



**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
CÂMPUS DE CURITIBA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE  
MATERIAIS – PPGEM**

**RUBEM MATIMOTO KOIDE**

**APLICAÇÃO DE REGRESSÃO DE VETORES DE SUORTE NA  
OTIMIZAÇÃO EM FLAMBAGEM E PÓS-FLAMBAGEM DE  
ESTRUTURAS COMPÓSITAS LAMINADAS**

TESE

**CURITIBA  
2016**

**RUBEM MATIMOTO KOIDE**

**APLICAÇÃO DE REGRESSÃO DE VETORES DE SUPORTE NA  
OTIMIZAÇÃO EM FLAMBAGEM E PÓS-FLAMBAGEM DE  
ESTRUTURAS COMPÓSITAS LAMINADAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito à obtenção do título de Doutor em Engenharia – Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos.  
Orientador: Prof. Marco A. Luersen, Dr. Eng.  
Coorientadora: Profa. Ana P. C. S. Ferreira, Dra. Eng.

**CURITIBA  
2016**

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**

---

K79a Koide, Rubem Matimoto  
2016 Aplicação de regressão de vetores de suporte na otimização em flambagem e pós-flambagem de estruturas compósitas laminadas / Rubem Matimoto Koide.-- 2016.  
153 p.: il.; 30 cm

Texto em português com resumo em inglês.  
Tese (Doutorado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais. Área de concentração: Mecânica dos Sólidos, 2016.  
Bibliografia: p. 99-110.

1. Materiais compósitos. 2. Materiais laminados. 3. Flambagem (Mecânica). 4. Otimização estrutural. 5. Vetores de suporte. 6. Metamodelos. 7. Engenharia mecânica. I. Luersen, Marco Antônio. II. Ferreira, Ana Paula Carvalho da Silva. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais. IV. Título.

CDD: Ed. 22 -- 620.1

**TERMO DE APROVAÇÃO  
RUBEM MATIMOTO KOIDE**

**APLICAÇÃO DE REGRESSÃO DE VETORES DE SUPORTE NA  
OTIMIZAÇÃO EM PÓS-FLAMBAGEM DE ESTRUTURAS  
COMPÓSITAS LAMINADAS**

Esta Tese foi julgada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia, área de concentração em Mecânica dos Sólidos, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais.

---

Prof. Paulo César Borges, Dr. Eng.  
Coordenador de Curso

**Banca Examinadora**

---

Prof. Marco Antonio Luersen, Dr. Eng.  
(Orientador - PPGEEM - UTFPR)

---

Prof. Rafael Holdorf Lopez, Dr. Eng.  
(PPGEC - UFSC)

---

Prof. Jucélio Tomás Pereira, Dr. Eng.  
(PGMec - UFPR)

---

Prof. Admilson Teixeira Franco, Dr. Eng.  
(PPGEM - UTFPR)

---

Profa. Ana Paula C. S. Ferreira, Dra. Eng.  
(Coorientadora - DAMEC - UTFPR)

Curitiba, 25 de novembro de 2016.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus por abençoar com a vida.

Ao Professor orientador Marco Antônio Luersen por compartilhar e incentivar o conhecimento deste estudo.

À Professora coorientadora Ana Paula C. S. Ferreira pela ajuda, correções e análise dos resultados.

À colega Letícia Mendes de Lima pela colaboração na modelagem no Abaqus.

Ao PPGEM/UTFPR e CITEC pelos recursos de infraestrutura.

À CAPES pelos recursos financeiros.

À minha esposa Ângela e ao meu filho pela compreensão e apoio durante a realização deste trabalho.

“Não tenha projetos pequenos, eles não têm o poder de despertar a alma dos homens.”

Voltaire

“Esta composição admirável da razão humana autoriza o espírito a ter confiança em si mesmo para qualquer nova atividade.”

Albert Einstein

## RESUMO

Koide, Rubem Matimoto. **Aplicação de Regressão de Vetores de Suporte na Otimização em Flambagem e Pós-Flambagem de Estruturas Compósitas Laminadas**. 2016. 137f. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Materiais (PPGEM), Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

Materiais compósitos laminados são utilizados em diversos setores da indústria, principalmente nas áreas automobilística de competição e aeroespacial, pois apresentam relações resistência-peso e rigidez-peso muito superiores aos materiais metálicos em geral. Estruturas fabricadas a partir desses materiais são normalmente finas e, conseqüentemente, estão sujeitas à flambagem. Requisitos tradicionais de projeto normalmente levam em conta a flambagem mas, para alguns casos, o projeto é conservador, visto que a estrutura pode ainda ser funcional no regime de pós-flambagem. Entretanto, o comportamento nesse regime é não-linear, além da dificuldade de se estimar quando ocorre a falha da estrutura, o que torna a análise mais complexa e onerosa em relação à uma análise de flambagem linear. Nesse contexto está inserido o presente trabalho, que visa encontrar as orientações das fibras que maximizam as cargas de flambagem e de pós-flambagem de estruturas compósitas, usando no processo de otimização metamodelos para aliviar o custo computacional. Duas técnicas de metamodelagem são utilizadas e testadas: redes neurais artificiais e regressão de vetores de suporte, com ênfase para a última. Em combinação com os metamodelos são empregadas duas metaheurísticas de otimização desenvolvidas recentemente: o algoritmo *harmony search* e o algoritmo de vaga-lumes. Vários problemas com diferentes níveis de dificuldade são apresentados e discutidos. Os melhores resultados de otimização foram obtidos com o algoritmo de vaga-lumes associado ao metamodelo de regressão de vetores de suporte, mostrando que tais técnicas são promissoras na solução dessa classe de problemas. Como uma das principais contribuições desta tese tem-se a adaptação/implementação da técnica de regressão de vetores de suporte para problemas de empilhamento de lâminas em estruturas compósitas, particularmente na otimização em flambagem e pós-flambagem. Além disso, foram realizados avanços na modelagem do comportamento e da otimização em pós-flambagem com a utilização de critérios de falha e de dano para compósitos.

**Palavras-chave:** Materiais Compósitos Laminados, Flambagem, Pós-flambagem, Otimização, Metamodelos, Regressão de Vetores de Suporte.

## **ABSTRACT**

Koide, Rubem Matimoto. **Application of Support Vector Regression in Buckling and Postbuckling Optimization of Composite Laminated Structures**. 2016. 137f. Thesis (Doctor in Engineering) – Graduate Program in Mechanical and Material Engineering, Federal Technological University of Paraná, Curitiba, 2016.

*Laminated composite materials are applied in many industrial sectors, particularly in competition automotive and aerospace fields, since they have strength-to-weight and stiffness-to-weight ratios much higher than the metals in general. Structures made by these materials are usually thin and hence they are subject to buckling. Traditional design requirements usually take into account the buckling, but in some cases the design is conservative since the structure can still be functional in the postbuckling regime. However, the behavior in this regime is nonlinear, in addition of being difficult to evaluate when the failure of the structure takes place, which makes the analysis more complex and computational expensive if compared to a linear buckling analysis. Within this context this work is inserted, which aims to find the orientations of the fibers that maximize the buckling and postbuckling load of composite structures using meta-models in the optimization process to alleviate the computational cost. Two metamodelling techniques are used and tested: artificial neural networks and support vector regression, with emphasis on the latter. In combination with the metamodels, two recently developed metaheuristics, the harmony search algorithm and the firefly algorithm, are employed. Several problems, with different levels of difficulty, are presented and discussed. The best optimization results were obtained with the firefly algorithm associated with the support vector regression metamodel, showing that these techniques are promising to solve this class of problems. One of the main contributions of this thesis is the adaptation/implementation of support vector regression for layup orientation sequence problems of composite structures, in particular for buckling and postbuckling optimizations. Moreover, advances were made in the modeling of the behavior and optimization in postbuckling regime using failure and damage criteria for composites.*

**Keywords:** *Laminated Composite Materials, Buckling, Postbuckling, Optimization, Metamodels, Support Vector Regression.*



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Representação esquemática de metamodelagem para uma resposta em função de duas variáveis de projeto. (a) Projeto de experimentos, (b) Avaliações da função, (c) Metamodelo. (Adaptado de Ryberg et al. 2012).....	2
Figura 3.1 - Representação de um material compósito laminado com fibras unidirecionais. ....	12
Figura 3.2 - Carga versus deslocamento transversal de uma placa submetida a carregamento axial compressivo. Fonte: adaptado de Leissa (1983). ....	14
Figura 3.3 - Curva carga versus deslocamento para análise de estabilidade de um painel com reforçadores. Fonte: adaptado de Kling (2008).....	16
Figura 3.4 - Exemplo de 10 amostras geradas com HL em um espaço bidimensional. Fonte: (PASSOS, 2016).....	18
Figura 3.5 - Modelo geral de aprendizado. Fonte: (VAPNIK, 2000). ....	19
Figura 3.6 - Hiperplano e margem $d$ . ....	22
Figura 3.7 - Mapeamento do espaço de entrada para o espaço característico. ....	26
Figura 3.8 - RVS não-linear representada com o espaço de entrada e o espaço característico. Fonte: (adaptado de Ryberg et al. 2012). ....	29
Figura 3.9 - Representação gráfica da RVS.....	31
Figura 3.10 - Notas musicais e a estrutura da <i>Harmony Memory</i> . Fonte: adaptado de Geem et al. (2001). ....	33
Figura 3.11 - Pseudo-código e fluxograma do algoritmo <i>harmony search</i> . ....	36
Figura 3.12 - Pseudo-código do algoritmo de vaga-lumes. Adaptado de Durkota (2011).....	38
Figura 4.1 - Fluxograma do HS aplicado à otimização em pós-flambagem de compósitos laminados.....	47
Figura 4.2 - Procedimentos do AVD aplicado a compósitos laminados. ....	49
Figura 4.3 - Fluxograma da otimização com AVD e Abaqus®. ....	51
Figura 4.4 - Fluxograma da RVS aplicada à otimização de compósitos laminados. .	53
Figura 5.1 - Placa retangular com carregamento biaxial e condições de contorno simplesmente suportada em todas as arestas (SSSS). ....	56
Figura 5.2 - Resultados da RVS com diferentes funções <i>kernel</i> (a) e diagrama de dispersão com FBR (b) para carga de flambagem analítica para laminado de 4 lâminas.....	58
Figura 5.3 - Resultados da RVS com diferentes funções <i>kernel</i> (a) e diagrama de dispersão com FBR (b) para carga de flambagem obtida com MEF para laminado de 4 lâminas. ....	59
Figura 5.4 - Comparação da RVS para amostras analíticas e elementos finitos.....	60
Figura 5.5 - Resultados do treinamento da RVS com 60 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem analítica para laminado de 48 lâminas. ....	63
Figura 5.6 – Resultados da validação da RVS com 15 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem analítica para laminado de 48 lâminas. ....	65
Figura 5.7 - Placa de compósito laminado com 24 lâminas. ....	66
Figura 5.8 - Resultados do treinamento da RVS com 35 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem MEF para laminado de 24 lâminas. ....	69
Figura 5.9 - Resultados da validação da RVS com 35 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem MEF para laminado de 24 lâminas. ....	71

Figura 5.10 - Resultados do treinamento da RN com 35 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem (MEF) para laminado de 24 lâminas...	72
Figura 5.11 - Resultados da validação da RN com 15 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem (MEF) para laminado de 24 lâminas...	73
Figura 5.12 - Resultados da nova validação da RN com 15 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem (MEF) para laminado de 24 lâminas. .....	74
Figura 5.13 - Placa retangular com carga uniaxial e condições de contorno SSSS..	78
Figura 5.14 - Carga versus deslocamento normalizados para placa retangular com condições de contorno SSSS.....	79
Figura 5.15 - Características geométricas (a), malha (b) e condições de contorno (c) do painel cilíndrico com furo central. ....	81
Figura 5.16 - Método de Riks e carga aplicada em pós-flambagem. ....	82
Figura 5.17 - Resultados da pós-flambagem para o painel cilíndrico com furo. ....	83
Figura 5.18 - Painel reto com dois reforços do tipo T (dimensões em mm). ....	86
Figura 5.19 - Primeiro modo de flambagem do painel reto com dois reforços. ....	87
Figura 5.20 - Curva carga vs. deslocamento transversal para o painel reto com 2 reforços. ....	88
Figura 5.21 - Malha de elementos finitos do painel curvo com 5 reforços.....	90
Figura 5.22 - Curva carga versus máximo deslocamento transversal para o painel curvo com 5 reforços (empilhamentos conforme a Tabela 5.20). ....	92
Figura B.1 - Decomposição de $\bar{Q}_{11}$ em invariantes. Fonte: JONES (1999). ....	118
Figura C.1 - Modelo não-linear de um neurônio artificial. Fonte: (HAYKIN, 1999) ..	122
Figura C.2 - Estrutura de um conjunto de funções .....	123
Figura D.1 - Esquema de rede neural multicamadas .....	136
Figura D.2 - Risco empírico e limite de risco .....	137

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Exemplos de funções <i>kernel</i> .	27
Tabela 5.1 - Dados gerados com HL e carga analítica de flambagem para treinamento da RVS.	61
Tabela 5.2 - As 15 amostras para validação da RVS.	64
Tabela 5.3 - Amostras obtidas com HL e respectivas cargas de flambagem (MEF) para placa com 24 lâminas.	67
Tabela 5.4 - Parâmetros de laminação das amostras de treinamento.	68
Tabela 5.5 - Amostras do HL para validação e correspondentes cargas de flambagem.	70
Tabela 5.6 - Propriedades do material.	75
Tabela 5.7 - Geometria e carregamentos.	75
Tabela 5.8 - Comparação dos resultados com HS e ACO na maximização de carga de falha.	76
Tabela 5.9 - Propriedades mecânicas da lâmina de grafite-epóxi WU et al. (2013b).	78
Tabela 5.10 - Propriedades geométricas da placa laminada.	78
Tabela 5.11 - Comparação dos resultados AG versus HS (placa SSSS).	80
Tabela 5.12 - Propriedades elásticas das lâminas do painel cilíndrico com furo.	81
Tabela 5.13 - Propriedades geométricas do painel cilíndrico com furo.	81
Tabela 5.14 - Empilhamento, carga e amplitudes das imperfeições do painel cilíndrico com furo.	82
Tabela 5.15 - Resultado da otimização com RVS e HS do painel cilíndrico com furo.	84
Tabela 5.16 - Propriedades da lâmina de carbono-epóxi.	85
Tabela 5.17 - Resultados para painel reto com 2 reforços.	87
Tabela 5.18 - Propriedades mecânicas da lâmina unidirecional de carbono-epóxi IM7/8552.	88
Tabela 5.19 - Resultados RVS e AVD para o painel reto com 2 reforços.	89
Tabela 5.20 - Características do painel curvo com 5 reforços ( <i>stringers</i> ) (ARAICO et al., 2010).	90
Tabela 5.21 - Resultados RVS, AVD e critério de Hashin para o painel curvo com 5 reforços.	92
Tabela 5.22 - Critério de falha de Hashin e o método de Chang-Lessard de redução das propriedades.	94
Tabela 5.23 - Resultados da otimização via AVD do painel curvo com 5 reforços com critério de falha e dano.	94
Tabela 5.24 - Resumo dos casos analisados.	94
Tabela 5.25 - Tempo de execução das simulações.	96

## LISTA DE SIGLAS

ACO	Ant Colony Optimization
ADALINE	ADaptive Linear Neuron
AG	Algoritmo Genético
AVD	Algoritmo de Vaga-lumes Discreto
AVL	Algoritmo de Vaga-lumes
bw	Bandwidth
DFA	Discrete Firefly Algorithm
DOE	Design of Experiments
FAR	Federal Aviation Regulations
FBR	Função de Base Radial
FORTRAN	Fórmula Translation System (linguagem de programação)
HL	Hipercubo Latino
HM	Harmony Memory
HS	Harmony Search
HMCR	Harmony Memory Considering Rate
HMS	Harmony Memory Size
LMS	Least Mean Squared
MA	Máquina de Aprendizagem
MEF	Método dos Elementos Finitos
MVS	Máquina de Vetores de Suporte
PAR	Pitch Adjusting Rate
QAP	Problema de Alocação Quadrática (do inglês <i>Quadratic Assignment Problem</i> )
QI	Quase Isotrópico
RN	Redes Neurais Artificiais
RVS	Regressão de Vetores de Suporte
SSSS	Quatro arestas simplesmente suportadas de uma placa
SSCC	Duas arestas simplesmente suportadas e duas engastadas de uma placa
TSP	Problema do Caixeiro Viajante (do inglês <i>Travelling Salesman Problem</i> )
USDFLD	Sub-rotina em FORTRAN
VS	Conjunto de Vetores Suporte

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Comprimento da placa laminada
$A$	Matriz de rigidez de membrana
$\bar{A}$	Inversa da matriz de rigidez de membrana
$b$	Largura da placa laminada
$b_k$	Bias das redes neurais
$b_{vs}$	Parâmetro do hiperplano de separação
$b_{RVs}$	Bias da regressão de vetores de suporte
$B$	Matriz de rigidez de acoplamento flexão-membrana
$c$	Cosseno
$cm$	Camada das redes neurais
$C$	Constante de regularização da regressão de vetores de suporte
$D$	Matriz de rigidez de flexão
$D_{iso}$	Rigidez à flexão de laminado quase isotrópico
$e$	Precisão da regressão de vetores de suporte
$\{e_k\}$	Vetor de erro das iterações das redes neurais
$E$	Módulo de elasticidade
$E_{iso}$	Módulo de elasticidade de laminado quase isotrópico
$E_1$	Módulo de elasticidade na direção 1
$E_2$	Módulo de elasticidade na direção 2
$f(x)$	Função multivariada da regressão de vetores de suporte ou função de regressão
$f(\cdot)$	Função objetivo da matriz HM do <i>harmony search</i>
$f_{obj}$	Função objetivo na otimização com <i>harmony search</i>
$\bar{f}$	Amplitude normalizada de deflexão
$\bar{f}_0$	Amplitude inicial normalizada de deflexão
$F_1$	Coefficiente do critério de falha de Tsai-Wu
$F_2$	Coefficiente do critério de falha de Tsai-Wu
$F_{12}$	Coefficiente do critério de falha de Tsai-Wu
$F_{11}$	Coefficiente do critério de falha de Tsai-Wu
$F_{22}$	Coefficiente do critério de falha de Tsai-Wu
$F_{66}$	Coefficiente do critério de falha de Tsai-Wu
$F$	Função custo
$F_{TSAI,WU}$	Índice do critério de falha de Tsai-Wu
$g_k(\theta_k)$	Restrição da função objetivo na otimização com <i>harmony search</i>
$G$	Módulo de cisalhamento
$G_{12}$	Módulo de cisalhamento no plano 12
$h$	Espessura do laminado
$K(x_i, x)$	Função de mapeamento da função <i>kernel</i>
$m$	Número de meias ondas na direção x
$m_{HL}$	Tamanho da amostra do hiperplano latino
$\max \bar{N}_{11,post}^0$	Máxima carga axial de pós-flambagem normalizada em relação ao plano médio
$M$	Número de variáveis da regressão de vetores de suporte
$M_{11}^0$	Momento fletor em relação ao eixo x e ao plano médio
$M_{22}^0$	Momento fletor em relação ao eixo y e ao plano médio
$\bar{M}_{11}^0$	Momento fletor normalizado em relação ao eixo x e ao plano médio
$\bar{M}_{22}^0$	Momento fletor normalizado em relação ao eixo y e ao plano médio
$n$	Número de meias ondas na direção y
$n_e$	Número de avaliações da função objetivo
$n_{HL}$	Dimensão do hiperplano latino
$n_{HS}$	Dimensão do <i>harmony search</i>
$nl$	Número de lâminas do laminado
$n_{RVs}$	Número de dados de treinamento da regressão de vetores de suporte
$N$	Número de amostras da regressão de vetores de suporte
$N_{11}^0$	Força resultante na direção x
$\bar{N}_{11}^0$	Força resultante normalizada na direção x

$\bar{N}_{22}^0$	Força resultante normalizada na direção y
$\bar{N}_{12}^0$	Força resultante cisalhante normalizada
$\bar{N}_{11,init}^0$	Carga de flambagem axial normalizada
$\bar{N}_{11,post}^0$	Carga de pós-flambagem axial normalizada
$N_{dv}$	Número total de variáveis de projeto
$N_{iso}$	Carga de flambagem para laminado quase-isotrópico
$N_x$	Carga na direção x
$N_{x0}$	Carga axial inicial de flambagem do laminado
$N_y$	Carga na direção y
$o_j$	Saídas ou respostas
$P$	Carga ou carregamento aplicado
$P_{cr}$	Carga crítica de flambagem
$Q$	Matriz de rigidez reduzida para lâmina ortotrópica
$\bar{Q}$	Matriz de rigidez reduzida transformada
$rand$	Número randômico
$R$	Conjunto de números reais
$R2$	Fator de correlação
$\{R\}^{cm}$	Número de neurônios da camada cm
$s$	Seno
$S$	Resistência ao cisalhamento
$\{S\}^{cm}$	Vetor sensibilidade da camada cm das redes neurais
$t$	Espessura da lâmina
$t_j$	Valores experimentais ou a alcançar
$x_1$	Eixo global na direção x
$x_2$	Eixo global na direção y
$x_3$	Eixo global na direção z
$x^1 \dots x^{HMS}$	Conjunto de harmonias geradas randomicamente
$x$	Direção do eixo x
$x_m$	Dados de entrada das redes neurais ou regressão de vetores de suporte
$x_i^{new}$	Nova harmonia
$(x_l, y_l)$	Conjunto de dados de treinamento da máquina de vetores de suporte
$X_c$	Resistência do material à compressão na direção paralela às fibras
$X_i$	Conjunto de composições ou harmonias
$X_t$	Resistência do material à tração na direção paralela às fibras
$u_3$	Deslocamento na direção z
$u_{30}$	Deslocamento inicial ou imperfeição geométrica na direção z
$\bar{u}_1$	Deslocamento normalizado na direção x ou encurtamento
$\bar{u}_3$	Deslocamento normalizado na direção z ou deflexão
$\bar{u}_{30}$	Deslocamento inicial normalizado ou imperfeição geométrica na direção z
$\bar{u}_{3,init}$	Forma do deslocamento normalizado na direção z
$\partial\bar{u}_3/\partial\xi_2$	Rotação da placa em relação ao eixo y
$U$	Invariantes
$v_k$	Soma dos pesos de entrada das redes neurais
$v_{12}$	Maior coeficiente de Poisson no plano 12
$v_{21}$	Menor coeficiente de Poisson no plano 12
$\frac{\partial\{v\}^{cm+1}}{\partial\{v\}^{cm}}$	Relação de recorrência
$w$	Deslocamento transversal
$\mathbf{w}$	Vetor normal ao hiperplano das máquinas de vetores de suporte
$\{w\}$	Vetor com os pesos e <i>bias</i> das redes neurais
$w_{km}$	Pesos sinápticos das redes neurais
$w_{vs}$	Vetor normal ao hiperplano de separação
$\bar{w}(\theta_k)$	Deflexão em função do ângulo na otimização com <i>harmony search</i>
$z$	Direção do eixo z
$y$	Direção do eixo y
$y_i$	Dados de saída da regressão de vetores de suporte, a resposta
$y_k$	Dados de saída das redes neurais ou neurônios de saída

$Y_c$	Resistência do material à compressão na direção perpendicular às fibras
$Y_t$	Resistência do material à tração na direção perpendicular às fibras
$\alpha_A$	Parâmetro normalizado em relação à matriz A e a geometria do laminado
$\alpha_D$	Parâmetro normalizado em relação à matriz D e a geometria do laminado
$\alpha_i$	Multiplicadores de Lagrange
$\alpha_k$	Parâmetro de penalidade da função objetivo
$\varepsilon_x$	Deformação normal na direção x
$\varepsilon_y$	Deformação normal na direção y
$\gamma_{xy}$	Deformação cisalhante no plano xy
$\varepsilon_2$	Erro do ajuste da função de um metamodelo
$\varepsilon_1^u$	Deformação normal de falha na direção 1
$\varepsilon_2^u$	Deformação normal de falha na direção 2
$\gamma_{12}^u$	Deformação cisalhante de falha no plano 12
$\theta$	Ângulo que relaciona o sistema x-y com sistema 1-2
$\theta_k$	Ângulos da sequência de empilhamento
$\zeta$	Taxa de aprendizado das redes neurais
$\eta_A$	Parâmetro normalizado em relação à matriz A
$\eta_D$	Parâmetro normalizado em relação à matriz D
$\lambda_c$	Fator da máxima carga de flambagem
$\lambda_{cb}$	Fator crítico de flambagem
$\lambda_{cb(p,q)}$	Fator crítico mínimo de flambagem
$\lambda_{cf}$	Fator crítico devido à falha
$\lambda_{pf}$	Carga de pós-flambagem
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\nu_{iso}$	Coefficiente de Poisson para laminado quase-isotrópico
$\xi_1$	Coordenada normalizada na direção x
$\xi_2$	Coordenada normalizada na direção y
$\xi^A$	Parâmetro de laminação em relação à matriz A
$\xi^B$	Parâmetro de laminação em relação à matriz B
$\xi^D$	Parâmetro de laminação em relação à matriz D
$\sigma_x$	Tensão normal na direção x
$\sigma_y$	Tensão normal na direção y
$\tau_{xy}$	Tensão cisalhante no plano xy
$\sigma_{11}$	Tensão normal na direção principal 1
$\sigma_{22}$	Tensão normal na direção principal 2
$\sigma_{12}$	Tensão de cisalhamento no plano 12
$\varphi$	Função de ativação
$\phi$	Função para mapeamento das redes neurais
$\Phi$	Funcional para a maximização da margem de separação de dados
$\psi$	Função de Airy

## SUMÁRIO

Agradecimentos .....	i
Resumo .....	iii
<i>Abstract</i> .....	iv
Lista de figuras.....	v
Lista de tabelas.....	vii
Lista de siglas .....	viii
Lista de símbolos.....	ix
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 Contextualização e apresentação do problema.....	1
1.2 Objetivo geral .....	3
1.3 Objetivos específicos.....	3
1.4 Relevância e justificativa .....	3
1.5 Organização do texto .....	4
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>5</b>
<b>3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>11</b>
3.1 Material compósito laminado.....	11
3.1.1 Conceitos e definições .....	11
3.1.2 Flambagem e pós-flambagem .....	13
3.2 Projeto de experimentos e metamodelos.....	16
3.2.1 Hipercubo latino .....	17
3.2.2 Máquinas de vetores de suporte e regressão de vetores de suporte.....	18
3.3 <i>Harmony search</i> (HS).....	32
3.4 Algoritmo de vaga-lumes (AVL) .....	36
3.4.1 Comportamento dos vaga-lumes.....	36
3.4.2 Formulação do algoritmo de vaga-lumes.....	37
3.4.3 Intensidade luminosa e atratividade.....	38
3.4.4 Algoritmo de vaga-lumes discreto (AVD).....	42
<b>4 COMBINAÇÃO DAS METAHEURÍSTICAS E METAMODELOS NA OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS: ASPECTOS COMPUTACIONAIS</b> .....	<b>46</b>
4.1 <i>Harmony search</i> aplicado à otimização de compósitos laminados .....	46
4.2 Algoritmo de vaga-lumes aplicado à otimização de compósitos laminados .....	48
4.3 RVS aplicada à otimização de compósitos laminados.....	53
<b>5 RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO</b> .....	<b>55</b>
5.1 Aplicação de RVS para carga de flambagem de placa retangular .....	55
5.1.1 RVS para carga de flambagem analítica e MEF (4 lâminas).....	56
5.1.2 RVS e HL para cargas de flambagem analítica e MEF (48 lâminas) .....	60
5.2 Aplicação de RVS, RN, HL e parâmetros de laminação para placa de 24 lâminas .....	65
5.2.1 Aplicação de RVS .....	69
5.2.2 Aplicação de RN.....	71
5.3 HS aplicado à maximização da carga de falha de placa compósita de 48 lâminas .....	74
5.4 Otimização em pós-flambagem com HS para placa retangular de 16 lâminas .....	77
5.5 RVS e HS aplicados à otimização de painel cilíndrico com furo central.....	80
5.5.1 Painel cilíndrico com furo com 32 lâminas.....	81
5.5.2 RVS e HS aplicados ao painel cilíndrico com furo com 64 lâminas .....	83
5.6 RVS e AVD em otimização de painéis com reforços .....	84
5.6.1 RVS e AVD aplicada à painel reto com 2 reforços com critérios de Tsai-Wu e Hashin .....	84
5.6.2 RVS aplicada ao painel curvo com 5 reforços sujeito ao critério de Hashin .....	89
5.6.3 AVD aplicado a painel curvo com 5 reforços e critério de dano .....	93



6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	97
6.1 Conclusões .....	97
6.2 Sugestões para trabalhos futuros .....	98
Referências .....	99
Anexo A - Sub-rotina USDFLD em FORTRAN .....	111
Apêndice A - Formulação analítica da carga de pós-flambagem para placa laminada simplesmente apoiada nas quatro arestas .....	113
Apêndice B - Conceitos sobre parâmetros de laminação .....	116
Apêndice C - Conceitos sobre redes neurais artificiais .....	121
Apêndice D - Teoria de aprendizado estatístico .....	128

# 1 INTRODUÇÃO

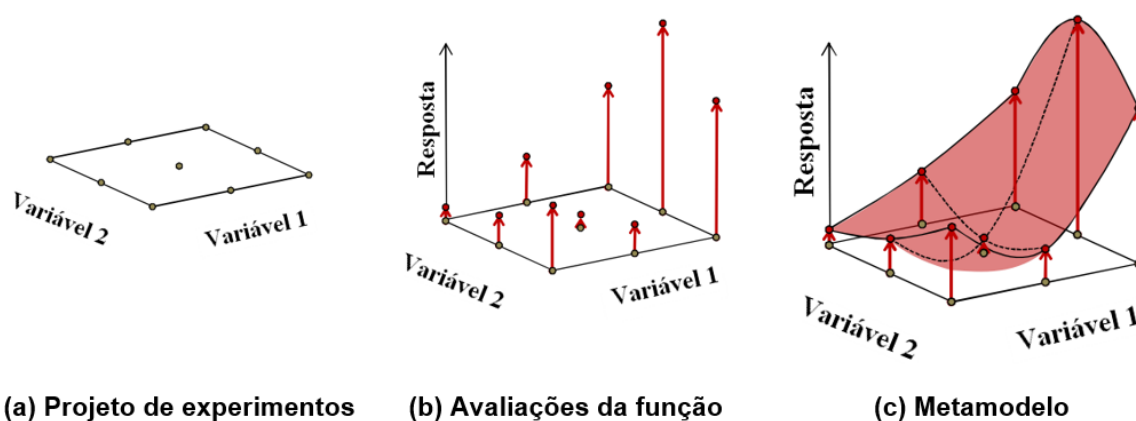
## 1.1 Contextualização e apresentação do problema

Uma parte do sucesso e da competitividade no desenvolvimento das modernas aeronaves e automóveis está relacionada com a utilização de estruturas em materiais compósitos laminados. Mais especificamente através da redução de peso, redução de custos de fabricação e sustentabilidade que tais materiais proporcionam, se comparados com os materiais tradicionais. Como o nome sugere, os materiais compósitos laminados são obtidos através do empilhamento de lâminas, as quais apresentam características anisotrópicas. Devido às restrições de fabricação, normalmente o ângulo de orientação de cada lâmina (associado também à orientação das fibras da lâmina) deve ser um valor discreto específico, por exemplo,  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ,  $90^\circ$ . Mesmo assim, observa-se que há uma grande possibilidade de soluções de projeto disponíveis para o seu empilhamento, cabendo ao projetista escolher aquela que melhor satisfaz a aplicação em questão. Além disso, as estruturas em compósitos laminados são normalmente finas e, portanto, susceptíveis à flambagem e à pós-flambagem. Assim, seu projeto, entre outros requisitos, demanda o estudo e a análise da pós-flambagem, de modo a se obter estruturas leves e com resistência e rigidez adequadas. Como as possibilidades de combinações das orientações são muito numerosas e o custo de simulações numéricas de modelos de estruturas para aplicações reais é alto, a busca do melhor empilhamento das lâminas, utilizando os métodos usuais de otimização, tem alto custo computacional. Portanto, faz-se necessário buscar alternativas para contornar esse problema.

Nesse contexto, a utilização de técnicas de **metamodelagem** para a aproximação da resposta estrutural tem se mostrado uma alternativa interessante. Metamodelagem consiste de um processo em que se cria uma aproximação matemática ou interpolação (um **metamodelo**) para representar um determinado fenômeno, através de um conjunto de amostras. As amostras do fenômeno para a construção do metamodelo podem ser obtidas de um experimento físico ou através de simulações computacionais utilizando um modelo detalhado (também chamado de modelo de alta fidelidade ou experimento computacional) (SIMPSON et al., 2008).

Algumas técnicas conhecidas para a obtenção de metamodelos são: superfície de resposta polinomial, *spline*, *Kriging*, funções de base radial (FBR), redes neurais artificiais (RN) e regressão de vetores de suporte (RVS), em inglês, *support vector regression*. Uma vez que uma aproximação satisfatória tenha sido obtida, o metamodelo, que possui baixo custo computacional, passa a ser usado no lugar do experimento físico ou do modelo de alta fidelidade. Na previsão do fenômeno com diferentes parâmetros ou em um processo de otimização numérica, essa técnica possibilita a redução do custo com a realização de experimentos (físicos ou computacionais).

A Figura 1.1 apresenta o conceito de metamodelagem considerando dois parâmetros que podem ser alterados no sistema (variáveis de projeto). Inicialmente, com o auxílio de uma técnica de **projeto de experimentos** (RYBERG et al. 2012 ) (DOE - *design of experiments*), é feita a escolha dos valores das variáveis de projeto para a obtenção de amostras representativas. Em seguida, as respostas do fenômeno são avaliadas nos pontos definidos pelo DOE. Em posse dessas informações (pares entrada/saída), utiliza-se alguma técnica de metamodelagem para criar um modelo aproximado, denominado de metamodelo ou modelo substituto (em inglês, *metamodel* ou *surrogate model*).



**Figura 1.1 - Representação esquemática de metamodelagem para uma resposta em função de duas variáveis de projeto. Projeto de experimentos (a), Avaliações da função (b), (c) Metamodelo (c). (Adaptado de Ryberg et al. 2012).**

Na sequência são apresentados os objetivos (geral e específicos) e as justificativas para o desenvolvimento desta tese.

## 1.2 Objetivo geral

Nesta tese tem-se como objetivo geral a otimização de estruturas de materiais compósitos laminados nos regimes de flambagem e pós-flambagem com a utilização de técnicas de metamodelagem.

## 1.3 Objetivos específicos

Como objetivos específicos pode-se citar:

1. Modelar e compreender melhor o comportamento de estruturas compósitas laminadas nos regimes de flambagem e pós-flambagem;
2. Desenvolver e avaliar modelos computacionais de análise de pós-flambagem de estruturas compósitas que levem em consideração critérios de falha (particularmente os critérios de Tsai-Wu e de Hashin).
3. Avaliar a eficiência das técnicas de otimização HS e AVL para a solução dessa classe de problemas.

A metodologia aqui desenvolvida utiliza o projeto de experimentos hipercubo latino (HL), os metamodelos redes neurais artificiais (RN) e regressão de vetores de suporte (RVS) e as técnicas de otimização *harmony search* (HS) e algoritmo de vagalumes (AVL).

## 1.4 Relevância e justificativa

Estruturas compósitas laminadas são, em geral, finas e susceptíveis à esforços de compressão. Assim, o projeto de estruturas seguras e de baixo peso requer que a flambagem e/ou a pós-flambagem sejam levadas em consideração. Como ressalta Irisari et al. (2011), os painéis inferiores da fuselagem e a superfície superior das asas dos aviões são exemplos de painéis que são projetados para máxima carga de flambagem. Outros painéis da fuselagem são projetados para sofrerem pós-flambagem, mas sem a ocorrência de colapso da estrutura. Embora tenham-se muitas aplicações de estruturas compósitas laminadas cujos projetos levam em conta a flambagem, ainda têm-se poucos estudos em pós-flambagem. O avanço nas pesquisas de como e quando se inicia a pós-flambagem e, principalmente, o limite de carga suportada, bem como a aplicação de técnicas de otimização

adequadas permite desenvolver ferramentas para projetar estruturas de laminados no regime de pós-flambagem.

Com relação à utilização das diferentes técnicas citadas na Seção 1.3, na revisão bibliográfica não foram encontradas aplicações do metamodelo regressão de vetores de suporte no projeto de empilhamento de estruturas compósitas laminadas. Encontrou-se apenas uma publicação sobre otimização dessas estruturas com o algoritmo *harmony search*, mas no regime linear. Otimização com o algoritmo de vagalumes aplicados a compósitos também não foi encontrada durante a revisão bibliográfica.

## 1.5 Organização do texto

O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica. Conceitos e definições sobre materiais compósitos laminados e as teorias de flambagem e pós-flambagem são apresentados no Capítulo 3. Nesse mesmo capítulo, encontram-se também as descrições dos métodos utilizados como projeto de experimentos, metamodelos e algoritmos de otimização.

No Capítulo 4 são explicados alguns aspectos computacionais dos algoritmos *harmony search* e de vagalumes aplicados a compósitos laminados, além da combinação do metamodelo RVS com esses algoritmos.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados numéricos obtidos das aplicações do projeto de experimentos HL e dos metamodelos RN e RVS. Resultados da otimização com HS para a maximização das cargas de flambagem e pós-flambagem de placas retangulares são apresentados nesse capítulo. O algoritmo HS foi utilizado também na otimização de um painel cilíndrico com furo cuja resposta estrutural é obtida através do método dos elementos finitos. O algoritmo de vagalumes foi aplicado em um painel reto com reforços, em um painel curvo com reforços e com critério de falha de Tsai-Wu e Hashin, foi considerado também para esses casos a aplicação da RVS. Otimização de um painel curvo com 5 reforços sujeito à falha e dano na estrutura são descritas também nesse capítulo.

No Capítulo 6 são resumidas as conclusões desta pesquisa e encontram-se algumas propostas para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta seção apresenta uma revisão de pós-flambagem, metamodelos e otimização aplicados a estruturas de materiais compósitos.

O desenvolvimento da teoria de flambagem e de pós-flambagem de estruturas iniciou com os estudos da estabilidade em hastes finas sob compressão nos anos 1740 por Euler (*apud* BLOOM e COFFIN, 2001; KOITER, 1945). Posteriormente, nos trabalhos de von Kármán e Tsien, de Donnell e Wan e de Koiter, entre os anos 1940 e 1950 (*apud* HILBURGER, 2008), identificam-se os pequenos desvios da geometria idealizada de uma casca, conhecidos como imperfeições iniciais, como uma das fontes de discrepância entre os resultados preditos analiticamente e os resultados experimentais do comportamento em flambagem. Uma imperfeição é, na verdade, uma irregularidade geométrica. Assim, uma forma de levá-la em conta em um modelo matemático é considerá-la com o formato de modos de flambagem lineares, com amplitude de um percentual da espessura (HILBURGER, 2008). Essas imperfeições são inseridas como dados de entrada em análises não-lineares, como por exemplo em uma modelagem utilizando o método dos elementos finitos. O modelo geometricamente perfeito é modificado para a inclusão das imperfeições, através de perturbações aplicadas nos nós da malha (HILBURGER, 2008). Ventsel e Krauthammer (2001) e Bloom e Coffin (2001) apresentaram uma revisão das teorias de placas incluindo pequenas deformações, formulação variacional de flexão de placas, método de Navier e outros métodos numéricos e aproximados além da teoria de grandes deformações para placas finas. As equações diferenciais governantes para a flambagem e pós-flambagem são também revisadas.

As teorias desenvolvidas para o estudo da estabilidade em estruturas de materiais isotrópicos também passaram a ser aplicadas em materiais compósitos laminados. Prabhakara e Chia (1976) analisaram a pós-flambagem de laminados *angle ply* ( $[+\theta - \theta]$ , simétricos ou anti-simétricos) e placas anisotrópicas utilizando a teoria de von Kármán de grandes deflexões. Noor e Peters (1981) utilizaram o método de Rayleigh-Ritz para aproximar as equações de elementos finitos e reduzir a dimensão do sistema de equações algébricas. Essas equações reduzidas, ou de base reduzida, foram utilizadas para determinar o ponto de bifurcação (flambagem) e o mo-

do de instabilidade associado, bem como o comportamento em pós-flambagem de placas laminadas. Leissa (1983) revisou a flambagem e a pós-flambagem focando em diversas teorias: análise clássica da bifurcação para flambagem; problema de autovalores com bifurcação; análises não clássicas como a imperfeição geométrica, excitação paramétrica e forças de perturbação e material inelástico.

A abordagem pelo princípio variacional de Reissner e o critério de falha de máxima deformação foi aplicado por Arnold e Mayers (1984) em flambagem, pós-flambagem e deformação de placas de compósitos laminados considerando a não-linearidade do material. Kosteletos (1992) investigou a resposta da pós-flambagem de laminados sob carga cisalhante usando as equações de não-linearidade de von Kármán, o método de Galerkin, parâmetros adimensionais, função de tensão de Airy, e as equações de compatibilidade e de equilíbrio. Bushnell (1993) baseou-se no trabalho de Koiter para formular a teoria local de pós-flambagem em termos de coeficientes modais, deslocamentos discretizados e suas derivadas na otimização de regime de pós-flambagem. Shen (1995) analisou a pós-flambagem de placas compósitas retangulares em fundação elástica de Pasternak, utilizando a técnica da perturbação e considerando imperfeição geométrica inicial. Wang e Srinivasan (1995) estudaram o efeito da não-linearidade na flambagem e pós-flambagem em placas e cascas cilíndricas. Sundaresan et al. (1996) investigaram a flambagem e pós-flambagem de placas laminadas retangulares espessas adotando a teoria de primeira ordem de Mindlin de deformação cisalhante associada com a teoria de grandes deslocamentos de von Kármán. O princípio da mínima energia potencial foi a base do estudo de Shin (1999) para a análise do comportamento em pós-flambagem de placas retangulares simplesmente suportadas nas arestas onde a carga é aplicada e engastada nas arestas sem carga. O método *finite strip* de alta ordem foi aplicado por Zou e Qiao (2002) na análise de pós-flambagem de placa laminada imperfeita. A teoria de deformação cisalhante de alta ordem foi também utilizada com as equações de deformação não-lineares de von Kármán.

Os efeitos anisotrópicos na flambagem por compressão foram estudados por Weaver et al. (2002). Diaconu e Weaver (2005) apresentam uma solução aproximada para pós-flambagem, aplicando o método de Galerkin, a equação de von Kármán e parâmetros de laminação, na otimização de projetos de laminados. Aplicações numé-

ricas, experimentais e analíticas da flambagem e pós-flambagem em materiais laminados compostos são encontrados em Falzon e Aliabadi (2008). A teoria de deformação cisalhante de alta ordem de placa com o MEF e a técnica de perturbação foi utilizada por Singh et al. (2009). Mittelstedt e Schöder (2010) propuseram uma solução analítica, *closed-form*, para pós-flambagem sob carga compressiva de placa de compósito laminado imperfeita, baseando-se nas equações diferenciais de Marguerre e formulação de Galerkin. Raju et al. (2012) analisaram a pré-flambagem e a flambagem não-linear de laminados com fibras curvas. Métodos baseados em um princípio variacional, no diferencial quadrático e em uma aproximação analítica em forma fechada (*closed-form*) são comparados para flambagem de laminados anisotrópicos no trabalho de Wu et al. (2013a).

Com relação às aplicações de metamodelos em materiais compósitos laminados, tem-se o artigo de Todoroki e Ishikawa (2004) onde foi estudado a técnica de projeto de experimentos denominada D-ótimo, em combinação com algoritmos genéticos para a otimização da sequência de empilhamento. Redes neurais artificiais foram usadas por Bezerra et al. (2007) para analisar as propriedades mecânicas de cisalhamento de compósitos reforçados. Um estudo sobre sequenciamento ótimo das lâminas de estruturas cilíndricas com reforços foi apresentado por Kalnins et al. (2009) usando metamodelos na otimização da pós-flambagem. Kalnins et al. (2010) estudaram também metamodelos aplicados à análise de dano de estruturas de compósitos reforçados. Reddy et al. (2011) apresentaram um estudo com projeto de experimentos e redes neurais artificiais para otimização da sequência de empilhamento de laminados. Reddy et al. (2012) estudaram vibrações de placas de compósitos laminados utilizando o projeto de experimentos D-ótimo e redes neurais artificiais para aproximar a frequência natural. Todoroki et al. (2011) propuseram uma técnica para predizer a fratura de compósitos laminados usando o metamodelo *Kriging* e parâmetros de laminação. Nik et al. (2012) estudaram um algoritmo de otimização combinado com um metamodelo para examinar simultaneamente a rigidez e a carga de flambagem de placas laminadas com fibras curvilíneas. Uma análise de flambagem através de superfície de resposta polinomial foi proposta por Alibrandi et al. (2010). Nik et al. (2014) compararam os metamodelos: regressão polinomial, funções de base radial, *Kriging* e regressão de vetores de suporte para a otimização de fibras



curvilíneas de compósitos. O projeto de experimentos utilizado foi o HL e a otimização foi feita com algoritmo genético.

A flambagem está relacionada com a carga crítica de estabilidade da estrutura, e trata-se geralmente de um estudo linear. Na pós-flambagem o comportamento é não-linear, e a estrutura ainda possui capacidade de suportar um determinado nível de carga sem causar falhas ou danos estruturais irreparáveis. Dessa maneira, o estudo no regime de pós-flambagem e otimização são importantes para melhorar o projeto de uma estrutura em relação ao seu peso e resistência. Como observado por Shin (1999), o projeto de placas que operam em regime de pós-flambagem pode ser explorado ou otimizado com o objetivo de se obter uma redução no peso. Entretanto, grande redução na rigidez ou instabilidade na pós-flambagem são indesejadas (PANDEY e SHERBOUNE, 1993). Determinar um equilíbrio estável em regime de pós-flambagem é difícil e requer muitos esforços para compreendê-lo. Portanto, o processo de otimização em pós-flambagem pode demandar muito tempo computacional na busca da melhor solução de empilhamento das lâminas ou em soluções multiobjetivos que associem também a redução de peso com critérios de falha ou dano.

A análise da pós-flambagem tornou-se importante em projetos de estruturas de compósitos laminados principalmente porque tais estruturas apresentam pequena espessura e estão sujeitas à cargas de compressão. A necessidade de buscar melhores soluções para essas estruturas de comportamento não-linear faz com que métodos de otimização sejam adotados. Entretanto, os custos computacionais são elevados pois se trata de um problema complexo. Portanto, a otimização em flambagem e pós-flambagem de compósitos laminados necessita de métodos específicos para resolvê-los. Por exemplo, Le Riche e Hafka (1993), Todoroki e Haftka (1998), Liu et al. (2000), Deka et al. (2005) otimizaram a sequência de empilhamento de compósitos laminados para a máxima carga de flambagem utilizando algoritmos genéticos.

