ppgmat

UNIVERSIDADE TECNÓLOGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ERIKA REGINA SANTANA DA SILVA PEREIRA

TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

LONDRINA
2021

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ERIKA REGINA SANTANA DA SILVA PEREIRA

TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

WRITTEN PRODUCTION ANALYSIS TASKS FOR TEACHING COMBINATORY ANALYSIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jader Otavio Dalto.

LONDRINA

2021

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

ERIKA REGINA SANTANA DA SILVA

TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 24 de Setembro de 2021

Prof Jader Otavio Dalto, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Edilaine Regina Dos Santos, Doutorado - Universidade Estadual de Londrina (Uel)

Prof.a Marcele Tavares, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 24/09/2021.

Dedico este trabalho aos meus filhos, João Pedro e Felipe Henrique, pelos momentos de ausência.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me capacitar e colocar as oportunidades e as pessoas que me ajudaram a conseguir chegar nesse momento.

A meus pais, Antonia e Sebastião, (ambos *in memorian*) por me educarem, investirem nos meus estudos, e por terem sido exemplos de caráter, honestidade e persistência.

À minha irmã, Fabiangela, e a meu cunhado, Eduardo, por ficarem com meus filhos quando era preciso.

À amiga Karina Pessoa, por me incentivar a continuar meus estudos.

Aos meus filhos, pelos momentos de ausência para meus estudos.

Aos colegas da turma 2019 do PPGMAT, antes da pandemia, pelo companheirismo e todos os momentos de correria, e também de descontração, que vivemos juntos. Principalmente à Silmara, pelas madrugadas de estudo, e Andreia, Wanderson, Roberta, Rafaela, Renata, Silmara, Márcio, Luis Felipe, Paulo Jorge, João Paulo e Robson, pelos momentos compartilhados após as aulas.

Ao meu querido orientador Jader, pela paciência, compreensão e orientação durante toda execução deste trabalho.

Às professoras da banca, Edilaine e Marcele, por todas as contribuições para o aperfeiçoamento deste trabalho e pelo seu tempo dedicado a isso.

Aos meus colegas do grupo de orientandos do professor Jader, por todas as contribuições, em especial a Fernando, Iara, Milene, Dayane e Nádia.

Aos colegas Roberto e Maristela pelas correções de Língua Portuguesa e Inglês respectivamente.

“Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.”

PAULO FREIRE

SANTANA, Erika Regina da Silva Pereira. **Tarefas de Análise da Produção Escrita para o ensino de Análise Combinatória**. 2021. 84 páginas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

RESUMO

Este trabalho se refere a uma pesquisa de mestrado em Ensino de Matemática, que teve por objetivo investigar a utilização da Análise da Produção Escrita como estratégia de ensino para aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória para alunos do Ensino Médio. Na pesquisa, a Análise da Produção Escrita foi utilizada enquanto estratégia de ensino do conteúdo de Análise Combinatória para alunos do Ensino Médio a partir de Tarefas de Análise da Produção Escrita. A elaboração e aplicação das tarefas se deram em turmas de alunos que cursam o 2º ano do Ensino Médio de escolas públicas situadas no município de Londrina – 6 turmas. O diário de Campo da pesquisadora e o conjunto de produções dos estudados formam o conjunto de dados a serem analisados. Para o desenvolvimento dessa investigação houve três momentos, o primeiro de coleta de produções escritas de alunos por meio da resolução de listas de tarefas, o segundo momento de elaboração das Tarefas de Análise da Produção Escrita a partir das resoluções coletadas e o terceiro momento de ensinar Análise Combinatória utilizando as tarefas elaboradas. Os resultados da análise mostram que houve aprendizagem dos principais conceitos envolvidos no ensino de Análise combinatória ao utilizar como estratégia de ensino as Tarefas de Análise da Produção Escrita. Esperamos que esse trabalho possa contribuir com professores e alunos no processo de ensino e de aprendizagem de Análise Combinatória e para Educação Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática; Análise Combinatória; Análise da Produção Escrita; Estratégia de ensino, Tarefa de Análise da Produção Escrita.

SANTANA, Erika Regina da Silva Pereira. **Written Production Analysis tasks for teaching Combinatory Analysis**. 2021. 84 páginas. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina. 2021.

ABSTRACT

This work refers to a master's research in Mathematics Teaching, which aims to investigate the use of Written Production Analysis as a teaching strategy for learning Combinatorial Analysis content for high school students. In the research, the Written Production Analysis was used as a teaching strategy of the Combinatorial Analysis content for high school students from Written Production Analysis Tasks. The elaboration and application of the tasks took place in a class of students who are attending the 2nd grade of high school in public schools located in the city of Londrina – 6 classes in all. The researcher's field diary and the set of productions by those students form the set of data to be analyzed. For the development of this investigation, we had three moments, the first one is collecting students' written productions through the resolution of task lists, the second moment which is the elaboration of the Written Production Analysis Tasks from the collected resolutions and the third moment of teaching Combinatorial Analysis using the elaborated tasks. The results of the analysis show that the main concepts involved in the teaching of Combinatorial Analysis were learned when using the Written Production Analysis Tasks as a teaching strategy. We aim to this work contribute to teachers and students in the teaching and learning process of Combinatorial Analysis and for Mathematics Education.

