ppgmat

UNIVERSIDADE TECNÓLOGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LUÍS FELIPE GONÇALVES CARNEIRO

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

LONDRINA

2021

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

LUÍS FELIPE GONÇALVES CARNEIRO

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

THE MATHEMATICAL REASONING PROCESS EMPLOYED BY 6TH AND 7TH GRADE STUDENTS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman

LONDRINA

2021

4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.
Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

LUIS FELIPE GONCALVES CARNEIRO

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL.

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 23 de Setembro de 2021

Prof.a Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Marcia Aguiar, Doutorado - Fundação Universidade Federal do Abc (Ufabc)

Prof.a Maria De Lurdes Serrazina, Doutorado - Universidade de Lisboa

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 23/09/2021.

Dedico este trabalho ao Tiago, participante desta pesquisa. Ele foi um dos meus melhores alunos no ano de 2019. Estava cursando o 7º ano pela segunda vez. No último trimestre letivo, ficou com nota 10,0 em Matemática, apesar de todas as dificuldades para frequentar a escola. No final do ano, Tiago foi reprovado por exceder o limite de faltas.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço minha orientadora, Eliane, que teve participação decisiva para a realização deste trabalho. Agradeço pelos ensinamentos, pela sabedoria, pela paciência. E agradeço, principalmente, por acreditar em mim há quase oito anos. Desde então, possui grande influência em tudo que consigo produzir.

Também agradeço aos membros da banca, professores André Trevisan, Lurdes Serrazina e Marcia Aguiar, pela disponibilidade na leitura do trabalho. Sou muito grato pelas valiosas sugestões, que contribuíram tanto para a melhora da pesquisa quanto para minhas reflexões.

Agradeço aos meus colegas do grupo de pesquisa pelas sugestões e por me ouvirem falar deste trabalho.

Também quero agradecer todas as pessoas que estiveram comigo no período do mestrado. Em primeiro lugar, meus pais, Everton e Irene, os primeiros professores que me inspiraram e sempre me apoiaram (obrigaram) a estudar cada vez mais. Se hoje possuo algum gosto pela leitura, é devido a eles. Meu pai, pelo exemplo. Minha mãe, pelo exemplo, pela insistência e por me presentear com o livro do Peter Pan, que até hoje não li.

Sou grato aos meus irmãos, Fernanda, Larissa e João Luiz por me fazerem feliz. Sou grato às minhas avós, Anice e Tereza, e aos meus avôs, já falecidos, João e Nehemias, por também serem pessoas inspiradoras.

Agradeço muitíssimo às melhores pessoas que conheci nessa cidade e me receberam tão bem: Jessica, Paulo Jorge e Clay. Obrigado por proporcionarem momentos ótimos e por serem tão incríveis.

Também agradeço a todos os meus colegas do mestrado por serem uma turma tão incrível, em especial Andréa, Erika, João Paulo, Marcio, Paulo Jorge (de novo), Rafaela, Roberta, Silmara e Wanderson pelos ótimos momentos na sorveteria depois da aula (às vezes antes).

Agradeço a todos os professores do PPGMAT, pela imensa dedicação. Gostaria de citar Sergio, Andresa, Mirian, Leonardo, Línlya, Henrique, Jader e Rodolfo, professores com os quais cursei ótimas disciplinas.

Sou grato às diretoras das escolas em que coletei os dados para esta pesquisa por serem tão receptivas e sou imensamente grato aos alunos que participaram desta pesquisa: Bianca, Emerson, Fernando, Gilmar, Gisele, Gustavo, Henrique, Jean, Jéssica, José, Laís, Leandro, Lucas, Lúcio, Manoel, Marcos e Tiago. Gostaria de poder citar seus nomes reais aqui.

Por fim, agradeço à UTFPR pelo auxílio financeiro concedido para a realização desta dissertação.

CARNEIRO, Luís F. G. **Processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do Ensino Fundamental**. 2021. 123 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

RESUMO

O raciocínio matemático tem recebido especial atenção de pesquisas e documentos curriculares e colocado com um dos objetivos do ensino da Matemática na escola. Diante disso, estabeleço como o objetivo da presente pesquisa analisar quais processos de raciocínio matemático estudantes do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental mobilizam e de que maneira os empregam para resolver uma tarefa matemática sobre geometria, no caso do 6º ano, e sobre sequências numéricas, no caso do 7º ano. A partir do referencial teórico adotado, busco caracterizar o raciocínio matemático, verificando que ele pode ser encarado a partir de dois aspectos: o estrutural e o de processos. O foco desta pesquisa está nos processos de raciocínio matemático. Dessa forma, busco também caracterizar cada um deles e entender como esses processos se relacionam. A pesquisa possui um caráter qualitativo e interpretativo. Os dados coletados foram os registros escritos e as gravações em áudio dos diálogos dos alunos ao resolverem a tarefa. Após isso, os áudios foram transcritos e analisados com o intuito de identificar os processos de raciocínio matemático utilizados pelos estudantes. As análises indicaram que os alunos mobilizaram os processos de raciocínio matemático de justificação, generalização, conjectura, identificação de padrões e exemplificação. Concluímos que, na medida em que os estudantes se engajam na justificação, eles melhoram as suas conjecturas e generalizações. O Produto Educacional resultante da pesquisa foi um jornal fictício, chamado *A Conjectura*, com o objetivo de apresentar a professores de Matemática exemplos de processos de raciocínio matemático na resolução de certas tarefas matemáticas.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Tarefas matemáticas. Raciocínio Matemático. Processos de Raciocínio Matemático. Ensino Fundamental.

CARNEIRO, Luís F. G. **The mathematical reasoning process employed by 6th and 7th grade students**. 2021. 123 p. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

ABSTRACT

The mathematical reasoning has been highlighted by researches and curriculum documents as one of the most relevant goals of the school Mathematics teaching. Thus, we set the objective of this research as analyse which mathematical reasoning processes 6th and 7th grade Brazilian students use when they solve a mathematical task and how they use them to solve the tasks, about geometry in the case of 6th grade students, and about sequences in the case of 7th grade students. From the theoretical background adopted, we seek for characterize the mathematical reasoning, finding that it can be viewed from two aspects: the structural aspect and the processes aspect. The mathematical reasoning processes are our focus. Then, we effort to characterize this processes and understand how they relate with each other. This research has a qualitative and interpretative aspect. The data collected was the written production and the audio record of the students talk when they solved the task. After that, the audio recordings were transcript and analysed aiming to identify the mathematical reasoning processes used by the students. The analyses showed that students employed the mathematical reasoning processes of justifying, generalizing, conjecturing, exemplifying and pattern identifying. We verify that as students justify, they make their conjectures and generalizations better. The Educational Product accomplished from the research was a fictitious newspaper, named *The Conjecture*, which aims to present mathematical reasoning processes in mathematical tasks to school mathematics teachers.

Keywords: Mathematics teaching. Mathematical tasks. Mathematical reasoning. Mathematical reasoning processes. Middle School.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O termo raciocínio é frequentemente associado à Matemática, já que ela é uma disciplina que, supostamente, exigiria, ou teria como objetivo ou consequência o seu desenvolvimento. Mata-Pereira e Ponte (2017) afirmam que, apesar de ser um termo comum na Educação Matemática, ele é por vezes utilizado com um significado impreciso, próximo ou sinônimo a pensamento. Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) refletem sobre isso e compreendem o raciocinar como algo pertencente ao pensar, mas mais restrito. Na visão dos autores, e também na adotada nesta pesquisa, raciocinar é obter novas informações a partir de informações já conhecidas e de maneira justificada.

A respeito de documentos curriculares a nível internacional, Jeannotte e Kieran (2017) relatam que o modo como o raciocínio matemático é descrito "tende a ser vago, assistemático, e até mesmo contraditório, de um documento para outro" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 2). Visto isso, sobre os documentos curriculares brasileiros, concluímos em trabalhos anteriores que há uma diferença no tratamento dado ao raciocínio matemático nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998, 2000, 2002) e na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). No primeiro, observa-se que o termo não é utilizado com um significado preciso, sem indicação de uma definição ou trechos que indiquem o significado adotado para o mesmo.

A primeira citação ao termo nos Parâmetros Curriculares Nacionais se encontra na versão voltada para os primeiros ciclos (BRASIL, 1997), atualmente correspondente ao Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Logo na apresentação da disciplina, é mencionado que o ensino da Matemática interfere na "agilização do raciocínio dedutivo do aluno" (BRASIL, 1997, p. 15). Em outro trecho, defende-se que um matemático, para demonstrar suas afirmações, emprega raciocínios e cálculos (BRASIL, 1997).

Além disso, o termo raciocínio aparece em Brasil (1997) quando o documento faz recomendações para o trabalho com conteúdos específicos. Dessa maneira, é citado o raciocínio com proporções, sobre números racionais e sobre combinatória, por exemplo. O mesmo é constatado no documento para o terceiro e quarto ciclos (BRASIL, 1998), atualmente os Anos Finais do Ensino Fundamental. Em Brasil (1998), inclusive, menciona-se que é necessário saber raciocinar para exercer a cidadania. No currículo do Ensino Médio (BRASIL, 2000, 2002), o desenvolvimento do raciocínio também é enfatizado, indicando que, nessa etapa, os alunos devem "desenvolver de modo amplo capacidades tão importantes quanto as de [...] raciocínio em todas as suas vertentes" (BRASIL, 2000, p. 41).

Em nenhuma das versões dos Parâmetros Curriculares Nacionais a expressão raciocínio matemático é citada, apenas raciocínio, ao contrário do documento curricular brasileiro mais recente em nível nacional, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), no qual, inclusive, nota-se uma maior importância ao raciocínio matemático. No Ensino Fundamental, por exemplo, o ensino da Matemática deve desenvolver o letramento matemático, que é, de acordo com o documento, a capacidade de empregar a Matemática em uma variedade de contextos e inclui raciocinar matematicamente.

Na etapa do Ensino Médio, há algo próximo de uma definição de raciocínio matemático. De acordo com Brasil (2018), os processos de investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas, com ênfase na argumentação matemática, pressupõem o raciocínio matemático. Para o Ensino Médio também está definida uma competência específica na que envolve "investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas [...], identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal" (BRASIL, 2018, p. 540). Isso busca caracterizar a Matemática como um processo de buscas, conjecturas, contraexemplos, comunicação, entre outros (BRASIL, 2018).

Portanto, o raciocínio matemático ganhou importância no Brasil com a publicação da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), que estabelece o seu desenvolvimento como um dos objetivos do ensino da Matemática na Educação Básica, o que já possibilita justificar a relevância deste estudo sobre o tema. No entanto, também é expresso em Brasil (2018) que a aprendizagem em Matemática está relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Dessa forma, entende-se que o desenvolvimento do raciocínio matemático é um caminho para que os estudantes atribuam significados aos conteúdos que aprendem.

Mais importante do que conhecer objetos da Matemática é saber como eles se conectam com outros. E, ainda, é desejável que os alunos saibam explicar porque determinados procedimentos funcionam na Matemática do que somente os conhecerem e utilizarem. Nesse sentido, entende-se o raciocínio matemático como algo que permite dar sentido aos objetos e aos procedimentos matemáticos, uma vez que requer dos alunos justificar suas afirmações. Desse modo, ao explicarem algo, precisam mobilizar conhecimentos anteriores e atribuir sentido aos novos.

Outro aspecto que também merece destaque na Base Nacional Comum Curricular é a caracterização da Matemática como uma ciência hipotético-dedutiva, cujas demonstrações se apoiam em axiomas e postulados (BRASIL, 2018). No entanto, o documento também reconhece a importância de observações empíricas e experimentações para a aprendizagem da

Matemática. E, ao avançar para a etapa do Ensino Médio, é reconhecida novamente a importância de evidências empíricas, das quais podem emergir conjecturas, argumentos e contraexemplos, mas, ao mesmo tempo ressalta-se que os estudantes devem caminhar em direção a argumentos cada vez mais formais, chegando à demonstração de proposições (BRASIL, 2018).

Desse modo, o documento destaca a importância de os estudantes reconhecerem a natureza da Matemática, que se estrutura sobre raciocínios dedutivos, mas também dá espaço e reconhece o valor de raciocínios apoiados em evidências empíricas. Casos particulares ou argumentos baseados em evidências empíricas não constituem elementos de uma justificação válida na Matemática. Contudo, no contexto da escola, esses elementos são importantes para que alunos no início do desenvolvimento do seu raciocínio matemático tornem-no cada vez mais complexo e sejam capazes de formular justificações válidas. Ou, até mesmo indivíduos com um raciocínio matemático mais avançado, podem recorrer a evidências empíricas para formular argumentos mais formais.

Além disso, ainda não é grande o número de pesquisas sobre o tema no Brasil. Em uma busca por artigos cujo título continham o termo *raciocínio matemático* na biblioteca digital Scielo, por exemplo, são localizados cinco trabalhos, dos quais quatro abordam o tema da perspectiva dos processos de raciocínio matemático. Considerando a importância dada ao tema pela Base Nacional Comum Curricular e a produção científica ainda incipiente no Brasil, espera-se que o presente trabalho contribua para o desenvolvimento dos estudos sobre o raciocínio matemático no país.

Sendo assim, são discutidos nesse trabalho os aspectos teóricos do raciocínio matemático em uma perspectiva escolar. O foco está, principalmente, nos chamados processos de raciocínio matemático mobilizados ao pensar sobre um problema ou situação matemática, tais como conjectura, generalização, prova, entre outros. Sendo assim, discorro sobre processos de raciocínio matemático que não necessariamente são válidos do ponto de vista mais rigoroso matematicamente, mas que são importantes para o nível de escolarização em que se encontra cada aluno.

Com isso, o objetivo desta pesquisa é *identificar quais processos de raciocínio matemático são mobilizados por alunos do Ensino Fundamental ao resolverem tarefas de Matemática*. Desse modo, é iniciada no capítulo a seguir, uma discussão teórica, na qual se discute a natureza do raciocínio matemático e se busca caracterizar seus processos a partir do entendimento alcançado com base nas pesquisas publicadas sobre a temática em questão.

Também é discutida a importância das tarefas exploratórias para o desenvolvimento do raciocínio matemático, bem como o papel do professor durante a sua realização.

No segundo capítulo, são descritos os procedimentos metodológicos adotados. É esclarecido que esta pesquisa se insere no âmbito das pesquisas qualitativas e são descritos os aspectos que a atendem as cinco características da pesquisa qualitativa definidos por Bogdan e Biklen (1994). Também é detalhado o local, o momento e o contexto no qual a pesquisa foi realizada, além do método da recolha, do tratamento e da análise dos dados. Neste capítulo são ainda apresentadas as duas tarefas escolhidas para a coleta dos dados e os conteúdos por elas abordados.

No capítulo 3, há a descrição dos dados, o detalhamento do caminho percorrido pelos alunos ao desenvolverem a tarefa, buscando contextualizar o leitor a partir dos dados gravados em áudio e dos registros produzidos pelos estudantes. Nesse mesmo capítulo, é realizada a análise dos dados, na qual são identificados os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos estudantes do 6º e do 7º ano. Por fim, são tecidas as considerações finais do trabalho.

1 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

O desenvolvimento do raciocínio matemático tem sido destacado tanto em documentos curriculares nacionais (BRASIL, 2018) quanto internacionais (OCDE, 2007; NCTM, 2009) como um dos grandes objetivos do ensino da Matemática. E, além disso, a importância do seu desenvolvimento nas aulas de Matemática é reconhecida por diversos pesquisadores (BRODIE, 2010; JEANNOTTE; KIERAN, 2017; LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; MATA-PEREIRA; PONTE, 2018; MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018; PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012; STYLIANIDES, 2009; TREVISAN; ARAMAN, 2021).

Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012) colocam o desenvolvimento do raciocínio dos alunos como o grande objetivo do ensino da Matemática. Os autores justificam tal afirmação declarando que a compreensão dos conceitos matemáticos não se limita a conhecer sua definição, mas também como esses conceitos se relacionam e podem ser empregados na resolução de problemas. O mesmo vale, segundo Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), para os procedimentos matemáticos, que não são totalmente compreendidos pela sua aplicação, mas pela percepção das razões pelas quais funcionam.

Diversos autores concordam com os acima citados em relação a importância do raciocínio matemático (ARAMAN; SERRAZINA, 2020; MATA-PEREIRA, 2012, 2018; MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018). De maneira semelhante, Brodie (2010) defende que o raciocínio matemático é a maneira de dar sentido à atividade matemática em si. Por sua vez, Lannin, Ellis e Elliot (2011) comentam que o entendimento do raciocínio matemático requer não somente saber conceitos matemáticos importantes, mas também o reconhecimento de como eles se relacionam uns com os outros.

Os mesmos autores ainda mencionam que o entendimento das ideias matemáticas e das suas relações continua a se aprofundar com a experiência e a partir de oportunidades para incorporar novas ideias (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). Nesse sentido, Morais, Serrazina e Ponte (2018) defendem que é importante o envolvimento dos alunos em tarefas que favoreçam o raciocínio matemático desde os primeiros anos de escolaridade. Jeannotte e Kieran (2017) também sublinham a necessidade de se trabalhar o raciocínio matemático em diferentes níveis de escolarização, assim como Stylianides (2009) que reconhece a necessidade de tarefas que envolvam o raciocínio serem centrais nas experiências matemáticas dos alunos em diferentes conteúdos e em diferentes séries escolares.

Apesar disso, como já mencionado, o entendimento de pesquisadores e de documentos curriculares sobre o raciocínio matemático nem sempre é o mesmo. Mata-Pereira e Ponte

(2017), por exemplo, afirmam que o termo *raciocínio* é bastante comum na Educação Matemática, mas por vezes utilizado com um significado pouco preciso, próximo ou sinônimo a *pensamento*. Jeannotte e Kieran (2017), por sua vez, afirmam que, em uma busca aprofundada na literatura, a ideia de que o termo *raciocínio* é usado sem qualquer clarificação não se sustenta, apesar de as autoras se referirem à literatura específica do tema, enquanto Mata-Pereira e Ponte (2017) se referem a um domínio mais amplo.

Em outro estudo, Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) contrastam a ideia de *raciocinar* com *pensar*, concluindo que *raciocinar* possui um significado mais restrito do que *pensar*. Os autores entendem que "raciocinar é fazer inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado" (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020, p. 7). Assim, para esses e outros autores (ARAMAN; SERRAZINA, 2020; MATA-PEREIRA; PONTE, 2017, 2018; MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018; PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012), raciocinar matematicamente é utilizar informação matemática já conhecida para obter novas informações matemáticas de maneira justificada.

Brodie (2010), por sua vez, escreve que o termo *raciocinar* implica em desenvolver linhas de pensamento que servem a determinados propósitos, como resolver um problema ou convencer outros e a si próprio de certa afirmação. A autora define que o raciocínio matemático consiste em "raciocinar sobre os e com os objetos da Matemática" (BRODIE, 2010, p. 7), ainda defendendo que é um aspecto chave na descoberta matemática e colabora na comunicação de ideias aos demais.

Por outro lado, Lannin, Ellis e Elliot (2011) entendem que o raciocínio matemático é um processo evolutivo de conjecturar, investigar porquês, e desenvolver e avaliar argumentos. Numa perspectiva semelhante, Stylianides (2009) considera que raciocínio-e-prova engloba a identificação de padrões, a produção de conjecturas, de argumentos e de provas, segundo o autor as quatro principais atividades na formação do conhecimento matemático e no processo de dar sentido. Stylianides (2009) esclarece que utiliza o termo raciocínio-e-prova hifenizado para evidenciar que essas quatro atividades devem ser vistas de modo integral e para vincular o raciocínio à prova.

Jeannotte e Kieran (2017), por sua vez, realizam um estudo no qual elaboram um modelo conceitual para o raciocínio matemático a partir da literatura sobre o assunto. Com isso, as autoras definem o raciocínio matemático como "um processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 7). Mas, além disso, as pesquisadoras identificam que o raciocínio matemático é comumente definido em termos de sua estrutura, o que é denominado de aspecto estrutural do raciocínio matemático pelas autoras. No entanto, também é identificado por Jeannotte e Kieran (2017) o aspecto de processos de raciocínio matemático, menos definido e explorado epistemologicamente do que o primeiro.

O aspecto estrutural do raciocínio matemático é mais estático e refere-se à forma do raciocínio, sendo a dedução, a indução e a abdução as formas mais comuns. Já o aspecto de processos possui alguns verbos de ação associados, que representam a natureza temporal do raciocínio matemático (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). As autoras identificaram nove processos, tais como conjectura, generalização, entre outros. Esses processos são discutidos mais adiante, no decorrer deste trabalho. As formas dedutiva, indutiva e abdutiva, que compõem o aspecto estrutural do raciocínio matemático serão abordados a seguir, mas não é realizada uma discussão mais aprofundada sobre eles porque já são mais discutidos na literatura (JEANNOTTE; KIERAN, 2017) e por não constituírem o foco deste trabalho.

1.1 ASPECTO ESTRUTURAL

No aspecto estrutural do raciocínio matemático, como já mencionado, os raciocínios mais citados são o dedutivo, o indutivo e o abdutivo. Cada um deles infere uma diferente conclusão, segundo Jeannotte e Kieran (2017). As pesquisadoras ainda relacionam às conclusões produzidas um valor epistêmico, que se refere "à noção de que um enunciado pode ser verdadeiro, provável ou falso" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 2).

O *raciocínio dedutivo*, por exemplo, é fundamental na Matemática (MATA-PEREIRA, 2012). Isso porque a tradição axiomática da Matemática, estabelecida por Euclides em *Os Elementos*, segue o método dedutivo (ALISEDA, 2003). Inclusive o currículo brasileiro passou a enfatizar que os alunos devem experimentar e interiorizar "o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo" (BRASIL, 2018, p. 540).

De acordo com Mata-Pereira (2018), o raciocínio dedutivo se desenvolve do geral para o particular. Ou seja, conclui-se algo novo a partir de informações prévias (MAZZI; SCHIO, 2020). Nas palavras de Jeannotte e Kieran (2017), o raciocínio dedutivo infere uma afirmação a partir dos dados e garantias disponíveis. E, portanto, sua validade está sujeita à validade dos dados e garantias (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). De acordo com Aliseda (2003) essa relação necessária entre premissas e conclusão é justamente um dos aspectos característicos do raciocínio dedutivo.

O outro aspecto característico é, segundo Aliseda (2003), o fato de as conclusões obtidas por meio de raciocínio dedutivo serem incontestáveis. A autora complementa afirmando que um teorema, uma vez provado, não deixa dúvidas de sua validade independentemente de outros resultados que sejam incorporados ao corpo de conhecimentos da Matemática. Meyer (2010) concorda que a dedução leva a certeza e conhecimento irrefutável. Para Meyer (2010) todo teorema é resultado, idealmente, de um encadeamento de deduções, já que é o único tipo de inferência que garante certeza.

Mas, apesar da centralidade do raciocínio dedutivo na Matemática, isso não significa que seja suficiente para explicar todo o raciocínio matemático, que possui também aspectos informais (MATA-PEREIRA, 2018), ou que o raciocínio matemático deva ser reduzido à dedução, já que o caráter empírico da Matemática tem ganhado relevância em pesquisas (ALISEDA, 2003).

O *raciocínio indutivo*, que é o segundo mais comum na literatura sobre o raciocínio matemático (JEANNOTTE; KIERAN, 2017), também será, dessa forma, aqui abordado. Esse tipo de raciocínio possibilita a construção de uma afirmação a partir de alguns casos particulares (PEDEMONTE, 2007). A indução, segundo Meyer (2010) é usada frequentemente para descrever a criação de novas regras. Assim, ao contrário do raciocínio dedutivo, o indutivo é definido, "de um modo clássico, como a passagem do particular para o geral" (RIVERA, 2008, p. 19).

Jeannotte e Kieran (2017) sublinham que o valor epistêmico relacionado às conclusões obtidas por raciocínio indutivo possui é de provável. Aliseda (2003) afirma que, ao contrário do raciocínio dedutivo, que é completamente certo, o indutivo precisa ser validado por testes e experimentações, sendo, dessa maneira, falível. Ainda que a prática da Matemática e seus resultados sejam predominantemente dedutivos (ALISEDA, 2003), a indução e processos empíricos desempenham um papel importante no processo de criação de matemáticos e estudantes de matemática (BRODIE, 2010). Ela também aparece, assim como a dedução, em Brasil (2018), ainda que de forma mais tímida: "[a Matemática no Ensino Fundamental] precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações [...], fazendo induções e conjecturas" (BRASIL, 2018, p. 265).

O *raciocínio abdutivo*, por fim, é outra forma de raciocínio que não gera conclusões indubitavelmente corretas. É "uma inferência que permite a construção de uma afirmação partindo de um fato observado" (PEDEMONTE, 2007, p. 29). A abdução é, basicamente, pensar possíveis explicações para evidências (ALISEDA, 2003). Mata-Pereira (2018) esclarece que o raciocínio abdutivo possui um caráter principalmente explicativo, ainda que também contribua na construção de conhecimento. Meyer (2010) afirma que a abdução leva a um caso possível, mas não definitivo. O raciocínio abdutivo oferece apenas hipóteses que podem ser refutadas com informações adicionais (ALISEDA, 2003), situação contrário do raciocínio dedutivo, que produz resultados válidos e que assim permanecerão independentemente de novos resultados.

Como já mencionado, o raciocínio dedutivo é predominante na Matemática, mas o indutivo e o abdutivo também possuem um papel relevante na construção do conhecimento matemático. Além disso, esses três tipos de raciocínios não necessariamente ocorrem apartados. Brodie (2010), por exemplo, menciona que matemáticos trabalham frequentemente de forma intuitiva em detrimento do rigor e da formalidade, buscando entendimento e significado. Obviamente, a única forma de inferência permitida para a sistematização do conhecimento matemático é a dedução, por sua garantia de certeza (MEYER, 2010). Nesse sentido, Brodie (2010) acrescente que a indução, por exemplo, pode complementar o raciocínio dedutivo. Mazzi e Schio (2020) argumentam que o raciocínio indutivo pode ser validado se passar por um processo dedutivo.

Chimoni, Pitta-Pantazi e Christou (2018) mencionam que uma mistura das formas de raciocínio dedutiva, indutiva e abdutiva parece estar relacionada à habilidade dos estudantes em generalizar, enquanto Rivera e Becker (2009) também dão como exemplo a atividade de matemáticos para argumentar a favor da complementaridade das formas de raciocínio. Quando matemáticos desenvolvem um modelo, eles inicialmente constroem suposições e hipóteses – abdução –, depois testam-no repetidamente – indução – e, por fim, provam utilizando rigorosas técnicas dedutivas (RIVERA; BECKER, 2009). Nesse sentido, Jeannotte e Kieran (2017) ressaltam que o raciocínio abdutivo é, por vezes, misturado ao indutivo por alguns autores. É o caso de Rivera (2008), que compreende a indução e a abdução como etapas prévias necessárias para o estabelecimento de uma generalização válida – processo do raciocínio matemático que ainda será discutido no decorrer deste trabalho.

1.2 ASPECTO PROCESSUAL

A seguir, são discutidos os processos de raciocínio matemático. É importante destacar que Jeannotte e Kieran (2017), apesar de terem pontuado uma diferença entre os aspectos estrutural e o de processos de raciocínio matemático, também sublinham que eles representam duas maneiras de olhar para o mesmo discurso. De acordo com as autoras, as estruturas são parte dos processos enquanto os processos influenciam na construção das estruturas.

Além disso, o aspecto de processos se faz necessário porque o estrutural não é suficiente para compreender inteiramente a natureza do raciocínio matemático na escola (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Os processos de raciocínio matemático podem ser entendidos como "processos que derivam narrativas sobre objetos ou relações pela exploração de relações entre objetos" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 9). Em um estudo no qual se propõem a elaborar um modelo para o raciocínio matemático na escola, Jeannotte e Kieran (2017) identificam oito processos de raciocínio matemático divididos em duas categorias – *validação*, e *busca por semelhanças e diferenças* –, e um nono processo, o de exemplificação, que dá suporte a processos dessas duas categorias.

No modelo desenvolvido por Jeannotte e Kieran (2017), relacionados à busca por semelhanças e diferenças, estão os processos de conjectura, generalização, identificação de padrões, comparação e classificação. Ligados à validação estão a justificação, a prova e a prova formal ou demonstração. São tratados, a seguir, dos processos da primeira categoria.

1.2.1 Conjectura

A conjectura é definida pelas autoras como um processo do raciocínio matemático que, "pela busca de semelhanças e diferenças infere uma narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico de provável e que tem potencial para teorização matemática" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 10). Além disso, as mesmas destacam que a conjectura requer o emprego de outros processos de raciocínio matemático para determinar se é verdadeira ou falsa. Ressalta-se novamente que neste trabalho é adotada a expressão valor epistêmico para designar o grau de certeza de uma declaração, que pode ser verdadeira, provável ou falsa.

Nesse mesmo sentido, Lannin, Ellis e Elliot (2011) afirmam que uma conjectura deve ser expressa em forma de uma declaração para que possa ser melhor examinada. Esses autores definem que conjecturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas visando o desenvolvimento de declarações que são assumidas provisoriamente como verdadeiras. Ou, ainda, a conjectura pode ser entendida como uma hipótese raciocinada sobre uma relação matemática baseada em evidência incompleta (STYLIANIDES, 2008, 2009). Stylianides (2008) esclarece que o termo *raciocinada* visa enfatizar o caráter não arbitrário da *hipótese*, termo que, por sua vez, indica incerteza sobre a validade da conjectura. Conjecturas também podem ser incorretas (MATA-PEREIRA, 2012) e, apesar de não desejáveis, surgem naturalmente nas aulas, mas podem ser pontos de partida em direção a um entendimento mais profundo de ideias matemáticas (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

Assim, a conjectura, correta ou incorreta, pode demandar outros processos de raciocínio matemático. Ela cria uma necessidade por mais raciocínio matemático, devido ao seu caráter experimental (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). Os autores ainda consideram que o raciocínio começa com o desenvolvimento de uma conjectura. De acordo com eles, ao formularem conjecturas e investigá-las, os "estudantes mergulham no raciocínio matemático" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 8). Também "a conjectura, pela sua própria natureza, clama por maiores investigações" (STYLIANIDES, 2009, p. 264).

Lannin, Ellis e Elliot (2011), apesar de mencionarem que a conjectura deve ser expressa em forma de declaração para ser investigada, também dizem que elas frequentemente não são verbalizadas e existem apenas na mente dos estudantes. Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) também observaram que muitas vezes uma conjectura não é formulada explicitamente e ficam restritas ao pensamento dos alunos ou, ainda, são parcialmente verbalizadas. Nesse sentido, os autores enfatizam a importância dos registros escritos, já que assim os alunos possuem a necessidade de explicitar suas ideias (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2019).

Os alunos tendem a não apresentar conjecturas completamente explícitas e, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2019), existe também uma linguagem não verbal pelo meio da qual as ideias podem ser expressadas, se apoiando em gestos e na observação dos dados. Além disso, Araman e Serrazina (2020) indicam que ao definir uma estratégia que julgam conduzir a um resultado correto, os alunos formulam conjecturas, ainda que inconscientemente.

Assim, as conjecturas podem surgir de várias maneiras aos alunos. Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) salientam que o início de uma tarefa é decisivo, pois os alunos estão se familiarizando com a situação e com os dados. Por vezes, os alunos começam a gerar mais dados para a tarefa e a organizá-los para formular questões, enquanto em outros casos os alunos podem formular conjecturas por analogia com outras (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2019). Ou, ainda, as conjecturas podem surgir a partir da análise de exemplos específicos e então de inferências a partir de uma situação específica (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

Cañadas et al. (2007), por exemplo, estabelecem cinco tipos de conjecturas, com diferentes estágios de desenvolvimento. Uma conjectura pode ser obtida a partir da observação de um número finito de casos discretos, da manipulação de objetos matemáticos, por analogia com um fato já conhecido, por abdução ao buscar uma regra que poderia explicar algum evento, ou de uma representação visual de um problema (CAÑADAS et al., 2007).

Neste trabalho não é assumida a perspectiva de Canãdas et al. (2007) sobre conjectura, mas é interessante notar os estágios da conjectura definidos pelos autores. Esses estágios variam para cada tipo de conjectura, mas em todos há os de formular a conjectura, generalizar a conjectura e justificar a generalização. Isso evidencia uma estreita relação entre a conjectura e a generalização, processo que será discutido a seguir.

1.2.2 Generalização

Moreira e David (2003) refletem sobre a natureza da Matemática escolar frente a Matemática científica ou acadêmica. Enquanto a segunda refere-se a um corpo de conhecimento conhecido e organizado por matemáticos profissionais (MOREIRA; DAVID, 2008), a primeira é aquela Matemática ensinada na escola. Não é nem uma versão mais simples da Matemática acadêmica, nem uma construção completamente autônoma e autossuficiente da escola, mas "uma construção histórica que reflete múltiplos condicionamentos, externos e internos à instituição escolar e que se expressa, em última instância, na própria sala de aula" (MOREIRA; DAVID, 2003, p. 78).

Nesse sentido, Mata-Pereira (2012) refere que a Matemática – na perspectiva aqui assumida, a acadêmica – busca, mais do que afirmações sobre objetos particulares, fazer afirmações mais gerais, destacando-se a generalização. A autora completa que uma generalização, ou teorema, nesse caso, só é válida se demonstrável (MATA-PEREIRA, 2012). Carraher, Martinez e Schliemann (2008) ressaltam que a generalização difere consideravelmente na escola. Por um lado, a generalização só é válida se suportada por uma prova válida, priorizando-se a validade da generalização, não como a pessoa a compreendeu (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). Já na escola, não importa apenas quais técnicas e quais notações o aluno utilizou, mas também como ele raciocinou matematicamente à sua própria maneira (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008).

Mata-Pereira (2012) destaca a generalização com um papel essencial na Matemática por ser uma das bases da sua construção. A autora também compreende que generalizar consiste em produzir afirmações válidas para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas. Ressalta-se também que Mata-Pereira (2012) nomeia a generalização como um caso particular da conjectura. Isso é explicitado em outro estudo, na qual refere-se à generalização como conjectura de natureza geral: "um importante processo é a generalização, que parte de uma conclusão ou conjectura específica para formular uma conjectura de âmbito mais geral" (PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012, p. 358).

No modelo do raciocínio matemático para a escola elaborado por Jeannotte e Kieran (2017), a generalização é definida como um "processo que infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos de um subconjunto deste conjunto"

(JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 9). Por outro lado, a "generalização envolve uma afirmação de que certa propriedade ou técnica se sustenta para um conjunto mais amplo de condições ou objetos matemáticos" (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008, p. 3).

Diante disso, vários autores concordam que a generalização compreende dois tipos de atividade (BRUNHEIRA; PONTE, 2019). Lannin, Ellis e Elliot (2011), por exemplo, descrevem que a "generalização envolve identificar semelhanças entre casos ou estender o raciocínio para além do domínio no qual se originou" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 12). Esses autores esclarecem que identificar envolve notar o que é igual entre diferentes problemas, representações, contextos e situações, enquanto estender um raciocínio refere-se a pensar sobre uma relação, representação, regra, padrão ou outra propriedade matemática e enxergá-la num domínio mais amplo (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

Dessa maneira, uma generalização também pode ser uma conjectura ampliada para termos mais gerais. Carraher, Martinez e Schliemann (2008) entendem que "há um importante papel para a conjectura na generalização matemática" (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008, p. 4). Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) apontam que a generalização pode ser uma conjectura de natureza geral, enquanto Lannin, Ellis e Elliot (2011) afirmam que "conjecturas podem ou não ser generalizações" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 14). Segundo esses autores, as conjecturas podem ser expandidas para expressar relações matemáticas de maneira geral, formando uma generalização (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

Portanto, a generalização pode se originar ou não de uma conjectura, sendo que isso ocorre quando a conjectura é ampliada para um domínio mais amplo. Além disso, as generalizações podem ser distinguidas entre empíricas ou teóricas (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). As generalizações empíricas surgiriam de uma exploração dos dados em busca de tendências e estruturas implícitas, enquanto as teóricas da atribuição de um modelo aos dados observados (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). Ao observar um conjunto de dados de uma sequência numérica, por exemplo, um aluno pode produzir uma generalização a partir da identificação dos próximos termos, de maneira empírica, ou atribuir algum modelo aos dados observados, produzindo uma generalização teórica.

