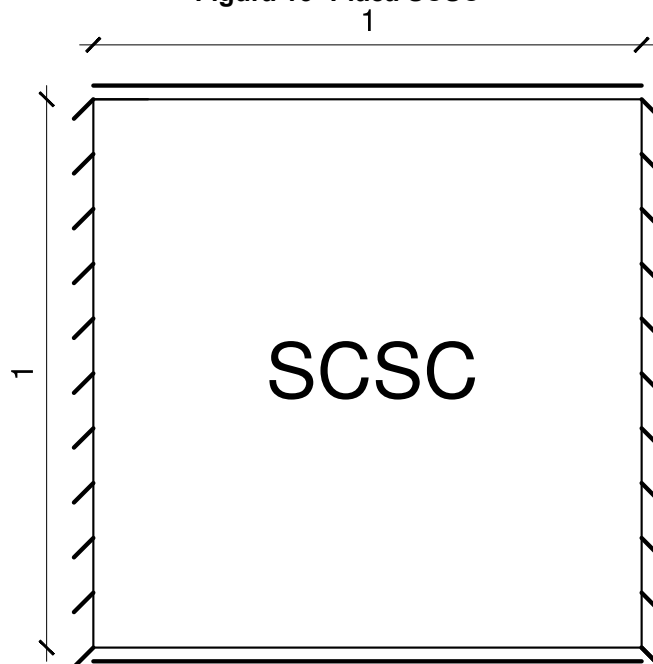


Fonte: Autoria Própria

3.4.2 PLACA COM 2 EXTREMIDADES APOIADAS E 2 ENGASTADAS (SCSC)

O segundo exemplo abordado para a análise de flambagem, trata-se da placa quadrada com duas bordas apoiadas e duas engastadas, SCSC, representada na Figura 13.

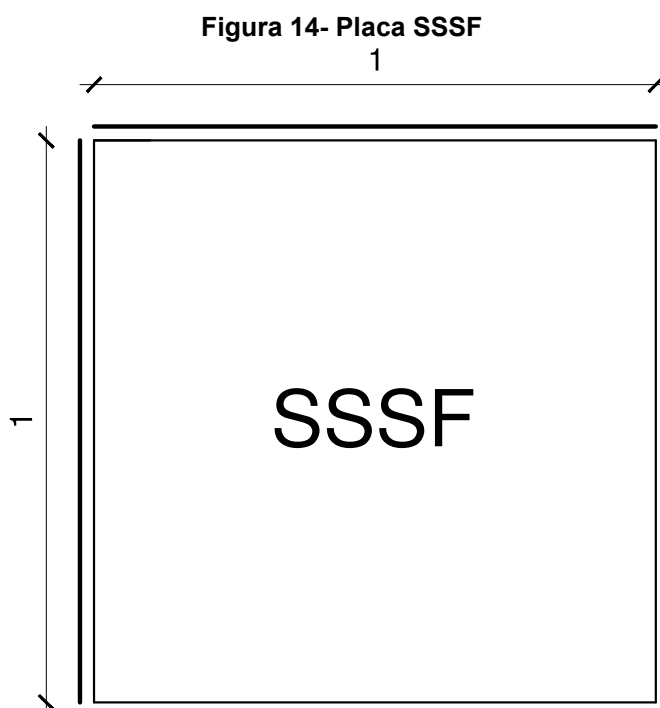
Figura 13- Placa SCSC



Fonte: Autoria Própria

3.4.3 PLACA COM 3 EXTREMIDADES APOIADAS E 1 LIVRE (SSSF)

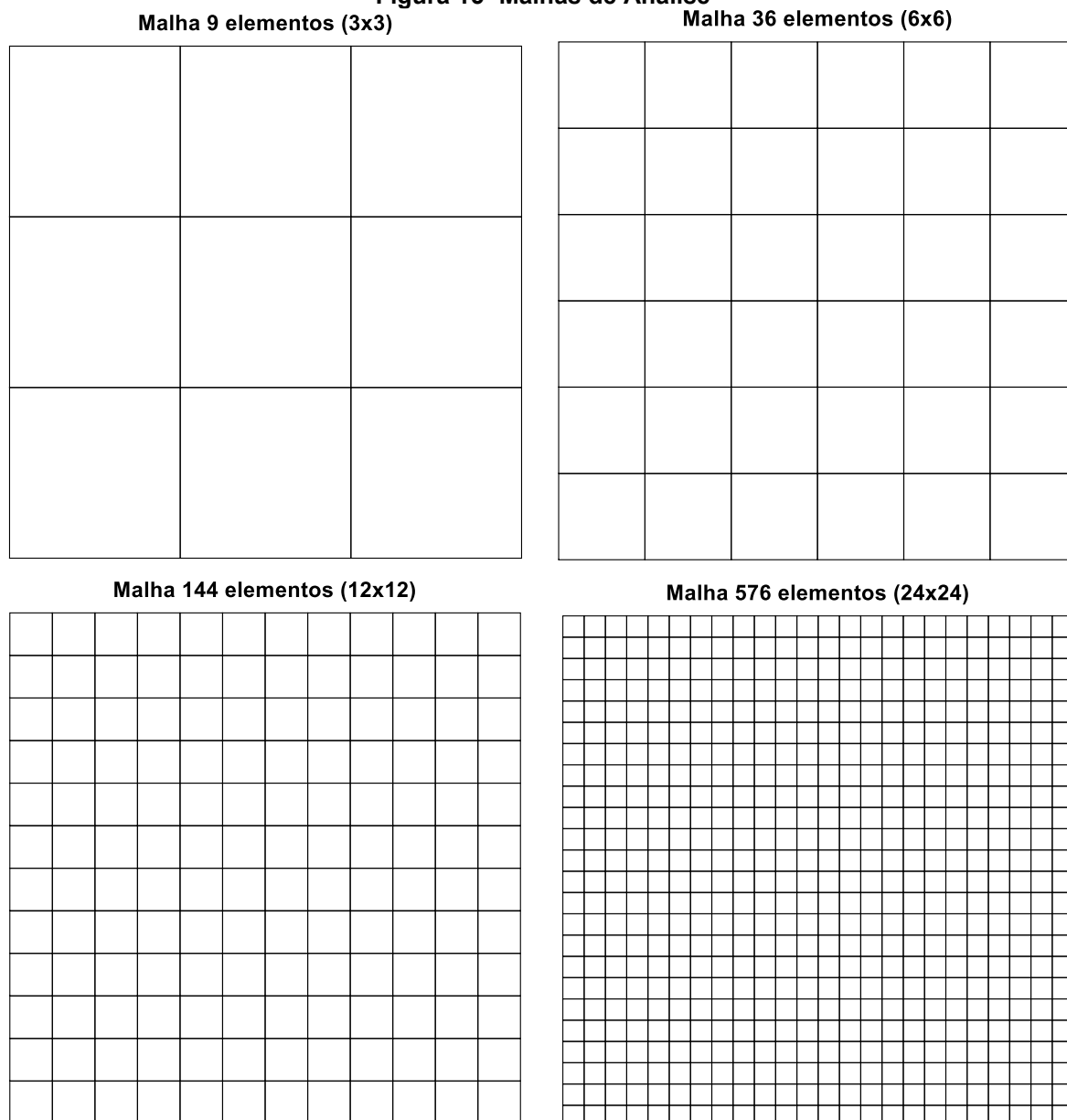
Para finalizar os exemplos para a análise de flambagem, apresenta-se a placa quadrada com três bordas apoiadas e uma livre, SSSF, representada na Figura 14.



Fonte: Autoria Própria

3.5 CRITÉRIOS DE ANÁLISE

Os primeiros critérios estabelecidos tratam-se das malhas a serem empregadas nas análises. Seguindo o que fora apresentado na seção 3.2, tanto para a análise dinâmica modal quanto para a análise de flambagem, foram escolhidas quatro malhas, a primeira formada por uma subdivisão do domínio em 9 elementos (3x3), realiza-se o primeiro refino e passa a se utilizar uma malha com 36 elementos (6x6), em seguida refina-se novamente para a malha com 144 elementos (12x12) e por último adota-se a malha com 576 elementos (24x24). Essas malhas são apresentadas na Figura 15.

Figura 15- Malhas de Análise

Fonte: Autoria Própria

Na análise dinâmica modal, primeiramente, são calculadas as doze primeiras frequências naturais para as placas dos exemplos, com a finalidade de validar as análises, os resultados obtidos (para as diferentes abordagens) são comparados aos encontrados nas soluções de referência adotadas. São avaliadas as diferenças numéricas e os erros relativos que cada uma das abordagens possui em relação as soluções de referência. A fim de complementar as análises, são apresentados os modos de vibração obtidos pela notação *strain gradient* sem termos espúrios para os exemplos estudados.

Para a análise de flambagem, como em procedimento difundido na literatura, são calculados os valores para o primeiro coeficiente de flambagem (associados a primeira carga crítica de flambagem e conseqüentemente ao primeiro modo de flambagem). Para a validação dos resultados, são estabelecidos comparativos com valores encontrados na literatura adotados como referência, e utilizados para a avaliação do erro percentual e convergências dos modelos.

Na análise de flambagem são estabelecidos estudos para investigação do erro devido ao travamento por cisalhamento à medida em que se varia a espessura das placas. As razões entre a espessura (h) e os lados das placas (L), isto é a relação $\frac{h}{L}$, também chamada de razão de aspecto, são adotadas estrategicamente de acordo com os valores adotados pelas respostas de referência, tais valores são apresentados para cada exemplo.

Para organizar e melhor apresentar os resultados, são adotadas siglas/abreviaturas, tais siglas/abreviaturas são apresentadas a seguir:

- **ISO**: Resultados obtidos pela notação isoparamétrica com integração reduzida seletiva;
- **SGCP**²: *Strain gradient* com cisalhamento parasítico;
- **SG**: *Strain gradient* livre de cisalhamento parasítico;
- **REF**: Resposta de referência adotada.

² Tais valores são numericamente iguais aos obtidos pela aplicação da notação isoparamétrica sem integração reduzida seletiva dos pontos de Gauss, isto é, são os mesmos resultados que se obtém ao se utilizar a notação isoparamétrica e integrar com dois pontos de Gauss a parcela da matriz de rigidez referente ao cisalhamento.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados e discutidos os resultados para os exemplos descritos no capítulo 3, serão observadas as diferenças entre os resultados encontrados com as diferentes metodologias e serão estabelecidas correlações entre os resultados e o referencial teórico.

4.1 EXEMPLOS ANÁLISE DINÂMICA MODAL

Inicia-se a apresentação dos resultados pelas placas em que se analisa as frequências naturais e os modos naturais de vibração.

4.1.1 PLACA SSSS

Nessa seção é apresentado o primeiro exemplo de placa abordada na análise dinâmica modal, a placa simplesmente apoiada, SSSS. Para a realização das análises foram definidos os valores para as características físicas e geométricas do problema, tais valores são apresentados abaixo:

- $E = 10920$;
- $\nu = 0,3$;
- $L = 1$;
- $\rho = 1$;
- $k = 0,8333$;
- $h = 0,01$.

As unidades de medida são genéricas, adotadas por conveniência prática para se obter resultados não dimensionais em procedimento similar ao estabelecido nas respostas de referência. Tal escolha de por unidades genéricas se dá em todos os exemplos abordados nessa pesquisa.

A resposta de referência adotada é a solução analítica de Mindlin apresentada em Ferreira (2007). São analisadas as primeiras doze frequências naturais e seus

respectivos modos de vibração. Os resultados obtidos pelas diferentes abordagens são apresentados nas Tabelas de 3 a 6 e na Figura 16.

Tabela 3- Resultados malhas 9 elementos placa SSSS

Placa Quadrada SSSS							
Frequência	Malha 1: 3x3 (9 elementos)				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
1°	1,3451	0,1092	0,1072	0,0963	1296,78%	13,40%	11,32%
2°	4,8419	0,4174	0,3922	0,2406	1912,43%	73,48%	63,01%
3°	4,8419	0,4174	0,3922	0,2406	1912,43%	73,48%	63,01%
4°	6,7152	0,6779	0,5922	0,3847	1645,57%	76,22%	53,94%
5°	316,2385	17,8710	1,7566	0,4807	65687,08%	3617,70%	265,43%
6°	316,2385	17,8710	1,7566	0,4807	65687,08%	3617,70%	265,43%
7°	316,2588	19,0413	1,7566	0,6246	50533,81%	2948,56%	181,24%
8°	316,3068	19,0413	1,7566	0,6246	50541,50%	2948,56%	181,24%
9°	316,3068	158,6100	15,8525	0,8156	38682,10%	19347,03%	1843,66%
10°	316,3414	159,0659	17,2323	0,8156	38686,34%	19402,93%	2012,84%
11°	316,3415	212,3041	21,2291	0,9592	32879,72%	22033,45%	2113,21%
12°	316,3415	212,3041	21,2291	0,9592	32879,72%	22033,45%	2113,21%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 4- Resultados malhas 36 elementos placa SSSS

Placa Quadrada SSSS							
Frequência	Malha 2: 6x6				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
1°	0,6345	0,0993	0,0983	0,0963	558,88%	3,12%	2,08%
2°	1,9636	0,2701	0,2630	0,2406	716,13%	12,26%	9,31%
3°	1,9636	0,2701	0,2630	0,2406	716,13%	12,26%	9,31%
4°	2,7110	0,4363	0,4163	0,3847	604,70%	13,41%	8,21%
5°	4,7884	0,6523	0,6124	0,4807	896,13%	35,70%	27,40%
6°	4,7884	0,6523	0,6124	0,4807	896,13%	35,70%	27,40%
7°	5,1460	0,8087	0,7422	0,6246	723,89%	29,47%	18,83%
8°	5,1460	0,8087	0,7422	0,6246	723,89%	29,47%	18,83%
9°	6,7601	1,1593	1,0191	0,8156	728,85%	42,14%	24,95%
10°	9,5246	1,5193	1,2997	0,8156	1067,80%	86,28%	59,36%
11°	9,5246	1,5193	1,2997	0,9592	892,97%	58,39%	35,50%
12°	9,7114	1,6578	1,3873	0,9592	912,45%	72,83%	44,63%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 5- Resultados malhas 144 elementos placa SSSS