Keywords: Mathematics Education; Combinatorial analysis; Analysis of written production; Teaching strategy; Written Production Analysis Task.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Primeira Tarefa de Análise da Produção Escrita elaborada..................................20

Figura 2: Tarefas propostas a partir da primeira questão...21

Figura 3: Tarefas propostas a partir da segunda questão..21

Figura 4: Tarefas propostas a partir da terceira questão...22

Figura 5: TAPE 1 elaborada por Minato..24

Figura 6: TAPE 2 elaborada por Minato..25

Figura 7: TAPE 1...31

Figura 8: TAPE 2...32

Figura 9:TAPE 3..33

Figura 10:TAPE 4..34

Figura 11:TAPE 5..35

Figura 12: TAPE 6...36

Figura 13: TAPE 7...37

Figura 14: TAPE 8...37

Figura 15: TAPE 9...38

Figura 16: TAPE 10...39

Figura 17: TAPE 11...40

Figura 18: TAPE 12...41

Figura 19: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 1............................,.....44

Figura 20: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 2..................................46

Figura 21: Resolução da aluna Ana as situações apresentadas no trabalho 1.........................47

Figura 22: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 3...................................48

Figura 23: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 4...................................49

Figura 24: Troca de mensagens entre a professora e Ana...50

Figura 25: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 5...................................51

Figura 26: Resolução da aluna Ana aos cálculos propostos no trabalho 2............................52

Figura 27: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 6...................................53

Figura 28: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 7...................................54

Figura 29: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 8...................................55

Figura 30: Resoluções da aluna Ana as situações apresentadas no trabalho 3.......................56

Figura 31: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 9...................................58

Figura 32: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 10.................................59

Figura 33: Resoluções da aluna Ana as situações apresentadas no trabalho 4 59
Figura 34: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 11...................................60
Figura 35: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 12...................................61
Figura 36: Resoluções da aluna Ana as situações apresentadas no trabalho 5........................63

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 15

2. 1 A ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA E ALGUMAS PRÁTICAS 16

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 26

3.1 PRIMEIRO MOMENTO: COLETA DE PRODUÇÕES ESCRITAS 26

3.2 SEGUNDO MOMENTO: ELABORAÇÃO DAS TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA (TAPE) 27

3.3 TERCEIRO MOMENTO: ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DAS TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA (TAPE) 28

4 RESULTADOS E ANÁLISES 30

4.1 RESULTADOS DO PRIMEIRO MOMENTO: COLETA DE PRODUÇÕES ESCRITAS 30

4.2 RESULTADOS DO SEGUNDO MOMENTO: ELABORAÇÃO DAS TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA (TAPE) 30

4.3 RESULTADOS DO TERCEIRO MOMENTO: ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DAS TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA (TAPE) 43

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 64

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 67

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)..........69

ANEXO B – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE).............71

ANEXO C – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL.....73

APÊNDICE A – TRABALHO 1 – PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO…......……...............76

APÊNDICE B – TRABALHO 2 – CÁLCULO DE FATORIAL…………..………...…79

APÊNDICE C – AULA ONLINE – GENERALIZAÇÃO DE FATORIAL........................80

APÊNDICE D – TRABALHO 3 – PERMUTAÇÃO...81

APÊNDICE E – TRABALHO 4 – ARRANJO..82

APÊNDICE F – TRABALHO 5 –AGRUPAMENTOS...83

1 INTRODUÇÃO

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (BRASIL, 1997) a Matemática contribui para o desenvolvimento da atividade humana e favorece o desenvolvimento da capacidade de expressão, da imaginação e do raciocínio. Apesar de a importância da disciplina de Matemática estar nos currículos escolares juntamente às demais disciplinas, ela é algumas vezes considerada de difícil compreensão em razão de muitos alunos apresentarem desinteresse e grande dificuldade de aprendizagem dos conteúdos dessa disciplina.

Muitas pesquisas são desenvolvidas no sentido de entender como o processo de ensino e de aprendizagem dos conteúdos matemáticos pode ser aperfeiçoado. Algumas pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação – GEPEMA – da Universidade Estadual de Londrina, por exemplo, mostram informações sobre a aprendizagem dos alunos por meio da Análise da Produção Escrita.

Inicialmente, algumas das compreensões de Análise da Produção Escrita no âmbito do GEPEMA são voltadas aos conhecimentos apresentados ou não pelos alunos que sirvam ao processo avaliativo. Dentre os trabalhos desenvolvidos pelo GEPEMA, pode-se observar em Dalto (2007) que a Análise da Produção Escrita é compreendida como uma prática investigativa, a qual auxilia compreender os conhecimentos que os alunos possuem. Em Santos (2008), a Análise da Produção Escrita é compreendida como um caminho que pode ser adotado para implementar a avaliação como prática de investigação, a fim de compreender os modos de pensar dos alunos.

Entre os trabalhos desenvolvidos no GEPEMA, destacamos aqui a tese de doutorado de Santos (2014) que, depois de investigar alguns trabalhos desenvolvidos no grupo, conclui que a Análise da Produção Escrita, além de ser utilizada no processo avaliativo, pode também ser considerada como Estratégia de Ensino. Inspirada nas ideias de Santos (2014), Cardoso (2017) desenvolveu algumas práticas de análise da produção escrita que foram aplicadas com alunos da Educação de Jovens e Adultos.

Após essa primeira experiência de Cardoso (2017), Doneze (2019), Pereira (2019) e Pereira, Doneze e Dalto (2018) desenvolveram trabalhos com atividades que utilizam a Análise da Produção Escrita como estratégia de Ensino. Eles desenvolveram um curso destinado a professores e alunos de licenciatura em Matemática que trabalhava com a elaboração de Tarefas de Análise da Produção Escrita. Esses autores foram os primeiros a definir Tarefas de Análise da Produção Escrita da forma como será adotada nesse trabalho.

Minato (2019) também desenvolveu seu trabalho nesse sentido, elaborando Tarefas de Análise da Produção Escrita para o ensino de Progressões Geométricas.

O quadro seguinte resume os trabalhos que utilizaram da Análise da Produção Escrita como estratégia de ensino no âmbito do Programa de Pós-graduação em ensino de Matemática (PPGMAT).