Pesquisadores como Mata-Pereira (2012, 2018) e Stylianides (2008) também compartilham dessa ideia. Mata-Pereira (2012) afirma que a generalização pode ser formulada com base em casos particulares ou em propriedades conhecidas. A primeira, empírica, surge da análise direta dos dados, e a segunda, teórica, da atribuição de modelos aos dados (MATA-PEREIRA, 2018). Stylianides (2008) define uma generalização empírica como baseada em regularidades obtidas a partir de poucos exemplos e uma generalização estrutural como baseada em estruturas matemáticas.

Segundo Mata-Pereira (2012) as generalizações teóricas revelam maior capacidade de raciocínio dos alunos do que as empíricas, visto que estabelecem conexões de maior complexidade. Stylianides (2008) afirma que um dos principais desafios na Educação Matemática é desenvolver a capacidade nos alunos de generalizarem com base em estruturas, em vez de produzirem generalizações empíricas. Carraher, Martinez e Schliemann (2008) também ressaltam a importância de promover uma transição de uma Matemática baseada em observações empíricas e casos particulares para uma baseada em raciocínio sobre estruturas matemáticas, que não se apoie, ou se apoie muito pouco, no empirismo.

No entanto, esses últimos autores enfatizam que fazer generalizações pode não seguir completamente as normas da Matemática (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). Visto isso e recorrendo novamente a Moreira e David (2003, 2018), entende-se que generalizar na Matemática escolar não segue as mesmas regras que generalizar na Matemática Acadêmica. Carraher, Martinez e Schliemann (2008) afirmam que essa transição das maneiras de generalizar deve ocorrer gradualmente.

Primeiro os estudantes devem aprender a produzir generalizações buscando por padrões e percebendo relações (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). Gradualmente, os alunos aprendem a formular essas mesmas generalizações com notações algébricas e, depois, aprendem a obter nova informação refletindo em expressões produzidas por eles ou por outros (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). Nesse sentido, Lannin, Ellis e Elliot (2011) apontam que, quando os estudantes desenvolvem generalizações ou conjecturas, frequentemente desenvolvem uma linguagem matemática nova ou pouco clara, utilizando termos que precisam de maiores esclarecimentos. Nesse processo, os alunos podem refinar seus raciocínios e possuem a oportunidade de desenvolver maior precisão nas suas definições (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

1.2.3 Identificação de padrões

Também importante para a produção de uma generalização é a identificação de padrões. Stylianides (2008) entende a identificação de padrões como parte da atividade mais ampla de generalizar. Esse autor define padrão como “uma relação matemática geral que serve, ou se ajusta, a um determinado conjunto de dados” (STYLIANIDES, 2009, p. 263). Nesse sentido, identificar um padrão é encontrar uma relação que se ajusta aos dados observados (STYLIANIDES, 2009).

Jeannotte e Kieran (2017) ressaltam que na identificação de padrões há uma busca ativa e também é necessário um distanciamento do fenômeno (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Tais autoras definem a identificação de padrões como "um processo do raciocínio matemático que, pela busca de semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 10).

Stylianides (2008) destaca que a habilidade dos estudantes em formular generalizações estruturais, ou teóricas, é particularmente importante quando eles se dedicam a identificar padrões. Stylianides (2008) coloca a elaboração de conjecturas e a identificação de padrões como partes importantes da generalização, processo mais amplo. Ao mesmo tempo, o autor afirma que a identificação de padrões desempenha o importante papel na Matemática de levar a conjecturas (STYLIANIDES, 2009). Assim, a identificação de padrões pode ser um processo anterior à elaboração de uma generalização, mas não necessariamente uma generalização decorre de uma identificação de padrões.

É nesse sentido que Araman, Serrazina e Ponte (2020) comentam que os processos de identificação de padrões e de conjectura podem ser confundidos, mas não são iguais. Jeannotte e Kieran (2017), por exemplo, questionam: "é a identificação de padrões diferente do processo de conjectura?" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 10). As pesquisadoras explicam que tal processo se difere do de conjecturar, ou mesmo de generalizar, porque é possível identificar um padrão que é apropriado para um conjunto de dados sem precisar expandi-lo a um conjunto maior (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

Vieira, Rodrigues e Serrazina (2020) ainda diferenciam o processo de identificação de padrões e o de conjecturar porque o último possui um valor epistêmico associado. Uma conjectura pode mudar de provável para verdadeira, por exemplo. O mesmo não ocorre com a identificação de padrões, como destacam Jeannotte e Kieran (2017). Stylianides (2009) explica que, uma vez identificado um padrão, ele é apresentado de um modo que não necessariamente expressa dúvidas sobre a sua veracidade.

Ainda é importante esclarecer que neste trabalho não é assumido que o processo de identificar um padrão necessariamente antecede o de conjecturar que, por sua vez, não necessariamente antecede o de generalizar. Concorda-se com Stylianides (2009) quando afirma que as relações entre identificação de padrões e conjectura não são sempre lineares. "É possível formular uma conjectura sem primeiro identificar um padrão" (STYLIANIDES, 2009, p. 268).

1.2.4 Comparação e classificação

Processos também abordados por Jeannotte e Kieran (2017) na categoria de busca por semelhanças e diferenças são a comparação e a classificação. A comparação é "um processo do raciocínio matemático que infere, pela busca de semelhanças e diferenças, uma narrativa sobre objetos ou relações matemáticas" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 11). De acordo com as autoras, o elemento chave da comparação é a sua natureza inferencial (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). A comparação relaciona-se com outros processos de raciocínio matemático, como a identificação de padrões e a generalização. Jeannotte e Kieran (2017) dão o exemplo de que, na identificação de padrões, comparar casos pode ser necessário para destacar o padrão.

Já a classificação é um processo que infere, "pela busca de semelhanças e diferenças entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos com base em propriedades e definições matemáticas" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 11). Esse processo pode ser associado à comparação, à formulação de conjecturas e à generalização (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Segundo as autoras, classificar possibilita estruturar um discurso ao juntar ou separar diferentes objetos (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

Nesse sentido, Brunheira (2019) argumenta que classificar consiste em comparar objetos entre si visando uma organização, identificando suas características comuns, ou atributos críticos. Vieira, Rodrigues e Serrazina (2020) também concordam que a classificação está relacionada a outros processos de raciocínio matemático, mas dão ênfase à generalização como o processo mais associado à classificação. Segundo os autores, a determinação das categorias mencionadas por Brunheira (2019) visa a generalização porque a "enunciação dos atributos críticos diz respeito à generalidade dos objetos de uma dada classe" (VIEIRA; RODRIGUES; SERRAZINA, 2020, p. 14).

1.2.5 Justificação

Jeannotte e Kieran (2017) elencam três processos relacionados à validação: justificação, prova e prova formal. A validação consiste de processos que visam modificar o valor epistêmico de uma declaração, em geral de provável para verdadeiro ou para falso, mas podendo ocorrer também a mudança de provável para ainda mais provável. Para tanto, os processos de validação buscam reunir elementos que deem suporte a essa modificação do valor epistêmico.

Lannin, Ellis e Elliot (2011) definem uma justificação como "um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 12) e que envolve avaliar a validade de argumentos. Nesse sentido, Jeannotte e Kieran (2017), definem a justificação como um “processo do raciocínio matemático que, pela busca de dados, apoio e garantias, permite modificar o valor epistêmico de uma narrativa” (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 12). As justificações, ainda que mudem o valor epistêmico de uma declaração de provável para verdadeira ou para falsa, não são provas (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Isso vai na mesma direção da posição de Stylianides (2009), de que um “argumento contra ou a favor de uma afirmação matemática que não se constitui como prova” (STYLIANIDES, 2009, p. 266).

E, tanto Stylianides (2009) quanto Jeannotte e Kieran (2017) mencionam o uso de justificações com o intuito de negar uma afirmação. Stylianides (2009), ao dizer que o argumento pode ser contra uma ideia matemática, e Jeannotte e Kieran (2017) ao destacarem a modificação do valor epistêmico de provável para falso. Lannin, Ellis e Elliot (2011) optam por fornecer uma definição de refutação matemática, que “envolve demonstrar que uma declaração em particular é falsa” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 12). Assim como justificar, refutar também envolve avaliar a validade de argumentos (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011).

Muitas vezes, refutar consiste em fornecer um contraexemplo. Há situações nas quais os alunos apresentam justificações baseadas em contraexemplos que refutam uma afirmação, o que também é parte integrante do raciocínio matemático (MATA-PEREIRA, 2012, 2018). Entretanto, muitas vezes os estudantes não consideram um contraexemplo suficiente para desacreditar uma conjectura, declarando que ela é geralmente verdadeira apesar do contraexemplo (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). Da mesma forma, Galbraith (1995) diz que o fato de uma única exceção invalidar uma generalização não é aceito por alguns estudantes. Uma dificuldade é a falta de entendimento por parte dos alunos sobre o que constitui um contraexemplo (GALBRAITH, 1995). Esse autor define-o como “uma instância que satisfaz as condições, mas não a conclusão de uma declaração” (GALBRAITH, 1995, p. 416).

Mas algumas pesquisas apontam que a justificação nem sempre é empregada na sala de aula ou mesmo empregada de maneira proveitosa. Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012) comentam que, de modo geral, os alunos não sentem a necessidade de justificar as suas conjecturas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) afirmam que a justificação tende a ser relegada ao segundo plano, mesmo em atividades que visam a investigação matemática. E Brodie (2010) esclarece que, tradicionalmente, espera-se dos alunos que aceitem a autoridade do professor ou de livros didáticos em detrimento de justificações matemáticas. Nesse sentido, Mata-Pereira (2018) confirma que os alunos podem justificar de várias maneiras, seja com base em conhecimentos anteriores ou com base na autoridade.

Esse tipo de justificação, de apelo à autoridade externa, é contemplado por Lannin (2005) quando a autora apresenta quatro níveis. Uma justificação de nível 1 é aquela que apela à autoridade externa. Uma de nível 2 é baseada em evidências empíricas, aquela que é obtida a partir de exemplos particulares. Justificação de nível 3 corresponde a uma baseada em exemplo genérico, quando uma "justificação dedutiva é expressa em um caso particular" (LANNIN, 2005, p. 236). No nível 4, a justificação dedutiva, cuja validade é dada através de um argumento dedutivo independente de casos particulares (LANNIN, 2005).

Mata-Pereira (2018) também elabora um modelo que exibe a complexidade da justificação, no qual estabelece três níveis. O primeiro nível, autoridade externa, ocorre quando a ela se baseia em materiais ou em outras pessoas e o segundo, evidência empírica, quando se baseia em casos particulares (MATA-PEREIRA, 2018). No terceiro nível, a autora estabeleceu também três tipos de formalidade, que são, respectivamente:

> *coerência lógica*, quando a justificação se baseia em princípios lógicos; [...] *exemplo genérico*, se uma justificação é dedutiva, mas formulada considerando um exemplo particular; [...] *procedimento ou propriedade*, se uma justificação se baseia em argumentos dedutivos independentes de casos particulares ou exemplos (MATA-PEREIRA, 2018, p. 14, destaques da autora).

Morais, Serrazina e Ponte (2018) entendem que uma justificação válida deve mostrar não apenas que uma declaração é verdadeira, mas também dar as razões pelas quais ela é verdadeira. O mesmo é sublinhado por Lannin, Ellis e Elliot (2011) ao definirem que "uma justificação matemática válida [...] não é baseada na autoridade, no senso comum ou em exemplos" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 51), ela também deve explicar os porquês, confirmam os autores.

Nesse sentido, Morais, Serrazina e Ponte (2018) afirmam que, ao se dedicarem ao processo de justificação, os alunos revisitam ideias matemáticas, levando a um sólido entendimento delas e ao desenvolvimento de novas. Brodie (2010) destaca a importância da justificação como um processo fundamental por possibilitar "fazer conexões entre diferentes ideias, proporcionar garantia para afirmações e conjecturas, liquidar disputas e desenvolver novas ideias matemáticas" (BRODIE, 2010, p. 9). Segundo a autora, a justificação é fundamental para todo o raciocínio matemático (BRODIE, 2010).

Há também uma significativa relação entre a justificação e a generalização. De acordo com Lannin (2005), os dois processos estão estreitamente ligados, sendo a justificação um componente crítico do processo de generalização (LANNIN, 2005, p. 232). Mata-Pereira (2018) menciona que quando os alunos justificam e generalizam, estão desenvolvendo o raciocínio matemático e podem, assim, estar mais preparados para futuras demonstrações matemáticas. Assim como Brodie (2010), que entendem que a justificação e a generalização estão estreitamento relacionados ao processo de prova.

É nesse sentido que autores como Brunheira e Ponte (2019) assumem que a justificação deve ser adotada desde os primeiros anos de escolaridade, com diferentes graus de formalidade. Os alunos devem ser incentivados a justificar desde os primeiros anos com vistas a uma formalização cada vez maior e que naturalmente conduza a demonstrações (MATA-PEREIRA, 2012; PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012). Mata-Pereira e Ponte (2017) também afirmam que incitar justificações é um movimento essencial na direção da prova.

1.2.6 Prova e demonstração

De acordo com Brodie (2010), muitos autores entendem raciocínio matemático e prova como sinônimos. É o exemplo de Hanna (2000), que reconhece a importância de atividades de exploração, mas defende que se deve fazer uso tanto da exploração como da prova na sala de aula. Hanna (2014) afirma que uma afirmação matemática sem prova segue sendo uma conjectura. Contudo, há outras visões, que também consideram o papel de outros processos na validação de afirmações. Brodie (2010), por exemplo, afirma que "a prova é uma forma de argumento e de justificação, [mas] nem todos os argumentos e justificações são provas, e nem sempre a prova formal é uma explicação adequada para uma ideia matemática" (BRODIE, 2010, p. 9).

Além disso, uma importante distinção a ser feita nos próximos parágrafos é entre prova e demonstração, ou prova formal. Jeannotte e Kieran (2017) afirmam que a prova formal é referida como *démontrer* em francês, o equivalente a *demonstração* no português. De acordo com as autoras, esses processos estão fortemente relacionados ao valor epistêmico. Prova é definida como:

> Um processo do raciocínio matemático que, pela busca de dados, apoio e garantias, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeiro. Esse processo é restringido por:
> i) narrativas aceitas pela comunidade que são verdadeiras e disponíveis sem justificações adicionais;
> ii) uma reestruturação final de natureza dedutiva;
> iii) realizações [...] que são apropriadas e conhecidas, ou acessíveis, à classe (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 12-13).

Jeannotte e Kieran (2017) enfatizam que a prova se diferencia da justificação pelo seu potencial de teorização. E, além disso, a prova é mais restrita que a justificação porque precisa ser reestruturada dedutivamente e lidam com um conjunto de declarações aceitas e coerentes com o discurso matemático de um especialista, que pode ser o professor (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Neste trabalho, entende-se que a classe à qual se referem as autoras diz respeito ao grupo de alunos em questão, com os quais se está a trabalhar.

Já Stylianides (2009) define prova como um argumento válido, baseado em verdades aceitas pela comunidade em questão, contra ou a favor de uma afirmação matemática, e que fazem referência explícita a outras verdades aceitas e que são essenciais para a prova. O autor explica que argumentos válidos são uma sequência de afirmações conectadas por meio de modelos aceitos de inferências corretas (STYLIANIDES, 2009). As verdades se referem aos axiomas, teoremas, definições e declarações que uma determinada comunidade compartilha. Algumas delas são essenciais e devem ser explicitamente referenciadas na prova em questão. O modelo de Stylianides (2009) considera que uma prova pode ser também um argumento contrário a uma afirmação.

Agora, discute-se a demonstração, ou prova formal, que Hanna (2014) define como "uma derivação lógica de uma declaração a partir de axiomas e por meio de um explícito encadeamento de inferências obedecendo regras aceitas de dedução [e que] emprega notação formal, sintaxe e regras de inferência" (HANNA, 2014, p. 405). Essas derivações formais consistem de símbolos claros e de um procedimento mecânico que permite a verificação das provas, que são consideradas extremamente confiáveis (HANNA, 2014). Por sua vez, Jeannotte e Kieran (2017) definem prova formal como:

> Um processo do raciocínio matemático que, pela busca de dados, apoio e garantias, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeiro. Esse processo é restringido por:
> i) narrativas que são aceitas pela comunidade que são verdadeiras e estão sistematizadas em uma teoria matemática;
> ii) uma reestruturação final dedutiva;
> iii) realizações que são formalizadas e aceitas pela classe e comunidade matemática (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 13).

De acordo com Jeannotte e Kieran (2017) a prova formal trabalha com teoria matemática já construída, como axiomas e teoremas. As autoras destacam que a prova formal, ou demonstração, se diferencia da prova pelo seu grau de rigor e formalidade. Além disso, ela se baseia em declarações que devem estar explicitamente em alguma teoria matemática, não apenas nas que são verdadeiras matematicamente, como é o caso da prova (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

1.2.7 Exemplificação

Por fim, há o processo de exemplificação, que não está nem entre os processos da categoria de validação nem entre os de busca por semelhanças e diferenças. Ao contrário, Jeannotte e Kieran (2017) definem a exemplificação como um processo "que apoia outros processos de raciocínio matemático por inferir exemplos que auxiliam na: i) busca por semelhanças e diferenças; ii) validação" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 14).

Lannin, Ellis e Elliot (2011) afirmam que exemplos podem ajudar na compreensão dos estudantes, apesar de não serem capazes de explicar o porquê de certa declaração ser verdadeira para um número infinito de casos. Além disso, mencionam que matemáticos utilizam exemplos ou casos específicos para investigar estruturas matemáticas ou pensar sobre justificações, mesmo que não sejam suficientes para tanto (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). O processo de exemplificação permite inferir dados sobre um problema que podem ser utilizados tanto na busca por semelhanças e diferenças, relacionando-se com a identificação de padrões, generalização e conjectura, quanto na validação (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

1.3 PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: ALGUNS ENTENDIMENTOS

No quadro a seguir, resume-se compreensão sobre os processos de raciocínio matemático obtida com base no referencial teórico adotado.

Quadro 1: Processos de raciocínio matemático

<table>
<tr><td rowspan="4">Validação</td><td>Demonstração</td><td colspan="3">Processo que valida uma declaração por meio de verdades sistematizadas em uma teoria e de uma estruturação de natureza dedutiva; seus resultados são formalizados em teoria matemática.</td></tr>
<tr><td>Prova</td><td colspan="3">Processo que valida uma declaração explicitando verdades já aceitas pelo grupo de alunos em questão e possui uma estruturação de natureza dedutiva; seus resultados são acessíveis ao grupo de alunos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Justificação</td><td rowspan="2">Processo que busca por elementos para validar ou refutar uma declaração.</td><td>Dedutiva</td><td>Possui uma estrutura dedutiva e independe de casos particulares.</td></tr>
<tr><td>Empírica</td><td>Baseada em casos particulares.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Busca por semelhanças e diferenças</td><td rowspan="2">Generalização</td><td rowspan="2">Processo de inferência de uma declaração sobre um conjunto de objetos matemáticos a partir de elementos do conjunto.</td><td>Teórica</td><td>Construída a partir da atribuição de um modelo aos dados observados.</td></tr>
<tr><td>Empírica</td><td>Construída a partir da exploração de poucos exemplos.</td></tr>
<tr><td>Conjectura</td><td colspan="3">Processo de inferência de uma declaração potencialmente válida.</td></tr>
<tr><td>Identificação de padrões</td><td colspan="3">Processo que infere uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas.</td></tr>
<tr><td>Classificação</td><td colspan="3">Processo que junta ou separa objetos matemáticos de acordo com seus atributos críticos.</td></tr>
<tr><td>Comparação</td><td colspan="3">Processo que busca por semelhanças ou diferenças entre objetos matemáticos com o objetivo de produzir uma declaração.</td></tr>
</table>

Fonte: Autoria própria

A conjectura é, a partir da busca por semelhanças e diferenças, um processo que infere uma declaração potencialmente válida. Para tanto, baseia-se, principalmente, em Lannin, Ellis e Elliot (2011), que entendem a conjectura como uma declaração provisoriamente verdadeira e que deve ser expressa, oralmente ou verbalmente, para que seja melhor examinada. Stylianides (2008) entende a conjectura como uma hipótese raciocinada, indicando o caráter não arbitrário, mas ao mesmo tempo incerto da conjetura. Jeannotte e Kieran (2017) destacam o valor epistêmico de provável da conjectura. Dessa maneira, o *potencialmente válido* indica a possibilidade de validade da declaração, sua não arbitrariedade e a necessidade por outros processos de raciocínio matemático.

Para a generalização, recorre-se, principalmente a Carraher, Martinez e Schliemann (2008) e Jeannotte e Kieran (2017), que entendem que a generalização parte de um subconjunto para um conjunto mais amplo de objetos matemáticos. Mas, também, a generalização pode ser tanto identificar semelhanças entre casos quanto estender o domínio na qual se originou (BRUNHEIRA; PONTE, 2019; LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). Entende-se que ambas partem de um subconjunto para um conjunto maior. O primeiro tipo identifica semelhanças entre casos e, para generalizar, deve sustentá-las para "um conjunto mais amplo de condições ou objetos matemáticos" (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008, p. 3).

Também é importante ressaltar que muitos autores afirmam que a generalização pode ser uma conjectura de âmbito mais geral (MATA-PEREIRA, 2012, 2018; LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012; PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020). Entende-se que essa visão se trata de uma conjectura que amplia seu domínio, sendo, portanto, uma generalização por se sustentar em um conjunto mais alargado de condições ou objetos matemáticos.

A distinção entre generalizações empíricas e teóricas se baseia em Carraher, Martinez e Schliemann (2008), Mata-Pereira (2012) e Stylianides (2008). As generalizações empíricas podem ser formuladas a partir de casos particulares, segundo Mata-Pereira (2012), ou regularidades obtidas a partir de poucos exemplos, de acordo com Stylianides (2008). Carraher, Martinez e Schliemann (2008) destacam a atribuição de um modelo aos dados observados na generalização teórica, enquanto Stylianides (2008) enfatiza generalizações estruturais como aquelas baseadas em estruturas matemáticas. Há uma hierarquia entre a generalização teórica e a empírica. Mata-Pereira (2012) argumenta que generalizações teóricas indicam maior capacidade de raciocínio dos alunos e Stylianides (2008) defende que devem ser priorizadas em relação às empíricas. No entanto, Carraher, Martinez e Schliemann (2008) afirmam que deve haver uma transição entre generalizações empíricas e teóricas.

Para a identificação de padrões, considera-se a visão de Stylianides (2009) na qual entende-se padrão como uma relação matemática que se ajusta a um conjunto de dados. Mas também se considera a afirmação de Jeannotte e Kieran (2017), de que identificar um padrão envolve busca ativa, indo além de observar um padrão. Sobre a comparação Jeannotte e Kieran (2017) afirmam que comparar consiste em inferir declarações sobre objetos ou relações matemáticas a partir da busca por semelhanças ou diferenças. Para o processo de classificação, considera-se relevante a visão de Brunheira (2019) quando argumenta que a classificação visa uma organização identificando atributos críticos dos objetos matemáticos. Também se concorda com Jeannotte e Kieran (2017) quando as autoras destacam as propriedades e definições matemáticas como elementos estruturantes de um discurso matemático.

Na justificação, baseia-se na afirmação de Jeannotte e Kieran (2017) de que a justificação é um processo ligado à mudança do valor epistêmico de uma declaração pela busca de dados, apoio e garantias que suportem tal mudança. Jeannotte e Kieran (2017) ressaltam que justificação não é prova, mesmo quando modifica o valor epistêmico de uma declaração para verdadeiro. Dessa maneira, também se considera o trabalho de Stylianides (2009), que define argumentos que não constituem provas como aqueles que vão contra ou a favor de uma afirmação. Jeannotte e Kieran (2017) destacam que, por vezes, uma justificação altera o valor epistêmico de uma declaração de provável para mais provável, não sendo necessária uma estrutura dedutiva para tanto. Portanto, considera-se que o foco da justificação é validar ou refutar uma afirmação matemática. Mas nem sempre a justificação refuta ou valida completamente. Assim, compreende-se que esse processo busca reunir elementos que possam refutar ou validar uma declaração, sendo algumas vezes suficientes e outras não.

Toma-se como base o trabalho de Lannin (2005) para distinguir entre justificação empírica e dedutiva, que define uma justificação baseada em evidência empírica como a que se baseia em casos particulares corretos, enquanto a justificação dedutiva é construída com um argumento dedutivo e não depende de casos particulares. Retomando Jeannotte e Kieran (2017), entende-se que uma justificação empírica só pode modificar o valor epistêmico de provável para mais provável, ou para falso, no caso de contraexemplo. Já a justificação dedutiva tem potencial de modificar o valor epistêmico de provável para verdadeiro porque, para isso é necessária uma estrutura dedutiva (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

São assumidas definições semelhantes às de Jeannotte e Kieran (2017) para prova e para demonstração. A diferença de uma justificação dedutiva para a prova é que a última parte de verdades já aceitas pelos alunos e que não requerem outras justificações (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Além disso, os resultados de uma prova devem ser apropriados ou acessíveis ao grupo de alunos em questão, de acordo com as autoras. A demonstração diferencia-se da prova pelo seu rigor e formalismo (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Ela parte de verdades sistematizadas teoricamente e seus resultados são formalizados a uma teoria matemática (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

Vários autores consideram a conjectura, a generalização e a justificação como processos essenciais ao raciocínio matemático (BRUNHEIRA; PONTE, 2019; MATA-PEREIRA, 2012; PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020). Há ainda diversos autores que consideram que os alunos devem justificar desde os primeiros anos de escolaridade com níveis cada vez maiores de formalização que conduzam a provas (MATA-PEREIRA, 2012; MATA-PEREIRA; PONTE, 2017; PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012).

Quanto à demonstração, é importante que seja discutido com os estudantes o seu papel na Matemática, pontuando sua importância e limitações (HANNA, 2000). Mas a prova apresentada como um processo formal na escola tem apresentado problemas (STYLIANIDES, 2009). Para chegar a uma demonstração é necessária a exploração de relações matemáticas, o uso de padrões para formular conjecturas, testar conjecturas, refinar conjecturas, fornecer argumentos dedutivos (STYLIANIDES, 2009). Hanna (2000) afirma que uma demonstração só é convincente e legítima a um matemático profissional quando proporciona um real entendimento matemático. E, ainda, mesmo demonstrações em periódicos de Matemática usam uma mistura de linguagem formal e natural (HANNA, 2014). Portanto, para levar o aluno a provar, é necessário muni-lo de todas as ferramentas necessárias, tanto formais quanto informais (HANNA, 2014).

Por isso Hanna (2000) enfatiza que o papel principal da prova na sala de aula é promover entendimento matemático. Portanto, entende-se que a prova é um grande objetivo do raciocínio matemático, mas não o único. Processos de conjectura, generalização, justificação e outros, são igualmente importantes.

1.4 TAREFAS QUE PROMOVEM O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Diversos autores sublinham a importância que possuem as tarefas para levar os alunos a mobilizarem processos de raciocínio matemático (ARAMAN; SERRAZINA, 2020; BRODIE, 2010; LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; MATA-PEREIRA; PONTE, 2017, 2018; TREVISAN; ARAMAN, 2021) Segundo Brodie (2010), a natureza das tarefas nas quais os estudantes trabalham em sala de aula são essenciais para raciocinarem matematicamente. De acordo com a autora, tarefas que fomentem múltiplas vozes, discordâncias e desafios, considerando o argumento de outros, promovem o raciocínio matemático. Além disso, quando os estudantes expõem suas ideias, precisam produzir argumentos coerentes, provenientes de um raciocínio, para comunicar seus pensamentos.

Ponte (2014) afirma que tarefas são ferramentas de mediação essenciais no ensino e aprendizagem da Matemática. Segundo Ponte (2005), tarefas podem ser problemas, exercícios, investigações, explorações ou projetos, de acordo com seu nível de desafio e com sua estrutura, que pode ser aberta ou fechada. O autor classifica, por exemplo, um exercício como uma tarefa fechada, por dizer claramente o que se pede, e por ser de desafio reduzido. Um problema, por outro lado, possui um nível de desafio elevado e também é de estrutura fechada. Uma tarefa de investigação também possui um nível de desafio elevado, mas uma estrutura aberta (PONTE, 2005).

Já as tarefas de exploração são mais abertas, não evidenciam claramente seu objetivo e possuem um nível de desafio reduzido no sentido de que o aluno pode começar a trabalhar nela sem necessitar de um planejamento inicial bem delineado (PONTE, 2005). Além disso, a tarefa de exploração se diferencia de um exercício na medida em que o aluno não possui de imediato os conhecimentos necessários para resolvê-la. Ponte (2005) defende que é possível que os alunos resolvam uma tarefa para a qual não foram previamente ensinados, sendo capazes de mobilizar conhecimentos anteriores e descobrirem uma maneira de resolvê-la.

Nesse sentido, Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) defendem que uma abordagem exploratória proporciona um terreno fértil para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Uma tarefa de exploração se caracteriza pelo fato que de não é de resolução imediata, mas também possui certo grau de indeterminação no início (PONTE; QUARESMA; BRANCO, 2011). Por não apresentar claramente um objetivo, permite ao aluno examinar diversos aspectos da mesma. Isso a confere também certo grau de imprevisibilidade, ao contrário de um problema, por exemplo, no qual o professor sabe de antemão onde se quer chegar.

Carvalho e Ponte (2014) declaram que na realização de tarefas em sala de aula as discussões são essenciais para a aprendizagem da Matemática por potencializarem reflexões dos alunos. De acordo com os autores, por meio de sua participação em discussões, os alunos têm a oportunidade de evidenciar seus pensamentos, argumentos e justificações, que serão validados pelos colegas. Ponte (2005) defende que os momentos de discussão são tão importantes quanto a escolha de boas tarefas, pois é quando os alunos relatam suas conjecturas, apresentam suas justificações e questionam uns aos outros. São, para o autor, oportunidades de negociação de significados matemáticos e de construção de novos conhecimentos.

Ponte (2005) diz que os momentos de discussão são um elemento marcante de tarefas mais abertas, como as tarefas exploratórias. Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) entendem que a abordagem exploratória dá destaque às discussões coletivas e permite aos alunos um protagonismo ao expressarem seus raciocínios. De acordo com os autores, nessa abordagem importa, além da escolha de tarefas que promovam a formulação de conjecturas, generalizações e justificações, o estabelecimento de um ambiente que favoreça discussões sobre os diferentes aspectos e possíveis resoluções da tarefa.

Brodie (2010) também salienta que escolher tarefas apropriadas é necessário, mas não suficiente para o desenvolvimento do raciocínio matemático. O professor também exerce um papel fundamental no desenvolvimento da tarefa. A autora comenta que, quando um estudante questiona se sua resposta está certa, explorá-la junto com o aluno é mais importante do que dizer se está correta ou não. Brodie (2010) sugere que o professor encoraje o estudante a convencê-lo de sua resposta, seja ela correta ou incorreta. Pedir sempre por justificações dos alunos pode torná-los conscientes dos seus processos de raciocínio, além de cristalizar a ideia de que toda resposta deve ser justificada na Matemática (BRODIE, 2010).

Brodie (2010) sugere que o professor deve colocar questões que façam com que os alunos comparem, verifiquem, justifiquem as conjecturas e, com isso, se tornem conscientes dos seus raciocínios. Isso pode ser particularmente difícil no início, especialmente se o aluno nunca foi questionado sobre suas respostas, mesmo que corretas. Outros pesquisadores também dão recomendações nesse sentido quando buscam analisar as ações do professor que promovem o raciocínio matemático (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, 2020; MATA-PEREIRA; PONTE, 2017, 2018). De acordo com esses autores, os professores podem convidar, guiar ou apoiar, informar ou sugerir, ou desafiar os alunos na resolução de uma tarefa, ações essas que têm potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019).

Como já mencionado, em uma tarefa de exploração, os alunos não possuem de imediato os conhecimentos necessários para resolvê-la, devendo recorrer a conhecimentos prévios e descobrir uma maneira de fazer isso (PONTE, 2005). Com isso, destaca-se novamente o papel do professor durante a resolução da tarefa. Segundo Ponte (2005), em uma abordagem exploratória, o professor deve deixar a parte de descoberta e construção do conhecimento para o aluno, sem explicar tudo.

A ideia de que o esforço é uma parte natural e esperada da aprendizagem da Matemática e propicia oportunidades de um entendimento mais profundo para o entendimento de relações matemáticas é discutida pelo NCTM (2014). No entanto, os professores, quando percebem a frustração e a falta de sucesso imediato dos estudantes, muitas vezes os socorrem, reduzindo o nível da tarefa e privando-os de oportunidades de se envolverem de fato em atividades que propiciariam compreensão matemática (NCTM, 2014).

Desse modo, o NCTM (2014) defende que os professores precisam reconhecer que o esforço é importante e necessário para a aprendizagem de Matemática dos estudantes e fazer com que eles reconheçam isso. Portanto, os professores devem valorizar os estudantes pela sua perseverança (NCTM, 2014). Assim, algumas ações que pode tomar para apoiar os seus alunos são:

> Utilizar tarefas que promovam o raciocínio [...]; explicitamente encorajar os alunos a perseverar; encontrar maneiras de apoiar os estudantes sem remover todos os desafios de uma tarefa [...] Pedir aos estudantes que justifiquem e expliquem como resolveram uma tarefa. Valorizar a qualidade da explicação tanto quanto a resposta final (NCTM, 2014, p. 49).

Assim, além da importância da escolha de tarefas apropriadas, que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio matemático, o professor também desempenha um papel importante no momento da resolução da tarefa, sendo responsável por fazer com que os alunos tenham seus processos de raciocínio matemático favorecidos ou tomem consciência deles. (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019; BRODIE, 2010). Ensinar para o raciocínio matemático é dar oportunidades aos alunos, tanto na escolha da tarefa quanto no desenvolvimento dela, de investigar, analisar, explicar, conjecturar e justificar seus pensamentos, além de interagir com os seus pares (BRODIE, 2010).

1.5 UM POUCO SOBRE A ÁLGEBRA

Nesta pesquisa, uma das tarefas utilizada para a coleta de dados apresenta aos estudantes uma sequência de figuras formadas por um determinado número de pontos. Em seguida, são colocadas algumas questões aos estudantes, pedindo que determinem o número de pontos de outras figuras, que não são mostradas como exemplo na tarefa. Há também uma questão que pede a construção de uma fórmula para o número de pontos da enésima figura.

No Brasil, é previsto que a Álgebra comece a ser trabalhada logo nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, abordando ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades de igualdade, ainda que sem o uso de letras para expressar regularidades (BRASIL, 2018). Nos Anos Finais do Ensino Fundamental, o objetivo é aprofundar o trabalho prévio com a Álgebra, mas nessa etapa os alunos devem compreender também um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer conexões entre variável e função e entre incógnita e equação, por exemplo (BRASIL, 2018).

É nesse momento que surgem muitas dificuldades dos estudantes com a Álgebra. Elas podem ser decorrentes de um ensino demasiadamente ancorado no uso de símbolos literais e em operações com esses símbolos, priorizando a memorização de regras e manipulações simbólicas (VIEIRA; TREVISAN; BALDINI, 2019). Nesse sentido, Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam que há diversas condenações ao simbolismo no ensino da Álgebra na educação matemática. Mas os autores afirmam que, por outro lado, ele é parte essencial da Matemática e que, ao mesmo tempo em que os símbolos tornam a informação mais fácil de compreender e manipular, também representam grande perigo para o processo de ensino e aprendizagem, já que há o risco de se cair no formalismo, perder os seus significados e dar atenção apenas aos modos de manipulá-los. Algumas das dificuldades dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra são as seguintes:

> - Ver a letra como representando um número ou um conjunto de números,
> - Pensar numa variável como significando um número qualquer,
> - Atribuir significado às letras numa expressão,
> - Dar sentido a uma expressão algébrica;
> - Passar informação da linguagem natural para a algébrica;
> - Compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos + e = e, em particular, distinguir adição aritmética (3 + 5) da adição algébrica (x + 3) (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 74-75).