O projeto ótimo de placas e cascas de laminados sujeito à restrições de resistência, rigidez, carga de flambagem e frequência fundamental foi investigado por Abrate (1994) utilizando parâmetros de laminação. Fukunaga et al. (1995) maximizaram a carga de flambagem usando programação matemática considerando os parâmetros de laminação como variáveis de projeto. Todoroki et al. (2003)

investigaram a maximização da carga de flambagem de placas reforçadas utilizando o método de superfície de resposta e parâmetros de laminação. Erdal e Sonmez (2005) usaram o algoritmo de recozimento simulado (*simulating annealing*) para encontrar o projeto ótimo para a máxima carga de flambagem de compósitos laminados. Akbulut e Sonmez (2008) também aplicaram o algoritmo baseado em recozimento simulado. Algoritmos de colônia de formigas foram aplicados na otimização da flambagem por Aymerich e Serra (2008), Wang et al. (2010) e por Koide et al. (2010). Bloomfield et al. (2010) apresentaram um estudo comparativo de técnicas heurísticas aplicadas à otimização do empilhamento das lâminas, tendo a flambagem como restrição. Recentes estudos como de WU et al. (2012) apresentam a maximização da carga de flambagem de placas de laminados cujas fibras são curvas. WU et al. (2013a) compararam os métodos variacional, diferencial quadrático e uma solução aproximada, em forma fechada, para flambagem de laminados anisotrópicos.

Em relação à pós-flambagem, a otimização nesse regime foi investigada por Pandey e Sherboune (1993) analisando a rigidez no início da pós-flambagem. Diaconu e Weaver (2005) desenvolveram uma solução analítica aproximada para pós-flambagem e aplicaram no projeto ótimo de placas laminadas. Herencia et al. (2007) utilizaram também os parâmetros de laminação na otimização de painel de laminado anisotrópico com reforços de perfil tipo T. Parâmetros de laminação foram adotados por Liu et al. (2010) na otimização de asas feitas com painéis compósitos usando a técnica *smearred stiffness*, isto é, a matriz de rigidez é generalizada ou homogeneizada, por exemplo, no caso de placa, a rigidez é expressa em função do elemento da matriz de rigidez de membrana  $A_{11}$  sujeita a carregamento puramente axial.

Reddy et al. (2011) otimizaram a sequência de empilhamento de placas de compósito laminado aplicando redes neurais. Seus resultados contemplam a análise experimental e simulações numéricas com elementos finitos para minimizar a deflexão e a tensão. Liu e Toropov (2013), utilizando parâmetros de laminação e algoritmos genéticos, otimizaram o número de lâminas e a sequência de empilhamento de painéis e modelos de asa tipo caixa. WU et al. (2013b) apresentaram um estudo de otimização em pós-flambagem para placas com lâminas formadas de fibras curvas.

Neste trabalho o algoritmo de busca por harmonias ótimas (HS) é utilizado na otimização das orientações das lâminas de estruturas compósitas tipo placas e painel cilíndrico com furo. Esse algoritmo ainda é pouco explorado nessa aplicação, de forma que os resultados obtidos contribuem para a avaliação de seu desempenho nesse contexto. No trabalho de Almeida e Awruch (2010), onde o HS foi usado para minimizar o peso e a deflexão, em regime linear, de uma placa laminada sob uma carga transversal distribuída. O metamodelo regressão de vetores de suporte é aplicado nesta tese para placas e painéis (sem e com reforços), ressaltando-se que não se encontrou na literatura aplicações desse metamodelo em compósitos, principalmente em flambagem e pós-flambagem. Dessa forma, os resultados obtidos também contribuem para evidenciar a viabilidade do uso desse metamodelo nessa aplicação. O algoritmo de vaga-lumes discreto também foi adaptado para geometrias mais complexas como na otimização de painéis retos e curvos com reforços. Adotou-se os critérios de falha de Tsai-Wu e Hashin para painéis reto e curvo com reforços e o critério de Hashin e o método de Chang-Lessard para monitorar o dano do material compósito no processo de otimização das estruturas. A partir da pesquisa bibliográfica evidência-se que trabalhos envolvendo a otimização com HS são poucos e com o algoritmo de vaga-lumes discreto no projeto de estruturas de compósitos laminados não foram encontrados na literatura.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados os principais conceitos utilizados no desenvolvimento da tese. Uma descrição sobre materiais compósitos laminados e aspectos teóricos sobre flambagem e pós-flambagem são apresentados. Para a construção dos metamodelos para aproximação do comportamento estrutural em flambagem e pós-flambagem, a teoria do projeto de experimentos hipercubo latino (HL) é apresentada e a técnica de regressão de vetores de suporte (RVS) é fundamentada. O algoritmo baseado na busca das melhores harmonias (*harmony search* - HS) e o algoritmo de vaga-lumes (AVL) são explicados.

#### 3.1 Material compósito laminado

Nesta seção são apresentados alguns conceitos sobre materiais compósitos laminados e algumas características que os tornam flexíveis nas aplicações em engenharia. Como as estruturas feitas com esses materiais são normalmente finas, o estudo da estabilidade é necessário tanto na análise da carga crítica de flambagem quanto no seu comportamento em regime de pós-flambagem.

##### 3.1.1 Conceitos e definições

Material **composto** (ou **compósito**) é definido por Mendonça (2005) como a combinação de dois ou mais materiais diferentes, em escala macroscópica, funcionando como um único material, com o intuito de obter um conjunto de propriedades que nenhum dos constituintes apresenta individualmente. A formação do compósito se dá basicamente pela utilização de reforços (fibras ou partículas) de alta resistência mecânica, imersos em uma matriz que pode ser polimérica, metálica ou mineral. A matriz serve de base para o material e é responsável pela transferência das solicitações mecânicas recebidas.

O reforço garante ao compósito a resistência mecânica às solicitações e pode estar aleatoriamente disperso ou orientado em uma dada direção. Alguns exemplos de materiais utilizados como reforços são as fibras de vidro, de aramida (conhecida pelo nome comercial “Kevlar”) e de carbono. Os compósitos podem ser classificados

pelo tipo e orientação do reforço, geometria e material da matriz (JONES, 1999). Já um **material compósito laminado** é formado pelo empilhamento de lâminas de material compósito. Em aplicações de responsabilidade estrutural, são utilizadas lâminas reforçadas por fibras contínuas e unidirecionais. Essa disposição imprime um caráter anisotrópico às lâminas, sendo a resistência e a rigidez do material muito maiores na direção das fibras do que na direção perpendicular à elas. As lâminas possuem espessura da ordem de 0,1 a 0,3 mm.

As características finais do laminado dependem do número de lâminas e também da **sequência de empilhamento**, ou seja, da combinação e ordem das orientações das lâminas.

A Figura 3.1 apresenta, de forma esquemática, a formação de um laminado a partir do empilhamento de lâminas com fibras unidirecionais.

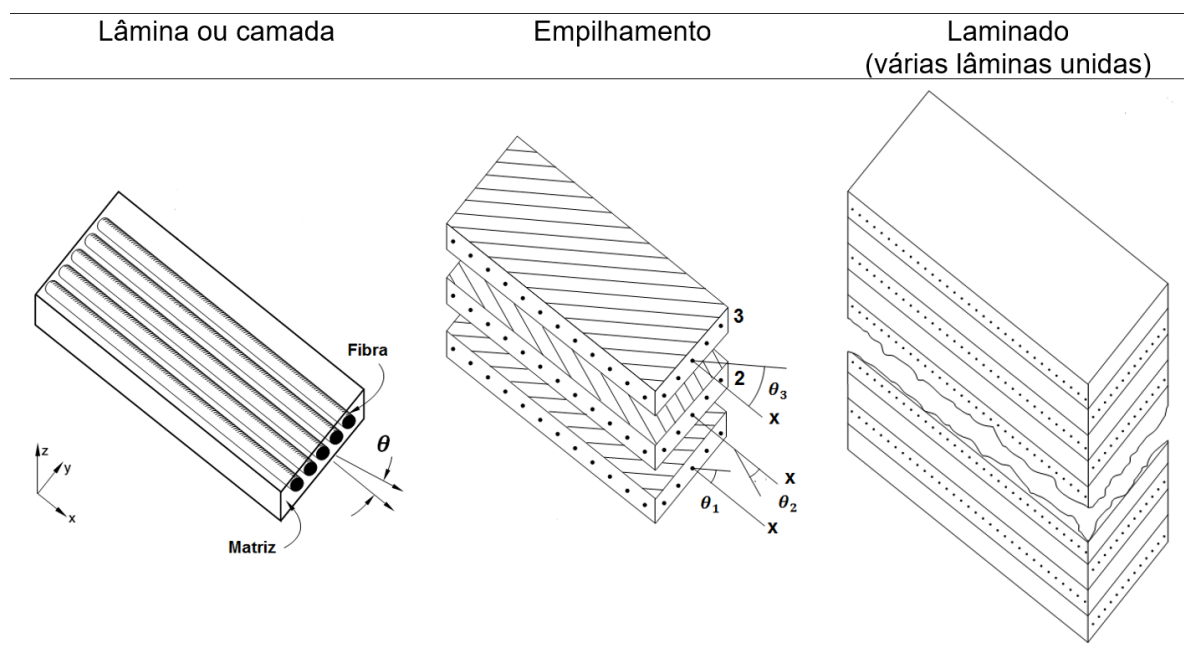


Figura 3.1 - Representação de um material compósito laminado com fibras unidirecionais.

Na maioria dos casos aqui estudados, o empilhamento dos laminados é simétrico e balanceado. O empilhamento é dito simétrico se apresentar simetria em geometria e propriedades em relação ao seu plano médio ao longo da espessura. O laminado é balanceado se para cada lâmina com orientação  $-\theta$  tem-se uma lâmina correspondente de mesmo material com orientação  $+\theta$ .

Para componentes constituídos de material compósito, normalmente a espessura de uma lâmina é pré-determinada, e as orientações das lâminas (e, consequentemente, das fibras) são usualmente limitadas a um conjunto discreto de valores, por exemplo:  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ,  $90^\circ$ , devido às restrições de fabricação. Desse modo, a obtenção de uma sequência ótima de empilhamento das lâminas, sendo a orientação de cada lâmina uma variável de projeto, conduz à resolução de um problema de otimização em variáveis discretas.

Uma das grandes vantagens dos materiais compósitos, em comparação aos materiais puramente metálicos, é a possibilidade de se obter relações resistência mecânica/peso e rigidez/peso muito superiores. Assim, as aplicações dos materiais compósitos se popularizaram e se desenvolveram nas indústrias aeronáutica e espacial, onde diminuir o peso final total é primordial (MENDONÇA, 2005). A partir daí se expandiram para os mais diferentes setores.

### 3.1.2 Flambagem e pós-flambagem

Flambagem ou instabilidade estrutural é definida como a transição da estrutura de uma posição de equilíbrio estável para uma de equilíbrio instável provocada por tensões compressivas (VENTSEL e KRAUTHAMMER, 2001). Como as estruturas de compósitos laminados são geralmente finas e podem estar sujeitas à cargas compressivas, são suscetíveis à flambagem. As análises do comportamento em flambagem visam, em geral, estimar a carga crítica de flambagem para projetar estruturas confiáveis e seguras. A compreensão do fenômeno da flambagem também é necessária para o estudo da pós-flambagem.

A Figura 3.2 (LEISSA, 1983) apresenta um gráfico dos padrões do deslocamento transversal em função da carga axial compressiva aplicada em uma placa plana. A placa, quando sujeita às condições de um carregamento crítico ( $P_{cr}$ ), flamba e sofre um deslocamento transversal (na direção  $z$ ) com certa amplitude,  $w$ . A carga crítica de flambagem  $P_{cr}$  representa o limite entre o equilíbrio estável e o instável. A linha I representa a flambagem sem imperfeição geométrica, que a partir de  $P_{cr}$  pode seguir as trajetórias II e IV. Na situação linearizada, após  $P_{cr}$ , a estrutura pode permanecer sem deflexão (II), pode fletir bruscamente (IV) ou progressivamente (V). Um comportamento típico em pós-flambagem está ilustrado pelas linhas das

regiões IV e V (após a linha III), cujo comportamento é não-linear, e a determinação da máxima carga suportada pela estrutura é complexa. Para a primeira situação (IV), a pós-flambagem é inicialmente analisada considerando a estrutura sem imperfeições. Neste caso existe a necessidade do conhecimento prévio da carga crítica de flambagem (III), considerado também como o ponto de bifurcação, onde a partir do qual o regime passa a ser não-linear. A linha V representa a flambagem não-linear com imperfeição geométrica, representada por um deslocamento transversal inicial. O comportamento também é não-linear e a curva de equilíbrio do regime de pós-flambagem não apresenta o ponto de bifurcação. Nessa última curva a deflexão é progressiva desde o início do carregamento, mesmo antes de  $P_{cr}$ .

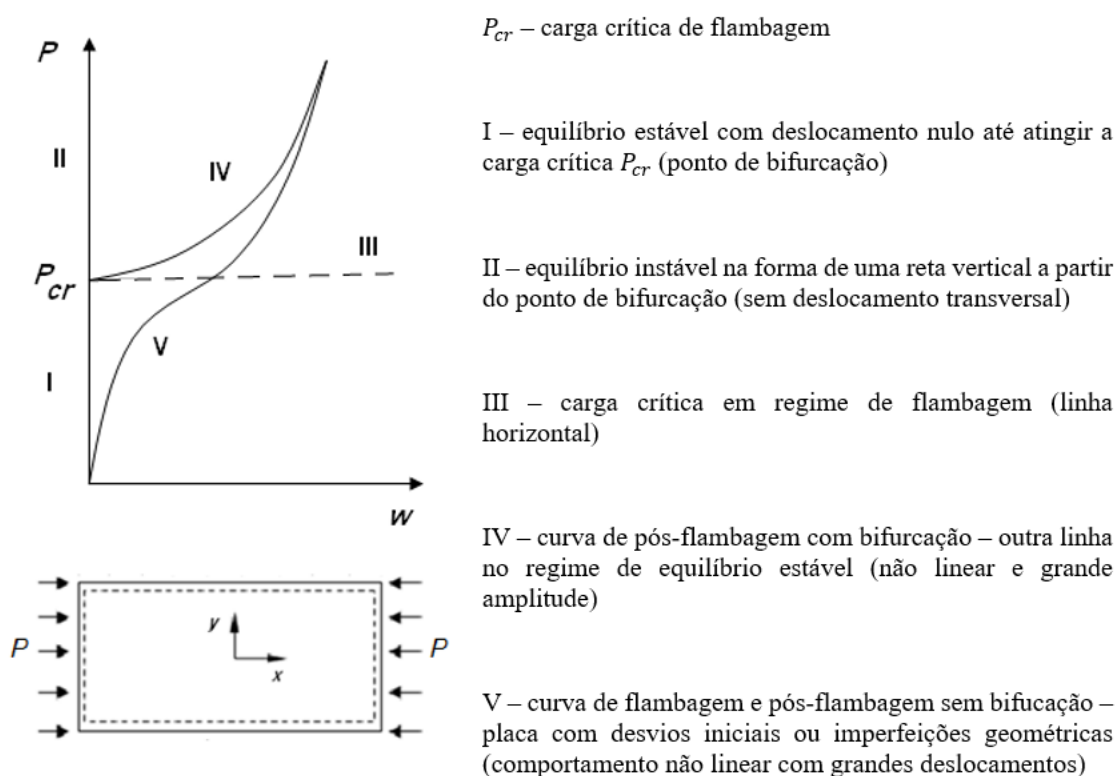


Figura 3.2 - Carga versus deslocamento transversal de uma placa submetida a carregamento axial compressivo. Fonte: adaptado de Leissa (1983).

O estudo da flambagem requer o conhecimento da carga crítica, e o estudo da pós-flambagem necessita de uma verificação da estabilidade através da curva carga versus deslocamento transversal ou carga versus deslocamento axial, o que possibilita compreender o comportamento desse fenômeno não-linear.

Ao longo dos últimos anos, a análise em pós-flambagem vem se tornando de grande importância na indústria aeronáutica, especialmente em estruturas de compósitos laminados (MENDONÇA, 2005). Uma outra abordagem sobre o tema pode ser vista sob o aspecto de que a estrutura tem a capacidade de suportar uma determinada carga além do regime de flambagem, ou seja, entre a carga limite e a carga última. Essa perspectiva permite que aeroestruturas operem em regime de pós-flambagem, possibilitando o projeto de aeronaves mais leves (FALZON, 2008). A carga limite é a máxima carga que se espera em serviço, e a carga última é a carga limite multiplicada pelo fator de segurança, normalmente igual a 1,5, para a categoria de aeronaves de transporte (KLING, 2008). Nesse contexto, as especificações da carga e o fator de segurança são definidos nas normas da *Federal Aviation Regulations* (FAR), órgão americano que regulamenta as atividades de aviação e normas para aeronaves nos Estados Unidos. O limite de até quanto uma estrutura suporta uma sobrecarga ainda não é bem conhecido (KLING, 2008). Segundo essa visão, a estrutura está sujeita a uma nova condição em que não sofrerá danos ou falhas até um limite máximo de carga. Para a análise da estabilidade, tem-se então um limite dado pela primeira carga de flambagem, a carga crítica, e uma carga limite dada pela última carga permitida na estrutura. Essas características podem ser observadas nos gráficos carga versus encurtamento da Figura 3.3, em que um projeto de um painel (casca) de compósito laminado com reforçadores de peso 1 e um projeto de peso 2 (menor que o peso 1) são analisados segundo suas cargas críticas e limites nos quais sofrem falhas.

No intervalo entre a carga limite e a carga última, apresentada na Figura 3.3, encontra-se uma região de trabalho permitida, sem falhas e com redução do peso da estrutura, o que pode ser observado com a estrutura 2. Essa estrutura mais leve, assim como a mais pesada, não falharia entre a carga limite e a carga última. Apresentaria, no entanto, maior encurtamento. A estabilidade nesse novo cenário, que é baseada na definição da carga última aceitável, possibilita a exploração dessa reserva de carga e, portanto, resultando em estruturas mais eficientes em relação à redução de peso (KLING, 2008).

Resumidamente, observa-se na Figura 3.3 que a flambagem local da estrutura de menor peso acontece sob um carregamento menor, comparada à estrutura de



maior peso\*. No entanto, para ambas as estruturas, não há flambagem global ou início da degradação antes da carga última. Isso significa que poderia se optar pela estrutura de menor peso e ainda manter a segurança do projeto

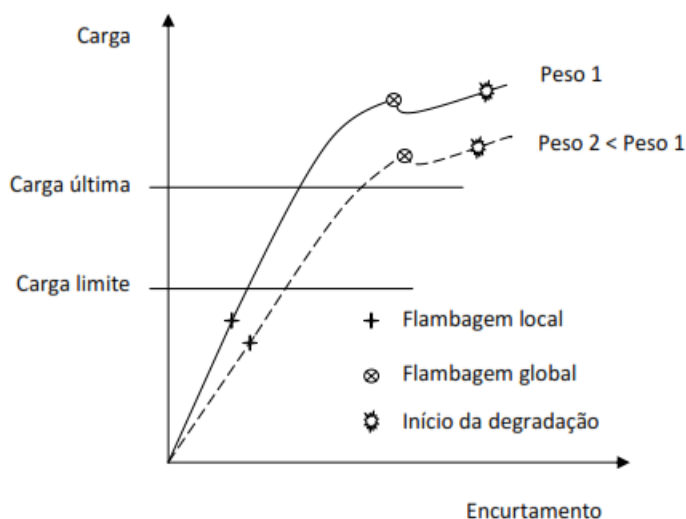


Figura 3.3 - Curva carga versus deslocamento para análise de estabilidade de um painel com reforçadores. Fonte: adaptado de Kling (2008).

### 3.2 Projeto de experimentos e metamodelos

A técnica de metamodelagem básica possui os seguintes passos: (i) estabelecimento do espaço de projeto; (ii) escolha do conjunto de valores das variáveis de projeto para definir as simulações (ou experimentos) através de uma técnica de projetos de experimentos; (iii) realização das simulações (ou experimentos) e coleta das respostas (saídas); (iv) de posse dos pares entrada/saída, construção de um metamodelo (esta etapa por vezes é chamada de treinamento); e finalmente (v) validação do metamodelo. Existem diferentes projetos de experimentos como: *full factorial* (malha regular), *central composite*, *box-behnken*, hipercubo latino, Monte Carlo (MYERS e MONTGOMERY, 2002). Existem também diversos metamodelos como *Kriging*, funções de base radial, redes neurais artificiais (*artificial neural networks*), *decision tree* e máquina de vetores de suporte (*support vector machine*), como descreveram Wang e Shan (2007) e Vapnik (2000).

\* A flambagem local refere-se àquela que ocorre na casca do laminado e a flambagem global àquela que ocorre na estrutura como um todo (reforçadores e casca juntos).

A quantidade e a localização dos pontos no espaço de projeto para realizar as simulações (ou os experimentos) exerce um papel muito importante na construção de metamodelos acurados. A princípio, quanto maior o número de pontos simulados, mais acurado será o metamodelo. Por outro lado, de forma a manter um custo (numérico ou experimental) razoável, o número de amostras não deve ser elevado. Projeto de experimentos (DOE, do inglês *design of experiments*) é a denominação dada à técnica que auxilia no processo de seleção desses pontos (FORRESTER et al., 2008).

Jin et al. (2001), em uma análise comparativa de diversas técnicas de metamodelagem, apresentaram um estudo sobre a quantidade de amostras em função do número de variáveis. Nesse estudo, o desempenho da técnica da metamodelagem levou em consideração os critérios: acuracidade, robustez, eficiência, transparência e simplicidade. O tamanho das amostras necessário para o treinamento foi estimado para problemas com conjuntos de dados amostrais escassos, pequenos e grandes.

Wang e Shan (2007) definiram a metamodelagem como um processo de construção de um modelo aproximado. Essa técnica, por vezes também chamada de superfície de resposta, tem sido usada para projetar, desenvolver, otimizar e melhorar os processos com o intuito de reduzir custos computacionais. Myers e Montgomery (2002) definiram metamodelagem como uma coleção de técnicas estatísticas e matemáticas para o desenvolvimento, melhoria e otimização de processos. Simpson et al. (2008) e Wang e Shan (2007) revisaram esse assunto abordando a amostragem, o ajuste e validação do modelo, a exploração do espaço de projeto e os métodos de otimização em função das amostras.

### 3.2.1 Hipercubo latino

O hipercubo latino (HL) é uma das técnicas de projeto de experimentos mais populares. Forrest et al. (2008) explicam que as amostras geradas via HL são obtidas a partir da estratificação de cada variável do espaço de projeto em um número igual ao de pontos que deseja-se amostrar, assegurando que cada compartimento contenha uma única projeção ortogonal dos pontos das amostras.

O HL em duas dimensões ( $n = 2$ ), chamado de quadrado latino, consiste em dividir o espaço normalizado (neste caso, um quadrado) formado pelas duas variáveis em um tabuleiro de  $m \times m$  subquadrados, e distribuir  $m$  pontos nesses subquadrados de forma que não haja dois pontos ocupando a mesma linha ou a mesma coluna. A Figura 3.4 mostra dois possíveis quadrados latinos com 10 amostras ( $m = 10$ ). O hiper-cubo latino é a generalização desse método para  $n$  dimensões.

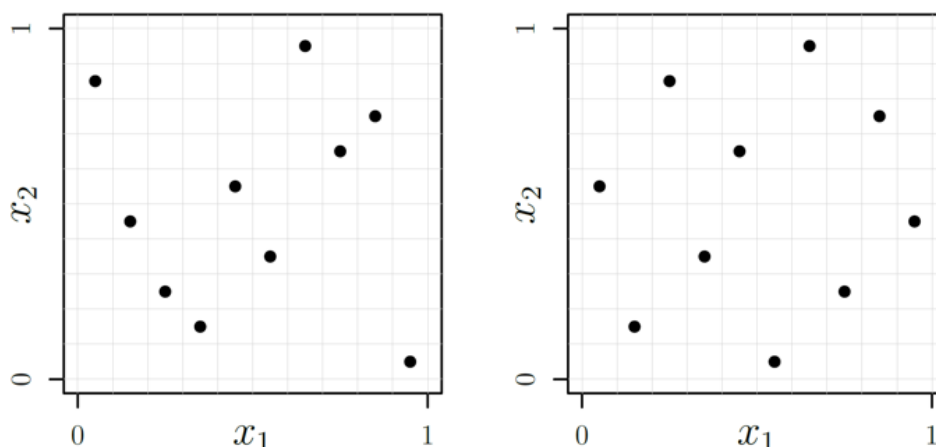


Figura 3.4 - Exemplo de 10 amostras geradas com HL em um espaço bidimensional. Fonte: (PASSOS, 2016).

O hiper-cubo latino apresenta algumas características, tais como: (i) o número de pontos (amostras) não é fixo; (ii) os pontos são “ortogonais”, isto é, pontos diferentes não possuem o mesmo valor de coordenada em qualquer eixo coordenado analisado; (iii) a posição dos pontos não depende do metamodelo que será construído; e (iv) diferentes configurações de amostras podem ser obtidas com o mesmo número de variáveis e o mesmo número de amostras.

### 3.2.2 Máquinas de vetores de suporte e regressão de vetores de suporte

Reconhecimento de imagens, categorização de textos, bioinformática, estruturas de proteínas, neurociência, classificação e mineração de dados (*data mining*), são exemplos de aplicações de MVS. A teoria de MVS foi desenvolvida nos anos 1960 na Rússia por Vapnik e colaboradores e é descrita em Vapnik (2000). A técnica MVS é baseada na teoria de aprendizado estatístico, na estatística indutiva para a estimativa de uma função, na minimização do risco e no princípio do risco

empírico com base em dados empíricos. Essas últimas teorias estão resumidamente descritas no Apêndice D.

Vapnik desenvolveu a análise do processo de aprendizagem em 1970, baseado no princípio indutivo. O princípio indutivo refere-se à estatística indutiva que é baseada em determinado número de amostras. Esse princípio é muito bem aplicado no algoritmo de aprendizagem de máquina. O modelo de aprendizagem de máquina é representado por três componentes, como explica Vapnik (2000). A Figura 3.5 mostra uma representação esquemática do modelo de aprendizagem. O primeiro componente é um gerador de vetores randômicos denominado  $G(x)$ . Esse gera um conjunto de exemplos rotulados na forma  $(x_i)$ , em que  $x_i$  representa um exemplo para o qual o supervisor  $S$  gerará uma resposta  $(y_i)$ . O segundo componente é a máquina de aprendizagem ( $MA$ ) que implementa o conjunto de funções e retorna uma resposta ou predição aproximada supervisionada chamada  $\tilde{y}$ . O terceiro componente é um supervisor ( $S$ ), que retorna os valores de saída  $(y)$ .

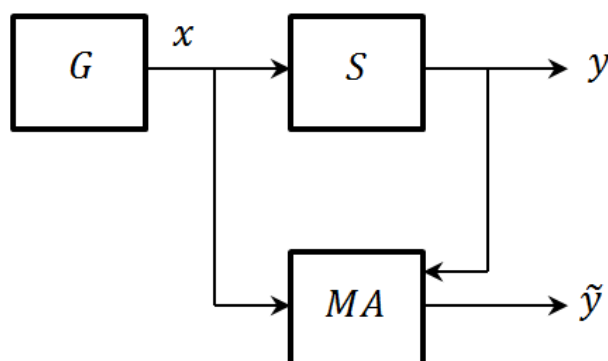


Figura 3.5 - Modelo geral de aprendizado. Fonte: (VAPNIK, 2000).

O conjunto de exemplos compõe-se de dois subconjuntos: um de treinamento, outro de teste ou avaliação para a análise da estimativa das predições. O primeiro subconjunto é utilizado no aprendizado do conceito e o segundo na avaliação da efetividade do conceito aprendido na predição de novos dados. A máquina de aprendizado é de “classificação” quando os rótulos assumem valores discretos ou números binários. Caso os rótulos ou saídas possuam valores contínuos tem-se uma máquina de “aprendizado de regressão” (LORENA e CARVALHO, 2007).

As máquinas de vetores de suporte (MVS) formam a base do desenvolvimento da classificação de vetores de suporte e da regressão de vetores de suporte (RVS).

Essas técnicas são consideradas de aprendizado de máquina, ou de algoritmo de aprendizado de máquina à semelhança das redes neurais artificiais (RN). A teoria das redes neurais não é relatada nesta seção, mas um resumo é descrito no Apêndice C. A base do aprendizado de máquina vem do princípio de inferência, isto é, obter dados genéricos em função de um conjunto de dados quaisquer. Esse tipo de aprendizado se divide em supervisionado e não-supervisionado. No primeiro, considera-se a existência de um “professor”, cujo conhecimento é repassado na forma de exemplos de dados de entrada e determinadas saídas desejadas. Um algoritmo de aprendizado de máquina aprende como extrair esse conhecimento e a partir de então gera resultados ou saídas para outras entradas de dados. No segundo, o “professor” não está presente, ou seja, não há exemplos de dados prontos. O conhecimento do algoritmo de aprendizado de máquina, nesse caso, vem da representação da saída segundo uma medida de qualidade da informação (LORENA e CARVALHO, 2007). Portanto, a máquina de vetores de suporte é baseada no método da aprendizagem supervisionada usando procedimentos de treinamento (SÁNCHEZ A., 2003).

Uma retrospectiva a respeito de máquinas de regressão de vetores de suporte pode ser encontrada em Vapnik e Vashist (2009), e um tutorial em Smola e Schölkopf (2004). Além disso, explicações adicionais são dadas em Ben-Hur et al. (2001); Sánchez A. (2003); Suttorp e Igel (2006); Basak et al. (2007); Üstün et al. (2007); Pan et al. (2010); Che (2013).

A função de decisão de classificação de vetores de suporte ou RVS é determinada pelos vetores suporte como relatam Guo e Zhang (2007) e Boser et al. (1992). A diferença entre a classificação e a regressão é que os vetores suporte geram um hiperplano na classificação, ou seja, uma função que classifica um conjunto de amostras, por exemplo, no reconhecimento de padrões. No caso de regressão, os vetores suporte determinam uma função aproximada para o fenômeno em análise representado pelas amostras.

A seguir são descritas as teorias das MVS de classificação e de regressão.

**MVS linear com margens rígidas**

Considera-se MVS linear com margens rígidas aquela em que os dados são linearmente separáveis. Para um conjunto de treinamento com  $x_i \in X$  e  $y_i \in Y$ , onde  $X$  é o espaço de dados e a classe  $Y = \{-1, +1\}$ , é possível separar linearmente, por um hiperplano classificador, os dados das classes -1 (hiperplano -1) e +1 (hiperplano +1). Esse classificador é dito linear porque é separado por um hiperplano. A equação do hiperplano classificador é definida como o produto escalar entre os vetores  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{x}$  e a soma de um parâmetro  $b$ , expressa por

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0, \quad (1)$$

onde  $\mathbf{w} \in X$  é o vetor normal ao hiperplano e  $b/\|\mathbf{w}\|$  é a distância do hiperplano em relação à origem, com  $b \in R$ .

Observa-se, nessa equação, que existem duas regiões do espaço de dados definidas por  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b > 0$  e  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b < 0$ . As classificações podem ser obtidas com a utilização de uma função sinal  $g(\mathbf{x})$ , definida como

$$g(\mathbf{x}) = \text{sgn}(f(\mathbf{x})) = \begin{cases} +1 & \text{se } \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b > 0 \\ -1 & \text{se } \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b < 0. \end{cases} \quad (2)$$

A Figura 3.6 mostra o vetor  $\mathbf{w}$ ,  $b/\|\mathbf{w}\|$  e os hiperplanos ( $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = +1$  e  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = -1$ ), o hiperplano classificador ( $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0$ ). A margem  $d$  de separação entre os dois hiperplanos ( $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = +1$  e  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = -1$ ) também está representada na Figura 3.6. A distância mínima entre o plano separador e os dados de treinamento é  $1/\|\mathbf{w}\|$ .

Se multiplicarmos o vetor  $\mathbf{w}$  e o escalar  $b$  por uma constante, tem-se inúmeros hiperplanos equivalentes. Define-se o hiperplano canônico em relação ao conjunto  $(x_i, y_i)$  como aquele em que  $\mathbf{w}$  e  $b$  são selecionados de forma que os exemplos mais próximos ao hiperplano  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0$  satisfaçam a Eq. (3) (LORENA e CARVALHO, 2007). A partir da qual têm-se as inequações da Eq. (4) que apresenta as classes -1 e +1 ou os hiperplanos -1 e +1.

$$|\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b| = 1, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b \geq +1 \text{ se } y_i = +1 \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b \leq -1 \text{ se } y_i = -1. \end{cases} \tag{4}$$

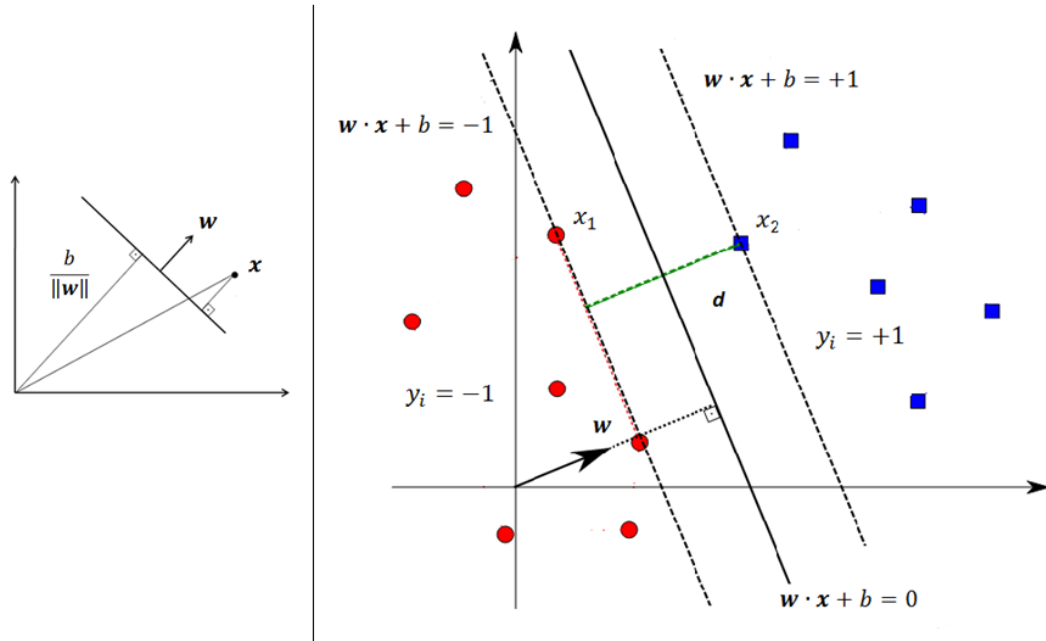


Figura 3.6 - Hiperplano e margem  $d$ .

O melhor classificador linear é obtido através de um problema de otimização ou da minimização de  $\|\mathbf{w}\|$ , em que maximiza a margem de separação de dados em relação ao hiperplano  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0$ . Essa técnica de construir hiperplanos ótimos passou a ser chamada de máquinas de vetores de suporte, iniciando um novo tipo de aprendizado de máquina (VAPNIK, 2000). Assim, tem-se

$$\text{Minimizar: } \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \tag{5}$$

$$\text{Restrições: } y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1 \geq 0, \forall_i = 1, \dots, n.$$

Esse tipo de máquina de vetor de suporte é considerada de margens rígidas, pois a restrição evita dados de treinamento entre as margens. O método de Lagrange pode ser adotado na solução da Eq. (5), pois trata-se de um problema convexo,

incluindo as restrições, portanto, apresenta uma solução única global. Reformulando-a e adotando os multiplicadores de Lagrange  $\alpha_i$  para os  $n$  vetores suporte, tem-se

$$L(\mathbf{w}, b, \alpha) = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i (y_i (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1). \quad (6)$$

A minimização da Eq. (6), denominada de função Lagrangeana na forma primal, é obtida com a maximização dos multiplicadores de Lagrange  $\alpha_i$  e com a minimização do  $\mathbf{w}$  e  $b$ . Aplicando-se, então, as derivadas  $\frac{\partial L}{\partial b} = 0$  e  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = 0$  obtém-se a solução com as expressões

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0, \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \mathbf{x}_i. \quad (7)$$

A formulação na forma dual pode ser obtida através das Eqs. (6) e (7). O problema em função dos dados de entrada e suas saídas, além de restrições simplificadas e uma representação em termos de produtos internos e é descrito como

$$\text{Maximizar}_{\alpha} : \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \quad (8)$$

$$\text{Restrições: } \begin{cases} \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0. \end{cases}$$

A solução do problema dual é representada por  $\alpha^*$ . Para o problema primal as soluções são representadas por  $\mathbf{w}^*$  e  $b^*$ . Os vetores  $\mathbf{w}^*$  podem ser calculados a partir da Eq. (7) em função do conhecimento de  $\alpha_i^*$ . O parâmetro  $b^*$  é obtido com  $\alpha^*$  e com as condições de Kühn-Tucker como descrevem Lorena e Carvalho (2007) e Smola e Schölkopf (2004). Com essas condições e reformulando o problema dual tem-se

$$\alpha_i^* (y_i (\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i + b^*) - 1) = 0, \forall i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

A Equação (9) mostra que  $\alpha_i^* \neq 0$  somente nas situações em que os dados se encontram sobre os hiperplanos. A condição é satisfeita quando  $\alpha_i^* = 0$  para os



demais casos, mas não são incluídos na determinação de  $\mathbf{w}^*$ . Assim, quando  $\alpha_i^* > 0$ , tem-se os vetores de suporte, que satisfazem a condição de otimalidade e determinam o hiperplano separador.

A determinação de  $b^*$  pode então ser feita a partir dos  $n_{VS}$ , número de vetores de suporte, pertencente ao conjunto de vetores suportes,  $VS$ , e da Eq. (9) resultando em

$$b^* = \frac{1}{n_{VS}} \sum_{x_j \in VS} \frac{1}{y_j} - \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i. \quad (10)$$

### **MVS linear com margens flexíveis**

As MVS com margens flexíveis ou suaves são necessárias devido a presença de ruídos nos dados ou mesmo porque os problemas são não-lineares. Matematicamente, o problema é tratado com a inclusão de variáveis de folga  $\xi_i$ , ou seja, elas relaxam as restrições possibilitando trabalhar com um conjunto ampliado ou uma expansão das margens. O problema de otimização primal, de forma semelhante às de margens rígidas, torna-se

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \\ \text{Restrições: } & y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1 - \xi_i, \quad \xi_i \geq 0, \quad \forall_i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

Considerando as folgas, o classificador linear se torna suave tendo em vista que alguns dados ficam entre as margens e que erros também ocorrem. Dada a existência destes erros, a função objetivo deve considerar o menor erro possível sobre os dados de treinamento, podendo ser escrita como

$$\text{Minimizar: } \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \right), \quad (12)$$

onde  $C$  é a constante de regularização definindo um peso na minimização da soma das folgas ou erros, utilizada também para a limitar os valores de  $\alpha_i$ .

Transformando esse problema de otimização com o método Lagrangeano, à semelhança das funções formuladas para as margens rígidas, e limitados por  $C$ , obtêm-se a forma dual

$$\text{Maximizar: } \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \quad (13)$$

$$\text{Restrições: } \begin{cases} 0 \leq \alpha_i \leq C, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0. \end{cases}$$

Novamente, à semelhança das margens rígidas, a solução do problema dual é encontrado em função das variáveis  $\alpha^*$  e  $\mathbf{w}^*$ , e a solução da forma primal em função das variáveis  $b^*$  e  $\xi^*$ . O cálculo de  $\mathbf{w}^*$  é obtido de forma semelhante e as variáveis de folga determinadas por

$$\xi_i^* = \max \left( 0, 1 - y_i \sum_{j=1}^n y_j \alpha_j^* \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i + b^* \right). \quad (14)$$

As condições de Kühn-Tucker a serem aplicadas neste caso são:

$$\begin{aligned} \alpha_i^* (y_i (\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i + b^*) - 1 + \xi_i^*) &= 0 \\ (C - \alpha_i^*) \xi_i^* &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Os vetores  $\mathbf{x}_i$  são considerados vetores de suporte quando  $\alpha_i^* > 0$ . Como neste caso existe a limitação da constante  $C$ , outros vetores ocorrem dependendo se  $\alpha_i^* = C$  ou  $\alpha_i^* < C$  combinadas com as possibilidades de  $\xi_i^* = 0$ ,  $0 < \xi_i^* < C$  e  $\xi_i^* > 1$ . A determinação de  $b^*$  ocorre da mesma forma que o caso de margens rígidas.

### **MVS não-lineares**

Problemas não-lineares não são resolvidos totalmente com as MVS de margens suaves. Para tal as MVS realizam o mapeamento do conjunto de treinamento, o espaço de entrada ( $X$ ), para um espaço de maior dimensão chamado de espaço de características ( $F$ ). A Figura 3.7 mostra esta transformação.

A função  $\Phi$  mapeia o espaço de entrada  $X$  em um espaço de características  $F$  possibilitando a separação por uma MVS linear ( $\Phi: X \rightarrow F$ ). Este mapeamento para MVS é realizado desde que a transformação seja não-linear e que a dimensão do espaço de características seja suficientemente alta, possibilitando que os dados sejam linearmente separáveis (LORENA e CARVALHO, 2007).

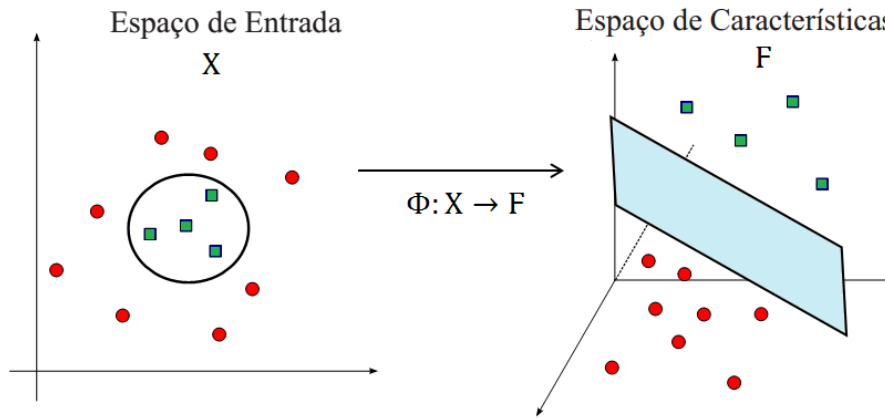


Figura 3.7 - Mapeamento do espaço de entrada para o espaço característico.

A formulação para as MVS não-lineares segue a mesma teoria descrita para as MVS com margens suaves. Os dados de treinamento são mapeados para um espaço característico por uma função  $\Phi$  e então aplica-se a MVS linear neste novo espaço. O problema de otimização da MVS não-linear é formulado como

$$\text{Maximizar}_{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\Phi(x_i) \cdot \Phi(x_j)) \quad (16)$$

$$\text{Restrições: } \begin{cases} \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0. \end{cases}$$

O hiperplano classificador e a variável  $b^*$  são obtidas como

$$g(x) = \text{sgn}(f(x)) = \text{sgn}(\sum_{x_i \in VS} \alpha_i^* y_i \Phi(x_i) \cdot \Phi(x) + b^*), \quad (17)$$

$$b^* = \frac{1}{n_{VS: \alpha^* < C}} \sum_{x_i \in VS: \alpha_i^* < C} \left( \frac{1}{y_j} - \sum_{x_i \in VS} \alpha_i^* y_i \Phi(x_i) \cdot \Phi(x_j) \right). \quad (18)$$

A expansão do espaço característico pode tornar-se infinita com a transformação com a função  $\Phi$ . Para minimizar este problema utiliza-se funções *kernels*, pois o mapeamento se dá com o cálculo do produto escalar entre os dados no espaço de características.

A função *kernel* recebe dois pontos  $x_i$  e  $x_j$  do espaço de treinamento e realiza o produto escalar desses pontos no espaço de características, a qual é representada por

$$K(x_i, x_j) = \langle \phi(x_i) \cdot \phi(x_j) \rangle \tag{19}$$

Suttorp e Igel (2006) definiram as máquinas de vetores de suporte como máquinas de aprendizagem baseadas em algoritmo de aprendizagem e um *kernel* específico que transforma ou mapeia os dados de entrada, via produto interno, para o espaço característico.

Funções *kernel* são baseadas no polinômio trigonométrico de grau  $d$ , nas funções de base radial, em polinômios de grau  $d$ , nas redes gaussianas de funções de base radial, em *splines* (SÁNCHEZ, 2003). Alguns tipos de funções *kernel* podem ser aplicadas em problemas não-lineares para resolver problemas de regressão. A Tabela 3.1 apresenta exemplos dessas funções (SÁNCHEZ, 2003).

**Tabela 3.1 - Exemplos de funções *kernel*.**

Funções <i>kernel</i>	Tipos de <i>kernel</i>
$\tanh(x \cdot y - \theta)$	<i>perceptron</i> multicamadas
$\exp(-\ x - y\ ^2)$	função gaussiana de base radial
$(1 + x \cdot y)^d$	polinômio de grau $d$
$(\ x - y\  \pm c^2)^{-1/2}$	multiquadrático direto/inverso
$\ x - y\ ^{2n} \ln(\ x - y\ )$	<i>splines</i>

**Regressão de vetores de suporte (RVS)**

A RVS é uma variante da MVS. A técnica RVS busca uma função multivariada  $f(x)$  baseada no conjunto de entrada de dados, ou seja, um conjunto para treinamento  $X$  para predizer os dados de saída, a resposta do problema, como realçam (Vapnik (1993), Vapnik (1999), Vapnik (2000), Smola e Schölkopf (2004), Üstün et al. (2007), Guo e Zhang (2007)). Vapnik considerou no desenvolvimento da máquina de

aprendizagem uma regra de decisão linear adotando a separação por hiperplanos. Um tipo especial de hiperplano, denominado hiperplano ótimo de separação. Esse hiperplano ótimo é obtido com os vetores de suporte do conjunto de treinamento que tenham a máxima margem de separação entre os vetores e o hiperplano, os quais são representados por

$$(x_1, y_1), \dots, (x_l, y_l), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad y \in [+1, -1], \quad (20)$$

que pode ser separado pelo hiperplano

$$(\mathbf{w}_{vs} \cdot \mathbf{x}_{vs}) - b_{vs} = 0. \quad (21)$$

onde  $\mathbf{w}_{vs}$  é o vetor normal ao hiperplano,  $b_{vs} \in R$  e  $\mathbf{w}_{vs} \cdot \mathbf{x}_{vs}$  é o produto escalar entre os vetores  $\mathbf{w}_{vs}$  e  $\mathbf{x}_{vs}$ . As máquinas de vetores de suporte definem fronteiras lineares a partir de dados linearmente separáveis (LORENA e CARVALHO, 2007). O conjunto de dados  $(x_1, y_1), \dots, (x_l, y_l)$  é linearmente separável se é possível separar os dados das classes +1 e -1 por um hiperplano. A separação por meio de um hiperplano utiliza classificadores que são denominados lineares. A Eq. (21) divide os espaços dos dados segundo as funções a seguir

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_{vs} \cdot \mathbf{x}_{vs_i}) - b_{vs} &\geq 1. \quad \text{se } y_i = +1, \\ (\mathbf{w}_{vs} \cdot \mathbf{x}_{vs_i}) - b_{vs} &\leq -1. \quad \text{se } y_i = -1. \end{aligned} \quad (22)$$

O hiperplano ótimo é aquele que satisfaz as condições da Eq. (22) e maximiza a margem de separação de dados com a minimização do funcional

$$\Phi(\mathbf{w}_{vs}) = \|\mathbf{w}_{vs}\|^2. \quad (23)$$

A equação da função regressão é escrita como

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{RVS}} (\alpha_i - \alpha_i^*) K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + b_{RVS} \quad (24)$$

onde  $K(x_i, x)$  é a função de mapeamento ou *kernel*,  $n_{RVS}$  é o número de dados de treinamento,  $b_{RVS}$  é o *bias*, um parâmetro do modelo e  $\alpha_i, \alpha_i^*$  são os multiplicadores de Lagrange da formulação primal-dual do problema (SMOLA e SCHÖLKOPF, 2004), ou parâmetros do problema de otimização. O conjunto de dados dos vetores de treinamento é dado por

$$X = \{(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n\} \tag{25}$$

onde  $x_i$  é o  $i$ -ésimo vetor de entrada para a  $i$ -ésima amostra de treinamento e  $y_i$  é o valor procurado ou o vetor resposta para a  $i$ -ésima amostra de treinamento. A função de ajuste ou o modelo aproximado é considerado bom se a função resposta obtida com a RVS, a  $f(x)$ , é similar à requerida resposta  $y_i$ .