Trabalhos desenvolvidos sobre Análise da Produção Escrita no âmbito do PPGMAT

Trabalho	Objetivo
Cardoso (2017) Dissertação Título: Análise da produção escrita em Matemática: quatro histórias da construção de uma proposta de ensino para a educação de jovens e adultos.	Relatar a construção de uma proposta de ensino que utiliza a análise da produção escrita como um fio condutor nas aulas de Matemática, baseada em Santos (2014), para ensinar o conteúdo de Progressão Aritmética na Educação de Jovens e Adultos (EJA).
Doneze (2019) Dissertação Título: A construção de tarefas de análise da produção escrita para o ensino e a aprendizagem de matemática.	Analisar o processo de construção de Tarefas de Análise da Produção Escrita, bem como caracterizar tal processo.
Pereira (2019) Dissertação Título: Conhecimentos mobilizados por graduandos e professores que ensinam matemática em um curso de formação sobre tarefas de análise da produção escrita.	Investigar que conhecimentos são mobilizados por graduandos e professores em um ambiente de discussão e construção de Tarefas de Análise da Produção Escrita, visando refletir sobre a prática profissional do professor que ensina matemática.
Minato (2019) Trabalho de Conclusão de Curso Título: Tarefas de análise da produção escrita para o ensino de Progressões geométricas.	Construir tarefas de análise da produção escrita para uma proposta de ensino do conteúdo de progressão geométrica.

Fonte: Autora

A presente pesquisa, do mesmo modo, investiga a Análise da Produção Escrita como estratégia de ensino do conteúdo de Análise Combinatória para alunos do Ensino Médio por meio das Tarefas de Análise da Produção Escrita. Para alcançar este objetivo, foi desenvolvida uma pesquisa qualitativa que consiste na elaboração e utilização de Tarefas de Análise da Produção Escrita no ensino deste conteúdo.

A pesquisa ocorreu em três momentos distintos. O primeiro momento foi a coleta de produções escritas no último trimestre de 2019 em quatro turmas do 2º ano do Ensino Médio de duas escolas públicas do município de Londrina. Em seguida, o segundo momento no início de 2020 em que foram produzidas as Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE) e o terceiro momento que foi o ensino de Análise Combinatória por meio das TAPE elaboradas que aconteceu no primeiro e segundo trimestres de 2020, inicialmente com 4 (quatro) aulas presenciais e depois no ensino remoto com as mesmas turmas.

O relatório dessa pesquisa encontra-se estruturado em cinco capítulos. O primeiro capítulo compreende a introdução do estudo, com uma breve descrição de como o trabalho foi elaborado. No segundo capítulo, são apresentados os referenciais teóricos que deram os aportes teóricos que sustentam o desenvolvimento da pesquisa. O terceiro capítulo aborda os procedimentos metodológicos. No quarto capítulo, são apresentados resultados e análises de alguns dos dados coletados na pesquisa. Após os capítulos, são apresentadas algumas considerações para a conclusão do trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Ensinar não é uma tarefa fácil. Para os educadores sempre existe a preocupação com a melhor estratégia para desenvolver cada conteúdo, os melhores exemplos de cada conceito para tentar não deixar dúvida para os alunos, dentre tantas outras preocupações que permeiam o ensinar, como currículo, cumprir conteúdos, conhecer os alunos, suas defasagens e dificuldades, retomar conteúdos necessários e avaliar.

Em razão de todas essas dúvidas, o planejamento é um momento fundamental para o educador se organizar, se preparar, deixar alternativas de resolução e esquematizar o seu roteiro e sua ordem de ensino, desde as estratégias até a avaliação, as ferramentas digitais que serão utilizadas (no caso do ensino remoto) de acordo com os prazos estipulados no calendário escolar para finalização de trimestre e entrega de notas. A escolha das tarefas que serão trabalhadas no desenvolvimento dos conteúdos também é essencial, pois são elas que guiarão o ensino de tal conteúdo.

O documento estadunidense Normas Profissionais para o Ensino de Matemática (NCTM, 1991/1994) tem grande importância para o ensino de Matemática e traz orientações para o currículo. Esse documento apresenta a definição de tarefa como projetos, questões, problemas, construções, aplicações e exercícios em que os alunos se envolvem e favorecem contextos para o seu desenvolvimento matemático.

Alguns autores, como Ponte (2005, 2014) e Watson et al. (2013), definem tarefa ou se preocupam em distinguir tarefa de atividades. Ponte (2014) aborda tarefas como suporte fundamental do ensino-aprendizagem e discute os conceitos de tarefa e atividade por serem confundidos nos manuais escolares e na linguagem do cotidiano. Uma atividade pode ser composta de inúmeras tarefas, cada tarefa refere-se aos objetivos que se pretende em cada ação de uma atividade, enquanto que atividade está relacionada ao que o aluno faz em um contexto específico (PONTE, 2005, 2014; WATSON et al. 2013).

Para Ponte (2014), tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e aprendizagem da Matemática, pois norteiam o desenvolvimento da capacidade de compreensão.

Nessa perspectiva, Gafanhoto e Canavarro destacam:

> Uma das mais importantes decisões que o professor realiza regularmente na sua atividade de ensino incide sobre as tarefas que propõe na aula. É em torno das tarefas que as aulas se desenrolam; elas são o ponto de partida para as experiências de aprendizagem dos alunos. (GAFANHOTO; CANAVARRO, 2008, p. 122).

Dessa forma, é notória a importância da escolha das tarefas propostas aos alunos e a função dessas tarefas no ensino e aprendizagem dos conteúdos. Além disso, a diversidade nas tarefas propostas também é fundamental para propiciar aos alunos diferentes experiências que convergirão para a sua aprendizagem. A esse respeito, Ponte (2005) ressalta a existência de inúmeras categorias de tarefas matemáticas, como problemas, exercícios, investigações, projetos, tarefas de modelação e jogos. Ferreira e Buriasco (2015) enfatizam que essas tarefas podem ser apresentadas em diversos contextos, como situações realísticas, factuais, rotineiras ou estritamente por meio de uma linguagem Matemática.