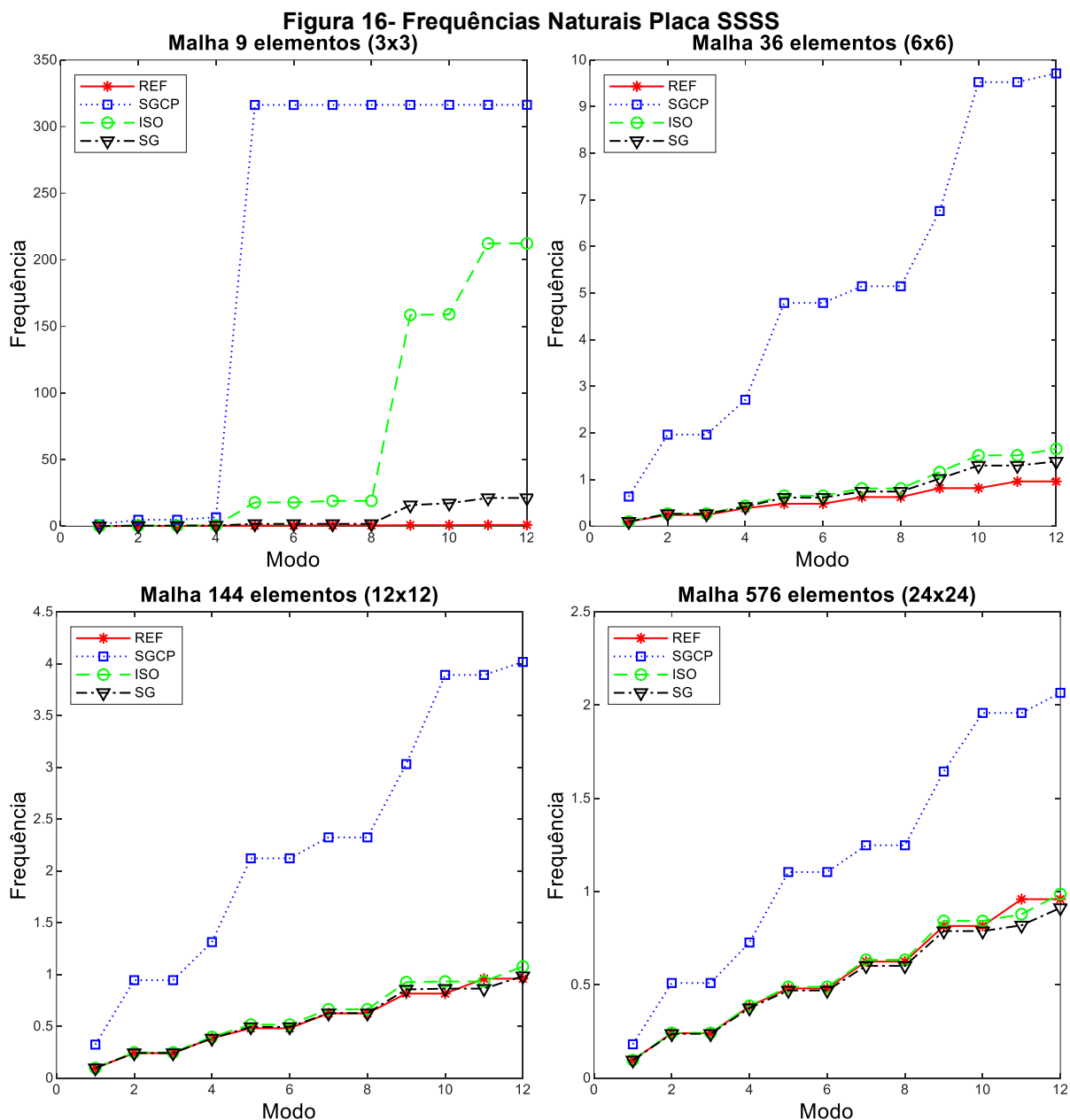
Placa Quadrada SSSS							
Frequência	Malha 3: 12x12				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
1º	0,3230	0,0970	0,0962	0,0963	235,41%	0,73%	0,10%
2º	0,9448	0,2474	0,2421	0,2406	292,68%	2,83%	0,62%
3º	0,9448	0,2474	0,2421	0,2406	292,68%	2,83%	0,62%
4º	1,3124	0,3967	0,3831	0,3847	241,15%	3,12%	0,42%
5º	2,1209	0,5157	0,4937	0,4807	341,21%	7,28%	2,70%
6º	2,1209	0,5157	0,4937	0,4807	341,21%	7,28%	2,70%
7º	2,3231	0,6631	0,6263	0,6246	271,93%	6,16%	0,27%
8º	2,3231	0,6631	0,6263	0,6246	271,93%	6,16%	0,27%
9º	3,0305	0,9262	0,8555	0,8156	271,57%	13,56%	4,89%
10º	3,8909	0,9323	0,8631	0,8156	377,06%	14,31%	5,82%
11º	3,8909	0,9323	0,8631	0,9592	305,64%	2,80%	10,02%
12º	4,0164	1,0769	0,9840	0,9592	318,72%	12,27%	2,59%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 6- Resultados malhas 576 elementos placa SSSS

Placa Quadrada SSSS							
Frequência	Malha 4: 24x24				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
1º	0,1812	0,0965	0,0957	0,0963	88,16%	0,21%	0,62%
2º	0,5098	0,2422	0,2374	0,2406	111,89%	0,67%	1,33%
3º	0,5098	0,2422	0,2374	0,2406	111,89%	0,67%	1,33%
4º	0,7269	0,3877	0,3754	0,3847	88,95%	0,78%	2,42%
5º	1,1047	0,4891	0,4699	0,4807	129,81%	1,75%	2,25%
6º	1,1047	0,4891	0,4699	0,4807	129,81%	1,75%	2,25%
7º	1,2482	0,6338	0,6019	0,6246	99,84%	1,47%	3,63%
8º	1,2482	0,6338	0,6019	0,6246	99,84%	1,47%	3,63%
9º	1,6437	0,8428	0,7881	0,8156	101,53%	3,33%	3,37%
10º	1,9579	0,8428	0,7881	0,8156	140,06%	3,33%	3,37%
11º	1,9579	0,8790	0,8192	0,9592	104,12%	8,36%	14,60%
12º	2,0656	0,9867	0,9126	0,9592	115,35%	2,87%	4,86%

Fonte: Autoria Própria



Fonte: Autoria Própria

Os resultados obtidos para esse exemplo confirmam o efeito danoso que os termos de cisalhamento parasítico (e conseqüentemente o travamento por cisalhamento) pode acarretar no método dos elementos finitos aplicado para análise dinâmica modal de placas. A abordagem **SGCP**, mesmo nas malhas mais refinadas, mantém uma diferença numérica considerável da resposta de referência, o que indica aproximação não satisfatória do fenômeno real.

Tanto a notação isoparamétrica quanto a notação *strain gradient* livre de cisalhamento parasítico, **SG**, fazem o tratamento do travamento por cisalhamento. A

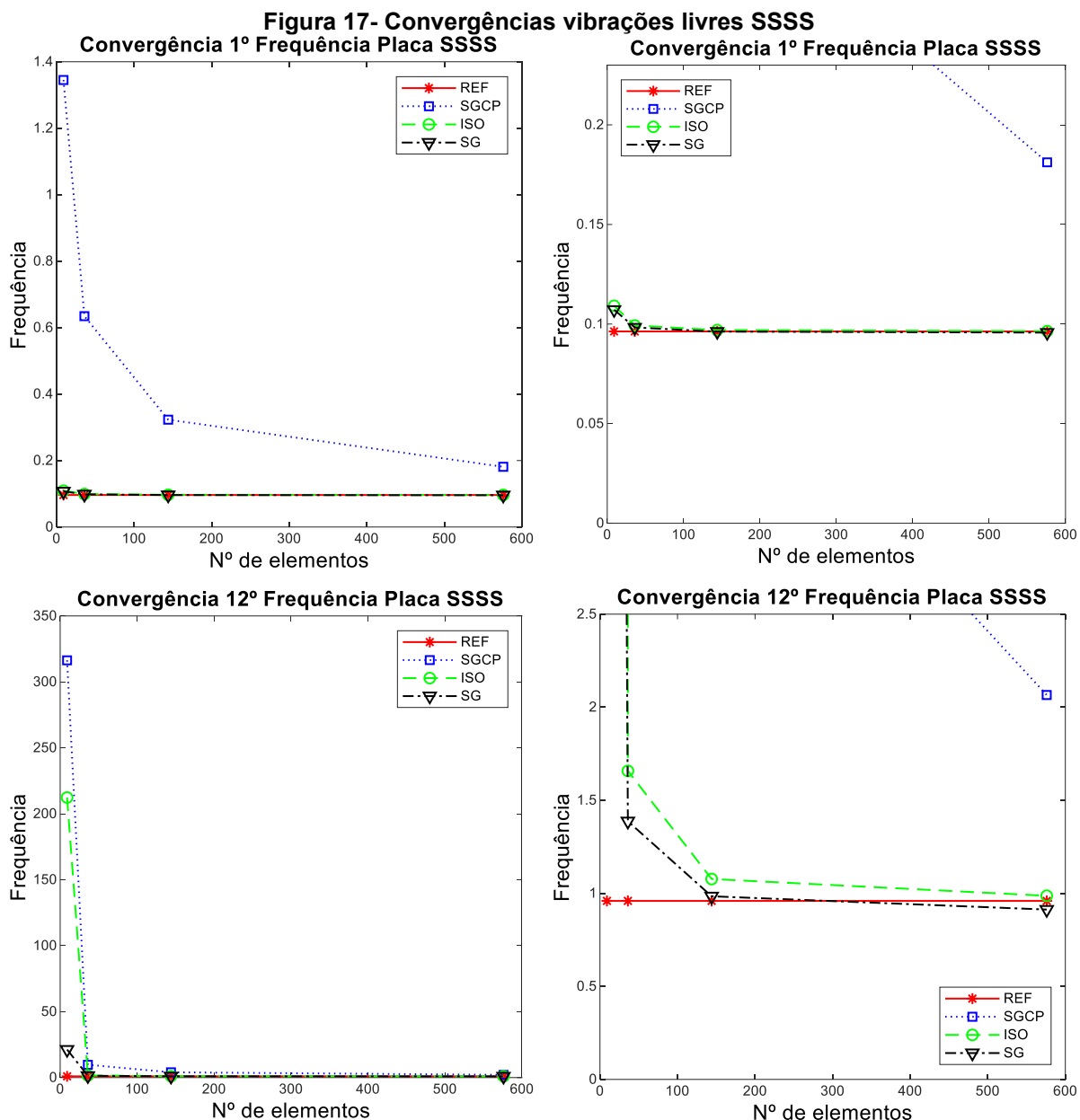
notação isoparamétrica trata o efeito de travamento ao aplicar a integração reduzida seletiva dos pontos de Gauss, na parte referente ao cisalhamento da matriz de rigidez, o que não elimina por completo o travamento e por vezes insere modos espúrios de energia nulo.

A abordagem **ISO** apresenta resultados que diferem excessivamente na malha com 9 elementos, na malha com 36 elementos e nas demais refinadas, apresenta valores próximos aos da solução analítica, indicando, que a partir desse ponto, a metodologia (o uso da integração reduzida) apresenta êxito no tratamento do travamento do modelo.

A notação *strain gradient* sem cisalhamento parasítico, **SG**, por retirar os termos espúrios, e, conseqüentemente eliminar o travamento por cisalhamento *a-priori*, apresenta, desde a primeira malha, valores menores em relação as demais metodologias. E com o refino das malhas se aproxima de **REF** satisfatoriamente, conferindo validação ao modelo.

Por vezes, somente é relevante o cálculo dos primeiros modos de vibração e frequências naturais, pois eles tendem a ser os mais proeminentes durante a vibração da estrutura, dominando as frequências e modos mais elevados.

A primeira frequência natural, por sua predominância sobre as demais, recebe o nome de frequência fundamental de vibração, para a frequência fundamental são realizadas análises de convergência ao longo das malhas. Todavia, para demonstrar a eficácia da notação *strain gradient*, também na obtenção de frequência mais elevadas, o estudo de convergência também é aplicado a 12^o frequência natural. Os gráficos de convergência são apresentados Figura 17.

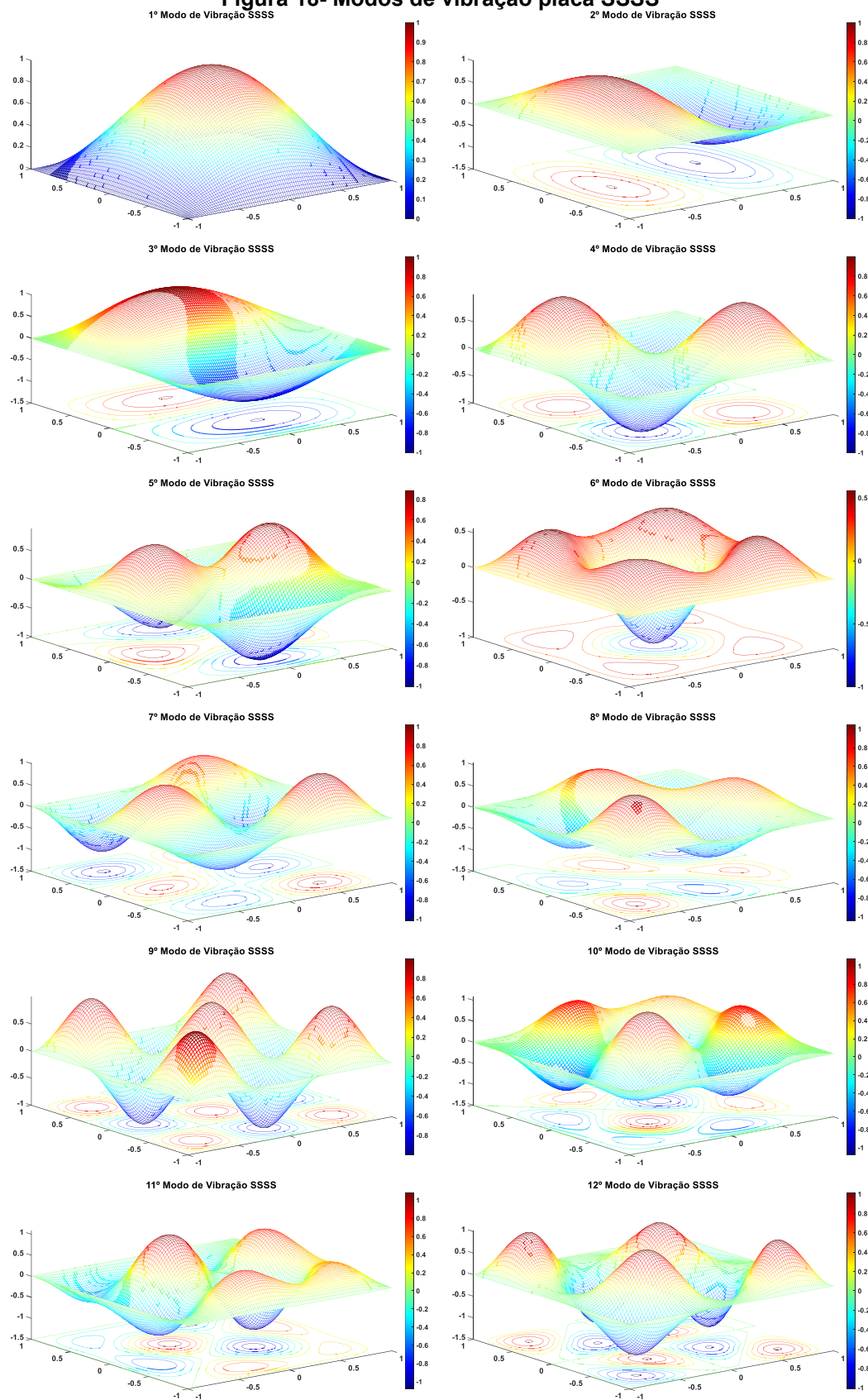


Pelos gráficos notamos que para a frequência fundamental a **ISO** e **SG** possuem comportamento bem parecidos, atingindo valores bem próximos aos da resposta de referência à medida que em que ocorre o refino, indicando assim, a ocorrência da convergência dos modelos, já **SGCP**, mesmo nas malhas mais refinadas, apresenta valores discrepantes a **REF**, indicando a não ocorrência da convergência.