Nesse sentido, esses autores defendem a introdução das diversas utilizações dos símbolos literais desde cedo na escola (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). Eles consideram que uma utilização da noção de variável com significado, por exemplo, facilita a transição da Aritmética para a Álgebra. Além disso, é preciso ir além da utilização dos símbolos nas manipulações e expressões algébricas, dando mais atenção aos seus significados (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Justifica-se esse breve debate sobre a Álgebra porque, no presente trabalho, há uma tarefa que pede aos estudantes que, entre outras coisas, construam uma fórmula para uma determinada sequência. Ou seja, a tarefa visa, principalmente, a mobilização do processo de generalização. Há autores que discutem a relação entre a generalização algébrica e, em especial, os raciocínios de tipo indutivo e abdutivo (PIMENTEL; VALE, 2012; RIVERA; BECKER, 2009).

Entendemos padrão na perspectiva de Stylianides (2009), de uma relação matemática que serve ou se ajusta a certo conjunto de dados. Pimentel e Vale (2012) apresentam uma ideia semelhante, especificando que o termo padrão é utilizado ao se referir a uma disposição de números, formas, cores ou sons, onde se detectam regularidades. E, como neste trabalho, o termo padrão é bastante utilizado e são analisadas as resoluções de uma tarefa sobre sequências, é importante diferenciar padrão e sequência. De acordo com Pimentel e Vale (2012), sequência é uma lista ordenada de objetos ou números, e pode possuir um padrão ou não. No entanto, várias sequências envolvem um padrão, que é o caso da sequência de uma das tarefas utilizadas nesta pesquisa. Por isso, de acordo com Pimentel e Vale (2012), é possível uma generalização nas sequências, que é por meio da qual se obtém a sua lei de formação.

Outro aspecto destacado pelas autoras são os padrões figurativos por, entre outros fatores, se relacionarem com várias formas de representação. Além disso, Pimentel e Vale (2012) argumentam que isso enriquece a compreensão matemática da situação em questão e leva de forma mais eficaz a conjectura, generalização e justificação. As autoras afirmam também que, em especial, a compreensão de representações numéricas e figurativas ajuda a justificar a generalização produzida. Portanto, tarefas com padrões figurativos podem ser importantes na produção de generalizações.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, é apresentada a caracterização da pesquisa, sendo descritos, na continuidade, o contexto e as opções metodológicas adotadas, incluindo os participantes da pesquisa, as tarefas aplicadas, o processo de coleta de dados e, por fim, o modo como os dados foram analisados.

2.1 ABORDAGEM QUALITATIVA

Esta pesquisa se insere no âmbito das pesquisas qualitativas, que pressupõem o próprio investigador como principal instrumento de coleta dos dados e a descrição dos dados por parte do pesquisador (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Como buscou-se identificar processos de raciocínio matemático que os alunos empregam e como os utilizam para resolver tarefas matemáticas, pensou-se que uma abordagem qualitativa é a que fornece mais elementos para alcançar esse objetivo. São cinco as características básicas que configuram um estudo qualitativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Abaixo, são listadas cada uma delas e detalha-se como se articulam com a pesquisa em questão:

- *Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o pesquisador e elemento principal*. Os dados foram coletados em turmas de 6º e 7º ano nas quais o autor deste trabalho era professor. Os dados registrados também foram analisados pelo investigador, sendo o seu entendimento sobre eles o principal instrumento de análise.
- *A investigação qualitativa é descritiva*. Os dados coletados, que se constituíam de registros escritos dos alunos e gravações em áudio das suas resoluções, foram descritos pelo autor do trabalho, buscando respeitar a forma com que foram registrados tanto quanto possível.
- *Os investigadores qualitativos se interessam mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos*. O interesse desta pesquisa está nos processos de raciocínio matemático que os estudantes mobilizam ao resolverem uma tarefa. Portanto, interessa o processo de resolução da tarefa, não somente o resultado final.
- *Os investigadores qualitativos tendem a analisar seus dados de forma indutiva*. Não há uma hipótese predefinida a ser confirmada pelos dados. As conclusões desta pesquisa são construídas na medida em que os dados são analisados.

- *O significado é de vital importância na abordagem qualitativa*. Como a análise centrava-se nos processos de raciocínio matemático dos alunos, era de vital importância os significados que eles atribuíam à tarefa e ao seu processo de resolução.

2.2 CONTEXTO DA PESQUISA E OPÇÕES METODOLÓGICAS

No caso da pesquisa aqui descrita, os dados foram coletados em Cambé, no estado do Paraná, em duas escolas públicas estaduais. O município de Cambé está localizado na região metropolitana de Londrina e possui uma população estimada de pouco mais de 100 mil habitantes[1]. Uma das escolas, da qual participaram da pesquisa alunos do 6º ano, localiza-se na região central da cidade e possuía cerca de 1000 alunos divididos turmas de Ensino Fundamental e Ensino Médio nos períodos matutino, vespertino e noturno. A outra escola, da qual participaram alunos do 7º ano, está localizada em um bairro não muito afastado do centro da cidade, possuía cerca de 350 alunos matriculados divididos em turmas de Ensino Fundamental nos períodos matutino e vespertino. Os alunos do 6º ano estavam, em sua maioria, na idade correta para a sua etapa de escolarização e tinham por volta de 11 anos. A turma do 7º ano apresentava índices de reprovação elevados. Os alunos tinham entre 12 e 15 anos de idade. Ou seja, muitos não estavam na etapa de escolarização adequado para a idade.

É importante mencionar que eu, como autor deste trabalho era, ao mesmo tempo, o investigador e o professor das turmas[2]. A coleta de dados foi realizada no ano de 2019, que era, também o ano em que ingressei no mestrado e somente meu segundo ano como professor de Matemática. Vale mencionar isso porque considero que ser pesquisador e professor ao mesmo tempo possui relevância para a realização deste trabalho.

E, para a resolução das tarefas, já que a discussão é um elemento importante para tarefas de caráter exploratório e para o refinamento dos processos de raciocínio matemático ao comunicar ideias, os alunos foram organizados em duplas, que foram definidas por eles. Foram coletadas as produções escritas de todos os alunos das turmas e os diálogos gravados em áudio de quatro duplas de cada turma definidas aleatoriamente, devido à limitação de gravadores que se tinha à disposição. Depois disso, as gravações em áudio foram transcritas para posterior análise.

---

[1] https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pr/cambe/panorama

[2] Em determinados momentos, na maior parte deles na análise dos dados, utilizo a escrita em primeira pessoa para evidenciar esse fato.

Os estudantes cujos diálogos foram gravados em áudio tiveram seus nomes alterados nesta pesquisa a fim de garantir seu anonimato (LÜDKE; ANDRÉ, 2018). Foi entregue um termo de consentimento livre e esclarecido para a direção das respectivas escolas, no qual constava o objetivo, o método da coleta de dados e as possíveis implicações da pesquisa. Além disso, foi esclarecido verbalmente, pouco antes do início da coleta de dados, o objetivo da pesquisa aos alunos e pedida autorização para a gravação em áudio dos diálogos.

Para a atribuição dos nomes fictícios, decide-se por manter os gêneros masculino e feminino, por julgar que isso não compromete o anonimato dos participantes. Como já mencionado, os alunos foram organizados em duplas. Entretanto, há momentos em que os gravadores captam as vozes de alunos não pertencentes à dupla que está sendo gravada. Na maior parte dos casos, são áudios ininteligíveis. Mas há casos de áudios inteligíveis. Desses, a maioria foi descartado por não ser relevante à análise. Contudo, há alunos que interferem na resolução da dupla a ser gravada ao argumentarem sobre a tarefa. Nesses casos, opta-se por mantê-los. Os nomes dos alunos externos às duplas também são fictícios.

Há, ainda, no 6º ano, o caso de três alunos que desfizeram suas duplas originais e se organizaram em um trio. Como o terceiro aluno que se juntou à dupla estava ciente da gravação, julgou-se que concordou em gravar seus diálogos também. Como no momento da realização da tarefa não foi possível perceber rapidamente que os estudantes haviam se organizado em um trio, eles iniciaram a tarefa dessa maneira. Assim, para evitar a perda dos dados de uma dupla, optou-se por manter essa exceção. Com isso, os participantes da pesquisa são, em suas respectivas duplas – e trio: no 6º ano, Gustavo e Henrique; Laís e Leandro; Lucas e José; Lúcio, Marcos e Fernando; e, no 7º ano, Bianca e Jéssica; Jean e Gilmar; Manoel e Gisele; Tiago e Emerson. Dentre os alunos do 6º ano citados, um já havia reprovado. Dos alunos do 7º ano citados, cinco já haviam reprovado ao menos uma vez.

2.2.1 Tarefas

Agora, são apresentadas as tarefas escolhidas para a coleta de dados com os estudantes. Os conteúdos abordados pelas tarefas foram o de geometria plana, para o 6º ano, e o de sequências, para o 7º ano. Tais conteúdos foram escolhidos porque eram os que estavam sendo trabalhados naquele momento com os alunos. A tarefa do 6º ano foi obtida de Abrantes (1999), enquanto a do 7º ano, de Rivera e Becker (2011), foi traduzida do inglês para o português. Apesar da organização em duplas, cada aluno recebeu uma folha, já que a ideia era que tivessem momentos de discussão com os colegas, mas também que cada um produzisse seus próprios registros.

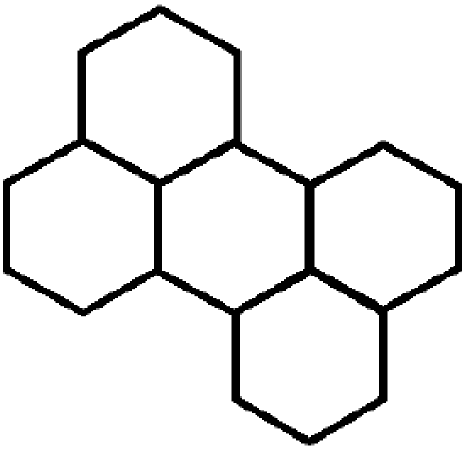
2.2.1.1 6º ano

A tarefa resolvida pelo 6º ano foi a seguinte, intitulada *Mais hexágonos*:

Figura 1: Tarefa *Mais hexágonos*

Mais hexágonos...

Hoje vamos investigar o perímetro de figuras formadas por cinco hexágonos regulares unidos pelos lados.



Este é apenas um exemplo

1- Construa outras figuras diferentes, desenhe-as e observe o que se passa com o seu perímetro. Tente encontrar uma explicação para as descobertas que fizer.

2- Construa agora uma figura qualquer com cinco hexágonos. Você consegue determinar o perímetro dessa figura sem contar os lados?

Fonte: Abrantes (1999, p. 55)

Esta é uma tarefa sobre geometria plana, mais especificamente sobre polígonos regulares e seu perímetro e propunha aos estudantes que reorganizassem os hexágonos regulares, ainda os mantendo unidos pelos lados, para verificar o que se passava com o perímetro da figura. Há várias possibilidades de exploração, mas a ideia principal é que quanto mais lados dos hexágonos estão unidos, menor é o perímetro da figura. Além do mais, cada hexágono possui seis lados. Portanto, o perímetro total desses cinco hexágonos seria 30, mas isso não é possível porque cada hexágono deve estar unido a pelo menos um outro hexágono. Logo, o perímetro da figura será sempre menor que 30. Assim, a cada par de hexágonos unidos diminui-se 2 de 30, um lado de cada um dos hexágonos unidos. Então, é possível determinar o perímetro da figura contando os pares de hexágonos unidos, por exemplo. No entanto, há outras maneiras de responder as questões colocadas pela tarefa além dessa apresentada.

A Base Nacional Comum Curricular indica que, no 6º ano, na unidade temática Geometria, os alunos devem aprender sobre polígonos, sendo capazes de reconhecer, “nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares” (BRASIL, 2018, p. 303). No 5º ano, na unidade de grandezas e medidas, é previsto que os alunos devem desenvolver a habilidade de “concluir [...] que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter figuras diferentes” (BRASIL, 2018, p. 297). Esse possível conhecimento prévio dos estudantes poderia transformar essa tarefa em um exercício, caso eles já tivessem desenvolvido plenamente a habilidade citada em Brasil (2018). No entanto, durante o trabalho com os alunos em sala de aula, foi possível perceber que os estudantes ainda não possuíam tal compreensão da área e do perímetro.

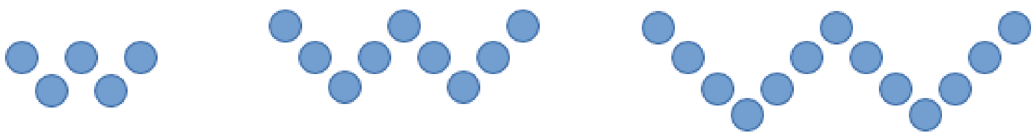
2.2.1.2 7º ano

A tarefa do 7º ano, de autoria de Rivera e Becker (2011), teve como adaptação a tradução para o português:

Figura 2: Tarefa *Sequência de pontos de W*

Sequência de pontos de W

Considere a sequência dos pontos de W abaixo.



Termo 1 **Termo 2** **Termo 3**

a) Quantos pontos há no termo 6? Explique.

b) Quantos pontos há no termo 37? Explique.

c) Encontre uma fórmula para o número total de pontos no termo n. Explique como você obteve sua resposta. Se você obteve sua fórmula numericamente, explique-a nos termos do padrão de pontos acima.

d) A fórmula de Zaqueu é a seguinte: $D = 4(n + 1) - 3$. A fórmula dele está correta? Por quê? Se a fórmula está correta, como ele pode ter pensado sobre ela?

e) Um certo termo de W tem 73 pontos ao todo. Qual é o número desse termo? Explique.

Fonte: Adaptado de Rivera e Becker (2011, p. 355)

Nessa tarefa, há uma sequência de figuras formadas por determinado número de pontos. Um dos objetivos é que os alunos investiguem essa sequência e identifiquem o padrão do crescimento do número de pontos a cada figura. Desse modo, as questões colocadas pela tarefa visam apoiar a exploração dos estudantes e os guiam na direção da construção de uma fórmula do número de pontos de um termo qualquer n. Tal fórmula poderia ser, por exemplo, $4n + 1$. No entanto, é possível chegar a fórmulas escritas de outra maneira, mas que são equivalentes a essa. Isso é exatamente o que se pede na quarta questão da tarefa, quando uma fórmula é apresentada acompanhada de uma indagação sobre a sua validade para a situação observada. Possivelmente, os alunos comparariam essa fórmula com as obtidas na terceira questão.

Contudo, no caso da turma em que a tarefa foi realizada, não foi possível realizar todas as questões propostas pela tarefa. Como já era previsto que o tempo poderia não ser suficiente para a realização da tarefa toda, ela foi impressa em duas folhas, a primeira delas contendo a sequência e as três primeiras questões e a segunda, novamente com a sequência, e as duas últimas questões. No decorrer das aulas, os alunos se empenharam de forma satisfatória nas duas primeiras questões e não houve tempo para que eles se dedicassem plenamente à terceira questão. As duas últimas questões não foram realizadas.

Entendemos que essa era uma tarefa de natureza exploratória porque os alunos não tinham um modo predefinido para resolvê-la e deveriam, ao longo da tarefa e com base em conhecimentos prévios, descobrir uma maneira de resolver que poderia ser diferente entre os alunos. Além disso, as questões colocadas pela tarefa e a sua realização em duplas tinham como objetivo favorecer o estabelecimento de conjecturas, generalizações e justificações.

O conteúdo abordado pela tarefa é previsto pela Base Nacional Comum Curricular no 7º ano. Na unidade temática Álgebra, os alunos devem desenvolver as habilidades de "classificar sequências em recursivas e não recursivas e de utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas" (BRASIL, 2018, p. 307). O Referencial Curricular do Paraná prevê os mesmos objetivos para esse conteúdo, mas adiciona que os alunos devem reconhecer "se duas expressões algébricas obtidas para descrever a mesma regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes" (PARANÁ, 2018, p. 871).

2.3 ANÁLISE DE DADOS

Após a definição das tarefas a serem utilizadas para a coleta de dados, as mesmas foram resolvidas pelo pesquisador, de diferentes modos, com o objetivo de tentar antecipar possíveis estratégias dos estudantes. É evidente que é impossível esgotar todas as possibilidades de resolução de uma tarefa e que a sala de aula e os estudantes apresentam imprevisibilidades para as quais o professor deve estar preparado. No entanto, as resoluções antecipadas das tarefas foram realizadas por três principais motivos: compreender o conteúdo matemático por elas abordado; reduzir a quantidade de estratégias não previstas que os alunos poderiam utilizar; e, principalmente, antecipar questionamentos que poderiam ser feitos aos estudantes e melhorar a qualidade dos momentos de discussão das tarefas.

O primeiro momento de análise dos dados ocorre em simultâneo com a coleta de dados. Isso acontece porque os dados foram coletados pelo autor deste trabalho, que era, ao mesmo tempo, o investigador e o professor das turmas nas quais foram realizadas as tarefas. Portanto, é impossível não realizar as primeiras análises no momento da coleta de dados, ainda que não tão aprofundada e organizada quanto as análises posteriores, que estão presentes neste trabalho.

Depois, há mais um momento de análise na transcrição dos áudios. Com eles, foi possível perceber algumas discussões com mais clareza e aspectos da resolução da tarefa que passaram despercebidos na sala de aula, durante a coleta dos dados. Além disso, tive acesso a discussões somente entre os estudantes, nos quais não estive presente fazendo questionamentos sobre a tarefa, o que também possibilitou uma visão mais ampla do processo de resolução que os alunos percorreram.

Então, de posse das transcrições, foi realizada uma análise sistemática, mais organizada e rigorosa. Nesse momento, busquei identificar os processos de raciocínio matemático que os alunos mobilizaram durante a resolução da tarefa, com base na literatura estudada sobre o tema. A todo momento, busquei confrontar as transcrições com a produção escrita dos estudantes para um melhor entendimento de suas resoluções. Além disso, um desafio era encontrar indícios de processos de raciocínio matemático, já que só é possível identificá-los quando o aluno o externa de alguma maneira.

Por fim, houve uma intensa revisão da própria análise. Primeiro, por parte do pesquisador, depois, a cada nova interpretação que surgia na medida em que os dados e as análises eram revisados. Também, a contínua leitura feita pela orientadora desta pesquisa e seus questionamentos suscitavam novas revisões e análises. Os dados também foram apresentados em um grupo de pesquisa, no qual surgiam novas indagações e sugestões. E, além disso, houve a submissão de um artigo científico[3], oportunidade em que as análises foram revisadas pelos coautores e pelos avaliadores da revista.

Com base nas possíveis resoluções que poderiam surgir, foram elaborados dois quadros com os processos de raciocínio matemático que eram esperados que fossem mobilizados pelos alunos ao resolverem cada uma das tarefas. O quadro 2 é referente aos processos de raciocínio que poderiam ser mobilizados na tarefa do 6º ano, enquanto o quadro 3 é referente à tarefa do 7º ano.

Quadro 3: Processos de raciocínio matemático esperados na tarefa do 6º ano

Justificação	Pode ser mobilizada pelas questões da tarefa ou pelas discussões com os colegas e com o professor, na tentativa de apresentar elementos que validem conjecturas ou generalizações.
Generalização	Pode ser mobilizada caso os estudantes estendam o domínio de suas conjecturas, percebendo a relação do número de lados unidos dos hexágonos na parte interna da figura com o seu perímetro.
Conjectura	Pode ser mobilizada caso os estudantes perceba que os perímetros de certas figuras são diferentes e busquem explicações para esse fato.
Comparação	Pode ser mobilizada se os alunos buscassem por semelhanças ou diferenças nas diferentes figuras que construírem.
Exemplificação	Pode ser mobilizada caso os alunos sintam a necessidade de construir outras figuras para validar ou não as suas conjecturas.

Fonte: Autoria própria

Quadro 3: Processos de raciocínio matemático esperados na tarefa do 7º ano

<table>
<tr><td colspan="2">Justificação</td><td>Pode ser mobilizada pelas questões da tarefa ou pelas discussões com os colegas e com o professor, na tentativa de apresentar elementos que validem conjecturas ou generalizações.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Generalização</td><td>Teórica</td><td>Pode ser mobilizada caso os alunos construam uma fórmula para o número total de pontos de qualquer termo a partir da atribuição de um modelo às primeiras figuras apresentadas pela tarefa.</td></tr>
<tr><td>Empírica</td><td>Pode ser mobilizada caso os alunos construam uma fórmula para o número total de pontos de qualquer termo com base em casos particulares.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conjectura</td><td>Pode ser mobilizada caso os alunos elaborem estratégias para determinar o número de pontos de termos específicos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Identificação de padrões</td><td>Pode ser mobilizada caso os alunos identifiquem a relação recursiva da sequência apresentada pela tarefa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemplificação</td><td>Pode ser mobilizada caso os alunos determinem o termo seguinte a partir do anterior.</td></tr>
</table>

Fonte: Autoria própria

[3] Carneiro, Araman e Serrazina (2020)

2.4 O PRODUTO EDUCACIONAL

De acordo com o Comunicado nº 001/2012[4], da Capes, a produção acadêmica dos mestrados profissionais na área de ensino pressupõe a elaboração de um Produto Educacional. O documento prevê que, na área de Ensino, um Produto Educacional deve poder ser utilizado por professores e outros profissionais envolvidos com o ensino em espaços formais e não-formais. São exemplos de Produto Educacional que constam no documento: mídias educacionais, protótipos educacionais e materiais para atividades experimentais, propostas de ensino, material textual, materiais interativos e atividades de extensão. Portanto, serão descritos aqui os processos para a elaboração do Produto Educacional resultante desta pesquisa.

Primeiramente, é importante ressaltar que a definição do tipo de Produto Educacional a ser elaborado não foi simples. A Resolução PPGMAT/UTFPR nº 1[5], estabelece que o Produto Educacional deve ter sido aplicado ou ser aplicável em situações reais. O desafio seria, então, pensar em um Produto Educacional dentro desses parâmetros e que fosse resultado da pesquisa realizada. Ou seja, que tivesse os processos de raciocínio matemático como tema.

Julgou-se que as primeiras ideias levantadas não eram viáveis dada a complexidade das pesquisas sobre o tema. Eram elas: alguma tarefa que promovesse o raciocínio matemático ou um guia para o professor conduzir as discussões de uma tarefa de modo a promover o raciocínio matemático dos alunos. No entanto, a elaboração de cada uma delas no Produto Educacional exigiria o estudo de trabalhos específicos sobre esses temas, já que dentro dos estudos sobre o raciocínio matemático há, por exemplo, aqueles que tratam especificamente das ações do professor para promover o raciocínio matemático.

Diante disso, considerando a importância do desenvolvimento do raciocínio matemático na escola e a pouca familiaridade de professores de Matemática com o tema, optou-se por elaborar um Produto Educacional que servisse como um guia ou texto de apoio para esses professores. Dessa forma, esses profissionais poderiam tomar conhecimento de um tema que consideramos de extrema importância no ensino da Matemática e, a partir disso, propiciar reflexões que podem ser incorporadas pelo professor à sua prática.

Mas, de certa forma, a própria dissertação já é um meio pelo qual um professor poderia se familiarizar com o raciocínio matemático e com os processos de raciocínio matemático. A questão que se colocava agora era a seguinte: de que forma esse Produto Educacional pode ser

---

[4] http://arquivos.info.ufrn.br/arquivos/2017122049df6139378536b7e6d35c881/Comunicado_CAPES_2012.pdf

[5] http://portal.utfpr.edu.br/cursos/coordenacoes/stricto-sensu/ppg-mat/documentos/regulamentos-e-normas/2021-resolucao_01-2021_produto_educacional.pdf/@@download/file/2021%20-%20Resolucao_01.2021_produto_educacional.pdf

utilizado pelo professor e qual a sua diferença para a dissertação? Partindo disso, decidiu-se por elaborar um Produto Educacional evidenciasse alguns processos de raciocínio matemático mobilizados pelos estudantes em resoluções de tarefas, sejam próprias ou encontradas em textos da literatura sobre o tema.

Por fim, visando ainda uma divulgação mais ampla do Produto Educacional, decidiu-se por escrevê-lo na forma de um jornal de notícias. Dessa maneira, em uma linguagem menos densa do que a presente na dissertação, foram abordados alguns aspectos teóricos do raciocínio matemático e de tarefas exploratórias e foram, também, evidenciados certos processos de raciocínio matemático presentes em resoluções de algumas tarefas. Dessa maneira, espera-se que mais professores se interessem sobre o tema e, eventualmente, queiram se aprofundar nele ou utilizá-lo de alguma maneira em suas aulas.

Portanto, para a elaboração do Produto Educacional, o primeiro passo foi o de identificar processos de raciocínio matemático. Os processos exemplificados no Produto Educacional são a conjectura, a justificação e as generalizações, tanto empírica quanto teórica. Quando possível, evidenciamos esses processos utilizando os próprios dados coletados para esta pesquisa. Mas, para evidenciar processos que não foram contemplados pelos dados coletados, buscou-se resoluções de tarefas em textos sobre o raciocínio matemático e, nessas tarefas, foram identificados processos de raciocínio matemático e apresentados no Produto Educacional.

Além disso, houve uma abordagem teórica aos processos de raciocínio matemático no Produto Educacional. Mas, como já mencionado, com uma linguagem menos densa do que a presente na dissertação. O objetivo, com isso, é de que o professor da Educação Básica tenha os primeiros contatos com o tema e venha, possivelmente, a se interessar sobre ele. Assim, em vez de discorrer sobre o assunto fazendo o uso de citações de artigos científicos, optou-se por abordá-lo na forma de notícias jornalísticas, citando os trabalhos sobre o tema na forma de entrevistas fictícias.

Com isso, foi elaborado o Produto Educacional, o Jornal *A Conjectura*, que tem o objetivo de abordar o raciocínio matemático com outra linguagem e apresentar aos professores exemplos bastante claros de cada processo que pode ser mobilizado pelos estudantes.

3 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

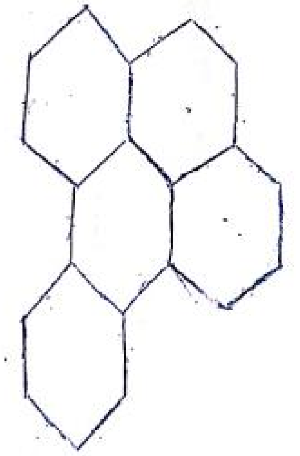
Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos a partir das resoluções das tarefas por parte dos alunos. A partir da próxima seção, com as resoluções do 6º ano.

3.1 6º ANO

3.1.1 Lucas e José

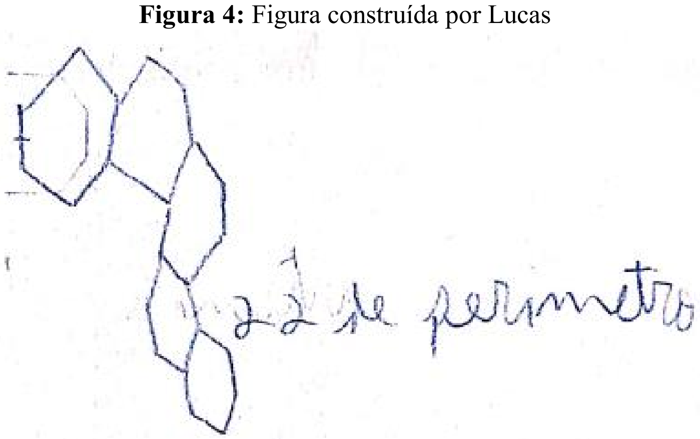
Abaixo, seguem as primeiras construções dos alunos José e Lucas. Cada um fez construiu sua própria figura e só depois disso começaram a discutir a tarefa nos diálogos que serão mostrados a seguir.

Figura 3: Figura construída por José



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 4: Figura construída por Lucas



Fonte: Dados da pesquisa

José: Professor, venha aqui. Fiz cinco.
Professor: Quanto deu o perímetro?
José: É só os de fora, não é? Só essas laterais aqui?
Professor: Isso.
José: O meu deu dezessete. O seu também? [dirigindo-se ao Lucas].

Lucas: Não sei, não contei ainda.

José demonstra que compreende o conceito de perímetro ao confirmar se deveria contar somente os lados de fora dos hexágonos, ou seja, os lados dos hexágonos que não estavam unidos com nenhum outro na parte interna. No entanto, José calcula incorretamente o perímetro. O aluno conta os lados externos um a um e obtém 17, quando o resultado correto era 18. Lucas também calcula incorretamente o perímetro, mas percebe rapidamente, como se pode notar no diálogo a seguir.

José: Pensei que ia dar dezoito.
Lucas: O meu deu mais de dezoito.
José: Deu quanto?
Lucas: Vinte e um.
José: Mas jamais. Ele é com tudo.
Lucas: O meu deu vinte e dois.

A expectativa de José era de que o perímetro da sua figura fosse 18, provavelmente porque o perímetro da figura dada como exemplo na tarefa também era 18. Ele se surpreende ao saber que o perímetro da figura construída por Lucas era mais de 18 e não aceita de imediato a resposta do colega como correta. Ele esperava que o perímetro das figuras que construíram fosse igual ao da figura dada como exemplo. Então, questiono novamente os alunos sobre isso.

Professor: Encontrou o perímetro?
José: Dezessete.
Professor: Isso. Por que isso deu diferente disso? [Referindo-se ao perímetro da figura dada como exemplo na tarefa].
José: Porque foi diferente o desenho.
Professor: Mas sempre que for outro desenho vai dar diferente?
José: Não sei.
Professor: O seu deu quanto?
Lucas: Vinte e dois.
José: Está errado.
Professor: Não, está certo. Vamos contar.
José: Acho que ele fez a mais, professor. Tem que fazer assim. [Apontando para a própria figura].

José, ao ser questionado sobre o motivo do perímetro da sua figura ser diferente do perímetro da figura dada como exemplo, diz que isso se deve ao fato de elas serem diferentes. No entanto, não sabe dizer se isso acontece sempre. Além disso, José não aceita a resposta de Lucas como correta mais uma vez, sugerindo que o colega teria utilizado um hexágono a mais. Diante disso, eles consultam a resolução de uma aluna de outra dupla.

Beatriz: Deu vinte e dois.
Lucas: Deu vinte e dois, mesmo. Mesma coisa que o seu.
José: Deu a mesma coisa.
Lucas: Então agora está certo. Esse aqui.

José: Por quê? Esse aqui deu errado? [Referindo-se ao resultado de 17 obtido por ele].
Lucas: Não, se ficou igual.
José: Então esse aqui também está certo.
Lucas: Não, porque esse aqui deu coisa a mais.

Coincidentemente, o perímetro da figura construída por Beatriz, também era 22. Com isso, Lucas conclui que o perímetro da sua figura está correto e José, apesar de também verificar que o perímetro das figuras dos colegas foi o mesmo, não concorda com a afirmação de Lucas de que a sua resposta está incorreta.

Professor: Quanto deu seu perímetro?
José: Deu dezessete.
Professor: Dezessete. E o seu?
Lucas: Vinte e dois.
Professor: Vinte e dois. Deu igual à primeira figura?
José: Não.
Professor: Por que dá diferente?
José: Ah, não sei.
Professor: O que você acha?
José: Esse aqui, acho que tem um [hexágono] a menos. Ou eu contei errado, sei lá.
Professor: Tem um a menos?
José: Acho que tem, não é?
Professor: Vamos contar: um, dois, três, quatro, cinco.
José: Sim, tem cinco, mas aqui...
Professor: Tem um o que a menos?
José: Não sei. Não sei se tem a menos.
Professor: Não, mas não tem. O que você acha? Por que aqui deu diferente daqui o perímetro?
José: Ah, não. Deu dezoito. Eu contei errado. Falei para você que eu tinha contado errado.

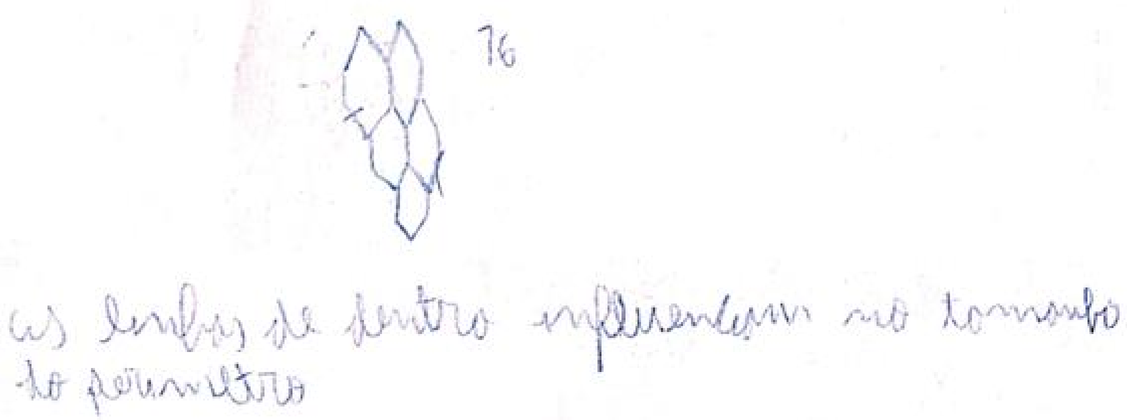
Novamente, questiono os alunos sobre o perímetro das suas figuras e o porquê da diferença para o perímetro da figura dada como exemplo. José verifica que o perímetro da figura dele, 17, é um a menos do que o perímetro da figura dada como exemplo, que é 18. Com isso, o estudante pensa na possibilidade de ter calculado incorretamente o perímetro e, por fim, identifica e corrige seu erro.

As Figuras 5 e 6 mostram, respectivamente, as resoluções de José e de Lucas, seguidas da transcrição dos seus diálogos quando pensam na segunda questão da tarefa.

Figura 5: Resolução de José

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 6: Resolução de Lucas



Fonte: Dados da pesquisa

Depois que os alunos construíram suas figuras, o professor dirige-se à dupla.

> ***Professor:*** Vamos ver aqui? Está bem, desenhou. E agora?
> ***Lucas:*** O meu deu dezesseis.
> ***José:*** E agora o quê? Tem que contar? Vou contar quanto deu.
> ***Lucas***: Deu dezesseis.
> ***Professor:*** Vocês conseguem pensar em algum jeito de saber o perímetro sem precisar contar os lados? Essa parte de fora, aqui.

No primeiro momento, os alunos somente construíram uma figura. Lucas, por exemplo, calculou o perímetro da figura que construiu, apesar de a questão pedir outra coisa. José também calculava o perímetro da sua figura quando coloco a eles novamente a pergunta feita no enunciado da questão. Diante da falta de uma resposta dos alunos para essa última pergunta, busco fazer com que os alunos pensem na quantidade de lados de cada hexágono.

> ***Professor:*** Quantos lados tem cada figura desta? [Referindo-se aos hexágonos que formam as figuras].
> ***Lucas:*** Tem seis.
> ***Professor:*** Tem seis.
> ***José:*** O meu também deu dezesseis [Surpreso, referindo-se ao perímetro da sua figura].

> ***Professor:*** Deu dezesseis o seu?
> ***José:*** Deu.
> ***Professor:*** Mas por quê? Não era para dar?
> ***José:*** Ah, vou saber. Mas tem que dar. Os ladinhos ali...
> ***Professor:*** A sua é igual a dele?
> ***José:*** Não.
> ***Professor:*** Podia dar diferente?
> ***José:*** Podia, mas não deu.
> ***Professor:*** É, não deu. Exatamente. Por que você ficou surpreso de dar igual?

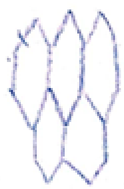
José, quando calcula o perímetro da sua figura, mostra-se surpreso com o resultado, já que dessa vez o perímetro da sua figura era o mesmo da de Lucas. Quando o questiono sobre o motivo de tal surpresa, José fica pensativo e não consegue pensar em uma resposta imediatamente.

> ***Professor:*** Então, cada figura desta tem seis, você disse. Você contou essas aqui do meio como perímetro? [Referindo-se aos lados internos unidos dos hexágonos].
> ***José:*** Eu contei.
> ***Professor:*** Essas aqui?
> ***José:*** Não, não. Essas aí, não. Contei as de fora.
> ***Professor:*** Por que as de dentro não?
> ***Lucas:*** As de dentro não são perímetro.
> ***Professor:*** Não é perímetro.
> ***José:*** Sim.
> ***Professor:*** Olhando só para as de dentro, a gente consegue saber quanto é o perímetro?
> ***José***: Sete?
> ***Professor:*** Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete. Sete ali dentro, não é? E a dele, quantas tem ali dentro.
> ***José***: Não sei.
> ***Lucas:*** Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete.
> ***Professor:*** Sete também. E isso tem a ver com ter dado o mesmo perímetro, de dezesseis?
> ***José:*** Talvez, professor.
> ***Professor:*** Você acha que sim? E você, acha que sim? Desenha uma figura diferente aqui. Vê o que acontece.