Um dos tipos de tarefas que pode ser proposto aos alunos e que pode mostrar muito sobre o que eles já conhecem do conteúdo ou o que ainda precisam entender são as Tarefas de Análise da Produção Escrita em que os alunos irão analisar e comparar resoluções de tarefas referentes ao conteúdo abordado, se posicionar quanto à correção da resolução em certa ou errada, identificar os possíveis erros, dentre outros aspectos.

Antes de apresentar o conceito de Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE), é necessário apresentar alguns elementos sobre como a Análise da Produção Escrita foi investigada ao longo dos últimos anos até culminar na ideia de TAPE para o ensino de Matemática.

2. 1 A ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA E ALGUMAS PRÁTICAS

No âmbito do GEPEMA, a Análise da Produção Escrita foi utilizada no desenvolvimento de vários trabalhos como uma prática investigativa que possibilita ao professor conhecer informações sobre a aprendizagem do aluno, a fim de repensar sua prática ou fazer intervenções pontuais. Além disso, possibilita também ao aluno analisar o seu processo de aprendizagem.

Entre os anos de 2005 a 2010 vários dos trabalhos produzidos por esse grupo investigaram a temática de Análise da Produção Escrita (APE). Inicialmente, as investigações acerca da Análise da Produção Escrita convergiam para uma perspectiva de estratégia de Avaliação. De 2005 a 2007 os trabalhos do GEPEMA pesquisavam sobre como os alunos lidavam com as questões abertas de Matemática da AVA/2002 – Avaliação Estadual de Rendimento Escolar do Paraná.

Outros trabalhos do GEPEMA de 2008 a 2010 foram voltados à produção escrita dos alunos do Ensino Fundamental, Médio, da graduação e professores quanto a resolução de questões não rotineiras do PISA – Programme for Internacional Student Assessment. Todos os trabalhos desenvolvidos pelo GEPEMA até o momento utilizaram a Análise da Produção Escrita como estratégia de avaliação em matemática.

Santos (2014), em sua tese de doutorado intitulada "Análise da produção escrita em Matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino", teve por objetivo investigar a utilização da Análise da Produção Escrita nas aulas de Matemática. Inicialmente, a autora caracteriza a Análise da Produção Escrita a partir dos trabalhos do GEPEMA, e afirma que a Análise da Produção Escrita em Matemática possibilita alternativas para a (re)orientação da avaliação escolar e (re)orientação pedagógica, podendo ser considerada como uma estratégia de avaliação. Santos (2014) também levanta outros questionamentos acerca da Análise da Produção Escrita, como o seu papel nas aulas de Matemática na perspectiva da reinvenção guiada e se a Análise da Produção Escrita pode ser considerada um método, estratégia ou procedimento de ensino. Considerando essa perspectiva de ensino, a pesquisadora questiona a respeito da dinâmica de sala de aula, sobre o papel do aluno e do professor.

A autora, ao investigar alguns trabalhos desenvolvidos no grupo, conclui que a Análise da Produção Escrita pode ser utilizada como Estratégia de Ensino. Segundo Santos (2014), portanto,

> [...] a análise da produção escrita como estratégia de ensino pode ser utilizada para auxiliar o professor na obtenção de informações sobre os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, as quais posteriormente podem subsidiar a elaboração de intervenções, comentários e/ou questionamentos na produção do aluno de modo que esse possa, sob orientação do professor, desenvolver ferramentas Matemáticas, isto é, ser autor de seu próprio conhecimento matemático (SANTOS, 2014, p. 63).

Seguindo as ideias apresentadas por Santos (2014), Cardoso (2017) desenvolveu algumas práticas de análise da produção escrita, que subsidiaram uma proposta de ensino de Progressões Aritméticas na Educação de Jovens e Adultos. Inicialmente, Cardoso (2017) realizou algumas práticas com Análise da Produção Escrita em Matemática, pautadas em orientações acerca da Análise da Produção Escrita na perspectiva dos trabalhos do GEPEMA. Ela utilizou a Análise da Produção Escrita como fio condutor da aula, com a intenção de fazer com que os alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental resolvessem uma expressão com fração, corrigindo a resolução do colega e atribuindo-lhe nota. De acordo com a autora, inicialmente, os alunos ficaram um pouco perdidos, depois, após a explicação e a sugestão de que eles observassem como os colegas haviam feito, eles tentaram pensar como tinham chegado ao que estava escrito, partindo para a resolução.

Cardoso (2017) conclui que, quando o aluno tem contato com o que o próprio colega realizou, sente-se motivado a fazer, pois se considera igual a ele. Uma aluna sugeriu que a professora colocasse na prova escrita uma tarefa como a que foi feita por eles. Assim, Cardoso (2017) conclui também que a Análise da Produção Escrita pode ajudar os alunos a resolverem tarefas, relembrando procedimentos que resolvam o que foi proposto.

Nessa prática, a prova escrita foi aplicada por outros professores e os alunos não puderam tirar dúvidas quanto à compreensão do que deveria ser feito na tarefa, apesar de Cardoso (2017) ter orientado em aulas anteriores como deveria ser esse procedimento. A autora conclui com essa prática que esse tipo de tarefa modifica a dinâmica da aula de Matemática, colocando o aluno em uma posição de análise de uma produção escrita de outro aluno em uma tarefa.

Após essas três práticas, Cardoso (2017) elabora duas versões de uma proposta para alunos do Ensino Médio da EJA (Educação de Jovens e Adultos) sobre Progressão Aritmética. Para essa proposta, as resoluções escritas foram coletadas com alunos do 3º ano do Ensino Médio resolvendo uma lista com 18 tarefas. Foi aplicada a primeira proposta de ensino para EJA e Cardoso (2017) elaborou um quadro com algumas considerações a respeito da dinâmica da aula tendo em vista a perspectiva da utilização da proposta de ensino.