Para a 12^o frequência natural, nota-se que os efeitos do travamento por cisalhamento não eliminados em **ISO** ficam mais evidentes, aumentando a diferença entre os valores de **ISO** e **SG**, essa diferença diminui com os refinamentos mais as curvas

não chegam a se sobrepor, com **SG** sempre produzindo valores menores que **ISO**. **SGCP** possui valores discrepantes aos valores de **REF** o que novamente indica a não ocorrência de convergência.

Com a finalidade de compreender o comportamento da placa SSSS, os modos de vibração, calculados pela notação *strain gradient* sem cisalhamento parasítico, **SG**, são apresentados na Figura 18.

Figura 18- Modos de vibração placa SSSS

Fonte: Autoria Própria

4.1.2 PLACA CCCC

Seguindo os exemplos para análise dinâmica modal, tem-se a placa com vinculações CCCC, suas características físicas e geométricas são apresentadas abaixo:

- $E = 10920$;
- $\nu = 0,3$;
- $L = 1$;
- $\rho = 1$;
- $k = 0,8601$;

A resposta de referência adotada para placa CCCC é a fornecida por Liew et. al. (2004). Dessa forma, são apresentados os valores para as doze primeiras frequências naturais da placa em questão da nas Tabelas 7 a 10 e na Figura 19.

Tabela 7- Resultados malhas 9 elementos placa CCCC

Placa Quadrada CCCC

Frequência	Malha 1: 3x3 (9 elementos)				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
1°	3,0502	0,2506	0,2424	0,1743	1649,97%	43,78%	39,07%
2°	6,8157	6,0983	6,0196	0,3576	1805,96%	1605,34%	1583,33%
3°	6,8157	6,0983	6,0196	0,3576	1805,96%	1605,34%	1583,33%
4°	9,1435	6,4258	6,3875	0,5240	1644,94%	1126,30%	1118,99%
5°	321,3363	161,2944	16,2835	0,6465	49603,99%	24848,86%	2418,72%
6°	321,3363	161,2944	16,2835	0,6505	49298,36%	24695,45%	2403,23%
7°	321,3827	215,6855	21,5673	0,8015	39997,65%	26810,23%	2590,87%
8°	321,4283	215,7439	21,5859	0,8015	40003,34%	26817,52%	2593,19%
9°	321,5075	215,8714	21,7024	1,0426	30737,09%	20605,10%	1981,57%
10°	321,5531	215,9564	21,9730	1,0426	30741,46%	20613,26%	2007,52%
11°	321,5994	289,2197	29,0055	1,0628	30159,63%	27112,99%	2629,16%
12°	321,5994	289,2197	29,0055	1,1823	27101,17%	24362,46%	2353,31%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 8- Resultados malhas 36 elementos placa CCCC

Placa Quadrada CCCC

Frequência	Malha 2: 6x6				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
1°	1,4587	0,1890	0,1862	0,1743	736,89%	8,43%	6,83%
2°	3,2063	0,4413	0,4258	0,3576	796,62%	23,41%	19,07%
3°	3,2063	0,4413	0,4258	0,3576	796,62%	23,41%	19,07%
4°	4,2969	0,6525	0,6125	0,5240	720,02%	24,52%	16,89%

5°	6,5563	1,0526	0,9617	0,6465	914,12%	62,82%	48,75%
6°	6,5574	1,0566	0,9664	0,6505	908,06%	62,43%	48,56%
7°	7,1558	1,2193	1,0819	0,8015	792,80%	52,13%	34,98%
8°	7,1558	1,2193	1,0819	0,8015	792,80%	52,13%	34,98%
9°	9,1640	1,6817	1,4033	1,0426	778,96%	61,30%	34,60%
10°	11,5015	2,8490	2,1228	1,0426	1003,16%	173,26%	103,61%
11°	11,5015	2,8490	2,1228	1,0628	982,19%	168,07%	99,74%
12°	11,8522	2,9577	2,1535	1,1823	902,47%	150,16%	82,14%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 9- Resultados malhas 144 elementos placa CCCC

Placa Quadrada CCCC

Frequência	Malha 3: 12x12				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
1°	0,7317	0,1786	0,1766	0,1743	319,79%	2,47%	1,32%
2°	1,5398	0,3750	0,3655	0,3576	330,59%	4,87%	2,21%
3°	1,5398	0,3750	0,3655	0,3576	330,59%	4,87%	2,21%
4°	2,0627	0,5533	0,5310	0,5240	293,65%	5,59%	1,34%
5°	2,9606	0,7097	0,6748	0,6465	357,94%	9,78%	4,38%
6°	2,9623	0,7131	0,6784	0,6505	355,39%	9,62%	4,29%
7°	3,2752	0,8751	0,8194	0,8015	308,63%	9,18%	2,23%
8°	3,2752	0,8751	0,8194	0,8015	308,63%	9,18%	2,23%
9°	4,1602	1,1773	1,0751	1,0426	299,02%	12,92%	3,12%
10°	5,0206	1,2252	1,1224	1,0426	381,55%	17,51%	7,65%
11°	5,0206	1,2252	1,1224	1,0628	372,39%	15,28%	5,61%
12°	5,2189	1,3744	1,2400	1,1823	341,42%	16,25%	4,88%

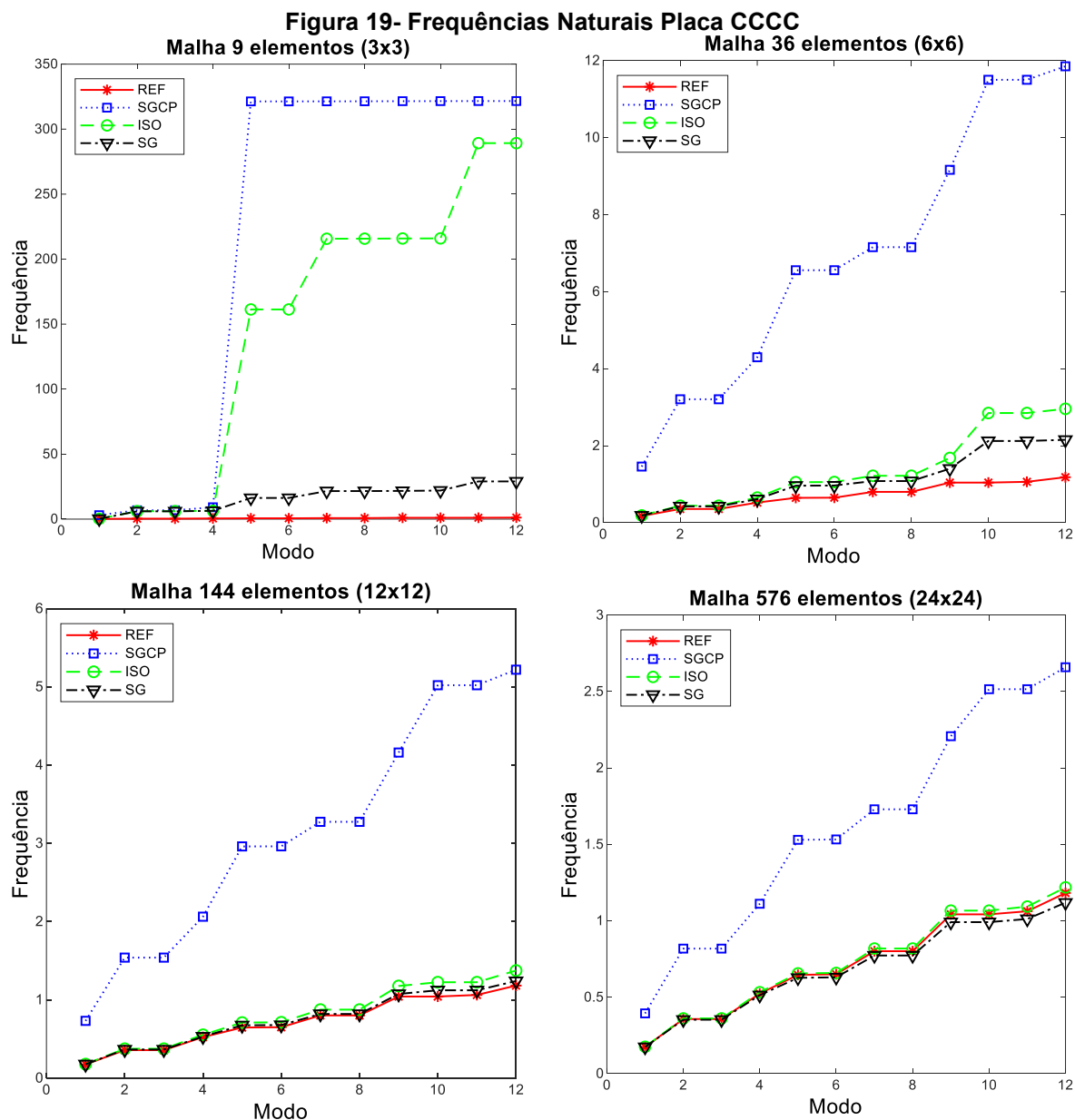
Fonte: Autoria Própria

Tabela 10- Resultados malhas 576 elementos placa CCCC

Placa Quadrada CCCC

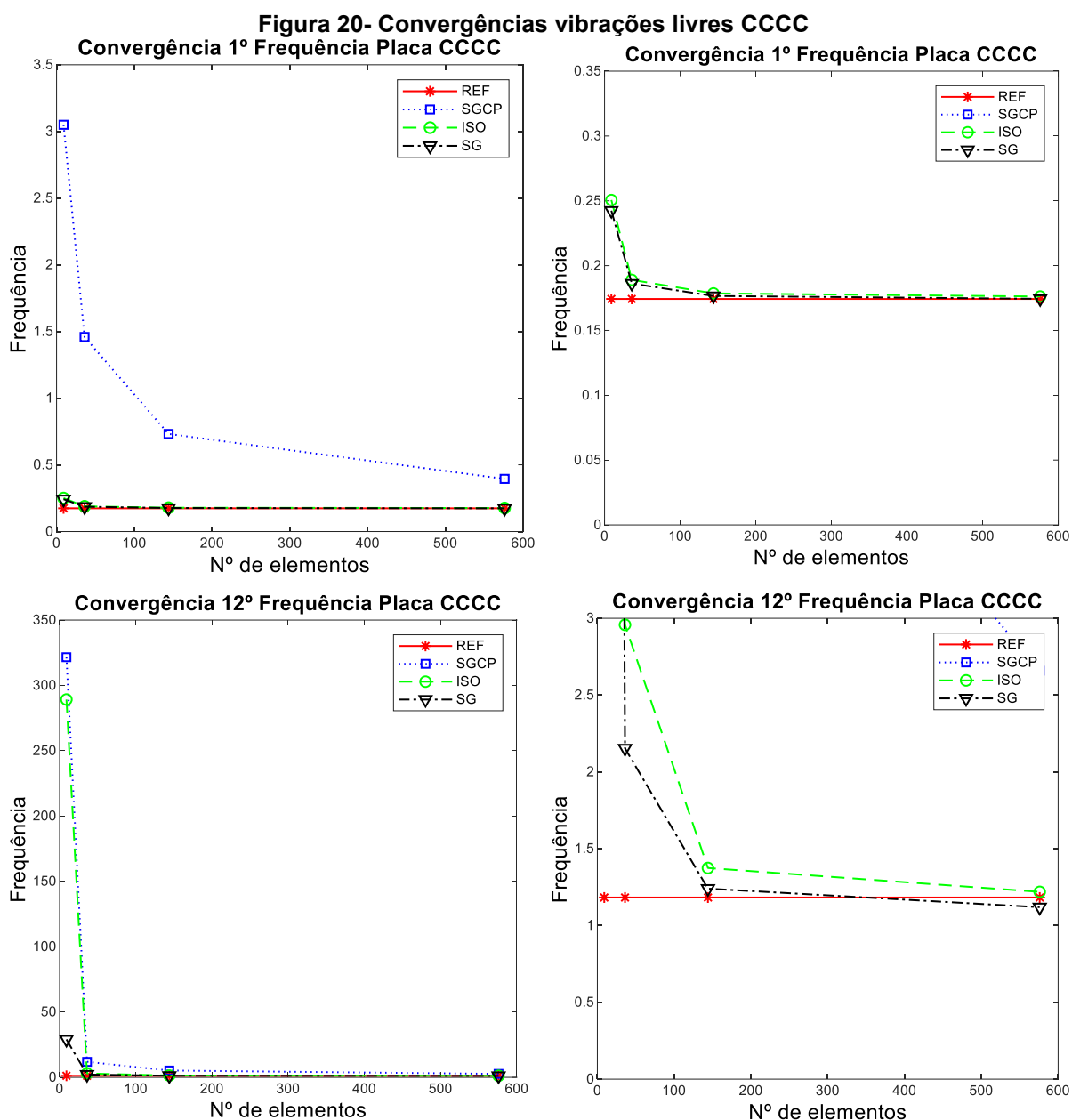
Frequência	Malha 4: 24x24				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
1°	0,3946	0,1762	0,1744	0,1743	126,39%	1,09%	0,06%
2°	0,8184	0,3616	0,3532	0,3576	128,86%	1,12%	1,23%
3°	0,8184	0,3616	0,3532	0,3576	128,86%	1,12%	1,23%
4°	1,1118	0,5330	0,5137	0,5240	112,18%	1,72%	1,97%
5°	1,5301	0,6561	0,6273	0,6465	136,67%	1,48%	2,97%
6°	1,5327	0,6592	0,6306	0,6505	135,62%	1,34%	3,06%
7°	1,7298	0,8189	0,7733	0,8015	115,82%	2,17%	3,52%
8°	1,7298	0,8189	0,7733	0,8015	115,82%	2,17%	3,52%
9°	2,2079	1,0669	0,9917	1,0426	111,77%	2,33%	4,88%
10°	2,5156	1,0669	0,9917	1,0426	141,28%	2,33%	4,88%
11°	2,5156	1,0935	1,0121	1,0628	136,70%	2,89%	4,77%
12°	2,6592	1,2189	1,1192	1,1823	124,92%	3,10%	5,34%

Fonte: Autoria Própria



Fonte: Autoria Própria

São apresentados os gráficos de convergência referentes a 1º e a 12º (frequência mais alta calculada pela resposta de referência adotada) frequência natural, esses gráficos são apresentados Figura 20.