A Figura 3.8 representa um metamodelo de regressão de vetores de suporte, algumas amostras representadas pelos pontos (vetores de entrada em negrito e vetores de suporte em azul) do espaço de entrada e do espaço característico gerado a partir da função *kernel*  $K$ . O hiperplano ótimo está representado pela linha contínua e as margens ótimas representadas pelas linhas tracejadas. O mapeamento com o *kernel*, expresso pela Eq. (19), para trabalhar com as relações não-lineares é de fácil utilização (ÜSTÜN et al., 2007). Como reportou Che (2013), para problemas de regressão não-linear, a Eq. (19) representa a extensão da regressão linear da máquina de suporte ou a regressão linear de um espaço de grandes dimensões.

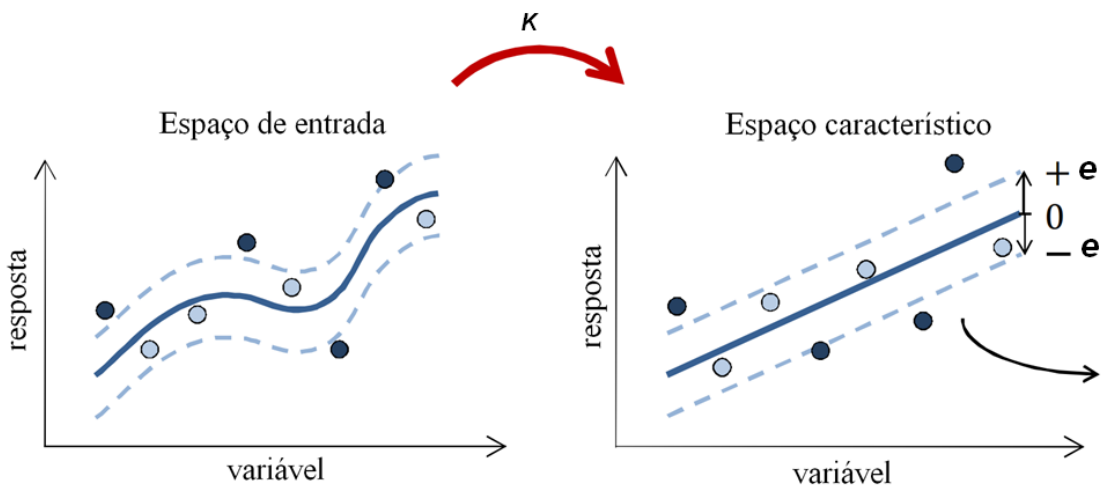


Figura 3.8 - RVS não-linear representada com o espaço de entrada e o espaço característico. Fonte: (adaptado de Ryberg et al. 2012).

A RVS para funções não-lineares é baseada na formulação dual utilizando multiplicadores de Lagrange. O parâmetro  $b$  pode ser obtido com as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (VAPNIK, 2000, SMOLA e SCHÖLKOPF, 2004), da teoria de otimização com restrições, e que deve satisfazer as restrições  $0 \leq \alpha_i$  e  $\alpha_i^* \leq C$ . A função objetivo que necessita ser minimizada para encontrar a função aproximada é dada por

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} (\alpha_i - \alpha_j^*)(\alpha_j - \alpha_j^*)K(x_i, x_j) + e \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_i^*) - y_i \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) \quad (26)$$

restrito a

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0 ; 0 \leq \alpha_i ; \alpha_i^* \leq C, i = 1, \dots, n \quad (27)$$

onde  $\alpha_i, \alpha_i^*$  são os pesos que devem ser encontrados na minimização da função e  $e$  e  $C$  são os parâmetros da função objetivo. As constantes  $C$  e  $e$  determinam a acuracidade dos modelos de RVS. A melhor combinação destes parâmetros faz com que o modelo aproximado da função resposta alcance um bom ajuste. Smola e Schölkopf (2004) explicam que  $C$  é uma constante de regularização e determina o equilíbrio entre o erro no treinamento e o modelo aproximado. O parâmetro  $e$  é a precisão no problema de otimização, considerado convexo, ou seja, uma pequena margem aceitável com uma função de perda ou um certo desvio tolerado. A variação da função perda através da variação do parâmetro  $e$  implica também novas soluções das máquinas de vetores de suporte. Um valor maior para este fator implica em aumento na esparcidade de soluções das máquinas de vetores suporte (VAPNIK, 2000). A função transformada da regressão da RVS baseada nos vetores de suporte é formulada por (GUO e ZHANG, 2007) como

$$f(x) = \sum_{x_i \in VS} (\alpha_i - \alpha_i^*)K(x_i, x) + b_{RVS} \quad (28)$$

onde  $VS$  é o conjunto de vetores suporte. O problema de regressão na forma transformada pode ser resolvido, por exemplo, por programação quadrática e somente

os vetores de entrada correspondentes aos não zeros  $\alpha_i$  e  $\alpha_i^*$  contribuem para o modelo final de regressão (VAPNIK, 2000, SMOLA e SCHÖLKOPF, 2004, ÜSTÜN et al., 2007). Estes vetores são chamados de vetores de suporte.

A arquitetura da máquina de regressão ou a regressão de vetores de suporte é graficamente representada pela Figura 3.9, com os diferentes passos para um algoritmo de vetores de suporte.

A entrada dos vetores suporte utilizados no treinamento é mapeada para o espaço característico pela função  $\phi$ . A avaliação de  $K$  é processada com o produto interno dos dados de treinamento com o mapeamento de  $\phi$  (SMOLA e SCHÖLKOPF, 2004). O resultado da transformação não-linear com os vetores de suporte é obtido com uma função *kernel* apropriada e é denominado de espaço característico.

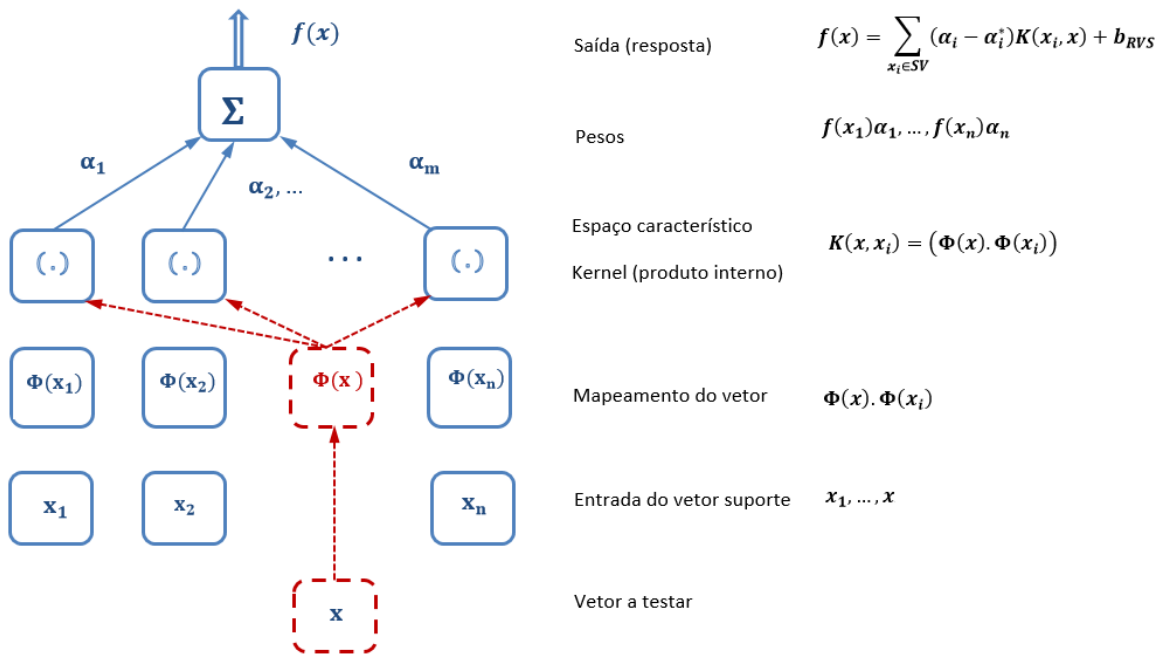


Figura 3.9 - Representação gráfica da RVS.

A previsão da resposta no espaço característico é obtida com os parâmetros  $(\alpha_i, \alpha_i^*)$  e o *bias*  $b_{RVS}$  como nas Eqs. (26) e (28). Estas máquinas de vetores de suporte constroem a função de aproximação com o processo de aprendizado de máquina. Depois dos passos de treinamento, realizam-se testes com os vetores com o objetivo de verificar os resultados e validar o modelo aproximado. O fator de correlação  $R^2$  é utilizado como meio de verificação dos resultados, sendo definido como (MYERS e MONTGOMERY, 2002)



$$R2 = 1 - \left[ \frac{\sum_j (t_j - o_j)^2}{\sum_j (o_j)^2} \right] \quad (29)$$

onde  $t_j$  são valores a alcançar ou valores experimentais e  $o_j$  são as saídas (respostas) ou os valores preditos pela RVS. O fator de correlação estima a correlação entre os valores preditos pela RVS e os alvos ou os valores a serem atingidos. Quanto mais próximo da unidade, melhor a correlação.

### 3.3 Harmony search (HS)

O algoritmo da busca por harmonia musical (*harmony search*<sup>†</sup>), é uma metaheurística de otimização inspirada na composição musical (YANG, 2009). Ele foi desenvolvido por Geem et al. (2001) e inicialmente foi aplicado ao problema do caixeiro viajante e em projetos de redes de encanamento. A harmonia perfeita ou uma harmonia que explora bem os ritmos musicais é composta considerando a qualidade dos sons dos instrumentos utilizados para compor a música. Por exemplo, em linguagem musical, tem-se o tom (notas musicais ou a frequência com divisões em oitavas), o timbre (ou a qualidade do som, dada por sons na mesma frequência mas instrumentos diferentes) e a amplitude da afinação (ou ruído se o som ultrapassar o nível da amplitude ou da afinação).

A Figura 3.10 mostra as notas musicais ou cifras e suas respectivas frequências e a avaliação de uma harmonia formada pelo acorde ou a composição das notas dos instrumentos musicais. A cifra representa uma codificação internacional para as notas musicais.

Considere um estilo de música tocada com os instrumentos: violino, saxofone e teclado, conforme mostra a Figura 3.10. Inicialmente, a memória (chamada de *Harmony Memory* - HM) é preenchida com os acordes aleatórios: {Dó, Mi, Sol}, {Dó, Fá, Lá}, e {Si, Ré, Sol} que são classificados segundo uma estimativa de qualidade “estética” (boa afinação) harmônica. Os acordes são formados pelos tons ou notas musicais {Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó} ou pelas cifras {C, D, E, F, G, A, B, C} onde cada tom tem uma frequência específica. Quando diferentes instrumentos tocam uma

<sup>†</sup> O termo *harmony search* e a nomenclatura dos seus parâmetros foram mantidos originalmente em inglês.

mesma nota musical, por exemplo, o violino, o saxofone e o teclado tocando a nota Dó produzem um som harmônico de qualidade.

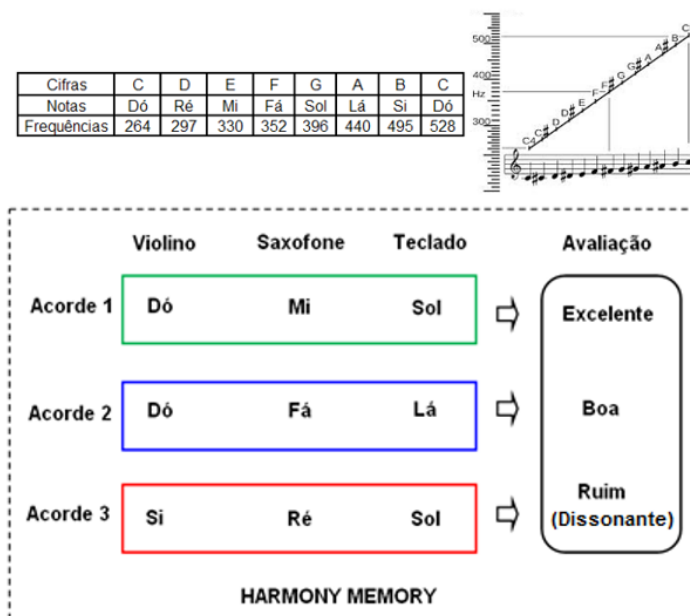


Figura 3.10 - Notas musicais e a estrutura da *Harmony Memory*. Fonte: adaptado de Geem et al. (2001).

Entretanto, se um ou mais instrumentos não estiverem afinados, o tom da nota Dó não sairá na frequência correta dessa nota, variando sua amplitude e causando ruídos ou sons desafinados e de harmonia ruim para o respectivo acorde. A improvisação gerada por esses três instrumentos produz uma nova harmonia; por exemplo, {Dó, Ré, Lá} onde a nota {Dó} corresponde ao acorde do violino: {Dó, Dó, Si}; o {Ré} do saxofone: {Mi, Fá, Ré}; e o {Lá} do teclado: {Sol, Lá, Sol}. Se a harmonia {Dó, Ré, Lá} é melhor do que qualquer das harmonias existentes na HM, a nova harmonia é incluída na HM e a pior harmonia nesse exemplo, {Si, Ré, Sol}, é excluída da HM. Esse processo é repetido até que os resultados satisfatórios próximos do ótimo sejam obtidos. A avaliação de cada harmonia nova é equivalente à avaliação da função objetivo no processo de otimização. A melhor harmonia corresponde então à melhor solução encontrada para a função objetivo.

Como explica Yang (2009), os harmônicos dependem do tom ou da variação da frequência de um instrumento particular e também do timbre, das formas das ondas e/ou das modulações de um sinal sonoro. No processo de otimização, o ótimo global, no caso a melhor harmonia ou uma harmonia fantástica, é determinada pela estética

da harmonia. Esse conceito é definido como uma combinação de sons para compor uma harmonia perfeita.

Conforme descrito por Geem et al. (2001), o algoritmo HS é iniciado com soluções aleatórias preliminares que são armazenadas na *Harmony Memory*. O tamanho da memória que armazena os vetores de harmonias é a *Harmony Memory Size* (HMS) (PATIL e PATEL, 2013). Na forma matricial a HM é escrita como

$$HM = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{n_{HS}}^1 & f(x^1) \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n_{HS}}^2 & f(x^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{HMS} & x_2^{HMS} & \dots & x_{n_{HS}}^{HMS} & f(x^{HMS}) \end{bmatrix} \quad (30)$$

onde  $x^1 \dots x^{HMS} \in X_i$  e são gerados randomicamente com  $i = 1, 2, \dots, n_{HS}$ ,  $X_i$  é o conjunto formado pelas composições ou harmonias,  $n_{HS}$  é a dimensão do vetor solução e  $f(\cdot)$  é a função objetivo. O algoritmo HS é desenvolvido baseado em 4 parâmetros: *Harmony Memory Size* (HMS), *Harmony Memory Considering Rate* (HMCR), *Pitch Adjusting Rate* (PAR) e *bandwidth* (bw). O HM é o registro dos vetores soluções e seu tamanho, o HMS, determina a quantidade das harmonias inseridas na memória. O HMCR controla as buscas por novas harmonias e a exploração das harmonias atuais, considerando o espaço de busca global. O parâmetro PAR está relacionado com o mecanismo de busca local ou a busca de novas soluções de acordo com o parâmetro bw (WANG e HUANG, 2010). Os parâmetros PAR e bw têm uma influência na taxa de convergência e na busca de novas harmonias, possibilitando o refinamento do processo de soluções locais (YANG, 2009). Todos os quatro parâmetros são definidos no início do algoritmo. O parâmetro HMS é um número inteiro que define a quantidade inicial de soluções, os parâmetros HMCR, PAR e bw são definidos com valores que variam entre 0 e 1.

Um procedimento é estabelecido para criar uma nova harmonia, baseado nos parâmetros HMCR, PAR e a seleção randômica (*rand*). A nova solução,  $x_i^{new}$ , é obtida considerando uma taxa de seleção randômica onde a  $i$ -ésima variável de decisão é escolhida de acordo com

$$x_i^{new} \leftarrow \begin{cases} x_i^k \in \{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{HMS}\} & \text{com probabilidade (HMCR)} \\ x_i^k \in X & \text{com probabilidade (1 - HMCR)}. \end{cases} \quad (31)$$

O parâmetro HMCR é usado para escolher uma das harmonias armazenadas na memória HM como descrito na Eq. (31). Se o valor randômico,  $rand$ , é inferior ao valor parametrizado de HMCR, a escolha da nova variável é feita em função das variáveis existentes dentro do conjunto  $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{HMS}$ . Caso contrário, a escolha da nova variável é feita dentro do conjunto  $X$ . A nova variável  $x_i^{new}$  é atualizada de acordo com o parâmetro PAR. Nesse caso, se o valor randômico é inferior ao valor parametrizado de PAR, a nova harmonia é atualizada com a regra  $x_i^k \leftarrow x_i^k \pm rand \cdot bw$ . Caso contrário, a nova harmonia não sofre alteração, como mostra a Eq. (32). Essa verificação é efetuada se a variável sofreu mudança de acordo com a probabilidade da taxa HMCR acima.

$$x_i^{new} \leftarrow \begin{cases} x_i^k \leftarrow x_i^k \pm rand \cdot bw & \text{com probabilidade (PAR)} \\ x_i^k \leftarrow x_i^k & \text{com probabilidade (1 - PAR)} \end{cases} \quad (32)$$

onde  $bw$  é uma distância arbitrária da largura de banda (GEEM et al. 2001, PATIL e PATEL 2013).

O passo seguinte diz respeito à avaliação da função objetivo para cada harmonia. A nova harmonia é incluída na memória HM se for melhor do que a pior harmonia existente e, nesse caso, exclui-se a pior da HM. Finalmente, o critério de parada é analisado. A finalização do processo ocorre quando for atingido um número máximo de iterações previamente estabelecido ou quando uma boa harmonia for encontrada, baseada em uma tolerância também pré-definida. Se o critério não é atingido, o algoritmo continua a criar uma nova harmonia segundo as regras acima descritas. A Figura 3.11 mostra os procedimentos básicos do algoritmo de busca harmônica com um pseudo código computacional e o fluxograma das rotinas.

O HS tem certas adaptações, como as citadas por Alia e Mandava (2011), que apresentam uma revisão com algumas variantes do HS, e por Chakraborty et al. (2006) que descreveram um algoritmo alternativo do HS com um operador diferencial de mutação.

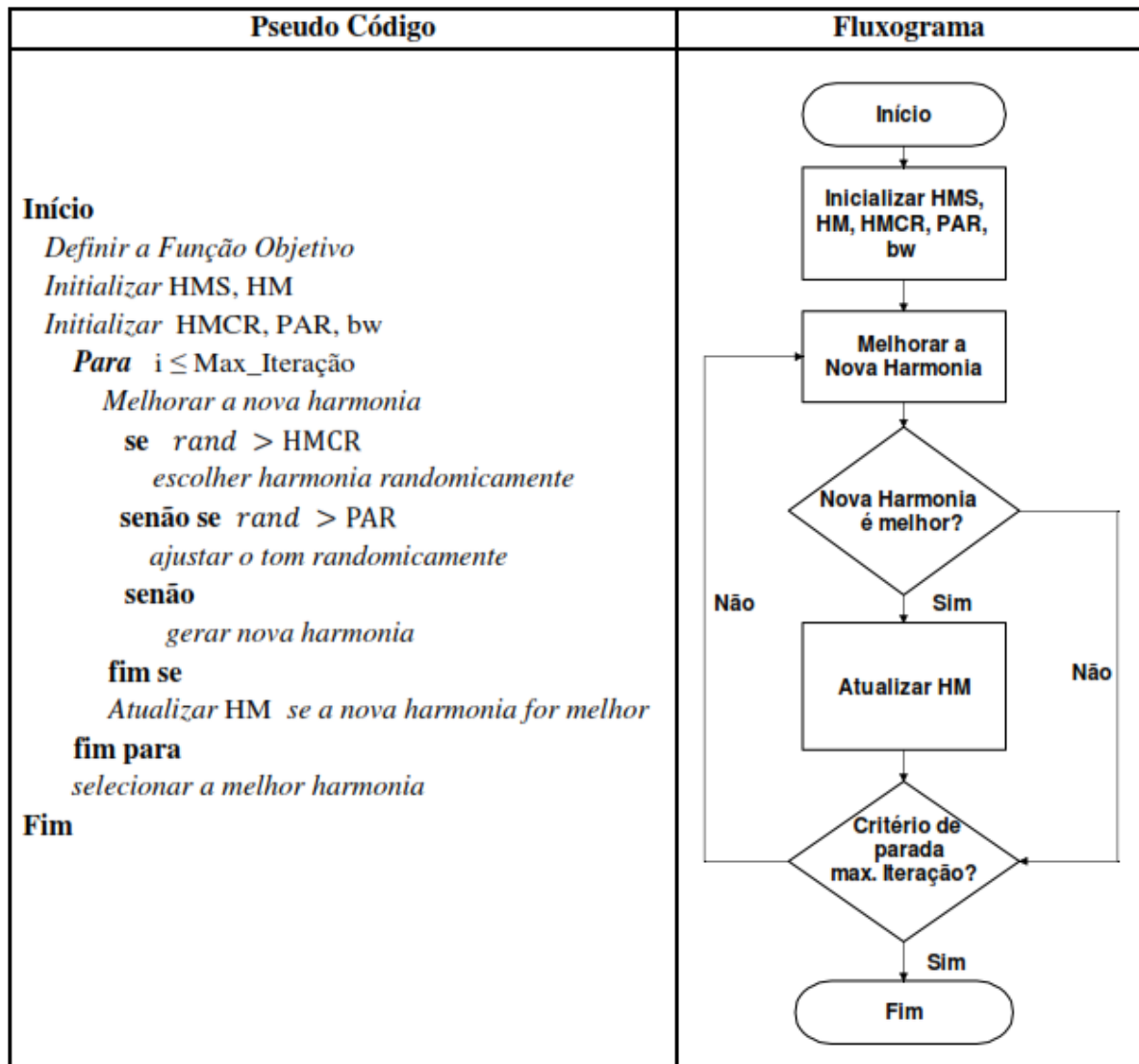


Figura 3.11 - Pseudo-código e fluxograma do algoritmo *harmony search*.

### 3.4 Algoritmo de vaga-lumes (AVL)

#### 3.4.1 Comportamento dos vaga-lumes

Os vaga-lumes produzem pequenas e ritmadas luzes (*flashes*). Normalmente, o padrão das luzes é único para cada espécie em particular. A intermitência luminosa é produzida por um processo de bioluminescência a partir de um processo bioquímico. Os organismos luminescentes produzem só flashes lentos modulados ou brilhos. Entretanto, vaga-lumes adultos em muitas espécies são capazes de controlar sua bioluminescência de modo a emitir flashes intensos e discretos (FISTER et al., 2013). Con-

sidera-se a emissão intermitente de luz ou *flashes* como um meio de atração de parceiros ou a atração de potenciais presas. Adicionalmente pode ser também um mecanismo de proteção contra predadores de vaga-lumes. Alguns vaga-lumes tropicais podem sincronizar seus *flashes*, formando um comportamento biológico auto organizado (YANG, 2009, YANG, 2010a). As decisões coletivas são altamente conectadas com o comportamento das emissões de luzes dos flashes que servem como fundamento principal no desenvolvimento do algoritmo de vaga-lumes (FISTER et al., 2013).

### 3.4.2 Formulação do algoritmo de vaga-lumes

A intensidade da luz,  $I$ , está relacionada com o quadrado do inverso da distância,  $r$ , ou seja,  $I \propto 1/r^2$ . Isso significa que a intensidade luminosa diminui com o aumento da distância entre dois vaga-lumes. Devido à absorção da luz pelo ar, a intensidade também enfraquece com o aumento da distância. Considerando as características da irradiação luminosa do vaga-lume, Yang, em 2007 (YANG, 2010a), formulou um algoritmo baseado no comportamento dos vaga-lumes. Os procedimentos básicos de um pseudo-código do algoritmo de vaga-lumes, do inglês *firefly algorithm*, são apresentados na Figura 3.12. O parâmetro  $nv$  representa o número de variáveis de projeto,  $nr\_vl$  a quantidade de vaga-lumes,  $\beta$  a atratividade,  $\gamma$  o coeficiente de absorção de luz, e  $\alpha$  um parâmetro de busca global.

Na idealização do algoritmo, assume-se algumas simplificações e a meta-heurística inspirada nos vaga-lumes é baseada em 3 regras:

1. Os vaga-lumes são unissex e são atraídos uns pelos outros independentemente do sexo;
2. A atratividade é proporcional ao brilho e ambos diminuem com a distância. Para dois vaga-lumes quaisquer, o de menor brilho mover-se-á em direção ao de maior brilho. Se um vaga-lume em particular não brilhar ou não emitir *flashes*, o seu movimento dar-se-á aleatoriamente.
3. O brilho de um vaga-lume é afetado ou determinado avaliando-se a função objetivo, sendo proporcional à intensidade luminosa.

```

Entrada:  $f(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_{nv})$ ; // função objetivo
            $nr\_vl, I_0, \gamma, \alpha$ ; // definição das constantes iniciais
Saída:  $x^{min}$ ; // mínimo valor da função objetivo

Para  $i \leftarrow 1$  até  $nr\_vl$  faça
     $x^i \leftarrow \text{Solução\_Inicial}()$ ;
Fim
Enquanto critério de fim não terminar faça;
     $min \leftarrow \text{arg}_{i \in \{1, \dots, m\}} \min (f(x^i))$ ;
    Para  $i \leftarrow 1$  até  $nr\_vl$  faça
        Para  $j \leftarrow 1$  até  $nr\_vl$  faça
            Se  $f(x^i) < f(x^j)$  então // move  $x^i$  para  $x^j$ 
                 $r_{i,j} \leftarrow \text{Distância}(x^i, x^j)$ ;
                 $\beta \leftarrow \text{Atratividade}(I_0, \gamma, r_{i,j})$ ;
                 $x^i \leftarrow (1 - \beta)x^i + \beta x^j + \alpha \left( \text{rand} - \frac{1}{2} \right)$ ; // movimento
            Fim
        Fim
    Fim
     $x^{min} \leftarrow x^{min} + \alpha \left( \text{rand} - \frac{1}{2} \right)$ ; //move o melhor vaga-lume randomicamente
Fim

```

Figura 3.12 - Pseudo-código do algoritmo de vaga-lumes. Adaptado de Durkota (2011).

### 3.4.3 Intensidade luminosa e atratividade

No algoritmo de vaga-lume a atratividade de um vaga-lume é determinada pelo brilho dos *flashes* ou pela intensidade luminosa emitida e está relacionada com a avaliação da função objetivo ( $I(x) \propto f(x)$ ). A atratividade é representada por  $\beta$  e é relativa, pois depende de quem as vê ou da avaliação realizada pelos outros vaga-lumes. Esta variará com a distância  $r_{ij}$  entre o vaga-lume  $i$  e o vaga-lume  $j$ . A intensidade da luz diminui com o aumento da distância em relação à fonte emissora e a luz também é absorvida. Portanto, a atratividade também varia com o grau de absorção (YANG, 2010a).

A relação da intensidade luminosa  $I$  varia de acordo com o inverso do quadrado da distância  $r$ , isto é

$$I(r) = \frac{I_f}{r^2}, \quad (33)$$

onde  $I_f$  é a intensidade da fonte. De modo a permitir a singularidade em  $r = 0$  na expressão  $I_f/r^2$  e para um determinado meio com um coeficiente fixo de absorção (YANG, 2010a) de luz,  $\gamma$ , a intensidade da luz  $I$  varia com a distância  $r$  e corresponde a

$$I = I_0 e^{-\gamma r}, \quad (34)$$

onde  $I_0$  é a luminosidade inicial. A partir da lei do inverso do quadrado e da absorção, a intensidade da luz  $I(r)$  pode ser aproximada na forma de Gauss como

$$I(r) = I_0 e^{-\gamma r^2}. \quad (35)$$

Como a atratividade de um vaga-lume é proporcional à intensidade da luz vista pelos vaga-lumes adjacentes, sua atratividade é definida por

$$\beta = \beta_0 e^{-\gamma r^2}, \quad (36)$$

onde  $\beta_0$  é o vetor da atratividade em  $r = 0$ . Como computacionalmente, a relação  $1/(1 + r^2)$  é mais rápida para calcular do que uma função exponencial, a atratividade pode ser formulada por

$$\beta = \frac{\beta_0}{1 + \gamma r^2}. \quad (37)$$

Se a atratividade  $\beta = 0$  ( $\gamma = \infty$ ) os vaga-lumes não vêem uns aos outros devido à uma aparente nebulosidade ou absorção alta de luz, e se  $\beta = \beta_0$  ( $\gamma = 0$ ) os vaga-lumes também vêem com dificuldade devido à luz intensa a qualquer distância, pois não há absorção de luz. A distância característica,  $\Gamma = 1/\sqrt{\gamma}$ , muda a atratividade de  $\beta_0$  para  $\beta_0 e^{-1}$  para a Eq. (36) ou  $\beta_0/2$  para a Eq. (37). A função de atratividade  $\beta(r)$  pode ser formulada como



$$\beta(r) = \beta_0 e^{-\gamma r^m}, \quad (m \geq 1). \quad (38)$$

Para um valor fixo de  $\gamma$ , a distância característica torna-se

$$\Gamma = \gamma^{\frac{-1}{m}} \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Para um dado comprimento  $\Gamma$  em um problema de otimização, o parâmetro  $\gamma$  pode ser inicializado a partir da equação

$$\gamma = \frac{1}{\Gamma^m}. \quad (40)$$

A distância Cartesiana  $r_{ij}$  é obtida a partir do vetor posição  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_j$  entre dois vaga-lumes  $i$  e  $j$ , e formulada como

$$r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_{i,k} - x_{j,k})^2}, \quad (41)$$

onde  $x_{i,k}$  é a  $k$ -ésima componente da coordenada espacial  $\mathbf{x}_i$  do  $i$ -ésimo vaga-lume.

O movimento do vaga-lume  $i$  é em função do brilho de outro vaga-lume  $j$  de maior brilho e é determinado por

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i + \beta_0 e^{-\gamma r_{ij}^2} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + \alpha \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad (42)$$

onde o segundo termo é devido à atração entre os vaga-lumes e corresponde à uma intensificação por melhores resultados na busca local. O terceiro termo é uma randomização em função do parâmetro randômico  $\alpha$  e do vetor de números randômicos  $\boldsymbol{\epsilon}_i$  da distribuição de Gauss ou distribuição uniforme.  $\boldsymbol{\epsilon}_i$  pode ser substituído por **rand**, que corresponde à geração de números randômicos uniformemente distribuídos no

intervalo  $[0,1]$ . Essa etapa do movimento corresponde à uma diversificação por melhores resultados na busca global. Para a maioria das implementações adota-se  $\beta_0 = 1$  e  $\alpha \in [0,1]$  (YANG, 2010a).

O parâmetro de absorção  $\gamma$  impõe uma variação da atratividade, e seu valor é importante na velocidade de convergência e como o algoritmo de vaga-lume se comporta (YANG, 2010a). Em teoria,  $\gamma \in [0, \infty]$ , mas na prática o valor de  $\gamma$  varia para a maioria das aplicações entre 0,1 a 10.

Uma revisão sobre o algoritmo de vaga-lumes pode ser encontrada em Yang (2009b) e Fister et. al., (2013). Yang (2009b) analisou as similaridades e diferenças com a técnica de *Particle Swarm Optimization* (PSO) e apresentou resultados comparativos com o PSO e algoritmos genéticos para otimização multimodal onde os mesmos se equipararam e o AVL mostrou-se superior a ambos. O AVL foi utilizado por Yang (2010b) em funções teste e otimização de projetos. Yang (2010c) combinou as características dos vôos de Lévy com a estratégia de busca do algoritmo de vaga-lume no desenvolvimento de uma nova metaheurística. Gomes e Rodrigues (2013) aplicaram o algoritmo de vaga-lume para a otimização estrutural em tamanho e forma de treliças com restrições de frequências naturais. Avanços e aplicações do AVL são apresentados por Yang e He (2013).

Métodos híbridos que utilizam a meta-heurística dos vaga-lumes têm sido desenvolvidos com intuito de melhorar a performance do algoritmo. Azad e Azad (2011) propuseram uma modificação na rotina de movimento dos vaga-lumes como meio de melhorar a metaheurística na otimização de treliças. Gandomi et. al. (2013) propuseram uma variante do AVL com a inclusão de caos nos procedimentos de otimização. Kavousi-Fard et al. (2014) aplicaram um algoritmo de vaga-lume híbrido e regressão de vetores de suporte na previsão de carga elétrica de curto prazo. Srivatsava et al. (2013) apresentaram uma abordagem baseada no algoritmo de vaga-lume com controle de fluxo de grafos para gerar uma sequência ótima para testes de softwares. Um algoritmo híbrido com os algoritmos de colônia de formigas e de vaga-lumes foi proposto por Rizk-Allah et al. (2013) para problemas de otimização sem restrições. Tuba e Bacanin (2014) também apresentaram um algoritmo de busca melhorado e híbrido com algoritmo de vaga-lume para problemas de otimização com restrições.

Variantes do algoritmo de vaga-lume também têm sido propostas para o caso de variáveis discretas. Durkota (2011) foi um dos primeiros a apresentar os procedimentos da construção do algoritmo de vaga-lume, como a atratividade, a distância e o movimento dos vaga-lumes considerando funções discretas ou para variáveis discretas, denominado de *Discrete Firefly Algorithm* (DFA). Esse algoritmo foi aplicado por Sayadi et al. (2013) na otimização de células de manufatura e por Poursalehi et al. (2013) na maximização do ciclo de energia e minimização do fator de pico de potência devido à restrições de segurança e otimizando assim o padrão de carga. Kumbharana e Pandey (2013) utilizaram o algoritmo de vaga-lumes discreto no problema do caixeiro viajante.

#### 3.4.4 Algoritmo de vaga-lumes discreto (AVD)

O AVL foi inicialmente desenvolvimento para variáveis contínuas. Entretanto, muitos problemas requerem soluções aplicando variáveis discretas, como por exemplo o problema do caixeiro viajante (do inglês *Travelling Salesman Problem* – TSP) e o problema quadrático de alocação (do inglês *Quadratic Assignment Problem* – QAP). Para esses casos uma variante discreta como feita por Durkota (2011) particularmente para QAP.

Conforme mostrado na Figura 3.11, os procedimentos do algoritmo de vaga-lume compreendem as populações iniciais de vaga-lumes, a função atratividade, a distância e o movimento. Dessa forma, para a versão discreta é necessário redefinir essas funções. Durkota (2011) considerou o espaço de busca como  $S_{np}$ , com todas as permutações possíveis de  $(1, 2, \dots, np)$ . A equação do movimento em função da atratividade pode ser escrita como

$$x_i \leftarrow (1 - \beta)x_i + \beta x_j + \alpha \left( rand - \frac{1}{2} \right), \quad (43)$$

a qual foi redefinida por

$$x_i \leftarrow atratividade(x_i, x_j, \alpha, \beta). \quad (44)$$

O movimento dos vaga-lumes em função da atratividade, Eq. (43), para variáveis discretas requer soluções representadas por permutações e suas operações (DURKOTA, 2011).

### **Vaga-lumes iniciais**

O conjunto de população de vaga-lumes iniciais,  $S_{np}$ , é produzido de forma randômica com as permutações de  $(1, 2, \dots, np)$ .

### **Função distância**

A medida da distância para o caso de variáveis discretas pode ser realizada com a distância de Hamming ou por um determinado número de troca das posições das variáveis da primeira solução para obter-se a segunda solução. Outras possibilidades são as distâncias de edição, dadas pelos métodos de Levenshtein, Damerau e outros (VIANA e MOURA, 2010; HIRSCHBERG, 1977). Entretanto, foi utilizado o método de Hamming pois apresenta implementação mais simples para o caso aqui estudado, visto que não são analisadas transformações de palavras, correções ortográficas, verificação de padrões complexos, além do comprimento da sequência ser fixo.

A distância de Hamming entre duas permutações é o número de elementos não correspondentes em uma sequência. Por exemplo, para as permutações  $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in S_{np}$ ,

$$\begin{aligned}\pi_1 &= [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6], \\ \pi_2 &= [1\ 2\ 4\ 3\ 6\ 5], \\ \pi_3 &= [1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 3],\end{aligned}\tag{45}$$

a distância de Hamming( $\pi_1, \pi_2$ ) entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é 4, pois somente as duas primeiras posições tem os mesmos elementos e as últimas quatro não. Já a distância de Hamming entre  $\pi_2$  e  $\pi_3$  é 2.

### **Atração**

O movimento, dado pela Eq. (43) para variáveis contínuas, e pela Eq. (44) para variáveis discretas, é dependente de  $\beta$  e  $\alpha$ . Essa dependência pode ser reescrita computando inicialmente o movimento em função de  $\beta$  e somente então em função

de  $\alpha$ . Essa ordem deve ser respeitada para evitar que a influência do valor de  $\alpha$  acarrete um movimento muito próximo ou muito distante do vaga-lume comparado. A Eq. (43) pode ser reformulada como

$$\begin{aligned} x_i &\leftarrow (1 - \beta)x_i + \beta x_j, \\ x_i &\leftarrow x_i + \alpha \left( rand - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

### Passo- $\beta$

No decorrer das iterações do algoritmo, as distâncias dos vaga-lumes em relação a outros vaga-lumes tendem a uma aproximação, ou seja, suas distâncias diminuem em relação às anteriores. Como para variáveis discretas utiliza-se a distância de Hamming, as quantidades de elementos comuns devem aumentar para obterem-se as menores distâncias entre dois vaga-lumes. O passo- $\beta$  inicia então com a checagem dos elementos comuns entre as permutações. Considerando que a permutação  $\pi_1 = [4\ 9\ 3\ 7\ 6\ 8\ 2\ 1\ 5]$  atrai a permutação  $\pi_2 = [4\ 1\ 3\ 2\ 6\ 5\ 9\ 7\ 8]$ , onde nessa primeira etapa resulta em  $\pi_{1 \rightarrow 2}$  como

$$\begin{aligned} \pi_1 &= [4\ 9\ 3\ 7\ 6\ 8\ 2\ 1\ 5] \\ \pi_2 &= [4\ 1\ 3\ 2\ 6\ 5\ 9\ 7\ 8] \\ \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4\ \_ \ 3\ \_ \ 6\ \_ \ \_ \ \_ \ \_]. \end{aligned} \quad (47)$$

Os espaços vazios em  $\pi_{1 \rightarrow 2}$  são completados considerando as permutações anteriores. Por exemplo, para a probabilidade  $\beta = \frac{1}{1 + \gamma \cdot r_{\pi_1, \pi_2}^2}$  onde  $r_{\pi_1, \pi_2} = \text{distânciaHamming}(\pi_1, \pi_2)$ , insere-se na permutação  $\pi_{1 \rightarrow 2}$  um elemento de  $\pi_2$ , ou mantém um elemento de  $\pi_1$ . Nesse processo os elementos não devem se repetir. Caso isso ocorra deixa-se o espaço vazio, e continua-se o preenchimento no próximo vazio seguindo o mesmo procedimento. Se mesmo após essa etapa houver espaços vazios, esses são então preenchidos randomicamente com os elementos não usados ainda. Supondo a probabilidade  $\beta = 0,21739$  o exemplo acima poderia ser preenchido como na Eq. (48). Finalmente, completar o último vazio com o elemento não usado. No exemplo anterior o elemento correspondente é o número 9, portanto  $\pi_{1 \rightarrow 2} = [4\ 1\ 3\ 7\ 6\ 8\ 2\ 9\ 5]$ . Resumindo, a  $r_{\pi_1, \pi_2} = \text{distânciaHamming}(\pi_1, \pi_2) = 6$ , a  $r_{\pi_{1 \rightarrow 2}, \pi_2} =$

$distânciaHamming(\pi_{1 \rightarrow 2}, \pi_2) = 5$ , assim em relação a  $\pi_2$  há uma diferença na distância de uma unidade.

$$\begin{aligned}
 \pi_1 &= [4 \ 9 \ 3 \ 7 \ 6 \ 8 \ 2 \ 1 \ 5] \\
 \pi_2 &= [4 \ 1 \ 3 \ 2 \ 6 \ 5 \ 9 \ 7 \ 8] \\
 \text{início } \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ \_ \ 3 \ \_ \ 6 \ \_ \ \_ \ \_ \ \_] \\
 \text{posição 6 } \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ \_ \ 3 \ \_ \ 6 \ 8 \ \_ \ \_ \ \_] \\
 \text{posição 2 } \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ 1 \ 3 \ \_ \ 6 \ 8 \ \_ \ \_ \ \_] \\
 \text{posição 9 } \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ 1 \ 3 \ \_ \ 6 \ 8 \ \_ \ \_ \ 5] \\
 \text{posição 4 } \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ 1 \ 3 \ 7 \ 6 \ 8 \ \_ \ \_ \ 5] \\
 \text{posição 8 } \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ 1 \ 3 \ 7 \ 6 \ 8 \ \_ \ \_ \ 5], \text{ permanece vazia, 1 e 7 já usados} \\
 \text{posição 7 } \pi_{1 \rightarrow 2} &= [4 \ 1 \ 3 \ 7 \ 6 \ 8 \ 2 \ \_ \ 5].
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

**Passo- $\alpha$**

O passo- $\alpha$  consiste em permutar dois elementos vizinhos. Essa permuta pode ocorrer de duas maneiras: ou pela troca randômica ( $\alpha \cdot rand$ ) de dois elementos ou pela escolha randômica de muitos elementos ( $\alpha \cdot rand$ ) e embaralhar suas posições. A primeira opção é mais fácil de implementar, mas resulta em menos soluções que a segunda. Pois, realizando duas trocas, a distância resultante pode aumentar as permutações em 4, e para 3 trocas aumentar em 6 as permutações, etc.. A segunda opção permite então soluções com maiores variabilidades, portanto essa foi a opção considerada por Durkota (2011), na variante discreta do algoritmo de vaga-lumes.

## 4 COMBINAÇÃO DAS METAHEURÍSTICAS E METAMODELOS NA OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS COMPÓSITAS: ASPECTOS COMPUTACIONAIS

As meta-heurísticas *harmony search* e o algoritmo de vaga-lumes discreto são aplicáveis a materiais compósitos considerando que o empilhamento (ordem das orientações das lâminas) é um problema de otimização combinatória. A solução ótima corresponde ao melhor empilhamento segundo um dado critério (função objetivo e restrições). Esse problema é em variáveis discretas pois normalmente as lâminas têm as seguintes orientações:  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ,  $90^\circ$ .

A seguir, tem-se a explanação de como esses dois algoritmos e a regressão de vetores de suporte são aplicados à otimização de estruturas compósitas laminadas.

### 4.1 *Harmony search* aplicado à otimização de compósitos laminados

O algoritmo *harmony search* foi programado em linguagem Python, conforme os conceitos apresentados na Seção 3.3. Para a otimização de estruturas laminadas modeladas via método dos elementos finitos, foi utilizado o programa Abaqus® 6.14 para a obtenção da resposta estrutural. Essa modelagem foi escrita em forma de um *script* em Python, ou seja, foi modelada a geometria da estrutura e outras características como: propriedades dos materiais, condições de contorno, empilhamento do laminado e malha. A seguir, via *script* em Python, definiram-se os parâmetros e tipos de análises: pré-flambagem, flambagem linear e pós-flambagem. Finalmente, também em Python, realizou-se a conexão entre o *harmony search* e os códigos da modelagem obtidos do Abaqus®, gerando um único *script* para a otimização da sequência de empilhamento das lâminas.

Um fluxograma da conexão entre as diversas etapas é apresentado na Figura 4.1. O procedimento inicia com uma memória contendo algumas soluções aleatórias de empilhamento, ou seja, as harmonias iniciais. Essas são avaliadas segundo a função objetivo e seus valores são também armazenados na memória inicial. Novas soluções são obtidas através do procedimento de busca local e global do algoritmo HS.