Entre suas considerações estão que a proposta possibilitou aos alunos criar suas próprias estratégias de resolução, foram relembrados alguns conceitos para esclarecer como responder a alguns questionamentos. Depois disso, Cardoso (2017) elabora uma segunda versão com as modificações que a autora realizou na primeira versão, e apresenta uma proposta de ensino para professores utilizarem a Análise da Produção Escrita como fio condutor das aulas para o ensino de Progressões aritméticas.

A partir dessa primeira experiência dessa autora, Pereira, Doneze e Dalto (2018) desenvolveram um trabalho com atividades que utilizam a Análise da Produção Escrita como possibilidade de ensino e apresentam uma primeira definição de Tarefas de Análise da Produção Escrita -TAPE. Para esses autores, TAPE é definida como um instrumento que surge

> [...] de uma produção escrita previamente analisada pelo professor, de modo que sua construção tenha sido no cerne desta produção escrita, tudo nele(a) proposto esteja envolto ao objetivo de se analisar tal produção escrita, norteando o ensino e a aprendizagem de determinado conteúdo, configurando-se como uma tarefa de questionamentos, reflexões, de comparação e discussão quanto aos diferentes pontos de vista e procedimentos que permitem solucionar as situações (PEREIRA; DONEZE; DALTO, 2018, p. 240).

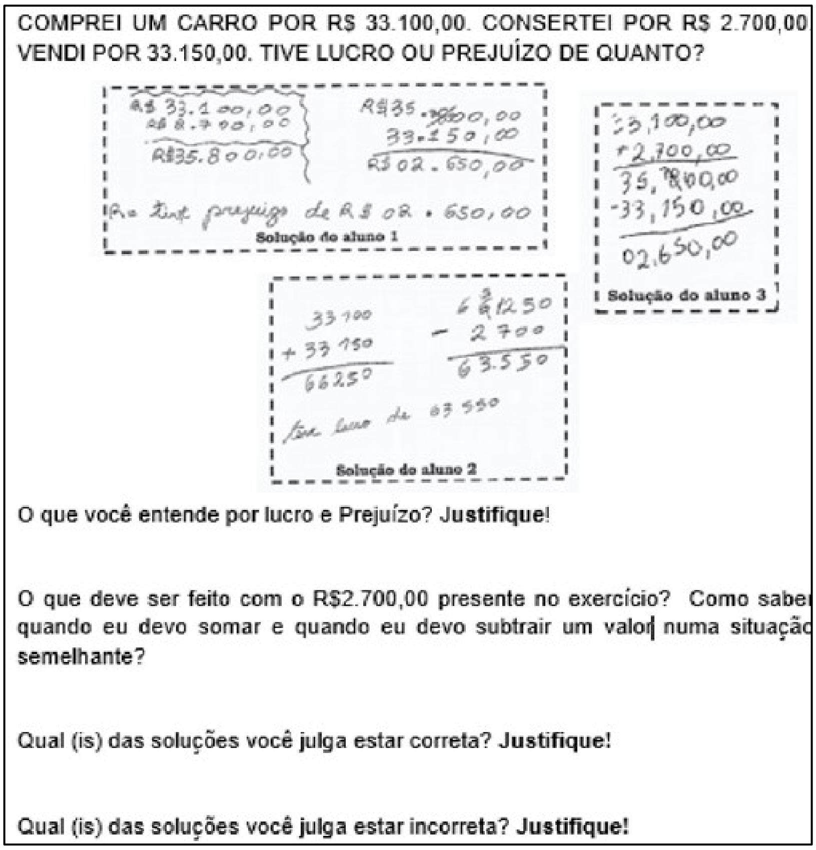
Esse trabalho foi desenvolvido em uma turma dos anos finais do Ensino Fundamental na modalidade EJA de uma escola pública de Londrina, com 12 (doze) alunos regularmente presentes, de faixa etária entre 15 (quinze) e 67 (sessenta e sete) anos. As aulas ocorriam em dois encontros semanais, às segundas e quartas-feiras, com duração de 4 (quatro) horas/aulas por encontro. Os alunos haviam iniciado os estudos sobre a identificação de sentenças matemáticas expressas por uma igualdade.

As produções escritas presentes na tarefa apresentada à turma de EJA contaram com as contribuições de Cardoso e Dalto (2016; 2017b); Cardoso, Pereira e Dalto (2017), apresentando uma produção escrita detalhada, com procedimentos de resolução, com informações para serem analisadas pelos alunos. Como reflexão acerca desta experiência, os autores afirmam que a elaboração das tarefas deve ser de forma crescente de complexidade e dificuldade para que os alunos alcancem os objetivos de forma gradual, cada questão sendo alicerçada pela anterior.

A pesquisa de Doneze (2019) ocorreu em dois momentos, sendo o primeiro em que os entendimentos sobre as TAPE foram se construindo e o segundo momento da pesquisa se deu em um curso de extensão intitulado: Tarefas de Análise da Produção Escrita como oportunidade de ensino e aprendizagem, o qual foi ofertado a docentes que ensinam Matemática e discentes de cursos de Licenciatura em Matemática.

No primeiro momento ocorreu a elaboração de duas tarefas testes. As produções escritas para a primeira tarefa teste foram obtidas em uma turma de Educação de Jovens e Adultos – EJA dos anos finais do Ensino Fundamental com o conteúdo Operações com o Sistema Monetário Brasileiro em situações que envolvessem lucro ou prejuízo. Foi proposta aos alunos uma lista de 5 exercícios e depois da tarefa e das resoluções escolhidas, a primeira TAPE foi elaborada.

Figura 1: Primeira Tarefa de Análise da Produção Escrita elaborada


COMPREI UM CARRO POR R$ 33.100,00. CONSERTEI POR R$ 2.700,00
VENDI POR 33.150,00. TIVE LUCRO OU PREJUÍZO DE QUANTO?