Então, questiono se os lados unidos dos hexágonos na parte interna foram contados no momento de determinar o perímetro das figuras. José, a princípio, responde que sim, mas logo confirma que contou apenas os lados externos dos hexágonos. Lucas afirma que as linhas de dentro, ou seja, os lados internos dos hexágonos, não são considerados no momento de calcular o perímetro. Eles identificam que, nas figuras que construíram, há sete lados internos dos hexágonos unidos, mas não conseguem relacionar isso com o fato de as duas figuras terem o mesmo perímetro. Então, peço aos alunos que montem uma terceira figura[6] para que pudessem comparar com as já construídas.

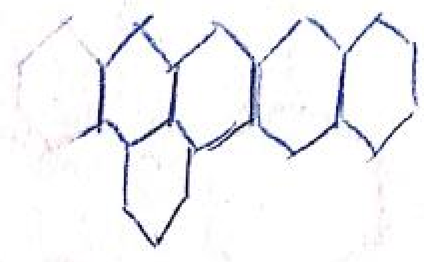
> ***Lucas:*** Também deu dezesseis.
> ***Professor:*** Qual o perímetro desta? [Constrói uma figura[7] como exemplo].
> ***Lucas:*** Vinte e dois.
> ***Professor:*** Vinte e dois, não é? Por que aqui deu vinte e dois e aqui deu dezesseis? O que é que muda dessa para essa? [Referindo-se às Figuras 5 e 7].
> ***José:*** Essa está mais fechada.
> ***Professor:*** Isso. Está mais fechada. O que isso quer dizer? Por que nessa o perímetro é menor?
> ***José:*** Sim, mas tem mais *negocinho* fechado aqui.
> ***Professor:*** Mais *negocinho* fechado. Como assim?
> ***José:*** Está mais para dentro.
> ***Lucas:*** As linhas de dentro não ficam mais para fora.
> ***Professor:*** Vamos dizer que essa não estivesse aqui e estivesse aqui. [Reorganiza a figura construída como exemplo.][8]
> ***José:*** Aqui tem cinco para dentro.
> ***Professor:*** Cinco. E o perímetro, qual é?
> ***Lucas:*** É dezenove.
> ***José:*** Dezoito, dezenove, vinte.

Figura 7: Nova figura construída pelos alunos



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 8: Figura feita pelo professor



Fonte: Dados da pesquisa

Por coincidência, a nova figura construída por Lucas também possuía um perímetro de 16 unidades. Assim, eu desenho uma figura para que os alunos comparem com as que foram feitas por eles. Lucas verifica que o perímetro dessa figura é de 22 unidades. Ao ser questionado sobre as diferenças entre essa e a feita por José, o estudante conclui que a sua figura tem mais

[6] Figura 7.
[7] Figura 8.
[8] Na Figura 8 foi apagado um hexágono do canto esquerdo da figura e desenhado outro hexágono abaixo.

"*negocinho* fechado". Lucas coloca a observação de José em outras palavras ao dizer que as "linhas de dentro não ficam mais para fora". Ou seja, os alunos identificaram que a figura de José possuía mais lados unidos dos hexágonos na parte interna do que a figura feita por mim, que ainda foi reorganizada para que os alunos identificassem novamente o seu perímetro e quantos lados internos unidos dos hexágonos ela possuía.

> ***Professor:*** O que significa essa linha de dentro?
> ***José:*** O conjunto delas, não é?
> ***Professor:*** Conjunto? Como assim? O que quer dizer o conjunto do hexágono?
> ***José:*** Ah, elas estão juntas. Uma do lado da outra.
> ***Professor:*** De dois hexágonos, você fala?
> ***José:*** Sim.
> ***Professor:*** Quer dizer que essa linha aqui, ela é de quem?
> ***José:*** Dos dois.
> ***Professor:*** Desses dois hexágonos, não é?
> ***Lucas:*** Isso.
> ***Professor:*** Isso. Está certo. Essa linha é de dois hexágonos. Cada linha de dentro...
> ***Lucas:*** É de dois hexágonos.
> ***Professor:*** É de dois hexágonos. No que isso influencia no perímetro?
> ***Lucas:*** Aqui fica maior.
> ***José:*** Aqui você tem que contar dois, não é?
> ***Professor:*** Cada linha conta duas?
> ***José:*** Tem que contar duas. De dentro, de dentro! [Ênfase]
> ***Professor:*** De fora, não. Por que de fora não?
> ***Lucas:*** Porque de fora é apenas um.
> ***Professor:*** De fora só pertence a um hexágono, não é?
> ***José:*** É. Só um hexágono.
> ***Professor:*** Então, o que você conclui? Quanto mais linhas dentro, o perímetro é maior ou o perímetro é menor?
> ***Lucas***: Mais dentro é menor.
> Professo***r:*** Menor. Por quê?
> ***Lucas:*** Porque quanto mais dentro, vai ter menos o de fora.

Ao ser questionado sobre o que eram as "linhas de dentro", José responde que são o conjunto dos hexágonos. Quando pedi uma explicação mais clara, José disse que as linhas de dentro estão juntas, pertencendo a dois hexágonos ao mesmo tempo, o que também foi confirmado por Lucas. Quando questiono sobre a relação disso com o perímetro da figura, Lucas comenta que o perímetro da figura de José, que possui mais lados unidos dos hexágonos do que a figura feita por mim como exemplo, será maior. José, por sua vez, expressa novamente sua percepção de que cada linha interior da figura pertence a dois hexágonos ao dizer que cada uma delas "conta duas". Contudo, deixa bem claro que apenas as linhas de dentro são contadas duas vezes. Quando peço uma conclusão sobre a relação entre os lados unidos dos hexágonos e o perímetro das figuras, Lucas afirma novamente que "quanto mais dentro, vai ter menos o de fora". Ou seja, quanto mais lados unidos dos hexágonos na parte interna, restam menos lados na figura para serem contados no momento de determinar seu perímetro.

> ***Lucas:*** As linhas de dentro influenciam no tanto do perímetro.
> ***José:*** Como?
> ***Lucas:*** As linhas de dentro influenciam no tamanho do perímetro.

Por fim, Lucas e José ainda discutem sobre qual resposta escrita deveriam fornecer na tarefa. No diálogo acima, é possível notar que Lucas ainda procurava as palavras mais adequadas para expressar sua conclusão.

3.1.1.1 Processos de raciocínio matemático de Lucas e José

Como se pôde perceber, Lucas e José desenvolveram uma discussão bastante produtiva a partir das questões colocadas pela tarefa. O primeiro ponto a ser discutido pela dupla surge logo depois de calcularem o perímetro das figuras que construíram. José observa que o perímetro da sua figura é diferente da figura dada como exemplo no exercício e fico intrigado com o fato da figura construída pelo seu colega também ter um perímetro diferente.

A partir disso, é possível perceber que José esperava que os perímetros das figuras fossem iguais. O aluno evidencia isso quando, após calcular o perímetro da sua figura diz: "Pensei que ia dar dezoito". Há também um momento em que Lucas diz que o perímetro da figura que construiu é 22 e José rebate: "Está errado". José chega a supor que seu colega tivesse usado mais hexágonos: "Acho que ele fez a mais [...] Tem que fazer assim".

Isso mostra que José já possuía uma conjectura, a de que *todas as figuras construídas com seis hexágonos regulares unidos pelos lados possuem o mesmo perímetro*. Concluímos isso porque José inferiu uma declaração que era potencialmente válida. Mas, quando a dupla começou a resolver a tarefa, ele percebeu evidências contrárias à sua conjectura. Nesse caso, as figuras construídas e seus perímetros servirão como um contraexemplo à conjectura de José na medida em que avançam na resolução da tarefa. Elas ainda não serviram porque o aluno não aceitou que sua conjectura foi refutada.

Como definido por Galbraith (1995), um contraexemplo é algo que satisfaz as condições, mas não a conclusão de uma declaração, que é o caso da figura construída por Lucas em relação à conjectura de José. A construção do seu colega satisfaz as condições da sua declaração, já que é uma figura construída com cinco hexágonos regulares unidos pelos lados. Porém, ela não confirma a sua conclusão, de que o perímetro seria 18, tal qual o da figura dada como exemplo. Diante de uma dificuldade que os alunos possuem em aceitar contraexemplos

(GALBRAITH, 1995), José tenta enquadrar a figura de Lucas fora das condições de sua conjectura, ao dizer que o colega teria utilizado mais hexágonos.

E, até o momento, a figura de José tinha 17 como medida do perímetro. Isso só muda quando questiono o estudante sobre o porquê das várias figuras que estavam observando possuírem perímetros diferentes, percebendo que sua figura tinha, na verdade, 18 como medida do perímetro. Mas, pouco antes disso, José volta a não aceitar os contraexemplos à sua conjectura. Ao responder, o estudante diz: “Acho que tem um [hexágono] a menos”, buscando mais uma vez colocar o contraexemplo fora das condições de sua conjectura.

Então, os alunos passam à segunda questão da tarefa e constroem novas figuras. No entanto, essa questão pedia que os alunos pensassem se havia alguma maneira de determinar o perímetro sem precisar contar os lados. E, tanto Lucas quanto José, calculam o perímetro das figuras, ainda buscando elementos para a primeira questão. Portanto, os dois alunos mobilizaram o processo de exemplificação, já que as figuras construídas são utilizadas para auxiliar outros processos, sendo que, nesse caso específico, esse processo busca por uma validação (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

As figuras que os alunos construíram servem a eles como exemplos a partir dos quais visam obter elementos que permitam validar ou não a conjectura de José. Lucas, por exemplo, verifica o perímetro da sua figura, assim como José, que diz, surpreso: “O meu também deu dezesseis”. As primeiras figuras tinham perímetros diferentes. Portanto, José imaginava que isso ocorreria novamente. Ou seja, as novas figuras que construíram ainda serviam a eles como suporte para as questões levantadas anteriormente.

Depois, a dupla passa a pensar sobre a segunda questão. Sugiro aos alunos que olhem também para os lados internos unidos dos hexágonos, que, no momento da resolução da tarefa, eram compreendidos pelos alunos como os lados de dentro da figura. Lucas constrói uma terceira figura, mas como ela possui, novamente 16 como medida do perímetro, assim como as outras duas construídas pela dupla. Então, construo uma figura cuja medida do perímetro diferente é diferente dessa para que os alunos pudessem comparar com as demais que já possuíam.

Quando os estudantes comparam as figuras e são questionados sobre os perímetros diferentes, surgem novas conjecturas. José diz, por exemplo: “Essa está mais fechada”; [Seus lados estão] mais para dentro”. Ou seja, a conjectura seria de que a *figura desenhada pelo professor teria perímetro menor porque tem mais lados unidos dos hexágonos*. É uma declaração potencialmente válida, mas que ainda precisa de mais elementos para a sua validação.

Além disso, Lucas esboça uma justificação para a conjectura quando diz: "As linhas de dentro não ficam mais para fora". Ou seja, quanto mais lados unidos dos hexágonos na parte interna, há menos lados disponíveis para serem contados no momento de calcular o perímetro. A declaração de Lucas é uma justificação porque busca por elementos para validar a conjectura produzida. O aluno busca uma explicação para figuras com menos lados de dentro possuírem perímetro maior.

Na sequência, pergunto aos alunos o que são as linhas de dentro. Diante disso, José diz que são "O conjunto delas [...] Do hexágono" e complementa: "elas estão juntas, uma do lado da outra". Ou seja, José compreendeu que cada linha de dentro, cada linha unida dos hexágonos, continha, na verdade, o lado de dois hexágonos. Quando questionados como isso influenciaria no perímetro, Lucas diz: "Aqui fica maior" e "[Quanto] mais dentro é menor".

Além disso, a resposta escrita dos alunos é de que "as linhas de dentro influenciam no perímetro". Assim, os alunos mobilizam o processo de generalização, já que ampliam a conjectura produzida para um conjunto mais amplo de objetos (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). Ou seja, partem de algumas figuras para generalizar a ideia de que *os lados unidos influenciam no perímetro de uma figura*. Lucas também justifica, dizendo que "quanto mais [lados] dentro, vai ter menos o de fora".

Portanto, os alunos, durante a resolução da tarefa, mobilizaram os processos de conjectura, de exemplificação, de generalização e de justificação. A rica discussão realizada pelos alunos favoreceu a mobilização de vários processos de raciocínio matemático (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020). Ainda é importante mencionar que os alunos provavelmente ganharam um maior entendimento sobre o que valida ou invalida uma declaração, como é possível notar quando surgem os contraexemplos que refutam a conjectura de José.

3.1.2 Gustavo e Henrique

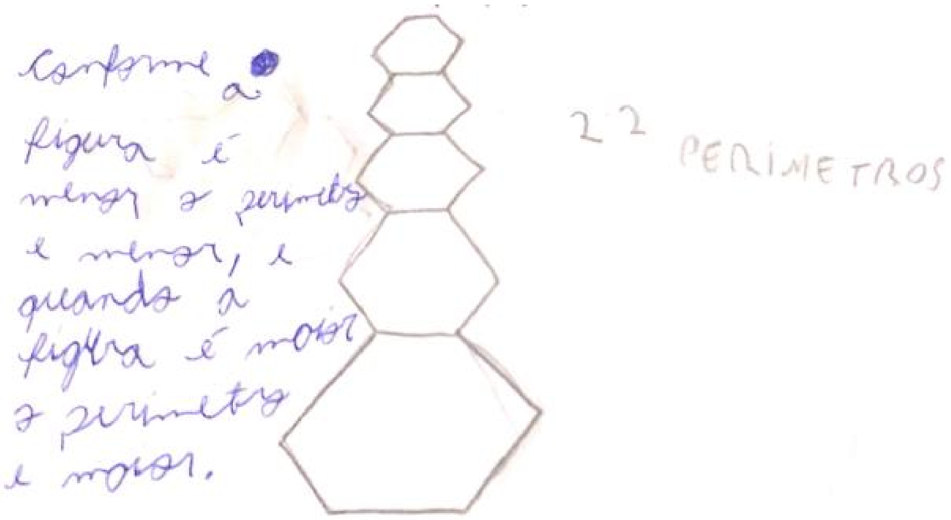
Com essa dupla, inicio perguntando sobre o perímetro da figura dada como exemplo na tarefa. Nesse momento, Gustavo, Henrique e Laís, uma aluna de outra dupla, dão palpites sobre a medida do perímetro.

> ***Professor:*** Cada linha aqui vale um. Qual é o perímetro?
> ***Gustavo:*** Dezenove. Mentira. É dezoito.
> ***Laís:*** Dezoito.
> ***Gustavo:*** Dezoito.
> ***Laís:*** Dezoito.

Gustavo: Falei primeiro.
Henrique: Mentira. É dezesseis.
Gustavo: É dezoito.
Henrique: Dezenove.

A princípio, Gustavo diz que o perímetro da figura é 19, mas rapidamente corrige, afirmando que a medida do perímetro é 18. Além dele, Laís também afirma que o perímetro da figura é 18. Henrique, por sua vez, discorda ao dizer que o perímetro da figura é 16. Apesar do protesto de Gustavo, Henrique continua a não concordar com o colega e passa a defender que o perímetro mede 19. Os dois palpites de Henrique estavam incorretos. Depois disso, os alunos constroem suas próprias figuras. Segue, abaixo, a construída por Gustavo. Não há registros da figura de Henrique porque o estudante apagou sua primeira construção.

Figura 9: Figura construída por Gustavo



Fonte: Dados da pesquisa

Professor: Isso, certo. Agora, conta o perímetro.
Gustavo: O perímetro?
Professor: Dessa figura sua.
Gustavo: O seu deu quanto?
Henrique: Deu dezenove.
Gustavo: O meu tem vinte e dois. Professor, o meu tem vinte e dois.
Professor: Tem vinte e dois? Escreve isso.
Henrique: Vinte e dois?
Gustavo: É porque muda o jeito. O jeito das coisas.
Henrique: O meu deu dezenove.
Gustavo: Porque você fez igual. Você fez igual.

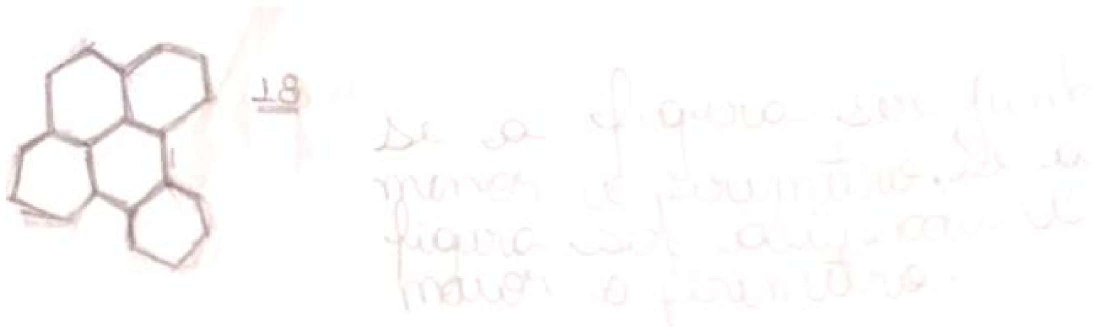
Vale lembrar que, no momento do diálogo acima, Henrique acreditava que o perímetro da figura dada como exemplo era 19. Além disso, o estudante também construiu incorretamente a sua figura, já que um dos polígonos que utilizou para tanto não era um hexágono. Por coincidência, o perímetro dessa figura, incorreta, construída por Henrique tinha 19 como medida do perímetro. Portanto, até esse momento, Henrique acreditava que a sua figura e a do exemplo possuíam o mesmo perímetro.

Gustavo, que construiu a figura e calculou o perímetro corretamente, como se pode observar na Figura 9, ao revelar que o perímetro de sua figura era 22, surpreende Henrique, já que este provavelmente não esperava que os perímetros pudessem ser diferentes. Gustavo supõe que os perímetros de figuras construídas de diferentes maneiras podem não ser iguais. Ele evidencia isso ao dizer que "muda o jeito [...] das coisas". Além disso, Gustavo afirma que o perímetro da figura de Henrique era igual à do exemplo – isso era verdade para Henrique, até o momento – porque ele havia construído uma figura idêntica à do exemplo. Como Henrique não percebeu rapidamente seu erro, decidi por uma intervenção nesse sentido.

> ***Professor:*** Deu dezenove aqui? Tem certeza?
> ***Henrique:*** Aqui, olha: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze, treze, quatorze, quinze, dezesseis, dezessete, dezoito, dezenove.
> ***Professor:*** Começa de novo.
> ***Henrique:*** Um, dois...
> ***Professor:*** Começou daqui. [Aponta para o primeiro lado contado pelo estudante].
> ***Henrique***: ...três, quatro, cinco, seis.
> ***Professor:*** Espera aí. Um, dois, três, quatro, cinco... Essa figura não tem seis lados, não. Tem que arrumar essa figura aí.

Foi nesse momento que Henrique verificou que seu erro não havia sido cometido no momento de calcular o perímetro, mas na construção da figura, quando o estudante utilizou um polígono com mais de seis lados. Apesar de os alunos terem sido instruídos a deixarem todas as respostas registradas, inclusive as incorretas, o estudante apagou sua primeira figura construída. Depois disso, Henrique construiu outra.

Figura 10: Figura construída por Henrique[9]



Fonte: Dados da pesquisa

[9] Como resposta, o aluno escreveu o seguinte: "Se a figura ser junta menor o perímetro. Se a figura ser alinhada é maior o perímetro".

Após isso, Henrique chegou à mesma conclusão de Gustavo, de que figuras diferentes podem ter medidas de perímetro diferentes. Pode-se perceber isso no diálogo abaixo, quando o aluno explica os perímetros diferentes das figuras construídas pela dupla.

> ***Professor:*** Vinte e dois e dezoito. O seu deu dezoito?
> ***Henrique:*** Deu.
> ***Professor:*** A pergunta é: Por que esse deu vinte e dois e esse...
> ***Gustavo:*** Porque é diferente.
> ***Henrique:*** A figura é diferente.
> ***Professor:*** Tá, mas no que isso influencia?
> ***Gustavo:*** Porque, tipo assim, aqui, por fora está igual, mas aqui tem por dentro.

A ideia de que figuras diferentes possuem perímetros diferentes é o primeiro passo para se obter outras conclusões ou mesmo refinar essa ideia. Nesse sentido, é perguntado aos estudantes como essa diferença na construção das figuras pode influenciar no seu perímetro. Gustavo chama a atenção para os lados dos hexágonos que ficam unidos na parte interna da figura quando menciona que "por fora está igual, mas aqui tem por dentro". É provável que ele tenha suposto que a quantidade de lados unidos dos hexágonos influencia no perímetro das figuras. Assim, decido por indagar os estudantes nesse sentido, pedindo para que comparassem as figuras.

> ***Professor:*** Olha, o seu [perímetro] deu igual [ao exemplo], não deu?
> ***Gustavo:*** É, o seu deu igual.
> ***Professor:*** Como isso aqui dentro está no seu?
> ***Gustavo:*** Um, dois, três, quatro, cinco.
> ***Professor:*** E o seu?
> ***Henrique:*** Um, dois, três, quatro, cinco... seis.
> ***Professor:*** Tá, mas e daí? O que tem a ver isso?
> ***Gustavo:*** Não é perímetro não?
> ***Professor:*** Como assim?
> ***Gustavo:*** Porque você fala que cada linha é um perímetro.
> ***Professor:*** Mas a de dentro é?
> ***Gustavo:*** Não.
> ***Professor:*** Não é, está certo. Não é.
> ***Henrique:*** Só é a de fora.
> ***Professor:*** Mas por que aqui deu diferente daqui, dessa primeira?
> ***Henrique:*** Porque mudou só a figura?
> ***Professor:*** Mudou a figura. E no que influencia mudar a figura?
> ***Henrique:*** Que daí o perímetro não é o mesmo. E às vezes é igual. Igual[10] o meu.

Inicio a conversa lembrando Henrique que o perímetro da sua figura era igual ao da que foi dada como exemplo. Então, os alunos contam quantos lados unidos dos hexágonos na parte interna cada figura tinha. Henrique concluiu que a sua figura tinha seis lados unidos, enquanto

---

[10] Aqui, Henrique utiliza a palavra *igual* com o sentido de *assim como* ou *tal qual*.

Gustavo contou, incorretamente, cinco. A figura de Gustavo tem, na verdade, quatro lados unidos na parte interna. Gustavo ainda observa que essas linhas de dentro das figuras não compõem o perímetro da mesma.

É importante destacar a fala de Henrique nesse diálogo. Quando peço que a dupla compare a figura de Gustavo e a figura dada como exemplo, Henrique afirma que, quando "muda a figura", o perímetro não é o mesmo. Contudo, ele observa que isso nem sempre é verdade, já que a sua figura, apesar de não ser mais idêntica à do exemplo, possui o mesmo perímetro. "Às vezes é igual", de acordo com o aluno. Pode-se considerar que a afirmação de Henrique é um refinamento de uma resposta dada anteriormente pela dupla, quando disseram que figuras diferentes implicam perímetros diferentes. Depois, questiono os alunos por que o perímetro de algumas figuras é maior que o de outras.

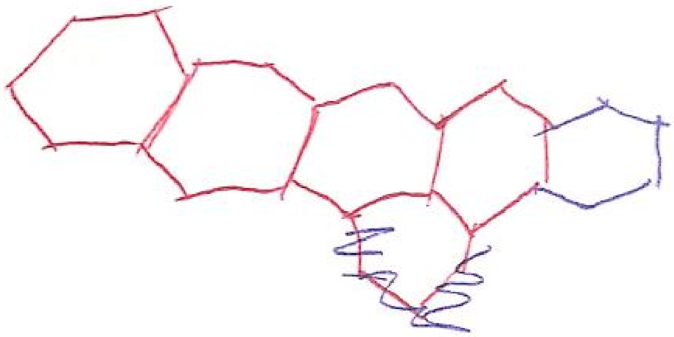
> ***Gustavo:*** Porque, tipo, vamos pegar o exemplo dele. Aqui é pequeno e a minha é maior, então a diferença...
> ***Henrique:*** Eu acho que quando é mais junto é menor e quando é igual a do Gustavo, é maior e daí.... Quando a figura é mais junta, assim, eu acho que ela é...
> ***Professor:*** Vamos lá, explica aí.
> ***Henrique:*** Ah, eu não sei.
> ***Professor:*** Vamos lá, explica o que você estava explicando. Quando é menor, assim, mais fechada...
> ***Henrique:*** Daí é menor o perímetro. Igual a [figura] do Gustavo, não tem muito perímetro no lado de dentro, daí no lado de fora vai ser maior o perímetro.
> ***Professor:*** O que é o perímetro do lado de dentro?
> ***Henrique:*** O perímetro é as linhas aqui.
> ***Professor:*** Do lado de dentro?
> ***Henrique:*** É.
> ***Professor:*** Essa linha, você quer dizer?
> ***Henrique:*** É.
> ***Professor:*** As linhas de dentro.
> ***Henrique:*** Isso.
> ***Professor:*** Isso não é perímetro. Perímetro é só o de fora. Mas eu entendi o que você falou. Como você acha que essas linhas influenciam mesmo?
> ***Henrique:*** Porque estão mais juntas e daí não dá pra contar o perímetro.

Após essa indagação, os alunos desenvolveram respostas interessantes. Gustavo, por exemplo, disse que a figura de Henrique é "menor", enquanto a dele é "maior", sendo esse o motivo do perímetro da sua figura ser maior que a de Henrique. Interpreto que o estudante utilizou as palavras maior e menor para se referir às figuras com menos lados unidos e mais lados unidos dos hexágonos, respectivamente. Figuras com menos lados dos hexágonos unidos tendem a dispersar mais os polígonos, ser "mais compridas", enquanto as com mais lados dos hexágonos unidos tendem a ter os polígonos agrupados, são "menos compridas". Daí, possivelmente, as palavras maior e menor utilizadas por Gustavo.

Henrique deu uma resposta semelhante. Segundo o estudante, quanto "mais juntos" estão os polígonos, menor é o perímetro. Henrique ainda diz que a figura de Gustavo "não tem muito perímetro no lado de dentro". Ou seja, entendemos que o aluno compreendeu que quanto mais lados unidos dos hexágonos, menor é o perímetro, já que sobram menos lados dos hexágonos para serem considerados no momento de calcular o perímetro da figura.

Por fim, o professor desenha outra figura como exemplo e pede para que Henrique diga se o perímetro será maior ou menor do que o da figura de Gustavo.

Figura 11: Figura construída pelo professor[11]



Fonte: Dados da pesquisa

> ***Professor:*** Entendi. Vou desenhar uma figura aqui. Você me fala se vai ser maior ou menor o perímetro. Essa aqui vai ser maior ou menor que a do Gustavo?
> ***Henrique:*** Vai ser menor.
> ***Professor:*** Menor?
> ***Henrique:*** É. Eu acho que vai.
> ***Professor:*** Por quê?
> ***Henrique:*** Porque essa daqui, aqui está junto. Se esse quadradinho estivesse aqui, ou esse aqui, o perímetro ia ser maior. Se tirasse esse quadradinho daqui e colocasse, tipo aqui, o perímetro ia ser maior.
> ***Professor:*** Está certo. Muito bem. É isso aí mesmo. Tenta escrever isso de algum jeito.

Henrique observa a figura construída por mim e responde, corretamente, que ela tem o perímetro menor do que o da figura de Gustavo. Além disso, o aluno cita maneiras de outras organizações da figura que resultariam em perímetros de medidas diferentes. Henrique cita um caso específico no qual o perímetro seria maior.

3.1.2.1 Processos de raciocínio matemático de Gustavo e Henrique

Gustavo e Henrique se mostram bastante dispostos para a resolução da tarefa. Os estudantes demonstraram bastante envolvimento durante todo o percurso da mesma. No início,

[11] As adaptações na figura (a mudança de um hexágono de lugar) também foram feitas por mim.

estavam ansiosos para fornecer uma resposta o quanto antes. Quando o pergunto sobre o perímetro da figura dada como exemplo, Gustavo e Henrique tentam responder o mais rápido possível, inclusive com Laís, de outra dupla, participando das respostas. Isso leva a pequenos erros no cálculo do perímetro, tanto de Gustavo quanto de Henrique, mas que são rapidamente percebidos por eles.

Quando os alunos construíram suas próprias figuras e calcularam o perímetro, Henrique comete um erro na construção ao desenhar um dos hexágonos regulares com um lado a mais. Esse hexágono regular com um lado extra, que passa a ser, na verdade, um polígono qualquer e deixa a figura de Henrique com um perímetro de medida ímpar, 19, o que não era possível se a figura fosse construída da maneira correta. O aluno só irá perceber que não fez uma figura com seis lados no decorrer da tarefa.

Gustavo, que tinha sua figura construída corretamente, com o perímetro de 22, mesmo antes de quaisquer questionamentos nesse sentido, já observa: “É porque muda o jeito. O jeito das coisas”. Gustavo se referia à diferença dos perímetros das figuras e à disposição dos hexágonos nas suas construções. Desse modo, Gustavo produz uma conjectura ao observar que a figura que construiu e a dada como exemplo possuíam perímetros diferentes e também uma disposição dos hexágonos diferente. Portanto, conjecturou que *disposições diferentes dos hexágonos regulares implicam em figuras com perímetros diferentes*. Gustavo inferiu uma declaração potencialmente verdadeira, mas que ainda necessitava de mais elementos para a sua validação.

Depois, quando Henrique já tinha construído uma nova figura, dessa vez correta, com perímetro igual a 18, o professor questiona sobre a diferença dos perímetros das figuras que construíram. Ambos reafirmam a conjectura anterior. Isso acontece porque “A figura é diferente”, segundo Henrique. Gustavo, por sua vez, produz uma justificação. Após meu questionamento sobre como as figuras serem diferentes influenciaria no perímetro, ele responde: “aqui, por fora, está igual, mas aqui tem por dentro”. Ou seja, Gustavo está dizendo que, dependendo da maneira como a figura está organizada, o número de lados internos unidos pode ser diferente, bem como o perímetro. Isso é uma justificação porque o aluno apresenta elementos que buscam validar a conjectura.

Então questiono, novamente, o porquê das figuras que construíram terem perímetros diferentes. Henrique diz que isso ocorre porque as figuras também são diferentes. O aluno diz que quando mudam as figuras, “o perímetro não é o mesmo [mas] às vezes é igual. Igual o meu”. Assim, Henrique refina a conjectura anterior. Agora, o estudante compreende que nem sempre que as figuras forem diferentes o perímetro será também diferente. Portanto, teríamos a seguinte conjectura: *disposições diferentes dos hexágonos regulares podem implicar em figuras com perímetros diferentes*.

Destaco também a frase final do estudante: "Igual o meu", quando o estudante compreende que figuras diferentes não possuem, necessariamente perímetros diferentes, assim como a figura que ele próprio construiu. Desse modo, Henrique mobilizou o processo de exemplificação, pois utilizou a figura que havia construído para dar suporte a uma afirmação sua. Aqui, o processo de exemplificação apoia a conjectura do estudante.

Nos próximos questionamentos, os alunos avançam ainda mais nessa ideia. Gustavo, por exemplo diz: "vamos pegar o exemplo dele [...] é pequeno e a minha é maior". Provavelmente, Gustavo se referia ao comprimento das figuras que construíram. Uma figura maior seria aquela que possui menos lados dos hexágonos unidos na parte interna, ficando, dessa maneira "mais comprida". Uma figura menor seria aquela que possui mais lados unidos dos hexágonos, ficando "menos comprida".

Sob os mesmos questionamentos, Henrique concluiu que quando a figura é menor, ou seja, com mais lados unidos dos hexágonos, o perímetro é menor. Henrique também mobiliza os processos de exemplificação e de generalização. O estudante utiliza, para tanto, a figura que seu colega construiu: "Igual a do Gustavo, não tem muito perímetro no lado de dentro, daí no lado de fora vai ser maior". Assim, Henrique generaliza que, *quanto mais lados unidos dos hexágonos, menor é o perímetro da figura*. Acredita-se que Gustavo quis dizer que, quanto menos figuras no lado de dentro, menos restarão no lado de fora, para que fossem consideradas como perímetro. Depois, Gustavo confirma isso, dizendo que a figura "está mais junta e daí não dá para contar o perímetro".

Depois, analisando uma figura construída por mim, Henrique diz o seguinte: "[o perímetro será menor] porque aqui está tudo junto. Se esse quadradinho estivesse aqui, ou esse aqui, o perímetro ia ser maior". Primeiramente, Henrique fornece uma justificação para a generalização que produziram. Ao dizer que "está tudo junto", o aluno quis dizer que há mais lados unidos dos hexágonos na figura cujo perímetro é menor. Assim, ele busca por elementos para confirmar a generalização. Além disso, há um processo de exemplificação mobilizado pelo estudante, já que dá exemplos de alterações na disposição dos hexágonos de uma figura construída pelo professor para mostrar quando ela teria um perímetro maior ou menor. Portanto, Henrique construiu um exemplo que apoia a generalização e a justificação produzidas, já que ele gera evidências que auxiliarão na validação das suas declarações (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

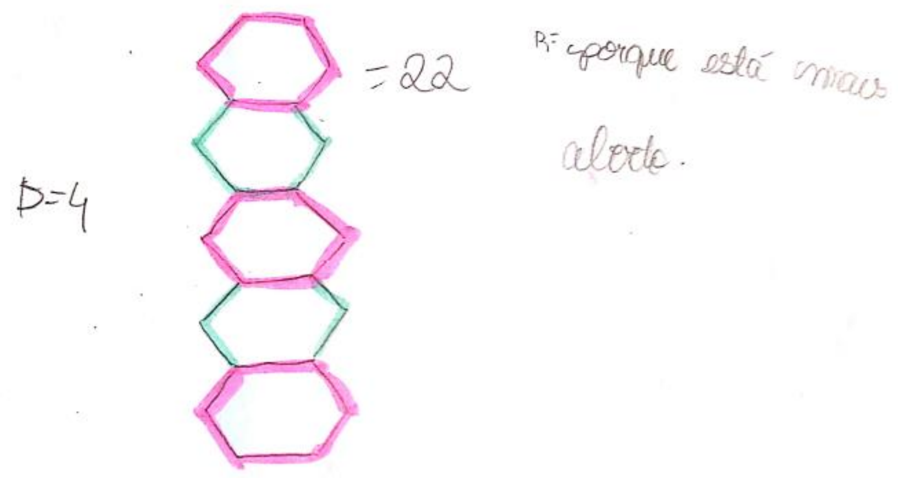
Gustavo e Henrique também produzem uma longa discussão durante a resolução da tarefa, que os possibilita mobilizar diferentes processos de raciocínio matemático (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020). Os alunos não demoraram em produzir uma conjectura e, quando o fizeram, trabalharam sobre ela ao longo da tarefa, refinando-a e chegando a uma generalização na parte final. Também foram produzidas justificações, essenciais para validar as suas afirmações.

Chamou a atenção, além disso, o uso do processo de exemplificação pelos alunos, diversas vezes. Esse processo foi importante na medida em que gerou elementos que apoiassem os outros processos, principalmente com o intuito de validação (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). É interessante notar que o processo de exemplificação revelou o entendimento que os alunos tinham da situação. Um momento em que isso ficou evidente foi quando Henrique disse como uma figura poderia ser reorganizada para mostrar quando ela teria perímetro maior ou menor.