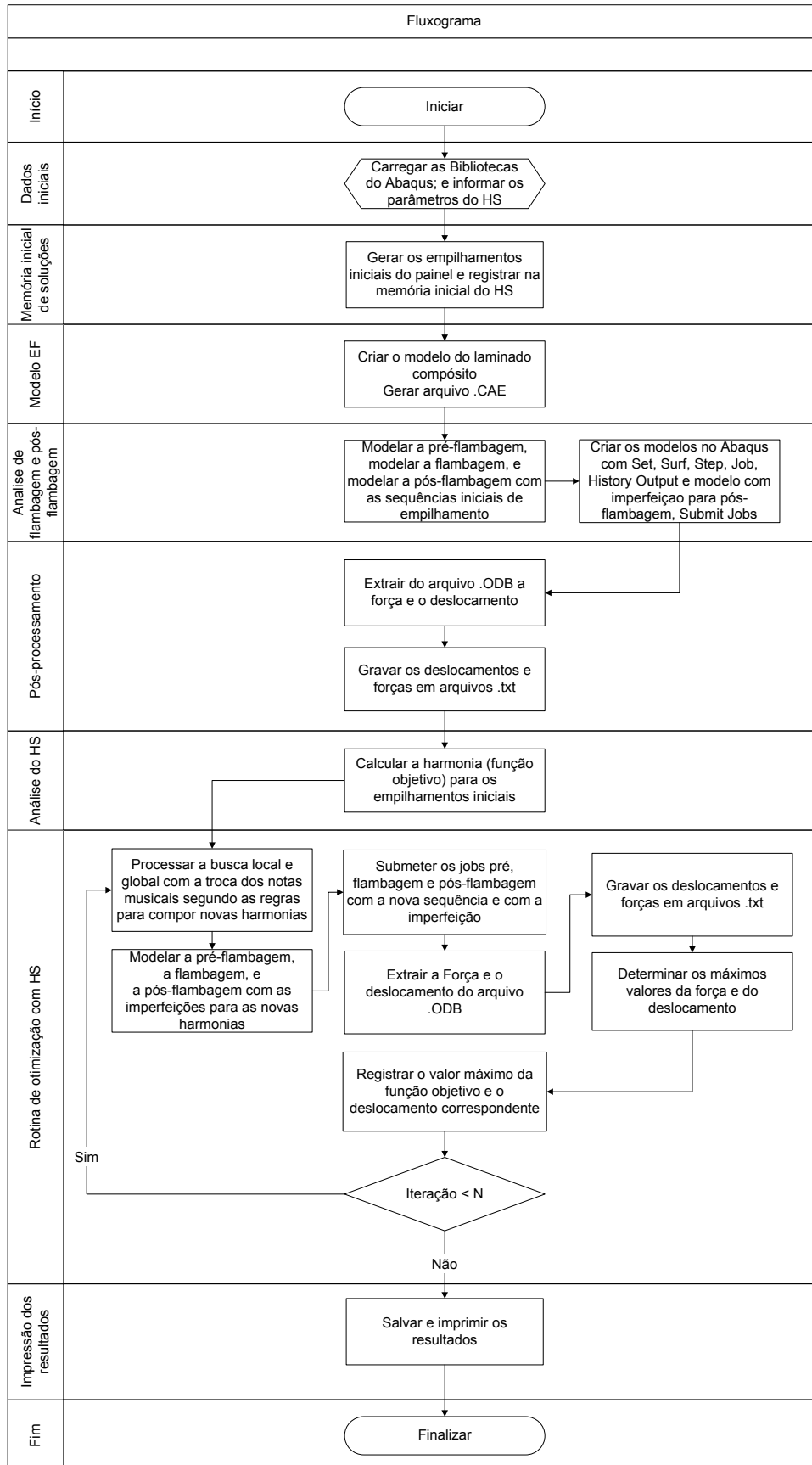


Figura 4.1 - Fluxograma do HS aplicado à otimização em pós-flambagem de compósitos laminados.



Essas novas harmonias são reavaliadas via cálculo por elementos finitos em um modelo construído no Abaqus<sup>®</sup>. A carga crítica de flambagem e os respectivos modos de flambagem são obtidos para utilização na análise não-linear. O método de solução de equações não-lineares de Riks (RIKS, 1979; RIKS, 1984; ABAQUS, 2014) foi adotado na pós-flambagem, sendo a carga aplicada em incrementos. As cargas correspondentes e os deslocamentos relacionados a cada iteração são escritas em arquivos txt. Posteriormente, as forças aplicadas e os deslocamentos são lidos desses arquivos e após a avaliação da função objetivo guarda-se o melhor resultado da otimização. O processo termina quando o número de iterações atingir um valor especificado ou quando o melhor valor da função objetivo não se altera após um determinado número de iterações.

#### **4.2 Algoritmo de vaga-lumes aplicado à otimização de compósitos laminados**

A Figura 4.2 apresenta um diagrama do AVD (algoritmo de vaga-lumes discreto) aplicado à determinação do empilhamento ótimo de compósitos laminados.

O algoritmo de vaga-lumes foi integrado com o Abaqus<sup>®</sup> 6.14 de forma a obter um *script* único em Python para o procedimento de otimização. A conexão foi realizada de forma semelhante àquela do algoritmo HS. A função objetivo é a carga de pós-flambagem, a qual deve ser maximizada.

Inicialmente, necessita-se definir os parâmetros do algoritmo ( $nr_{vl}$ ,  $I_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma$  e  $\alpha$ ). Respectivamente, esses equivalem ao número de soluções iniciais, intensidade inicial de luminosidade, que diminui com o aumento da distância entre dois vaga-lumes, atratividade inicial, coeficiente de absorção de luz e o parâmetro que auxilia na busca global.

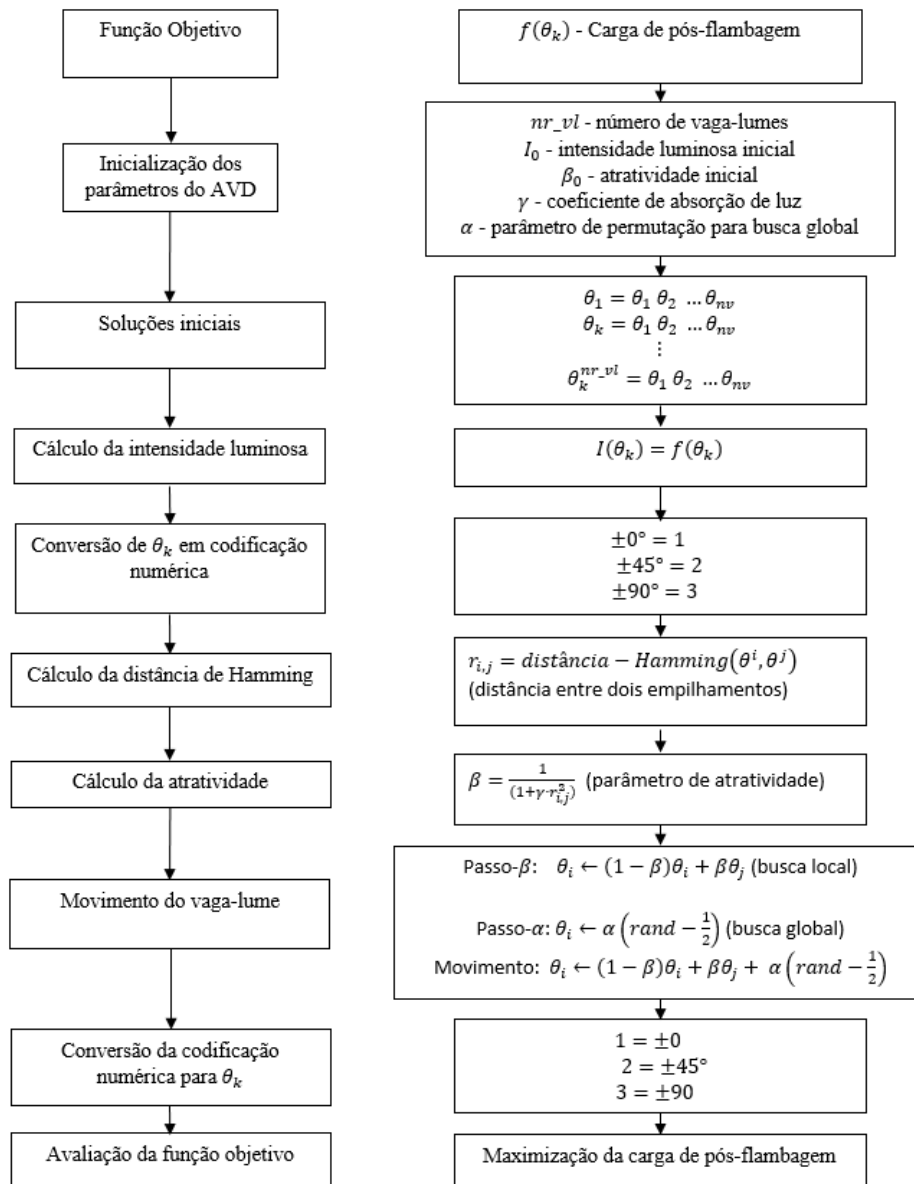


Figura 4.2 - Procedimentos do AVD aplicado a compósitos laminados.

O conjunto de soluções iniciais é gerado randomicamente para um determinado tipo de laminado. Calcula-se a intensidade luminosa para cada uma destas soluções, o que equivale a calcular a função objetivo para as sequências de empilhamento geradas. Para a implementação do algoritmo de vaga-lume as funções atratividade, distância e movimento foram consideradas aquelas expostas na Seção 3.4. A distância de Hamming, o passo- $\beta$  e o passo- $\alpha$  são difíceis de serem implementados diretamente considerando as variáveis discretas  $\{0_2, \pm 45, 90_2\}$ . Como se observa na Eq. (49), não é possível calcular a distância de Hamming usual para a permutação

$\pi_{\theta_1 \rightarrow \theta_2}$ , pois o primeiro elemento é 0 em  $\pi_{\theta_1}$  e 4 para  $\pi_{\theta_2}$ , para o segundo elemento 0 para  $\pi_{\theta_1}$  e 5 para  $\pi_{\theta_2}$ . Entretanto, os valores dos ângulos do primeiro elemento deveriam ser 0 em  $\pi_{\theta_1}$  e 45 para  $\pi_{\theta_2}$  ou para o último elemento 90 para  $\pi_{\theta_1}$  e 0 para  $\pi_{\theta_2}$  como descritos a seguir

$$\begin{aligned} \pi_{\theta_1} &= [0 \ 0 \ 45 \ - \ 45 \ 90 \ 90] \\ \pi_{\theta_2} &= [45 \ - \ 45 \ 90 \ 90 \ 0 \ 0] \\ \pi_{\theta_1 \rightarrow \theta_2} &= [- \ - \ - \ - \ - \ - \ -]. \end{aligned} \tag{49}$$

Assim, para o cálculo da distância de Hamming adotou-se então a seguinte codificação numérica para os ângulos:  $0^\circ = 1$ ,  $45^\circ = 2$ ,  $90^\circ = 3$ . Dessa forma, o conjunto de vaga-lumes iniciais representados pelas orientações das lâminas foram convertidos em numerais 1, 2 e 3, conforme Eq. (50). A distância de Hamming é  $r_{\pi_{\theta_1 \rightarrow \theta_2}} = \text{distânciaHamming}(\pi_{\theta_1}, \pi_{\theta_2}) = 6$ , onde observa-se que todos os valores divergem.

$$\begin{aligned} \pi_{\theta_1} &= [1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3] \\ \pi_{\theta_2} &= [2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1] \\ \pi_{\theta_1 \rightarrow \theta_2} &= [- \ - \ - \ - \ - \ -]. \end{aligned} \tag{50}$$

A partir da distância de Hamming calcula-se a atratividade entre os vaga-lumes, em função de suas distâncias. O índice de atratividade possibilita realizar uma busca local e determina também o movimento que o vaga-lume fará, formulado pelo passo- $\beta$ . Na sequência realiza-se o passo- $\alpha$ , ou seja, uma perturbação randômica no resultado, caracterizando uma busca global. A soma desses dois procedimentos completa o movimento de uma iteração do algoritmo. A sequência de empilhamento é reconvertida em ângulos  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$  para a avaliação da função objetivo. A melhor solução encontrada é armazenada a cada ciclo do algoritmo até que um critério de parada específico seja atingido, por exemplo o número de avaliações da função objetivo sem alteração do melhor valor encontrado.

O algoritmo de otimização AVD foi implementado em linguagem Python e integrado ao Abaqus® 6.14. Um fluxograma detalhado do processo de otimização, agora com detalhes da interface com o Abaqus®, é apresentado na Figura 4.3.

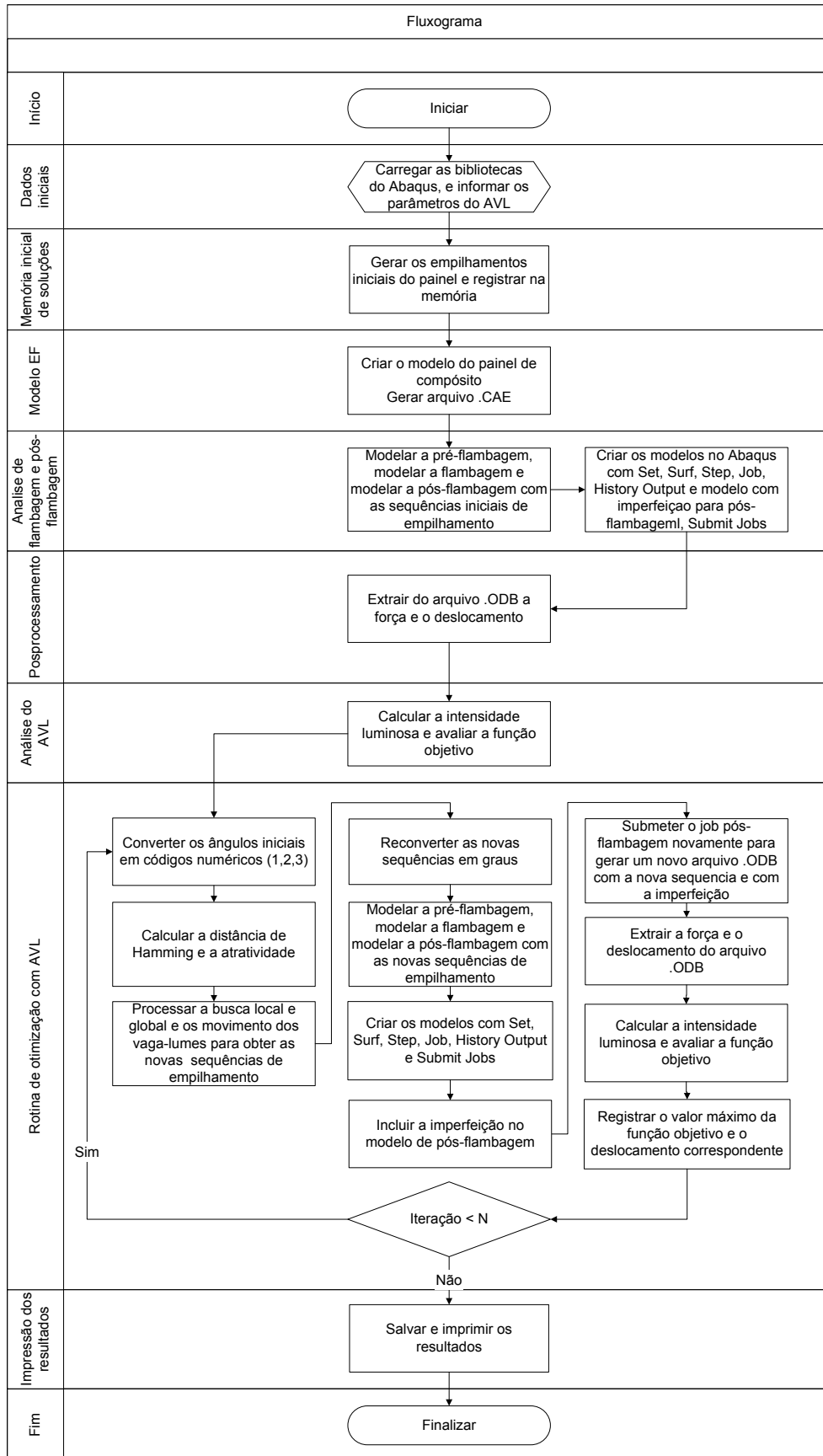


Figura 4.3 - Fluxograma da otimização com AVD e Abaqus®.

O processo de otimização inicia com a definição dos parâmetros do algoritmo de vaga-lumes e a importação das bibliotecas do Abaqus<sup>®</sup>, seguida da geração randômica das sequências de empilhamentos iniciais. A modelagem em elementos finitos do painel reforçado também está escrita em Python, sendo um arquivo com extensão .CAE que pode ser interpretado e executado pelo Abaqus<sup>®</sup>. A partir dessa etapa é gerado um modelo de pré-flambagem com as especificações como o material, *step (static)*, *surf*, *set* e o *job*, esses todos são comandos do Abaqus<sup>®</sup>. Na sequência gera-se um modelo de flambagem de forma semelhante à pré-flambagem, mas o *step (linear buckle)*, neste caso, é de flambagem linear, ou seja, a determinação dos autovalores e modos de flambagem. Finalmente modela-se a pós-flambagem cujo *step (non-linear analysis)* é especificado no modelo. A imperfeição geométrica, baseada nos modos de flambagem, também é inserida nesta etapa. Os *jobs* criados para a pré-flambagem, a flambagem e a pós-flambagem são submetidos para obter os resultados cujos dados são salvos em arquivos com extensão ODB. A partir desses arquivos a força e o deslocamento são extraídos para o cálculo da intensidade luminosa e a avaliação da função objetivo, neste caso, a carga de pós-flambagem. Como a sequência dos ângulos de empilhamento são variáveis discretas, elas foram codificadas em números (1,2,3) correspondentes aos ângulos (0°, 45°, 90°). Desta maneira é possível calcular a distância de Hamming e a atratividade e conseqüentemente calcular o movimento dos vaga-lumes local e globalmente. Em seguida, essas variáveis são reconvertidas em ângulos e então consideradas como variáveis de entrada para o cálculo no Abaqus<sup>®</sup> nos modelos de pré-flambagem, flambagem e pós-flambagem. Esses modelos são executados, inclusive com a introdução da imperfeição no modelo de pós-flambagem. A pós-flambagem é reexecutada e os novos dados com as imperfeições e com os novos ângulos são salvos em arquivos .ODB. As informações da força e deslocamento são extraídos do arquivo com extensão ODB para computar a intensidade da luz e avaliar a função objetivo (carga de pós-flambagem). A máxima carga de pós-flambagem e o deslocamento sujeito ao critério de Tsai-Wu ou o critério de Hashin são gravados com sua respectiva sequência de empilhamento. As iterações são completadas quando a mesma alcança o valor solicitado.

### 4.3 RVS aplicada à otimização de compósitos laminados

A Figura 4.4 apresenta um fluxograma do procedimento de otimização de compósitos laminados usando o metamodelo RVS.

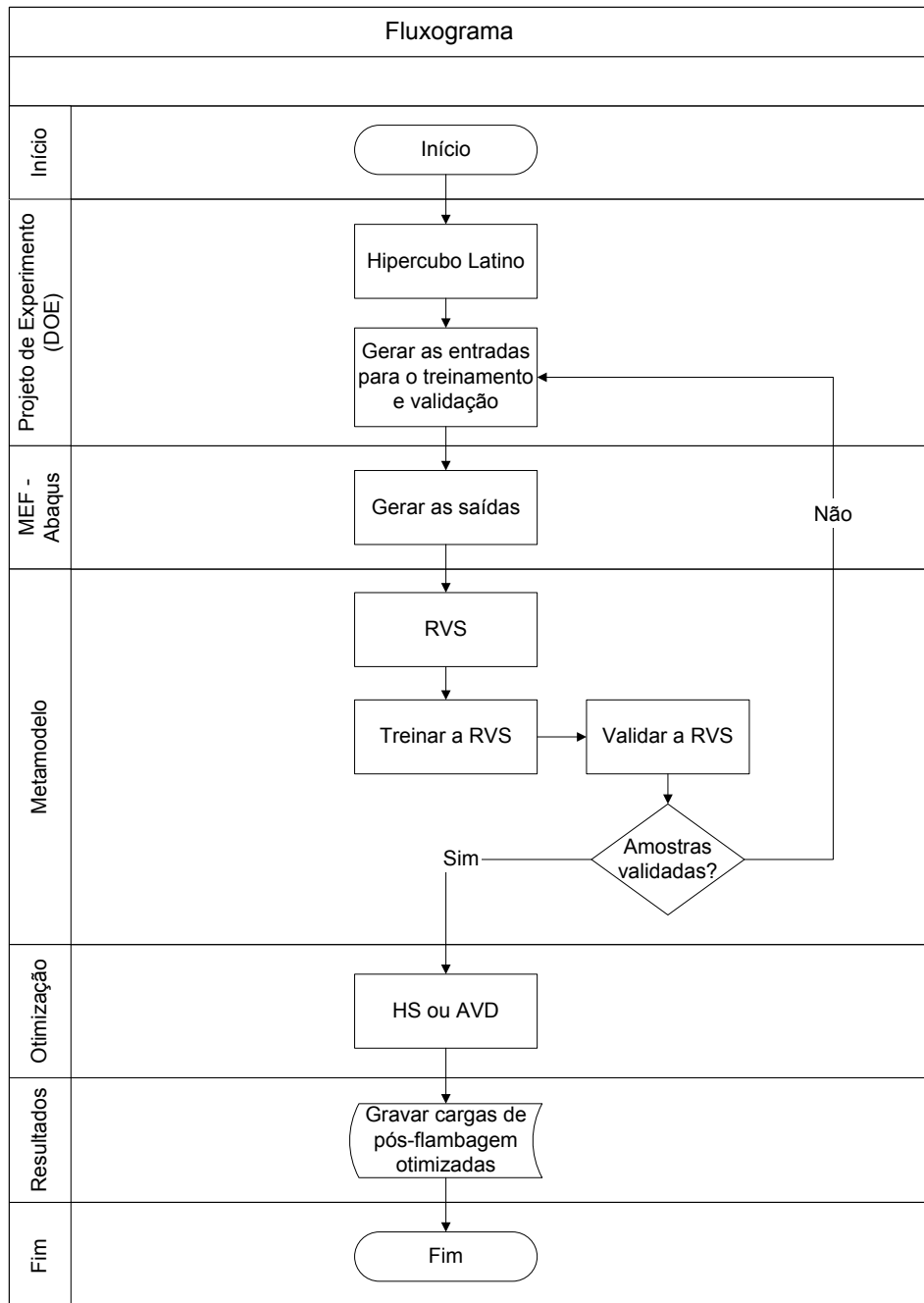


Figura 4.4 - Fluxograma da RVS aplicada à otimização de compósitos laminados.

O procedimento da metamodelagem está inserido no início do processo de otimização. Inicialmente tem-se um projeto de experimentos, o HL, para a geração

dos dados de entrada para o treinamento e validação do metamodelo. Em seguida gera-se o metamodelo (RVS). Na sequência a carga de pós-flambagem é otimizada independentemente com o algoritmo HS ou AVD, conforme procedimentos descritos nas seções anteriores deste capítulo. Os valores das cargas de pós-flambagem são registradas após as avaliações da função objetivo e seleciona-se a carga de pós-flambagem otimizada. Finalmente, o processo é concluído após atender o critério de parada estabelecido no algoritmo.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO

Resultados de estudos de treinamento e generalização de metamodelos de placas retangulares com 4, 24 e 48 lâminas são apresentados nas Seções 5.1 e 5.2. Na Seção 5.1 tem-se o metamodelo RVS sendo treinado com solução analítica e também pelo MEF. Para os dados de treinamento obtidos pelo MEF, a seleção de amostras foi feita utilizando HL. Na Seção 5.2 são apresentadas aplicações utilizando parâmetros de laminação. Nas Subseções 5.2.1 e 5.2.2 são aplicados a RVS e a RN, respectivamente (a teoria de redes neurais artificiais, RN, está resumida no Apêndice C).

Na Seção 5.3 são apresentados os resultados da otimização da carga de flambagem de placas com o HS. A otimização com HS em pós-flambagem analítica para placas é descrita na Seção 5.4.

Na Seção 5.5 é analisado, via MEF, um painel cilíndrico com furo otimizado com HS e aplicou-se, também, RVS. Na Seção 5.6, painéis reto e curvo com reforços sujeitos à critérios de falhas e dano otimizados com RVS e AVD.

Alguns resultados desta tese já foram publicados e podem ser encontrados em Koide et al. (2013), Ferreira et al. (2013), Koide et al. (2014a), Koide et al. (2014b), Koide et al. (2015a), Koide et al. (2015b) e Lima et al. (2016).

### 5.1 Aplicação de RVS para carga de flambagem de placa retangular

Nesta seção são apresentados os resultados da aproximação via RVS da carga de flambagem de uma placa retangular simplesmente suportada, submetida a um carregamento biaxial conforme esquematizado na Figura 5.1. Os testes foram realizados para dois casos. Inicialmente, para um laminado simétrico e balanceado com quatro lâminas, e portanto apenas uma orientação independente. Em seguida para um laminado, também simétrico e balanceado, mas com 48 lâminas. Para o primeiro caso as amostras foram geradas sem um projeto de experimentos, onde os dados de treinamento foram ângulos discretos das lâminas variando de 5° em 5°. Já no segundo caso foi utilizado o projeto de experimentos HL na geração das amostras de treinamento. Esses casos são detalhados nas duas próximas subseções.



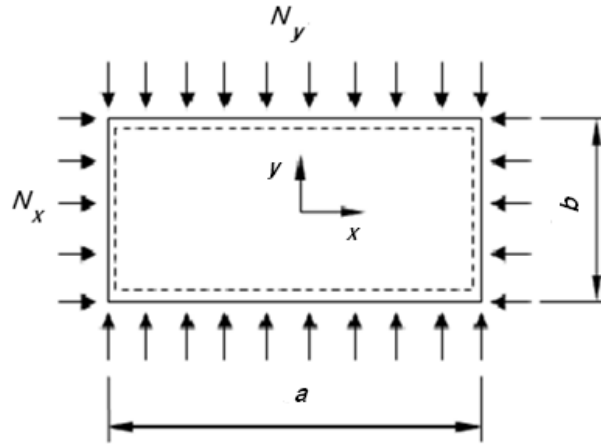


Figura 5.1 - Placa retangular com carregamento biaxial e condições de contorno simplesmente suportada em todas as arestas (SSSS).

### 5.1.1 RVS para carga de flambagem analítica e MEF (4 lâminas)

Nesta subseção são utilizados métodos analíticos e o método de elementos finitos para obter as cargas de flambagem correspondentes das amostras de treinamento. O laminado consiste de 4 lâminas, sendo simétrico e balanceado, com ângulos de orientação que podem variar de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  com incremento de  $5^\circ$ . Essa discretização dos ângulos foi gerada para a obtenção das amostras de treinamento para a RVS. As seguintes funções *kernel* da RVS foram testadas: linear, polinomial de 2 a 4 graus e a função Gaussiana de base radial (FBR).

Considerando a Teoria Clássica da Laminação, o fator de carga de flambagem  $\lambda_{cb}$ , que representa a razão entre carga de flambagem e carga aplicada, para uma placa retangular simplesmente apoiada em todas as arestas e submetida à carga biaxial é calculado em função das diversas possibilidades das meias ondas  $m$  e  $n$  dos modos de flambagem pela seguinte equação (JONES, 1999)

$$\lambda_{cb}(m, n) = \pi^2 \frac{D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 N_x + \left(\frac{n}{b}\right)^2 N_y}, \quad (51)$$

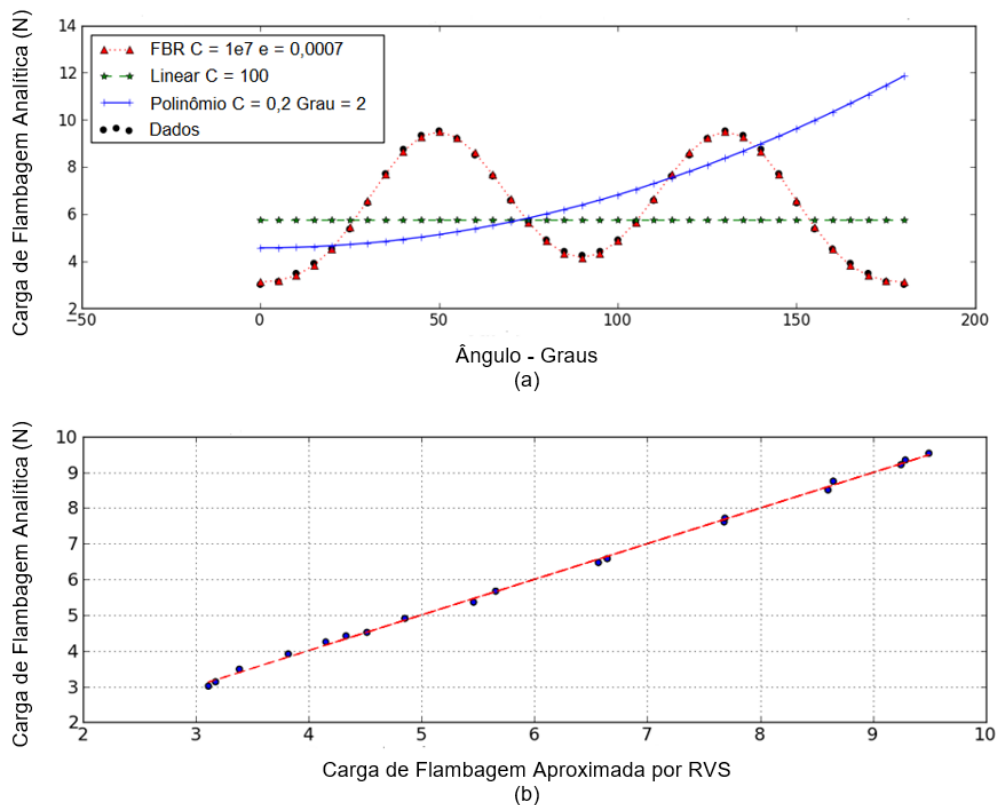
onde  $D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}$  são os coeficientes da matriz de rigidez de flexão do laminado (os coeficientes  $D_{16}$  e  $D_{26}$  são negligenciados),  $N_x$  é a força resultante axial aplicada

na direção  $x$  e  $N_y$  é a força resultante axial aplicada na direção  $y$ ,  $a$  é o comprimento e  $b$  é a largura da placa. Através da combinação das meias ondas  $m$  e  $n$  que minimiza  $\lambda_{cb}$  na Eq. (51) obtém-se o fator crítico de flambagem e, a partir dele, sabendo-se a carga aplicada, tem-se a carga crítica de flambagem.

A placa é composta de lâminas de grafite/epóxi com espessura  $t = 0,127$  mm, comprimento  $a = 508$  mm e largura  $b = 127$  mm. As constantes elásticas do material são  $E_1 = 127,59$  GPa,  $E_2 = 13,03$  GPa,  $G_{12} = 6,41$  GPa e  $\nu_{12} = 0,30$ . As cargas aplicadas são  $N_x = 175$  N/m e  $N_y/N_x = 0,125$  (AYMERICH e SERRA, 2008).

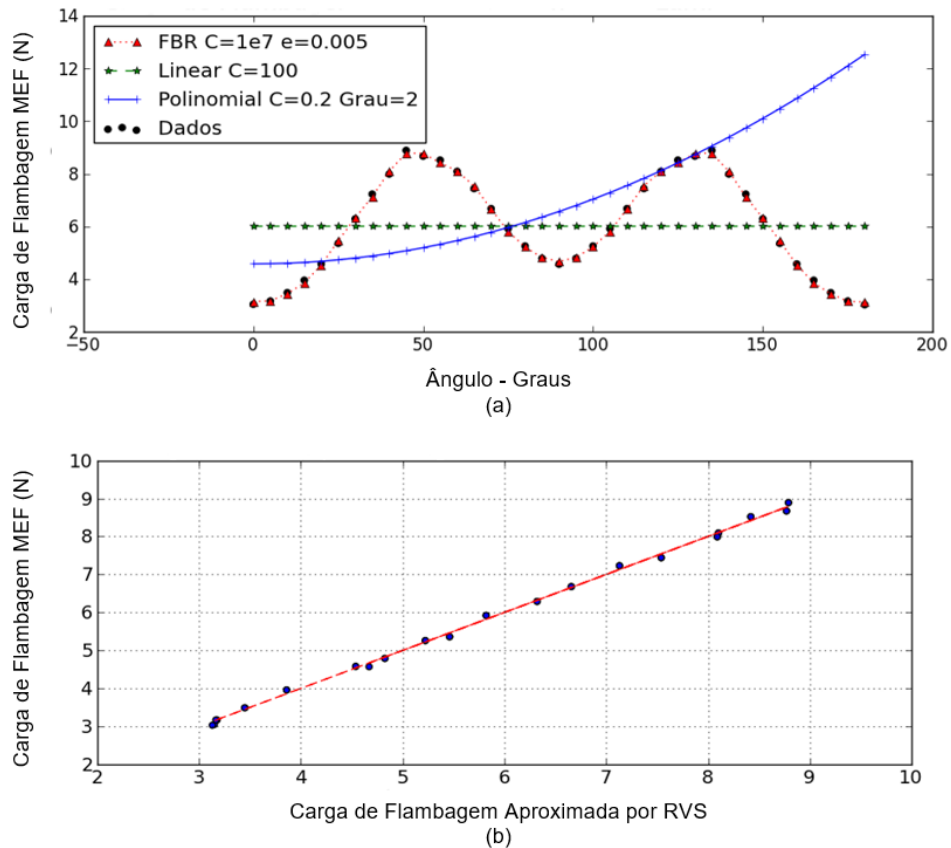
A Figura 5.2 mostra os resultados da regressão comparados com os dados das amostras. Na Figura 5.2(a) é apresentada a carga de flambagem em função do ângulo de laminação para as diferentes funções *kernel*. Nota-se que o melhor ajuste foi alcançado com a função *kernel* Gaussiana (FBR) com os valores dos parâmetros  $C = 10^7$  e  $e = 0,0007$ . A aplicação da função *kernel* linear não obteve a regressão desejada e com a função polinomial de grau 2 ou superior também não atingiu-se o ajuste adequado. Além disso, observou-se que funções polinomiais de grau superior a 2 demandam muito tempo computacional. É apresentado também na Figura 5.2(b) o diagrama de dispersão entre o valor exato da carga de flambagem (linha contínua) e as aproximações, obtidas com a RVS utilizando a função *kernel* FBR (pontos discretos).

Para a verificação da qualidade das respostas com a RVS foi utilizado o fator de correlação calculado com base em Myers e Montgomery (2002) e Reddy et al. (2011) e apresentado na Eq. (29). Esse fator estima a correlação entre os valores preditos com o metamodelo, no caso, RVS, e os valores exatos, no caso a carga de flambagem obtida analiticamente. O fator de correlação obtido para o conjunto de amostras foi  $R^2 = 0,998900$  para a função FBR, como mostrado no diagrama de dispersão da Figura 5.2(b). Esse valor, que é próximo da unidade, representa que uma boa qualidade dos resultados foi obtida.



**Figura 5.2 - Resultados da RVS com diferentes funções *kernel* (a) e diagrama de dispersão com FBR (b) para carga de flambagem analítica para laminado de 4 lâminas.**

Amostras da carga de flambagem foram também geradas via elementos finitos com um modelo construído no Abaqus®, considerando também incrementos de ângulos de 5°. A RVS foi testada com as funções *kernel* linear, polinomial e a gaussiana FBR. Para essas amostras a regressão também apresentou qualidade superior das respostas utilizando a função FBR. Portanto, considera-se que a função linear e a polinomial não são adequadas para este caso. Os parâmetros  $C = 10^7$  e  $e = 0,005$  foram usados na análise de regressão com FBR. A Figura 5.3 mostra os resultados da regressão comparados com os dados das amostras. Na Figura 5.3(a) é apresentada a carga de flambagem em função do ângulo para as diferentes funções *kernel*. Na Figura 5.3(b) é apresentada o diagrama de dispersão da RVS em relação aos valores exatos da carga de flambagem. O valor obtido para o fator de correlação  $R^2 = 0,998310$  indica que a RVS apresenta boa resposta para o problema e observa-se que a estimativa de ajuste é similar ao caso de amostras obtidas analiticamente.



**Figura 5.3 - Resultados da RVS com diferentes funções *kernel* (a) e diagrama de dispersão com FBR (b) para carga de flambagem obtida com MEF para laminado de 4 lâminas.**

Portanto, o desempenho para ambos conjuntos de amostras de treinamento, equação analítica e modelo de elementos finitos, foi superior com a função *kernel* FBR. A comparação dos resultados entre os dois conjuntos de amostras de treinamento e as respectivas regressões por RVS são apresentadas na Figura 5.4.

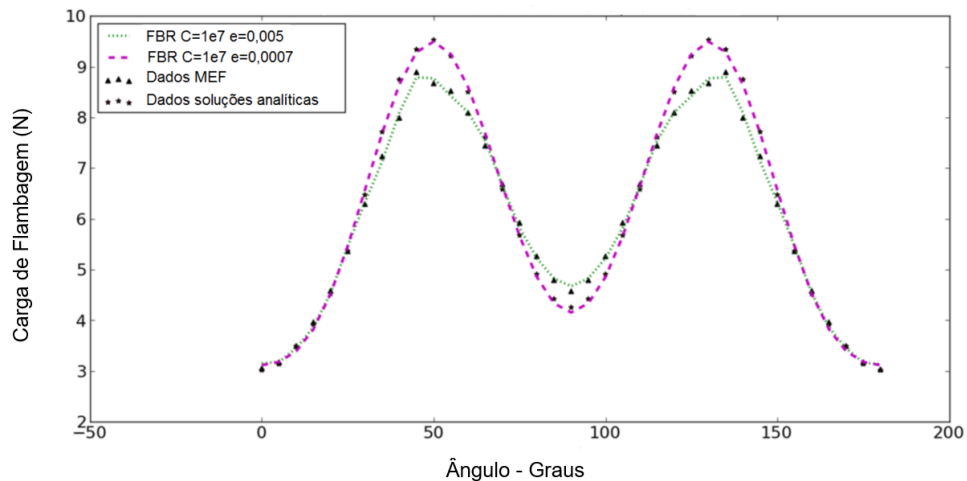


Figura 5.4 - Comparação da RVS para amostras analíticas e elementos finitos.

### 5.1.2 RVS e HL para cargas de flambagem analítica e MEF (48 lâminas)

Nesta subseção, o laminado analisado é constituído por 48 lâminas, com empilhamento simétrico e balanceado (12 variáveis), sendo as outras características já apresentadas na subseção anterior (AYMERICH e SERRA, 2008). A sequência de empilhamento do laminado é selecionada a partir dos ângulos discretos ( $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ ). O projeto de experimentos HL foi adotado para obter as amostras (sequências de empilhamento) para a construção do metamodelo. Um conjunto de 60 amostras foi gerado. Essa quantidade é baseada nos estudos de Pan et al. (2010) e Yang e Gu (2004), que indicam um número de amostras igual a  $5N_{dv}$ , onde  $N_{dv}$  é o número total de variáveis de projeto. Note que, como o laminado é simétrico e balanceado com 48 lâminas, tem-se apenas 12 variáveis ( $N_{dv} = 12$ ). A Tabela 5.1 apresenta as amostras geradas pelo HL para o treinamento com a RVS e os respectivos valores de carga de flambagem obtidos analiticamente.

Tabela 5.1 - Dados gerados com HL e carga analítica de flambagem para treinamento da RVS.

Amostra	Sequência de Empilhamento do Laminado	Carga de Flambagem (N)
1	$[\pm 45_2 90_2 \pm 45_2 0_4 90_2 0_4 \pm 45_2 0_4 90_2]_S$	10956,77
2	$[90_2 0_2 90_2 \pm 45_3 0_2 \pm 45_2 90_4 0_4]_S$	12407,53
3	$[90_2 \pm 45_2 0_4 90_2 \pm 45_2 90_2 0_4 \pm 45_3]_S$	12079,96
4	$[90_4 0_2 90_2 \pm 45_2 0_2 \pm 45_2 90_4 0_2 90_2 0_2]_S$	11251,83
5	$[0_2 90_2 \pm 45_2 90_4 0_2 90_2 0_2 90_2 0_2 \pm 45]_S$	10932,84
6	$[\pm 45_2 0_2 90_4 0_4 \pm 45_2 90_2 0_4 \pm 45]_S$	13026,76
7	$[\pm 45_2 0_2 90_2 0_2 \pm 45_2 90_2 0_4 \pm 45_2]_S$	12985,38
8	$[90_2 0_4 \pm 45_3 90_2 \pm 45_2 0_2 90_2 \pm 45_2]_S$	12294,21
9	$[\pm 45_2 0_2 \pm 45_2 0_2 \pm 45_2 0_2 90_2 0_2 \pm 45_2 0_2 90_2]_S$	12717,56
10	$[0_2 \pm 45_2 0_4 90_2 \pm 45_2 90_2 0_2 \pm 45_2 90_4]_S$	11027,56
11	$[90_2 0_2 90_2 \pm 45_2 0_2 90_2 0_4 90_2 \pm 45_2 90_2]_S$	11715,58
12	$[0_4 90_2 \pm 45_2 90_2 0_2 90_2 0_2 \pm 45_2 0_2 \pm 45]_S$	10768,61
13	$[0_2 \pm 45_2 0_4 90_2 0_2 \pm 45_2 90_2 \pm 45_2 0_2]_S$	11370,74
14	$[\pm 45_2 0_2 \pm 45_4 90_4 \pm 45_3]_S$	14612,57
15	$[0_2 \pm 45_2 90_4 \pm 45_2 0_4 \pm 45_3 90_2]_S$	10059,12
16	$[0_4 \pm 45_2 90_4 \pm 45_2 0_2 \pm 45_2 0_4]_S$	11775,31
17	$[90_2 \pm 45_2 90_2 0_2 90_2 \pm 45_2 90_2 0_4 \pm 45_2 90_2 \pm 45]_S$	12054,19
18	$[90_2 \pm 45_2 0_4 \pm 45_3 90_4 \pm 45_2]_S$	13566,91
19	$[\pm 45_2 90_4 \pm 45_2 90_2 0_2 \pm 45_2 90_2 0_2 \pm 45_2 0_2]_S$	13258,42
20	$[\pm 45_2 90_4 \pm 45_2 90_2 0_2 \pm 45_2 90_2 0_2 \pm 45_2 0_2]_S$	12848,37
21	$[\pm 45_2 0_2 90_2 0_2 \pm 45_2 90_4 0_4 \pm 45_2 0_2 \pm 45]_S$	12236,34
22	$[\pm 45_2 90_2 \pm 45_2 90_2 0_4 \pm 45_2 0_2 \pm 45_2 0_2 \pm 45]_S$	13259,35
23	$[90_2 \pm 45_2 0_2 \pm 45_2 0_4 90_4 0_4 \pm 45_2 0_2]_S$	12335,68
24	$[90_2 0_2 90_4 \pm 45_2 0_2 90_2 \pm 45_2 90_2 0_2 \pm 45_2 90_2]_S$	11167,17
25	$[0_2 90_2 \pm 45_2 90_2 \pm 45_2 90_2 0_2 90_4 0_4]_S$	10932,84
26	$[0_2 90_2 \pm 45_2 0_2 \pm 45_2 90_2 0_2 90_2 \pm 45_2 90_2 0_4]_S$	11874,33
27	$[\pm 45_2 90_2 0_4 90_2 \pm 45_2 90_4 0_2 90_4]_S$	12558,43
28	$[\pm 45_2 0_2 \pm 45_2 90_4 \pm 45_2 90_4 \pm 45_2]_S$	14361,92
29	$[90_2 \pm 45_2 90_2 \pm 45_2 90_2 \pm 45_2 90_2 \pm 45_2 90_4 \pm 45]_S$	13316,09
30	$[0_2 90_2 \pm 45_2 90_2 0_2 90_4 0_2 \pm 45_2 90_2 \pm 45_2]_S$	10046,05
31	$[0_2 90_4 0_2 \pm 45_2 0_4 \pm 45_2 90_2 0_2 90_4]_S$	11045,04
32	$[\pm 45_2 90_2 0_4 90_2 \pm 45_2 0_2 \pm 45_3 0_2]_S$	12771,83
33	$[90_4 0_2 \pm 45_2 90_2 0_2 90_4 0_4 \pm 45_2]_S$	11123,00
34	$[90_2 \pm 45_2 90_4 \pm 45_3 90_4 \pm 45_2 90_4]_S$	12415,30
35	$[90_4 0_2 \pm 45_2 0_2 \pm 45_3 90_4 0_2 90_2]_S$	12120,44
36	$[0_2 90_4 0_2 \pm 45_2 90_2 0_2 90_2 0_2 90_2 \pm 45_2 90_2]_S$	10525,93
37	$[0_4 \pm 45_4 0_2 \pm 45_2 0_4 90_2 \pm 45]_S$	10976,93

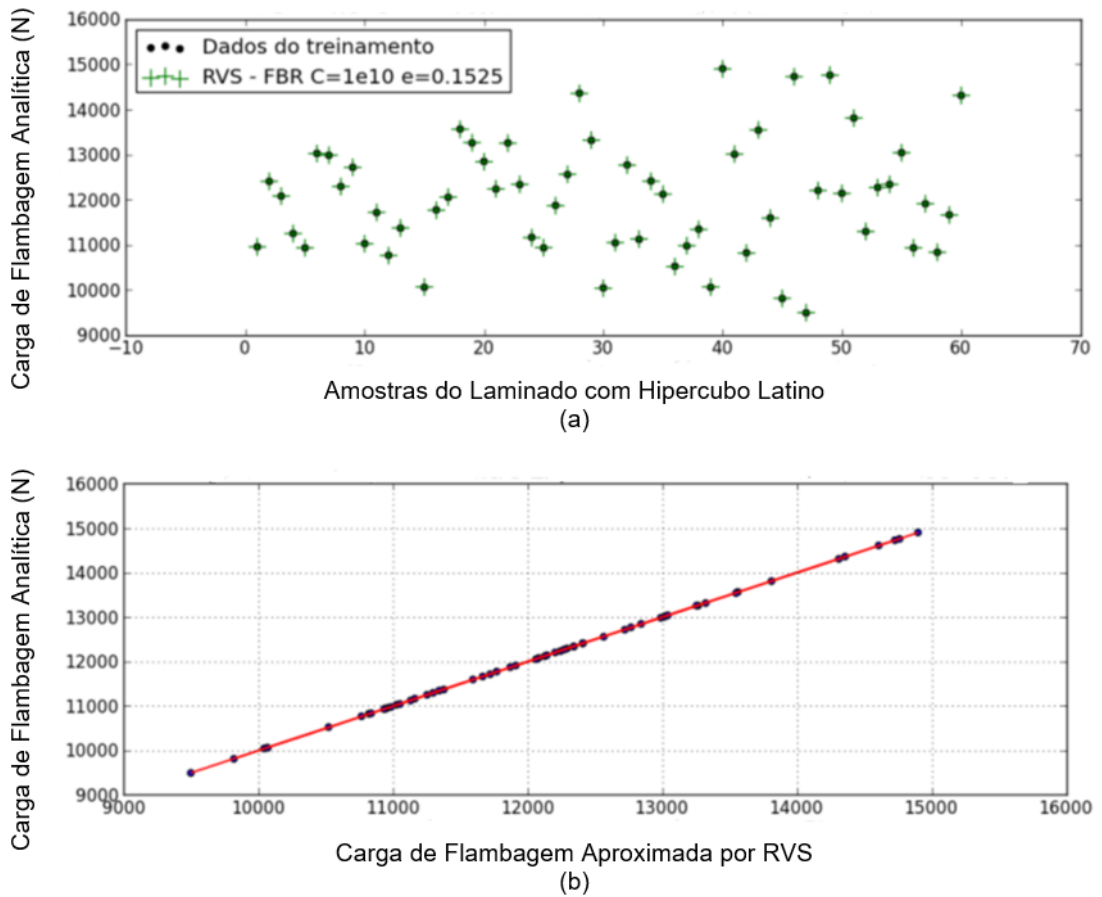
Tabela 5.1 - Continuação

38	$[90_4 0_4 \pm 45 90_2 0_2 \pm 45_3 0_2 90_2 ]_S$	11347,52
39	$[0_2 \pm 45_2 90_2 \pm 45 90_2 0_2 \pm 45 90_2 0_2 \pm 45_2 ]_S$	10059,61
40	$[\pm 45_3 0_2 \pm 45_2 90_2 45_5 ]_S$	14904,86
41	$[\pm 45 0_2 90_4 \pm 45 90_2 \pm 45_2 0_2 \pm 45 90_2 0_2 ]_S$	13007,46
42	$[\pm 45 90_2 0_4 90_4 0_2 90_2 \pm 45_2 90_4 0_2 ]_S$	10824,31
43	$[\pm 45_2 90_2 0_2 90_4 \pm 45 90_2 \pm 45_3 0_2 ]_S$	13541,15
44	$[0_2 90_2 0_2 90_2 \pm 45_3 0_2 90_2 0_2 \pm 45_2 ]_S$	11597,33
45	$[0_2 \pm 45_2 90_2 0_2 \pm 45_2 90_2 \pm 45 90_2 0_2 90_2 ]_S$	9811,85
46	$[\pm 45_2 90_2 \pm 45_2 0_4 \pm 45_3 0_4 \pm 45 ]_S$	14730,56
47	$[0_2 90_4 \pm 45 90_2 0_2 90_4 0_2 \pm 45_3 ]_S$	9493,31
48	$[90_2 \pm 45 0_2 90_2 0_2 \pm 45 90_2 \pm 45 0_4 90_2 0_2 ]_S$	12205,09
49	$[\pm 45_3 90_4 \pm 45 90_2 \pm 45 0_2 \pm 45_2 0_2 ]_S$	14759,42
50	$[90_2 \pm 45 0_4 90_2 \pm 45 90_2 0_2 \pm 45 0_2 \pm 45 90_2 ]_S$	12142,53
51	$[\pm 45 90_4 \pm 45_3 0_4 \pm 45 90_2 \pm 45_2 ]_S$	13809,83
52	$[0_4 \pm 45_3 90_2 \pm 45 90_4 0_4 90_2 ]_S$	11296,05
53	$[90_2 \pm 45 90_2 0_2 \pm 45 90_4 0_2 \pm 45 90_2 0_4 ]_S$	12271,35
54	$[0_2 \pm 45_2 0_2 \pm 45_2 90_2 0_2 90_2 0_2 \pm 45 0_2 ]_S$	12340,19
55	$[\pm 45 90_2 \pm 45 90_4 \pm 45 90_2 0_2 90_2 0_2 90_2 0_2 ]_S$	13041,42
56	$[0_2 90_4 \pm 45_2 90_4 0_2 \pm 45 90_2 0_4 ]_S$	10932,84
57	$[90_2 0_4 \pm 45_3 0_2 \pm 45 0_2 \pm 45_2 90_2 ]_S$	11910,83
58	$[0_4 \pm 45 90_2 \pm 45 0_4 90_4 \pm 45 90_2 \pm 45 ]_S$	10835,70
59	$[0_2 \pm 45 90_2 0_2 \pm 45 90_2 0_4 \pm 45 90_2 0_2 90_2 ]_S$	11665,05
60	$[\pm 45 0_2 \pm 45_5 90_2 \pm 45 90_2 \pm 45 90_2 ]_S$	14310,21

Na Figura 5.5(a) é apresentada graficamente a distribuição dos valores das respostas (cargas de flambagem) das amostras do HL, computadas analiticamente e treinadas pela RVS. O gráfico da Figura 5.5(b) mostra o diagrama de dispersão entre o valor exato da carga de flambagem e a aproximação por RVS. A função de base radial (FBR) foi utilizada como função *kernel*. Observam-se boas respostas com a RVS e fator de correlação muito próximo da unidade ( $R^2 = 0,999987$ ).