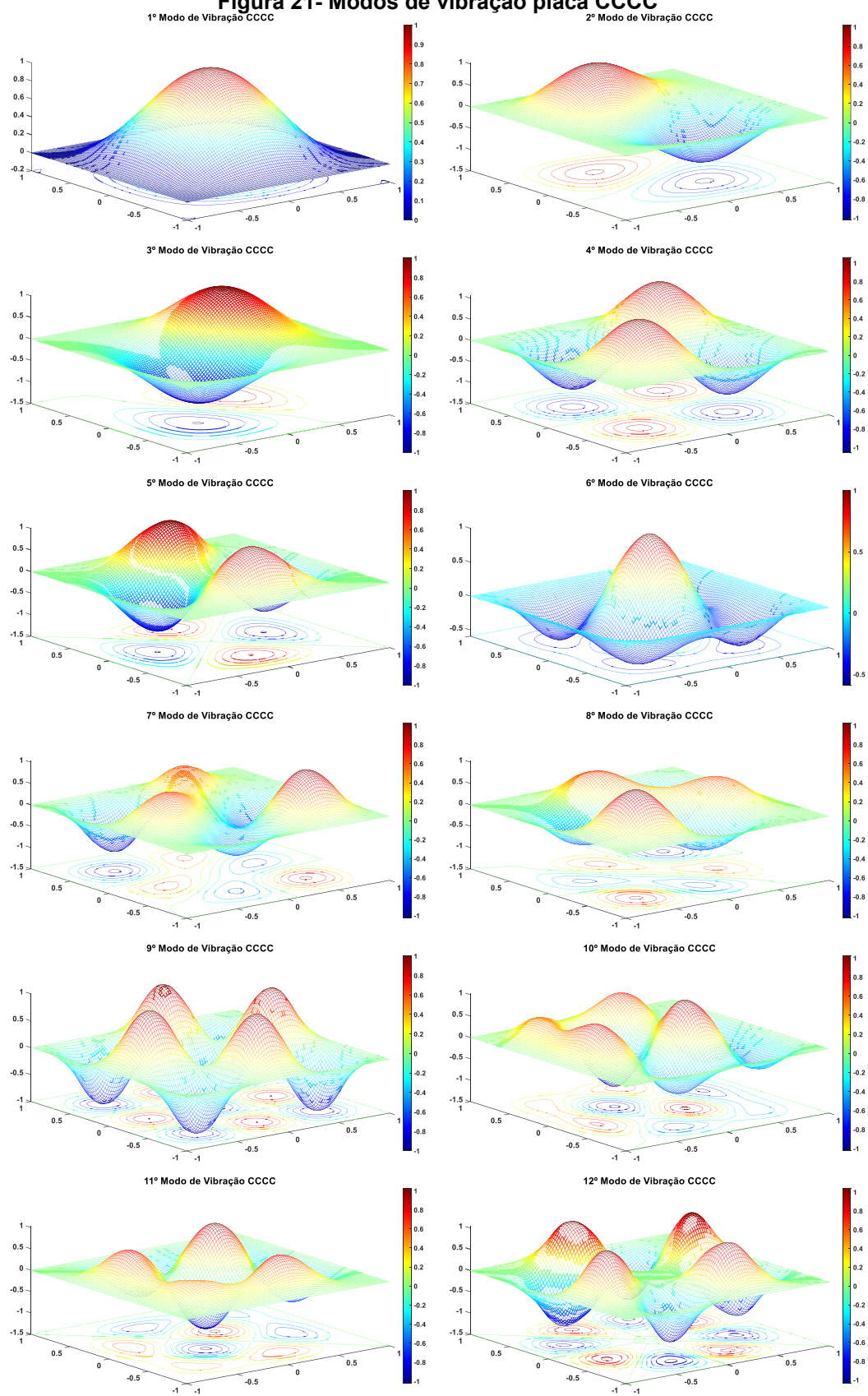
Fonte: Autoria Própria

A convergência não ocorre para a abordagem **SGCP**, seus valores mesmo nas malhas mais refinadas não atingem patamares aceitáveis para uma análise por elementos finitos (cerca de 10% de diferença percentual). Essa não convergência se dá devido ao enrijecimento artificial (ou travamento do modelo), que está associado a deformação por cisalhamento (ou distorção angular) como demonstrado na seção 2.6.1 e tem sua origem nos termos de cisalhamento parasítico (que também são referidos como termos espúrios).

Para a frequência fundamental de vibração o comportamento das abordagens **SG** e **ISO** são parecidos em termos de valores, com a notação *strain gradient* sempre produzindo valores ligeiramente menores (mais precisos) devido ao fato de ser uma metodologia completamente livre de travamento por cisalhamento.

Nas frequências mais elevadas as diferenças numéricas entre as notações **SG** e **ISO** são acentuadas, sendo que, no estudo da 12^o frequência, para a malha mais grosseira (com 9 elementos), o valor obtido pela notação isoparamétrica (289,2197) apresenta uma discrepância por volta de cem vezes maior em relação a frequência calculada pela notação *strain gradient* sem cisalhamento parasítico (29,0055).

Ainda sobre a convergência da 12^o frequência, na malha com 36 elementos, o valor obtido por **ISO** se aproxima ao encontrado por **SG**. Os valores para o erro são maiores para os modos de vibração mais altos, isso ocorre por causa apes que as funções de aproximação fornecem uma melhor aproximação do comportamento vibratório para os modos mais baixos e uma aproximação menos precisa aos modos mais elevados (MEIRELES, 2008). A Figura 21 apresenta os modos de vibração para a placa CCCC.

Figura 21- Modos de vibração placa CCCC

Fonte: Autoria Própria

4.1.3 PLACA CCCF

Nessa seção é apresentada a análise dinâmica modal realizada para a placa com vinculações CCCF. Para a realização das análises foram definidos os valores para as características físicas e geométricas do problema, tais valores são:

- $E = 10920$;
- $\nu = 0,3$;
- $L = 1$;
- $\rho = 1$;
- $k = 0,8601$;
- $h = 0,1$.

Ressalta-se a escolha por uma relação espessura por comprimento ($\frac{h}{L} = 0,1$) dez vezes maior que o exemplo anterior, o que possibilita avaliar o comportamento das abordagens de cálculo para placas espessas.

A resposta de referência adotada para comparação, é a solução analítica apresentada por Dawe e Roufaeil (1980), são apresentadas as primeiras seis frequências naturais do problema, todavia como estabelecido no capítulo 3, para essa presente pesquisa calcula-se até a 12^o frequência natural para as diferentes abordagens.

Os resultados para as frequências naturais para a placa CCCF calculados pelas diferentes metodologias são apresentados nas Tabelas 11, 12, 13 e 14, e a Figura 22 apresenta as curvas de crescimento até a sexta frequência (frequência mais alta calculada pela resposta de referência).

Tabela 11- Resultados malhas 9 elementos placa CCCF

Placa Quadrada CCCF							
Frequência	Malha 1: 3x3 (9 elementos)				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
1°	2,3263	1,4922	1,4854	1,0890	55,90%	37,02%	36,40%
2°	3,3169	2,0673	2,0349	1,7580	60,45%	17,59%	15,75%
3°	6,4778	4,7316	4,6600	2,6730	36,91%	77,01%	74,34%
4°	6,9081	5,1686	5,1249	3,2160	33,66%	60,72%	59,36%
5°	7,0203	6,1550	6,1215	3,3180	14,06%	85,50%	84,49%
6°	9,2753	6,3824	6,3770	4,6150	45,33%	38,30%	38,18%
7°	32,6133	16,8307	16,5638				
8°	32,6900	18,2777	17,0218				
9°	32,9151	20,0925	18,9769				
10°	33,4286	21,0286	20,8213				
11°	33,7974	23,0630	22,7865				
12°	33,8063	23,9762	23,6983				

Fonte: Autoria Própria

Tabela 12- Resultados malhas 36 elementos placa CCCF

Placa Quadrada CCCF							
Frequência	Malha 2: 6x6				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
1°	1,4688	1,1596	1,1579	1,0890	34,88%	6,48%	6,33%
2°	2,2105	1,8292	1,8215	1,7580	25,74%	4,05%	3,61%
3°	3,8773	3,2110	3,2070	2,6730	45,05%	20,13%	19,98%
4°	4,3921	3,6121	3,5984	3,2160	36,57%	12,32%	11,89%
5°	4,3981	3,7389	3,7178	3,3180	32,55%	12,69%	12,05%
6°	5,9808	5,0554	5,0095	4,6150	29,59%	9,54%	8,55%
7°	7,4707	6,5852	6,5770				
8°	7,8265	6,7601	6,7414				
9°	7,9929	6,8823	6,8501				
10°	8,9203	7,5809	7,5125				
11°	9,0502	7,6215	7,5460				
12°	11,2749	8,5618	8,5252				

Fonte: Autoria Própria

Tabela 13- Resultados malhas 144 elementos placa CCCF

Placa Quadrada CCCF							
Frequência	Malha 3: 12x12				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
1°	1,1877	1,0992	1,0987	1,0890	9,06%	0,94%	0,89%
2°	1,8698	1,7644	1,7626	1,7580	6,36%	0,36%	0,26%
3°	2,9803	2,7794	2,7783	2,6730	11,50%	3,98%	3,94%
4°	3,5093	3,2957	3,2923	3,2160	9,12%	2,48%	2,37%
5°	3,5771	3,3923	3,3872	3,3180	7,81%	2,24%	2,09%
6°	4,9251	4,6867	4,6761	4,6150	6,72%	1,55%	1,32%

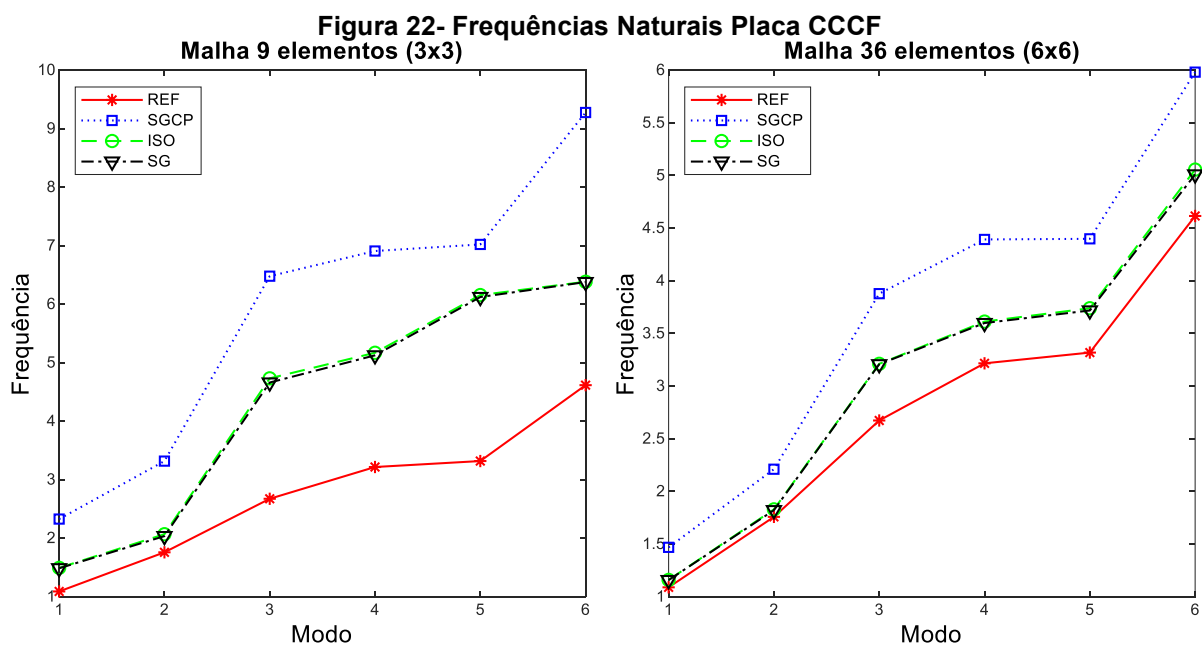
7°	5,4384	5,1219	5,1199
8°	5,9400	5,5907	5,5860
9°	5,9549	5,6525	5,6443
10°	7,0650	6,6981	6,6816
11°	7,0709	6,7447	6,7257
12°	8,4433	8,0305	8,0273

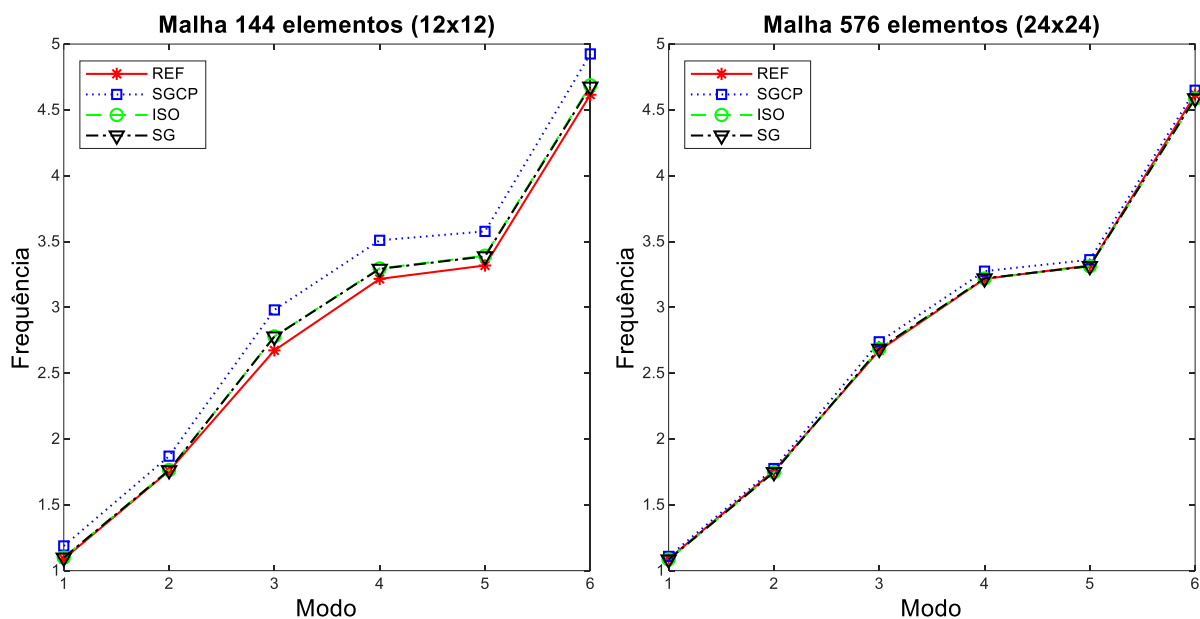
Fonte: Autoria Própria

Tabela 14- Resultados malhas 576 elementos placa CCCF

Placa Quadrada CCCF							
Frequência	Malha 4: 24x24			Erro Percentual			
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
1°	1,1081	1,0849	1,0848	1,0890	1,75%	0,39%	0,38%
2°	1,7756	1,7482	1,7477	1,7580	1,00%	0,59%	0,56%
3°	2,7384	2,6854	2,6851	2,6730	2,45%	0,45%	0,46%
4°	3,2748	3,2198	3,2190	3,2160	1,83%	0,09%	0,12%
5°	3,3617	3,3134	3,3122	3,3180	1,32%	0,17%	0,14%
6°	4,6492	4,5879	4,5853	4,6150	0,74%	0,64%	0,59%
7°	4,9064	4,8214	4,8208				
8°	5,4167	5,3260	5,3248				
9°	5,4691	5,3904	5,3883				
10°	6,5579	6,4654	6,4613				
11°	6,5997	6,5162	6,5116				
12°	7,4545	7,3401	7,3391				