3.1.3 Laís e Leandro

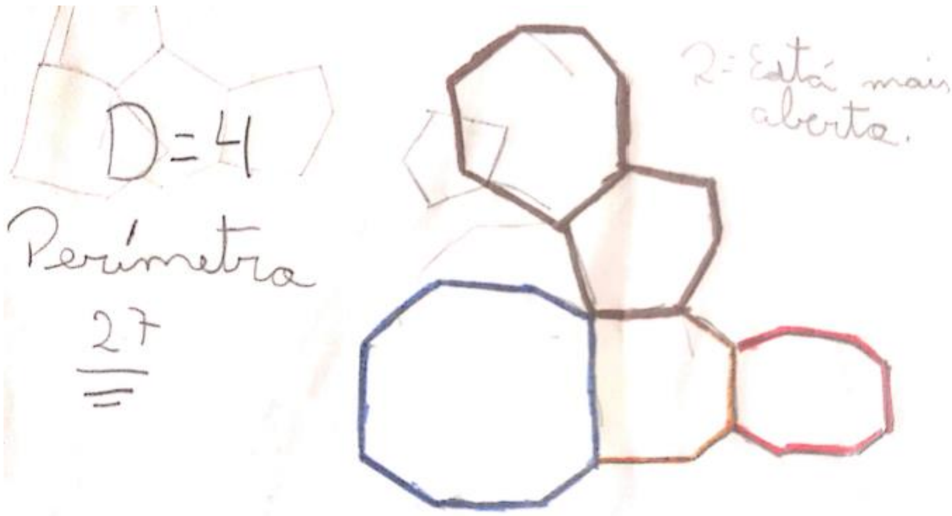
Ao resolverem a tarefa, a dupla formada por Laís e Leandro construiu as imagens mostradas nas Figuras 12 e 13.

Figura 12: Figura construída por Laís



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 13: Figura construída por Leandro



Fonte: Dados da pesquisa

Pode-se perceber, na Figura 13, que a construção de Leandro não está correta. O estudante não usou somente hexágonos para construir a figura e, com isso, acabou chegando a um valor incorreto do perímetro. Depois de construídas as figuras, indaguei os estudantes sobre o porquê da medida do perímetro de suas figuras ser diferente do perímetro da figura dada como exemplo na tarefa.

> ***Professor:*** Terminaram? Vamos, lá. Contou o perímetro?
> ***Leandro:*** Sim.
> ***Professor:*** Deu vinte e dois. E esse aqui, deu quanto?
> ***Leandro:*** Dezoito.
> ***Professor:*** Deu dezoito aqui, deu vinte e dois aqui. Por que você acha que deu diferente?
> ***Laís:*** Porque sim.
> ***Professor:*** Como assim 'porque sim'?
> ***Laís:*** Porque, olha, aqui está aberto, aqui está mais fechado. Aí não mostra esse daqui. Esse daqui juntou, aí deu mais.
> ***Professor:*** Esse daqui qual?
> ***Laís:*** Essas linhas de dentro aparecem aqui, então conta, entendeu?
> ***Professor:*** Então, por que essa dá menos que essa?
> ***Laís:*** Já disse.
> ***Professor:*** Tá, então escreve isso aqui.

Laís respondeu que as figuras tinham perímetros diferentes porque uma delas estava "mais fechada". Além disso, a estudante fala o seguinte: "esse daqui, [...] juntou, aí deu mais". Nesse momento, a aluna possivelmente está se referindo aos lados dos hexágonos. Laís ainda afirma: as "linhas de dentro aparecem aqui, então conta". Ela se referia aos lados unidos dos hexágonos na parte interna como linhas de dentro, mas destacava que, quando essas linhas estavam na parte externa, quando fossem na verdade os lados dos hexágonos na parte externa, deveriam ser consideradas para contar o perímetro. Depois, peço que Laís registre suas respostas no caderno. Nesse momento, ela escreve que a sua figura estava “mais aberta”.

> ***Laís:*** Ah, professor, é muito grande. Eu não sei explicar.
> ***Professor:*** Pensa em uma frase pequena, então.
> ***Laís:*** Aqui, professor, aqui. ‘Está mais aberto’. Entendeu?
> ***Professor:*** Mais aberto? Acho que entendi.

Sem querer escrever uma resposta muito longa para a questão, Laís utiliza a expressão “mais aberta” para referir-se à sua figura como a que tem menos lados dos hexágonos unidos do que a figura exemplo. A seguir, os alunos discutem a segunda questão da tarefa, quando constroem a figura 14.

Figura 14: Figura construída por Laís na segunda questão da tarefa

Fonte: Dados da pesquisa

> ***Professor:*** Não deu quinze, não. [Referindo-se à figura 14]
> ***Laís:*** Deu sim.
> ***Professor:*** Não deu, não.
> ***Laís:*** Deu sim. Você não sabe contar. Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze, treze, quatorze, quinze, dezesseis. Dezesseis, um a mais.
> ***Professor:*** Dezesseis. Isso. Olhando só para as linhas de dentro, você consegue saber o perímetro?
> ***Laís:*** Eu não.
> ***Professor:*** Quantas linhas de dentro têm aqui?
> ***Laís:*** Não sei. Ninguém consegue olhar e falar... Só se contar.
> ***Leandro:*** Oito. É oito, professor.
> ***Professor:*** Aqui dentro?
> ***Leandro:*** É.
> ***Professor:*** Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete. Oito.
> ***Laís:*** Dentro, oito.
> ***Professor:*** E aqui? [Apontando a Figura 12].
> ***Laís:*** Quatro.
> ***Professor:*** E aqui? [Apontando para a figura dada como exemplo].
> ***Laís:*** Cinco. Cinco.
> ***Leandro:*** Seis.
> ***Professor:*** Seis. Agora, sim.

Em um primeiro momento, Laís havia calculado 15 como o perímetro da Figura 14. Contudo a aluna refez a contagem e concluiu, corretamente, que a medida do perímetro era 16. Depois disso, pedi para que os alunos contassem quantas lados unidos dos hexágonos na parte interna possuía a figura. Leandro contou, incorretamente, 8 para a Figura 14. Quando contei os lados unidos na parte interna da figura, também não percebi o erro do estudante. No entanto, Laís percebeu esse erro e anotou o valor correto ao lado, como se pode perceber pelo “D = 7” na Figura 14. Então, Laís e Leandro concluíram que havia 4 lados unidos dos hexágonos na Figura 12 e 6 na figura dada como exemplo.

3.1.3.1 Processos de raciocínio matemático de Laís e Leandro

A dupla formada por Laís e Leandro proporcionou menos dados para análise do que as anteriores. Os estudantes forneceram rapidamente uma explicação para a tarefa e não produziram uma discussão que evidenciasse vários processos de raciocínio matemático. No começo da tarefa, ambos os alunos construíram as suas figuras. Leandro, no entanto, encontrou dificuldades para desenhar os hexágonos regulares e sua figura foi construída incorretamente, já que usou polígonos com diferentes quantidades de lados, como se pode verificar na Figura 13.

Assim, meus primeiros questionamentos à dupla foram sobre a figura de Laís, cujo perímetro era de 22, e a dada como exemplo na tarefa. Leandro calculou corretamente o perímetro da figura dada como exemplo. Quando questionei o porquê de as duas figuras terem perímetros diferentes, Laís responde: “aqui está mais aberto, aqui está mais fechado. Aí não mostra esse daqui”. Ou seja, Laís argumentou que a sua figura estaria mais aberta, enquanto a dada como exemplo, mais fechada. A figura mais aberta é, provavelmente, a construída por ela, com menos lados unidos dos hexágonos, enquanto a mais fechada é a figura dada como exemplo na tarefa, com mais lados unidos.

Portanto, pode-se concluir que Laís entende que a quantidade de lados unidos dos hexágonos pode influenciar no perímetro da figura. Além disso, ela diz que “não mostra esse daqui” se referindo aos lados unidos dos hexágonos. Então, a estudante também entende que os lados unidos não são contabilizados como perímetro. Além disso, Laís diz, ao responder o porquê de uma das figuras ter o perímetro menor: “Essas linhas de dentro aparecem aqui, então conta”. Dessa forma, a aluna argumenta que os lados que estão unidos em uma figura, as linhas de dentro, não estão unidos na outra figura. Assim, elas são contabilizadas no momento de calcular o perímetro, tornando-o, com isso, maior que o da outra figura.

Assim, Laís possui a generalização de que *quanto mais lados unidos do hexágono na figura, menor o seu perímetro*. Considero a generalização porque a aluna deu indícios de compreender que esse fato era válido para todas as figuras construídas daquela maneira. Laís justifica quando diz que as “linhas de dentro aparecem aqui, então conta”, quando dá elementos que validam a sua generalização, já que ela fornece um motivo que tornaria sua generalização válida: os lados não unidos dos hexágonos são contados como perímetro, o que aumenta o perímetro da figura.

Essa dupla apresentou uma discussão menos detalhada que as anteriores. Considero que isso aconteceu por um principal fator: uma generalização desenvolvida muito rapidamente por Laís. Isso reduziu as possibilidades de desenvolvimento de exemplos, de conjecturas e seus possíveis refinamentos e de outras justificações. Além disso, Laís pode ter resolvido a tarefa com mais facilidade por possivelmente já possuir os conhecimentos necessários. Dessa maneira, a tarefa não se configuraria como uma de natureza exploratória para a aluna (PONTE, 2005). E, como mencionam Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), essa abordagem é especialmente fértil para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

3.1.4 Lúcio, Marcos e Fernando

Inicialmente, o trio formado pelos alunos Lúcio, Marcos e Fernando calculou o perímetro da figura dada como exemplo.

> ***Professor:*** Qual é o perímetro da figura? Lembra o que é perímetro?
> ***Lúcio:*** São essas linhas aqui, olha.
> ***João[12]:*** O perímetro da área.
> ***Professor:*** Perímetro, o que é? Você lembra o que é perímetro?
> ***Lúcio:*** Área.
> ***Professor:*** Não.
> ***Lúcio:*** Os lados.
> ***Professor:*** Os lados. Vai lá. Conta aí.
> ***Lúcio:*** Quantos lados tem?
> ***Professor:*** É.
> ***Lúcio:*** Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze, treze, quatorze, quinze, dezesseis, dezessete, dezoito, dezenove, vinte.

Nesse primeiro passo da tarefa, questionei os estudantes sobre a medida do perímetro da figura dada como exemplo, mas eles evidenciaram que, primeiro, precisavam recordar a definição de perímetro. Lúcio, por exemplo, confunde perímetro com área. Depois, fala sobre

[12] Estudante de outra dupla.

"os lados" da figura para se referir ao perímetro, dando a entender que se lembra de como calculá-lo. Apesar disso, o estudante não calcula corretamente o perímetro da figura dada como exemplo, possivelmente por contar duas vezes alguns dos lados. No entanto, esse erro parece ter sido corrigido pela dupla, já que escrevem ao lado da figura dada como exemplo o seguinte: "Perímetro = 18". Os alunos também demonstram algumas dificuldades para desenhar a figura utilizando os cinco hexágonos, como se pode perceber nos diálogos a seguir.

> ***Lúcio:*** Nossa, está ficando muito feio.
> ***Fernando:*** Eu sei. Eu não estou conseguindo nem fazer um.
> ***Lúcio:*** É muito difícil, professor. Eu vou pegar a régua se eu tiver.
> ***Fernando:*** Empresta a borracha, rapidinho, depois que você terminar.
> ***Lúcio:*** Professor, não estou conseguindo fazer.
> ***Professor:*** Conseguiu? ...cinco, seis. Aí, é assim. Agora o que você faz? Desenha para o outro lado. Olha, um lado você já tem, entendeu? Você usa esse lado.
> ***Lúcio:*** Ah, entendi.

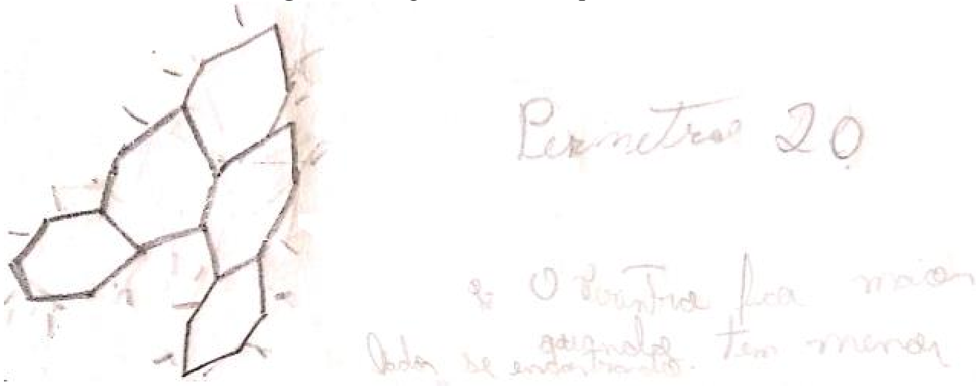
Ao perceber isso, o tento auxiliar os estudantes que estavam tendo dificuldades para construir a figura. Sugeri aos alunos que aproveitassem os lados dos hexágonos que já haviam desenhado para construir os demais. Contudo, a dificuldade persistiu.

> ***Marcos:*** São cinco só, Fernando? Eu já terminei de desenhar isso.
> ***Professor:*** Deu certo? Terminaram?
> ***Fernando:*** Aqui, olha.
> ***Professor:*** Espera, aí. Essas figuras estão estranhas.
> ***Fernando:*** Mas tem os lados certinhos, olha.
> ***Marcos:*** É, professor. Tem os lados certinhos.
> ***Professor:*** Não, está estranha.
> ***Marcos:*** Cinco hexágonos.
> ***Fernando:*** Cada uma tem seis lados, olha. Um, dois, três, quatro, cinco, seis.
> ***Professor:*** Essa figura, por exemplo, olha. Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete. Desenha de novo essa aqui. Desenha como? Vou pôr um exemplo aqui. Olha, faz aqui uma figura. Daí a outra você faz como? Aproveita esse lado aqui e faz outra. Entendeu? Faz desse jeito. Desenha assim. Cinco desse jeito.

Dessa vez, os alunos construíram uma figura, mas não tomaram o cuidado suficiente para utilizar apenas hexágonos, como se pode perceber no momento em que conto sete lados em um dos polígonos que formavam a figura[13]. Assim, oriento novamente os estudantes, dessa vez construindo uma figura como exemplo. Pode-se visualizar, nas Figuras 15, 16 e 17, que Fernando e Lúcio fizeram as suas construções, mas a figura de Marcos continuou incorreta.

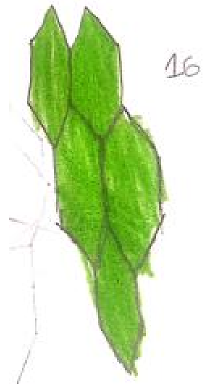
[13] Figura 18.

Figura 15: Figura construída por Fernando[14]



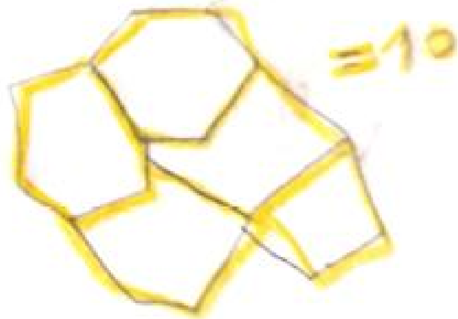
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 16: Figura construída por Lúcio



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 17: Figura construída por Marcos



Fonte: Dados da pesquisa

Com a correção das figuras por parte dos alunos, questionei-os sobre o fato de elas terem perímetros diferentes.

> ***Fernando:*** Aqui, professor. Está certo, não está?
> ***Marcos:*** Parabéns, Fernando.
> ***Professor:*** Está. O perímetro? Vinte. A pergunta é: por que você acha que esse perímetro deu diferente desse?

---

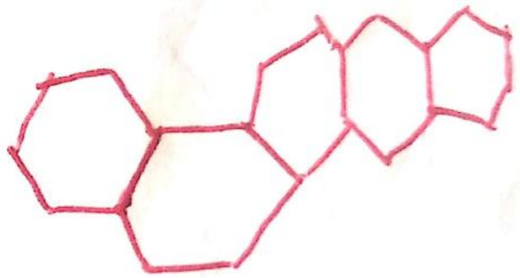
[14] O aluno colocou como resposta: "O perímetro fica maior quando tem menos lados se encontrando".

Fernando: Por causa da área em que eles se encontram aqui, olha. Porque, aqui, ele está juntando três. Aqui, ele pode tirar essa peça daqui e colocar aqui, que vai mudar, não vai ter duas bases. Porque aqui vai ocupar só um.
Professor: Quais que se encontram?
Fernando: Essas três aqui.

Fernando construiu uma figura cujo perímetro era 20. Considerando que o perímetro da figura de Lúcio era 16, questionei-os sobre o porquê de o perímetro da figura deles ser diferente do perímetro da figura dada como exemplo. Fernando respondeu que isso se devia à "área em que eles [os lados] se encontram". Possivelmente, o estudante estava se referindo aos lados unidos dos hexágonos, que de fato interferem na medida do perímetro da figura. O aluno usa a sua construção, Figura 15, como exemplo, na qual três dos hexágonos que a formava possuíam seus lados unidos. Além disso, Fernando mostra ter compreendido isso quando diz que "pode tirar essa peça daqui e colocar aqui, que vai mudar". Ou seja, ele compreende que, se a figura for organizada de outra maneira, seu perímetro pode ser alterado. Fernando continua argumentado nesse sentido:

Fernando: Se tirar essa daqui e colocar aqui, não vai cobrir essa mesma área, só vai desenhar um.
Professor: Você acha que vai aumentar ou diminuir o perímetro?
Fernando: Vai diminuir.
Professor: Vou desenhar uma figura e você me fala se vai aumentar ou diminuir o perímetro. Vou aproveitar essa [Figura 18]. Vai ser maior ou menor o perímetro?
Fernando: Agora, aqui, como ele está juntando mais, tem um, dois, três, quatro, cinco, seis.... Vai ser maior.
Professor: Por quê?
Fernando: Porque tem esses aqui se encontrando só uma... E tira menos um perímetro.

Figura 18: Figura construída como exemplo pelo professor



Fonte: Dados da pesquisa

No início do diálogo acima, Fernando dá outro exemplo de que uma figura pode ter seu perímetro alterado dependendo da maneira como é organizada. Então, proponho que ele compare o perímetro da sua figura com o perímetro da figura acima. Fernando, ao dizer "tem essas aqui se encontrando só uma", refere-se ao fato de que, na Figura 18, há menos lados dos hexágonos unidos. Dessa forma, restam mais lados para serem considerados no perímetro da figura, que foi o que o estudante quis dizer com “tira menos um da área, tira um perímetro”, apesar de ter utilizado a palavra área incorretamente.

3.1.4.1 Processos de raciocínio matemático de Lúcio, Marcos e Fernando

Esse grupo de alunos, exceção que realizou a tarefa em trio, também resolveu a tarefa com certa facilidade. Houve algumas dificuldades na construção das figuras. Assim, os alunos demoraram para começar a pensar nas questões colocadas pela tarefa porque não tinham ainda suas próprias construções. E, mesmo com o auxílio do professor em determinado momento, as dificuldades de Marcos ainda persistiram, como se pode perceber pela Figura 17.

Após algum tempo, Fernando e Lúcio conseguiram finalizar suas construções, com seus perímetros medindo, respectivamente, 22 e 16. Pergunto aos alunos porque suas figuras apresentaram perímetros diferentes. Diante disso, Fernando responde que isso ocorre “Por causa da área em que eles [os lados] se encontram”. Fernando utiliza a expressão área em que se encontram para se referir aos lados unidos dos hexágonos.

Utilizando sua construção, a Figura 15, como referência, Fernando complementa: “Porque, aqui, ele está juntando três”. Fernando se refere aos três pares de lados unidos na parte interna que a figura que construiu possui. Ou seja, ele compreende que os lados internos unidos dos hexágonos na podem alterar o perímetro da figura. Fernando ainda conclui dizendo que “ele pode tirar essa peça daqui e colocar aqui, que vai mudar”. Nesse momento, o estudante mobiliza o processo de exemplificação. Ao dizer que alterando a disposição dos hexágonos na figura o perímetro mudaria, Fernando utiliza um exemplo que tem como objetivo dar suporte, validar, as suas declarações anteriores (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

A partir disso, pode-se dizer que Fernando conjectura que *o perímetro da figura muda conforme a quantidade de lados unidos dos hexágonos*, uma afirmação potencialmente válida. E, logo depois do exemplo que citamos no parágrafo anterior, Fernando diz que, se um hexágono for mudado de lugar de forma que tenha um lado a menos unido com outro hexágono, seu perímetro será contado de outra maneira. O aluno diz: “Se tirar essa daqui e colocar aqui, não vai cobrir essa mesma área, só vai desenhar um”. Então, se um lado que estava unido não estiver mais, ele só representa um lado, de um hexágono, e não dois lados, um de cada hexágono, como seria se estivessem unidos. Dessa forma, isso se configura, apoiado fortemente pelo exemplo anterior, como uma justificação, já que reúne elementos para validar a sua conjectura.

Então peço que o aluno analise a Figura 18 e compare com a que construiu. Diante da pergunta se essa figura teria um perímetro maior ou menor que a sua, Fernando diz que, “como ele está juntando mais [...] Vai ser maior”. Ou seja, o estudante refinou sua conjectura anterior. Consideramos que essa é uma generalização produzida por Fernando, já que ele faz uma afirmação mais geral. A resposta escrita fornecida pelo aluno foi de que o “perímetro fica maior quando tem menos lados se encontrando”. Assim, sua generalização é de que, *quanto menos lados dos hexágonos unidos, maior o perímetro da figura*.

Fernando ainda fornece uma justificação para a generalização quando diz que “tem esses [lados] aqui se encontrando só uma [...] tira menos um perímetro. Em outras palavras, Fernando diz que, se há menos lados unidos dos hexágonos, há mais lados para serem contados como perímetro, por isso a sua generalização é válida. Isso também caracteriza a afirmação do estudante como uma justificação por apresentar elementos que almejam validar a sua generalização.

Desse modo, nesse grupo de alunos, foi possível notar que a tarefa foi resolvida com relativa rapidez, quando comparada à de outras duplas. Foi possível identificar diversos processos de raciocínio matemático. O aluno Fernando percebeu rapidamente a relação entre o perímetro da figura e os lados internos unidos dos hexágonos e, a partir disso, desenvolveu uma conjectura, forneceu uma justificação, refinou a conjectura, utilizou o processo de exemplificação, realizou uma generalização e produziu uma nova justificação. Apesar disso, não houve uma discussão muito rica no grupo, o que é desejável para tarefas nesses moldes (PONTE, 2005).

3.1.5 Discussão da tarefa do 6º ano

A tarefa proposta aos estudantes levantou diversas questões matemáticas possíveis de serem exploradas e possibilitou que mobilizassem alguns processos de raciocínio matemático. Os alunos produziram, principalmente, diversas conjecturas a partir das suas construções e da observação das construções dos demais. A dupla formada por Lucas e José, por exemplo, se baseou fortemente na observação de várias construções para a produção de suas conjecturas.

No entanto, notou-se que os alunos não sentiram a necessidade da justificação das conjecturas (PONTE, MATA-PEREIRA, HENRIQUES, 2012). Todas as justificações produzidas partiram de questionamentos da minha parte. As atividades matemáticas que esses estudantes estavam acostumados a realizar durante o seu percurso escolar não pediam, em geral, que justificassem os seus resultados.

Pelo contrário, os alunos estavam habituados a realizar exercícios que tinham foco maior na obtenção de uma resposta do que no processo e nos porquês de determinada resposta ser a correta. Talvez por isso não vejam a justificação como um caminho natural. Nesse mesmo sentido, notou-se a pouca familiaridade com contraexemplos na Matemática (GALBRAITH, 1995), como o caso de José, que não aceita que sua conjectura foi refutada mesmo depois de ser apresentado a um contraexemplo que confirme isso.

Além disso, os questionamentos aos estudantes no sentido da produção de justificações levaram a um refinamento das conjecturas e, eventualmente, à produção de generalizações. Os alunos Lucas e José refutaram uma conjectura após um contraexemplo. Já Gustavo e Henrique, depois de uma justificação, refinaram uma conjectura e produziram uma generalização.

O processo de generalização foi mobilizado por todas as duplas que realizaram essa tarefa, sempre após um processo de justificação. Apenas a aluna Laís apresentou uma generalização e depois uma justificação. Portanto, a maior parte dos alunos produziu primeiro conjecturas, depois justificações e, então, generalizações. Eles partem, assim, de um subconjunto para um conjunto mais amplo de elementos (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008).

3.2 7º ANO

A seguir serão descritas as resoluções do 7º ano. Antes de os alunos começarem a resolver, apresentei a tarefa para a turma toda e, só então, eles iniciaram.

3.2.1 Tiago e Emerson

Ainda durante a apresentação da tarefa, os alunos Tiago e Emerson já começam a discuti-la:

> ***Professor:*** Eles estão crescendo. Estão aumentando, não estão? Termo um, termo dois, termo três, depois vai ter o quatro, o cinco... [Para a turma toda].
> ***Tiago:*** O seis, trinta e sete, e vai indo.
> ***Professor:*** Isso. Daí, a primeira pergunta é: no termo seis, qual seria a quantidade de pontos? Ou seja, quantos pontos tem no termo um? [Para a turma toda].
> ***Tiago:*** Cinco.
> ***Professor:*** Um, dois, três, quatro, cinco. Quantos vão ter lá no termo seis? [Para a turma toda].
> ***Tiago:*** Vinte e quatro.
> ***Emerson:*** Por que vinte e quatro? Eu não entendi.
> ***Tiago:*** Porque aumenta de quatro em quatro.

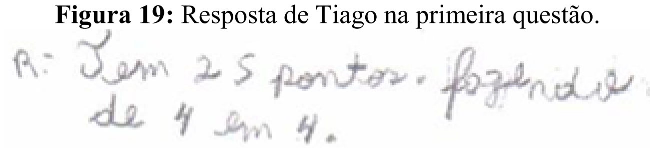
Jean[15]***:*** Não, aumenta de cinco em cinco.
Tiago: Quatro em quatro. Olha, aqui tem cinco, aqui tem nove, aqui tem treze. Quatro em quatro.

Tiago já demonstrava ter compreendido a tarefa. Além disso, o estudante fornece uma resposta à primeira questão ainda durante a explicação. Ele conclui, incorretamente, que a quantidade de pontos do termo 6 seria 24. Emerson não compreende sua resposta e o questiona. Então Tiago revela que identificou que o número de pontos aumenta em 4 a cada termo. Jean, um estudante de outra dupla, argumenta que o número de pontos aumenta em 5 a cada termo. Diante disso, Tiago explica porque o número de pontos aumenta de 4 em 4.

Emerson: Então vai ter o quê?
Tiago: Vai ter o quê? Vai ter vinte e cinco ou vinte e quatro. Não sei.
Emerson: É vinte e cinco. É vinte e cinco, né?
Professor: Como é que vocês chegaram nisso?
Tiago: Contando de quatro em quatro.
Emerson: Cinco para nove? Quatro. Nove para treze? Mais quatro.
Tiago: Mais quatro. Aí nós fomos indo. Até dar termo seis.
Professor: Termo quatro tem quantos, então?
Tiago: Termo quatro? Calma aí, calma aí. Tem dezessete.
Emerson: Dezessete.
Tiago: Aí, depois vinte e um, depois vinte e cinco. Termo cinco tem vinte e um, termo seis tem vinte e quatro. Opa, vinte e cinco.

Então a dupla começa a discutir sobre a quantidade de pontos do termo 6, com Emerson afirmando que ele possui 25 pontos. Diante disso, questiono os estudantes sobre como obtiveram essa resposta e, tanto Emerson quanto Tiago, argumentam no mesmo sentido. Os alunos revelam que obtiveram a resposta determinando o número de pontos dos termos 4, 5 e 6, sempre contanto de 4 em 4. Nas Figuras 19 e 20 são apresentadas as respostas escritas fornecidas pelos estudantes.

Figura 19: Resposta de Tiago na primeira questão.



Fonte: Dados da pesquisa

---

[15] Aluno de outra dupla

Figura 20: Resposta de Emerson na primeira questão.

Fonte: Dados da pesquisa

Com a resposta da primeira questão, os alunos logo partem para a segunda, que solicitava o número de pontos do termo 37, e começam a formular algumas estratégias.

> ***Emerson:*** E o trinta e sete?
> ***Professor:*** Tenta a b agora.
> ***Emerson:*** Tem como fazer conta, né?
> ***Tiago:*** Tem sim. Professor, e se, por exemplo, nós chegamos no padrão dez, tem quanto? Se nós queremos chegar no padrão trinta e sete, nós temos que somar tudo? Tem como?
> ***Professor:*** Tenta aí, fazer. Tenta fazer, daí a gente corrige.

Quando começam a pensar sobre essa questão, Emerson diz a Tiago: "Tem como fazer conta". O estudante estava, possivelmente, supondo que seria possível encontrar o número de pontos do termo 37 de outra maneira, sem precisar contar o número de pontos de cada termo como fizeram anteriormente, mas com algum cálculo que levasse ao resultado. Tiago, por exemplo, pensa em descobrir o número de pontos do termo 10 e, a partir dele, chegar ao número de pontos do termo 37.

> ***Tiago:*** Que jeito você colocou?
> ***Emerson:*** De quatro em quatro.
> ***Tiago:*** Até o trinta e sete? Faz até o dez. Quer ver?
> ***Emerson:*** Cinco. Sete é o quê?
> ***Tiago:*** Vinte e nove. Calma aí. Eu vou contando e você vai falando o termo. Ou você vai contando e eu vou falando o termo. Calma aí, olha. Vinte e cinco, vinte e seis, vinte e oito. Vinte e nove. Termo sete.

Tiago havia sugerido obter o número de pontos do termo 10 para, de alguma maneira, obter o do termo 37 a partir dele. Assim, como já conheciam o número de pontos do termo 6, os alunos continuam calculando os próximos da mesma maneira que fizeram anteriormente: somando 4 ao anterior.

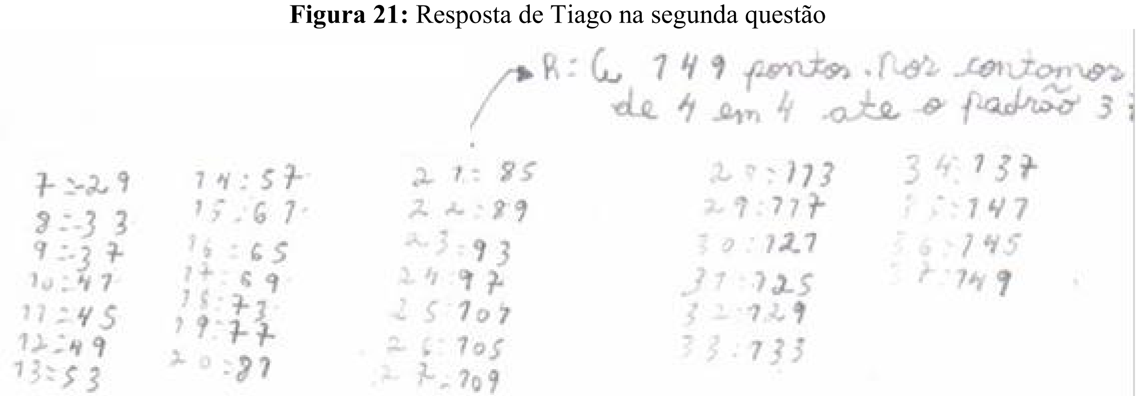
> ***Emerson:*** Trinta e... Não, quarenta e cinco.
> ***Tiago:*** Quarenta e cinco? Tá doido?
> ***Emerson:*** Não sei.
> ***Tiago:*** Trinta e um.
> ***Emerson:*** Não, quarenta e um.
> ***Tiago:*** Opa, quarenta e um.
> ***Emerson:*** Tá, daí...
> ***Tiago:*** Dez é quarenta e um. Por que nós não fazemos tudo aqui, olha?
> ***Emerson:*** É, vou fazer.

Então, os alunos descobrem o número de pontos do termo 10. A princípio, Tiago conclui que o termo 10 possui 45 pontos, muda para 31 e, por fim, chega ao resultado correto de 41. Anteriormente, Tiago havia sugerido obter o número de pontos do termo 10 para, com isso, obter o termo 37, mas o próprio estudante abandona a ideia. Quando Tiago diz "Por que não fazemos tudo aqui" está sugerindo calcular a quantidade de pontos do termo 37 da mesma maneira que haviam calculado até o momento. Ou seja, sempre obtendo o número e pontos do próximo termo.

> ***Tiago:*** Era até o trinta e sete.
> ***Emerson:*** Você foi até quarenta e oito?
> ***Tiago:*** Fui até quarenta. Aí, vinte e sete. O seis é vinte e cinco, né? Seis é vinte e cinco?
> ***Emerson:*** Sim.
> ***Jean:*** E essa tabuada? Por que você está fazendo tabuada?
> ***Tiago:*** Não é tabuada.

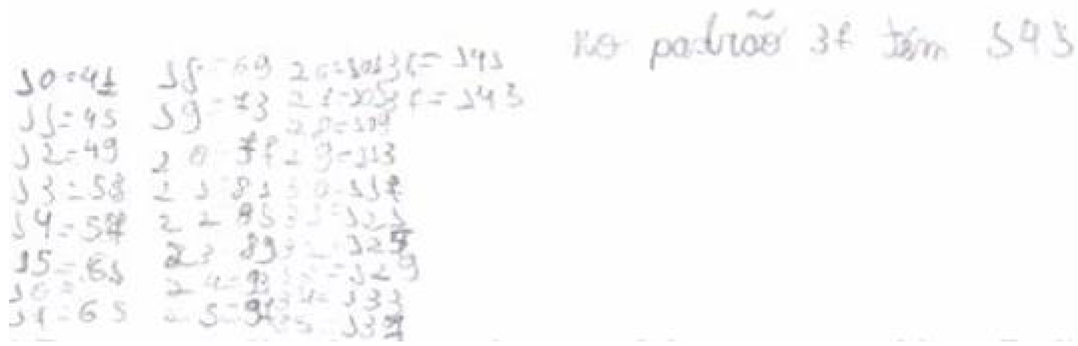
No diálogo anterior é possível perceber como os estudantes procederam para fornecer uma resposta. Quando um aluno de outra dupla, Jean, pergunta à dupla por que eles estavam fazendo a tabuada, Tiago explica: "Não é tabuada". Na verdade, Tiago e Emerson anotaram o número de pontos de todos os termos entre 6 e 37, como se pode ver nas Figuras 21 e 22.

Figura 21: Resposta de Tiago na segunda questão



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 22: Resposta de Emerson na segunda questão



Fonte: Dados da pesquisa

Professor: Não é que é essa a resposta, mesmo. Está esforçado, hein.
Tiago: Verdade, professor.
Professor: Você foi contando um por um?
Tiago: É só você olhar aqui. Eu não fui fazendo. Chegou no cem eu fui fazendo diferente, professor.
Professor: Como você fez?
Tiago: Fui fazendo assim, chegou no cem... Como que era? Chegou no cento e vinte, porque aí dava para olhar, dava para fazer tudo a mesma coisa. É a mesma coisa da tabuada, só que diferente.
Professor: Como assim?
Emerson: Eu comecei a repetir. É só olhar para o resto. É só olhar o último número de cada um.
Tiago: É só olhar aqui. Chegou no vinte e cinco, né. Vinte e cinco. Aí vinte e nove, trinta e três, trinta e sete, quarenta e um, quarenta e cinco, quarenta e nove.

Quando confiro a resposta dos alunos para essa questão da tarefa, percebo que os cálculos que realizaram foram vários e extensos. Mas quando falo disso, eles revelam que identificaram um padrão no número de pontos dos termos. Tiago e Emerson explicam que, quando obtiveram o número de pontos do termo 30, que era 121, notaram que os dois últimos algarismos dos números, das dezenas e das unidades, se repetiam. Para os termos 30, 31 e 32, por exemplo, a quantidade de pontos era 121, 125 e 129, respectivamente. Enquanto o número de pontos dos termos 5, 6 e 7 era, respectivamente, 21, 25 e 29.

Nesse momento, os estudantes mostram que a estratégia utilizada por eles foi determinar o número de pontos de cada termo até chegar ao 37. Eles forneceram, corretamente, 149 como resposta. Além disso, Tiago revelou a identificação de um padrão enquanto calculavam o número de pontos de cada termo, que foi a identificação da repetição dos algarismos das unidades e das dezenas a partir do termo 30.