Com o objetivo de validar o treinamento do metamodelo, 15 novas amostras geradas com HL foram testadas com a RVS obedecendo ao mesmo processo. Os parâmetros  $C = 10^{10}$  e  $e = 0,1525$ , obtidos durante o treinamento, foram mantidos no caso da validação. A Tabela 5.2 contém as 15 novas amostras e a Figura 5.6 mostra o resultado da validação.

Nota-se que a RVS conseguiu representar satisfatoriamente o modelo analítico de flambagem com fator de correlação  $R^2 = 0,999999$ . Isso confirma que o aprendizado obtido pelo treinamento supervisionado da RVS resultou em um metamodelo adequado para a carga crítica de flambagem.



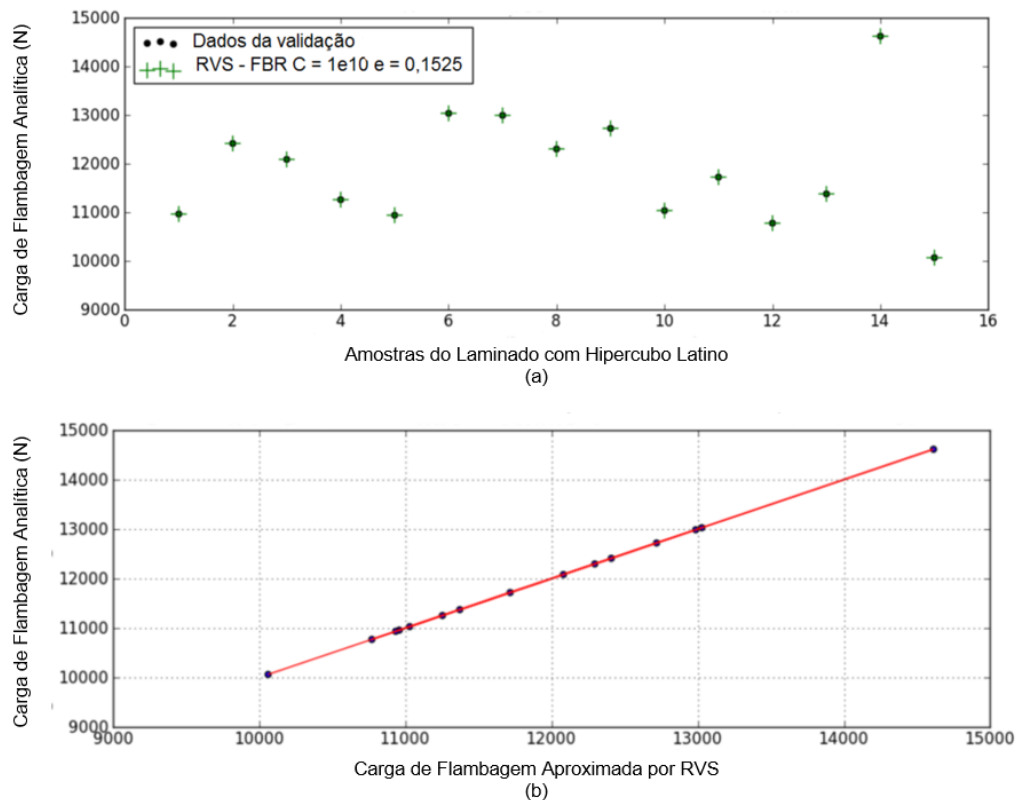
**Figura 5.5 - Resultados do treinamento da RVS com 60 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem analítica para laminado de 48 lâminas.**



Tabela 5.2 - As 15 amostras para validação da RVS.

Amostra	Sequência de empilhamento	Carga de Flambagem (N)
1	$[90_2 \pm 45_3 0_2 90_2 \pm 45 0_2 \pm 45_2 90_2 \pm 45]_S$	13784,07
2	$[\pm 45 90_4 0_4 90_2 \pm 45_2 90_4 \pm 45 90_2]_S$	12341,28
3	$[\pm 45_2 0_4 90_2 0_2 \pm 45_2 0_4 90_2 \pm 45]_S$	12423,90
4	$[90_2 \pm 45 90_4 0_4 \pm 45 0_2 90_2 \pm 45_2 0_2]_S$	11943,76
5	$[0_2 \pm 45 90_4 0_4 90_2 \pm 45 0_2 \pm 45 0_2 \pm 45]_S$	11710,18
6	$[\pm 45_2 90_2 0_2 90_2 \pm 45 0_4 \pm 45_3 0_2]_S$	13673,65
7	$[90_2 \pm 45 90_4 \pm 45 0_2 \pm 45 90_4 0_2 \pm 45_2]_S$	12203,52
8	$[90_2 0_4 \pm 45 90_2 \pm 45_2 0_4 90_2 0_4]_S$	11858,33
9	$[0_4 \pm 45_3 0_2 \pm 45 0_2 \pm 45_4]_S$	10670,87
10	$[0_2 90_2 \pm 45 90_2 0_2 90_4 0_2 \pm 45_2 0_4]_S$	11498,42
11	$[\pm 45_5 0_4 \pm 45 90_2 0_2 \pm 45 90_2]_S$	14846,85
12	$[\pm 45 0_4 90_2 0_2 \pm 45 0_2 90_4 0_2 90_4]_S$	11178,99
13	$[\pm 45 90_2 0_2 90_2 \pm 45_2 0_2 90_2 0_2 \pm 45_2 90_2]_S$	12915,45
14	$[90_2 \pm 45 0_4 \pm 45 90_4 \pm 45_2 90_2 \pm 45_2]_S$	12525,31
15	$[90_2 \pm 45_2 90_2 0_2 90_2 \pm 45 0_2 90_4 0_4]_S$	12845,52

Nesta seção, o projeto de experimentos HL e o metamodelo RVS foram aplicados para aproximar a carga crítica de flambagem de uma placa retangular. O HL gerou amostras representativas da sequência de empilhamento do laminado onde o espaço de projeto foi bem explorado, haja vista que muitas das cargas críticas estão próximas das cargas otimizadas por Aymerich e Serra (2008). Os vetores de suporte utilizados na RVS proporcionaram regressões que se aproximam muito do resultado desejado. O estudo dos tipos de funções *kernel* também possibilitou verificar que a função de base radial (FBR) apresentou os melhores resultados dentre as funções testadas.



**Figura 5.6 – Resultados da validação da RVS com 15 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem analítica para laminado de 48 lâminas.**

## 5.2 Aplicação de RVS, RN, HL e parâmetros de laminação para placa de 24 lâminas

Nesta seção, a estrutura em análise é a mesma do trabalho de Varelis e Saravanos (2004). A Figura 5.7 mostra suas características geométricas e propriedades mecânicas do material.

Neste estudo de caso foram utilizados parâmetros de laminação como dados de entrada dos metamodelos. Parâmetros de laminação são uma forma de representar a rigidez de laminados utilizando os conceitos de invariantes. Isso permite reduzir o número de variáveis que representam o empilhamento. Eles estão relacionados aos conceitos de invariantes para uma lâmina de um laminado, facilitando assim os cálculos, pois possibilitam trabalhar com no máximo 12 parâmetros que dependem apenas das propriedades dos materiais e da espessura total do laminado, sem depender do número de lâminas. No Apêndice B são apresentados e explicados alguns conceitos sobre parâmetros de laminação.

O projeto de experimentos HL é usado para definir o conjunto de amostras. Essas amostras são orientações angulares das lâminas (sequência de empilhamento) para as quais as cargas de flambagem são calculadas. A carga de flambagem foi obtida através de um modelo de elementos finitos construído no Abaqus®, cuja malha está representada na Figura 5.7. Os metamodelos redes neurais artificiais (RN) e a regressão de vetores de suporte (RVS) foram treinados e o desempenho dos mesmos foi comparado.

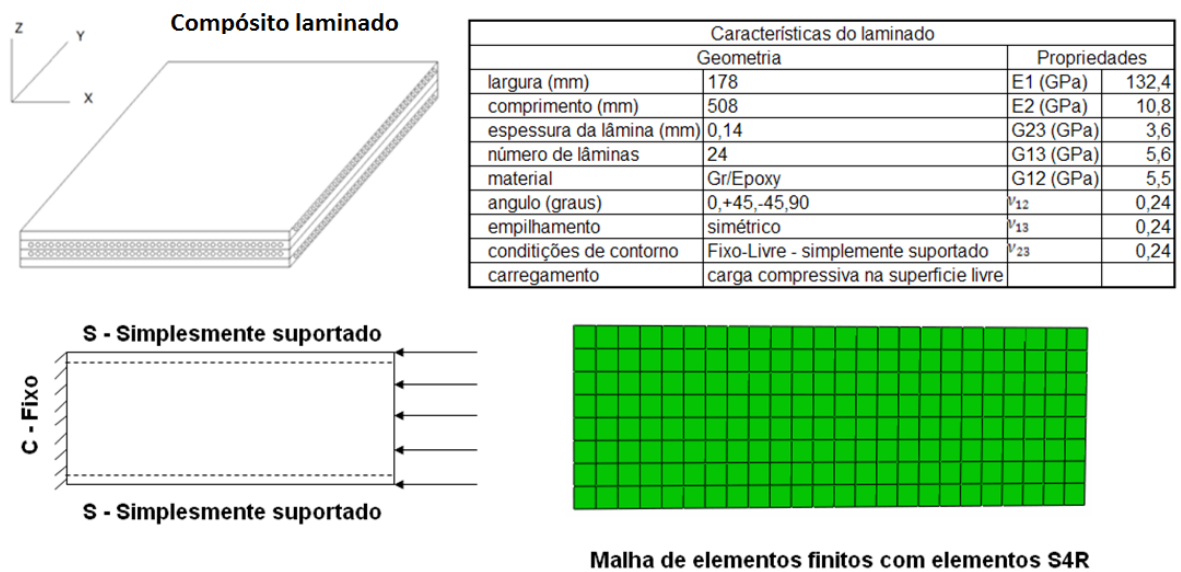


Figura 5.7 - Placa de compósito laminado com 24 lâminas.

O laminado analisado possui 24 camadas, sendo simétrico mas não balanceado e representado pelo empilhamento:  $[\pm\theta_1 \pm\theta_2 \pm\theta_3 \pm\theta_4 \pm\theta_5 \theta_6 \theta_7]_s$ . Portanto, possui sete variáveis ( $N_{dv} = 7$ ). Na Tabela 5.3 estão apresentadas as 35 amostras ( $5N_{dv}$ ) de empilhamento selecionadas para o treinamento do metamodelo obtidas com um HL. Também nesta tabela são apresentadas as correspondentes cargas de flambagem obtidas via MEF.

**Tabela 5.3 - Amostras obtidas com HL e respectivas cargas de flambagem (MEF) para placa com 24 lâminas.**

Amostra	Sequência de empilhamento	Carga de flambagem (N)
1	$[\pm 45_4 0_2 90_0]_S$	52413,17
2	$[\pm 45_0_2 \pm 45_0_2 \pm 45_4 45_90]_S$	46059,99
3	$[0_2 90_2 0_2 \pm 45_2 90_90]_S$	38352,41
4	$[90_2 \pm 45_90_2 \pm 45_0_0]_S$	32987,67
5	$[0_2 90_2 0_2 \pm 45_0_2 0_4 45]_S$	36067,43
6	$[90_2 0_2 90_2 \pm 45_2 90_4 45]_S$	35698,26
7	$[\pm 45_3 0_2 90_2 45_0]_S$	51492,20
8	$[90_2 0_2 90_4 \pm 45_0_0]_S$	33306,83
9	$[0_2 \pm 45_4 0_90]_S$	44831,61
10	$[0_4 90_2 0_4 45_4 45]_S$	34240,61
11	$[\pm 45_90_2 0_4 \pm 45_4 45_0]_S$	44256,14
12	$[\pm 45_90_2 0_2 \pm 45_90_2 0_4 45]_S$	44033,28
13	$[\pm 45_90_2 0_2 \pm 45_90_2 0_4 45]_S$	44033,28
14	$[\pm 45_0_2 \pm 45_90_2 \pm 45_0_90]_S$	47174,09
15	$[90_2 \pm 45_3 0_2 90_90]_S$	41610,35
16	$[0_2 \pm 45_0_4 \pm 45_0_4 45]_S$	38821,80
17	$[\pm 45_3 90_2 \pm 45_90_0]_S$	50675,00
18	$[\pm 45_4 0_2 45_4 45]_S$	51962,65
19	$[\pm 45_90_4 0_2 90_2 45_0]_S$	39785,67
20	$[90_4 0_2 \pm 45_2 0_90]_S$	31729,92
21	$[0_2 90_2 \pm 45_0_4 45_90]_S$	39494,64
22	$[90_2 \pm 45_2 0_4 45_4 45]_S$	41260,40
23	$[\pm 45_0_4 \pm 45_2 45_0]_S$	43927,37
24	$[\pm 45_2 0_2 \pm 45_2 90_4 45]_S$	50418,32
25	$[\pm 45_3 0_2 \pm 45_90_4 45]_S$	51798,71
26	$[\pm 45_90_2 0_4 90_2 0_0]_S$	43572,26
27	$[0_2 \pm 45_90_2 \pm 45_0_2 45_90]_S$	42277,67
28	$[90_2 \pm 45_90_4 \pm 45_4 45_4 45]_S$	33522,56
29	$[90_2 0_4 \pm 45_2 45_4 45]_S$	39165,87
30	$[90_2 0_2 90_2 0_2 90_2 0_4 45]_S$	35190,60
31	$[\pm 45_90_4 \pm 45_2 90_4 45]_S$	40925,76
32	$[\pm 45_3 90_2 \pm 45_0_4 45]_S$	50589,38
33	$[0_2 \pm 45_0_2 \pm 45_0_2 45_0]_S$	40169,62
34	$[\pm 45_0_2 \pm 45_0_4 45_90]_S$	45359,92
35	$[0_2 90_2 \pm 45_3 90_90]_S$	42074,75

As orientações angulares das amostras foram convertidas em parâmetros de laminação, conforme procedimento explicado no Apêndice B, cujos valores são

mostrados na Tabela 5.4. Conforme já comentado anteriormente, neste estudo de caso os pares de treinamento usados na RN e na RVS são os parâmetros de laminação e as cargas de flambagem correspondentes.

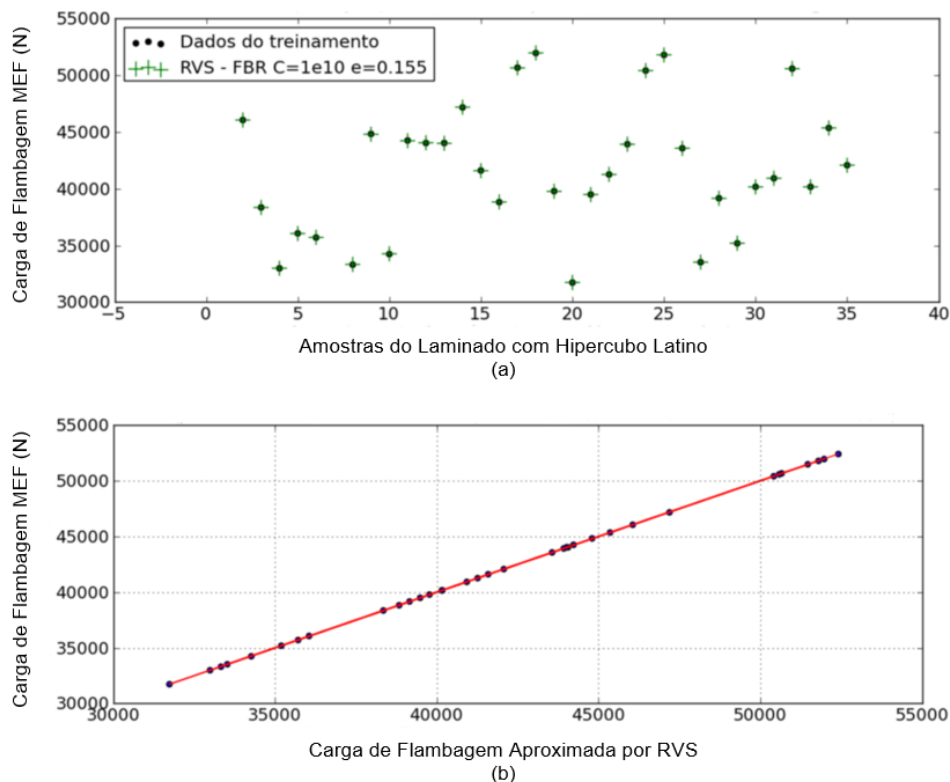
**Tabela 5.4 - Parâmetros de laminação das amostras de treinamento.**

Amostra	$\xi_1^A$	$\xi_2^A$	$\xi_3^A$	$\xi_4^A$	$\xi_1^D$	$\xi_2^D$	$\xi_3^D$	$\xi_4^D$
1	0,1667	0,3333	-0,3333	0,0000	0,0289	0,4329	-0,9259	0,0000
2	0,2500	0,0833	-0,1667	0,0000	0,3698	0,0770	-0,2581	0,0000
3	0,0000	0,1667	0,3333	0,0000	0,3056	0,0984	0,7593	0,0000
4	-0,3333	0,1667	0,3333	0,0000	-0,6759	0,2928	0,3704	0,0000
5	0,4167	0,2500	0,5000	0,0000	0,3466	0,0885	0,8229	0,0000
6	-0,2500	0,2500	0,1667	0,0000	-0,3142	0,0990	0,7581	0,0000
7	0,0833	0,2500	-0,1667	0,0000	0,0561	0,3490	-0,7581	0,0000
8	-0,1667	0,0000	0,6667	0,0000	-0,3935	0,0104	0,9352	0,0000
9	0,1667	0,3333	-0,3333	0,0000	0,4248	0,4051	-0,1481	0,0000
10	0,5000	0,1667	0,6667	0,0000	0,6528	0,0046	0,9907	0,0000
11	0,2500	0,0833	0,1667	0,0000	-0,0226	0,0527	0,0845	0,0000
12	-0,0833	0,2500	0,1667	0,0000	-0,1395	0,1267	-0,0197	0,0000
13	-0,0833	0,2500	0,1667	0,0000	-0,1395	0,1267	-0,0197	0,0000
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1979	0,0729	-0,2500	0,0000
15	-0,1667	0,3333	0,0000	0,0000	-0,3935	0,3947	-0,0833	0,0000
16	0,5833	0,2500	0,1667	0,0000	0,6846	0,2934	0,3692	0,0000
17	-0,1667	0,1667	-0,3333	0,0000	-0,0914	0,3553	-0,8148	0,0000
18	0,1667	0,5000	-0,6667	0,0000	0,0324	0,4375	-0,9352	0,0000
19	-0,2500	0,0833	0,5000	0,0000	-0,3976	0,0422	0,1493	0,0000
20	-0,1667	0,1667	0,3333	0,0000	0,5289	0,0984	0,7593	0,0000
21	0,2500	0,0833	0,5000	0,0000	0,2587	0,0284	0,6493	0,0000
22	0,1667	0,3333	0,0000	0,0000	-0,3009	0,3113	0,0833	0,0000
23	0,4167	0,2500	-0,1667	0,0000	0,4543	0,1406	-0,0914	0,0000
24	0,0833	0,4167	-0,5000	0,0000	0,1672	0,4196	-0,6493	0,0000
25	0,0833	0,2500	-0,5000	0,0000	0,0839	0,3559	-0,8160	0,0000
26	0,1667	0,0000	0,6667	0,0000	-0,0509	0,0382	0,1574	0,0000
27	0,0833	0,4167	0,1667	0,0000	0,2818	0,3744	0,2512	0,0000
28	-0,5000	0,3333	0,0000	0,0000	-0,6806	0,2975	0,3611	0,0000
29	0,1667	0,3333	0,0000	0,0000	0,0324	0,1030	0,7500	0,0000
30	-0,0833	0,0833	0,8333	0,0000	-0,2506	0,0006	0,9988	0,0000
31	-0,4167	0,2500	-0,1667	0,0000	-0,4578	0,1372	-0,0845	0,0000
32	-0,0833	0,2500	-0,5000	0,0000	-0,0839	0,3559	-0,8160	0,0000
33	0,5833	0,4167	0,1667	0,0000	0,6256	0,3744	0,2512	0,0000
34	0,4167	0,0833	0,1667	0,0000	0,4022	0,0666	-0,1933	0,0000
35	-0,1667	0,1667	0,0000	0,0000	0,1343	0,1227	0,4167	0,0000

### 5.2.1 Aplicação de RVS

Os dados de entrada para a RVS são as amostras geradas pelo HL, ou seja, as 35 amostras apresentadas na Tabela 5.3. A função Gaussiana de base radial foi adotada como função *kernel*. O resultado do treinamento da RVS com as amostras geradas pelo HL é apresentado na Figura 5.8(a).

A RVS com  $C = 1e10$  e  $e = 0,155$  apresentou as melhores aproximações das respostas. Esses valores foram obtidos após vários testes com valores diferentes para  $C$  e  $e$ . Para estimar a qualidade da regressão, o fator de correlação  $R^2$  foi computado. O valor  $R^2 = 0,999994$  obtido significa que a resposta apresentou uma boa aproximação com a aplicação da RVS, o que também pode ser verificado com o diagrama de dispersão mostrado no gráfico da Figura 5.8(b).



**Figura 5.8 - Resultados do treinamento da RVS com 35 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem MEF para laminado de 24 lâminas.**

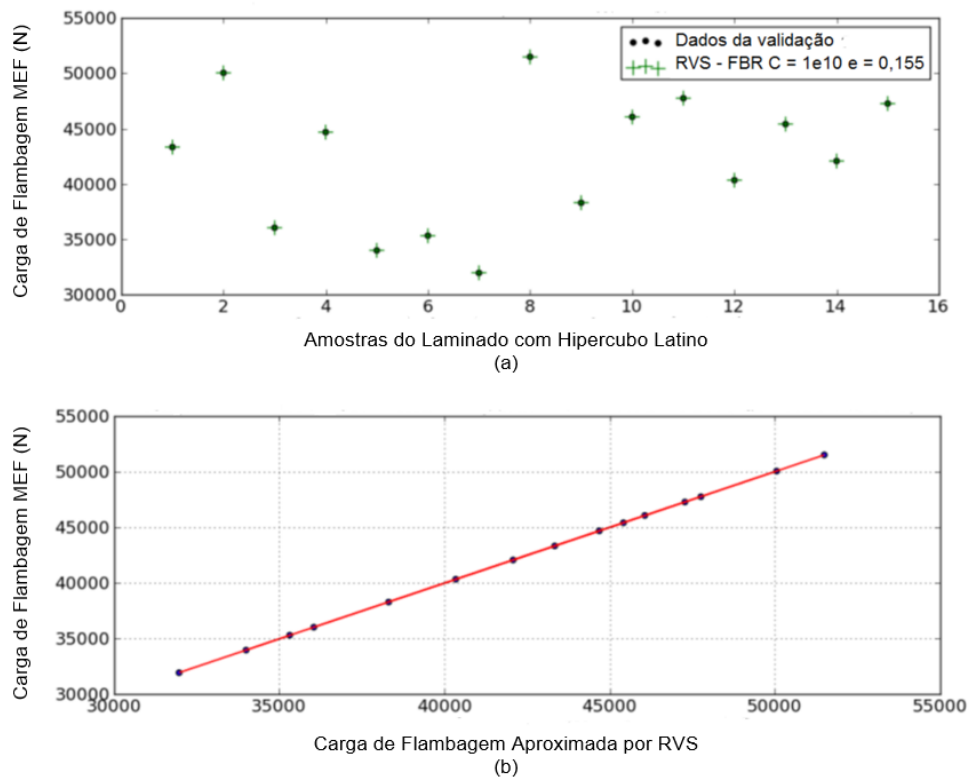
Com o objetivo de validar a RVS, 15 novas amostras foram geradas via HL. Essas amostras estão apresentadas na Tabela 5.5. Os parâmetros  $C = 1e10$  e  $e =$

0,155 foram mantidos, e a Figura 5.9 mostra os resultados da validação para a carga de flambagem.

Os vetores de saída obtidos na validação também apresentaram respostas satisfatórias, resultando em um fator de correlação de  $R^2 = 0,999998$ . Baseado nesses resultados, é possível concluir que a regressão de vetores de suporte é um metamodelo adequado para aproximar a carga crítica de flambagem, tendo como entrada os parâmetros de laminação.

**Tabela 5.5 - Amostras do HL para validação e correspondentes cargas de flambagem.**

Amostra	Sequência de empilhamento	Carga de flambagem (N)
1	$[\pm 45_1 90_2 \pm 45_3 45_4 45_5]_S$	45545,04
2	$[90_4 \pm 45_1 0_2 \pm 45_3 45_4 90_5]_S$	32924,13
3	$[0_4 \pm 45_2 0_2 90_3 90_4]_S$	37879,82
4	$[90_2 \pm 45_1 90_2 0_2 0_3]_S$	53369,56
5	$[\pm 45_1 0_4 90_4 0_5]_S$	43153,43
6	$[0_2 \pm 45_3 90_2 45_4 45_5]_S$	44933,25
7	$[\pm 45_1 90_2 0_4 \pm 45_3 0_5 45_6]_S$	44237,63
8	$[\pm 45_1 90_2 0_4 \pm 45_3 0_5 45_6]_S$	44237,63
9	$[\pm 45_2 90_2 \pm 45_3 45_4 45_5]_S$	48430,77
10	$[90_4 0_2 90_2 0_2 45_3 90_4]_S$	30251,10
11	$[\pm 45_1 90_2 \pm 45_3 0_2 0_3 45_4]_S$	45477,40
12	$[90_2 \pm 45_1 90_2 0_2 \pm 45_3 90_4 45_5]_S$	45850,84
13	$[0_4 \pm 45_3 \pm 45_4 0_5]_S$	38248,11
14	$[90_4 \pm 45_1 0_2 \pm 45_3 0_4 45_5]_S$	32989,45
15	$[\pm 45_5 45_6 90_7]_S$	52232,50

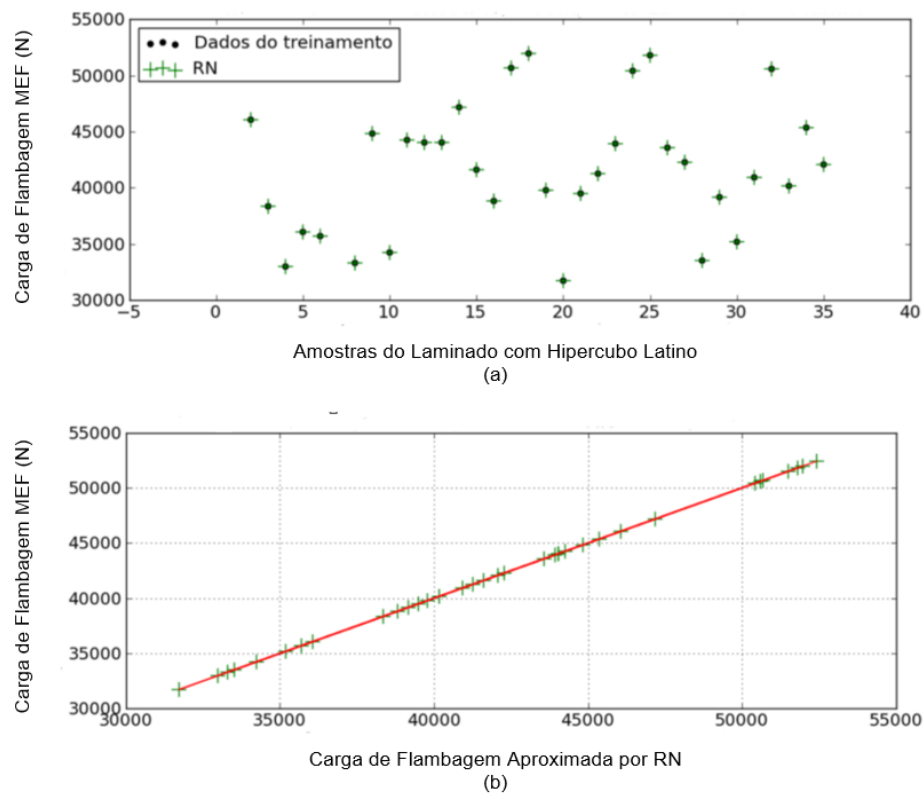


**Figura 5.9 - Resultados da validação da RVS com 35 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem MEF para laminado de 24 lâminas.**

### 5.2.2 Aplicação de RN

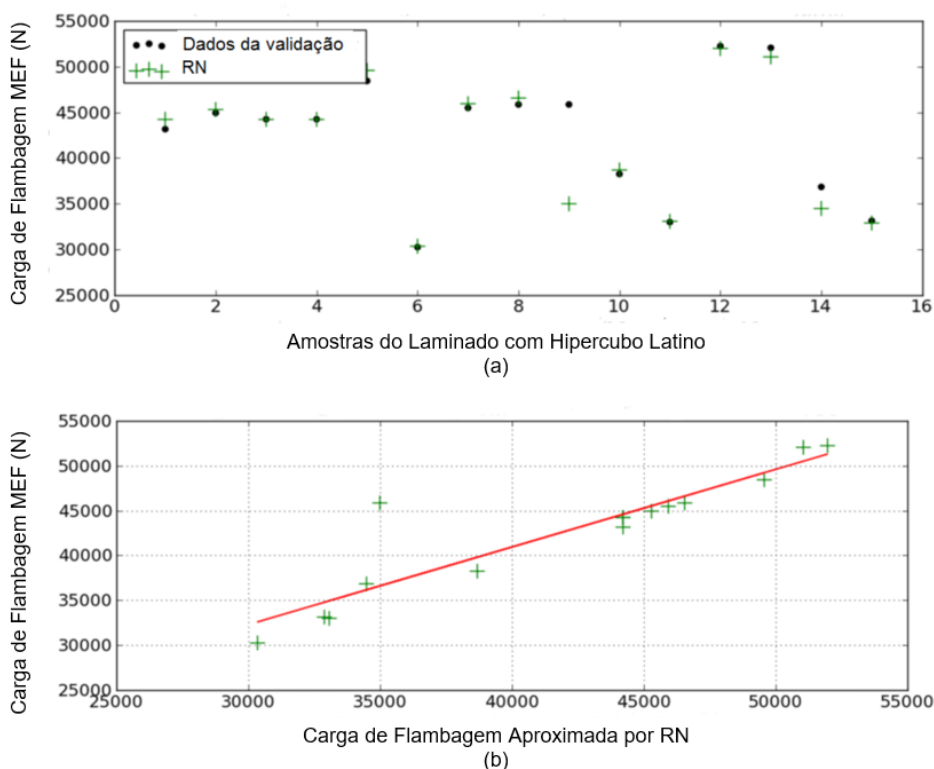
As RN foram treinadas utilizando a ferramenta do Matlab<sup>®</sup> Neural Network. Com o objetivo de comparar os resultados da RN com os resultados da RVS, os dados de entrada foram os mesmos para os dois metamodelos. A RN em teste consiste de uma rede com uma camada com 10 neurônios. Os resultados são apresentados na Figura 5.10, a qual mostra uma comparação entre as saídas da rede neural e as saídas desejadas. Observa-se na Figura 5.10(b) que a RN aparentemente está bem treinada, principalmente porque seu fator de correlação apresenta um valor igual a 1 e o ajuste linear é perfeito.





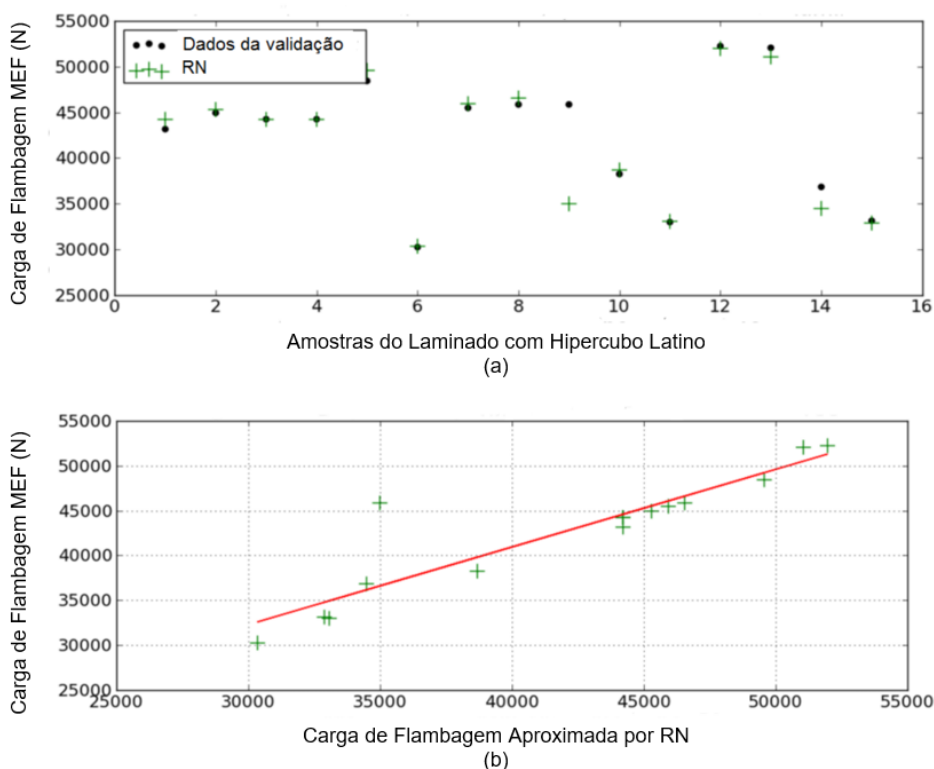
**Figura 5.10 - Resultados do treinamento da RN com 35 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem (MEF) para laminado de 24 lâminas.**

Para o teste de validação do metamodelo RN também foi considerado 15 novas amostras, as mesmas usadas na validação da RVS. As respostas obtidas com a RN e com elementos finitos são apresentadas na Figura 5.11, onde é possível observar que a rede neural não foi capaz de prever todas as saídas corretamente. Isso pode ser confirmado ao se observar o diagrama de dispersão (Figura 5.11(b)) e o valor do fator de correlação de  $R^2 = 0,800753$  obtidos nesse processo de validação.



**Figura 5.11 - Resultados da validação da RN com 15 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem (MEF) para laminado de 24 lâminas.**

Esse resultado insatisfatório pode ter sido causado pelo sobre-ajuste das amostras apresentadas à rede neural, significando que a mesma memorizou as amostras mas não houve o aprendizado do comportamento. O fator de correlação igual a 1 na fase de treinamento reforça essa hipótese. Outra possibilidade é que o número de amostras apresentadas à RN não foi suficiente para a realização do aprendizado durante o treinamento. Para verificar essa questão, mais amostras foram utilizadas para o treinamento. A RN foi treinada com um conjunto de 80 amostras e novamente 15 novas amostras foram utilizadas para o processo de validação. O resultado da validação é apresentado na Figura 5.12(a). O desempenho da RN melhorou com o aumento do número de amostras. Para o caso em questão, o fator de correlação atingiu o valor de  $R^2 = 0,951890$  (Figura 5.12(b)). Entretanto, para as mesmas condições, a RVS apresentou um desempenho melhor na representação desse problema.



**Figura 5.12 - Resultados da nova validação da RN com 15 amostras (a) e diagrama de dispersão (b) para carga de flambagem (MEF) para laminado de 24 lâminas.**

As redes neurais artificiais e a RVS foram treinadas e testadas com os mesmos pares de amostras. A RVS apresentou melhores resultados em comparação com a rede neural. A função de base radial aplicada na RVS, como função *kernel*, construiu uma regressão não-linear melhor do que na aproximação via RN. Nesse estudo, a função *kernel* supera as camadas ocultas na resposta não-linear. O fato de que a otimalidade da RVS está baseada na otimização convexa e a da RN na minimização dos erros com algoritmo de retropropagação, também pode explicar os resultados obtidos.

### 5.3 HS aplicado à maximização da carga de falha de placa compósita de 48 lâminas

Nesta seção, o algoritmo de busca por melhores harmonias (HS) é aplicado na maximização da carga de falha com o objetivo de obter o melhor empilhamento de uma placa laminada de 48 lâminas. O estudo realizado por Aymerich e Serra (2008), utilizando algoritmo de colônia de formigas, o *Ant Colony Optimization* (ACO), é adotado para comparação dos resultados. O problema de otimização consiste em

maximizar  $\lambda_c$ , que é o menor valor entre o fator de carga crítica de flambagem  $\lambda_{cb}$  e o fator de carga de falha segundo o critério da deformação máxima  $\lambda_{cf}$ , tendo como restrição um máximo de 4 lâminas contíguas com a mesma orientação. Além disso, o laminado é simétrico e balanceado. Matematicamente, o problema de otimização pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & \lambda_c = \min(\lambda_{cb}, \lambda_{cf}) \theta_k, \theta_k \in \{0_2, \pm 45, 90_2\}, \quad k = 1 \dots n \\ \text{Variáveis de projeto: } & \theta_k, \theta_k \in \{0_2, \pm 45, 90_2\}, \quad k = 1 \dots n \\ \text{Restrições: } & \text{empilhamento simétrico e balanceado;} \\ & \text{max. 4 lâminas contíguas com a mesma orientação} \end{aligned} \quad (52)$$

onde  $\theta_k$  representa a orientação de duas lâminas adjacentes com sinais opostos de orientação, para garantir o balanceamento e  $n$  é o número total de orientações independentes de lâminas. Como são 48 lâminas e o laminado é simétrico e balanceado,  $n = 12$ . As propriedades dos materiais e as deformações admissíveis  $\varepsilon_1^u, \varepsilon_2^u, \gamma_{12}^u$  são descritas na Tabela 5.6. A geometria e os carregamentos impostos à placa são representados na Figura 5.1 e na Tabela 5.7, onde SSSS significa simplesmente suportado em todas as arestas. Note que três casos de carregamento foram analisados (caso1, caso2 e caso 3), conforme especificado na Tabela 5.7.

O cálculo estrutural para a obtenção de  $\lambda_c$  é linear.  $\lambda_{cf}$  é obtido de uma análise estática e  $\lambda_{cb}$  de uma análise de autovalores e autovetores.

**Tabela 5.6 - Propriedades do material.**

Propriedades elásticas				Deformações admissíveis		
$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\varepsilon_1^u$	$\varepsilon_2^u$	$\gamma_{12}^u$
127,59	13,03	6,41	0,3	0,008	0,029	0,015

**Tabela 5.7 - Geometria e carregamentos.**

Geometria da lâmina/laminado				Carregamentos					
Quantidade de lâminas	Espessura da lâmina (mm)	Comprimento (mm)	Largura (mm)	Caso 1 (N/m)		Caso 2 (N/m)		Caso 3 (N/m)	
$nl$	$t$	$a$	$b$	$N_x$	$N_y$	$N_x$	$N_y$	$N_x$	$N_y$
48	0,127	508	127	175	$N_x/8$	175	$N_x/4$	175	$N_x/2$

Para os parâmetros HMS, HMCR, PAR e bw, do algoritmo *harmony search*, diversos valores foram testados antes de selecioná-los. 100 execuções do HS foram realizadas para o caso 1 da Tabela 5.7 variando-se os valores dos parâmetros dentro dos intervalos HMS = 25 - 50, HMCR = 0,9 - 0,99, PAR = 0,5 - 0,9 e bw = 0,1 - 0,5. Os melhores valores obtidos com os menores números de iterações e tempo computacional foram selecionados, sendo eles dados por HMS = 25, HMCR = 0,99, PAR = 0,8 e bw = 0,1. Esses valores de parâmetros foram utilizados no algoritmo HS para as otimizações restantes. A Tabela 5.8 apresenta os resultados obtidos pelo HS na maximização  $\lambda_c$ , bem como os resultados de Aymerich e Serra (2008) via ACO.

**Tabela 5.8 - Comparação dos resultados com HS e ACO na maximização de carga de falha.**

HS (presente trabalho)			
Caso	Empilhamento ótimo	$\lambda_{cb}$	$\lambda_{cf}$
1	$[\pm 45_8 90_2 \pm 45_0 4]_S$	16060,41	13723,23
	$[\pm 45_9 0_4 90_2]_S$	15997,63	13689,31
2	$[\pm 45_4 90_2 \pm 45_9 0_4 (\pm 45_9 0_2)_2]_S$	13392,95	12615,93
	$[\pm 45_5 90_4 \pm 45_9 0_4 \pm 45_2]_S$	13444,18	12453,18
3	$[90_2 \pm 45_9 0_2 \pm 45_3 90_2 \pm 45_4 0_2]_S$	9993,80	10289,82
	$[90_2 \pm 45_9 0_2 \pm 45_4 90_2 \pm 45_9 0_2 \pm 45_0 2]_S$	10000,23	10058,58
ACO (AYMERICH e SERRA, 2008)			
Caso	Empilhamento ótimo	$\lambda_{cb}$	$\lambda_{cf}$
1	$[\pm 45_5 0_4 \pm 45_0 4 90_2 0_2]_S$	14659,58	13518,66
	$[\pm 45_5 0_4 90_2 0_4 \pm 45_0 2]_S$	14610,85	13518,66
2	$[\pm 45_2 90_2 \pm 45_3 0_2 \pm 45_0 4 \pm 45_0 2]_S$	12743,45	12678,78
	$[\pm 45_9 0_2 \pm 45_4 (0_2 \pm 45_0 2)_2]_S$	12725,26	12678,78
3	$[90_2 \pm 45_2 (90_2 \pm 45_2) \pm 45_5]_S$	9998,20	10398,14
	$[90_2 \pm 45_2 (90_2 \pm 45_2) \pm 45_4 90_2]_S$	9997,61	10187,94

Nota-se que as sequências ótimas de empilhamento não são as mesmas obtidas pelo HS e pelo ACO, mas os valores de  $\lambda_{cb}$  e  $\lambda_{cf}$  são muito próximos. Aymerich e Serra (2008) não apresentam o número de avaliações da função objetivo. No presente estudo foram realizadas 10000 avaliações da função objetivo para a obtenção da solução ótima, sendo as últimas 500 análises sem modificação no melhor valor.

#### 5.4 Otimização em pós-flambagem com HS para placa retangular de 16 lâminas

O teste numérico apresentado nesta subseção, que envolve análise não-linear em pós-flambagem, foi realizado para uma placa com as condições de contorno simplesmente suportadas em todas as arestas (SSSS) e carregamento uniaxial. A otimização foi realizada com algoritmo HS e os resultados comparados com aqueles obtidos por Wu et al. (2013b), que utilizaram algoritmos genéticos (AG).