R$ 33.100,00
R$ 2.700,00
R$35.800,00
R$35.800,00
33.150,00
R$ 02.650,00
R: tive prejuízo de R$ 02.650,00
Solução do aluno 1

33.100,00
+2.700,00
35.800,00
-33.150,00
02.650,00
Solução do aluno 3

33 100
+ 33 150
66250
66250
− 2700
63550
tive lucro de 63 550
Solução do aluno 2

O que você entende por lucro e Prejuízo? **Justifique**!

O que deve ser feito com o R$2.700,00 presente no exercício? Como saber quando eu devo somar e quando eu devo subtrair um valor numa situação semelhante?

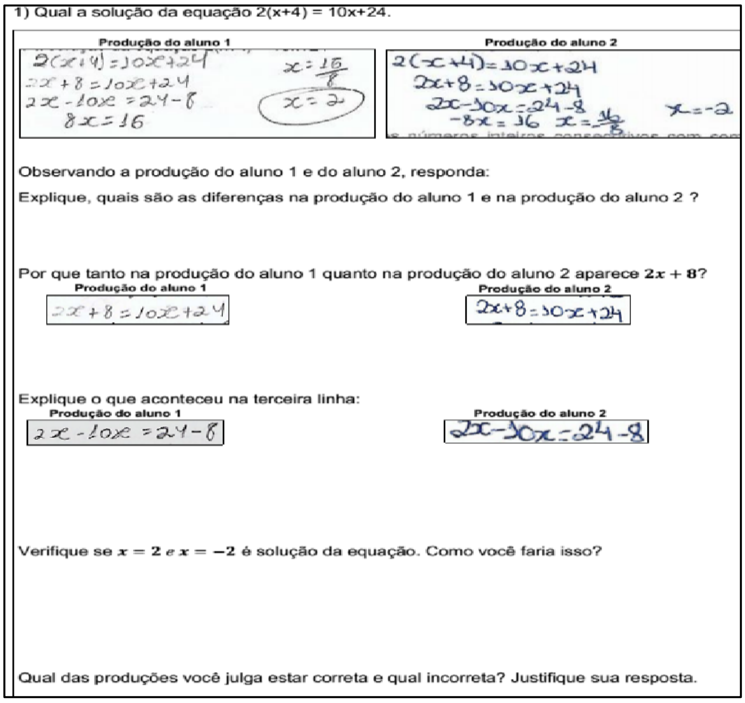
Qual (is) das soluções você julga estar correta? **Justifique!**

Qual (is) das soluções você julga estar incorreta? **Justifique!**

Fonte: Doneze (2019)

A coleta de produções escritas para segunda tarefa teste ocorreu em uma turma de 8º ano sobre o conteúdo específico Equação do Primeiro Grau. A segunda tarefa teste foi composta por 3 questões.

Figura 2: Tarefas propostas a partir da primeira questão



1) Qual a solução da equação 2(x+4) = 10x+24.

Produção do aluno 1	Produção do aluno 2
$2(x+4)=10x+24$ $2x+8=10x+24$ $2x-10x=24-8$ $8x=16$ $x=\frac{16}{8}$ $x=2$	$2(x+4)=10x+24$ $2x+8=10x+24$ $2x-10x=24-8$ $-8x=16$ $x=\frac{16}{-8}$ $x=-2$

Observando a produção do aluno 1 e do aluno 2, responda:

Explique, quais são as diferenças na produção do aluno 1 e na produção do aluno 2 ?

Por que tanto na produção do aluno 1 quanto na produção do aluno 2 aparece $2x + 8$?

Produção do aluno 1	Produção do aluno 2
$2x+8=10x+24$	$2x+8=10x+24$

Explique o que aconteceu na terceira linha:

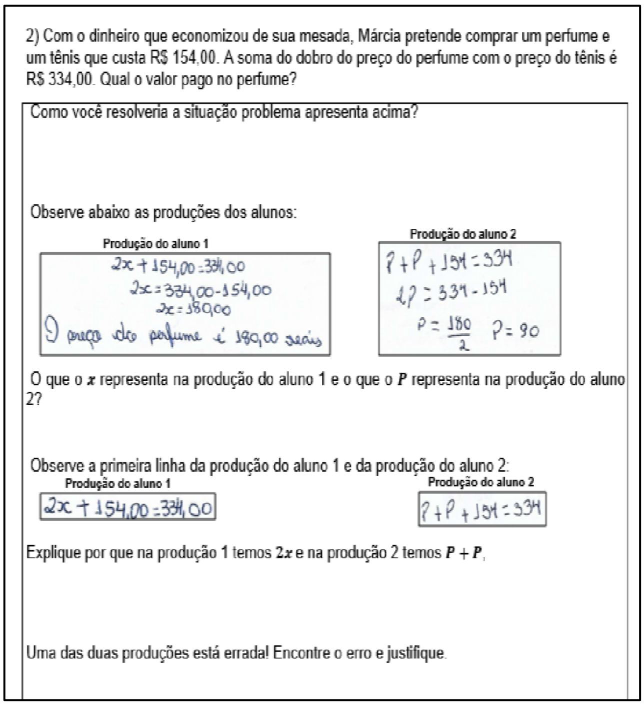
Produção do aluno 1	Produção do aluno 2
$2x-10x=24-8$	$2x-10x=24-8$

Verifique se $x = 2$ *e* $x = -2$ é solução da equação. Como você faria isso?

Qual das produções você julga estar correta e qual incorreta? Justifique sua resposta.

Fonte: Doneze (2019)

Figura 3: Tarefas propostas a partir da segunda questão



2) Com o dinheiro que economizou de sua mesada, Márcia pretende comprar um perfume e um tênis que custa R$ 154,00. A soma do dobro do preço do perfume com o preço do tênis é R$ 334,00. Qual o valor pago no perfume?

Como você resolveria a situação problema apresenta acima?