Professor: E será que não tinha outro jeito de descobrir quantos pontos tem cada um? Alguma conta que você faz... Tenta pensar aí.
Emerson: Seis vezes quatro
Tiago: Dá quantos?
Emerson: Vinte e quatro
Tiago: Vamos ver essa tabuada aí.
Jean: Aqui, tem que ser quatro vezes. Aí no final deu quarenta e oito.
Tiago: Quatro vezes trinta e sete é cento e quarenta e oito.
Jean: Quatro vezes trinta e sete?
Tiago: Quatro vezes trinta e sete é cento e quarenta e oito, não quarenta e oito.
Jean: Mas eu fiz quatro vezes sete, depois quatro vezes...
Tiago: Então. Quatro vezes trinta e sete. Quatro vezes sete dá vinte e oito. Quatro vezes três vai dar... Dá doze.

Depois, encorajo os estudantes a pensarem em outras maneiras de obter a resposta, pensando que, assim, poderiam mobilizar outros processos de raciocínio matemático. A princípio, começam pela multiplicação de 6 por 4 considerando, possivelmente, o sexto termo e o crescimento de quatro pontos a cada termo. Depois, Jean, de outra dupla, observa as tentativas dos alunos e sugere a multiplicação de 4 por 37.

> ***Tiago:*** Olha aí, professor. Só não sei de onde que eu tirei esses números.
> ***Professor:*** Tem que saber. Me explica aí.
> ***Tiago:*** Quatro vezes trinta e sete dá cento e quarenta e oito. Mais um.
> ***Professor:*** O que é o quatro?
> ***Tiago:*** Quatro? Como assim?
> ***Professor:*** O que é o quatro?
> ***Tiago:*** Trinta e sete é o termo.
> ***Professor:*** É o termo. Isso mesmo.
> ***Tiago:*** De onde que eu tirei o quatro, mesmo? Ah, quatro é o... Quatro em quatro.
> ***Professor:*** Isso mesmo. E por que mais um?
> ***Tiago:*** Isso que é o estranho.
> ***Professor:*** Por que nesse caso tem que ser mais um?
> ***Tiago:*** E se eu fizer diferente?
> ***Professor:*** Não, mas está certo.
> ***Tiago:*** Está certo? Professor, só não entendi aqui. Cinco, nove, treze. Só que de onde saiu o cinco? Por exemplo, começa do zero ou...
> ***Professor:*** Começa do cinco. Começa com cinco bolinhas. E como você sabe que isso dá certo?
> ***Tiago:*** Porque eu somei. Quatro vezes trinta e sete dá cento e quarenta e oito. Aí eu coloquei mais um.
> ***Professor:*** Por que mais um?
> ***Tiago:*** Isso que eu estou tentando saber.

Os alunos conseguem fornecer uma resposta multiplicando 4 por 37, no entanto, não conseguem explicar porque adicionam 1 ao resultado dessa multiplicação, obtendo 149. Apesar disso, sabiam que essa era a resposta correta por já a terem obtido anteriormente. Então, indago sobre o porquê de cada um dos números que utilizaram em seus cálculos. Tiago diz que 37 é o número do termo para o qual buscavam o número de pontos. Além disso, compreendeu que foi utilizado o 4 porque era a quantidade de pontos que cada termo possuía a mais que o anterior. No entanto, não soube explicar por que somou 1 ao resultado da multiplicação de 37 por 4.

> ***Professor:*** Você sabia quanto era o da figura trinta e sete já?
> ***Tiago:*** Não, eu somei.
> ***Professor:*** Somou aqui, né. E daí chegou em quanto?
> ***Tiago:*** Cento e quarenta e nove.
> ***Professor:*** Isso. Antes de você chegar aqui, você chegou em cento e quarenta e oito. Por que você somou um?
> ***Tiago:*** Porque eu pensei, com a minha cabeça.
> ***Professor:*** Pensou o quê?
> ***Tiago:*** Mais um.
> ***Professor:*** Para...
> ***Tiago:*** Ficar cento e quarenta e nove.

Então, decido fazer perguntas que poderiam levar Tiago a compreender essa necessidade de adicionar 1 à multiplicação. O aluno revelou que fez isso para que seus cálculos levassem à mesma resposta obtida anteriormente. Depois, sugiro que utilizem esse modo de pensar para obter o número de outro termo.

> ***Professor:*** Será que se fizer isso com esses daqui dá certo?
> ***Tiago:*** Como assim? Somar todos esses?
> ***Professor:*** Não. Se você usar essa conta sua com esses termos. Em vez de usar o termo trinta e sete. Será que dá certo também?
> ***Tiago:*** Como assim, professor? Você fala somar esses?
> ***Professor:*** Se você fizer a mesma conta que você fez para o termo trinta e sete...
> ***Tiago:*** Mas tira o trinta e sete e coloca esses?
> ***Professor:*** Isso. Será que vai dar?
> ***Tiago:*** Será que vai dar cento e quarenta e nove?
> ***Professor:*** Será que vai dar treze? Será que essa conta sua funciona para descobrir quantas bolinhas tem em cada?
> ***Tiago:*** Em cada, você fala, desses três?
> ***Professor:*** É, em qualquer um.
> ***Tiago:*** Tem vinte e sete aqui.
> ***Professor:*** Não juntas. Cada um, separado. Testa para o três. No três a gente sabe que tem quantas bolinhas?
> ***Tiago:*** O três tem treze.
> ***Professor:*** Treze. Será que essa conta sua chega em treze?
> ***Tiago:*** Chega. Depende do que eu fizer.
> ***Professor:*** Faz igual. Será que se, você fizer igual, chega em treze, trocando o trinta e sete por três?
> ***Tiago:*** Mas não vai dar vezes? Olha, quatro vezes treze.
> ***Professor:*** Não, mas aqui é o número do termo, não é?
> ***Tiago:*** É.
> ***Professor:*** Então, qual é o número do termo aqui?
> ***Tiago:*** Treze.
> ***Professor:*** Não. Treze não é o número do termo.
> ***Tiago:*** Treze é o número das bolinhas. E aqui que é número das bolinhas.
> ***Professor:*** Não. O quatro era o quê? O que crescia, lembra?

Nesse momento, peço para que Tiago utilize o modo como havia obtido o número de pontos do termo 37 também para o termo 3. Para isso, era necessário adaptar os cálculos que o aluno realizou. A princípio, Tiago demonstra alguma dificuldade em entender o que cada número representava. Quando entende que precisava trocar o 37 pelo 3 e questiono se o cálculo que realizou ainda seria válido, o aluno não compreende que isso resultaria no número de pontos do termo 3, quando diz: “Será que vai dar cento e quarente e nove?”. Então, ressalto que esses cálculos deveriam resultar, na verdade, em 13, o número de pontos do termo 3. No entanto, depois de algum tempo, os alunos não continuam com essa verificação e passam para a terceira questão da tarefa, que pedia uma fórmula para o número de pontos do termo n.

> ***Jean:*** Explica essa daqui. Esse n é o quê?
> ***[...]***
> ***Professor:*** O que é uma fórmula? É uma conta que você faz com uma letra para descobrir o resultado. E o que a gente quer descobrir? Número de pontos. Aqui, o

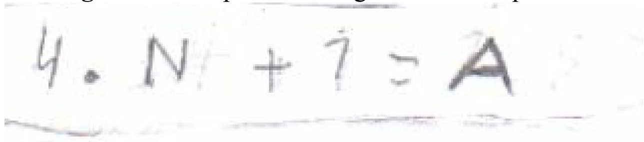
número de pontos é o quê? Cento e quarenta e nove, né. No termo trinta e sete, o número de pontos é cento e quarenta e nove. Agora a gente não sabe qual é o número de pontos. Concordam?
Tiago: Sim. Não, calma aí. Os pontos não são isso aqui, esses negocinhos aqui [indicando as figuras da tarefa]? Aí, é cento e quarenta e nove o número de pontos, não é?
Professor: No termo trinta e sete. Mas no termo três é treze. No termo seis é vinte e cinco. O termo n pode ser qualquer termo.
Tiago: Pode ser qualquer termo desses?
Jean: Então eu mesmo crio o meu próprio termo?
Tiago: Termo n é algum desses daqui?
Professor: Pode ser qualquer um.
Tiago: Qualquer um desses ou de outros?
Professor: Pode ser qualquer número. O n pode ser qualquer número.
Tiago: Na verdade, aí não tem termo, né. Não, tem o trinta e sete.
Professor: Se lá nessa fórmula, trocar o n por um, tem que dar cinco. Porque o termo um tem cinco pontos. Se trocar o n por três, tem que dar treze.

Quando os alunos passaram à terceira questão, o obstáculo foi a pouca familiaridade com a ideia de uma letra representando um valor variável. Em geral, entendem a letra como incógnita, possivelmente devido à atenção que o conteúdo de equações recebe no 7º ano do Ensino Fundamental. E, também, os alunos apresentaram dificuldades em passar de uma linguagem aritmética para uma linguagem algébrica.

Professor: Vamos lá. Usa isso aqui. Aliás, o mais um tinha que ficar.
Tiago: Qual que sai, professor?
Professor: O que é o n?
Tiago: Isso que eu não sei.
Professor: Volta lá no enunciado, então. O que é o n?
Tiago: Encontre uma fórmula para o número total de pontos no termo n.
Professor: O que é o n?
Tiago: Esse termo n eu não sei. O termo, eu sei que é termo um, dois, três, aí vai indo de quatro em quatro. Aqui, nessa fórmula. Só que eu não sei aqui. Por exemplo, termo n... Termo n é qualquer número, não é?
Professor: Qualquer número. Só que o n vai no lugar do termo. Nessa fórmula, o n vai no lugar do termo.
Tiago: E aqui, onde coloca?
Professor: Quem é o termo ali?
Tiago: Calma aí. O termo... O n fica no lugar do trinta e sete?
Professor: Isso.
Tiago: É só colocar o n aqui?

Nesses diálogos, é possível notar que os estudantes não conseguiram compreender o significado do termo n citado na terceira questão da tarefa. Por fim, eles escrevem uma fórmula para o termo n, como se pode ver na Figura 23. No entanto, essa fórmula não foi construída por eles da maneira esperada. Um dos motivos para isso não ter ocorrido foi a falta de tempo para tanto. Os alunos dedicaram bastante tempo para as questões anteriores da tarefa, em especial a segunda questão, e não tiveram tempo para a terceira. Diante disso, faço questionamentos que permitem aos alunos escrever uma fórmula, mas de modo que eles apenas substituíssem o 37, número do termo da questão anterior por n. Devido a essa falta de tempo, não foi possível uma construção da fórmula que fizesse mais sentido aos estudantes e, também por isso, não há muitos elementos que permitam a análise do raciocínio matemático dos estudantes nessa questão em particular.

Figura 23: Resposta de Tiago na terceira questão.



Fonte: Dados da pesquisa

3.2.1.1 Processos de raciocínio matemático de Tiago e Emerson

Os alunos Emerson e Tiago desenvolveram muito bem a tarefa como um todo. A primeira questão foi rapidamente resolvida pela dupla. Na segunda, os alunos apresentaram algumas dificuldades, mas conseguiram resolver. Na terceira questão, os alunos mostraram que a expressão da generalização a partir de uma fórmula foi um grande obstáculo. Além disso, a falta de tempo não permitiu uma maior dedicação dos estudantes nessa questão.

Logo na primeira questão, ainda durante a apresentação do professor, Tiago já formula algumas ideias, refinando-as em discussões com Emerson. Ele comenta, por exemplo, que a resposta da primeira questão seria 24. Isso está incorreto, já que o número de pontos do termo 6 é 25. No entanto, a observação de Tiago gera discussões que contribuem na resolução da tarefa.

Depois, Emerson questiona Tiago sobre a sua reposta: “Por que vinte e quatro?”. Então, na resposta, Tiago mostra ter realizado o processo do raciocínio matemático de identificação de um padrão, quando diz: “Porque aumenta de quatro em quatro”. Além disso, sua fala seguinte busca validar isso: “Quatro em quatro. Olha, aqui tem cinco, aqui tem nove, aqui tem treze. Quatro em quatro”.

Aqui, entendemos que a identificação de padrões é um “processo do raciocínio matemático que, pela busca de similaridades e diferenças, infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos matemáticos” (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 10). Ou seja, Tiago identificou que o número de pontos aumentava em 4 a cada termo, o que ficou mais claro quando exemplifica isso nos exemplos disponíveis na tarefa. O estudante mostra que o número de pontos dos três primeiros termos são 5, 9 e 13, aumentando de 4 em 4. Depois de Tiago, Emerson também identifica esse padrão e realiza a mesma validação, de modo um pouco mais claro: “Cinco para nove? Quatro. Nove para treze? Mais quatro”.

Na segunda questão o objetivo era determinar o número de pontos do termo 37. Tiago demonstra ter iniciado uma conjectura quando diz: “se nós chegarmos no termo dez, tem quanto? Se nós queremos chegar no termo trinta e sete, nós temos que somar tudo? Tem como?”. No entanto, o aluno não evidencia sua possível conjectura e acaba utilizando outra estratégia para fornecer uma resposta para essa questão no decorrer do processo de resolução, que foi determinar o número de pontos de todos os termos até o 37, como pode-se ver na Figura 21. No entanto, nesse percurso, Tiago teve uma percepção interessante. Indagado pelo professor sobre a dificuldade de calcular a quantidade de pontos em vários termos, o estudante respondeu:

> Chegou no cem eu fui fazendo diferente [...] Dava pra fazer tudo a mesma coisa. [...] Eu comecei a repetir. É só olhar para o resto. É só olhar o último número de cada um. [...] Chegou no vinte e cinco, né. Vinte e cinco. Aí vinte e nove, trinta e três, trinta e sete, quarenta e um, quarenta e cinco, quarenta e nove.

Na verdade, as unidades do número de pontos dos termos sempre são 1, 3, 5, 7 ou 9. Tiago notou que as dezenas e unidades do número de pontos dos termos começavam a se repetir a partir do termo 30. Isso ocorre, também, com os múltiplos de 4, que sempre terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8. Tiago percebeu isso quando disse “É a mesma coisa da tabuada”. Assim, concluímos que o aluno realizou, novamente, um processo de identificação de padrões.

Ainda na mesma questão, sugiro aos alunos que também tentem encontrar a resposta de outra maneira. A dupla chega no seguinte resultado, de acordo com Tiago: “Quatro vezes trinta e sete dá cento e quarenta e oito. Mais um”. Ou seja, os estudantes identificaram que o número do termo multiplicado por 4, mais 1, resultava no número de pontos do termo. Consideramos que essa é uma generalização empírica. Generalização porque é uma inferência sobre um conjunto de objetos matemáticos ao entenderem que esse modo de fazer – multiplicar o número do termo por 4 e somar 1 – resultaria no número de pontos de um termo que não foi dado como exemplo na tarefa, e empírica porque ela surge a partir da exploração de exemplos anteriores, como o número de pontos dos termos 1, 2, 3 e 6.

Na terceira questão, o objetivo era que os alunos expressassem uma generalização para o número de pontos do termo n. Entretanto, apresentaram muitas dúvidas sobre o significado do termo n. Isso representou um obstáculo para o desenvolvimento dessa etapa da tarefa. Em determinado momento, o professor sugeriu aos alunos que trabalhassem sobre a resposta que haviam obtido na segunda questão. E, apesar de Tiago ter apresentado a resposta correta, como se pode notar na Figura 23, não é possível dizer que desenvolveu um processo de generalização, já que não mostrou evidências disso em suas falas. A resposta que o estudante forneceu partiu da percepção de que n poderia substituir o 37 na fórmula que produzira anteriormente, ao dizer que "o n fica no lugar do trinta e sete". Não foi possível realizar as discussões necessárias com os alunos nessa etapa da tarefa devido à falta de tempo.

3.2.2 Jean e Gilmar

Assim que é entregue a tarefa, Jean e Gilmar começam a pensar em estratégias que possam ser úteis para a resolução da primeira questão.

> ***Jean:*** Vamos fazer então. Um, dois, três quatro, cinco. Cinco. Um, dois, três, quatro, cinco. Cinco. Um, dois, três... Por que treze?
> ***Gilmar:*** De dois em dois. Conta de dois em dois.
> ***Jean:*** Não entendi. Dois, três, quatro, cinco. Cinco. Aumenta em cinco, cara. É vinte o oito?
> ***Gilmar:*** Calma aí.
> ***Jean:*** Você vai ficar fazendo o desenho?

Assim que começa a pensar sobre a tarefa, Jean supõe que o número de pontos aumenta em 5 a cada termo e surpreende-se com a contagem de seu colega, que chega, em determinado momento, a 13. Então, Gilmar apresenta a ele a sua ideia, de que o número de pontos aumenta em 2 unidades a cada termo. No entanto, Jean não aceita esse ponto de vista e defende que o número de pontos aumenta em 5 a cada termo. Além disso, Jean revela uma estratégia de Gilmar ao indagá-lo: "Você vai ficar fazendo o desenho?". Provavelmente, Gilmar estava desenhando os demais termos até chegar ao 6 para, assim, poder contar quantos pontos esse termo possuía. Contudo, ele provavelmente abandona essa estratégia, já que não surgem outras menções a ela nos diálogos seguintes.

> ***Gilmar:*** Vinte e cinco.
> ***Jean:*** Por que vinte e cinco?
> ***Gilmar:*** Por causa disso daqui, olha. Lembra que é de quatro em quatro?
> ***Jean:*** E deu quantos nesse daqui?
> ***Gilmar:*** Esse aqui deu dezessete.

Depois de algum tempo, Gilmar diz a Jean que a resposta da primeira questão é 25. Ou seja, há 25 pontos no termo 6. O aluno justifica sua resposta dizendo que o número de pontos aumenta em 4 unidades a cada termo. Portanto, a estratégia utilizada por Gilmar foi de, sabendo que havia 4 pontos a mais a cada termo, somar 4 sucessivamente até chegar ao termo 6. Isso fica mais claro quando Jean pergunta a Gilmar "quantos nesse daqui?". A resposta de Gilmar é: “Esse aqui deu dezessete”. Ou seja, o estudante descobriu, também, o número de pontos do termo 4.

> ***Jean:*** Você está contando em quantos?
> ***Gilmar:*** Contando de quatro em quatro.
> ***Jean:*** Mas por que quatro em quatro?
> ***Gilmar:*** É de quatro em quatro.
> ***Jean:*** É de quatro em quatro, mesmo? Tem que ser o número cinco, não é?
> ***Gilmar:*** É de quatro em quatro, mesmo.
> ***Jean:*** Verdade.
> ***Gilmar:*** Olha porque é de quatro em quatro. Venha aqui para você ver. Olha, cinco, aqui vai dar nove.
> ***Jean:*** Não, aqui dá dez. Conta. Um, dois...
> ***Gilmar:*** É. Então é cinco em cinco.
> ***Jean:*** Então, cara. Uma, duas, três, quatro, cinco. Cinco. Deu cinco. Uma, duas, três, quatro, cinco. Cinco. Uma, duas, três, quatro, cinco. Contei errado, foi? Uma, duas, três, quatro, cinco.
> ***Gilmar:*** É nove mesmo. Uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove.

Em seguida, Jean questiona Gilmar sobre o número 4, já que acreditava que o número de pontos aumentava em 5 a cada termo. Gilmar, após confirmar que o número de pontos aumentava em 4, utiliza um exemplo para rebater a ideia de Jean. O aluno menciona os termos 1 e 2, enfatizando que eles possuem 5 e 9 pontos, respectivamente, uma diferença de 4 pontos. Jean discorda do colega ao dizer que o termo 2 possuía 10 pontos, uma diferença de 5 pontos em relação ao primeiro termo. Por um momento, Gilmar aceita essa ideia, mas o próprio Jean Percebe seu erro.

> ***Professor:*** Deu certo aí?
> ***Gilmar:*** Vinte e cinco.
> ***Professor:*** Por quê?
> ***Jean:*** Quer explicar? Explica.
> ***Gilmar:*** Somando de quatro em quatro.
> ***Professor:*** Somando de quatro em quatro? Somando o quê?
> ***Gilmar:*** Aumentando de quatro em quatro.
> ***Professor:*** Por que aumentou?
> ***Gilmar:*** Porque, assim, esse aqui vai dar cinco, daí mais quatro...
> ***Professor:*** Ah, os pontinhos.
> ***Gilmar:*** É.
> ***Professor:*** Daí você foi contando?
> ***Gilmar:*** Sim.

Após os alunos concluírem a questão, peço a eles uma explicação. Primeiro, Gilmar confirma que a resposta final é 25. Depois, com algumas perguntas, relata que chegou ao 25 sempre somando 4 ao número de pontos do termo anterior. Como resposta à primeira questão, Jean escreve: “O termo 6 dá 25 porque aumenta de 4 em 4”. A resposta de Gilmar é semelhante:

“25. Somando de 4 em 4”. Os diálogos continuam quando encorajo os alunos a pensarem na segunda questão.

> ***Professor:*** E a b?
> ***Jean:*** b eu não fiz ainda.
> ***Professor:*** É no trinta e sete.
> ***Jean:*** Quantos pontos...
> ***Professor:*** Quantos pontos tem na figura trinta e sete? Trinta e sete é um número bem alto, né.
> ***Jean:*** Certo.
> ***Professor:*** Será que não tem um jeito mais fácil de fazer?
> ***Jean:*** Fazer de vezes?
> ***Professor:*** Em vez de ficar contando? Não sei se é de vezes. Pensa em um jeito aí.
> ***Gilmar:*** Ah, somando assim. Quer ver? Somando aqui, olha.
> ***Jean:*** Duas vezes cinquenta, menos um? É igual a cem. É igual a noventa e nove.

Destacando que a determinação do número de pontos do termo 37 representa maiores dificuldades para os estudantes, caso usem a mesma estratégia da primeira questão, sugiro que busquem outra maneira de encontrar a resposta. A princípio, a dupla começou com algumas estratégias que pareciam pouco condizentes com a questão.

> ***Professor:*** Por que tem que dar menos um? Pensa nessa de cima. Tenta criar uma.
> ***Jean:*** Eu mesmo elaborar o meu? Eu mesmo criar o meu exemplo?
> ***Gilmar:*** Se for igual, vai ser de quatro em quatro. Vai ser quatro vezes trinta e sete.
> ***Jean:*** Quatro vezes trinta e sete? Quatro vezes trinta e sete vai dar... Vinte e oito, não é? Quarenta e oito.
> ***Gilmar:*** Quarenta e oito?
> ***Jean:*** Quarenta e oito. Por que cento e quarenta e oito aqui?

Sugiro aos alunos que tentem criar uma estratégia para resolver a segunda questão baseada na resposta que deram à primeira. Gilmar observa que, se mantido o crescimento de 4 pontos a cada termo, deveriam multiplicar 4 por 37. Então, a dupla inicia uma discussão sobre essa ideia, já que Jean realiza incorretamente a multiplicação, obtendo 48, e não compreende, a princípio, como Gilmar obteve seu resultado: 148.

> ***Jean:*** Tem que dar o número exato? Ou eu posso dar uma estimativa?
> ***Professor:*** Como seria a estimativa?
> ***Jean:*** Ah, como eu posso explicar...
> ***Professor:*** Trinta e sete vezes quatro? Por que trinta e sete vezes quatro?
> ***Gilmar:*** Foi crescendo de quatro em quatro. Daí eu fiz quatro vezes trinta e sete.
> ***Professor:*** Isso mesmo. Está indo no caminho certo. Mas olha, testa isso aqui para essas três figuras. Será que dá certo?
> ***Jean:*** Como assim?
> ***Professor:*** Olha a estratégia dele. Vê se você concorda. Cresce de quatro em quatro. Então o que ele fez? Trinta e sete, que é a figura que ele quer, o termo que ele quer, vezes quatro, porque está crescendo de quatro em quatro. Deu cento e quarenta e

oito. Está quase certo. Para descobrir se está certo, faz isso aqui: testa para essas três figuras.
Jean: Faço quatro vezes cinco?
Professor: Quatro vezes um, né, porque é o termo.
Jean: Ah, certo.
Professor: Aqui é o termo trinta e sete, então foi trinta e sete vezes quatro. Agora faz um vezes quatro, dois vezes quatro, três vezes quatro. Vê quanto dá o resultado. Será que bate com essas bolinhas aqui?
Jean: Ah, tem que dar a quantidade certa.
Professor: Tem que dar igual.

Nesse momento, Jean pergunta se a resposta precisa ser o número exato de pontos ou pode ser uma estimativa. Quando indagado por mim, ele não consegue encontrar uma explicação do porquê pensou em uma estimativa ou como seria essa estimativa. Então, peço uma explicação aos alunos sobre como realizaram seus cálculos. Gilmar revelou que multiplicou 37 por 4 porque o número de pontos aumentava em 4 a cada termo. A fim de que os alunos percebessem alguma relação que os levasse a refinar sua estratégia, sugiro o teste nos termos 1, 2 e 3 para verificar se o seu modo de fazer resultaria no número de pontos que havia em cada um deles. Jean demonstra ter compreendido isso ao dizer: "Ah, tem que dar a quantidade certa".

Jean: Não, espera. Agora eu quero saber da onde veio esse oito. Quatro vezes um deu quatro, certo? Três vezes quatro? Três vezes quatro dá doze.
Tiago[16]: Consegui, professor.
Jean: Na sua apareceu algum oito? Nossa, apareceu um número aqui na minha cabeça que eu não sei de onde vem. Eu não sei de onde que veio. Deu quarenta e oito.
Tiago: Deu quarenta e um.
Jean: Não, mas olha aqui. Aqui, nesse quatro vezes oito, não sei de onde veio. Aí no final deu quarenta e oito.
Tiago: Quatro vezes trinta e sete é cento e quarenta e oito.
Jean: Quatro vezes trinta e sete?
Tiago: Quatro vezes trinta e sete? É cento e quarenta e oito, não quarenta e oito.
Jean: Mas quatro vezes sete...
Tiago: Quatro vezes trinta e sete. Aqui, olha. Quatro vezes sete? Dá vinte e oito. Quatro vezes três? Dá doze.
Jean: Dá cento e quarenta e oito.
Gilmar: Não é soma, não. Não é soma.
Jean: Não é soma?
Gilmar: Não é cento e quarenta e oito. O professor falou.
Jean: Não é cento e quarenta e oito?

[16] Aluno de outra dupla.

Ao testar a estratégia que haviam elaborado nos primeiros termos, como sugerido pelo professor, Jean acaba fazendo alguma confusão com os números que obteve. O estudante não consegue identificar de onde surgiu o número 8 em seus cálculos. É provável que o estudante tenha obtido esse número a partir da multiplicação de 4 por 2, ao testar a estratégia que a dupla desenvolveu para descobrir o número de pontos do termo 2. Além disso, há a participação de Tiago, aluno de outra dupla, nessa etapa da tarefa, que faz com que Jean perceba, novamente, que multiplicou incorretamente 4 por 37.

> ***Professor:*** Vai lá, Jean. Explica aí.
> ***Jean:*** Aqui, olha. Quatro vezes um deu quatro. Quatro vezes oito, trinta e dois, mas não sei de onde veio esse oito. Aí, quatro vezes três é doze. Quando eu faço, quatro, trinta e dois, doze. Aí aqui, olha, dois mais dois é quatro, quatro mais quatro são oito. Aí, olha, três mais um dá quarenta e oito. Aí dá o resultado que bate aqui.
> ***Professor:*** Não, calma aí. Você está pensando certo, mas no finalzinho está dando alguma coisa errada. Vamos pensar. Quatro vezes um. Ou seja, quatro vezes esse termo. Deu quatro, né. Quanto que faltou para dar essas bolinhas?
> ***Jean:*** Como assim?
> ***Professor:*** Quantas bolinhas tem aqui?
> ***Jean:*** Tem quatro. Não, cinco. Tem cinco.
> ***Professor:*** Tem cinco.
> ***Jean:*** Ah, eu tiro um.
> ***Professor:*** Tira um? Daí vai dar três.
> ***Jean:*** Ah, eu tenho que dar o valor estimado aqui. Então tem que aumentar?
> ***Professor:*** Aumentar quanto?
> ***Jean:*** Um. Vai dar cinco.
> ***Professor:*** Para o termo dois. Quatro vezes dois?
> ***Jean:*** Aqui vai dar dez.
> ***Professor:*** Não.
> ***Jean:*** Quatro vezes dois?
> ***Professor:*** Quanto é?
> ***Jean:*** Quatro vezes dois? Deixa eu ver aqui. É oito.
> ***Professor:*** E aqui tem quantos?
> ***Jean:*** Nove.
> ***Professor:*** Então para o termo trinta e sete o que você vai ter que fazer?
> ***Jean:*** Trinta e sete? Eu tenho que aumentar um também, eu acho.
> ***Professor:*** Antes tem uma conta.
> ***Jean:*** Que conta?
> ***Professor:*** Qual conta você fez aqui?
> ***Jean:*** Vezes.
> ***Professor:*** Vezes o quê?
> ***Jean:*** Vezes o quatro.
> ***Professor:*** Isso. E depois que fez vezes quatro, o que você faz? Aumenta quantos?
> ***Jean:*** Aumenta um. Para dar o quarenta e nove.
> ***Professor:*** Tenta para o trinta e sete e vê se vai dar certo.
> ***Gilmar:*** Esse vai dar cento e quarenta e nove.
> ***Jean:*** Eu acho que não é cento e quarenta e nove, não.

Depois, quando retorno para verificar o desenvolvimento da dupla na tarefa, percebo que Jean está confuso com o número do termo e o número de pontos da figura correspondente a ele. Jean faz, por exemplo, a multiplicação de 4 por 1 e a de 4 por 3, referindo-se aos termos 1 e 3, respectivamente. No entanto, para o termo 2, o aluno faz a multiplicação de 4 por 8. Jean obteve, provavelmente, o 8 da multiplicação de 4 por 2, o número do termo, e estava repetindo esse processo incorretamente. Diante disso, decido sugerir ao aluno o teste da estratégia elaborada que elaboraram.

Jean já havia realizada a multiplicação de 4 por 1. Então, pergunto a ele quanto falta para chegar ao número de pontos do termo 1. O aluno identifica que esse termo possui 5 pontos, mas responde que deve subtrair 1. Então, digo a ele que, se feito isso, se obtém 3. Por fim, Jean percebe que deve, na verdade adicionar 1 à multiplicação que havia realizado. Repito as perguntas a Jean em relação ao termo 2. Inicialmente, o estudante calcula incorretamente a multiplicação de 4 por 2, obtendo 10, mas logo percebe seu erro.

Então, pergunto o que Jean deve fazer para descobrir o número de pontos do termo 37. Por fim, o aluno percebe que deve multiplicar 4 por 37 e adicionar 1 ao resultado. Atento ao diálogo, Gilmar percebe que a resposta à segunda questão é 149. Mas Jean, apesar disso, ainda não tem certeza da resposta do colega.

> ***Jean:*** Então eu tenho que sempre aumentar um. Então vai dar quarenta e nove. O que ele falou, mesmo? Tem que fazer o quê?
> ***Gilmar:*** Aumentar mais um.
> ***Jean:*** Ah, trinta e sete, trinta e oito. Vou colocar trinta e oito aqui.

Em conversa com seu colega, Jean demonstra que ainda não havia compreendido a estratégia para obter a reposta na segunda questão. Primeiro, afirma que precisa aumentar 1. Depois, pergunta a Gilmar o que precisa ser feito, que confirma: “Aumentar mais um”. Contudo, Jean adiciona 1 ao número do termo 37, obtendo 38.

> ***Professor:*** Trinta e oito vezes quatro?
> ***Jean:*** É. Porque tu mandou aumentar um.
> ***Professor:*** Mas daí você achou o termo da figura trinta e oito.
> ***Jean:*** Da trinta e oito ou da trinta e sete?
> ***Professor:*** Você quer achar o do trinta e sete.
> ***Jean:*** Ah, eu achei o termo da trinta e oito. Esse é o da trinta e oito.
> ***Professor:*** Você tem que achar o da trinta e sete. Você achou o da trinta e oito. Olha, está vendo o jeito que ele fez. Explica aí.
> ***Gilmar:*** De quatro vezes trinta e sete. Daí deu cento e quarenta e oito. Daí aumenta mais um.
> ***Professor:*** Aumenta mais um. Por que aumenta mais um?
> ***Gilmar:*** Não sei.
> ***Professor:*** Não sabe? Você não percebeu? Você não testou para outras?
> ***Gilmar:*** Não.

> ***Professor:*** Testa. Como é que você tem certeza que essa conta está certa?
> ***Gilmar:*** Porque chegou aqui e passou perto.
> ***Professor:*** Testa para essas. Será que dá certo para essas? Para esses termos? Olha, o cinco é a quantidade. O número da figura é esse.
> ***Gilmar:*** Ah, é com o um.
> ***Jean:*** Então não é cento e quarenta e nove, não?
> ***Gilmar:*** Sei lá.
> ***Jean:*** Explica para mim, aí.
> ***Gilmar:*** O professor falou para fazer assim, olha: vezes... Isso aqui vezes um.

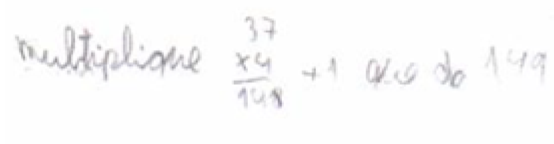
Ao perceber o erro de Jean, digo a ele que, do jeito que estava fazendo encontrava o número de pontos do termo 38, quando deveria encontrar o do 37. Então peço que Gilmar explique sua estratégia a Jean. O aluno diz que multiplicou 4 por 37 e adicionou 1 ao resultado. No entanto, quando pergunto o porquê de ele adicionar 1, Gilmar não soube responder. Assim, peço que o aluno teste para os demais termos com o número de pontos já conhecidos.

Além disso, mesmo Gilmar, que percebeu quais cálculos deveriam ser realizados para obter o número de pontos do termo 37, parece não ter compreendido que essa estratégia também era útil para determinar o número de pontos de outros termos. Tanto Gilmar quanto Jean aceitam somente uma resposta como correta. Quando peço que Gilmar teste sua estratégia para outros termos, o estudante diz: “Ah, é com o um”. Jean, por sua vez, chega a supor que 149 não é mais a resposta correta: “Então não é cento e quarente e nove, não?”.

> ***Gilmar:*** Professor, está certo aqui?
> ***Professor:*** Certo.
> ***Jean:*** Deu quanto?
> ***Gilmar:*** Cento e quarenta e nove.
> ***Jean:*** Sim. E aí? Termo trinta e sete é cento e quarenta e nove?
> ***Gilmar:*** É. Quatro vezes trinta e sete, mais um. É que já estava certo.
> ***Jean:*** Cento e quarenta e nove, certo?
> ***Gilmar:*** Cento e quarenta e oito.
> ***Jean:*** Mas não tinha que aumentar um?
> ***Gilmar:*** É, daí vai dar cento e quarenta e nove.
> ***Jean:*** Cento e quarenta e...
> ***Gilmar:*** Oito. Cento e quarenta e oito. Entendeu?
> ***Jean:*** Não.
> ***Gilmar:*** Aqui, olha. Vai dar cento e quarenta e oito. Daí você soma mais um.
> ***Jean:*** Fala devagar para mim.
> ***Gilmar:*** Cento e quarenta e oito mais um.
> ***Jean:*** Cento e quarenta e oito? Cento e quarenta e nove. Então é só escrever: para o trinta e sete é cento e quarenta e nove.

Diante dessa insegurança, Gilmar me pergunta novamente se a sua resposta, 149, está correta. Com a afirmativa, Jean pergunta ao colega o que significava a resposta, se ela era mesmo o número de pontos do termo 37. Ao respondê-lo, Gilmar confirma que sua resposta já estava correta ao mesmo tempo que conta os cálculos que devem ser realizados: “Quatro vezes trinta e sete mais um". Após resolverem algumas falhas de comunicação, os alunos enfim decidem a reposta que darão à questão. Jean responde: "O de 37 é 149", enquanto Gilmar explica que se deve multiplicar 37 por 4 e adicionar 1 ao resultado para obter o 149. O aluno registrou sua resposta de maneira curiosa, efetuando a multiplicação no meio da frase da resposta que forneceu ao problema, como se pode ver na figura a seguir.

Figura 24: Resposta de Gilmar na segunda questão



Fonte: Dados da pesquisa

Ainda que os alunos já tivessem registrado uma resposta, ainda faço mais alguns questionamentos a eles.