Os resultados da formulação analítica do comportamento em pós-flambagem da placa são baseados no artigo de Mittelstedt e Schröder (2010), cujo desenvolvimento é apresentado no Apêndice A. O problema de otimização consiste em minimizar a deflexão máxima adimensional  $w_{max}/h$ , onde  $h$  é a espessura do laminado, sujeito ao critério de falha de Tsai-Wu. A restrição é levada em conta utilizando o método da penalidade (RAO, 1996). O problema de otimização, já com a função objetivo penalizada, é escrito como

$$\text{Minimizar } f_{obj}, \quad f_{obj} = \bar{w}(\theta_k) + \sum_k^n \alpha_k \max(0, g_k(\theta_k))^2 \quad (53)$$

Variáveis de projeto:  $\theta_k, \theta_k \in \{0, +45, -45, 90\}, k = 1 \dots n$

onde  $\bar{w}(\theta_k)$  corresponde à deflexão normalizada  $w_{max}/h$ ,  $\alpha_k$  é o parâmetro de penalidade para a restrição de falha da lâmina e  $n$  é o número de lâminas com orientações independentes. A restrição de falha  $g_k$  é definida em termos do critério de Tsai-Wu como

$$g_k(\theta_k) = \max(F_{TSAI\_WU}) - 1 \leq 0, \quad (54)$$

sendo

$$F_{TSAI\_WU} = F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{66}\sigma_{12}^2 \quad (55)$$

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, F_{12} = -\frac{1}{2\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}}, F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}, F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c}, F_{66} = \frac{1}{S^2}$$

onde  $X_t, X_c, Y_t, Y_c, S$  são as tensões de resistência da lâmina, sendo que o índice  $t$  refere-se à tração e  $c$  a compressão,  $S$  é a resistência ao cisalhamento e  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$  são as componentes de tensão normal nas direções principais do material e  $\sigma_{12}$  é a tensão

cisalhante. A placa laminada está representada na Figura 5.13, as propriedades do material são apresentadas na Tabela 5.9 e a geometria na Tabela 5.10. Neste exemplo não considerou-se que o laminado é simétrico, portanto o número de variáveis de projeto é igual a 8 ( $n = 8$ ).

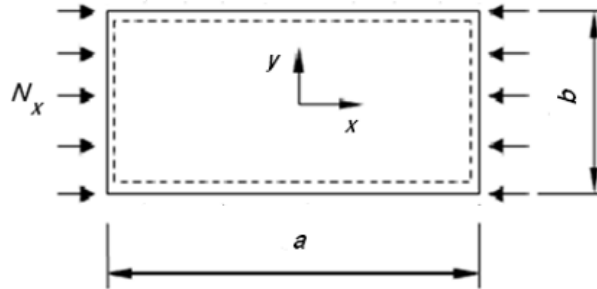


Figura 5.13 - Placa retangular com carga uniaxial e condições de contorno SSSS.

Tabela 5.9 - Propriedades mecânicas da lâmina de grafite-epóxi WU et al. (2013b).

Propriedades elásticas				Resistência				
$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$X_t$ (GPa)	$X_c$ (GPa)	$Y_t$ (GPa)	$Y_c$ (GPa)	$S$ (GPa)
163	6,8	3,4	0,28	2,41	1,523	0,0193	0,248	0,107

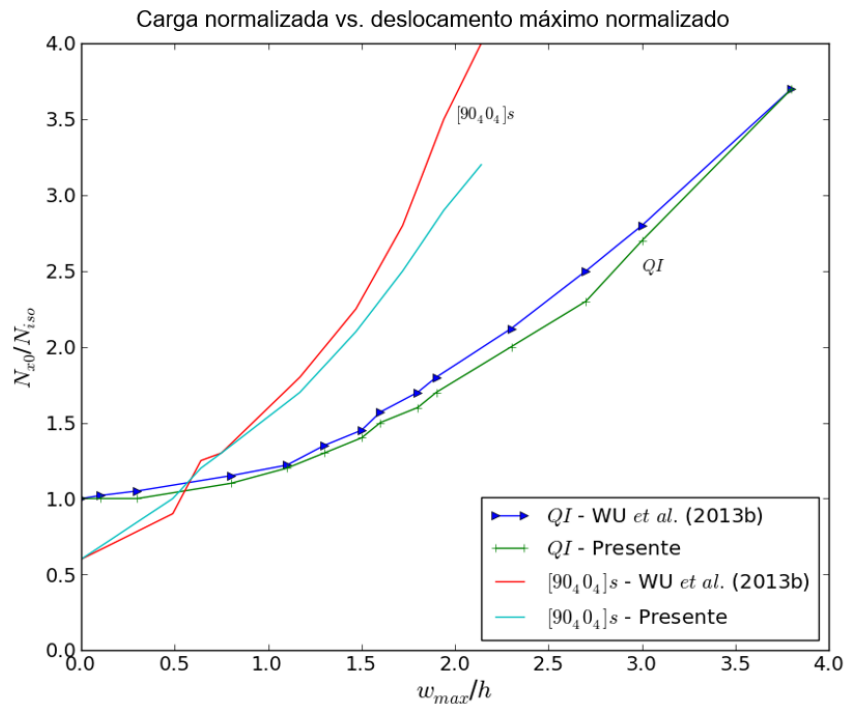
Tabela 5.10 - Propriedades geométricas da placa laminada.

Nr. lâminas	Espessura da lâmina	Comprimento	Largura
$nl$	$t$ (mm)	$a$ (mm)	$b$ (mm)
16	0,13	500	500

O parâmetro de penalidade  $\alpha_k$  foi estabelecido igual a 1 e o valor da carga axial  $N_{x0}$  máxima é considerado fixo em  $4N_{iso}$  (WU et al., 2013b).  $N_{iso}$  representa a carga de flambagem de uma lâmina quase-isotrópica e é calculada, à semelhança de um material isotrópico, utilizando as propriedades representadas na Eq. (56) para o módulo de elasticidade  $E_{iso}$ , coeficiente de Poisson  $\nu_{iso}$ , e rigidez a flexão  $D_{iso}$  para laminado quase-isotrópico.  $U_1$  e  $U_4$  são invariantes associados à rigidez do laminado e estão descritos no Apêndice C.

$$D_{iso} = \frac{E_{iso}h^3}{12(1 - \nu_{iso}^2)}, \quad \nu_{iso} = \frac{U_4}{U_1}, \quad E_{iso} = U_1(1 - \nu_{iso}^2) \quad (56)$$

As avaliações da carga axial normalizada  $N_{x0}/N_{iso}$  e o máximo deslocamento transversal normalizado  $w_{max}/h$  para o comportamento em pós-flambagem estão representados na Figura 5.14, onde  $QI$  denota laminado quase-isotrópico.



**Figura 5.14 - Carga versus deslocamento normalizados para placa retangular com condições de contorno SSSS.**

O algoritmo HS foi utilizado para a otimização em pós-flambagem. Testes para definir os valores dos parâmetros do HS foram realizados de modo semelhante aos da Seção 5.3. Os valores selecionados para os parâmetros foram HMS = 50, HMCR = 0,99, PAR = 0,8 e bw = 0,1, definidos após vários testes computacionais. A quantidade de harmonias na memória (HM) do algoritmo foi acrescida com dez amostras geradas por HL. Esses valores foram adicionados com o intuito de escapar de ótimos locais.

A Tabela 5.11 apresenta os resultados obtidos com o HS e com o AG de Wu et al. (2013b). Nota-se que, mesmo não impondo na formulação do problema a condição de simetria do laminado, o resultado ótimo encontrado pelo HS é um laminado simétrico.



**Tabela 5.11 - Comparação dos resultados AG versus HS (placa SSSS).**

AG (WU et al., 2013b)				HS (Presente trabalho)			
Carga ( $N_{x0}/N_{iso}$ )	Empilhamento ótimo	$w_{max}/h$	$n_e$	Carga( $N_{x0}/N_{iso}$ )	Empilhamento ótimo	$w_{max}/h$	$n_e$
4	$[90_4 0_4]_S$	2,12	-	4	$[90_4 0_8 90_4]$ $= [90_4 0_4]_S$	2,47	1000

A variável  $n_e$  corresponde ao número de avaliações da função objetivo. O critério de parada utilizado foi 50 análises sem modificação no melhor valor da função objetivo. No processo de otimização, os resultados foram obtidos até a relação  $N_{x0}/N_{iso} = 4$  para a obtenção do máximo deslocamento transversal. O valor da deflexão  $w_{max}/h$  é um pouco superior para o presente trabalho em comparação com os valores obtidos por Wu et al. (2013b). Essa diferença é mostrada na Figura 5.14 e é mais acentuada para a relação de carga normalizada entre  $N_{x0}/N_{iso} = 2$  e  $N_{x0}/N_{iso} = 4$ . Tal diferença pode ser explicada pelas teorias utilizadas na solução das equações analíticas de pós-flambagem não serem as mesmas. Conforme já mencionado, no presente trabalho foram implementadas as equações dadas em Mittelstedt e Schröder (2010), enquanto em Wu et al. (2013b) é utilizado o método de Rayleigh-Ritz em uma abordagem semi-analítica.

Os empilhamentos ótimos obtidos com o HS e o AG foram idênticos. Os resultados apresentados na otimização da pós-flambagem foram satisfatoriamente positivos em relação à sequência de empilhamento e ao valor correspondente da deflexão e carga. Assim, o algoritmo pode ser considerado como uma metaheurística alternativa na otimização de material compósito laminado em regime de pós-flambagem.

Um estudo semelhante para a placa compósita com as condições de contorno SSCC pode ser encontrado em Koide et al. (2014a).

## 5.5 RVS e HS aplicados à otimização de painel cilíndrico com furo central

Nesta seção, um painel compósito cilíndrico com furo foi analisado e validado através da modelagem em elementos finitos com o Abaqus®. Na sequência foi aplicado a RVS para aproximar a carga de pós-flambagem do painel e finalmente foi otimizado com o algoritmo HS.

**5.5.1 Painel cilíndrico com furo com 32 lâminas**

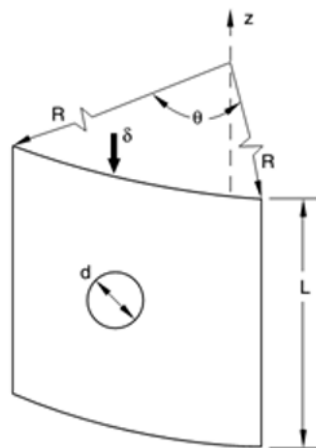
O painel cilíndrico estudado nesta subseção é apresentado em um problema no manual do Abaqus® (ABAQUS, 2014). As propriedades do material da lâmina constam na Tabela 5.12 e a geometria é descrita na Tabela 5.13 e na Figura 5.15.

**Tabela 5.12 - Propriedades elásticas das lâminas do painel cilíndrico com furo.**

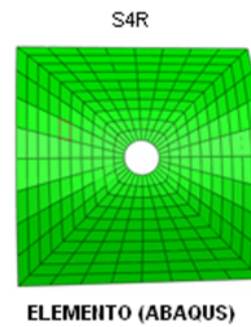
Propriedades do material – grafite-epoxi				
$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$\nu_{12}$
135,0	13,0	6,4	4,3	0,38

**Tabela 5.13 - Propriedades geométricas do painel cilíndrico com furo.**

Nr. lâminas	Espessura da lâmina	Comprimento	Arco	Raio	Diâmetro
$n_l$	$t$ (mm)	$L$ (mm)	$\theta$ (°)	$R$ (mm)	$d$ (mm)
16	0,142	355,6	55,6	381,0	50,80



(a)



(b)

Condições de contorno		
Aresta base	Arestas laterais	Aresta de aplicação da carga
Name: fixed Type: Symmetry/Antisymmetry/Encastre Step: Step-1 (Static, Riks) Region: fixed <a href="#">Edit Region...</a>	Name: symm Type: Displacement/Rotation Step: Step-1 (Static, Riks) Region: symm <a href="#">Edit Region...</a>	Name: push Type: Displacement/Rotation Step: Step-1 (Static, Riks) Region: push <a href="#">Edit Region...</a>
<input type="radio"/> XSYMM (U1 = UR2 = UR3 = 0) <input type="radio"/> YSYMM (U2 = UR1 = UR3 = 0) <input type="radio"/> ZSYMM (U3 = UR1 = UR2 = 0) <input type="radio"/> XASYMM (U2 = U3 = UR1 = 0; Abaqus/Standard onl) <input type="radio"/> YASYMM (U1 = U3 = UR2 = 0; Abaqus/Standard onl) <input type="radio"/> ZASYMM (U1 = U2 = UR3 = 0; Abaqus/Standard onl) <input type="radio"/> PINNED (U1 = U2 = U3 = 0) <input checked="" type="radio"/> ENCASTRE (U1 = U2 = U3 = UR1 = UR2 = UR3 = 0)	CSYS: (Global) <a href="#">Edit...</a> <a href="#">Create...</a> Distribution: Uniform <a href="#">Create..</a> <input checked="" type="checkbox"/> U1: 0 <input checked="" type="checkbox"/> U2: 0 <input type="checkbox"/> U3: <input type="text"/> <input type="checkbox"/> UR1: <input type="text"/> radians <input type="checkbox"/> UR2: <input type="text"/> radians <input type="checkbox"/> UR3: <input type="text"/> radians	CSYS: (Global) <a href="#">Edit...</a> <a href="#">Create...</a> Distribution: Uniform <a href="#">Create..</a> <input checked="" type="checkbox"/> U1: 0 <input checked="" type="checkbox"/> U2: 0 <input type="checkbox"/> U3: <input type="text"/> <input checked="" type="checkbox"/> UR1: 0 radians <input checked="" type="checkbox"/> UR2: 0 radians <input checked="" type="checkbox"/> UR3: 0 radians

(c)

**Figura 5.15 - Características geométricas (a), malha (b) e condições de contorno (c) do painel cilíndrico com furo central.**

Uma análise de flambagem linear (com carregamento na direção  $z$ ) foi realizada previamente para a determinação dos respectivos modos, necessários para inclusão da imperfeição inicial. O empilhamento, a carga aplicada e as imperfeições são informadas na Tabela 5.14.

**Tabela 5.14 - Empilhamento, carga e amplitudes das imperfeições do painel cilíndrico com furo.**

Empilhamento	Carga aplicada (N)	Modo de flambagem	Imperfeições (mm)
[±45 90 0 0 90 ± 45] <sub>s</sub>	4450	1	0,0254
		2	0,0127
		3	0,00635
		4	0,00635

Para a solução do sistema de equações não-lineares da pós-flambagem foi utilizado o método de Riks (RIKS, 1979; RIKS, 1984; ABAQUS, 2014). Esse método, também denominado de método do comprimento do arco, determina a carga e o deslocamento simultaneamente usando como parâmetro um incremento de carga.

O máximo deslocamento permitido é de 2,032 mm e foi aplicada uma carga de 44500 N, a qual é dividida em incrementos. As informações inseridas no Abaqus® são mostradas na Figura 5.16.

Método de Riks	Carga de pós-flambagem
Name: Step-1 Type: Static, Riks Basic   Incrementation   Other Description: <input type="text"/> Nlgeom: On <input type="button" value="Edit..."/> <input type="checkbox"/> Include adiabatic heating effects Stopping criteria <input type="checkbox"/> Maximum load proportionality factor: <input type="text"/> <input checked="" type="checkbox"/> Maximum displacement: -2.032 DOF: 3 Node Region: point-load	Name: Load-1 Type: Concentrated force Step: Step-1 (Static, Riks) Region: point-load <input type="button" value="Edit Region..."/> CSYS: (Global) <input type="button" value="Edit..."/> <input type="button" value="Create..."/> Distribution: Uniform <input type="button" value="Create..."/> CF1: 0 CF2: 0 CF3: -44500 <input type="checkbox"/> Follow nodal rotation <b>Note:</b> Force will be applied per node.

**Figura 5.16 - Método de Riks e carga aplicada em pós-flambagem.**

A resposta da carga de pós-flambagem em função do deslocamento transversal máximo é mostrada no gráfico da Figura 5.17

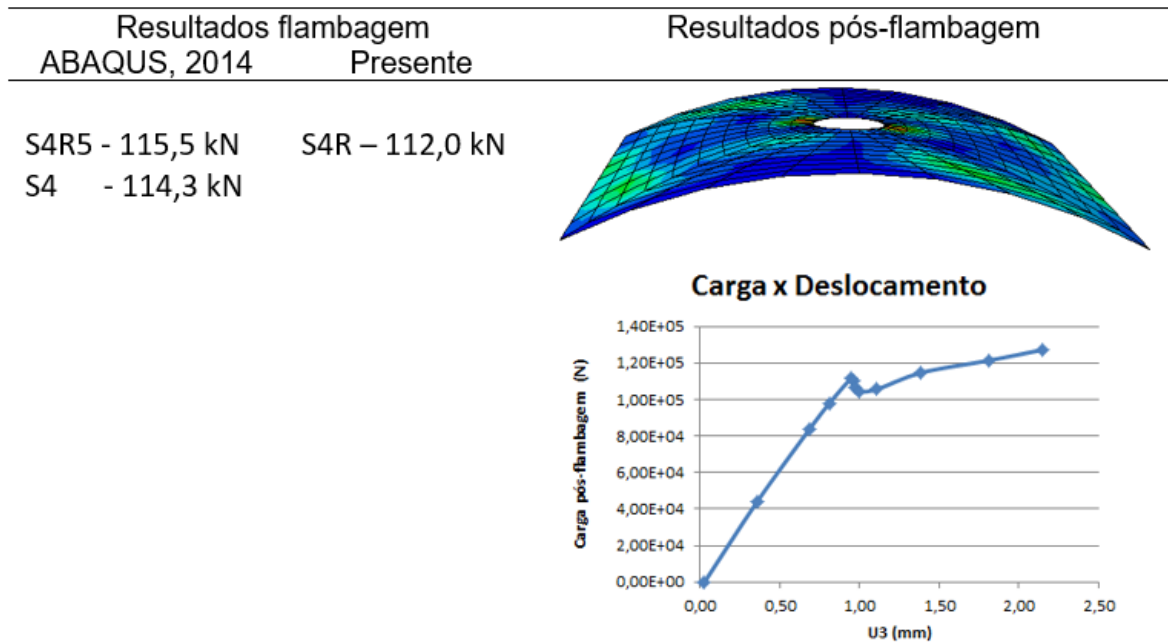


Figura 5.17 - Resultados da pós-flambagem para o painel cilíndrico com furo.

### 5.5.2 RVS e HS aplicados ao painel cilíndrico com furo com 64 lâminas

O painel cilíndrico com furo modelado na Seção 5.5.1 foi otimizado usando o algoritmo *harmony search*. Entretanto agora, utilizou-se 64 lâminas ao invés das 16 lâminas do problema da seção anterior, aumentado assim a complexidade na busca de soluções. Uma rotina em Python foi criada para a pré-flambagem, a flambagem e a pós-flambagem a partir do Abaqus® e associado com os procedimentos do algoritmo HS para a otimização da carga de pós-flambagem do painel cilíndrico com furo. O algoritmo foi configurado com os seguintes parâmetros do HS: HMS = 20; bw = 0,1; HMCR = 0,99 e PAR = 0,5. O problema de otimização é escrito como

Maximizar:  $\lambda_{pf}$  (carga de pós-flambagem)

Variáveis de projeto:  $\theta_k$ ,  $\theta_k \in \{0_2, \pm 45, 90_2\}$ ,  $k = 1, \dots, nl$

Restrições: laminado simétrico e balanceado;

max 4 lâminas contíguas com a mesma direção;

max deslocamento  $u_3 = 2,032$  mm

(57)

A Tabela 5.15 apresenta os resultados da otimização com o algoritmo HS (sem RVS) e com o HS combinado com RVS. O critério de parada utilizado foi 1000 análises sem modificação do melhor valor da função objetivo. Para o caso da otimização com RVS, o número de avaliações  $n_e$  inclui treinamento, validação e verificação da melhor solução a cada ciclo do algoritmo de otimização. Pode-se observar uma redução no número total de avaliações com a RVS associada ao HS em relação à otimização sem RVS.

**Tabela 5.15 - Resultado da otimização com RVS e HS do painel cilíndrico com furo.**

	$\lambda_{pf}$ (kN)	u3 (mm)	Empilhamento	$n_e$
Só HS	956,57	1,65	$[\pm 45_3 90_2 \pm 45 0_2 \pm 45 0_2 90_4 0_2 90_4 0_2 90_2 0_2]_S$	12000
RVS e HS	956,57	1,65	$[\pm 45_3 90_2 \pm 45 0_2 \pm 45 0_2 90_4 0_2 90_4 0_2 90_2 0_2]_S$	5000

## 5.6 RVS e AVD em otimização de painéis com reforços

### 5.6.1 RVS e AVD aplicada à painel reto com 2 reforços com critérios de Tsai-Wu e

#### Hashin

Nesta subseção um painel reto com reforços foi otimizado usando o algoritmo de vaga-lumes discreto. Devido ao comportamento não-linear da pós-flambagem e geometria relativamente complexa, um modelo em elementos finitos, elaborado no programa comercial Abaqus<sup>®</sup>, foi utilizado para obtenção da resposta estrutural do painel. Um fluxograma detalhado do processo de otimização integrado ao Abaqus<sup>®</sup> é apresentado na Figura 4.3. Dois critérios de falha da primeira lâmina<sup>‡</sup>, de Tsai-Wu e de Hashin, foram adotados, de forma independente, como restrição. O empilhamento é simétrico e balanceado, além de limitar em quatro o número de lâminas contíguas com a mesma orientação.

<sup>‡</sup> Em um “critério de falha da primeira lâmina” considera-se que, se uma lâmina falha, isso representa também a falha do laminado.

O problema de otimização pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar: } \lambda_{pf} \text{ (carga de pós-flambagem)} \\
 & \text{Variáveis de projeto: } \theta_k, \theta_k \in \{0_2, \pm 45, 90_2\}, k = 1, \dots, nl \text{ (Painel)} \\
 & \text{Restrições: laminado simétrico e balanceado;} \\
 & \quad \text{max 4 lâminas contíguas com a mesma direção;} \\
 & \quad \text{a) critério de Tsai-Wu} \\
 & \quad \quad \text{ou} \\
 & \quad \text{b) critério de Hashin}
 \end{aligned} \tag{58}$$

onde  $\theta_k$  representa as orientações de duas lâminas adjacentes, uma positiva e a outra negativa, definindo assim lâminas balanceadas,  $k$  é o índice da sequência do empilhamento,  $nl$  representa o número de orientações independentes, que corresponde à um quarto do número total de lâminas, e  $\lambda_{pf}$  designa fator de carga de pós-flambagem. A sequência de empilhamento da haste (*blade*) e da base (*flange*) do reforço (*stiffener*) permanecem a mesma como mostrada na Figura 5.18.

Para este caso o estudo de Liu et al. (2005) foi usado para comparação de resultados. O painel reforçado é fabricado com lâminas de carbono-epóxi de 0,25 mm de espessura cujas propriedades são apresentadas na Tabela 5.16.

**Tabela 5.16 - Propriedades da lâmina de carbono-epóxi.**

Propriedades elásticas				Densidade
$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
117,0	17,0	4,6	0,3	1584

A sequência de empilhamento do reforço foi adicionada com duas lâminas (+45 e -45) na superfície da haste inferior para a colagem da cunha no interior da base do reforço, como especificam Liu et al. (2005).

O modelo de elementos finitos do painel reforçado foi construído no Abaqus®. Elementos S4R com 6 graus de liberdade em cada nó e 3 pontos de integração foram utilizados. O painel e os reforços foram considerados como componentes separados para modelar o *offset* entre a base do reforço e o painel e entre a haste do reforço e o painel.

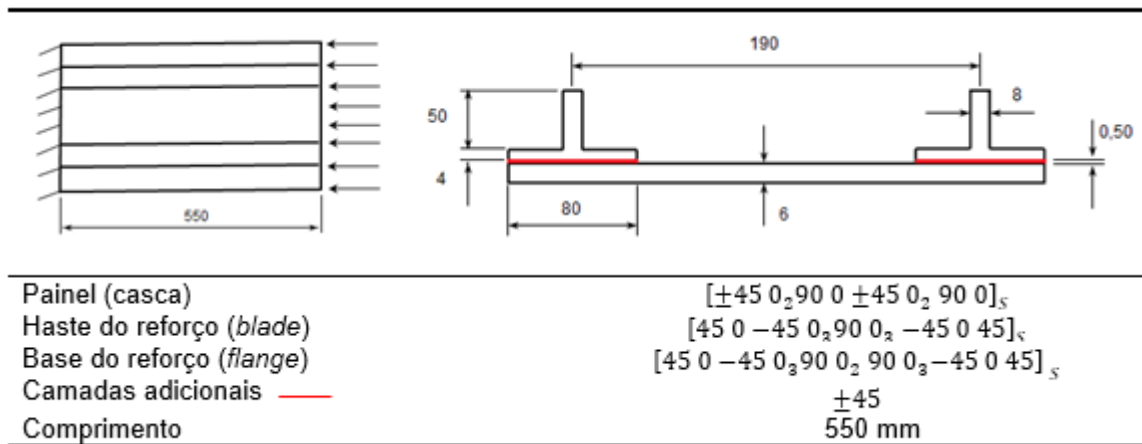


Figura 5.18 - Painel reto com dois reforços do tipo T (dimensões em mm).

Para unir as superfícies do painel e do reforço foi adotado a técnica do Abaqus® denominada TIE, que une superfície com superfície. As condições de contorno são livre na direção longitudinal que está sujeita a carga compressiva e fixa na direção transversal.

A análise consiste inicialmente em obter a carga de flambagem linear, calculando os autovalores e os correspondentes modos de flambagem. Os modos são necessários pois os mesmos são utilizados na modelagem não-linear. Mais especificamente inserindo uma imperfeição geométrica ou perturbação cuja forma é baseada nos modos de flambagem linear.

A inclusão da não-linearidade geométrica na análise foi realizada com a opção NLGEOM do Abaqus®. Conforme já mencionado, considerou-se também uma imperfeição inicial no painel, baseada no formato dos primeiros modos de flambagem da estrutura. As seguintes amplitudes das imperfeições foram utilizadas: 0,06, 0,006 e 0,0006 mm, onde o primeiro valor da imperfeição significa 1% da espessura do painel, o segundo 0,1% e o terceiro 0,01%. Essas foram inseridas no primeiro, segundo e terceiro modos de flambagem do modelo. Esses valores foram determinados através da análise de sensibilidade das amplitudes das imperfeições de forma a comparar e validar o modelo conforme os resultados apresentados por Liu et al. (2005).

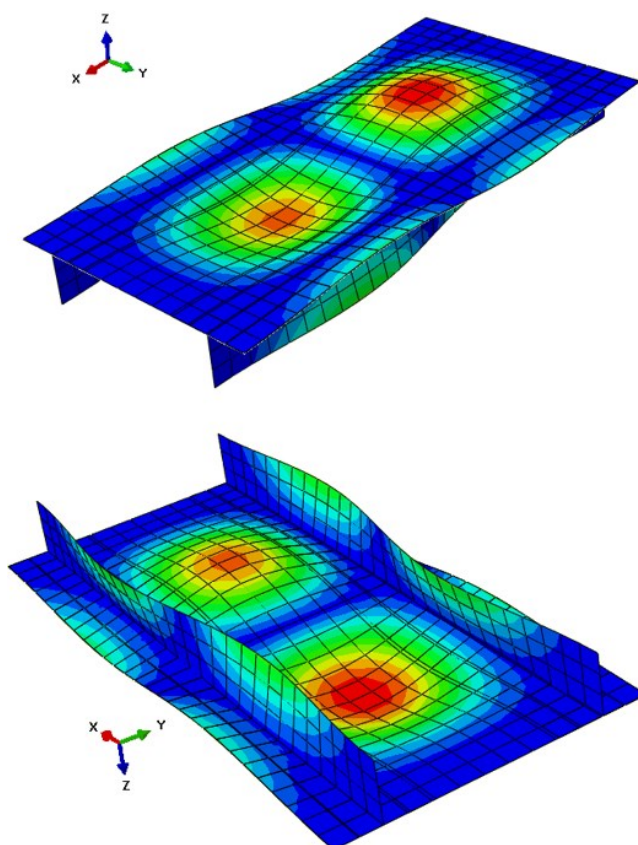
Os resultados da carga de flambagem do painel reforçado obtidos com a modelagem no Abaqus® foram comparados e validados com o trabalho de Liu et al. (2005). A Tabela 5.17 apresenta essa comparação.

**Tabela 5.17 - Resultados para painel reto com 2 reforços.**

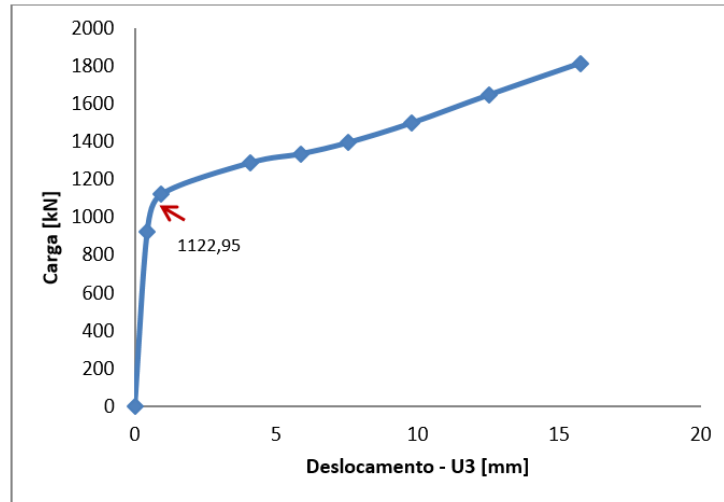
	Carga de Flambagem (kN)	
	Linear	Não-linear
Liu et al. (2005)	1205,00	1150,00
Presente	1203,30	1122,95

É possível notar na Tabela 5.17 que os valores das cargas de flambagem linear e não-linear correspondem com aqueles apresentados por Liu et al. (2005).

A Figura 5.19 apresenta o primeiro modo de flambagem obtido de uma análise de flambagem linear, e a Figura 5.20 mostra a curva carga-deslocamento da estrutura no regime de pós-flambagem para o painel com 2 reforços.

**Figura 5.19 - Primeiro modo de flambagem do painel reto com dois reforços.**





**Figura 5.20 - Curva carga vs. deslocamento transversal para o painel reto com 2 reforços.**

Conforme o problema de otimização descrito na Eq. (58), o painel foi otimizado considerando primeiro o critério de falha de Tsai-Wu e posteriormente o critério de Hashin. Nessas etapas, a geometria do painel é a mesma apresentada na Figura 5.18. Entretanto, as propriedades mecânicas, incluindo as tensões de falha são as do material carbono-epóxi IM7/8552, obtidas de Araico et al. (2005), que são apresentadas na Tabela 5.18. Isso foi feito pois Liu et al. (2005) não apresentam propriedades de falha da lâmina.

**Tabela 5.18 - Propriedades mecânicas da lâmina unidirecional de carbono-epóxi IM7/8552.**

Propriedade	Valor	Propriedade	Valor
$E_{11}$	145 GPa	$X_T$	2414 MPa
$E_{22}$	8,9 GPa	$X_C$	1365 MPa
$\nu_{12}$	0,33	$Y_T$	51 MPa
$G_{12}$	5,6 GPa	$Y_C$	269 MPa
$G_{13}$	5,6 GPa	$S_{12}$	120 MPa
$G_{23}$	4,48 GPa		

Aplicando o procedimento apresentado na Figura 4.3, a otimização do painel foi executada. Em uma análise de flambagem linear encontrou-se o valor de 1885,20 kN para a carga crítica. A partir dessa análise também foi obtido os respectivos modos de flambagem para impor a imperfeição no painel reforçado. Embora o painel reforçado seja composto pelo painel e pelos reforços, somente o empilhamento do painel

foi otimizado. A carga de pós-flambagem, o deslocamento e a sequência de empilhamento do laminado ótimo considerando as restrições de falha de Tsai-Wu e Hashin são apresentados na Tabela 5.19, onde  $n_e$  representa o número de avaliações da função objetivo. Para esse problema, que apresenta poucas variáveis (6) o critério de parada foi 10 análises sem modificação no melhor valor da função objetivo.

**Tabela 5.19 - Resultados RVS e AVD para o painel reto com 2 reforços**

	$\lambda_{pf}$ (kN)	u3 (mm)	Empilhamento	$n_e$
Só AVD (Tsai-Wu)	1941,58	6,75	$[90_4 0_4 90_2 \pm 45]_S$	150
RVS e AVD (Tsai-Wu)	1944,17	5,84	$[\pm 45_3 0_4 \pm 45]_S$	50
Só AVD (Hashin)	2113,99	6,89	$[\pm 45_2 90_2 0_2 \pm 45_2]_S$	180
RVS e AVD (Hashin)	2181,24	7,40	$[\pm 45_2 90_4 0_2 \pm 45]_S$	60

A carga de pós-flambagem obtida tem valor maior que a carga de flambagem e menor que a carga de falha completa do laminado. Obtem-se um aumento de capacidade de carga de aproximadamente 3,13% em regime de pós-flambagem sujeito ao critério de Tsai-Wu e aproximadamente 15,70% considerando o critério de falha de Hashin, em relação à carga de flambagem. Observa-se, também, uma redução no número de avaliações da função objetivo quando se aplica a RVS associada com o algoritmo AVD.

### 5.6.2 RVS aplicada ao painel curvo com 5 reforços sujeito ao critério de Hashin

Nesta subseção, o algoritmo de vaga-lumes é aplicado na otimização em pós-flambagem das orientações das lâminas de um painel curvo com cinco reforços (*stringers*) sob carga axial compressiva. O painel modelado no Abaqus® com elemento de casca está representado na Figura 5.21. O critério de falha de Hashin foi considerado como restrição no problema de otimização. O trabalho de Araico et al. (2010) foi utilizado para validação e obtenção das características do painel.

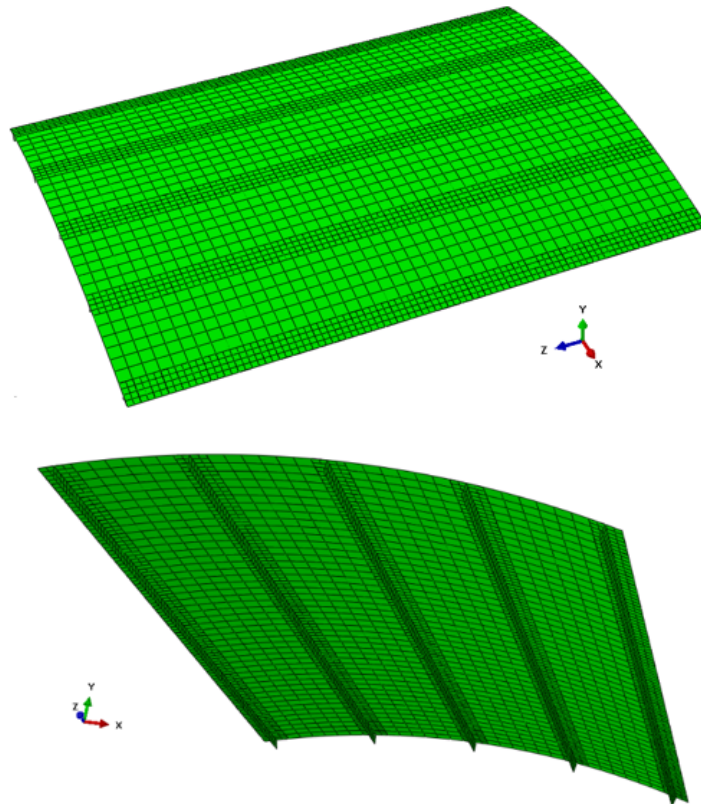


Figura 5.21 - Malha de elementos finitos do painel curvo com 5 reforços.

Para esse caso, tanto o empilhamento das lâminas do painel (*skin*) como dos reforços são otimizados. Os dados geométricos e as propriedades do material são apresentados nas Tabela 5.18 e Tabela 5.20.

Tabela 5.20 - Características do painel curvo com 5 reforços (*stringers*) (ARAICO et al., 2010).

Características do laminado	Dimensões ou outros dados
Comprimento do painel ( <i>skin</i> )	780 mm
Largura do painel (comprimento do arco)	560 mm
Raio de curvatura do painel	1000 mm
Número de reforços ( <i>stringers</i> )	5
Distância entre os reforços (centro a centro)	132 mm
Número de lâminas do painel/empilhamento	8 lâminas/[90 ± 45 0] <sub>S</sub>
Número de lâminas do reforço/empilhamento	24 lâminas/[±45] <sub>3</sub> 0 <sub>6</sub> ] <sub>S</sub>
Material	Carbono/epóxi - IM7/8552
Espessura da lâmina	0,125 mm
Altura do reforço	14 mm
Largura da base do reforço	32 mm
União painel-reforço	União por cola (adesivo)
Adesivo	FM 300
Espessura do adesivo	0,26 mm

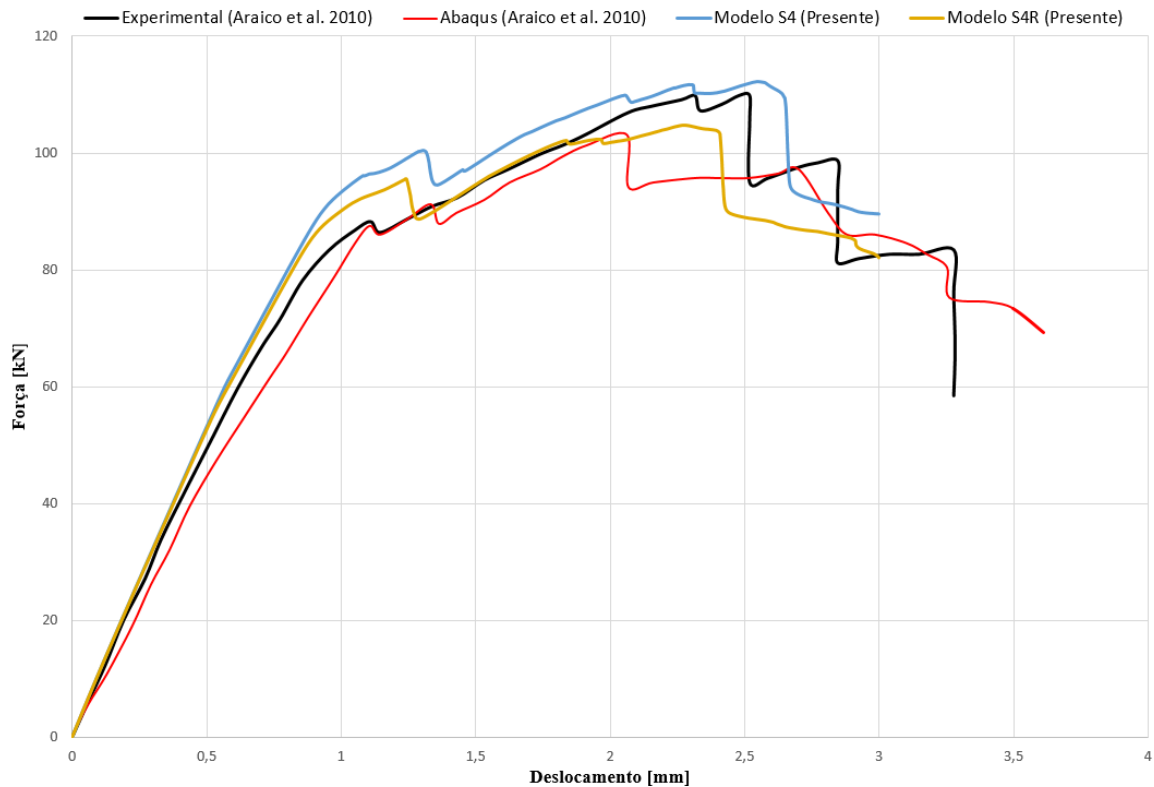
O problema de otimização pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar: } \lambda_{pf} \text{ (carga de pós-flambagem)} \\
 & \text{Variáveis de projeto: } \theta_k, \quad \theta_k \in \{0, \pm 45, 90\}, k = 1, \dots, n_p \text{ (Painel)} \\
 & \quad \quad \quad \theta_l, \quad \theta_l \in \{0, \pm 45, 90\}, l = 1, \dots, n_l \text{ (Reforços)} \\
 & \text{Restrições: Painel: laminado simétrico} \\
 & \quad \quad \text{Reforços: laminado simétrico e balanceado;} \\
 & \quad \quad \text{max 4 lâminas contíguas com a mesma orientação;} \\
 & \quad \quad \text{critério de falha de Hashin.}
 \end{aligned} \tag{59}$$

O modelo de elementos finitos foi testado com os elementos de casca de quatro nós S4 e S4R, tanto para a casca do painel quanto para os reforços. O elemento S4R, com integração reduzida, foi selecionado para o processo de otimização pois demanda menor tempo de processamento e não houve diferença significativa nos resultados. Para unir as superfícies do painel com as superfícies dos reforços foi utilizado o método *surface-to-surface contact* do Abaqus®, onde a superfície *master* é o painel e a superfície *slave* é a flange dos reforços (ABAQUS, 2014).

De modo a simular numericamente o painel em uma condição similar à um ensaio experimental, os extremos foram considerados rigidamente restringidos e fixos como descrito em Araico et al. (2010). Essa técnica possibilita uma resposta global mais precisa da simulação. Outro ponto diz respeito ao carregamento, sendo aplicado deslocamento prescrito axial, evitando assim mudanças bruscas de rigidez e deixando a análise não-linear mais estável. Foi aplicado um deslocamento compressivo máximo de 3 mm nas extremidades do painel (tanto na casca como nos reforços).

O modelo de elementos finitos foi validado comparando com os resultados obtidos por Araico et al. (2010), conforme pode ser visualizado nas curvas carga-deslocamento da Figura 5.22. Nota-se uma pequena diferença nas curvas do presente trabalho e do trabalho de referência. Uma causa dessa diferença pode ser devido ao tipo de contato de superfície e do tipo de elemento da interface, pois em Araico et al. (2010) foi adotado o TIE e o elemento coesivo COH3D8 do Abaqus®, enquanto no presente trabalho apenas o TIE foi utilizado. O elemento coesivo é utilizado quando deseja-se também analisar a delaminação, o que não é o caso do presente trabalho. Os resultados apresentados são próximos daqueles da referência e o comportamento da região não-linear apresenta a mesma tendência. Assim, esse modelo, com elementos S4R, foi considerado para o processo de otimização.



**Figura 5.22 - Curva carga versus máximo deslocamento transversal para o painel curvo com 5 reforços (empilhamentos conforme a Tabela 5.20).**

Aplicando o algoritmo de vaga-lumes e utilizando o modelo validado do painel curvo, a carga de pós-flambagem foi otimizada. Os resultados obtidos considerando o critério de Hashin estão apresentados na Tabela 5.21.

**Tabela 5.21 - Resultados RVS, AVD e critério de Hashin para o painel curvo com 5 reforços.**

Otimização do painel curvo com 5 reforços aplicando o algoritmo de vaga-lume - Hashin					
	$\lambda_{pf}$ (kN)	$u_3$ (mm)	Sequência de empilhamento		$n_e$
			Painel	Reforços	
Só AVD	139,77	2,28	$[\pm 45 \ 90 \ 0]_S$	$[0_4 \pm 45 \ 0_2 \ \pm 45 \ 0_2]_S$	750
RVS e AVD	143,92	2,57	$[0 \ \pm 45 \ 90]_S$	$[0_2 \ \pm 45 \ 0_4 \ \pm 45 \ 0_2]_S$	200

O critério de parada utilizado foi 50 análises sem modificações no melhor valor da função objetivo. Os resultados demonstram que a otimização com AVD e RVS são melhores se comparados com a otimização somente com AVD. Houve uma melhora na carga de pós-flambagem e uma redução no número de avaliações da função objetivo.

### 5.6.3 AVD aplicado a painel curvo com 5 reforços e critério de dano

Nesta subseção, o mesmo painel estudado na subseção anterior é novamente otimizado com AVD, mas é incluído um critério de dano juntamente com o critério de falha de Hashin.

Para a consideração do dano, utilizou-se a sub-rotina em Fortran USDFLD do Abaqus®, apresentada no Anexo A. O principal propósito da sub-rotina é aplicar uma degradação (redução em até 10%) nas propriedades elásticas de uma lâmina que falha. Essa alteração depende do tipo de falha da lâmina, que conseqüentemente muda a rigidez do laminado. A falha da lâmina é avaliada com o critério de Hashin e, na ocorrência da falha, utiliza-se o método de Chang e Lessard (*apud* Araico et al., 2010) para a redução das propriedades do material, conforme mostrado na Tabela 5.22. Com a degradação das propriedades elásticas da lâmina a rigidez global da estrutura é reavaliada e, para o passo de carga correspondente, a falha das demais lâminas são reavaliadas e, caso nenhuma outra falhar, passa-se ao passo de carga seguinte e assim sucessivamente. A falha completa do laminado se dá quando ocorrer a falha de todas as lâminas

O problema de otimização pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar: } \lambda_{pf} \text{ (carga de pós-flambagem) com análise de dano} \\
 & \text{Variáveis de projeto: } \theta_k, \quad \theta_k \in \{0, \pm 45, 90\}, k = 1, \dots, n_p \text{ (Painel)} \\
 & \quad \quad \quad \theta_l, \quad \theta_l \in \{0, \pm 45, 90\}, l = 1, \dots, n_r \text{ (Reforços)} \\
 & \text{Restrições: Painel: laminado simétrico;} \\
 & \quad \quad \text{Reforços: laminado simétrico e balanceado;} \\
 & \quad \quad \text{max 4 lâminas contíguas com a mesma orientação;} \\
 & \quad \quad \text{critério de Hashin e método de Chang-Lessard.}
 \end{aligned} \tag{60}$$

**Tabela 5.22 - Critério de falha de Hashin e o método de Chang-Lessard de redução das propriedades.**

Tipo de falha no plano	Critério de Hashin	Redução das propriedades (Chang-Lessard)
Falha na matriz (tração)	$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 \geq 1$	$E_{22}, \nu_{12}$
Falha na matriz (compressão)	$\left(\frac{\sigma_{22}}{2S_T}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y_C}{2S_T}\right)^2 - 1\right] \frac{\sigma_{22}}{Y_C} + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 \geq 1$	-
Falha na fibra (tração)	$\left(\frac{\sigma_{11}^2}{X_T^2}\right)^{1/2} \geq 1$	$E_{11}, \nu_{12}$
Falha na fibra (compressão)	$\left(\frac{\sigma_{11}^2}{X_C^2}\right)^{1/2} \geq 1$	$G_{12}, G_{13}, G_{23}$
Falha matriz-fibra (cisalhamento)	$\left(\frac{\sigma_{12}^2}{S^2}\right)^{1/2} \geq 1$	$\nu_{12}, G_{12}, G_{13}$

Os resultados da otimização são apresentados na Tabela 5.23. O critério de parada utilizado foi 50 análises sem modificação do melhor valor da função objetivo.

**Tabela 5.23 - Resultados da otimização via AVD do painel curvo com 5 reforços com critério de falha e dano.**

$\lambda_{pf}$ (N)	$u_3$ (mm)	Sequência de empilhamento		$n_e$
		Painel	Reforços	
119787,50	2,44	$[0 \pm 45 \ 45]_S$	$[0_2 \pm 45_2 \ 0_4 \ 90_2]_S$	1000

Um resumo dos casos analisados é apresentado na Tabela 5.24.