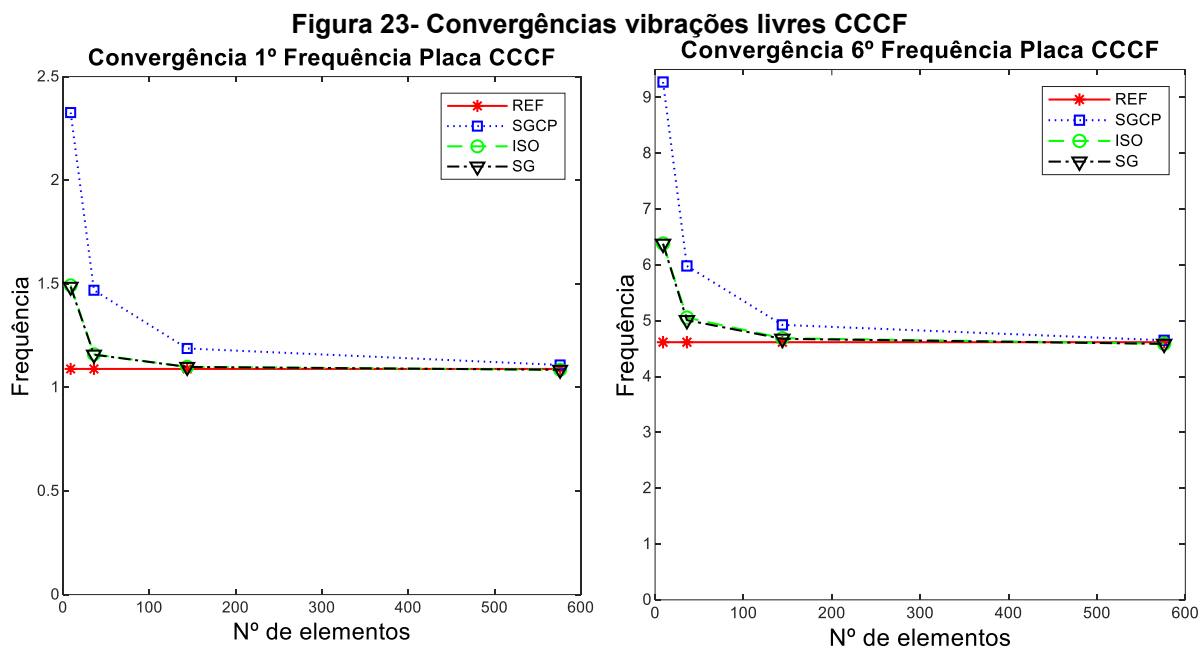
Fonte: Autoria Própria





Fonte: Autoria Própria

Pelos resultados mostrados nas Tabelas de 11 a 14, e na Figura 22, nota-se que a notação *strain gradient* livre de cisalhamento parasítico, **SG**, apresenta os valores mais próximos da resposta de referência, **REF**, seguido de bem perto pelas respostas obtidas pela notação isoparamétrica com integração reduzida, **ISO**, e ambas apresentam valores consideravelmente mais próximos de **REF** ao se comparar com os valores obtidos pela notação *strain gradient* com cisalhamento parasítico, **SGCP**. Os gráficos de convergência para a primeira e a sexta (mais alta com resposta de referência) são apresentados na Figura 23.

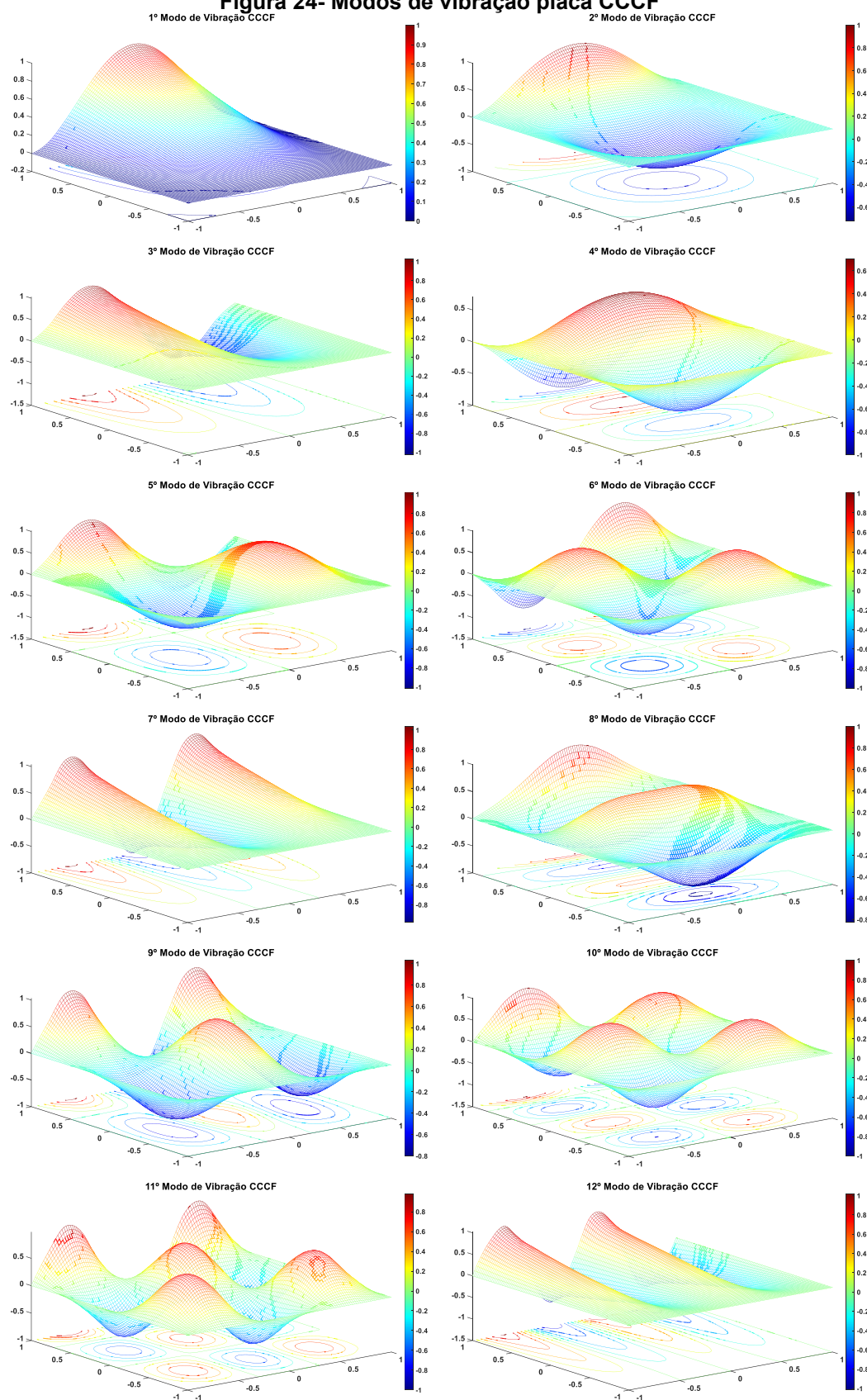


Fonte: Autoria Própria

A convergência em relação a resposta de referência ocorre para as três diferentes abordagens, o que se justifica pelo fato de que placas espessas tendem a sofrer menos com os efeitos do travamento por cisalhamento, o travamento é maior quando se tende ao limite da placa, ou seja, quando a relação entre a espessura e a dimensão representativa do plano médio tende a zero (MATTAR NETO, 1989). Entretanto, esse efeito não deve ser desprezado, principalmente em malhas menos refinadas.

Com finalidade de complementar a análise, os modos de vibração calculados pela notação *strain gradient* sem cisalhamento parasítico, **SG**, são apresentados na Figura 24.

Figura 24- Modos de vibração placa CCCF



Fonte: Autoria Própria

Nota-se que devido à natureza de suas vinculações, o comportamento da placa CCCF é bem diferente na extremidade livre, que faz com as ondulações sejam ressaltadas nessa borda.

4.2 EXEMPLOS ANÁLISE DE FLAMBAGEM

Seguindo o estudo sobre as abordagens do método dos elementos finitos, inicia-se a apresentação dos resultados para as placas em que se analisa a flambagem.

4.2.1 PLACA SSSS

A primeira análise placa analisada a flambagem é a placa com todas as bordas simplesmente apoiadas, SSSS. Para a realização das análises foram definidos os valores para as características físicas e geométricas do problema, tais valores são apresentados abaixo:

- $E = 10920$;
- $\nu = 0,3$;
- $L = 1$;
- $\rho = 1$;
- $k = 0,8333$;
- $\sigma_{xx} = \frac{1}{h}$

A espessura h , varia conforme estabelecido na seção 3.4, podendo assumir os valores de:

- $\frac{h}{L} = 0,01$;
- $\frac{h}{L} = 0,02$;
- $\frac{h}{L} = 0,05$;
- $\frac{h}{L} = 0,10$;
- $\frac{h}{L} = 0,20$;

Essa variação de espessura permite avaliar as diferentes abordagens no cálculo do coeficiente (ou fator) de flambagem tanto em placas finas quanto em placas espessas. A resposta de referência adotada, **REF**, é a resposta analítica apresentada por Dawe e Roufaeil (1982).

Pela natureza do problema de flambagem em si, e a predominância da primeira carga crítica que leva a peça estrutural a flambagem sobre as demais, faz-se a opção por apresentar os valores encontrados apenas para o primeiro coeficiente de flambagem (relacionada a primeira carga crítica), todavia, ressalta-se que como o cálculo é realizado a partir da resolução do problema de autovalores e autovetores, são obtidas tantas cargas críticas e conseqüentemente quantos fatores de flambagem quanto o número de graus de liberdade aplicados.

Os valores para o primeiro coeficiente de flambagem encontrados para as diferentes espessuras para a Placa SSSS são apresentados nas Tabelas 15 a 19.

Tabela 15- Coeficiente de flambagem (k_b) com $h = 0,01$ placa SSSS

Placa Quadrada SSSS							
Nº Elementos	$h = 0,01$				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
9	792,1578	5,2233	5,1289		19718,81%	30,68%	28,32%
36	173,7694	4,2545	4,2370	3,9970	4247,50%	6,44%	6,00%
144	44,9823	4,0589	4,0548		1025,40%	1,55%	1,45%
576	14,1556	4,0124	4,0114		254,16%	0,39%	0,36%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 16- Coeficiente de flambagem (k_b) com $h = 0,02$ placa SSSS

Placa Quadrada SSSS							
Nº Elementos	$h = 0,02$				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
9	201,1084	5,2087	5,1147		4942,84%	30,61%	28,25%
36	46,4562	4,2447	4,2273	3,9880	1064,90%	6,44%	6,00%
144	14,2411	4,0500	4,0459		257,10%	1,55%	1,45%
576	6,5296	4,0036	4,0026		63,73%	0,39%	0,37%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 17- Coeficiente de flambagem (k_b) com $h = 0,05$ placa SSSS

Placa Quadrada SSSS							
Nº Elementos	$h = 0,05$				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
9	35,5548	5,1089	5,0182		804,93%	30,03%	27,72%
36	10,7504	4,1774	4,1604	3,9290	173,62%	6,32%	5,89%
144	5,5761	3,9885	3,9845		41,92%	1,51%	1,41%
576	4,3370	3,9435	3,9425		10,38%	0,37%	0,34%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 18- Coeficiente de flambagem (k_b) com $h = 0,1$ placa SSSS

Placa Quadrada SSSS							
Nº Elementos	$h = 0,1$				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
9	11,7074	4,7861	4,7052		213,79%	28,28%	26,11%
36	5,4582	3,9560	3,9406	3,7310	46,29%	6,03%	5,62%
144	4,1488	3,7855	3,7819		11,20%	1,46%	1,36%
576	3,8349	3,7448	3,7439		2,78%	0,37%	0,35%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 19- Coeficiente de flambagem (k_b) com $h = 0,2$ placa SSSS

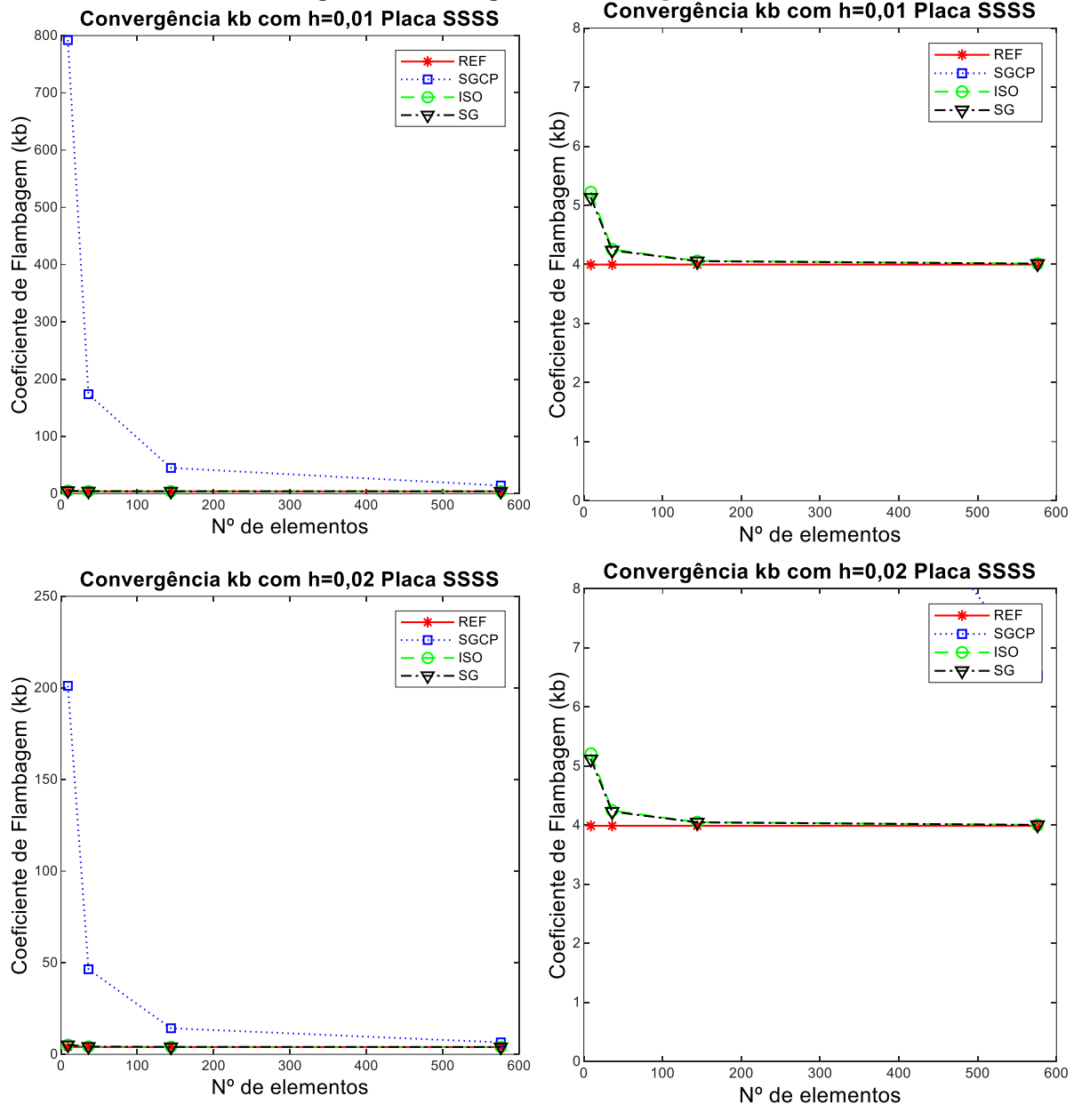
Placa Quadrada SSSS							
Nº Elementos	$h = 0,2$				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
9	5,1670	3,8514	3,7959		65,34%	23,24%	21,47%
36	3,5715	3,2846	3,2735	3,1250	14,29%	5,11%	4,75%
144	3,2336	3,1641	3,1614		3,48%	1,25%	1,16%
576	3,1523	3,1351	3,1344		0,87%	0,32%	0,30%