> ***Professor:*** Vocês fizeram trinta e sete vezes quatro. Daí o resultado mais um deu isso, que é a resposta certa. Se vocês quisessem descobrir para a figura seis, como iria ficar a conta?
> ***Jean:*** Deixa eu ver. Nessa daqui?
> ***Professor:*** É. Olha, para a figura trinta e sete foi: trinta e sete vezes quatro, depois mais um. Para a figura seis, como fica?
> ***Jean:*** Eu coloco seis vezes...
> ***Professor:*** Vezes o quê?
> ***Gilmar:*** Quatro.
> ***Jean:*** É. Seis vezes quatro.
> ***Professor:*** E depois?
> ***Jean:*** Seis vezes quatro dá quanto? Vinte e quatro.
> ***Professor:*** Vinte e quatro. E depois faz o quê?
> ***Jean:*** Mais um? Vinte e cinco.
> ***Professor:*** Exatamente. Agora, olha, quero que vocês pensem: e se a gente quiser calcular para qualquer figura?

Nesse momento, os alunos parecem ter compreendido o uso que pode ser feito da estratégia que elaboraram. Assim, peço que eles a utilizem para verificar o número de pontos do termo 6, analogamente ao que foi feito com o termo 37. Jean, com Gilmar acompanhado o diálogo, responde que deveria ser feita a multiplicação de 4 por 6, obtendo 24, e, então, adicionar 1, chegando a 25. Então, sugiro aos alunos que pensem na terceira questão.

> ***Jean:*** Esse n é o desconhecido?
> ***Professor:*** Termo n. A gente usa n por quê? Para representar um número desconhecido. Certo?
> ***Jean:*** Então pode ser qualquer termo.
> ***Professor:*** É, pode ser qualquer um. Pode ser um, pode ser quarenta, pode ser qualquer coisa. Entenderam? Tentem achar uma fórmula para o termo n. Dica: usando a conta que vocês fizeram.
> [...]
> ***Jean:*** Tem que dar esse resultado aqui?

> ***Professor:*** Não. É pra você montar uma fórmula. O que é uma fórmula? Um jeito de fazer.
> [...]
> ***Professor:*** Se a pessoa for lá na sua fórmula, trocar o n por um, tem que dar cinco, porque no termo um tem cinco pontos. Se a pessoa for lá na sua fórmula e trocar o n por três, termo três, tem que dar treze.
> ***Jean:*** Se eu colocar ali, o n no lugar do trinta e sete, vai dar cento e quarenta e nove.

A princípio, os alunos apresentam muitas dúvidas sobre o significado da letra n e sobre o objetivo da questão. Em um primeiro momento, explico que o n pode representar qualquer termo. Depois, digo que o objetivo da tarefa é montar uma fórmula, que sirva para qualquer termo. Como os alunos apresentam dificuldades para iniciar a busca por uma resposta, digo aos alunos que, se alguém substituir o n na fórmula, pelo número do termo, deve obter o número de pontos desse termo. Jean parece entender essa explicação.

> ***Gilmar:*** Eu entendi.
> ***Jean:*** Você entendeu? Então explica para mim.
> ***Gilmar:*** É lógico. Tipo, você escolhe dez, número dez. Daí você tem que ir somando de nove em nove.
> ***Jean:*** Espera aí, deixa eu chamar o professor aqui.
> ***Gilmar:*** Se eu escolhi dez, então você vai somando de nove em nove. Vai aumentando de nove em nove. Tem dez, você tira um.
> ***Jean:*** Vai dar nove.
> ***Gilmar:*** Vai subindo de nove em nove. Professor, é assim? Você escolhe um número. Tipo, se eu escolhi o dez, vai subindo de nove em nove.
> ***Professor:*** Dez, subindo de nove em nove?
> ***Gilmar:*** Tipo, aqui você escolheu o cinco, foi subindo de quatro em quatro.
> ***Professor:*** Não é assim, não. Podia ser de cinco, podia aumentar de dois em dois, podia aumentar de um em um.

Após algumas explicações, a dupla começa a formular as suas primeiras estratégias. Gilmar elabora uma e tenta explicá-la a Jean. Ele supõe que, pelo fato de o primeiro termo ter 5 pontos, o número de pontos aumentava em 4 a cada termo. Então, caso o número de pontos do primeiro termo fosse 10, o segundo teria 19 pontos, já que o número de pontos aumentaria em 9 a cada termo, sempre 1 ponto a menos do que o número de pontos do primeiro termo. Em um primeiro momento, considero que essa observação do estudante é incorreta. No entanto, pode ser que ele estivesse elaborando outra sequência. Assim como a sequência da tarefa começava em 5 e aumentava de 4 em 4, Gilmar pode ter pensado em uma que iniciasse em 10 e aumentasse de 9 em 9.

> ***Professor:*** n vezes quatro mais um?
> ***Jean:*** Dá cinquenta e dois, que é o trinta e oito.
> ***Professor:*** Você está fazendo certo. Só que, olha, n vezes quatro mais um, isso aqui está certo. Só que n não é o termo trinta e oito. Pode ser o trinta e oito, pode ser o quatro, pode ser o onze, ele pode ser qualquer termo.

> ***Jean:*** Tem que ser o quê? O termo que dá pra todos? Ah, então é o um.
> ***Professor:*** Não. É assim: a pessoa vai chegar na sua fórmula, ela troca o n pelo número de um termo e o que ela consegue quando faz essa conta? O número de pontos. Essa sua fórmula, ela dá certo para o termo três?
> ***Jean:*** Tem que dar certo para as três lá de cima?
> ***Professor:*** Tem.
> ***Jean:*** Mas o número de pontos é diferente.
> ***Professor:*** Exatamente. O número de pontos é diferente. Então, se o número de pontos é diferente, você não vai poder pôr número, né. Porque o número muda toda hora. Igual o termo, que muda toda hora. O que você colocou para o termo?
> ***Jean:*** n.
> ***Professor:*** Então, você vai ter que fazer a mesma coisa. Você não vai poder usar um número, porque o número muda toda hora. Você vai ter que usar alguma coisa para representar. Aqui não foi n? Vai ter que usar alguma coisa para representar.

Depois, os estudantes surgem com a resposta da terceira questão da tarefa. No entanto, não houve diálogos que deem pistas de como obtiveram essa resposta. É possível, inclusive, que tenham copiado de outra dupla. Então, observo a resposta que Jean deu para a questão: n multiplicado por 4, mais 1, igual a 38. Por algum motivo que desconhecido, já que o aluno apagou seus registros escritos, Jean também disse o resultado seria 52. Com isso, digo a Jean que ele não deve elaborar uma fórmula para um termo específico, mas uma que sirva para todos os termos, recorrendo, novamente, a uma breve explicação sobre o papel do n. Digo a Jean que a fórmula precisa funcionar para os três primeiros termos, por exemplo, o que leva o estudante a observar que esses termos possuem diferentes quantidades de pontos. Então, sugiro que ele utilize algo que não particularize sua resposta. Jean utiliza, para tanto, x, mas não chega a produzir outras respostas até o final da aula. Gilmar, por sua vez não registra resposta. É possível notar que o estudante havia realizado os seguintes cálculos no espaço destinado à terceira questão: 63 multiplicado por 4 é igual a 252; 252 adicionado a 1 é igual a 253. No entanto, o estudante não deixa, no tempo da aula, informações suficientes para que se possa concluir algo sobre esses cálculos. Como resposta à terceira questão, Jean escreve: "$N \cdot 4 + 1 = x$".

3.2.2.1 Processos de raciocínio matemático de Jean e Gilmar

Durante a realização da tarefa por parte dos alunos, foi possível identificar alguns processos de raciocínio matemático por eles mobilizados. No início da tarefa por exemplo, Gilmar já dá a reposta da primeira questão: 25. Ele argumenta para Jean que tal resposta é correta porque o número de pontos a cada termo aumenta "[...] de quatro em quatro", nas palavras do próprio estudante. Depois, Jean questiona Gilmar sobre isso, defendendo que o número de pontos poderia estar aumentando em 5 a cada termo. Gilmar argumenta novamente: “Olha por que é de quatro em quatro. [...] Olha, cinco, aqui vai dar nove”. Ou seja, Gilmar tenta evidenciar a diferença de 4 pontos entre os termos 1 e 2, que possuíam 5 e 9 pontos, respectivamente.

Verificamos que essa observação de Gilmar pode ser enquadrada como o processo do raciocínio matemático de identificação de padrões, já que o aluno percebe uma relação recursiva: o aumento de 4 pontos a cada termo. A identificação de padrões é um: “processo do raciocínio matemático que, pela busca de similaridades e diferenças, infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos matemáticos” (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 10).

Gilmar volta a defender seu ponto de vista quando questionado sobre como obteve 25 como resposta. Primeiro, ele diz que obteve o 25 “Somando de quatro em quatro”. Depois, volta a utilizar o número de pontos dos primeiros termos para confirmar sua estratégia. “Porque [...] esse aqui vai dar cinco, daí mais quatro...”, diz Gilmar, indicando que o número de pontos dos termos seguintes tinha sempre uma diferença de 4 em relação ao número de pontos do termo anterior.

Jean também se aproxima de realizar a identificação de um padrão. No entanto, por considerar incorretamente o número de pontos de alguns termos, acaba não fazendo isso. Quando Gilmar defende que o número de pontos de cada termo é de 4 a mais que o anterior, dizendo que o termo 1 possui 5 pontos e o termo 2 possui 9 pontos, Jean discorda: “Não, aqui dá dez”. Isso leva Gilmar a concordar, por um breve momento, com a afirmação incorreta de Jean: “Aumenta em cinco [...]”. Ou seja, Jean afirma, incorretamente, que o número de pontos de cada termo é de 5 a mais que o anterior, baseado na contagem incorreta de pontos do termo 2.

Quando os alunos estão pensando na segunda questão, sugiro que tentem uma estratégia diferente da que utilizaram na primeira, de determinar o número de pontos de todos os termos até chegar ao 6. Assim que é feita essa sugestão, Gilmar diz: “Se for igual, vai ser de quatro em quatro. Vai ser quatro vezes trinta e sete”. Ou seja, o estudante supõe que se multiplicado o número do termo 37 por 4, obtém-se o número de pontos.

Nesse momento, entendemos que Gilmar realizou uma generalização empírica. Sua conclusão caracteriza-se como uma generalização porque ele percebe que 4, que é o número de pontos que aumenta a cada termo, multiplicado pelo número do termo poderia resultar no seu número de pontos. Quando pergunto “Por que trinta e sete vezes quatro?”, Gilmar deixa isso mais evidente: “Foi crescendo de quatro em quatro. Daí eu fiz quatro vezes trinta e sete”. Sugiro, diante disso, que os estudantes verifiquem para os três primeiros termos.

Depois da sugestão, Jean realiza algumas tentativas de validação, como pode-se perceber no seguinte trecho: “Quatro vezes um deu quatro, certo? Três vezes quatro? Três vezes quatro dá doze”. Contudo, Jean não obtém sucesso em suas tentativas, já que se confundiu com os números dos termos e seus números de pontos. Jean ainda diz: “Aqui, nesse quatro vezes oito, não sei de onde veio”. O aluno provavelmente obteve o 8 a partir da multiplicação de 4 por 2, número do segundo termo e estava multiplicando, incorretamente, 8 por 4. Gilmar, apesar da sugestão do professor, não apresenta ou, ao menos, não declara realizar, tentativas de validação.

Com isso, para que a dupla pudesse avançar na tarefa, faço alguns questionamentos que os conduzem a uma validação. Peço a Jean que realize a multiplicação de 4 por 1, com referência ao primeiro termo. Depois, peço que ele compare o resultado da multiplicação com o número de pontos do termo 1. A princípio, o aluno diz que é necessário subtrair 1, mas, diante da afirmação do professor de que, desse modo, se obteria 3, Jean muda de opinião e diz: “[...] eu tenho que dar o valor estimado aqui. Então tem que aumentar?”.

Diante de questionamentos semelhantes para o termo 2, questiono: “[...] para o termo trinta e sete o que você vai ter que fazer?”. Com isso, Jean diz: “[...] tenho que aumentar um, eu acho”. Entretanto, ao fim desse diálogo, Jean conclui, incorretamente, que o número de pontos do termo 37 seria 49. Gilmar, que acompanhava o diálogo, responde, corretamente, que o número de pontos do termo é 149. É nesse momento que Gilmar conclui sua generalização. E ela se caracteriza como empírica porque foi baseada em validações com casos particulares, que eram o número de pontos dos primeiros termos.

Jean aproximou-se, nesse momento, de formular uma generalização. No entanto, o estudante ainda não havia se apropriado bem das informações levantadas pela dupla até o momento e das relações entre elas. Nesse momento, percebo que Jean estava multiplicando 38 por 4. Quando indagado, o aluno se justificou da seguinte maneira: “É. Porque tu mandou aumentar um”. Desse modo, apesar de Jean ter dito anteriormente “[...] tenho que aumentar um [...]”, ele não havia compreendido corretamente essa ideia, já que, em seguida, aumentou 1 ao número do termo, não ao número de pontos do termo.

Depois, Jean parece ter compreendido essa generalização, já que peço pela validação dela com o termo 6. Digo ao estudante que “[...] para a figura 37 foi: trinta e sete vezes quatro, depois mais um. Para a figura seis, como fica?”. Depois de mais algumas perguntas, Jean dá as seguintes respostas: “Seis vezes quatro. [...] dá quanto? Vinte e quatro. [...] Mais um? Vinte e cinco”.

Na terceira questão, os alunos apresentam dificuldades para compreender o papel do n na fórmula para descobrir o número de pontos de um termo. São desenvolvidas algumas ideias, mas não foi possível identificar possíveis mobilizações de processos de raciocínio matemático nessa etapa da tarefa, visto que não foram levantadas informações suficientes nos diálogos com os estudantes para tanto.

3.2.3 Manoel e Gisele

Logo após a tarefa ser lida pelo professor para a classe toda, Manoel começa a explorá-la em busca de respostas.

> ***Manoel:*** De quatro em quatro... Oito. Quatro, oito, doze, dezesseis... Vinte e quatro. Menos um, vinte e três. Professor, vê se essa conta está certa. Certo?
> ***Professor:*** Quatro mais dezesseis?
> ***Manoel:*** Vezes seis, professor.
> ***Professor:*** Vezes seis... A resposta é o quê? A figura 6 tem quantos?
> ***Manoel:*** Aqui, professor, deixa eu explicar para o senhor. Porque é de quatro em quatro, professor. Daí, que nem você explicou aquele dia lá, que multiplica, daí diminui um.

Manoel percebe que o número de pontos dos termos aumenta de quatro em quatro. Dessa forma, Manoel conclui que no termo 6 haveria 23 pontos. Essa resposta, no entanto, está incorreta. Quando questionado, Manoel revelou sua estratégia: multiplicar 4 por 6 e depois subtrair 1 do resultado. Possivelmente, o aluno escolheu o 4 porque identificou que essa era a quantidade de pontos que aumentava a cada termo em relação ao anterior e escolheu o 6 porque buscava a quantidade de pontos do termo 6.

> ***Professor:*** Funciona para esse? Funciona para qualquer figura?
> ***Manoel:*** Funcionou.
> ***Professor:*** Funcionou? Quatro vezes um quatro. Menos um, três. [Referindo-se ao termo 1]
> ***Manoel***: Calma aí, eu errei. Começa com dois, professor? Ah, calma aí, professor.

Então, questiono sobre a validade de sua estratégia para outros termos. Apesar disso, Manoel ainda está convicto da validade de sua estratégia. Com isso, dou o exemplo do termo 1, na qual a estratégia que ele utilizou não é válida. Diante disso, Manoel duvida de sua própria estratégia e parte para outras maneiras de se obter a resposta.

> ***Professor:*** Olha, essa figura um, começa com quantos pontinhos?
> ***Manoel:*** Começa com dois, professor.
> ***Professor:*** Quantos pontos têm aqui?
> ***Manoel:*** Ah, tudo. É cinco, né.
> ***Professor:*** Cinco, né. Depois tem quantos?

> ***Gisele:*** Professor, vai ter mais, não é?
> ***Manoel:*** Dez, eu acho.
> ***Professor:*** Conta.
> ***Manoel:*** Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove...

O professor pergunta ao aluno quantos pontos possui o termo 1 e, depois, pergunta quantos pontos terá o próximo. Manoel conclui que o termo 1 possui cinco pontos e Gisele diz que o próximo termo terá mais pontos do que o primeiro. Manoel nota que o termo 2 possui 9 pontos e começa a trabalhar na busca pela resposta à primeira questão da tarefa.

> ***Gisele:*** Então vira aí para eu copiar de você.
> ***Manoel:*** O quê? Não vai, também. Faz a primeira, vamos ver se você consegue. Raciocina aí.
> ***Gisele:*** É para ficar igual.
> ***Manoel:*** Raciocina aí. Vamos ver se você consegue.
> ***Gisele:*** Mas tem que ficar igual.

Neste diálogo, percebemos que Gisele não assumiu uma postura ativa durante a resolução da tarefa, esperando que Manoel a deixasse copiar sua resposta. Manoel, por sua vez, diz a Gisele que ela também deve pensar sobre a tarefa. No entanto, o aluno também não assume uma postura de colaboração com Gisele na resolução da tarefa.

> ***Manoel:*** Olha, professor. Aqui está certo, porque aqui deu cinco. Cinco mais quatro? Nove. Aqui tem nove.
> ***Professor:*** Isso mesmo. Daqui para cá é quatro. Cinco mais quatro, nove. E daí? Aqui tem quantos?
> ***Manoel:*** Ah, tá. Não calculei esse aí. É mais quatro, dá... Quatorze? Não. Treze.
> ***Professor:*** Treze. Vê se tem treze mesmo.
> ***Manoel:*** ... onze, doze, treze. Treze.
> ***Professor:*** Treze. Você identificou já. Está crescendo de quanto em quanto?
> ***Manoel:*** De quatro em quatro.

Depois, Manoel confirma que há 9 pontos no termo 2 e, ao ser questionado sobre o próximo, conclui que o número de pontos é 13. O aluno ainda afirma que a quantidade de pontos está aumentando de 4 em 4 a cada termo.

> ***Manoel:*** Então está certo, professor. Dá vinte e três. Sabe por quê? Olha, quatro vezes seis dá vinte e quatro, daí menos um, que você explicou aquele dia.
> ***Professor:*** Não, mas aquele lá era menos um. Esse pode ser outro.
> ***Manoel:*** É menos um também, professor. Olha, três vezes três, seis. Menos um, cinco [Referindo-se ao termo 1].
> ***Professor:*** Mas quanto que é três vezes três?
> ***Manoel:*** Três vezes três, não. Três vezes dois. Dá seis, daí diminui um, deu cinco?
> ***Professor:*** Mas por que é três vezes dois?
> ***Manoel:*** Porque... duas vezes. Duas vezes...

Apesar de Manoel ter apresentado conclusões corretas anteriormente, ele volta a insistir em sua primeira resposta, de que o termo 6 possui 23 pontos. Para justificar sua resposta, Manoel obtém um cálculo para encontrar o número de pontos do primeiro termo: $3 \times 2 - 1 = 6 - 1 = 5$. Mas, quando questionado sobre o porquê de utilizar a multiplicação de 3 por 2 em seu cálculo, Manoel não consegue uma resposta. Uma possibilidade é que o aluno tenha percebido que, no termo 1, há duas linhas horizontais que formam a figura, uma com 3 pontos e outra com 2, e tenha multiplicado esses números. Do resultado da multiplicação, Manoel teria subtraído 1 porque já sabia que o número de pontos do termo 1 deveria ser 5. No entanto, o aluno não apresenta maiores indícios de que realmente pensou nessa estratégia. E, no dia da resolução da tarefa, não percebi essa possibilidade para realizar questionamentos nesse sentido ao estudante.

> ***Professor:*** Olha, você já identificou que cresce de quatro em quatro. Quantos vai ter o termo quatro? Como o seis é pequeno, dá para ir contando de quatro em quatro.
> ***Manoel:*** Treze, quatorze... Calma aí, professor. Dá... quinze, não é?
> ***Professor:*** Esse tem treze, né.
> ***Manoel:*** Quatorze, quinze, dezesseis, dezessete. Dezessete.
> ***Professor:*** Dezessete. E o termo cinco?
> ***Manoel:*** Vinte e um.
> ***Professor:*** E o termo seis?
> ***Manoel:*** Ah, entendeu.
> ***Professor:*** Você consegue dar uma resposta aqui, já? Quantos pontos e consegue explicar como você chegou?
> ***Manoel:*** Não. Explicar, não.
> ***Professor:*** Consegue. Você acabou de falar como você chegou.
> ***Manoel:*** Ah, tá. Entendi.
> ***Professor:*** Faz aí também, Gisele.
> ***Gisele:*** Vou fazer, professor.

Diante da falta de caminhos para uma solução em que se encontrava Manoel, sugiro a ele que chegue à quantidade de pontos do termo 6 contando de 4 em 4, já que não possui uma quantidade muito grande de pontos, o que torna viável essa estratégia. Peço a Manoel uma resposta para a questão, mas o estudante ainda se diz incapaz de explicar a estratégia que utilizou.

> ***Jéssica[17]:*** Vocês já acabaram?
> ***Manoel:*** Eu já, todas as respostas. Estou tentando fazer ela aprender, mas está difícil.
> ***Gisele:*** É vinte e três.
> ***Jéssica:*** No meu caderno está vinte e seis.
> ***Gisele:*** Não. É vinte e três.
> ***Ricardo[18]:*** É vinte e cinco.
> ***Manoel:*** Não é também.

[17] Aluna que não fazia parte da dupla.
[18] Aluno que não fazia parte da dupla.

Gisele: Vinte e três.
Manoel: Não é também.
Ricardo: Vinte e cinco. É vinte e cinco.
Gisele: É vinte e cinco?
Manoel: Que vinte e cinco?
Ricardo: É quanto então?
Manoel: Eu não vou falar. É prova. Vocês acham que eu vou ficar falando a resposta para vocês.
Gisele: Não é prova.
Manoel: É sim.
Gisele: Não é, não.

Em determinado momento, a dupla interage com outros dois alunos, Ricardo e Jéssica. Há uma breve discussão sobre qual seria a resposta correta para a primeira questão da tarefa. Ricardo defende que a quantidade de pontos do termo 6 é 25. Essa é a resposta correta. Jéssica diz que obteve 26 como resposta. Gisele aponta 23 como a quantidade de pontos, provavelmente baseada na primeira resposta de Manoel que, por sua vez, nega todos os palpites dos colegas.

Manoel: Eu ensinei para ela, professor.
Professor: Mas ela fez errado.
Manoel: Você falou lá que deu, professor.
Professor: Mas não era vinte e cinco?
Manoel: Ah, é. Vinte e cinco.
Gisele: Falei que era.
Professor: Espera aí, espera aí, espera aí. Deu esse resultado por quê? Três vezes quatro...
Manoel: Três vezes seis, professor. Nossa, três vezes dois, professor. De três em três, olha...
Professor: Vamos com calma.
Manoel: Deixa eu arrumar esses erros aqui. Vai lá, vai lá.
Gisele: E aí, Manoel, está certo?
Manoel: Vou ver agora.

Algum tempo depois, Manoel mostra a sua resposta. Mas, ao contrário do que os diálogos anteriores indicavam, Manoel ainda não obteve a resposta correta. Além disso, encontra dificuldades em explicar a estratégia que adotou. Então, Manoel diz que realizará nova tentativa de obter o número de pontos do termo 6.

Manoel: Seis vezes três?
Professor: Seis vezes três? É dezoito.
Manoel: Seis vezes três, não. Seis vezes quatro?
Professor: Vinte e quatro.
Manoel: Menos um?
Professor: Menos um, vinte e três. Mas por que menos um?
Manoel: Eu já falei para você. Porque é duas vezes o número que acrescenta. Aqui, acrescenta três. Duas vezes três?
Professor: Três o quê?
Manoel: Três bolinhas aqui.

Professor: Mas essa é a primeira figura.
Manoel: Então, mas vai sempre acrescentando três. Eu fiz as contas aqui, professor...

Depois, Manoel volta a insistir na sua primeira estratégia, com a qual obteve 23 como resposta. Quando o aluno insiste em multiplicar 6 por 4 e subtrair 1 do resultado, questiono: “Mas por que menos um?”. Ao explicar seus cálculos, Manoel diz que a quantidade de pontos aumenta de 3 em 3 a cada termo, quando já tinha identificado anteriormente, de maneira correta, que a quantidade de pontos aumentava de 4 em 4. Ainda assim, é possível que Manoel estivesse pensando em uma outra maneira de determinar o número de pontos de cada termo, talvez explorando algum aspecto geométrico das figuras. No entanto, não é possível afirmar isso porque faltam elementos que indiquem uma possível estratégia do estudante. E, durante a resolução da tarefa, não percebi a possibilidade de outras estratégias.

Professor: Fez as contas? Aqui tem cinco, né? Aqui tem quantas?
Manoel: Tem nove.
Professor: Nove. Acrescentou quantas?
Manoel: Não sei. Ah, é... Acrescentou quatro.
Professor: E daqui para cá?
Manoel: Dá quatro. Então eu tinha feito certo. Calma aí, professor. É quatro em quatro, então?
Professor: Quatro em quatro. Quantos vai ter a figura quatro?
Manoel: Quantos que deu aqui?
Professor: Entendeu, Gisele?
Manoel: Então dá vinte e cinco.
Professor: Então fala aí. Fala aí. Explica com as suas palavras.
Gisele: Professor, não vou explicar, não.
Professor: Explica.
Gisele: Ah, então eles acertaram lá. O Ricardo falou certo lá, professor.

Desse modo, volto a sugerir que Manoel se concentre nos primeiros termos, os quais são fáceis de identificar quantos pontos possuem. Peço que Manoel conte quantos pontos possui o termo 2 e identifique quantos pontos tem a mais do que o termo anterior. Com isso, o aluno consegue concluir novamente que o número de pontos aumenta de 4 em 4 e, logo depois, dá a resposta correta para a questão, de que o termo 6 possui 25 pontos. Gisele, por sua vez, ainda não havia explicitado estratégias de resolução.

Professor: Explica como que você pensou para chegar no resultado. Como que você chegou no vinte e cinco?
Manoel: Cresce de quatro em quatro. Daí você vai fazendo os cálculos e dá.
Professor: A figura quatro vai ter quantos, se acrescenta de quatro em quatro?
Manoel: Dá dezessete.
Professor: E a cinco?
Manoel: A cinco dá vinte e um.
Professor: E a seis?

> ***Manoel:*** Vinte e cinco.
> ***Professor:*** Então você chegou na resposta e você sabe explicar ela, porque você acabou de me explicar. Entendeu, Gisele? Vamos lá?
> ***Gisele:*** Professor, você vai explicar para mim, mas eu não vou explicar nada, não, porque eu não sou boa em matemática.
> ***Professor:*** O 'explique' que eu coloco é para você explicar o que você pensa. Não precisa ser uma coisa muito elaborada, não.

Após Manoel ter obtido a resposta correta da questão, peço que ele detalhe o caminho que percorreu. Então, Manoel revela que identificou que a quantidade de pontos cresce de 4 em 4 a cada termo e, sabendo disso, foi adicionando 4 ao número de pontos do termo anterior até chegar ao 6 e obter 25 pontos. No entanto, Gisele ainda não se sentia confiante para a realização da tarefa, demonstrando insegurança para explicar suas possíveis estratégias. Como resposta à primeira questão, Manoel escreveu: "R: 25, o padrão cresce de 4 em quatro, daí é só calcular, daí você chega no resultado".

> ***Manoel:*** Cresce de quatro em quatro? Calma. Então diminuem dois. Não, diminui um. Uma vezes quatro. Acrescenta um?
> ***Gisele:*** Deu vinte e cinco.
> ***Manoel:*** Que vinte e cinco? Trinta e sete vezes... Nossa.
> ***Gisele:*** Estou falando da primeira, não estou falando da segunda.
> ***Manoel:*** Trinta e sete vezes cinco. Deixa eu pensar. Acrescenta de quatro em quatro. Trinta e sete vezes quatro, o professor falou que está errado. Cinco vezes sete?
> ***Gisele:*** Trinta e cinco.
> ***Manoel:*** Trinta e cinco? Que trinta e cinco?
> ***Gisele:*** É trinta e cinco, sim.

Nesse diálogo, pode-se ver que Manoel começa a se dedicar à segunda questão, enquanto Gisele concluía a primeira. A aluna atribui 25 como resposta, mas não dá pistas de como chegou a esse resultado. A resposta escrita da aluna foi: "25 pontos deu. Somei a quantidade em 4 em 4 daí você chega no resultado final". Manoel, por sua vez, testa vários cálculos ao mesmo tempo, sendo que a maior parte deles envolve o número 37, que é o termo cujo número de pontos é pedido na segunda questão da tarefa.

> ***Professor:*** Vamos lá. O que você fez aí?
> ***Manoel:*** Olha, professor, deixa eu lembrar. Deu cinco a primeira, né, professor? Calma aí, esqueci de diminuir um.
> ***Professor:*** Diminui um? Você falou que era positivo quando eu estava aqui. Você falou isso.
> ***Manoel:*** Aqui deu cinco, né. Sei lá o que eu fiz, aí eu pensei: se deu cinco, daí eu fiz trinta e sete, que é o que nós vamos ter que chegar.
> ***Professor:*** Estava melhor antes. Olha, pensa nisso aqui: vezes quatro.
> ***Manoel:*** Daí diminui um, dá o resultado.
> ***Professor:*** Dá o resultado, nada. O resultado é cento e quarenta e nove.

> ***Manoel:*** Cento e quarenta e nove? Então pode deixar, professor. Vou dar esse resultado já, já.
> ***Professor:*** Não, mas não é assim. Vamos lembrar dessa conta. Quatro vezes seis deu vinte e quatro, né.

Ao se dedicar à segunda questão, Manoel recorre, mais uma vez, à sua primeira estratégia, na qual subtraiu 1 depois do resultado de uma multiplicação. Dessa vez, o estudante multiplicava 37, o número do termo, com 5, o número de pontos do termo 1. Então, sugiro a ele que retome as multiplicações por 4, citando o exemplo da primeira questão, que pedia o número de pontos do termo 6.

> ***Manoel:*** Ah, acrescenta mais dois.
> ***Professor:*** Mais dois? Vamos fazer um teste aqui. Olha, essas figuras, a gente sabe quantas bolinhas tem, porque é fácil contar. Vamos pensar em uma conta para você descobrir quantas bolinhas tem aqui, no termo três. Aqui você fez quatro vezes três, né. Se você fizer quatro vezes três, o que acontece?
> ***Manoel:*** Quatro vezes três? Não chega no resultado, eu acho. Eu acho que dá um a menos.
> ***Professor:*** Faz aí para a gente ver.
> ***Manoel:*** Quatro vezes três dá doze.
> ***Professor:*** Doze. Falta quanto para chegar aqui?
> ***Manoel:*** Um. Ah, captei vossa mensagem.
> ***Professor:*** Captou? Será mesmo? E no dois? Quatro vezes dois dá quanto?
> ***Manoel:*** Quatro vezes dois dá oito. Aí acrescenta um. Dá nove.
> ***Professor:*** Bate com a quantidade aqui? E aqui? [Referindo-se ao número de pontos dos termos 2 e 3].
> ***Manoel:*** Bate também.
> ***Professor:*** Quatro vezes um?
> ***Manoel:*** Quatro. Mais um, cinco.
> ***Professor:*** E aqui?
> ***Manoel:*** Ah, entendi.
> ***Professor:*** Faz aí, então. Viu, Gisele?

Então, quando Manoel diz que a quantidade de pontos aumenta 2 em cada termo, sugiro novamente uma estratégia na qual o estudante compreenda que o número de pontos aumenta de 4 em 4 a cada termo. Manoel mostrou compreender isso em vários momentos da tarefa. No entanto, por diversas vezes não considerava esse fato no momento de buscar uma resposta.

> ***Manoel:*** Olha, fiz aquilo lá que você falou.
> ***Professor:*** E chegou?
> ***Manoel:*** Cheguei, professor.
> ***Professor:*** Qual conta você fez?
> ***Manoel:*** Eu fiz trinta e sete vezes quatro. Dá cento e quarenta e oito. Daí aumenta um, dá cento e quarenta e nove. E o resultado é cento e quarenta e nove.
> ***Professor:*** Certo.

Nesse diálogo pode-se ver que Manoel conseguiu fornecer uma resposta correta para a segunda questão. O estudante multiplicou 37 por 4 e adicionou 1 ao resultado, obtendo 149, que é a quantidade de pontos do termo 37. Gisele não evidenciou estratégias de resolução dessa questão, mas registrou uma resposta escrita. As respostas de ambos os alunos foram idênticas: “149. Para você chegar nesse resultado é só multiplicar o número do termo por 4 e acrescentar 1 que dá o resultado”. No entanto, apesar de fornecerem uma resposta, há uma falta de justificações para a mesma. Isso não permite saber como construíram a resposta que forneceram. Manoel, nos diálogos a seguir, tenta resolver a terceira questão, que pede a construção de uma fórmula para o número total de pontos do termo n.

> ***Manoel:*** Está certo?
> ***Professor:*** E se eu colocar o um no lugar do n?
> ***Manoel:*** Colocar o um? Dá errado.
> ***Professor:*** Só funciona para o trinta e sete esse?
> ***Manoel:*** Só para o trinta e sete.
> ***Professor:*** Você precisa criar uma que funcione para todos.
> ***Manoel:*** Para todos? Estava isso aí escrito aqui, professor?
> ***Professor:*** Está. Encontre uma fórmula para o número total de pontos no termo n. n quer dizer que é genérico. Para qualquer um.
> ***Manoel:*** Ah, entendeu. Entendeu.
> ***Professor:*** Entendeu? Entendeu mesmo?
> ***Manoel:*** Eu coloco o número n aqui, aí eu coloco vezes quatro, daí um número mais um. Daí vai dar zero.
> ***Professor:*** Não sei. Olha, vou escrever essa continha sua de outro jeito. É a mesma. Você fez assim: quatro vezes trinta e sete, mais um, igual a cento e quarenta e nove. Tenta escrever em linha e usando o n. [Em linha: $4 \times 37 + 1$].
> ***Manoel:*** Nossa, aí você complicou, professor.
> ***Professor:*** É que, olha, você escreveu a conta assim. Escreve ela em linha. Em vez de escrever assim, escreve ela em linha e usa o n. Mesma coisa que você fez lá.

Manoel construiu uma fórmula, mas que só era válida para $n = 37$. Então, digo a ele que deve construir uma fórmula para n e reescrevo o seu cálculo de outra maneira. A construção de Manoel foi a seguinte: “$N \times 4 = 148;\ 148 + 1 = 149$”.

> ***Professor:*** Onde vai o n? Primeira coisa: o que é n? Olha, o n é o termo. Está aqui. Qual é o termo?
> ***Manoel:*** Quatro.
> ***Professor:*** O que era o quatro?
> ***Manoel:*** O que acrescentava.
> ***Professor:*** Isso. O que é o termo?
> ***Manoel:*** É o trinta e sete.
> ***Professor:*** Trinta e sete? Então aonde o n vai?
> ***Manoel:*** Ah, no trinta e sete. Entendi.
> ***Professor:*** Se o n vai aqui, aqui vai mudar também. Quanto que vai dar? Não dá pra saber.
> ***Manoel:*** Então eu não coloco número aqui. Ou eu coloco?
> ***Professor:*** Não dá para ter número. Tem que pôr outra coisa.
> ***Manoel:*** Um n?
> ***Professor:*** Pensa aí.

Manoel: Vou colocar um x, professor. Dá certo.

Apesar da sugestão feita a Manoel anteriormente, o aluno não conseguiu progredir na questão. Após uma discussão sobre o que o n representa, Manoel entende que, na fórmula, o n representa o termo. No entanto, o aluno ainda fica em dúvida sobre o que deve ser colocado do outro lado da igualdade, já que, agora, não obtém o número de pontos de determinado termo. Assim, ele opta pelo x como uma representação desse valor.