**Tabela 5.24 - Resumo dos casos analisados.**

Caso	Laminado	Análises	Programação
5.1.1	Placa (48 lâminas)	Carga de flambagem analítica e via MEF Aplicação da RVS	Carga (Matlab <sup>®</sup> ) RVS (Python) MEF (Abaqus <sup>®</sup> )
5.1.2	Placa (48 lâminas)	Carga de flambagem analítica e via MEF Aplicação da RVS e HL	RVS e HL (Python) MEF (Abaqus <sup>®</sup> )
5.2	Placa (24 lâminas)	Carga de flambagem via MEF Aplicação HL e parâmetros de laminação	HL (Python) Parâmetros (Matlab <sup>®</sup> ) MEF (Abaqus <sup>®</sup> )
5.2.1	Placa (24 lâminas)	Carga de flambagem via MEF Validação da RVS	RVS (Python) MEF (Abaqus <sup>®</sup> )

5.2.2	Placa (24 lâminas)	Carga de flambagem via MEF  Validação da RN Comparação RN x RVS	RVS (Python) RN (Matlab®) MEF (Abaqus®)
5.3	Placa (48 lâminas)	Carga analítica de flambagem Otimização com HS	HS (Matlab®)
5.4	Placa - SSSS (16 lâminas)	Carga analítica de pós-flambagem Otimização da carga de pós-flambagem com HS	HS (Matlab®)
5.5.1	Painel cilíndrico com furo (32 lâminas)	Carga de pós-flambagem via MEF Validação do método de Riks para flambagem não-linear (pré, flambagem e pós-flambagem) Validação da rotina somente em Python para análise da pós-flambagem	MEF (Abaqus®) Rotina inteira em Python (pré, flambagem e pós-flambagem)
5.5.2	Painel cilíndrico com furo (64 lâminas)	Carga de pós-flambagem via MEF Otimização da carga de pós-flambagem com HS Validação da conexão do HS e modelo Abaqus® Validação do método de Riks para flambagem não-linear Aplicação da RVS	MEF (Abaqus®) HS (Python) RVS Rotina inteira em Python (pré, flambagem e pós-flambagem)
5.6.1	Painel reto com 2 reforços (24 lâminas)	Carga de pós-flambagem via MEF Otimização com AVD Validação conexão AVD com Abaqus® Aplicação de força Validação do método de Riks (Abaqus®) para pré, flambagem e pós-flambagem não-linear Critério de falha de Tsai-Wu e Hashin Aplicação da RVS	Rotina inteira em Python (AVD e Abaqus®) Critério de Tsai-Wu e Hashin RVS
5.6.2	Painel curvo com 5 reforços (8 lâminas - painel) (24 lâminas - reforço)	Carga de pós-flambagem via MEF Otimização com AVD Validação conexão AVD com Abaqus® com critério de falha Aplicação de deslocamento Critério de Tsai-Wu e critério de Hashin Validação do método <i>static</i> (Abaqus®) para pós-flambagem não-linear Validação da alteração do empilhamento via arquivo .INP (Abaqus®) Aplicação da RVS	Rotina inteira em Python (AVD, Abaqus®, alteração dos ângulos via arquivo .INP e critérios de falha) RVS
5.6.3	Painel curvo com 5 reforços (8 lâminas - painel) (24 lâminas - reforço)	Carga de pós-flambagem via MEF Otimização com AVD Validação conexão AVD com Abaqus com critério de dano Aplicação de deslocamento Critério de Hashin para falha Validação do método <i>static</i> para pós-flambagem não-linear e arquivo .INP Validação da conexão da sub-rotina USDFLD com o programa Python e Abaqus®	Rotina inteira em Python (AVD, Abaqus®, alteração dos ângulos via arquivo .INP e critérios de dano) Sub-rotina USDFLD em Fortran



Os resultados foram obtidos com simulações em um processador Intel Core i5 4440 CPU 3,10 GHz, 16 GB RAM e sistema 64 bits. Para efeitos ilustrativos a Tabela 5.25 apresenta os tempos aproximados correspondentes a uma iteração para alguns casos.

**Tabela 5.25 - Tempo de execução das simulações.**

Caso	Otimização	Restrição	Tempo aproximado para uma iteração (minutos)
5.5.2	HS	u3=2,032 mm	22,0
	RVS+HS		40,0
5.6.1	AVD	Tsai-Wu	2,5
	RVS+AVD		1,4
	AVD	Hashin	15,0
	RVS+AVD		3,5
5.6.2	AVD	Hashin	42,5
	RVS+AVD	Hashin	6,4
5.6.3	AVD	Hashin+Dano	74,0

Outros projetos de experimentos poderiam ser testados para comparação da análise de desempenho do projeto de experimentos. O metamodelo RVS apresentou resultados melhores em relação a RN para a análise de pós-flambagem. Em parte devido a resposta ser melhor para um conjunto menor de amostras iniciais e em função do método de otimização da função de regressão (Lagrangeano). O metamodelo RVS associado ao HL apresentou resultados positivos para a análise de flambagem e pós-flambagem. Os algoritmos testados, HS e AVD, aplicados a compósitos obtiveram desempenho adequado à análise não linear do comportamento da pós-flambagem. A metodologia criada com um metamodelo e otimização, via código em Python, possibilita trabalhar com outras geometrias e problemas que envolvem execuções de números grandes de simulações em elementos finitos. A utilização do metamodelo possibilitou uma análise com número de avaliações da função objetivo menor, consequentemente redução no tempo computacional. Para o aprimoramento do trabalho pode-se aplicar um refinamento do metamodelo ao longo da otimização.

## 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 6.1 Conclusões

Neste trabalho foram aplicados dois metamodelos, redes neurais (RN) e regressão de vetores de suporte (RVS) para aproximar cargas de flambagem e de pós-flambagem de estruturas compósitas laminadas. A RVS foi totalmente implementada e adaptada para problemas de estruturas compósitas laminadas enquanto para a RN utilizou-se um *toolbox* do Matlab®. Conceitos de parâmetros de laminação, soluções analíticas e o método de elementos finitos foram utilizados na determinação das cargas para diferentes problemas. A aproximação por RVS apresentou ótimo desempenho e demonstrou ser melhor em comparação à RN para os casos estudados.

No processo de otimização foram implementados e utilizados dois algoritmos, o *harmony search* e o algoritmo de vaga-lumes, para a determinação do empilhamento das lâminas que maximiza cargas de flambagem e de pós-flambagem.

Para a análise não-linear, correspondente ao comportamento em pós-flambagem foi utilizado o programa comercial Abaqus® com o método de Riks e o método *Static/Nlgeom*. O primeiro utiliza incrementos de carga para a realização dos cálculos e o segundo considera a aplicação de deslocamento para o cálculo não-linear.

Inicialmente, cargas de pós-flambagem foram maximizadas sem a imposição de critérios de falha e em seguida utilizando-se os critérios de Tsai-Wu e de Hashin. O critério de dano de Chang-Lessard, através da implementação da sub-rotina USDFLD, foi testado junto com o processo de otimização. Essas metodologias foram aplicadas em placas, em painel cilíndrico com furo e em painel reto e painéis curvos com reforços. Observou-se que as cargas de pós-flambagem maximizadas foram superiores com o critério de Hashin, em relação ao critério de Tsai-Wu, mostrando que o último é mais conservativo.

Para a realização dos testes numéricos, programas escritos em Python (*scripts*) foram desenvolvidos para as metodologias HL, RVS, HS, AVD e critérios de falhas. Uma conexão entre essas metodologias e os modelos de elementos finitos do

Abaqus® foi implementada também em Python para o estudo de geometrias complexas.

O processo de otimização com o algoritmo de vaga-lumes e com a RVS apresentou resultados melhores, em termos de custo computacional, se comparados aos resultados sem a aplicação do metamodelo.

## 6.2 Sugestões para trabalhos futuros

A continuidade deste trabalho pode ser concentrada nos seguintes tópicos:

- Utilização de outras meta-heurísticas no processo de otimização tais como: *differential evolution*, *bat algorithm*, *cuckoo search* etc.;
- Continuidade da análise de falha em painéis com reforços considerando também a ocorrência da delaminação das lâminas e a propagação de dano na estrutura;
- Aplicação de outros metamodelos e associá-los à otimização de compósitos laminados;
- Utilização de um procedimento de refinamento (atualização) do metamodelo ao longo do processo iterativo de otimização.

## REFERÊNCIAS

ABAQUS, **Dassault Systèmes Simulia Corporation, Abaqus 6.14 Manual**. Providence, RI, USA, 2014.

ABRATE, S., Optimal design of laminated plates and shells. **Composites and Structures**, v. 29, p. 269-286, 1994.

AKBULUT, M.; SONMEZ, F. O., Optimum design of composite laminated for minimum thickness. **Composites Structures**, v. 86, p.1974-1982, 2008.

ALIA O. M; MANDAVA, R., The variants of the harmony search algorithm: an overview. **Artificial Intelligence Review**, v. 36, p. 49-69,2011.

ALIBRANDI, U.; IMPOLLONIA, N.; RICCIARDI, G., Probabilistic eigenvalue buckling analysis solved through the ratio of polynomial response surface. **Computer Methods in Applied Mechanics Engineering**, v. 199, p. 450-464, 2010.

ALMEIDA, F. S.; AWRUCH A. M., Optimization of laminated composite structures using harmony search algorithm. **Mecánica Computacional**, v. 24, p. 9485-9498, 2010.

ARAICO, J. A.; ALBERDI, I. O. Z., ARRIBAS, F. R., Postbuckling degradation FE analysis of stiffened composite panels. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 10, p. 645-668, 2010.

ARNOLD, R. R.; MAYERS, J., Buckling, postbuckling, and crippling of materially nonlinear laminated composite plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 20, p. 863-880, 1984.

AYMERICH F.; SERRA, M., Optimization of laminate stacking sequence for maximum buckling load using the ant colony optimization (ACO) metaheuristic. **Composites: Part A**, v. 39, p. 262-272, 2008.

AZAD S. K.; AZAD, S. K., Optimum design of structures using an improved firefly algorithm. **International Journal of Optimization in Civil Engineering**, v. 2, p. 327-340, 2011.

BASAK, D.; PAL, S.; PATRANABIS, D. C., Support Vector Regression. **Neural Information Processing – Letters and Reviews**, v. 11, p. 203-224, 2007.

BASUDHAR, A.; DRIBUSCH, C.; LACAZE, S.; MISSOUM, S., Constrained efficient global optimization with support vector machines. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 46, p. 201-221, 2012.

BEN-HUR, A.; HORN, D.; SIEGELMANN, H. T.; VAPNIK, V., Support Vector Clustering. **Journal of Machine Learning Research**, v. 2, p. 125-137, 2001.

BEZERRA, E. M.; ANCELOTTI, A. C.; PARDINI, L. C.; ROCCO, J. A. F. F.; LHA, K.; RIBEIRO, C. H. C., Artificial neural networks applied to epoxy composites reinforced with carbon and E-glass fibers: Analysis of the shear mechanical properties. **Materials Science & Engineering A**, v. 464, p. 177-185, 2007.

BLOOM F.; COFFIN, D., **Handbook of thin plate buckling and postbuckling**. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.

BLOOMFIELD, M. W.; DIACONU, C. G.; WEAVER, P. M., On feasible regions of laminations parameters for lay-up optimization of laminated composites. **Proceedings of The Royal Society A Mathematical, Physical & Engineering Sciences**, v. 465 p. 1123-1143, 2009.

BLOOMFIELD, M. W.; HERENCIA, J. E.; WEAVER, P. M., Analysis and benchmarking of meta-heuristic techniques for lay-up optimization. **Computers and Structures**, v. 88, p. 272-282, 2010.

BOSER, B. E; GUYON, I. M.; VAPNIK, V., A training algorithm for optimal margin classifiers. **Association for Computing Machinery**, v. 7, p. 144-152, 1992.

BUSHNELL, D., Optimization of composite, stiffened, imperfect panels under combined loads for service in the postbuckling regime. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 103, p. 43-114, 1993.

CHAKRABORTY, P.; ROY, G. G.; DAS S., JAIN, D., An improved harmony search algorithm with differential mutation operator. **Fundamenta Informaticae**, v. 95, p. 1-26, 2006.

CHE, J., Support vector regression based on optimal training subset and adaptive particle swarm optimization algorithm. **Applied Soft Computing**, v. 13, p. 3473-3481, 2013.

CHENG, J.; DRUZDZEL, M. J., Latin hypercube sampling in bayesian networks. In **Proceedings of FLAIRS-2000-AAAI 2000**, Orlando, USA, 2000.

CYBENKO, G., Approximation by superpositions of a sigmoidal function. **Mathematics of Control, Signals, and Systems**, v. 2, p. 303-314, 1989.

DEKA, D. J.; SANDEEP, G.; CHAKRABORTY, D.; DUTTA, A., Multiobjective optimization of laminated composites using finite element method and genetic algorithm. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 24, p. 273-285, 2005.

DIACONU, C. G.; WEAVER, P. M., Approximate solution and optimum design of compression-loaded, postbuckled laminated composite plates. **The American Institute of Aeronautics and Astronautics**, v. 43, p. 906-914, 2005.

DIACONU, C. G.; WEAVER, P. M., Postbuckling of long unsymmetrically laminated composite plates under axial compression. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, p. 6978-6997, 2006.

- DURKOTA, K., **Implementation of a discrete firefly algorithm for the QAP problem within the seage framework**. 2011. 52p. Bachelor thesis, Czech Technical University, Prague, 2011.
- ENGELSTAD, S. P.; REDDY, J. N.; KNIGHT Jr., N. F., Postbuckling response and failure prediction of graphite-epoxy plates loaded in compression. **The American Institute of Aeronautics and Astronautics**, v. 30, p. 2106-2113, 1992.
- ERDAL, O.; SONMEZ, F. O., Optimum design of composite laminates for maximum buckling load capacity using simulated annealing. **Composite Structures**, v. 71, p. 45-52, 2005.
- FALZON, B. G., **Mode-jumping in postbuckling stiffened composite panels**. In: Buckling and postbuckling structures: experimental, analytical and numerical studies. London: Imperial College Press, v. 1, cap. 3, p. 65-98, 2008.
- FALZON, B. G.; ALIABADI, M. H, **Buckling and Postbuckling Structures: Experimental, Analytical and Numerical Studies**. Imperial College Press, v. 1, London, 2008.
- FERREIRA, A. P. C. S.; KOIDE, R. M.; LUERSEN, M. A., Neural network metamodels of composite plates trained with lamination parameters. In: **XXXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE2013**, Pirenópolis, Brasil, 2013.
- FISTER, I.; FISTER Jr., I.; YANG, X.-S; BREST, J., A comprehensive review of firefly algorithms. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 13, p. 34-46, 2013.
- FORRESTER, A. I. J.; SÓBESTER, F.; KEANE, A. J., **Engineering design via surrogate modeling: a practical guide**. John Wiley & Sons, UK, 2008.
- FOLDAGER, J.; HANSEN, J. S.; OLHOF, N., A general approach forcing convexity of ply angle optimization in composite laminates. **Structural Optimization**, v.16, p. 201-211, 1998.
- FUKUNAGA, H.; SEKINE, H.; SATO, M.; IINO, A., Buckling design of symmetrically laminated plates using lamination parameters. **Computers and Structures**, v. 57, p. 643-649, 1995.
- GANDOMI, A. H.; YANG, X.-S.; TALATAHARI, S.; ALAVI, A. H., Firefly algorithms with chaos. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 18, p. 89-98, 2013.
- GEEM, Z. W.; KIM, J. H., LOGANATHAN, G. H., A new heuristic optimization: Harmony Search. **Simulation**, v. 76, p. 60-68, 2001.
- GOMES, H. M.; RODRIGUES, E. R., Algoritmo meta-heurístico de vaga-lume para a otimização estrutural em tamanho e forma com restrições de frequências naturais. **Engenharia Estudo e Pesquisa**, v. 2, p. 3-15, 2013.

- GUO, G.; ZHANG, J., Reducing examples to accelerate support vector regression. **Pattern Recognition Letters**, v. 28, p. 2173-2183, 2007.
- HAGAN, M. T.; DEMUTH, H. B.; BEALE, M., **Neural network design**. PWS Pub., Boston, 1996.
- HARE, W.; NUTINI, J.; TESHAMARIAM, S., A survey of non-gradient optimization methods in structural engineering. **Advances in Engineering Software**, v. 59, p. 19-28, 2013.
- HAYKIN, S., **Neural Networks: A comprehensive foundation**. Prentice-Hall, 2nd. ed., New Jersey, 1999.
- HAYKIN, S., **Neural networks and learning machines**. Pearson Prentice Hall, 3rd. ed., New Jersey, 2009.
- HERENCIA, J. E.; WEAVER, P. M.; FRISWELL, M. I., Optimization of long anisotropic laminated fiber composite panels with T-shaped stiffeners. **The American Institute of Aeronautics and Astronautics**, v. 45, p. 2497-2509, 2007.
- HILBURGER, M. W., The development of shell buckling design criteria based on initial imperfection signatures. **Buckling and postbuckling structures: experimental, analytical and numerical studies**. London: Imperial College Press, v. 1, cap. 4, p. 65-98, 2008.
- HIRSCHBERG, D. S., Algorithms for the longest common subsequence problem. **Journal of the Association for Computing Machinery**, v. 24, p. 19-28, 1977.
- HONDA, S.; NARITA, Y.; SASAKI, K., Discrete optimization for vibration design of composite plates by using lamination parameters. **Advanced Composite Materials**, v. 18, p. 297-314, 2009.
- IRISARI, F. X.; LAURIN, F.; LEROY, F. H.; MAIRE, J. F., Computational strategy for multiobjective optimization of composite stiffened panels. **Composite Structures**, v. 93, p. 1158-1167, 2011.
- JIN, R.; CHEN, W.; SIMPSON, T. W., Comparative studies of metamodelling techniques under multiple modeling criteria. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 23, p. 1-13, 2001.
- JONES, R. M., **Mechanics of composite materials**. Taylor & Francis, 2nd. ed., Philadelphia, 1999.
- KALNINS, K.; JEKABSONS, G.; RIKARDIS, R., Metamodels for optimisation of post-buckling responses in full-scale composite structures. In **8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization**, Lisbon, Portugal, 2009.
- KALNINS, K.; RIKARDS, R.; AUZINS, J.; BISAGNI, C.; ABRAMOVICH, H., Metamodeling methodology for postbuckling simulation of composite stiffened

structures with physical validation. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 10, p. 705-717, 2010.

KAVOUSHI-FARD, A.; SAMET, H.; MARZBANI, F., A new hybrid modified firefly algorithm and support vector regression model for accurate short term load forecasting. **Expert Systems with Applications**, v. 41, p. 6047-6056, 2014.

KHANI, A.; IJSSELMUIDEN, S. T.; ABDALLA, M. M.; GÜRDAL, Z., Design of variable stiffness panels for maximum strength using lamination parameters. **Composites: Part B**, v. 42, 546-552, 2011.

KLING, A., **Stability design of stiffened composite panels – simulation and experimental validation**. In: Buckling and postbuckling structures: experimental, analytical and numerical studies. London: Imperial College Press, v. 1, cap. 5, p. 141-175, 2008.

KOIDE, R. M., **Algoritmo de colônia de formigas aplicado à otimização de materiais compostos laminados**. 2010, 113 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2010.

KOIDE, R. M.; FERREIRA, A. P. C. S.; LUERSEN, M. A., Latin hypercube design of experiments and support vector regression metamodel applied to buckling load prediction of composite plates. In: **XXII International Congress of Mechanical Engineering – COBEM2013**, Ribeirão Preto, Brasil, 2013.

KOIDE, R. M.; FERREIRA, A. P. C. S.; LUERSEN, M. A., Postbuckling optimization of a laminated composite plate using harmony search. In: **2nd Brazilian Conference on Composite Materials – BCCM2**, São José dos Campos, Brasil, 2014a.

KOIDE, R. M.; FERREIRA, A. P. C. S.; LUERSEN, M. A., Hipercubo latino e regressão de vetores de suporte aplicados a pós-flambagem de estruturas compostas laminadas. **XXXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE2014**, Fortaleza, Brasil, 2014b.

KOIDE, R. M.; FERREIRA, A. P. C. S.; LUERSEN, M. A., Laminated composites buckling analysis using lamination parameters, neural networks and support vector regression. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 12, n. 2, p. 271-294, 2015a.

KOIDE, R. M.; PASSOS, A. G.; FERREIRA, A. P. C. S.; LUERSEN, M. A., Algoritmo de vaga-lumes aplicado à otimização da carga de flambagem de placas compósitas laminadas. **XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE2015**, Rio de Janeiro, Brasil, 2015b.

KOITER, W. T., **The stability of elastic equilibrium**. 1945. Ph.D. Dissertation, Delft University, Amsterdam, 1945.

KOSTELETOS, S., Postbuckling response of laminated plates under shear load. **Composite Structures**, v. 20, p. 137-145, 1992.



KUMBHARANA, S. N.; PANDEY, G. M., Solving travelling salesman problem using firefly algorithm. **International Journal for Research in Science & Advanced Technologies**, v. 2, p. 53-57, 2013.

LANZI, L.; GIOVOTTO, V., Postbuckling optimization of composite stiffened panels: Computations and experiments. **Composite Structures**, v. 73, p. 208-220, 2006.

LAS, V.; ZEMCIK, R.; KROUPA, T.; KOTTNER, R., Failure prediction of composite materials. **Bulletin of Applied Mechanics**, v. 4, p. 81-87, 2008.

LEISSA, A. W., Buckling of composite plates. **Composite Structures**, v. 1, p. 51-66, 1983.

LE RICHE, R.; HAFTKA, R., Optimization of laminated stacking sequence for buckling load maximization by genetic algorithm. **The American Institute of Aeronautics and Astronautics**, v. 31, p. 951-956, 1993.

LEVENBERG, K., A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 2, p. 164-168, 1944.

LIMA, L. M.; KOIDE, R. M.; LUERSEN, M. A., Postbuckling optimization of imperfect rectangular composite plates under in-plane shearing load using firefly algorithm. In: **3<sup>rd</sup> Brazilian Conference on Composite Materials – BCCM3**, Gramado, Brasil, 2016.

LINDGAARD, E.; LUND, E.; RASMUSSEN, K., Nonlinear buckling optimization of composite structures considering “worst” shape imperfections. **International Journal of Solids and Structures**, v. 47, p. 3186-3202, 2010.

LIU, B.; HAFTKA, R.; AKGUN, M.; TODOROKI, A., Permutation genetic algorithm for stacking sequence design of composite laminates. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 186, p. 357-372, 2000.

LIU, W.; BUTLER, R.; MILEHAM, A. R.; GREEN, A. J., Optimum design, experimental testing and post-buckling analysis of thick composite stiffened panels. In: **46<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference**, Austin, Texas, USA, 2005.

LIU, D.; TOROPOV, V. V., A lamination parameter-based strategy for solving an interger-continuous problem arising in composite optimization. **Computers and Structures**, v. 128, p. 170-174, 2013.

LIU, D.; TOROPOV, V. V.; ZHOU, M.; BARTON, D. C.; QUERIN, O. M., Optimization of blended composite wing panels using smeared stiffness technique and lamination parameters. **Proceedings of the 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference**, Orlando, Florida, 2010.

LIU, P. F.; ZHENG, J. Y., Recent developments on damage modeling and finite element analysis for composite laminates: A Review. **Materials and Design**, v. 31, p. 3825-3834, 2010.

LORENA, A. C.; CARVALHO, A. C. P. L. F., Uma Introdução às support vector machines. **Revista de Informática Teórica e Aplicada**, v. 14, p. 43-67, 2007.

MARICHELVAM, M. K.; PRABAHARAN, T.; YANG, X.-S., A discrete firefly algorithm for the multi-objective hybrid flowshop scheduling problems. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 18, p. 301-305, 2014.

MENDONÇA, P. T., **Materiais Compostos e Estruturas-Sanduíche: Projeto e Análise**. Manole, 1ª ed., Barueri, 2005.

MITTELSTEDT, C.; SCHRÖDER, K., Postbuckling of compressively loaded imperfect composite plates: closed-form approximate solutions. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 10, p. 761-778, 2010.

MYERS, R. H.; MONTGOMERY, D., **Response surface methodology: processes and product optimization using designed experiments**. Wiley Interscience, 2nd. ed., New York, 2002.

NAIK, G. N.; OMKAR, S. N.; MUDIGERE, D.; GOPALAKRISHNAN, S., Nature inspired optimization techniques for the design optimization of laminated composite structures using failure criteria. **Expert Systems with Applications**, v. 38, p. 2489-2499, 2011.

NIK, M. A.; FAYAZBAKHS, K.; PASINI, D.; LESSARD, L., Surrogate-based multi-objective optimization of a composite laminate with curvilinear fibers. **Composite Structures**, v. 94, p. 2306-2313, 2012.

NIK, M. A.; FAYAZBAKHS, K.; PASINI, D.; LESSARD, L., A comparative study of metamodeling methods for the design optimization of variable stiffness composites. **Composite Structures**, v. 107, p. 494-501, 2014.

NOOR, A. K.; PETERS, J. M., Bifurcation and postbuckling analysis of laminated composite plates via reduced basis technique. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 29, p. 271-295, 1981.

OMKAR, S. N.; SENTHILNATH, J.; KHANDELWAL, R.; NAIK, N.; GOPALAKRISHNAN, S., Artificial bee colony (ABC) for multi-objective design optimization. **Applied Soft Computing**, v. 11, p. 489-499, 2011.

ORIFICI, A. C.; THOMSON, R. S.; DEGENHARDT, R.; BAYANDOR, J., The design of postbuckling composite aerospace structures accounting for damage initiation and growth. In: **26<sup>th</sup> International Congress of the Aeronautical Sciences**, 2008.

PAN, F.; ZHU, P.; ZHANG, Y., Metamodel-based lightweight design of B-pillar with TWB structure via support vector regression. **Computers and Structures**, v. 88, p. 36-44, 2010.

PANDEY, M. D.; SHERBOUNE, A. N., Postbuckling behavior of optimized rectangular composite laminates. **Composite Structures**, v. 23, p. 27-38., 1993.

PASSOS, A. G., **Otimização global eficiente aplicada a projetos de laminados de rigidez variável**. 2016, 85 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

PATIL, S. A.; PATEL, D. A., An overview: Improved harmony search algorithm and its applications in mechanical engineering. **International Journal of Engineering Science and Innovative Technology**, v. 2, p. 433-444, 2013.

POURSALEHI, N.; ZOLFAGHARI, A.; MINUCHEHR, A., Multi-objective loading pattern enhancement of PWR based on the discrete firefly algorithm. **Annals of Nuclear Energy**, v. 57, p. 151-163, 2013.

PRABHAKARA, M. K.; CHIA, C. Y., Postbuckling of angle ply and anisotropic plates. **Ingenieur-Archiv**, v. 45, p. 131-140, 1976.

RAJU, G.; WU, Z.; KIM, B. C.; WEAVER, P. M., Prebuckling and buckling analysis of variable angle tows plates with general boundary conditions. **Composite Structures**, v. 94, p. 2961-2970, 2012.

RAHMAN, T.; IJSSELMUIDEN, S. T.; ABDALLA, M. M., Postbuckling analysis of variable stiffness composite plates using a finite element-based perturbation method. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 11, p. 735-753, 2011.

RAO, S. S., **Engineering Optimization: Theory and Practice**. Wiley, 3rd. ed. , New York, 1996.

REDDY, A.R.; REDDY, B.S.; REDDY, K.V.K., Application of design of experiments and artificial neural networks for stacking sequence optimization of laminated composite plates. **International Journal of Engineering, Science and Technology**, v. 3, p. 295-310, 2011.

REDDY, M.R.S.; REDDY, B.S.; REDDY, V.N.; SREENIVASULU, S., Prediction of natural frequency of laminated composite plates using artificial neural networks. **Engineering**, v. 4, p. 329-337, 2012.

RIKS, E., An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and Structures** v. 15, p. 529-551, 1979.

RIKS, E., Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. **Compute Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 47, p. 219-259, 1984.

RIZK-ALLAH, R. M.; ZAKI, E. M.; EL-SAWY, A. A., Hybridizing and colony optimization with firefly algorithm for unconstrained optimization problems. **Applied Mathematics and Computation**, v. 224, p. 473-483, 2013.

RYBERG A.; BÄCKRYD, R. D.; NILSSON L., **Metamodel-Based Multidisciplinary Design Optimization for Automotive Applications**. Technical Report LIU-IEI-R-12/003, Linköping University, Linköping, Sweden, 2012.

SÁNCHEZ A., V.D., Advanced support vector machines and kernel methods. **Neurocomputing**, v. 55, p. 5-20, 2003.

SAYADI, M. K.; RAMEZANIAN, R.; GHAFFARI-NASAB, N., A discrete firefly meta-heuristic with local search for makespan minimization in permutation flow shop scheduling problems. **International Journal of Industrial Engineering Computations**, v. 1, p. 1-10, 2010.

SAYADI, M. K.; HAFEZALKOTOB, A.; NAINI, S. G. J., Firefly-inspired algorithm for discrete optimization problems: An application to manufacturing cell formation. **Journal of Manufacturing Systems**, v. 32, p. 78-84, 2013.

SHEN, H., Postbuckling analysis of composite laminated plates on two-parameter elastic foundations. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 37, p. 1307-1316, 1995.

SHIN, D. K., Postbuckling behavior of rectangular plates simply supported along loaded sides and clamped along unloaded sides. **KSCE Journal of Civil Engineering**, v. 3, p. 15-26, 1999.

SIMPSON, T.; TOROPOV, V.; BALABANOV, V.; VIANA, F. A. C., Design and analysis of computer experiments in multidisciplinary design optimization: A review of how far we have come – or not. In: **Proceedings of the 12th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference. AIAA2008-5802**, p. 1-22, 2008.

SINGH, B. N.; LAL, A.; KUMAR, R., Postbuckling response of laminated composite plate on elastic foundation with random system properties. **Communications in Non-linear Science and Numerical Simulation**, v. 14, p. 284-300, 2009.

SMOLA, A.J.; SCHÖLKOPF, B., A tutorial on support vector regression. **Statistics and Computing**, v. 14, p. 199-222, 2004.

SRIVATSAVA, P. R.; MALLIKARJUN, B.; YANG, X.-S., Optimal test sequence generation using firefly algorithm. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 8, p. 44-53, 2013.

STAAB, G. H., **Laminar Composite**. Butterworth-Heinemann, Woburn, 1999.

SUNDARESAN P.; SINGH, G.; VENKATESWARA RAO, G., Buckling and post-buckling analysis of moderately thick laminated rectangular plates. **Computers and Structures**, v. 61, p. 79-86, 1996.

SURESH, S.; SUJIT, P. B.; RAO, A. K., Particle swarm optimization approach for multi-objective composite box-beam design. **Composite Structures**, v. 81, p. 598-605, 2007.

SUTTROP, T.; IGEL, C., Multi-objective optimization of support vector machines. **Multi-objective Machine Learning Studies in Computational Intelligence**, v. 16, p. 199-220, 2006.

TODOROKI, A.; HAFTKA, R., Stacking sequence optimization by a genetic algorithm with a new recessive gene like repair strategy. **Composites Part B: Engineering**, v. 29, p. 277-285, 1998.

TODOROKI, A.; ISHIKAWA, T., Design of experiments for stacking sequence optimizations with genetic algorithm using response surface approximation. **Composite Structures**, v. 64, p. 349-357, 2004.

TODOROKI, A.; SUENAGA, K.; SHIMAMURA, Y., Stacking sequence optimizations using modified global response surface in lamination parameters. **Advanced Composite Materials**, v. 12, p. 35-55, 2003.

TODOROKI, A.; SHINODA, T.; MIZUTANI, Y.; MATSUZAKI, R., New surrogate model to predict fracture of laminated CFRP for structural optimization. **Journal of Computational Science and Technology**, v. 5, p. 26-37, 2011.

TSAI, S. W.; PAGANO, N. J., Invariant properties of composite materials. In **Composite Materials Workshop**, Technomic, Stamford, Connecticut, p. 233-253, 1968.

TUBA, M.; BACANIN, N., Improved seeker optimization algorithm hybridized with firefly algorithm for constrained optimization problems. **Neurocomputing**, v. 143, p. 197-207, 2014.

ÜSTÜN, B.; MELSSSEN, W. J.; BUYDENS, L. M. C., Visualisation and interpretation of support vector regression models. **Analytica Chimica Acta**, v. 595, p. 299-309, 2007.

VAPNIK, V., Three fundamental concepts of the capacity of learning machines. **Physica A**, v. 200, p. 538-544, 1993.

VAPNIK, V., An overview of statistical learning theory. **IEEE Transactions on Neural Networks**, v. 10, p. 988-999, 1999.

VAPNIK, V. N., **The nature of statistical learning theory**. Springer-Verlag, 2nd. ed., New York, 2000.

VAPNIK, V.; VASHIST, A., A new learning paradigm: Learning using privileged information. **Neural Networks**, v. 22, p. 544-557, 2009.

VARELIS, D.; SARAVANOS, D. A., Coupled buckling and postbuckling analysis of active laminated piezoelectric composite plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 41, p. 1519-1538, 2004.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T., **Thin Plates and Shells Theory, Analysis, and Applications**. Marcel Dekker, New York, 2001.

VIANA, G. V. R., MOURA, H. A. S., Algoritmos para alinhamento de sequências. **Revista científica da Faculdade Lourenço Filho**, v. 7, pp. 67-82, 2010.

WANG, W.; GUO, S.; CHANG, N.; YANG, W., Optimum buckling design of composite stiffened panels using ant colony algorithm. **Composite Structures**, v. 92, p. 712-719, 2010.

WANG, C.; HUANG, Y., Self-adaptive harmony search algorithm for optimization. **Expert Systems with Applications**, v. 37, p. 2826-2837, 2010.

WANG, G.G.; SHAN, S., Review of metamodeling techniques in support of engineering design optimization. **ASME Transactions, Journal of Mechanical Design**, v. 129, p. 370-380, 2007.

WANG, S. S.; SRINIVASAN, S., Effect of material nonlinearity on buckling and postbuckling of fiber composite laminated plates and cylindrical shells. **Composite Structures**, v. 33, p. 7-15, 1995.

WEAVER, P. M.; DRIESEN, J. R.; ROBERTS, P., Anisotropic effects in the compression buckling of laminated composite cylindrical shells. **Composites Science and Technology**, v. 62, p. 91-105, 2002.

WU, Z.; RAJU, G.; WEAVER, P. M., Comparison of variational, differential quadrature, and approximate closed-form solution methods for buckling of highly flexurally anisotropic laminates. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 139, p. 1073-1083, 2013a.

WU, Z.; WEAVER, P. M.; RAJU, G.; KIM, B. C., Buckling analysis and optimization of variable angle tow composite plates. **Thin-Walled Structures**, v. 60, p. 163-172, 2012.

WU, Z.; WEAVER, P. M.; RAJU, G., Postbuckling optimization of variable angle tow composite plates. **Composite Structures**, v. 103, p. 34-42, 2013b.

YANG, X.-S., Harmony Search as a metaheuristic algorithm. **Studies in Computational Intelligence**, v. 191, p. 1-14, 2009a.

YANG, X.-S., Firefly algorithm for multimodal optimization. In: **Stochastic Algorithms: Foundations and Applications, SAGA 2009, Lecture Notes in Computer Sciences**, v. 5792, p. 169-178, 2009b.

YANG, X.-S., **Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms**. Luniver Press, 2nd. Ed., 2010a.

YANG, X.-S., Firefly algorithm, stochastic test functions and design optimisation. **International Journal of Bio-Inspired Computation**, v. 2, p. 78-84, 2010b.

YANG, X.-S., Firefly algorithm, Lévy flights and global optimization. In: **Research and Development in Intelligent Systems XXVI (Eds M. Bramer, R. Ellis, M. Petridis)**, Springer London, p. 209-218, 2010c.

YANG, R. J.; GU, L., Experience with approximate reliability-based optimization methods. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 26, p. 152-159, 2004.

YANG, X.-S.; HE, X., Firefly algorithm: Recent advances and applications. **International Journal of Swarm Intelligence**, v. 1, p. 36-50, 2013.

ZOU, G.; QIAO, P., Higher-order finite strip method for postbuckling analysis of imperfect composite plates. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 128, p. 1008-1015, 2002.

## ANEXO A – SUB-ROTINA USDFLD EM FORTRAN

```

SUBROUTINE USDFLD(FIELD,STATEV,PNEWDT,DIRECT,T,CELENT,TIME,DTIME,
1 CMNAME,ORNAME,NFIELD,NSTATV,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC,
2 NDI,nshr,coord,jmac,jmtyp,matlayo,laccflg)
C
C   INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C MATERIAL AND STRENGTH PARAMETERS
PARAMETER(YT=51,XC=1365,YC=269,SC=120)
PARAMETER(G12=5.6D3,ALPHA=2.98D-8)
C
C   CHARACTER*80 CMNAME,ORNAME
C   CHARACTER*3  FLGRAY(15)
C   DIMENSION FIELD(NFIELD),STATEV(NSTATV),DIRECT(3,3),T(3,3),TIME(2),
C   * coord(*),jmac(*),jmtyp(*)
C   DIMENSION ARRAY(15),JARRAY(15)
C
C INITIALIZE FAILURE FLAGS FROM STATEV.
EM   = STATEV(1)
EFS  = STATEV(2)
DAMAGE = STATEV(3)
C
C GET STRESSES FROM PREVIOUS INCREMENT
CALL GETVRM('S',ARRAY,JARRAY,FLGRAY,jrcd,
$   jmac, jmtyp, matlayo, laccflg)
S11 = ARRAY(1)
S22 = ARRAY(2)
S12 = ARRAY(4)
CALL GETVRM('E',ARRAY,JARRAY,FLGRAY,jrcd,
$   jmac, jmtyp, matlayo, laccflg)
E12 = ARRAY(4)
C
C DAMAGE INDEX: = 0 IF NO STRAIN TO PREVENT DIVIDE BY ZERO
C
C   IF (E12.NE.0) THEN
C     DAMAGE = (3.D0*ALPHA*G12*S12**2 - 2.D0*ALPHA*(S12**3)/E12) /
C     & (1.D0 + 3.D0*ALPHA*G12*S12**2)
C   ELSE
C     DAMAGE = 0.D0
C   ENDIF
C
C   F1 = S12**2/(2.D0*G12) + 0.75D0*ALPHA*S12**4
C   F2 = SC**2/(2.D0*G12) + 0.75D0*ALPHA*SC**4
C
C
C
C PLY TENSILE/COMPRESSIVE FAILURE
C
C   IF (EFF .LT. 1.D0) THEN
C     IF (S22 .LT. -1365) THEN
C       EFF=2
C     END IF
C     IF (S22 .GT. 2414) THEN
C       EFF=2
C     END IF
C     IF (S11 .LT. -1365) THEN

```



```
        EFF=2
        END IF
        IF (S11 .GT. 2414) THEN
            EFF=2
            END IF
        STATEV(1) = EFF
        ENDIF
C
C PLY ULTIMATE SHEAR FAILURE
C
        IF (EFS .LT. 1.D0) THEN
            IF (E12 .GT. 0.45) THEN
                EFS=2
            ELSE IF (E12 .LT. -0.45) THEN
                EFS=2
            ELSE
                EFS=0
            ENDIF
            STATEV(2) = EFS
        ENDIF
C
C UPDATE FIELD VARIABLES
C
        FIELD(1) = 0.D0
        FIELD(2) = 0.D0
        IF (EFF .GT. 1.D0) FIELD(1) = 1.D0
        IF (EFS .GT. 1.D0) FIELD(2) = 1.D0
        FIELD(3) = DAMAGE
        STATEV(3) = FIELD(3)
C
        RETURN
        END
```

## APÊNDICE A – FORMULAÇÃO ANALÍTICA DA CARGA DE PÓS-FLAMBAGEM PARA PLACA LAMINADA SIMPLEMENTE APOIADA NAS QUATRO ARESTAS

A formulação do comportamento em pós-flambagem aqui apresentada tem como referência o trabalho de Mittelstedt e Schröder (2010). O equacionamento está descrito de forma sucinta com ênfase na teoria utilizada e nas principais equações que são necessárias para o processo de otimização. As equações constitutivas e as relações de deformação-deslocamento são consideradas no plano, para carga unidirecional e camadas ortotrópicas. A abordagem de von Kármán é usada para a obtenção da relação deformação-deslocamento para o caso de não-linearidade geométrica. A equação diferencial é definida com a equação constitutiva do laminado e as condições de equilíbrio de uma placa inicialmente imperfeita, que é conhecida como a equação de Marguerre. Mittelstedt e Schröder (2010) formularam-na como

$$D_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_1^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (61)$$

onde  $x_1, x_2$  são os eixos globais do laminado ortotrópico,  $D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}$  são os coeficientes da matriz de rigidez de flexão,  $u_3$  o deslocamento e  $u_{30}$  o deslocamento inicial ou imperfeição geométrica na direção  $x_3$  e  $\psi$  a função de Airy.

A geometria de um laminado simplesmente suportado em todas as arestas (SSSS) é apresentada na Figura 5.13, com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} \bar{u}_3(\xi_1 = 0) = \bar{u}_3(\xi_1 = 1) = 0, \bar{M}_{11}^0(\xi_1 = 0) = \bar{M}_{11}^0(\xi_1 = 1) = 0 \\ \bar{u}_3(\xi_2 = 0) = \bar{u}_3(\xi_2 = 1) = 0, \bar{M}_{22}^0(\xi_2 = 0) = \bar{M}_{22}^0(\xi_2 = 1) = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

onde  $\bar{M}_{11}^0, \bar{M}_{22}^0$  são os momentos devido à flexão e o índice sobrescrito 0 refere-se ao plano médio do laminado. A solução da equação diferencial é desenvolvida na forma adimensional baseada em coordenadas normalizadas  $(\xi_1, \xi_2)$ . Por este motivo algumas variáveis são introduzidas na forma normalizada, por exemplo, a função de

Airy  $\bar{\psi}$ , os deslocamentos ( $\bar{u}_3, \bar{u}_{30}$ ) e, os parâmetros ( $\alpha_D, \alpha_A, \eta_D, \eta_A$ ) e os momentos de flexão normalizados ( $\bar{M}_{11}^0, \bar{M}_{22}^0$ ). As seguintes equações as definem

$$\xi_1 = \frac{x_1}{a}, \xi_2 = \frac{x_2}{b}, \bar{u}_3 = \frac{u_3}{\sqrt[4]{\bar{A}_{11}\bar{A}_{22}D_{11}D_{22}}}, \bar{u}_{30} = \frac{u_{30}}{\sqrt[4]{\bar{A}_{11}\bar{A}_{22}D_{11}D_{22}}}, \bar{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} \quad (63)$$

$$\alpha_D = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}}, \alpha_A = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{\bar{A}_{11}}{\bar{A}_{22}}}, \eta_D = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}, \eta_A = \frac{2\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66}}{\sqrt{\bar{A}_{11}\bar{A}_{22}}} \quad (64)$$

onde a rigidez de membrana é  $\bar{A}_{ij} = A^{-1}$  (DIACONU e WEAVER, 2006),  $a$  é o comprimento e  $b$  é a largura do laminado. As forças adimensionais aplicadas no plano são

$$\bar{N}_{11}^0 = \frac{N_{11}^0 b^2}{\pi^2 \sqrt{D_{11}D_{22}}}, \bar{N}_{22}^0 = \frac{N_{22}^0 a^2}{\pi^2 \sqrt{D_{11}D_{22}}}, \bar{N}_{12}^0 = \frac{N_{12}^0 ab}{\pi^2 \sqrt{D_{11}D_{22}}} \quad (65)$$

onde  $N_{11}^0, N_{22}^0, N_{12}^0$  são as forças aplicadas no plano médio do laminado e o índice zero indica a superfície média do laminado. A carga longitudinal no plano  $N_{11}^0$  é considerada constante e as cargas  $N_{22}^0, N_{12}^0$  são nulas.