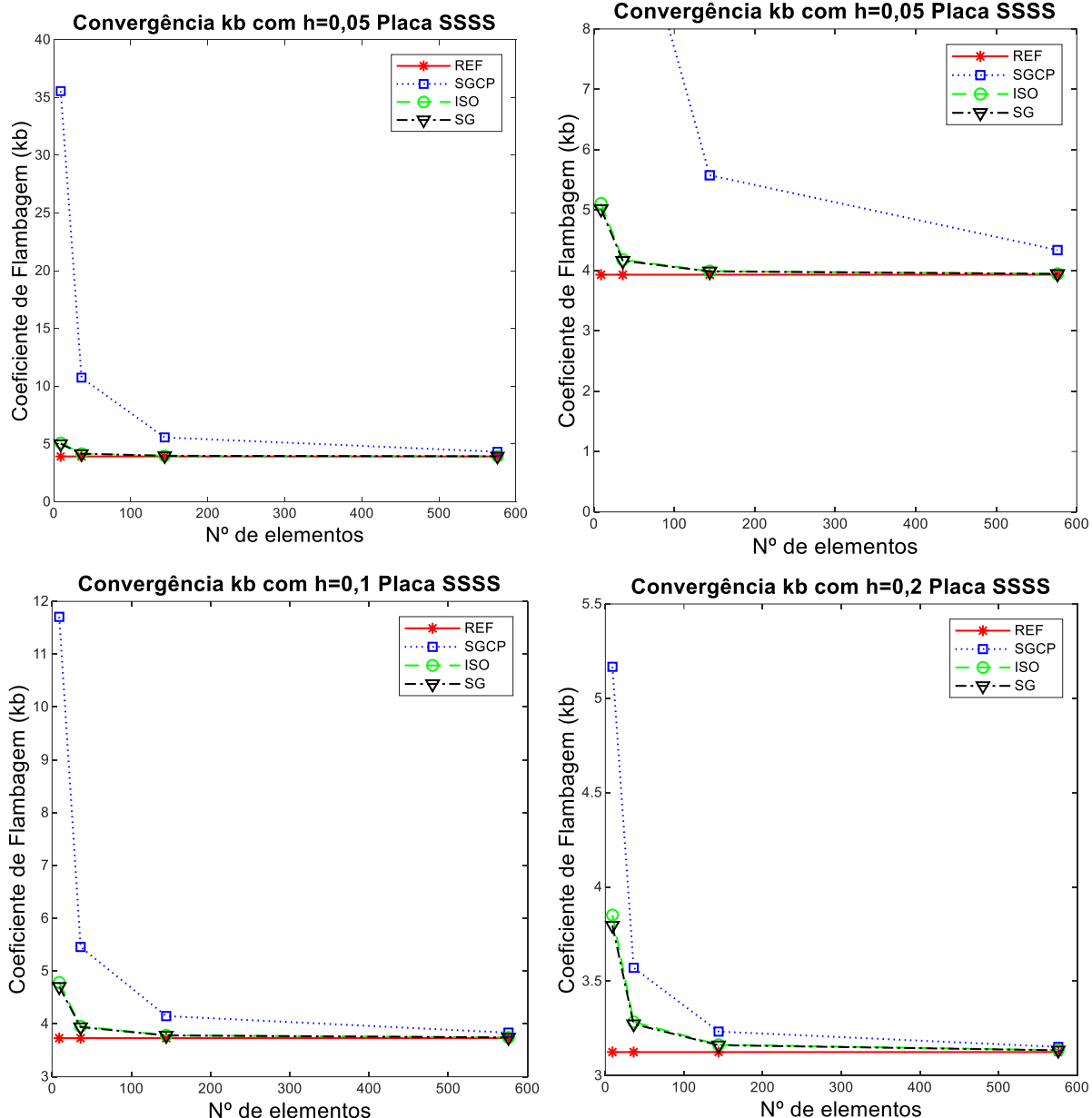
Fonte: Autoria Própria

A partir dos resultados apresentados nas tabelas observa-se que **SGCP**, mesmo nas malhas mais refinadas, só atinge valores de erros percentuais aceitáveis para as placas espessas ($h = 0,1$ e $0,2$), sendo que seu comportamento para as três configurações mais finas é muito distante dos valores de **REF**, esse estudo demonstra o cuidado em que se deve ter ao se trabalhar com elementos que sofram do enrijecimento artificial na análise de flambagem.

As abordagens **ISO** e **SG** atingem valores próximos uma da outra ao longo das variações, sendo que, assim como na análise dinâmica modal, os valores de **SG** são sempre ligeiramente inferiores aos de **ISO**. Para expandir a discussão, a Figura 25 apresenta os gráficos de convergência obtidos para as análises realizadas

Figura 25- Convergências flambagem SSSS





Fonte: Autoria Própria

Pelos resultados apresentados nas Tabelas 15 a 19 e os gráficos de convergência da Figura 25, se conclui que as abordagens **ISO** e **SG** são validadas juntas as respostas analíticas de **REF**. Os resultados mostram que a diferença das notações **ISO** e **SG** são numericamente inferiores em relação as diferenças encontradas na análise dinâmica modal.

O fato de **SGCP** não convergir para placas mais finas demonstra o quão importante é realizar o tratamento do travamento por cisalhamento em análises de flambagem em placas finas, e a pequena diferença entre **ISO** e **SG** mostra como a

notação *strain gradient* apresenta uma alternativa válida de tratamento de tal fenômeno ao oferecer possibilidade de tratamento *a-priori*, eliminando tais efeitos por completo.

4.2.2 PLACA SCSC

Seguindo o estudo do comportamento das diferentes abordagens no cálculo de flambagem, apresenta-se os resultados para a placa com duas bordas simplesmente apoiadas e duas bordas engastadas, SCSC. Para a realização das análises foram definidos os valores para as características físicas e geométricas do problema, tais valores são apresentados abaixo:

- $E = 10920$;
- $\nu = 0,3$;
- $L = 1$;
- $\rho = 1$;
- $k = 0,8222$;
- $\sigma_{xx} = \frac{1}{h}$

Para este exemplo, se utiliza como resposta de referência os valores apresentados por HOSSEINI-HASHEMIA et. al. (2008), que apresenta uma solução analítica para a placa SCSC. Para este exemplo a espessura h , varia conforme estabelecido um pouco diferente do exemplo anterior, para seguir as escolhas de **REF** adota-se h assumindo os valores abaixo:

- $\frac{h}{L} = 0,001$;
- $\frac{h}{L} = 0,05$;
- $\frac{h}{L} = 0,10$;
- $\frac{h}{L} = 0,20$;

O que possibilita a avaliação das abordagens em análise de placas ainda mais finas que as do exemplo anterior. As respostas para a placa SCSC são apresentadas das Tabelas 20 a 23.

Tabela 20- Coeficiente de flambagem (k_b) com $h = 0,001$ placa SCSC

Placa Quadrada SCSC							
Nº Elementos	$h = 0,001$				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
9	233200,00	15,2005	14,7076		3031976,04%	97,64%	91,23%
36	46132,00	9,0408	8,9409	7,6911	599710,17%	17,55%	16,25%
144	10804,00	7,9897	7,9685		140374,05%	3,88%	3,61%
576	2662,10	7,7629	7,7578		34512,73%	0,93%	0,87%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 21- Coeficiente de flambagem (k_b) com $h = 0,05$ placa SCSC

Placa Quadrada SCSC							
Nº Elementos	$h = 0,05$				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
9	96,9711	13,3548	13,0223		1228,57%	82,97%	78,41%
36	25,0246	8,2415	8,1684	7,2989	242,85%	12,91%	11,91%
144	11,3739	7,3785	7,3618		55,83%	1,09%	0,86%
576	8,1884	7,1923	7,1882		12,19%	1,46%	1,52%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 22- Coeficiente de flambagem (k_b) com $h = 0,1$ placa SCSC

Placa Quadrada SCSC							
Nº Elementos	$h = 0,1$				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
9	26,5403	10,0180	9,8753		316,66%	57,27%	55,03%
36	10,1897	6,7520	6,7091	6,3698	59,97%	6,00%	5,33%
144	7,0315	6,1978	6,1872		10,39%	2,70%	2,87%
576	6,2812	6,0722	6,0696		1,39%	4,67%	4,71%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 23- Coeficiente de flambagem (k_b) com $h = 0,2$ placa SCSC

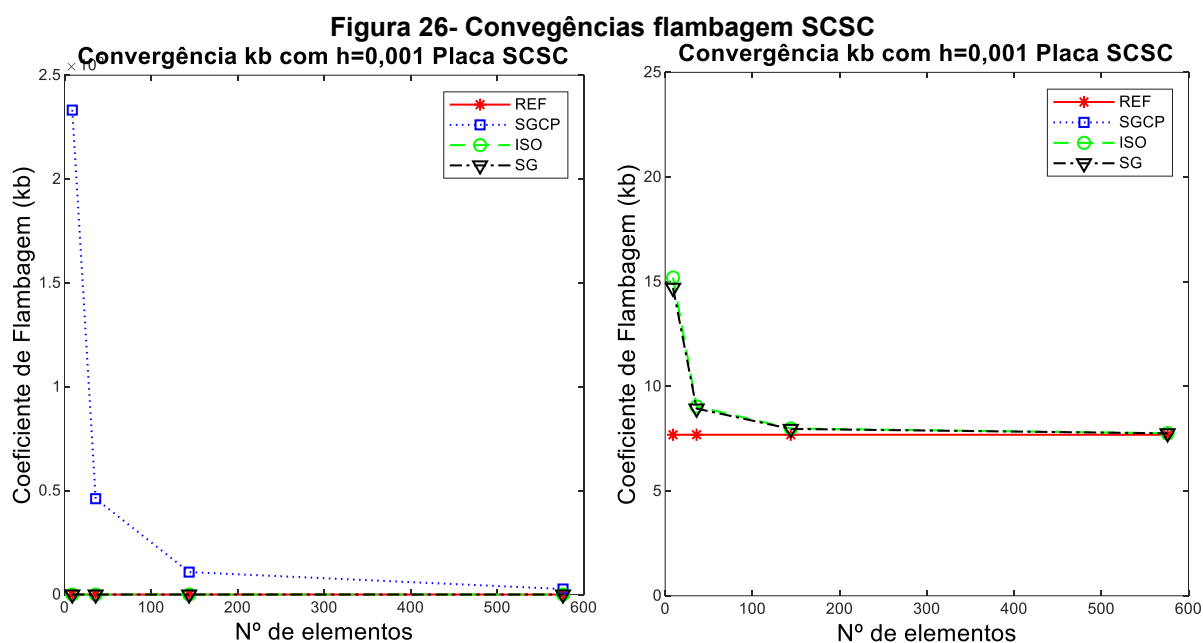
Placa Quadrada SCSC							
Nº Elementos	$h = 0,2$				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
9	12,3602	5,3278	5,3013		186,09%	23,32%	22,70%
36	4,7869	4,1985	4,1852	4,3204	10,80%	2,82%	3,13%
144	4,1360	3,9905	3,9868		4,27%	7,64%	7,72%
576	3,9781	3,9415	3,9405		7,92%	8,77%	8,79%

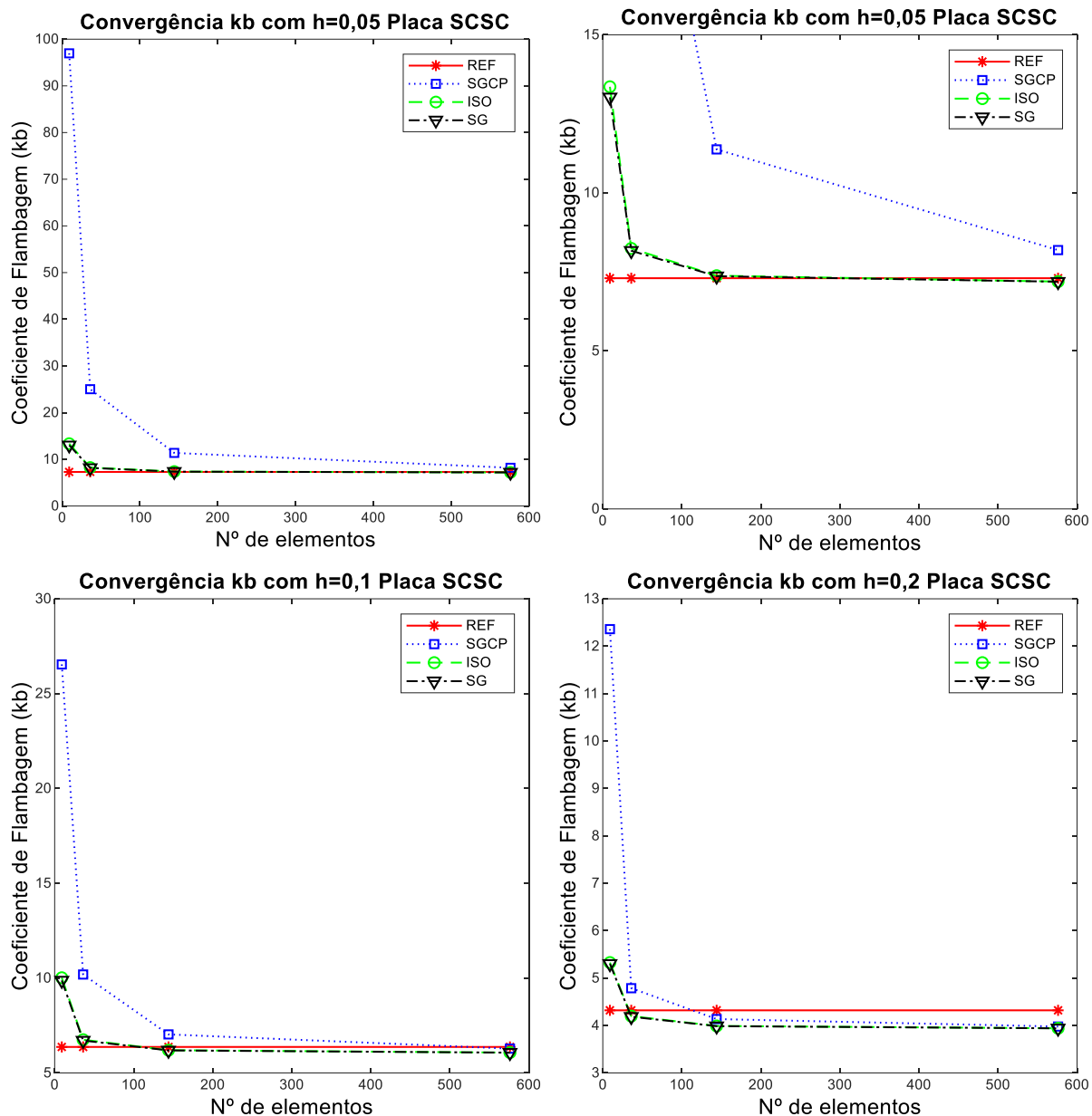
Fonte: Autoria Própria

Os resultados apresentados nas tabelas, mostram que para o exemplo da placa SCSC, os efeitos do cisalhamento parasítico, presentes em **SGCP**, fizeram com que os coeficientes de flambagem calculados para as espessuras mais finas ($h = 0,001$ e $h = 0,05$) ficassem discrepantes em relação a **REF**, e mesmo que os valores se aproximem à medida que as malhas são refinadas, **SGCP** se apresenta muito distante de **ISO** e **SG**.