Observe abaixo as produções dos alunos:

Produção do aluno 1	Produção do aluno 2
$2x+154,00=334,00$ $2x=334,00-154,00$ $2x=180,00$ O preço do perfume é 180,00 reais	$P+P+154=334$ $2P=334-154$ $P=\frac{180}{2}$ $P=90$

O que o x representa na produção do aluno 1 e o que o P representa na produção do aluno 2?

Observe a primeira linha da produção do aluno 1 e da produção do aluno 2:

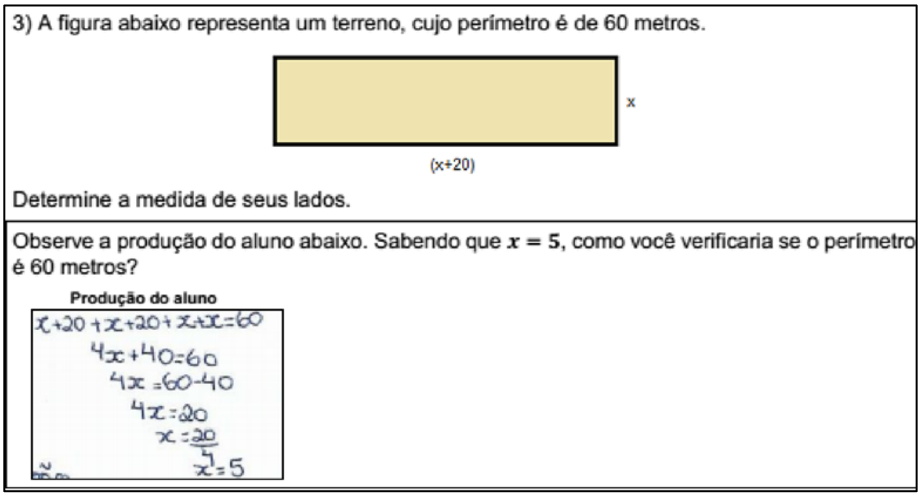
Produção do aluno 1	Produção do aluno 2
$2x+154,00=334,00$	$P+P+154=334$

Explique por que na produção 1 temos $2x$ e na produção 2 temos $P + P$,

Uma das duas produções está errada! Encontre o erro e justifique.

Fonte: Doneze (2019)

Figura 4: Tarefas propostas a partir da terceira questão



Fonte: Doneze (2019)

Essas tarefas não foram analisadas, visto que foram apresentadas no trabalho de Doneze (2019) como forma de ilustrar o processo de construção das primeiras Tarefas de Análise da Produção Escrita e como ocorreram os primeiros passos dos pesquisadores com a temática em estudo.

O segundo momento da pesquisa foi o curso de extensão intitulado: Tarefas de Análise da Produção Escrita como oportunidade de ensino e aprendizagem. O curso foi organizado e registrado no departamento de extensão da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Cornélio Procópio, cidade onde o curso foi ofertado. O público-alvo do curso eram docentes que ensinam Matemática (docentes de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e docentes com formação em Pedagogia) e discentes de curso de Licenciatura em Matemática. O curso contou com 32 (trinta e dois) inscritos, mas apenas 10 (dez) pessoas participaram dos momentos propostos, das quais 2 (dois) eram graduados em Pedagogia, 3 (três) Licenciados em Matemática e 5 (cinco) graduandos em Matemática.

O curso ocorreu em dois momentos à distância e um momento presencial. O primeiro momento do curso desenvolvido à distância teve como objetivo apresentar aos participantes as perspectivas da Análise da Produção Escrita. Para esse momento, foi elaborado um questionário no *Google Forms* e a comunicação ocorreu por *e-mail*. O segundo momento do curso foi realizado de forma presencial e teve como finalidade promover a discussão sobre as possibilidades de se trabalhar a Análise da Produção Escrita como Estratégia de Ensino. Nesse segundo momento, os participantes construíram Tarefas de Análise da Produção Escrita e, para isso, foi disponibilizado aos participantes um catálogo de produções escritas. Durante o curso foram elaboradas 5 tarefas, pois trabalharam em grupo.

Por fim, o terceiro momento, realizado com atividades à distância, por meio de um grupo criado em uma rede social, teve como objetivo levar os participantes a uma reflexão sobre a proposta de se trabalhar com Tarefas de Análise da Produção Escrita.

A partir das TAPE elaboradas pelo grupo, Doneze (2019) apresenta uma análise das compreensões dos participantes do curso sobre Análise da Produção Escrita, sobre as tarefas elaboradas por eles, bem como sobre o processo de elaboração das mesmas.

Segundo Doneze (2019, p. 65), sobre as Tarefas de Análise da Produção Escrita,

> é preciso um certo rigor ao desenvolver uma tarefa nas quais produções escritas se fazem presentes, sendo necessário ter em mente o objetivo que se espera alcançar, pois caso contrário essa passará a ser apenas mais uma entre tantas atividades a serem desenvolvidas no ambiente escolar. Ainda no que tange à sua elaboração, destaca-se a importância de a tarefa ser construída de forma progressiva, ao passo que os objetivos que se esperam alcançar ao final sejam construídos passo a passo durante cada questionamento ou resolução realizado.

De acordo com Doneze (2019), ao resolver as Tarefas de Análise da Produção Escrita há características a se compreender em cada tarefa, pois os questionamentos elaborados têm o objetivo de chamar a atenção para determinado ponto da produção escrita e para que o aluno se posicione sobre o certo ou o errado. Além disso, confronta produções escritas de uma mesma tarefa também solicitando o posicionamento dos alunos sobre o certo ou errado. Essas tarefas podem auxiliar a aprender um novo conteúdo ou reforçar algo já conhecido.

O trabalho de Minato (2019) estabeleceu procedimentos para criação das TAPE, desenvolvendo uma proposta de construção de Tarefas de Análise da Produção Escrita relacionada ao ensino de Matemática, nesse caso para o conteúdo de Progressão Geométrica. A autora aplicou uma lista de tarefas a alunos concluintes do Ensino Médio com o objetivo de obter produções escritas para serem utilizadas posteriormente na elaboração das Tarefas de Análise da Produção Escrita.