Professor: Então você chegou nisso?
Manoel: Dá qualquer resultado desses. Daí deu o x.
Professor: O x representa o quê?
Manoel: O número de todos.
Professor: De todos o quê? Dos três juntos?
Manoel: Dos três juntos.
Professor: Será?
Manoel: Lógico que dá. Quatro vezes n. O n pode servir de qualquer um desses. Igual o x. O x pode dar o resultado de qualquer um também.
Professor: Testa para o três. Testa essa sua fórmula. Testa para o três.
Manoel: Quatro vezes, que dá doze. Mais um, treze.
Professor: Treze. Então x é o quê?
Manoel: x é número desse. Esse aqui vai ser o três. Aí desse aqui vai ser o nove. Desse aqui vai ser o cinco.
Professor: Isso mesmo. Então x é...
Manoel: x é a quantidade, do negócio aqui.
Professor: Quantidade... O que é o negócio?
Manoel: Pontinho. Bolinha.

Manoel escreve uma fórmula para o número de pontos do termo n. No entanto, ainda o questiono sobre o que o x representa. Então o estudante testa a fórmula que construiu para o termo 3 e conclui que o x representa a quantidade de pontos do termo n. A fórmula construída por Manoel era a seguinte: "$4 \cdot N + 1 = X$". Entretanto, assim como nas duplas anteriores, a construção dessa fórmula não foi bem explorada devido à falta de tempo de aula.

3.2.3.1 Processos de raciocínio matemático de Manoel e Gisele

No relato da resolução da dupla é possível perceber que Manoel toma a frente na busca por respostas às questões colocadas pela tarefa. No entanto, o estudante não assume uma postura de diálogo com Gisele, o que limita os momentos de discussão e prejudica o desenvolvimento do raciocínio matemático nesse tipo de tarefa. Manoel consegue fornecer respostas corretas a todas as questões, mas também apresenta insegurança quanto às afirmações que produziu.

No início da tarefa, Manoel identifica um padrão. Entendemos que, quando diz "De quatro em quatro...", Manoel está se referindo ao padrão de crescimento do número de pontos em cada termo, que é uma relação recursiva, já que cada padrão, com exceção do primeiro, possui 4 pontos a mais em relação ao termo anterior. Além disso, verificamos que Manoel explicitou a formulação de uma conjectura. Destacamos a seguinte fala de Manoel: "Oito. Quatro, oito, doze, dezesseis... vinte e quatro. Menos um, vinte e três". Quando o estudante diz "Quatro, oito, doze, dezesseis", provavelmente está se referindo aos múltiplos de quatro, chegando a 24, resultado da multiplicação de 4 por 6.

Assim, inferimos que Manoel formulou a seguinte conjectura: *o número que representa o crescimento da quantidade de pontos multiplicado pelo número do termo, menos um, devolve a quantidade de pontos do padrão*. Mas essa conjectura não é válida. Manoel concluiu incorretamente que deve ser subtraído 1 da multiplicação, quando, na verdade, deve ser adicionado 1 a esse resultado. Depois, sugiro que o estudante tente uma validação para essa conjectura. Aparentemente, é o que ele faz, já que diz: "Calma aí, eu errei". Apesar disso, Manoel não dá outras pistas que permitam identificar uma possível validação, ainda que tenha duvidado da conjectura que formulou anteriormente.

Manoel, apesar de estar apresentando avanços na resolução da tarefa até o momento, aparenta estar abandonando uma conclusão verdadeira que havia produzido e assumindo uma nova, não verdadeira, quando diz: "Começa com dois, professor". Diante disso, sugiro que os alunos contem o número de pontos dos primeiros termos, para que identifiquem novamente o padrão de crescimento do número de pontos. Isso ocorre com Manoel, quando o estudante reafirma que a quantidade de pontos aumenta "De quatro em quatro" a cada termo.

Então, o aluno reafirmou a conjectura que havia formulado anteriormente ao dizer: "Dá vinte e três. Sabe por quê? Olha, quatro vezes seis dá vinte e quatro, daí menos um". Contudo, no mesmo diálogo, o estudante formula outra conjectura, apoiada em uma validação, o que é explicitado pela seguinte frase: "É menos um também, professor. Olha, três vezes três, seis. Menos um, cinco". Dessa vez, a conjectura é: *3 multiplicado por 3 e, depois, 1 subtraído do resultado, fornece a quantidade de pontos do termo*. Essa conjectura não é verdadeira e não foi possível identificar o porquê de o estudante utilizar o número 3. Possivelmente ele constrói tal conjectura apoiado em uma validação evidenciada na mesma frase. O cálculo realizado por Manoel resulta em 5, que é a quantidade de pontos do termo 1.

A seguir, Manoel parece começar a abandonar sua conjectura. O estudante comenta o seguinte: "Acrescentou quatro. [...] Dá quatro. Ah, então tinha feito certo". Mais uma vez, após a sugestão ao aluno que conte o número de pontos dos primeiros termos, Manoel identifica o padrão de crescimento. Por fim, Manoel chega à resposta correta, concluindo que o termo 6 possui 25 pontos. Ao ser questionado sobre como obteve a resposta, Manoel declara: "Cresce de quatro em quatro. Daí você vai fazendo os cálculos e dá". Entendemos, a partir desse comentário, que Manoel abandonou a conjectura que havia formulado inicialmente e, a partir da identificação do padrão, adicionou 4 à quantidade de pontos do termo anterior sucessivamente, até chegar aos 25 pontos do termo 6.

Com uma resposta para a primeira questão, Manoel dedica-se à segunda, quando o estudante diz o seguinte: "Trinta e sete vezes cinco. Deixa eu pensar. Acrescenta de quatro em quatro. Trinta e sete vezes quatro, o professor falou que está errado. Cinco vezes sete?", possivelmente levantando questões que podem vir a ser conjecturas no decorrer da resolução. Depois, Manoel comenta: "aí eu pensei: se deu cinco, daí eu fiz trinta e sete, que é o que nós vamos ter que chegar". Ou seja, o estudante estava multiplicando o número do termo, 37, com o número de pontos do termo 1, que era 5.

Considerando isso, sugiro que o estudante parta das conclusões que havia obtido na resolução da primeira questão: "Vamos lembrar dessa conta. Quatro vezes seis deu vinte e quatro". Com isso, o professor recomenda ao aluno que compare esse cálculo ao número de pontos dos três primeiros termos: Manoel passa a buscar uma resposta a partir dessa sugestão: "Quatro vezes três? Não chega no resultado, eu acho. Eu acho que dá um a menos [...] Quatro vezes dois dá oito. Aí acrescenta um. Dá nove. [...] Bate também".

A partir disso, Manoel obtém uma resposta para a segunda questão. O estudante explica o modo como a obteve da seguinte maneira: "Eu fiz trinta e sete vezes quatro. Dá cento e quarenta e oito. Daí aumenta um, dá cento e quarenta e nove". Essa declaração poderia ser entendida como uma generalização. No entanto, Manoel não deu indícios suficientes para que isso possa ser considerada uma generalização.

3.2.4 Jéssica e Bianca

A dupla formada pelas alunas Bianca e Jéssica inicia a tarefa e identifica rapidamente o modo como o número de pontos aumenta a cada termo.

> ***Bianca:*** Quatro, professor. Quatro.
> ***Professor:*** Vamos lá.
> ***Bianca:*** Tá, vamos lá.
> ***Professor:*** Quantos pontos vão ter na figura seis?
> ***Jéssica:*** Aumenta de quanto?
> ***Bianca:*** Quatro.

Bianca, antes mesmo de maiores explicações, cita o número 4. Repito às alunas a pergunta colocada no enunciado da primeira questão: quantos pontos há no termo 6? Bianca, ao responder uma pergunta de Jéssica, afirma que o número de pontos aumenta em 4 a cada termo.

> ***Bianca:*** Professor, aqui.
> ***Professor:*** Vinte e três?
> ***Bianca:*** É.
> ***Professor:*** Concorda, Jéssica?
> ***Jéssica:*** Eu acho que sim, professor.
> ***Professor:*** Não pode achar, tem que ter certeza.
> ***Jéssica:*** Eu tenho certeza.
> ***Professor:*** Tem certeza de quê?
> ***Jéssica:*** Não. Eu não tenho certeza. Não é vinte e três.

Depois, Bianca dá uma resposta à questão: 23. No entanto, essa resposta está incorreta. Assim, pergunto a Jéssica se ela concorda com essa resposta. A princípio, a estudante diz que a resposta está correta, mas depois muda de opinião e passa a dizer que a resposta não é a correta.

> ***Professor:*** Por que vinte e três?
> ***Bianca:*** Porque eu contei seis e somei de quatro em quatro.
> ***Professor:*** Quatro em quatro?
> ***Bianca:*** Sim. Assim, professor: quinze. Eu acho, professor. Ou deu aqui, sei lá. Não, professor. Espera aí. Fiz errado.
> ***Jéssica:*** Falei. Eu falei.
> ***Professor:*** Fez errado? Errado onde?
> ***Bianca:*** Não, professor. Foi certo.
> ***Professor:*** Está vendo essas continhas? Põe na folha.
> ***Bianca:*** Pode fazer então?
> ***Professor:*** Põe na folha. Olha, esse três é o quê?
> ***Bianca:*** É o quatro.
> ***Professor:*** E esse mais quatro?
> ***Bianca:*** É que eu somei mais.
> ***Professor:*** Mas por que é quatro?
> ***Bianca:*** Porque, tipo assim, aqui e aqui vai somando de quatro em quatro. Tem mais bolinhas…
> ***Professor:*** Isso.
> ***Bianca:*** Está certo?
> ***Professor:*** Esse raciocínio está certo. Continua agora.

Com isso, questiono Bianca sobre como obteve sua resposta. A estudante diz que somou "[...] de quatro em quatro". No entanto, quando Bianca tenta demonstrar isso utilizando exemplos, percebe que a estratégia que utilizou não estava correta. Logo em seguida, a aluna muda de opinião novamente. Então, pergunto sobre o significado dos números utilizados por Bianca em seus cálculos. Quando questionada sobre o porquê de ter utilizado o número 4, Bianca confirma que 4 é o número de pontos que cada termo possui a mais do que o anterior. Isso é evidenciado pela estudante quando diz: "[...] vai somando de quatro em quatro".

Bianca: Aqui, professor.
Professor: Treze. Por que treze? Treze era o quê? [...] Vamos lá. Treze mais quatro.
Bianca: Dá quinze.
Professor: Mais quatro é o que foi crescendo, certo?
Bianca: Dá dezessete, professor.
Professor: Dá dezessete.

Bianca apresenta, ainda, uma nova resposta, mas acaba optando por consertá-la após algumas indagações. A estratégia de Bianca era adicionar 4 ao número de pontos de todos os termos até chegar ao sexto. Como o número de pontos dos três primeiros termos foi possível de ser contado pelas alunas, já que eram dados como exemplos na tarefa, Bianca inicia as sucessivas adições a partir do 13, o número de pontos do termo 3. Depois disso, Bianca responde, incorretamente, que 13 adicionado a 4 é igual a 15. No entanto, Bianca logo percebe seu erro e começa a corrigir todos os cálculos que havia realizado.

Jéssica: Professor, vem aqui.
Professor: Vamos lá, então. Conseguiu? Deu certo? Treze mais quatro, dezessete.
Bianca: Conferi aqui e conferi aqui, professor.
Professor: Você conferiu, mas aqui não é dezessete. Não tinha que ser dezessete aqui?
Bianca: Eu conferi errado.

Após algum tempo, as estudantes decidem apresentar uma nova resposta. Porém, mais uma vez, Bianca percebe que cometeu erros nos cálculos e começa a refazer a questão.

Bianca: Professor. Aqui, professor.
Professor: Estou indo.
Bianca: Então, professor. Está certo?
Jéssica: Sim. Vinte e cinco.
Professor: Então o que significa o vinte e cinco? O que é o vinte e cinco?
Jéssica: Espera aí, professor.
Bianca: Não. É de mais.
Professor: Vamos lá: vinte e cinco. O que significa o vinte e cinco?
Bianca: É todos os pontos.
Professor: Todos os pontos de qual figura?
Jéssica: Da seis.
Professor: A pergunta era: quantos pontos há no termo seis?
Bianca: Vinte e um. Aí é pra explicar.
Professor: Na figura seis tem vinte e um?
Bianca: Não.
Jéssica: Não, professor. Ela pegou treze, fez mais quatro, deu dezessete. Ela pegou dezessete, mais quatro, deu vinte e um. Ela pegou vinte e um, fez mais quatro, deu vinte e cinco.
Professor: Entendi. Então qual é a resposta?
Bianca: Vinte e cinco.
Jéssica: Vinte e cinco.
Professor: E por que fazer isso dá certo?
Bianca: Porque quatro é o que, somando, o que acrescentou.

Professor: Isso. Isso mesmo. Então essa é a resposta certa e essa é a sua explicação.

Depois, as alunas apresentam outra resposta. Dessa vez, elas chegam a 25, que é a resposta correta da primeira questão. Então, pergunto o significado do 25. Em um primeiro momento, Bianca não se mostra completamente segura da resposta apresentada pela dupla, respondendo que 25 "É todos os pontos". Jéssica, responde, quando questiono de qual figura seriam esses pontos: "Dá seis".

Contudo, quando repito a pergunta do enunciado, Bianca diz que o número de pontos do termo 6 é 21, ao contrário da resposta que havia dado anteriormente. Porém, Jéssica consegue esclarecer a estratégia utilizada pela dupla, dizendo que partiram do 13, somaram 4 e obtiveram 17. Com isso, somaram 4 a 17 e obtiveram 21. Por fim, somando 4 a 21, obtiveram 25. Questionadas novamente sobre qual era a resposta, as estudantes disseram a mesma coisa: "Vinte e cinco". Quando indagadas outra vez, Bianca ainda dá uma explicação semelhante à de Jéssica, dizendo que a resposta está correta porque foram acrescentando 4 sucessivamente ao número de pontos dos termos.

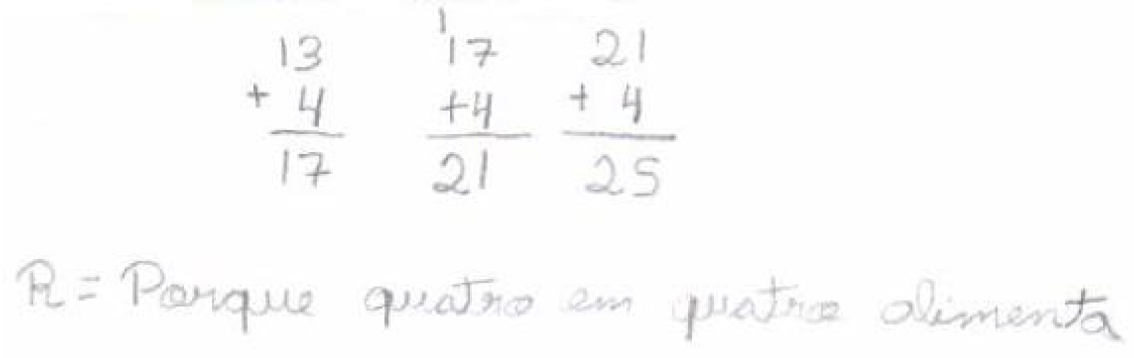
> ***Bianca:*** É de mais. É, tipo, treze mais quatro, daí o resultado que deu é dezessete. Dezessete mais quatro vai dar vinte e um. Vinte e um mais quatro vai dar vinte e cinco.

Além disso, ainda foi possível identificar uma explicação mais refinada de Bianca ao modo de obter uma resposta para a questão. Em determinado momento, Bianca reproduz a fala apresentada no diálogo acima, que é um relato bastante próximo ao feito por Jéssica anteriormente.

> ***Professor:*** Vamos pensar assim: número quatro. Número quatro é importante.
> ***Bianca:*** Porque ele aparece em todas as fotos. Todos esses negócios aqui.
> ***Professor:*** Porque está crescendo de quatro em quatro. Lembra? Por isso ele é importante. Qual é a resposta? Esqueceu de pôr a resposta aqui. Essa é a explicação. A resposta é qual? Vinte e três ou vinte e cinco?
> ***Bianca:*** Como?
> ***Professor:*** A resposta, aqui, é vinte e três ou vinte e cinco?
> ***Bianca:*** Vinte e cinco.
> ***Professor:*** Sim. Escreve aqui. Aumenta. Olha, aumenta é com u. Isso. Vamos pensar assim então: usando o quatro e o termo da figura, termo um, dois, três. Pensa aí. Usando o número quatro e o número do termo. Você quer descobrir quantas bolinhas tem aqui.

Dada a resposta para a primeira questão, faço algumas sugestões para a dupla pensar no momento da busca pela resposta da segunda questão. Antes disso, ainda peço que as alunas façam algumas correções em certos detalhes na resposta da primeira questão. Feito isso, o sugiro que, na próxima questão, as estudantes utilizem o 4 e o número do termo para descobrir o número de pontos do termo 37. No entanto, elas não realizaram a segunda questão.

Figura 25: Resposta de Jéssica na primeira questão



Fonte: Dados da pesquisa

Na figura acima, a resposta de Jéssica na primeira questão. Bianca apresentou uma resposta idêntica. Depois disso, as estudantes não apresentaram outras estratégias com informações suficientes para a análise no desenvolvimento da tarefa. As outras duas questões não foram respondidas.

3.2.4.1 Processos de raciocínio matemático de Bianca e Jéssica

Logo no início da tarefa, Bianca diz: “Quatro, professor. Quatro”. A estudante se referia, muito provavelmente, à quantidade de pontos que cada termo possuía a mais em relação ao anterior. Além disso, Jéssica pergunta: “Aumenta de quanto?”. A resposta de Bianca a essa pergunta reforça a ideia de que a estudante havia identificado o modo como o número de pontos aumentava a cada termo, já que ela responde, novamente: “Quatro”.

Portanto, concluímos que Bianca realizou o processo do raciocínio matemático de identificação de padrões, aqui entendido por nós como um processo que infere uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas. Entendemos que Bianca identificou uma relação recursiva: o aumento de 4 no número de pontos em cada termo em relação ao termo anterior.

Depois, Bianca dá outros indícios disso. Quando questiono: “E esse mais quatro?”, Bianca responde: “É que eu somei [...]”. Depois, quando o professor questiona o porquê de o 4 ser o número escolhido, Bianca diz: “Porque [...] aqui vai somando de quatro em quatro”. Além disso, Bianca utiliza essa conclusão como parte de sua estratégia para obter uma resposta para a questão. Pouco adiante na tarefa, a estudante adiciona 4 a 13, que é o número de pontos do termo 3, com o intuito de chegar até o número de pontos do termo 6.

Como já relatado, apesar de Bianca ter chegado a algumas conclusões válidas, a estudante não demonstra segurança na resposta apresentada à primeira questão. É nesse momento que Jéssica, ao descrever a estratégia da colega, diz: “Ela pegou treze, fez mais quatro, deu dezessete. Ela pegou dezessete, mais quatro, deu vinte e um. Ela pegou vinte e um, fez mais quatro, deu vinte e cinco”. A partir desse trecho, entendemos que Jéssica também apresenta o processo do raciocínio matemático de identificação de padrões, visto que também demonstra compreender que há uma relação recursiva no exemplo utilizado na tarefa, que é de que cada termo possui 4 pontos a mais em relação ao anterior.

Infelizmente, as estudantes não avançaram para as demais questões da tarefa, o que não possibilitou que evidenciassem outros processos de raciocínio matemático. A dupla concluiu apenas a primeira questão da tarefa. No entanto, nessa questão, apresentaram diálogos que suscitaram o processo de identificação de padrões, o que ressalta a importância das discussões nesse tipo de tarefa (PONTE, 2005).

3.2.5 Discussão da tarefa do 7º ano

Na tarefa do 7º ano, os alunos deveriam determinar o número de pontos de termos subsequentes de uma sequência, com base nos três primeiros. Depois disso, havia uma questão que pedia uma fórmula para o número de pontos de um termo n. Desse modo, a tarefa conduzia para uma generalização e para a formulação de uma expressão algébrica. As próximas questões apresentariam uma expressão para que os estudantes verificassem se a mesma estava correta. Contudo, na turma em que foi realizada a tarefa, só foi possível resolver as três primeiras questões da tarefa, devido ao tempo. Além disso, as duplas que resolveram a terceira questão não o fizeram de maneira que fosse possível discuti-la com profundidade, também devido ao tempo. Portanto, a análise está focada nas duas primeiras questões da tarefa.

Além da falta de tempo, os alunos que chegaram à terceira questão encontraram nela muitas dificuldades porque não estavam familiarizados com a letra representando um valor variável. A passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica ou da Aritmética para a Álgebra também é problemática para os estudantes (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). E, ainda que não seja o foco dessa pesquisa, percebeu-se que os estudantes do 7º ano apresentaram dificuldades que são muito citadas em pesquisas sobre o ensino de Álgebra, como atribuir significado a letras numa expressão ou dar sentido a uma expressão algébrica (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Sobre os processos de raciocínio matemático mobilizados, percebeu-se grande presença da identificação de padrões, que segundo Jeannotte e Kieran (2017) infere uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas. Todas as duplas identificaram o padrão de crescimento do número de pontos a cada termo, algumas com mais facilidade que outros. Manoel, por exemplo, foi um aluno que identificou o padrão, mas não o utilizou no momento de tentar descobrir o número de pontos de um termo, em especial do 37, na segunda questão.

Outro processo do raciocínio matemático presente foi o de generalização. Entendemos que duas duplas, Tiago e Emerson, e Jean e Gilmar, mobilizaram o processo de generalização, inferência de uma declaração sobre um conjunto de objetos matemáticos a partir de elementos deste conjunto (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Os alunos perceberam que o número do termo multiplicado por 4, menos 1, resultava no número de pontos do referido termo. Além disso, ambas as generalizações foram empíricas, já que os alunos as produziram a partir da exploração de casos particulares. Em geral, esses casos particulares eram os primeiros termos. No entanto, a dupla formada por Tiago e Emerson, além de explorar os primeiros termos, também determinou o número de pontos de todos os termos do 1 ao 37. No entanto, isso não deixa de ser uma exploração de casos particulares, ainda que sejam muitos, e que permitiu a elaboração de uma generalização empírica, que é definida por Stylianides (2008) como o estabelecimento de uma regularidade baseada em alguns exemplos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Serão tecidas aqui, algumas considerações finais sobre o trabalho. O tema deste trabalho, o raciocínio matemático, ainda não é amplamente estudado no Brasil. Da mesma maneira, o raciocínio matemático não recebia tanta atenção dos documentos curriculares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997 1998, 2000, 2002). Com a publicação da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), percebeu-se um avanço especificamente neste tema. Nesse documento há uma competência específica de Matemática na etapa do Ensino Médio prevendo que os alunos devem ser capazes de investigar "e estabelecer conjecturas [...], identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas" (BRASIL, 2018, p. 540). Portanto, o raciocínio matemático começa a ganhar relevância no ensino da Matemática no Brasil, a considerar os documentos curriculares.

Sobre o raciocínio matemático, conclui-se que diversos pesquisadores consideram importante o seu desenvolvimento nas aulas de Matemática (BRODIE, 2010; JEANNOTTE; KIERAN, 2017; LANNIN: ELLIS: ELLIOT, 2011; MATA-PEREIRA; PONTE, 2018; MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018; TREVISAN; ARAMAN, 2021). A partir do estudo dos trabalhos sobre o tema, foi possível perceber que há diversas visões sobre o raciocínio matemático (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Contudo, compreende-se que o raciocínio matemático é, de forma geral, fazer inferências de forma justificada. Ou seja, é utilizar informação matemática já conhecida para, de maneira justificada, obter novas informações matemáticas (ARAMAN; SERRAZINA, 2020; MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018; PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2020).

Também se concluiu que é possível olhar para o raciocínio matemático de duas maneiras, que são o aspecto estrutural e o aspecto processual (JEANNOTTE; KIERAN, 2017), este último mais explorado neste trabalho. O aspecto processual, como o próprio nome indica, lista os processos do raciocínio matemático. Novamente, por vezes há dissonância entre os autores sobre quais são os processos do raciocínio matemático. Nesta pesquisa foram considerados os seguintes processos: comparação, classificação, identificação de padrões, conjectura, generalização, justificação, prova, demonstração e exemplificação. Para a pesquisa, os processos mais relevantes, por serem os esperados a serem mobilizados pelos alunos nas resoluções das tarefas, foram a identificação de padrões, a conjectura, a generalização, a exemplificação e a justificação.

Além disso, há dois aspectos importantes para a promoção do raciocínio matemático. Um deles refere-se à tarefa escolhida, já que sua natureza é essencial para que os alunos raciocinem matematicamente (BRODIE, 2010). Nesse sentido, as tarefas de exploração foram percebidas como aquelas com potencial para que os alunos mobilizassem processos do raciocínio matemático durante a sua resolução, já que são mais abertas e os alunos podem começar a explorá-las sem um planejamento inicial bem definido, como seria em um problema (PONTE, 2005).

O segundo aspecto é o papel do professor durante a resolução da tarefa. Apenas a escolha de boas tarefas não é suficiente para a promoção do raciocínio matemático dos estudantes, o professor também exerce um papel fundamental (BRODIE, 2010). O professor deve auxiliar os alunos durante a resolução da tarefa, mas não pode dar as respostas. A descoberta e a construção do conhecimento são parte do aluno (PONTE, 2005). Uma boa postura do professor é a de colocar questões que façam com que os alunos comparem, verifiquem, busquem convencê-lo de suas respostas, sempre por meio da justificação (BRODIE, 2010). Visto isso, foram escolhidas as tarefas para a coleta de dados. Com base na teoria estudada, foram selecionadas tarefas com potencial para a mobilização de processos de raciocínio matemático e buscou-se, no momento das resoluções, colocar questões que levassem os alunos a uma necessidade por raciocinar matematicamente.

Desse modo, é pertinente resgatar o objetivo principal desta pesquisa, que era *identificar quais processos de raciocínio matemático são mobilizados por alunos do Ensino Fundamental ao resolverem tarefas de Matemática*. Considera-se que tal objetivo foi alcançado, como é possível perceber pelos processos de raciocínio matemático elencados anteriormente. Em geral, a conjectura foi o primeiro processo mobilizado pelos estudantes, principalmente na tarefa do 6º ano. A partir da conjectura, surgia a necessidade por outros processos, ainda que os alunos não sentissem uma necessidade natural pela justificação, por exemplo. À medida que outros processos de raciocínio matemático eram mobilizados, a conjectura era refinada e se tornava, por vezes, uma generalização. Os alunos também recorreram à exemplificação nessa tarefa.

Já no 7º ano, um dos processos que surgiu logo foi a identificação de padrões. Pela natureza da tarefa, os alunos logo percebiam que o número de pontos aumentava de 4 em 4 a cada figura. Sabendo disso, buscavam determinar o número de pontos de outros termos como o 6 e o 37 e, nesse último, mobilizavam uma generalização empírica. Devido à maneira como abordaram a tarefa e também o modo como eu a conduzi, os estudantes generalizaram baseados em casos particulares.

Diante disso, e após a escrita deste trabalho, foi possível perceber a importância do desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes. Os principais desafios para o professor são: encontrar tarefas para os mais variados conteúdos da Matemática previstos para ser ensinados na escola; e conseguir conduzir a tarefa com os estudantes, sem deixar com que algum aluno fique sem saber o que fazer, mas também colocando questionamentos que não limitem o raciocínio matemático e não reduza o nível da tarefa.

Pessoalmente, como pesquisador, sinto que me apropriei um pouco mais da teoria do raciocínio matemático. Por consequência, percebo que sei melhor que questionamentos fazer aos alunos e em quais momentos de forma que eles raciocinem sobre a tarefa que estão fazendo. Ainda assim, sempre há dúvidas e incertezas. A cada leitura que fazia dos textos da literatura e dos dados da pesquisa, surgiam novas interpretações dos processos de raciocínio matemático.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo. Investigações em Geometria na Sala de Aula. In: VELOSO, Eduardo; FONSECA, Helena; PONTE, João P.; ABRANTES, P. (Orgs.). **Ensino da Geometria no virar do milênio**. Lisboa, GRAFIS, 1999, p. 51-62.

ALISEDA, Atocha. Mathematical reasoning Vs. Abductive reasoning: a structural approach. **Synthese**, v. 134, n. 1-2, 2003.

ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes; PONTE, João. "Eu perguntei se o cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educ. Matem. Pesq.**, v. 21, n. 2, 2019.

ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes; PONTE, João. Raciocínio Matemático nos Primeiros Anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. **Bolema**, v. 34, n. 67, 2020.

ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes. Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade. **RPEM**, v. 9, n. 18, 2020.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª séries):** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries):** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio):** Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ (Ensino Médio)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2002.

BRODIE, Karin. **Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms**. Nova Iorque: Springer, 2010.

BRUNHEIRA, Lina. **O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial dos professores dos Primeiros Anos**. 2019. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2019.

BRUNHEIRA, Lina; PONTE, João P. Justificando Generalizações Geométricas na Formação Inicial de Professores dos Primeiros Anos. **Bolema**, v. 33, n. 63, 2019.

CAÑADAS, María et al. The Conjecturing Process: Perspectives in Theory and Implications in Practice. **Journal of Teaching and Learning**, v. 5, n. 1.

CARNEIRO, Luís F.; ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes. Processos do Raciocínio Matemático Mobilizados por Estudantes de 6º Ano do Ensino Fundamental ao Resolverem uma Tarefa de Geometria. **JIEEM**, v. 13, n. 1, 2020.

CARRAHER, David; MARTINEZ, Mara; SCHLIEMANN, Analúcia. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM**, v. 40, n. 1, 2008.

CHIMONI, Maria; PITTA-PANTAZI, Demetra; CHRISTOU, Constantinos. Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. **Educ Stud Math**, v. 98, n. 1, 2018.

GALBRAITH, Peter. Mathematics as Reasoning. **The Mathematics Teacher**, v. 88 n. 5, 1995.

HANNA, Gila. Mathematical Proof, Argumentation and Reasoning. In: LERMAN, Stephen (Org.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Springer, 2014.

HANNA, Gila. Proof, Explanation and Exploration: an overview. **Educ Stud Math**, v. 44, n. 1-3, 2000.

JEANNOTTE, Doris; KIERAN, Carolyn. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educ Stud Math**, v. 96, n. 2, 2017.

LANNIN, John; ELLIS, Amy; REBEKAH, Elliott. **Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten-Grade 8**. Reston: NCTM, 2011.

LANNIN, John. Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 7, n. 3, 2005.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2018.

MATA-PEREIRA, Joana. **As ações do professor para promover o raciocínio matemática na sala de aula**. 2018. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2018.

MATA-PEREIRA, Joana. **O raciocínio matemático em alunos do 9º ano no estudo dos números reais e inequações**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João. Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. **Educ Stud Math**, v. 96, n. 2, 2017.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, v. 32, n. 62, 2018.

MAZZI, Lucas; AMARAL-SCHIO, Rúbia. Diferentes tipos de raciocínio na Geometria dos Livros Didáticos de Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 13, n. 32, 2020.

MEYER, Michael. Abduction – A logical view for investigating and initiating processes of discovering mathematical coherences. **Educ Stud Math**, v. 74, n. 2, 2010.

MORAIS, Cristina; SERRAZINA, Lurdes; PONTE, João. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostering) Transformations of Rational Number Representations. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 4, 2018.

MOREIRA, Plinio; DAVID, Maria. Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: some conflicting elements. **J Math Teacher Educ**, v. 11, n. 1, 2008.

MOREIRA, Plinio; DAVID, Maria. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetiké**, v. 11, n. 19, 2003.

NCTM. **Focus in High School Mathematics:** Reasoning and Sense Making. Reston: NCTM, 2009.

NCTM. **Principles to Actions:** Ensuring Mathematical Success for All. Reston: NCTM, 2014.

OCDE. **Conhecimentos e habilidades em Ciências, Leitura e Matemática:** PISA 2006 – Estrutura da Avaliação. São Paulo: Moderna, 2007.

PARANÁ. Secretaria Educação e do Esporte. **Referencial Curricular do Paraná:** princípios, direitos e orientações. Curitiba: SEED, 2018.

PEDEMONTE, Bettina. How can the relationship between argumentation and proof be analysed? **Educ Stud Math**, v. 66, n. 1, 2007.

PONTE, João. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005, p. 11-34.

PONTE, João; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

PONTE, João; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas em sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

PONTE, João; MATA-PEREIRA, Joana; HENRIQUES, Ana. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. **Práxis Educativa**, v. 7, n. 2, 2012.

PONTE, João; QUARESMA, Marisa; BRANCO, Neusa. Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. **Educação Matemática em Foco**, v. 1, n. 1, 2011.

PONTE, João; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação e Matemática**, v. 2, n. 156, 2020.

RIVERA, Ferdinand; BECKER, Joanne. Algebraic reasoning through patterns. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 15, n. 4, 2009.

RIVERA, Ferdinand; BECKER, Joanne. Formation of Pattern Generalization Involving Linear Figural Patterns Among Middle School Students: Results of a Three-Year Study. In:

RIVERA, Ferdinand. On the pitfalls of abduction: complicities and complexities in patterning activity. **For the Learning of Mathematics**, v. 28, n. 1, 2008.

STYLIANIDES, Gabriel. An analytic framework of reasoning-and-proof. **For the Learning of Mathematics**, v. 28, n.1, 2008.

STYLIANIDES, Gabriel. Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 11, n. 4, 2009.

TREVISAN, André; ARAMAN, Eliane. Processos de Raciocínio Matemático Mobilizados por Estudantes de Cálculo em Tarefas Envolvendo Representações Gráficas. **Bolema**, v. 35, n. 69, 2021.

VIEIRA, Anna; TREVISAN, André; BALDINI, Loreni. Ações de professores na elaboração e implementação de tarefas envolvendo conceitos algébricos. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 3, 2019.

VIEIRA, William; RODRIGUES, Margarida; SERRAZINA, Lurdes. O conhecimento de futuros professores sobre os processos de raciocínio matemático antes e depois de uma experiência de formação. **Quadrante**, v. 29, n. 1, 2020.

APÊNDICE A

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Pró–Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Câmpus Londrina/Cornélio Procópio

SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO PARA PESQUISA

Tendo em vista o desenvolvimento da pesquisa sobre o Raciocínio Matemático de Estudantes da Educação Básica, sob responsabilidade de Luís Felipe Gonçalves Carneiro, telefone (43)99659-6056, estudante do Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática, UTFPR, Câmpus Londrina/Cornélio Procópio, gostaria de contar com sua autorização para a coleta de dados para o desenvolvimento da referida pesquisa. A participação dos alunos se dará com o desenvolvimento (resolução) de atividades matemáticas escritas e gravação de áudio.

Esclareço que a participação é voluntária, podendo o aluno: recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo ao aluno em sua turma regular. Esclarecemos, também, que as informações recolhidas durante o período de pesquisa, serão utilizadas somente para os fins de pesquisa acadêmica e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade.

Autorização

Eu, ____, tendo sido devidamente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo em autorizar coleta de dados para fins de pesquisa com a participação dos alunos do Colégio____ ______. Autorizo, por meio do presente termo, que o professor Luís Felipe Gonçalves Carneiro, telefone (43)99659-6056, estudante do Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática, UTFPR, Câmpus Londrina/Cornélio Procópio, utilize integralmente ou em partes os registros escritos para fins de pesquisa acadêmica, podendo divulgá-los em publicações científicas, com a condição de que estará garantido o direito ao anonimato.

Assinatura:____

Data:_______________________

ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Anexo A - Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do Ensino Fundamental
Título do Produto/Processo Educacional	Jornal *A Conjectura*
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Luís Felipe Gonçalves Carneiro
	Orientador/Orientadora: Eliane Maria de Oliveira Araman
	Outros (se houver):
Data da Defesa	23/09/2021

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); *L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática* (trata da análise e do	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (x) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *Apenas um item pode ser marcado. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	(X) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.	( ) Local ( ) Regional (X) Nacional ( ) Internacional Justificativa (*obrigatória*): O PE fica disponível no repositório da Universidade Tecnológica Federal do Paraná com acesso livre para qualquer pessoa. ____
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). *Apenas um item pode ser marcado.	( ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.

Área impactada *<u>Apenas um item pode ser marcado</u>.	( ) Econômica; ( ) Saúde; (X) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; ( ) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. <u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u>	(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (X) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (X) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. (X) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	**Instituição**
Maria de Lurdes Serrazina	Universidade de Lisboa
Marcia Aguiar	UFABC
André Luis Trevisan	UTFPR
Eliane Maria de Oliveira Araman	UTFPR