Todavia, para as placas mais espessas observa-se, nas malhas mais refinadas, um comportamento de **SGCP** mais próxima de **REF** em relação a **ISO** e **SG**, isso ocorre pode ser explicado pela natureza numérica do método dos elementos finitos, de que quanto mais se refina a malha (e conseqüentemente aumenta os graus de liberdade) valores numéricos menores são obtidos, cada vez mais próximos a resposta real da estrutura, como **SGCP** possui enrijecimento artificial, ela diminui numericamente de forma mais lenta que as demais que tratam o enrijecimento.

A abordagem **SG** apresenta valores numericamente menores em todas as malhas, sendo que nas malhas menos refinadas, sua diferença para **ISO** é maior do que nas malhas mais refinadas, indicando que **SG** pode ser a mais indicada para análises com malhas mais grosseiras. Para um melhor entendimento do comportamento das abordagens são apresentados os gráficos da Figura 26.





Fonte: Autoria Própria

Pelos gráficos de convergência fica nítido o efeito deletério do travamento por cisalhamento em **SGCP** nas placas finas, sendo que nas placas mais espessas esse efeito é menos significativo e diluído com refino até atingir níveis aceitáveis. Observa-se que **ISO** e **SG** apresentam formas de convergência semelhantes, sendo que, nas placas mais refinadas só atingem a convergência na malha com 144 elementos, já nas placas mais espessas, já na malha com 36 elementos se nota a convergência para os valores de **REF**.

4.2.3 PLACA SSSF

Para finalizar os estudos de flambagem, são apresentados os resultados para a placa três bordas apoiadas e uma livre, SSSF. Para a realização das análises foram definidos os valores para as características físicas e geométricas do problema, tais valores são similares ao exemplo anterior e apresentados abaixo:

- $E = 10920$;
- $\nu = 0,3$;
- $L = 1$;
- $\rho = 1$;
- $k = 0,8333$;
- $\sigma_{xx} = \frac{1}{h}$

A resposta de referência, **REF**, adotada é a apresentada por MIZUSAWA (1993), e a razão de aspecto segue a mesma variação do exemplo anterior, sendo seus valores reapresentados abaixo:

- $\frac{h}{L} = 0,001$;
- $\frac{h}{L} = 0,05$;
- $\frac{h}{L} = 0,10$;
- $\frac{h}{L} = 0,20$;

Os valores encontrados para o coeficiente de flambagem para a placa SSSF são apresentados nas tabelas abaixo.

Tabela 24- Coeficiente de flambagem (k_b) com $h = 0,001$ placa SSSF

Placa Quadrada SSSF							
Nº Elementos	$h = 0,001$				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
9	35965,00	1,6771	1,6646		2565163,91%	19,62%	18,73%
36	8234,20	1,4621	1,4594	1,4020	587218,12%	4,29%	4,09%
144	2014,30	1,4162	1,4156		143573,32%	1,01%	0,97%
576	501,83	1,4051	1,4050		35694,22%	0,22%	0,21%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 25- Coeficiente de flambagem (k_b) com $h = 0,05$ placa SSSF

Placa Quadrada SSSF							
Nº Elementos	$h = 0,05$				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG

9	15,7444	1,6495	1,6375		1042,55%	19,70%	18,83%
36	4,6868	1,4365	1,4339	1,3780	240,12%	4,25%	4,06%
144	2,1952	1,3919	1,3913		59,30%	1,01%	0,97%
576	1,5831	1,3812	1,3810		14,88%	0,23%	0,22%

Fonte: Autoria Própria

Tabela 26- Coeficiente de flambagem (k_b) com $h = 0,1$ placa SSSF

Placa Quadrada SSSF							
Nº Elementos	$h = 0,1$				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
9	4,9059	1,5771	1,5662		269,70%	18,85%	18,03%
36	2,1614	1,3818	1,3794	1,3270	62,88%	4,13%	3,95%
144	1,5348	1,3405	1,3399		15,66%	1,02%	0,97%
576	1,3794	1,3305	1,3304		3,95%	0,26%	0,26%

Fonte: Autoria Própria

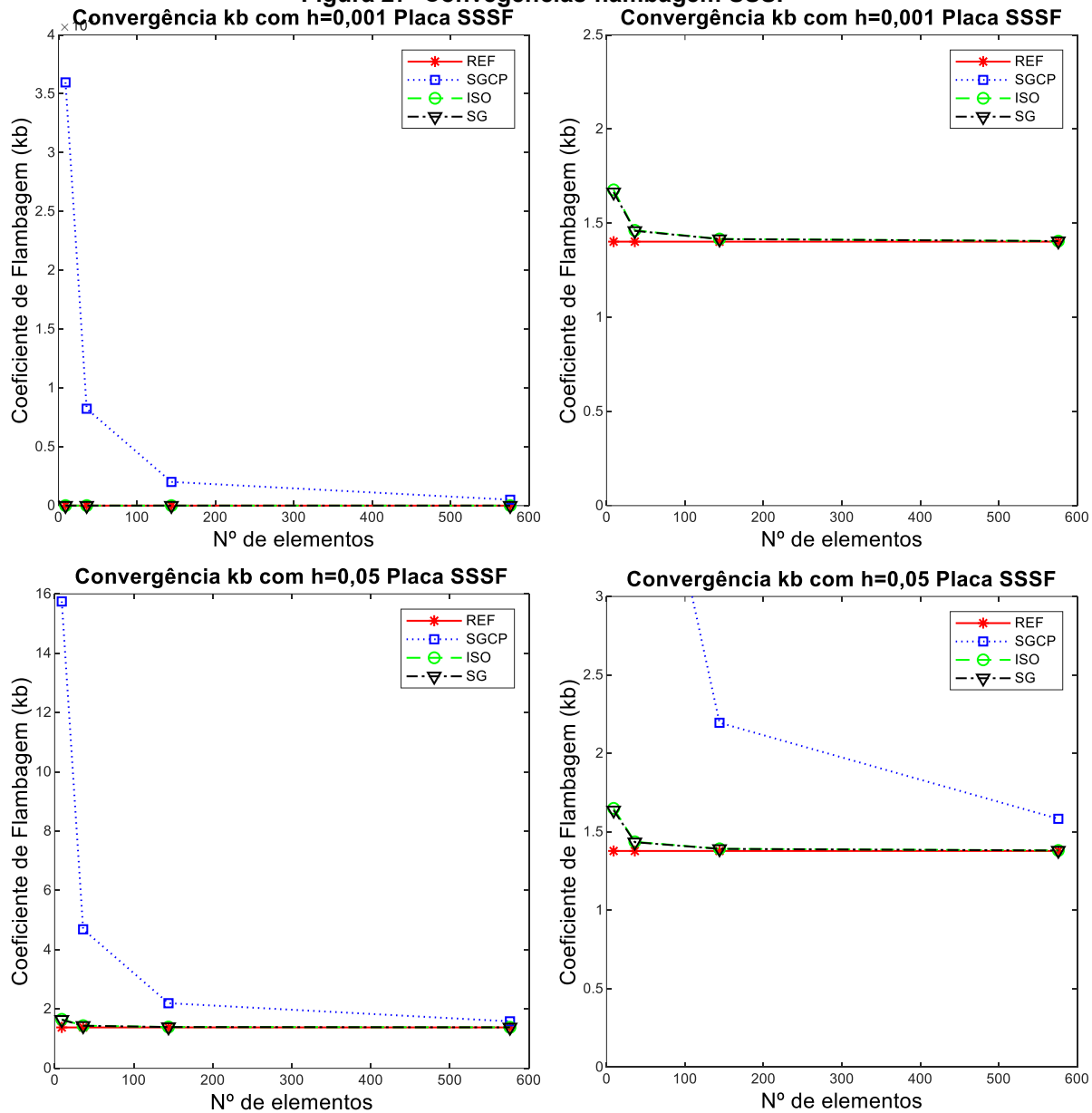
Tabela 27- Coeficiente de flambagem (k_b) com $h = 0,2$ placa SSSF

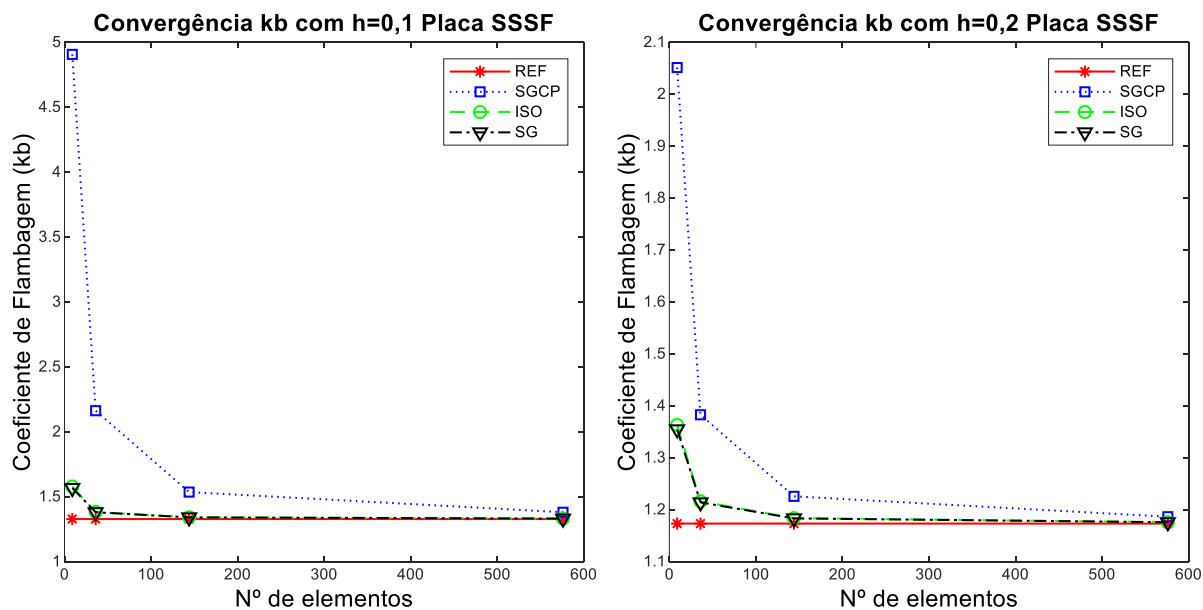
Placa Quadrada SSSF							
Nº Elementos	$h = 0,2$				Erro Percentual		
	SGCP	ISO	SG	REF	SGCP	ISO	SG
9	2,0511	1,3630	1,3544		74,86%	16,20%	15,46%
36	1,3825	1,2157	1,2138	1,1730	17,86%	3,64%	3,48%
144	1,2255	1,1835	1,1830		4,48%	0,90%	0,85%
576	1,1862	1,1757	1,1756		1,13%	0,23%	0,22%

Fonte: Autoria Própria

Pelos valores apresentados nas tabelas já se observa que pela característica do problema em si, os valores dos coeficientes de flambagem são menores em relação aos exemplos anteriores, isso se dá ao fato desse exemplo possuir uma borda livre, que faz com a carga críticas e conseqüentemente os coeficientes de flambagem assumam valores menores, podendo a flambagem ocorrer com cargas bem inferiores a casos em que as bordas se encontram apoiadas ou engastadas. Para melhor visualização e análise dos resultados, assim como nos exemplos anteriores, são apresentados os gráficos de convergência na Figura 28.

Figura 27- Convergências flambagem SSSF





Fonte: Autoria Própria

A partir dos gráficos apresentados na Figura 27 e os resultados numéricos das Tabelas 24 a 27, pode ser notado que o comportamento das abordagens é bem parecido ao encontrado nos exemplos anteriores, onde, **SGCP** não atinge convergência satisfatória para as placas mais finas, e nas placas mais espessas atinge a convergência, mas somente nas malhas mais refinadas. **ISO** e **SG**, apresentam convergência para todas as espessuras, produzem valores bem próximos uma da outra, com **SG** alcançando resultados ligeiramente inferiores.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou a aplicação da notação *strain gradient* na formulação e implementação do elemento finito de placa com doze graus de liberdade para avaliação de vibração livre e flambagem de placas de Mindlin.

A notação *strain gradient*, por utilizar coeficientes fisicamente interpretáveis, permite a avaliação e eliminação *a-priori* dos termos de cisalhamento parasítico, que são responsáveis pelo erro de travamento por cisalhamento.

Para a avaliação da eficiência da notação *strain gradient* nas análises de vibração livre e flambagem de placas de Mindlin, foram utilizados exemplos

encontrados na literatura (**REF**). Com a finalidade de se estabelecer comparativos e avaliar a influência do travamento por cisalhamento nas análises de placas de Mindlin, os exemplos foram avaliados pela metodologia da notação *strain gradient* com correção *a-priori* do cisalhamento parasítico (**SG**), a notação *strain gradient* com cisalhamento parasítico (**SGCP**) e a notação isoparamétrica com integração de ordem reduzida seletiva (**ISO**).