A forma da flambagem  $\bar{u}_{3,init}$  e a carga de flambagem  $\bar{N}_{11,init}^0$  normalizadas, são as soluções exatas, respectivamente, descritas abaixo

$$\bar{u}_{3,init} = \text{sen}(m\pi\xi_1)\text{sen}(\pi\xi_2) \quad (66)$$

$$\bar{N}_{11,init}^0 = \frac{m^2}{\alpha_D^2} + \frac{\alpha_D^2}{m^2} + 2\eta_D \quad (67)$$

onde  $m$  representa o número de meia onda na direção longitudinal, esta variável é igual a  $\alpha_D$  obtida pela expressão  $(\partial\bar{N}_{11,init}^0/\partial m) = 0$ . Analisando a expressão da Eq. (68), a deflexão na direção  $z$ , é dada por  $\bar{u}_3$  e  $\bar{u}_{30}$  (imperfeição), como formulado na Eq. (66), da qual  $\bar{f}$  é a amplitude da deflexão da placa e  $\bar{f}_0$  é a amplitude para a placa imperfeita.

$$\begin{aligned} \bar{u}_3 &= \bar{f}\bar{u}_{3,init} = \bar{f}\text{sen}(m\pi\xi_1)\text{sen}(\pi\xi_2) \\ \bar{u}_{30} &= \bar{f}_0\bar{u}_{3,init} = \bar{f}_0\text{sen}(m\pi\xi_1)\text{sen}(\pi\xi_2) \end{aligned} \quad (68)$$

A amplitude é determinada considerando as equações de compatibilidade e as funções de Airy. A Eq. (69) para a amplitude  $\bar{f}$  é encontrada por Mittelstedt e Schröder (2010) e a princípio o valor da amplitude  $\bar{f}_0$  é conhecido.

$$\bar{f} = \frac{1}{3\gamma} \left( \bar{f}_0^2 - \frac{16\alpha_A^2 m^2 (\bar{N}_{11,init}^0 + \bar{N}_{11}^0)}{m^4 + \alpha_A^4} \right) + \gamma - \bar{f}_0 \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{3}{m^4 + \alpha_A^4} \left( 72\bar{f}_0 \alpha_A^2 m^2 \bar{N}_{11,init}^0 \right.} \\ \left. + \left[ \frac{1}{m^4 + \alpha_A^4} \left\{ 96\alpha_A^2 m^2 \langle \bar{N}_{11,init}^0 + \bar{N}_{11}^0 \rangle \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[ \alpha_A^4 m^4 \{ 128 \langle \bar{N}_{11}^0 + \bar{N}_{11,init}^0 \rangle^2 + 3\bar{f}_0^4 \} + \frac{3\bar{f}_0^4}{2} \langle m^8 + \alpha_A^8 \rangle \right] \right\} \right. \\ \left. \left. - 3\bar{f}_0^2 \{ 192m^4 \alpha_A^4 \langle 2\bar{N}_{11}^0 + 5\bar{N}_{11,init}^0 \rangle \langle 2\bar{N}_{11}^0 - \bar{N}_{11,init}^0 \rangle \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{f}_0^4 \langle m^4 + \alpha_A^4 \rangle^2 \right\} \right]^{1/2} \Big)^{1/3} \quad (70) \end{aligned}$$

Na análise da pós-flambagem o conhecimento do deslocamento na direção  $x$ , (encurtamento), é também importante. O deslocamento adimensional  $\bar{u}_1$  pode ser calculado como

$$\bar{u}_1 = \pi^2 \left( \bar{N}_{11} \alpha_A^2 - \frac{\bar{f}(\bar{f} + 2\bar{f}_0)m^2}{8} \right) \quad (71)$$

A carga de pós-flambagem é determinada pela Eq. (72) e a máxima carga de membrana pela Eq. (73).

$$\bar{N}_{11,post}^0 = \bar{N}_{11}^0 - \frac{\bar{f}(\bar{f} + 2\bar{f}_0)m^2(2 \cos^2(\pi\xi_2) - 1)}{8\alpha_A^2} \quad (72)$$

$$\max \bar{N}_{11,post}^0 = \bar{N}_{11}^0 - \frac{\bar{f}(\bar{f} + 2\bar{f}_0)m^2}{8\alpha_A^2} \quad (73)$$

## APÊNDICE B – CONCEITOS SOBRE PARÂMETROS DE LAMINAÇÃO

Parâmetros de laminação são uma forma de representar a rigidez de laminados utilizando os conceitos de invariantes. Isso permite reduzir o número de variáveis que representam o empilhamento. Esse conceito e suas extensões foram originalmente propostos por Tsai e Pagano (1968) e são descritos aqui com base em Jones (1999) e Foldager et al. (1998). Para se chegar na definição dos parâmetros de laminação, parte-se da equação constitutiva de uma lâmina fina e ortotrópica, a qual é dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (74)$$

onde  $\sigma_x$  é a tensão normal na direção  $x$ ,  $\sigma_y$  é a tensão normal na direção  $y$ ,  $\tau_{xy}$  é a tensão cisalhante no plano  $xy$ ,  $\varepsilon_x$  é a deformação normal na direção  $x$ ,  $\varepsilon_y$  é a deformação normal na direção  $y$ ,  $\gamma_{xy}$  é a deformação cisalhante no plano  $xy$  e  $[\bar{Q}]$  é a matriz de rigidez transformada. Os elementos da matriz  $[\bar{Q}]$  são dados por

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= c^4 Q_{11} + s^4 Q_{22} + 2c^2 s^2 Q_{12} + 4c^2 s^2 Q_{66} \\ \bar{Q}_{22} &= s^4 Q_{11} + c^4 Q_{22} + 2c^2 s^2 Q_{12} + 4c^2 s^2 Q_{66} \\ \bar{Q}_{12} &= \bar{Q}_{21} = c^2 s^2 Q_{11} + c^2 s^2 Q_{22} + (c^4 + s^4) Q_{12} - 4c^2 s^2 Q_{66} \\ \bar{Q}_{66} &= c^2 s^2 Q_{11} + c^2 s^2 Q_{22} - 2c^2 s^2 Q_{12} + (c^2 - s^2)^2 Q_{66} \\ \bar{Q}_{16} &= \bar{Q}_{61} = c^3 s Q_{11} - c s^3 Q_{22} + (c s^3 - c^3 s) Q_{12} + 2(c s^3 - c^3 s) Q_{66} \\ \bar{Q}_{26} &= c s^3 Q_{11} - c^3 s Q_{22} + (c^3 s - c s^3) Q_{12} + 2(c^3 s - c s^3) Q_{66} \end{aligned} \quad (75)$$

onde,

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 / (1 - (\nu_{12} \nu_{21})) \\ Q_{22} &= E_2 / (1 - (\nu_{12} \nu_{21})) \\ Q_{12} &= \nu_{12} E_2 / (1 - (\nu_{12} \nu_{21})) \\ Q_{66} &= G_{12} \\ c &= \cos(\theta) \\ s &= \sin(\theta) \end{aligned} \quad (76)$$

sendo  $\theta$  o ângulo que relaciona o sistema de referência  $xy$  com o sistema 1-2 (plano da lâmina)<sup>§</sup>,  $E_1$  o módulo de elasticidade na direção 1,  $E_2$  o módulo de elasticidade na direção 2,  $G_{12}$  o módulo de cisalhamento no plano 1-2 e  $\nu_{12}$  o maior coeficiente de Poisson no plano 1-2.

Observando a Eq. (75), é difícil entender as implicações físicas das rotações impostas às lâminas. Motivado por esse fato, Tsai e Pagano (1968) reformularam a matriz de rigidez transformada com os chamados invariantes, definidos por

$$\begin{aligned} U_1 &= (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})/8 \\ U_2 &= (Q_{11} - Q_{22})/2 \\ U_3 &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})/8 \\ U_4 &= (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})/8 \\ U_5 &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})/8. \end{aligned} \quad (77)$$

Os invariantes dependem apenas das propriedades do material, como mostra a Eq. (77), e podem ser usados para determinar os elementos da matriz de rigidez para uma lâmina ortotrópica no sistema  $xy$ ,

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{16} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \\ \bar{Q}_{26} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta \end{aligned} \quad (78)$$

A Figura B.1 mostra uma representação gráfica para o elemento  $\bar{Q}_{11}$ , escrito como a soma dos termos  $U_1$ ,  $U_2 \cos 2\theta$ , e  $U_3 \cos 4\theta$ , ou seja,  $\bar{Q}_{11}$  é determinada por uma constante fixa  $U_1$ , mais um termo com variação de baixa frequência e outro de maior frequência. Assim,  $U_1$  é uma medida efetiva da rigidez da lâmina em uma aplicação de projeto, pois não é afetada pela orientação (JONES, 1999).

---

<sup>§</sup> A direção 1 é paralela e a direção 2 é perpendicular às fibras.

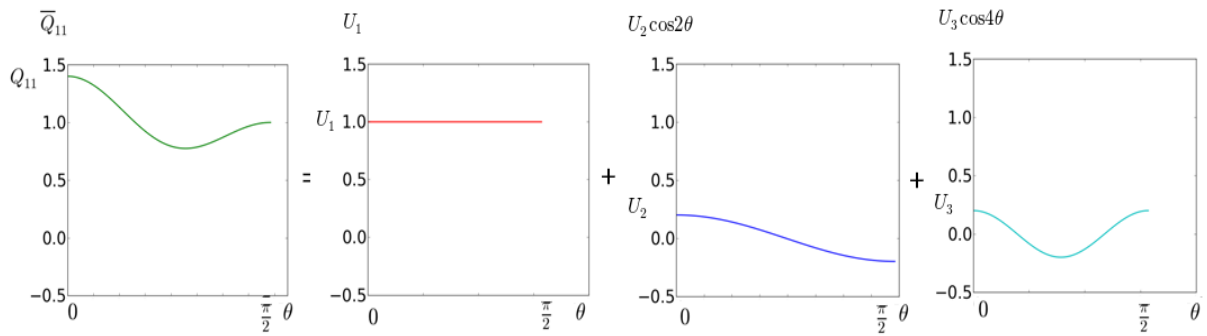


Figura B.1 - Decomposição de  $\bar{Q}_{11}$  em invariantes. Fonte: JONES (1999).

Considerando agora um laminado formado por  $nl$  lâminas, sua rigidez é representada pelas matrizes  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[D]$ , cujas componentes são definidas por (JONES, 1999)

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^{nl} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nl} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{nl} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)
 \end{aligned} \tag{79}$$

onde  $z$  é o eixo coordenado na direção perpendicular ao plano da lâmina,  $[A]$  representa a rigidez de membrana,  $[D]$  a rigidez de flexão e  $[B]$  o acoplamento membrana-flexão.

As matrizes de rigidez  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[D]$ , em termos da matriz de invariantes e dos parâmetros de laminação  $\{\xi\}^{A,B,D}$ , podem ser escritas na forma de vetores como

$$\begin{aligned}
 \{A\} &= h[U][1 \ \xi_1^A \ \xi_2^A \ \xi_3^A \ \xi_4^A]^T \\
 \{B\} &= h^2[U][1 \ \xi_1^B \ \xi_2^B \ \xi_3^B \ \xi_4^B]^T \\
 \{D\} &= \frac{h^3}{12}[U][1 \ \xi_1^D \ \xi_2^D \ \xi_3^D \ \xi_4^D]^T
 \end{aligned} \tag{80}$$

onde  $h$  é a espessura total do laminado e  $[U]$  é a matriz de invariantes, dada por

$$[U] = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & 0 & U_3 & 0 \\ U_1 & -U_2 & 0 & U_3 & 0 \\ \frac{U_1 - U_4}{2} & 0 & 0 & -U_3 & 0 \\ U_4 & 0 & 0 & -U_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{U_2}{2} & 0 & U_3 \\ 0 & 0 & \frac{U_2}{2} & 0 & -U_3 \end{bmatrix} \quad (81)$$

Os parâmetros de laminação são definidos por

$$\begin{aligned} \xi_{\{1,2,3,4\}}^A &= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{nl} (z_k - z_{k+1}) [\cos 2\theta_k \sin 2\theta_k \cos 4\theta_k \sin 4\theta_k] \\ \xi_{\{1,2,3,4\}}^B &= \frac{2}{h^2} \sum_{k=1}^{nl} (z_k^2 - z_{k+1}^2) [\cos 2\theta_k \sin 2\theta_k \cos 4\theta_k \sin 4\theta_k] \\ \xi_{\{1,2,3,4\}}^D &= \frac{4}{h^3} \sum_{k=1}^{nl} (z_k^3 - z_{k+1}^3) [\cos 2\theta_k \sin 2\theta_k \cos 4\theta_k \sin 4\theta_k] \end{aligned} \quad (82)$$

A matriz  $[A]$  e o vetor  $\{A\}$  tem a seguinte relação

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \rightarrow \{A\} = \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{66} \\ A_{12} \\ A_{16} \\ A_{26} \end{Bmatrix} \quad (83)$$

e as matrizes  $[B]$  e  $[D]$  são representadas de forma similar.

A vantagem do uso dos parâmetros de laminação é que um número arbitrário de camadas com diferentes orientações pode ser convertido em apenas doze parâmetros de laminação. Isso significa que o número de entradas para modelagem ou aplicação, por exemplo, nas RN ou RVS, permanece constante, mesmo se o número de lâminas variar. Assim, tem-se sempre doze parâmetros para um laminado geral ou oito para laminados simétricos, considerando um laminado com a mesma espessura total. Bloomfield et al. (2009) explicaram que o uso dos parâmetros de laminação na otimização do empilhamento reduz significativamente o número de variáveis de projeto em comparação com o uso das orientações e das espessuras.



Nesse mesmo artigo é apresentado um estudo da região viável, ou seja, da região do espaço de projeto que contém todos os vetores factíveis dos parâmetros de laminação. Cada vetor factível dos parâmetros de laminação corresponde a um empilhamento. Já para um vetor fora da região factível, não existe correspondência com um empilhamento.

## APÊNDICE C – CONCEITOS SOBRE REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

As redes neurais artificiais (RNA ou simplesmente RN) foram aplicadas inicialmente em problemas de classificação e reconhecimento de padrões. Atualmente elas são utilizadas nas mais diversas áreas da engenharia tais como: sistema de identificação de veículos, processos industriais, otimização, bioinformática (diagnóstico médico), classificação de textos e imagens, modelagem de séries temporais e mineração de dados (*data mining*). Os estudos que originaram as RN iniciaram-se no fim do século XIX e início do século XX com as teorias de inferência indutiva, ramo da estatística que determina a estimativa de uma função a partir de um conjunto de amostras. Nesse período os pesquisadores estudaram a teoria geral do aprendizado, consistindo de um processo de aprendizado baseado em análise matemática. Entretanto, o desenvolvimento de um modelo matemático de neurônio só avançou na década 1940, e culminou com a primeira aplicação dez anos mais tarde, com o *perceptron* e o ADALINE (*ADaptive Linear Neuron*) (HAYKIN, 1999).

Rosenblatt (1962) sugeriu o primeiro modelo de aprendizado de máquina ou algoritmo de aprendizado ou máquina de aprendizado, chamado de *perceptron* (VAPNIK, 2000). Ele foi o primeiro a descrever um modelo, baseado na neurofisiologia, como um programa de computador e demonstrando-o com experimentos simples. A representação artificial da rede de neurônios fisiológicos, originou a inteligência artificial, denominada as vezes de máquina de aprendizado. A generalização deste experimento culminou no desenvolvimento do *perceptron* para resolver problemas de reconhecimento de padrões (imagens) separando-os em duas categorias diferentes (VAPNIK, 2000). Uma rede formada por multicamadas de *perceptron* é denominada redes neurais artificiais.

O ADALINE e o *perceptron* são redes neurais similares com apenas uma camada. O primeiro usa uma função de transferência linear e o segundo uma função limiar de ativação binária. A função limiar determina a forma e a intensidade com que se alteram os dados de um neurônio a outro. Exemplos de função limiar: linear, de grau  $d$ , rampa, sigmoidal e gaussiana. Cybenko (1989) provou que usando uma superposição de funções sigmoidais pode-se aproximar qualquer função suave.

Este conceito foi aplicado às RN para a construção destas redes com somente uma camada escondida e com funções sigmoidais contínuas não-lineares, portanto as redes neurais são formadas por muitos níveis de elementos sigmoidais. O *perceptron* é treinado com a regra de aprendizado com a função limiar e os pesos sinápticos e o ADALINE com o algoritmo dos mínimos quadrados (*least mean squared* - LMS). As duas redes neurais estão limitadas para a resolução de problemas linearmente separáveis, classificação através de funções lineares ou classificação de padrões linearmente separáveis. Esta limitação foi superada com o desenvolvimento do algoritmo de retropropagação (*backpropagation*) na década de 1980. Este algoritmo inaugurou uma nova era na história do aprendizado de máquina (VAPNIK, 2000). Trata-se de uma generalização do algoritmo dos mínimos quadrados utilizado para o treinamento de uma rede multicamadas. Tanto o algoritmo dos mínimos quadrados quanto a retropropagação são aproximações do algoritmo da máxima descida (*steepest descent*). A diferença é que no ADALINE o erro é uma função linear explícita dos pesos da rede neural, o que facilita o cálculo de suas derivadas. Por outro lado, a retropropagação é uma rede multicamadas com funções de transferência não-lineares e os cálculos de suas derivadas relacionadas aos seus pesos requerem a aplicação da regra da cadeia. Diante disso o erro deve ser retropropagado pelas múltiplas camadas no processo de atualização dos pesos (HAGAN et al., 1996). A Figura C.1 mostra o modelo de neurônio artificial.

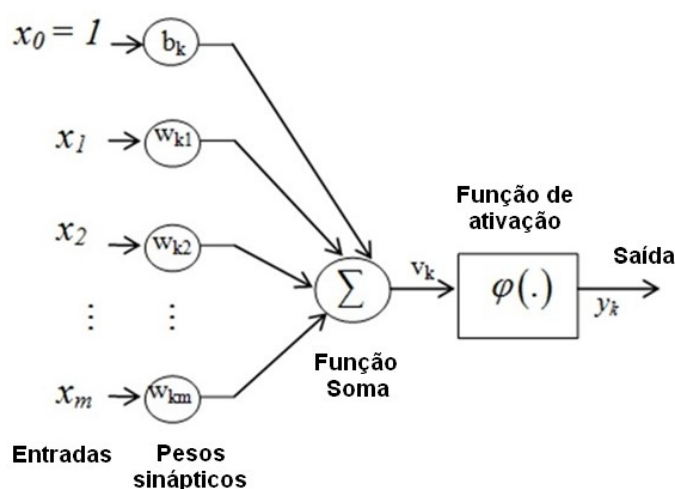


Figura C.1 - Modelo não-linear de um neurônio artificial. Fonte: (HAYKIN, 1999).

O modelo apresenta as entradas ( $x_m$ ) que são multiplicadas pelos pesos sinápticos ( $w_{km}$ ). O termo sináptico advem da biologia, onde sinapse significa conexão entre neurônios. Nas RN, os pesos sinápticos são forças de conexões entre neurônios, a quem são atribuídos valores, utilizados para armazenar o conhecimento adquirido. O *bias* ( $b_k$ ) são pesos cujo valor de entrada é igual a um. A soma destes pesos multiplicados pelas entradas ( $v_k$ ) tem a sua amplitude limitada pela função de ativação ( $\varphi(\cdot)$ ). A saída do neurônio ( $y_k$ ) é dada por

$$v_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j + b_k$$

$$y_k = \varphi(v_k)$$
(84)

onde  $m$  é o número total de entradas.

Uma rede multicamada está representada na Figura C.2. A mesma tem uma camada de entrada, uma camada de neurônios escondidos e uma camada de neurônios de saída.

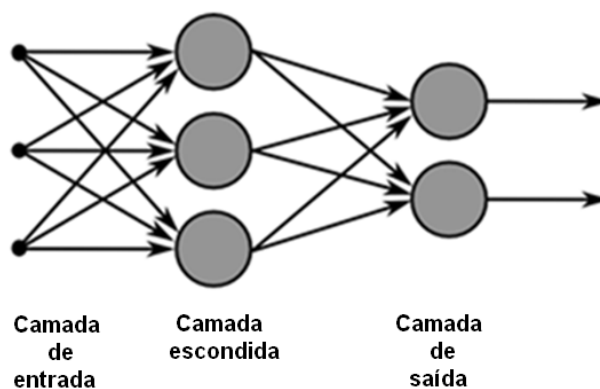


Figura C.2 - Esquema de rede neural multicamadas.

A camada de neurônios escondidos aperfeiçoa o treinamento da rede neural, realizando uma transformação não-linear dos dados de entrada para um novo espaço chamado espaço característico (HAYKIN, 2009). Além de possibilitar a solução de uma gama maior de problemas, como problemas discretos e regressões não-lineares. Adicionando-se uma ou mais camadas escondidas, a rede passa a ser de alta ordem. Redes com mais de uma camada escondida, em alguns casos, são mais adequadas para que não se obtenha resultados indesejáveis como ruídos armazenados nos

pesos sinápticos das redes ou uma generalização pobre como a memorização das respostas (HAYKIN, 2009).

O treinamento das RN pode ser supervisionado (treinamento a partir de dados de entrada e saída desejada) ou não supervisionado. A rede sem supervisão usa regras de aprendizado competitivas e não faz parte do escopo deste trabalho. O aprendizado supervisionado necessita que uma saída desejada seja comparada com a saída das redes neurais e o erro envolvido nesse processo deve ser analisado. A medida do erro é uma função não-linear de acordo com os parâmetros da rede (pesos e *bias*) e métodos de análise numérica podem ser adotados para a minimização da função. O erro é utilizado como critério para o ajuste dos pesos. O processo de minimização dos erros é realizado com o ajuste dos pesos e *bias* usando o algoritmo de retropropagação ou uma de suas variações. O método para o treinamento supervisionado baseado em Haykin (1999) é apresentado nesta seção. O erro a ser minimizado é o erro médio quadrático, dado por

$$F(\{w\}) = (\{t_i\} - \{y_i\})^T (\{t_i\} - \{y_i\}) = \{e_k\}^T \{e_k\} \quad (85)$$

onde  $\{w\}$  é um vetor com os pesos e *bias* da rede neural,  $t_i$  é o vetor de saídas desejadas e  $e_i$  é o vetor erro da  $i$ -ésima iteração. Os pesos e bias são atualizados de acordo com as expressões

$$[w]^{cm}(i+1) = [w]^{cm}(i) - \zeta \frac{\partial F}{\partial [w]^{cm}} \quad (86)$$

$$[b]^{cm}(i+1) = [b]^{cm}(i) - \zeta \frac{\partial F}{\partial [b]^{cm}}$$

onde  $cm$  é a camada de rede neural considerada,  $\zeta$  é a taxa de aprendizado. Como em redes neurais multicamadas o erro não é uma função explícita dos pesos e bias na camada oculta, é necessário usar regra da cadeia para obter as derivadas dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial w_{k,j}^{cm}} &= \frac{\partial F}{\partial v_k^{cm}} \frac{\partial v_k^{cm}}{\partial w_{k,j}^{cm}} \\ \frac{\partial F}{\partial b_k^{cm}} &= \frac{\partial F}{\partial v_k^{cm}} \frac{\partial v_k^{cm}}{\partial b_k^{cm}},\end{aligned}\tag{87}$$

onde  $v_k^{cm}$  é o potencial de ativação do neurônio  $k$  na camada  $cm$  e é dado por

$$v_k^{cm} = \left( \sum_{j=1}^{R^{m-1}} w_{k,j}^{cm} y_j^{cm-1} \right) + b_k^{cm},\tag{88}$$

onde  $R^{m-1}$  é o número de neurônios na camada  $(m - 1)$ . Sendo assim, o segundo termo da Eq. (87) pode ser calculado, resultando

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_k^{cm}}{\partial w_{k,j}^{cm}} &= y_j^{cm-1} \\ \frac{\partial v_k^{cm}}{\partial b_k^{cm}} &= 1.\end{aligned}\tag{89}$$

Definindo  $S_k^{cm} = \frac{\partial F}{\partial v_k^{cm}}$  como a sensibilidade do índice de desempenho  $F$  à mudanças no  $k$ -ésimo elemento de entrada da rede na camada  $cm$ , a Eq. (87) pode ser simplificada, resultando em

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial w_{k,j}^{cm}} &= S_k^{cm} y_j^{cm-1} \\ \frac{\partial F}{\partial b_k^{cm}} &= S_k^{cm}.\end{aligned}\tag{90}$$

O algoritmo de retropropagação pode, então, ser expresso como

$$\begin{aligned}[w]^{cm}(i+1) &= [w]^{cm}(i) - \zeta \{S\}^{cm} (\{y\}^{cm-1})^T \\ [b]^{cm}(i+1) &= [b]^{cm}(i) - \zeta \{S\}^{cm},\end{aligned}\tag{91}$$

onde  $\{S\}^{cm}$  é o vetor sensibilidade da camada  $cm$ , dado por

$$\{S\}^{cm} = \frac{\partial F}{\partial \{v\}^{cm}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial F}{\partial v_1^{cm}} \\ \frac{\partial F}{\partial v_2^{cm}} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial v_{R^{cm}}^{cm}} \end{array} \right\}, \quad (92)$$

onde  $R^{cm}$  é o número de neurônios da camada  $cm$ . A sensibilidade da camada  $cm$  é computada através da sensibilidade da camada  $m + 1$ .

Para determinar a relação de recorrência para as sensibilidades usa-se a seguinte matriz Jacobiana

$$\frac{\partial \{v\}^{cm+1}}{\partial \{v\}^{cm}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1^{cm+1}}{\partial v_1^{cm}} & \frac{\partial v_1^{cm+1}}{\partial v_2^{cm}} & \cdots & \frac{\partial v_1^{cm+1}}{\partial v_{R^{cm}}^{cm}} \\ \frac{\partial v_2^{cm+1}}{\partial v_1^{cm}} & \frac{\partial v_2^{cm+1}}{\partial v_2^{cm}} & \cdots & \frac{\partial v_2^{cm+1}}{\partial v_{R^{cm}}^{cm}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_{R^{cm+1}}^{cm+1}}{\partial v_1^{cm}} & \frac{\partial v_{R^{cm+1}}^{cm+1}}{\partial v_2^{cm}} & \cdots & \frac{\partial v_{R^{cm+1}}^{cm+1}}{\partial v_{R^{cm}}^{cm}} \end{bmatrix} \quad (93)$$

Considerando, por exemplo, o elemento  $ij$  da matriz Jacobiana

$$\frac{\partial v_k^{cm+1}}{\partial v_k^{cm}} = \frac{\partial \left( \sum_{j=1}^{R^{cm}} w_{k,j}^{cm+1} y_j^{cm} + b_k^{cm+1} \right)}{\partial v_k^{cm}} = w_{k,j}^{cm+1} \frac{\partial y_j^{cm}}{\partial v_j^{cm}} = w_{k,j}^{cm+1} \frac{\partial \text{cm}(v_j^{cm})}{\partial v_j^{cm}} = w_{k,j}^{cm+1} \dot{\phi}^{cm}(v_j^{cm}). \quad (94)$$

Na forma matricial tem-se

$$\frac{\partial \{v\}^{cm+1}}{\partial \{v\}^{cm}} = [w]^{cm+1} [\dot{\phi}(\{v\}^{cm})]^{cm} \quad (95)$$

onde,

$$[\dot{\phi}(\{v\}^{cm})]^{cm} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}(n_1^{cm}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dot{\phi}(n_2^{cm}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dot{\phi}(n_{R^{cm}}^{cm}) \end{bmatrix} \quad (96)$$

A relação de recorrência é escrita,

$$\begin{aligned} \{S\}^{cm} &= \frac{\partial F}{\partial \{v\}^{cm}} = \left( \frac{\partial \{v\}^{cm+1}}{\partial \{v\}^{cm}} \right)^T \frac{\partial \{F\}}{\partial \{v\}^{cm+1}} = [\dot{\phi}(\{v\}^{cm})]^{cm} [W]^{cm+1} \frac{\partial \{F\}}{\partial \{v\}^{cm+1}} \\ &= [\dot{\phi}(\{v\}^{cm})]^{cm} [W]^{cm+1} \{S\}^{cm+1} \end{aligned} \quad (97)$$

e observa-se nesta equação que a sensibilidade da camada  $cm$  é determinada em função da camada  $cm + 1$ .

Resta ainda um passo para completar o algoritmo de retropropagação. É necessário um ponto inicial para a relação de recorrência, o qual é obtido na última camada, ou seja

$$S_k^{cm} = \frac{\partial F}{\partial v_k^{cm}} = \frac{\partial (\{t\} - \{y\})^T \partial (\{t\} - \{y\})}{\partial v_k^{cm}} = \frac{\partial \sum_{k=1}^R (t_k - y_k)^2}{\partial v_k^{cm}} = -2(t_k - y_k) \frac{\partial y_k}{\partial v_k^{cm}}. \quad (98)$$

Como,

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_k^{cm}} = \frac{\partial \varphi^{cm}(v_i^{cm})}{\partial v_k^{cm}} = \dot{\varphi}^{cm}(v_k^{cm}) \quad (99)$$

Pode-se escrever,

$$S_k^{cm} = \frac{\partial F}{\partial v_k^{cm}} = -2(t_k - y_k) \dot{\varphi}^{cm}(v_k^{cm}). \quad (100)$$



## APÊNDICE D – TEORIA DE APRENDIZADO ESTATÍSTICO

(Baseado em Vapnik, 2000)

Em 1962, Novikoff provou o primeiro teorema acerca do *perceptron* (VAPNIK, 2000). Este teorema iniciou a teoria do aprendizado como visto atualmente. Ele afirma que se (i) a norma dos vetores de treinamento  $z$  é limitada por algumas constantes  $R$  ( $|z| \leq R$ ); (ii) os dados de treinamento podem ser separados com uma margem  $\rho$ ; (iii) a sequência de treinamento é apresentada para o *perceptron* com suficientes números de vezes, e então depois de no máximo  $N \leq \left\lceil \frac{R^2}{\rho^2} \right\rceil$  correções o hiperplano que separa os dados de treinamento será construído. Este teorema é extremamente importante na criação da teoria do aprendizado. Ele de alguma forma conecta a causa da generalização da habilidade com o princípio de minimização do número de erros no conjunto de treinamento. A expressão  $N \leq \left\lceil \frac{R^2}{\rho^2} \right\rceil$  descreve um importante conceito para uma grande classe de máquinas de aprendizado permitindo o controle da generalização da habilidade.

Nas décadas de 1960 e 1970, em vários ramos da matemática, muitas teorias inovadoras foram desenvolvidas que se tornaram fundamentais para criar uma nova filosofia. Uma delas é a teoria da regularização para a solução de problemas mal postos.

Em um problema bem posto, a solução de equações é baseado em Hadamard, com três condições: (1) existe a solução; (2) a solução é única e (3) a solução é estável.

Um problema mal posto, a solução da equação ocorre quando viola pelo menos um dos requisitos acima do problema bem posto.

No início de 1900, Hadamard observou que sob certas circunstâncias (muito gerais) o problema de resolver os operadores da equação (linear),

$$Af = F, \quad f \in \mathcal{F}, \tag{101}$$

isto é, encontrar  $f \in \mathcal{F}$  que satisfaça a igualdade, é mal posto; mesmo se existe uma única solução para esta equação, um pequeno desvio no lado direito da equação ( $F_\delta$

invés de  $F$ , onde  $\|F - F_\delta\| < \delta$  é arbitrariamente pequeno) pode causar grandes desvios na solução (pode acontecer que  $\|f_\delta - f\|$  seja grande).

Neste caso, se o lado direito  $F$ , da equação não é exata (isto é, ela é igual a  $F_\delta$  onde  $F_\delta$  difere de  $F$  por algum nível de ruído de  $\delta$ , as funções  $f_\delta$  que minimizam o funcional

$$R(f) = \|Af - F_\delta\|^2, \quad (102)$$

não garantem uma boa aproximação da solução desejada mesmo se  $\delta$  tender a zero.

Hadamard pensou que os problemas mal postos são fenômenos puramente matemáticos e que todos os problemas reais são bem postos. Entretanto, na segunda metade do século um número muito importante de problemas da vida real foi considerado mal posto. Em particular, problemas mal postos aumentam quando se tenta reverter as relações causa-efeito: encontrar causas desconhecidas de consequências desconhecidas. Mesmo se as formas das relações causa-efeito de mapeamento são de um para um, o problema de inverter pode ser mal posto. É importante saber que um dos principais problemas de estatística, estimar a função densidade de dados, é mal posto.

Na metade da década de 1960 foi descoberto que se ao invés de minimizar o funcional  $R(f)$ , minimiza-se outro funcional chamado funcional regularizado

$$R^*(f) = \|Af - F_\delta\|^2 + \gamma(\delta)\Omega(f), \quad (103)$$

onde  $\Omega(f)$  é algum funcional,  $\gamma(\delta)$  é uma constante apropriadamente escolhida (dependendo do nível de ruído), então obtêm-se uma sequência de soluções que converge para uma desejada quando  $\delta$  tende a zero (Tikhonov (1963), Ivanov (1962) e Phillips (1962) *apud* VAPNIK, 2000).

A teoria de regularização foi um dos primeiros sinais da existência da inteligência por inferência. Ela demonstrou que enquanto o método da 'auto-evidência' de minimizar o funcional  $R(f)$  não resolve, o método da não 'auto-evidência' de minimizar o funcional  $R^*(f)$ , resolve.

A influência da filosofia criada pela teoria de resolver problemas mal postos é muito profunda. Ambas as filosofias de regularização e a técnica de regularização tornaram-se largamente disseminadas em muitas áreas da ciência, incluindo a estatística. A seguir o problema de minimização do risco será analisado sob esta perspectiva.

Com objetivo de escolher a melhor aproximação disponível para uma resposta supervisionada, uma medida de perda (*loss*), ou discrepância,  $L(y, f(x, \alpha))$  entre a resposta  $y$  do supervisor para dados de entrada  $x$  e a resposta  $f(x, \alpha)$  fornecida pelo funcional risco (*risk funcional*)

$$R(\alpha) = \int L(y, f(x, \alpha)) dF(x, y). \quad (104)$$

A meta é encontrar a função  $f(x, \alpha_0)$  que minimiza o funcional risco  $R(\alpha)$  sobre uma classe de funções  $f(x, \alpha)$ ,  $\alpha \in \Lambda$  em situações onde a função de distribuição de probabilidade  $F(x, y) = F(x)F(y/x)$  é desconhecida e somente a informação disponível esta contida no conjunto de treinamento  $(x_1, y_1), \dots, (x_l, y_l)$ .

Para a estimativa de regressão, considere que a resposta do supervisor  $y$  seja um valor real, e considere  $f(x, \alpha)$ ,  $\alpha \in \Lambda$ , seja um conjunto de funções reais que contém a função de regressão

$$f(x, \alpha_0) = \int y dF((y/x)). \quad (105)$$

É conhecido que a função de regressão é uma que minimiza o funcional com a seguinte função perda

$$L(y, f(x, \alpha)) = (y - f(x, \alpha))^2, \quad (106)$$

então o problema de estimar a regressão é o problema de minimização do risco funcional com a função perda em situação onde a medida de probabilidade  $F(x, y)$  é desconhecida mas os dados são informados.

O paradigma clássico de estimar a regressão é baseado em outro modelo, chamado de modelo de medir a função com adição de ruído. Suponha que uma função desconhecida tem a forma paramétrica

$$f_0(x) = f(x, \alpha_0), \quad (107)$$

onde  $\alpha_0 \in \Lambda$  é um vetor de parâmetros desconhecidos. Suponha também que em um ponto qualquer  $x_i$  pode-se medir o valor desta função com um ruído adicionado

$$y_i = f(x_i, \alpha_0) + \xi_i, \quad (108)$$

onde o ruído  $\xi_i$  não depende de  $x_i$  e é distribuído de acordo com uma função densidade conhecida  $p(\xi)$ . O problema torna-se estimar a função  $f(x, \alpha_0)$  de um conjunto  $f(x, \alpha), \alpha \in \Lambda$ , usando dados obtidos por medidas da função  $f(x, \alpha_0)$  corrompida com a adição de ruído.

Neste modelo, usando os pares de dados observados  $(x_1, y_1), \dots, (x_l, y_l)$ , pode-se estimar o parâmetro  $\alpha_0$  da função desconhecida  $f(x, \alpha_0)$  pelo método ML (*maximum likelihood*), a saber pela maximização do funcional

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^l \ln p(y_i - f(x_i, \alpha)). \quad (109)$$

Recorde que  $p(\xi)$  é uma função desconhecida e que  $\xi = y - f(x, \alpha_0)$ .) Tomando-se a lei de distribuição normal

$$p(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (110)$$

Com média zero e alguma variância fixa como um modelo com ruído obtém-se com o método dos mínimos quadrados

$$L^*(\alpha) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^l (y_i - f(x_i, \alpha))^2 - l \ln(\sqrt{2\pi}\sigma). \quad (111)$$

Maximizando  $L^*(\alpha)$  em relação aos parâmetros  $\alpha$  é equivalente a minimizar o funcional

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^l (y_i - f(x_i, \alpha))^2, \quad (112)$$

chamado funcional dos mínimos quadrados.

A configuração do problema de aprendizado pode ser descrita como segue. Suponha que a medida de probabilidade  $F(z)$  pode ser definida no espaço  $Z$ . Considere o conjunto de funções  $Q(z, \alpha), \alpha \in \Lambda$ . O objetivo é minimizar o risco funcional

$$R(\alpha) = \int Q(z, \alpha) dF(z), \quad \alpha \in \Lambda. \quad (113)$$

onde a medida de probabilidade  $F(z)$  é desconhecida, mas amostras independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.)  $z_1, \dots, z_l$  são dadas.

Os problemas de aprendizado considerados acima são casos particulares do problema geral de minimização do risco funcional numa base empírica de dados, onde  $z$  descreve um par  $(x, y)$  e  $Q(z, \alpha)$  é a função específica de perda.

O princípio indutivo de minimização do risco empírico (do inglês, *The Empirical Risk Minimization (ERM) Inductive Principle*), será abordado com o objetivo de minimizar o risco funcional com uma função de distribuição desconhecida  $F(z)$ . O seguinte princípio indutivo pode ser aplicado:

(i) O risco funcional  $R(\alpha)$  é substituído pelo chamado risco funcional empírico construído com base no conjunto de treinamento.

$$R_{emp}(\alpha) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l Q(z_i, \alpha) \quad (114)$$

(ii) Uma função aproximada  $Q(z, \alpha)$  que minimiza o risco funcional dada pela Eq. (113) minimiza o risco empírico dada pela Eq. (114).

Este princípio é chamado de princípio indutivo da minimização do risco empírico. O princípio indutivo define um processo de aprendizagem se para qualquer conjunto dado de amostras a máquina de aprendizado escolhe a aproximação usando o princípio indutivo. Este princípio é muito geral. Os métodos clássicos para a solução de um problema específico de aprendizagem, como o método dos mínimos quadrados para o problema de estimativa de regressão ou o método ML (*maximum likelihood*) em problemas de estimativa de densidade, são realizações do princípio indutivo de minimização do risco empírico considerado acima.

De fato, substituindo uma função de perda específica Eq. (106) na Eq. (114), obtém-se o funcional a ser minimizado

$$R_{emp}(\alpha) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (y_i - f(x_i, \alpha))^2, \quad (115)$$

$$L(p(x, \alpha)) = -\log p(x, \alpha), \quad (116)$$

que forma o método dos mínimos quadrados, enquanto pela substituição da função de perda específica Eq. (116) na Eq. (114) obtém-se o funcional a ser minimizado

$$R_{emp}(\alpha) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \ln p(x_i, \alpha). \quad (117)$$

Minimizar o funcional é equivalente ao método ML (este utiliza o sinal positivo do lado direito).

Na década de 1930 Glivenko e Cantelli provaram um teorema que pode ser considerado como o mais importante resultado na fundação da estatística. Eles provaram que qualquer função de distribuição de probabilidade de uma variável randômica  $\xi$ ,

$$F(z) = P\{\xi < z\}, \quad (118)$$

pode ser aproximada arbitrariamente muito bem por função de distribuição empírica

$$F_l(z) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \theta(z - z_i), \quad (119)$$

onde  $z_1, \dots, z_l$  são amostras de dados independentes e identicamente distribuídas obtidas de acordo com uma densidade desconhecida. Mais precisamente, o teorema de Glivenko-Cantelli afirma que para qualquer  $\varepsilon > 0$ , tem-se a igualdade

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_z |F(z) - F_l(z)| > \varepsilon \right\} = 0, \quad (120)$$

e que a convergência em probabilidade é verdadeira.

Suponha a formulação de Glivenko-Cantelli em diferente forma. Considere o conjunto de eventos

$$A_z = \{\bar{z} : \bar{z} < z\}, z \in (-\infty, \infty), \quad (121)$$

onde o conjunto dos pontos tende para  $-\infty$ . Qualquer evento  $z$  deste conjunto de eventos pode ser avaliado pela probabilidade

$$P(A_z) = \int_{-\infty}^z dF(\bar{z}) = F(z). \quad (122)$$

Usando uma amostra i.i.d de tamanho  $l$  pode-se também estimar a frequência de ocorrência do evento  $A_z$  das tentativas independentes como

$$v(A_z) = \frac{nA_z}{l} = F_l(z). \quad (123)$$

Nestes termos, o teorema de Glivenko-Cantelli apresenta a convergência na forma fraca, porque somente um subconjunto do total dos eventos é considerado, da estimativa dada pela Eq. (123) para a medida de probabilidade da Eq. (122) em relação ao conjunto de eventos da Eq. (121).

O princípio indutivo da minimização estruturada do risco, do inglês, *Structural Risk Minimization (SRM) Inductive Principle*, é analisado para a minimização do risco funcional. A teoria para controlar a habilidade de generalização das máquinas de aprendizado é dedicada na construção do princípio indutivo para a minimização do risco funcional usando pequenas amostras na instância de treinamento.

A amostra de tamanho  $l$  é considerada pequena se a proporção  $l/h$  (razão do número de padrões de treinamento para a dimensão VC (Vapnik-Chervonenkis) das funções de aprendizado de máquina) é pequena, diz-se  $l/h < 20$ .

Os métodos para construir pequenas amostras usam os limites da habilidade de generalização das máquinas de aprendizado com conjuntos da totalidade de funções limites não negativas,

$$R(\alpha_l) \leq R_{emp}(\alpha_l) + \frac{B\varepsilon}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R_{emp}(\alpha_l)}{B\varepsilon}} \right), \quad (124)$$

e os limites para a habilidade da generalização das máquinas de aprendizado com os conjuntos de funções não limitadas, são

$$R(\alpha_l) \leq \frac{R_{emp}(\alpha_l)}{(1 - a(p)\tau\sqrt{\varepsilon})_+}, \quad (125)$$

onde,

$$a(p) = \sqrt[p]{\frac{1}{2} \left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{p-1}}; \quad \varepsilon = 2 \frac{\ln N - \ln \eta}{l}, \quad (126)$$

se o conjunto de funções  $Q(z, \alpha), 1, \dots, N$ , contém  $N$  elementos, e

$$\varepsilon = 4 \frac{h \left( \ln \frac{2l}{h} + 1 \right) - \ln(\eta/4)}{l}. \quad (127)$$

Se o conjunto de funções  $Q(z, \alpha), \alpha \in \Lambda$ , contém um número infinito de elementos e tem uma dimensão VC finita. Cada limite é válido com probabilidade de mais ou menos  $1 - \eta$ .

O princípio da minimização do risco empírico é destinado para tratar com grandes amostras. Ele pode ser justificado considerando-se a desigualdade da Eq. (124) ou a desigualdade da Eq. (125).

Quando  $l/h$  é grande,  $\varepsilon$  é pequeno. Entretanto, a segunda parcela da soma da Eq. (124) (a segunda parcela no denominador da Eq. (125) torna-se pequena. O risco presente é então próximo do valor do risco empírico. Neste caso, um valor pequeno do risco empírico garante um valor pequeno do risco (esperado).

Portanto, se  $l/h$  é pequeno, um valor pequeno de  $R_{emp}(\alpha_l)$  não garante um pequeno valor para o risco presente. Neste caso, para minimizar o risco presente  $R(\alpha)$  deve-se minimizar o lado direito da desigualdade da Eq. (124) ou Eq. (125), simultaneamente sobre ambos os termos. Note, portanto que o primeiro termo da desigualdade da Eq. (124) depende de uma função específica do conjunto de funções, enquanto que o segundo termo depende da dimensão VC do conjunto completo das funções. Para minimizar o lado direito do limite do risco, da Eq. (124) ou Eq. (125), deve-se fazer com que a dimensão VC seja uma variável de controle.



O princípio geral a seguir, o qual é chamado de princípio indutivo de minimização do risco estruturado, é usado para minimizar o risco funcional com respeito a ambos os termos, o risco empírico, e o intervalo de confiança.

Suponha que o conjunto  $S$  de funções  $Q(z, \alpha), \alpha \in \Lambda$ , seja provido com uma estrutura consistindo de subconjuntos aninhados de funções  $S_k = \{Q(z, \alpha), \alpha \in \Lambda_k\}$ , como a Figura D.1.

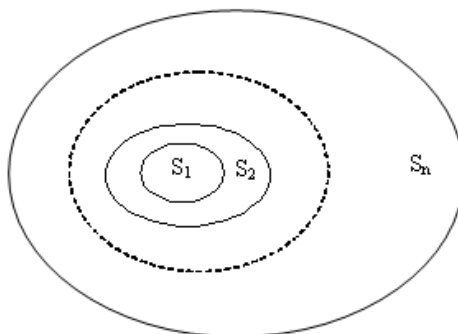


Figura D.1 – Estrutura de um conjunto de funções.

Uma estrutura de um conjunto de funções é determinada pelo aninhamento dos subconjuntos das funções  $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n$ . Onde os elementos da estrutura satisfazem as duas seguintes propriedades:

(i) A dimensão VC,  $h_k$  de cada conjunto  $S_k$  das funções é finita.

(ii) Qualquer elemento  $S_k$  da estrutura contém outro conjunto limitado de funções da totalidade, como

$$0 \leq Q(z, \alpha) \leq B_k, \alpha \in \Lambda_k, \tag{128}$$

ou um conjunto de funções que satisfaçam a desigualdade para alguns pares  $(p, \tau_k)$ , com a equação

$$\sup_{\alpha \in \Lambda_k} \frac{(\int Q^p(\alpha \in \Lambda_k z, \alpha) dF(z))^{\frac{1}{p}}}{\int Q(z, \alpha) dF(z)} \leq \tau_k, p > 2, \tag{129}$$

Esta estrutura é denominada de estrutura admissível.

Para um dado conjunto de amostras  $z_1, \dots, z_l$  o princípio da minimização do risco estruturado escolhendo a função  $Q(z, \alpha_l^k)$  e minimizando o risco empírico do

subconjunto para o qual garante que o risco, determinado pela Eq. (124) ou a desigualdade da Eq. (125), que dependendo das circunstâncias é mínimo.

O princípio da minimização do risco estruturado define a troca/compensação entre a qualidade de aproximação de amostras dadas e a complexidade da função de aproximação. Quando o subconjunto de índice  $n$  aumenta, o mínimo do risco empírico diminui. Portanto, o termo responsável para o intervalo de confiança (segundo termo da desigualdade da Eq. (124) ou a desigualdade da Eq. (125) aumenta como mostra a Figura D.2. O princípio da minimização leva os dois fatores em conta ao escolher o subconjunto  $S_n$  para a minimização do campo do risco empírico o melhor limite do risco presente.

O limite do risco é a soma do risco empírico e o intervalo de confiança. O risco empírico diminui com o índice do elemento da estrutura, enquanto que o intervalo de confiança aumenta. O pequeno limite do risco é alcançado com a soma dos elementos apropriados da estrutura.

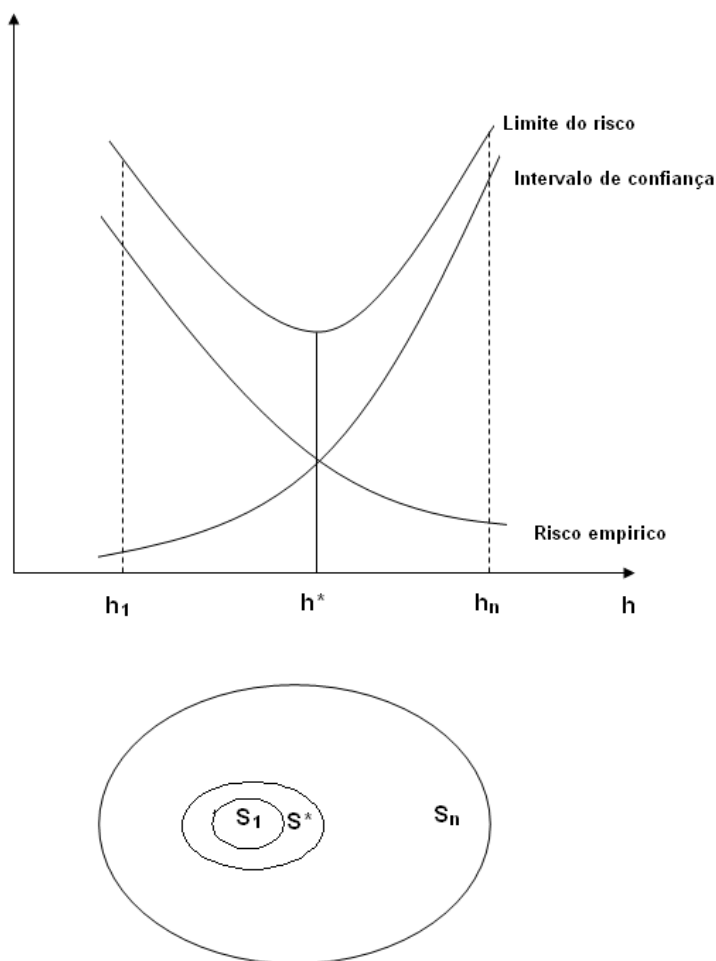


Figura D.2 – Risco empírico e limite de risco.