Pelos resultados obtidos nos exemplos de vibração livre (placas SSSS, CCCC e CCCF), fica constatada a eficiência da aplicação de **SG** na análise dessas placas, sendo a metodologia que produz valores numéricos mais próximos aos de **REF**, e converge para **REF** à medida que as malhas são refinadas, alcançando até valores de erros percentuais próximos de 1%.

A partir dos resultados obtidos por **SGCP**, pode-se concluir que o travamento por cisalhamento possui um efeito deletério nos resultados obtidos para placas de Mindlin. Para placas finas, os erros tornam os resultados muito discrepantes em relação à **REF** e às demais metodologias empregadas.

Nas malhas mais grosseiras em exemplos de placas finas, a diferença numérica entre **SG** e **ISO** é bem mais significativa, sendo que **SG** produz valores bem mais próximos à **REF**. **SG** apresenta a vantagem de produzir resultados acurados com malhas relativamente mais grosseiras. Por exemplo, esse trabalho mostra que malhas com 144 elementos são convergentes. A metodologia **SG** também apresentou como vantagem em relação à **ISO** o fato de seus resultados apresentarem-se superiores para modos de vibração mais elevados, onde **ISO** apresenta maior dificuldade para obter resultados próximos aos de **REF**.

A notação *strain gradient* (**SG**) também se mostrou eficiente para análises de flambagem (exemplos placas SSSS, SCSC e SSSF), apresentando resultados convergentes e com baixo nível de erro relativo.

Os resultados de **SGCP** para placas finas, mesmo usando malhas com maior número de graus de liberdade, permaneceram bastante distantes dos resultados de **REF**.

A comparação entre as metodologias **SG** e **ISO** para o cálculo de flambagem mostrou que as duas metodologias são eficientes no tratamento do cisalhamento parasítico para modelos de cálculo da primeira carga crítica e, conseqüentemente, na

obtenção do primeiro coeficiente de flambagem. **SG** apresenta valores de erro ligeiramente inferiores à **ISO** ao se comparar com **REF**.

De forma geral, pode-se concluir dessa pesquisa que os termos de cisalhamento parasítico e, conseqüentemente, o travamento por cisalhamento, faz com que análises de vibração e flambagem por elementos finitos de placas de Mindlin produzam valores errôneos. Para placas finas, os erros são bastante elevados. Contudo, para placas mais espessas, o cisalhamento parasítico também causa erros importantes.

Considerando os bons resultados obtidos neste trabalho, conclui-se que, o elemento finito de placa de Mindlin de quatro nós formulado na *strain gradient* e corrigido *a-priori* é bastante competitivo para o cálculo de vibrações livres e flambagem.

Finalmente, sugere-se para trabalhos futuros:

- A análise de vibração livre e flambagem de placas de Mindlin usando elementos finitos *strain gradient* de ordem mais elevada;
- Aplicação desta mesma metodologia para compósitos laminados;
- Utilização de malhas distorcidas usando elementos finitos *strain gradient*;
- Análise dinâmica forçada utilizando elementos finitos *strain gradient*.

REFERÊNCIAS

ABDALLA, J. E. **Qualitative and Discretization Error Analysis of Laminated Composite Plate Models**. Ph.D. Thesis. University of Colorado, Boulder, CO, 1992.

ABDALLA, J. E.; DOW, J. O. An error analysis approach for laminated composite plate finite element models. **Computers & structures**, v. 52, n. 4, p. 611-616, 1994.

ABDALLA, J. E.; PEREIRA, M. S. Modeling error in the two-node Timoshenko beam finite element. In: **Proceedings of the 5th WSEAS International Conference on Applied Mathematics**. P. 1-6. 2004.

ABDALLA, J. E.; FLORENTINO, A. F.; MACHADO, R. D. Identification and elimination of parasitic shear in a laminated composite beam finite element. **Advances in Engineering Software**, v. 37, p. 522–532, 2006.

ABDALLA, J. E.; BELO, I. M.; PEREIRA, M. S. A laminated composite plate finite element a-priori corrected for locking. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 28, n. 5, 2008.

ABDALLA, J. E.; BELO, I. M.; DOW, J. O. A serendipity plate element free of modeling deficiencies for the analysis of laminated composites. **Composite Structures**, v. 154, p. 150-171, 2016.

ABDALLA, J. E.; BELO, I. M.; DOW, J. O. On a Four-Node Quadrilateral Plate for Laminated Composites. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 14, n. 12, p. 2177-2197, 2017.

ABDALLA, J. E.; DOW, J. O.; BELO, I. M. Modeling Deficiencies in the Eight-Node Mindlin Plate Finite Element Physically Explained. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 146, n. 2, p. 04019131, 2020.

Åkesson, B. **Plate Buckling in Bridges and other Structures**. Taylor & Francis Group, London, 2007.

AKSU, T. A Finite Element Formulation for Free Vibration Analysis of Shells of General Shape. **Computers and Structures**. V. 65, n. 5, p. 687-694, 1997.

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos** – Primeiros passos. Editora da Unicamp, 2 ed: Campinas, SP, 2010.

BAIER-Saip, J. A. Shear locking in one-dimensional finite element methods. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, v. 79, p. 103871, 2020.

BATHE, K.J. **Finite Element Procedures**. Pearson Education, 2 ed, Watertown, MA, 2014.

BELO, I. M. **Análise Eficiente de Compósitos Laminados Planos Utilizando-Se a Formulação De Elementos Finitos Corrigida a-Priori Sem Os Efeitos Do travamento**. Dissertação de Mestrado. PUCPR. 2006.

BELOUNAR, Abderahim et al. Static, free vibration, and buckling analysis of plates using strain-based Reissner–Mindlin elements. **International Journal of Advanced Structural Engineering**, v. 11, n. 2, p. 211-230, 2019.

BEERHORST, M.; BABU, S. Thirusala Suresh. Closed-form approximate solution for linear buckling of Mindlin plates with SRSR-boundary conditions. **Composite Structures**, v. 240, p. 112037, 2020.

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra Linear**. 3º Edição, 1984. São Paulo: Editora Harbra – Harper & Row do Brasil.

BOLAND, J.; LAYTON, W. Error analysis for finite element methods for steady natural convection problems. **Numerical functional analysis and optimization**, v. 11, n. 5-6, p. 449-483, 1990.

BORESI, A. P. et al. **Advanced mechanics of materials**. New York: Wiley, 1993.

BORTOLI, L. H. **Análise modal de estruturas planas com elementos finitos Q4 em notação strain gradient**. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. 2020.

BUCZKOWSKI, Ryszard; TACZAŁA, Maciej; KLEIBER, Michał. A 16-node locking-free Mindlin plate resting on two-parameter elastic foundation-static and eigenvalue analysis. **Computer Assisted Methods in Engineering and Science**, v. 22, n. 2, p. 99-114, 2017.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures – Theory and Applications to Earthquake Engineering**. 3 ed. University of California, Berkeley, CA, 2014.

CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. Computers & Structures Inc, 3 ed, Berkeley, CA, 2003.

COOK, R. D. et al. **Cook, Malkus, Plesha, Witt - Concepts _ Appls of Finite Element Anal - 4a. ed. - J. Wiley - 2002 - 733p.pdf**, 2002.

DAWE , D. J. and ROUFAEIL, O. L., Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates, **Journal of Sound and Vibration**. 69 (3) 345–359. 1980.

DAWE, D. J.; ROUFAEIL, O. L. **Buckling of rectangular Mindlin plates**. Computers & Structures, v. 15, n. 4, p. 461-471, 1982.

DÍEZ, P.; HUERTA, A. Error estimation for adaptive computations of shell structures. **Revue Européenne des Elements**, v. 9, n. 1-3, p. 49-66, 2000.

DOW, J.O. **A Unified Approach to the Finite Element Method and Error Analysis Procedures**. Academic Press, San Diego, CA, 1999.

DOW, John O.; HO, Thomas H.; CABINESS, Harold D. Generalized finite element evaluation procedure. **Journal of Structural Engineering**, v. 111, n. 2, p. 435-452, 1985.

DOW, John. BYRD, Doyle. OSAMA, A. Mohamed. Improved Modeling Capabilities with Reduced-Order Integration. **Journal of Engineering Mechanics**;131:10, 2005.

DOW, John O.; BYRD, Doyle E. The identification and elimination of artificial stiffening errors in finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, n. 3, p. 743-762, 1988.

Dow, J. O.; Huyer, S. A. Continuum Models of Space Station Structures. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 2, n. 4, p. 220–238, 1989.

DOW, John O.; BYRD, Doyle E. Error estimation procedure for plate bending elements. **AIAA journal**, v. 28, n. 4, p. 685-693, 1990.

DOW, J. O.; ABDALLA, J. E. Qualitative errors in laminated composite plate models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, n. 7, p. 1215–1230, 1994.

DOW, J. O.; SU, Z. W.; FENG, C.; BODLEY, C. Equivalent continuum representation of structures composed of repeated elements. **AIAA Journal**, v. 23, n. 10, p. 1564–1569, 1985.

VAZ, L. E. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

FAGUNDES, F.A. **Modelagem de vigas de compósitos laminados usando elementos finitos formulados na notação *strain gradient***. Dissertação de Mestrado. PUCPR. 2006.

FERREIRA, António Joaquim Mendes. **Elementos finitos em Matlab**. Lisboa:

Fundação Calouste Gulbenkian, 2007.

GRÄTSCH, T.; BATHE, J. K. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. **Computers and Structures**, v. 83, p. 235–265, 2005.

HAMEDANI, S. J.; MOHAMMAD, R. K.; AZKAT, S. Vibration Analysis of stiffened plates using Finite Element Method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 9, n.1, Rio de Janeiro, 2012.

HIBBELER, R. C. **Engineering Mechanics: Dynamics**. Pearson Education, 12 ed., Cingapura, 2010.

Hinton, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Pineridge Press, Swansea, 1988.

HORTA, Tulio Paim. **Dinâmica estrutural de vigas de Timoshenko de compósitos laminados utilizando elementos finitos como notação strain gradient**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. 2020.

HOSSEINI-HASHEMI, Shahrokh; KHORSHIDI, Korosh; AMABILI, Marco. Exact solution for linear buckling of rectangular Mindlin plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 315, n. 1-2, p. 318-342, 2008.

HUANG, Jiazhaoh; NGUYEN-THANH, Nhon; ZHOU, Kun. Extended isogeometric analysis based on Bézier extraction for the buckling analysis of Mindlin–Reissner plates. **Acta Mechanica**, v. 228, n. 9, p. 3077-3093, 2017.

HUEBNER, K. H.; DEWHIRST, D. L.; SMITH, D. E. **The Finite Element Method for Engineers**. John Wiley & Sons, 4 ed., Canada, 2001.

JAREK, Amanda. **Elementos finitos enriquecidos para flambagem e vibração de placas**. 2007.

KATILI, Irwan et al. A unified polygonal locking-free thin/thick smoothed plate element. **Composite Structures**, v. 219, p. 147-157, 2019.

LIEW, K. M., J. WANG, T. Y. NG and M. J. TAN, Free vibration and buckling analyses of shear-deformable plates based on FSDT meshfree method, **Journal of Sound and Vibration**, 276 (2004), 997–1017.

LIN, Chun-Li; CHANG, Yen-Hsiang; LIU, Perng-Ru. **Multi-factorial analysis of a cusp-replacing adhesive premolar restoration: a finite element study**. Journal of dentistry, v. 36, n. 3, p. 194-203, 2008.

LUONG, Van Hai et al. Static and dynamic analyses of Mindlin plates resting on viscoelastic foundation by using moving element method. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 18, n. 11, p. 1850131, 2018.

MATTAR NETO, MIGUEL. **Elementos finitos simples de placa**. 1989.

MEIRELES, J. Análise dinâmica de estruturas por modelos de elementos finitos identificados experimentalmente, in: **Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica**, Universidade do Minho, Guimarães, 2008.

MIZUSAWA, T. Buckling of rectangular Mindlin plates with tapered thickness by the spline strip method. *International journal of solids and structures*, v. 30, n. 12, p. 1663-1677, 1993.

MOHAMMADI NIA, M.; SHOJAEE, S.; HAMZEHEI-JAVARAN, S. Utilizing new spherical Hankel shape functions to reformulate the deflection, free vibration, and buckling analysis of Mindlin plates based on finite element method. **Scientia Iranica**, 2018.

NAMPALLY, Praneeth; KARTTUNEN, Anssi T.; REDDY, J. N. Nonlinear finite element analysis of lattice core sandwich plates. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 121, p. 103423, 2020.

OLIVEIRA, Ricardo Caldeira de. **Modelagem numérica de placas espessas usando método dos elementos finitos com computação paralela**. 2009.

RUOCCO, Eugenio et al. Analytical solution for buckling of Mindlin plates subjected to arbitrary boundary conditions. **Applied Mathematical Modelling**, v. 50, p. 497-508, 2017.

SCHUNEMANN, M. P. **Um modelo de placa para análise de compósitos laminados utilizando a notação strain gradient**. Dissertação de Mestrado. PUCPR. 2004.

SENJANOVIĆ, I. Dynamic finite element formulations for moderately thick plate vibrations based on the modified Mindlin theory. **Engineering structures**, v. 136, p. 100-113, 2017.

STEINBRUCH, Afredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. 2ª Edição, 1987, Makron Books.

THAN, Cao Tan Ngoc et al. Dynamic Analysis of Mindlin Plates Resting on a Viscoelastic Foundation Subjected to Moving Loads During Abrupt Braking using Moving Element Method. **IPTEK Journal of Proceedings Series**, v. 3, n. 6, 2017.

TRAN, Trung Thanh; PHAM, Quoc-Hoa; NGUYEN-THOI, Trung. Static and free vibration analyses of functionally graded porous variable-thickness plates using an edge-based smoothed finite element method. **Defence Technology**, 2020.

Wang, C. M.; Wang, C. Y. **Exact Solutions for Buckling of Structural Members**. CRC press, 2007. ISBN 0203483537.

WANG, R.; MU, L.; YE, X. A locking free Reissner-Mindlin element with weak Galerkin rotations. **Discrete & Continuous Dynamical Systems-B**, v. 24, n. 1, p. 351, 2019.

WANKHADE, Rajan L.; NIYOGI, Samiksha B. Buckling analysis of symmetric

laminated composite plates for various thickness ratios and modes. *Innovative Infrastructure Solutions*, v. 5, n. 3, p. 1-12, 2020.

WOLFF, L. V. S. **Um estudo do desempenho de elementos finitos da elasticidade plana**. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. 2019.

WU, F. et al. Smoothing technique based beta fem (β fem) for static and free vibration analyses of reissner–mindlin plates. **International Journal of Computational Methods**, v. 17, n. 02, p. 1845006, 2020.

ZIENKIEWICZ, O. C. **Finite Element Method**. Book. Fifth Edition. Volume 3 Fluid Mechanics. 2018.

Zienkiewicz OC, Taylor RL, Nithiarasu P. **The Finite Element Method for Fluid Dynamics**. Seventh Edition: Elsevier Ltd; 2013.