As tarefas escolhidas apresentavam diferentes níveis de dificuldades, como identificar os termos de uma PG, classificá-la como crescente ou decrescente, calcular os termos por meio da razão, ou por meio da fórmula do termo geral e interpolar valores. A turma escolhida para resolver essas tarefas foi uma turma iniciante do curso de licenciatura em Matemática da UTFPR. Essa proposta ocorreu no segundo semestre de 2018.

A partir das resoluções, foram elaboradas as Tarefas de Análise da Produção Escrita para o ensino do conteúdo de Progressões Geométricas sugeridas para serem desenvolvidas com outra turma. A Tarefa 1 tinha por objetivo conceituar uma progressão geométrica e razão, como pode ser visto na Figura 6.

Figura 5: TAPE 1 elaborada por Minato.

Tarefa nº 1

A professora Vera pediu aos seus alunos, Leandro, Beatriz e Isabela, que observassem se a sequência dada era um tipo específico de sequência chamada progressão geométrica. Em caso afirmativo deveriam citar qual a característica que uma progressão geométrica possui.
Veja as resoluções:

Resolução da aluna Beatriz

a) (1, 3, 9, 27, 81) → Todos os número foram multiplicado por 3.

Caso afirmativo

Resolução da aluna Isabela

a) (1, 3, 9, 27, 81) (multiplicando cada termo por 3)

razão q=3

Resolução do aluno Leandro

a) (1, 3, 9, 27, 81) Sim, pois a sequencia cresce multiplicando por 3 o termo anterior, ficando assim:

q=3

a) O que estas resoluções possuem em comum?

b) Por que você acha que a Beatriz escreveu "Todos os números foram multiplicados por 3"?

c) A aluna Isabela escreveu razão q=3. O que você acha que ele quis dizer com isso?

d) Por meio destas observações, você consegue definir com suas palavras o que é uma progressão geométrica?

Fonte: Minato (2019)

Já a Tarefa 2 pretendia que o aluno pudesse diferenciar progressão aritmética de progressão geométrica, conforme Figura 7.

Figura 6: TAPE 2 elaborada por Minato.

Tarefa nº 2

Ao pedir para as alunas verificarem se a sequência dada é uma progressão geométrica, Isabela e Maria responderam que não é.

Resolução da aluna Isabela

b) (2, 4, 6, 8, 10, 12) (soma 2 um cada termo)

- não é PG

Resolução da aluna Maria

b) (2, 4, 6, 8, 10, 12)

Não é uma PG, é uma PA

a) Elas estão corretas?

b) Maria escreve que a sequência é uma progressão aritmética (PA). Qual a diferença entre uma progressão geométrica (PG) e um a progressão aritmética (PA)?

Fonte: Minato (2019)

É possível observar na tarefa 1 de Minato que o objetivo de seus questionamentos é chamar a atenção do leitor para as resoluções, percebendo o que há em comum, ao número 3 que é a razão e se a partir dessas observações o leitor é capaz de definir um conceito. Já na tarefa 2, o objetivo é perceber a diferença entre dois conceitos os questionamentos chamam a atenção para isso. Assim, o que conduz os questionamentos é o objetivo da TAPE.

Os autores citados até aqui utilizaram, aplicaram ou elaboraram Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE). A proposta do presente trabalho é de investigar a utilização da Análise da Produção Escrita como estratégia de ensino para a aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória para alunos do Ensino Médio, por meio das Tarefas de Análise da Produção Escrita.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Por se tratar de uma investigação que pretende verificar a utilização das Tarefas de Análise da Produção Escrita no ensino e na aprendizagem de Análise Combinatória e ensinar esse conteúdo utilizando as tarefas elaboradas, esta pesquisa é de cunho qualitativo, pois como afirmam Bogdan e Biklen,

> [a] abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a idéia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo (1994, p.49).

Esta pesquisa aborda relato e reflexão dos procedimentos desenvolvidos no trabalho com duas turmas do 2º ano do Ensino Médio, ao investigar a utilização da Análise da Produção Escrita como estratégia de ensino para aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória para alunos do Ensino Médio por meio de Tarefas de Análise da Produção Escrita.

O desenvolvimento da pesquisa ocorreu em três momentos: primeiro momento em que foi realizada a coleta de produções escritas de alunos por meio da resolução de listas de tarefas; em seguida, de posse das resoluções, aconteceu o segundo momento, que consiste na elaboração das Tarefas de Análise da Produção Escrita a partir das resoluções coletadas no primeiro momento e, finalmente, o terceiro momento, de ensinar Análise Combinatória utilizando as tarefas elaboradas, conforme mostra o Quadro seguinte.

Etapas para desenvolver o trabalho com as TAPE

Primeiro momento	Segundo momento	Terceiro momento
Coleta de produções escritas de alunos por meio da resolução de listas de tarefas;	Elaboração das Tarefas de Análise da Produção Escrita a partir das resoluções coletadas no primeiro momento.	Ensinar Análise Combinatória utilizando as tarefas elaboradas.

Fonte: Autores

3.1 PRIMEIRO MOMENTO: COLETA DE PRODUÇÕES ESCRITAS

O primeiro momento ocorreu em 2019, com quatro turmas de 2º ano do Ensino Médio em duas escolas públicas do município de Londrina. Nesse momento, foram selecionadas tarefas de todo conteúdo de Análise Combinatória de vários materiais, como apostilas, materiais de propostas metodológicas de investigação e livros didáticos.

Durante o trabalho com essas turmas foi ensinado, no terceiro trimestre, o conteúdo de Análise Combinatória por meio de uma abordagem de ensino mais próxima do que se convencionou a chamar de "tradicional" com aulas expositivas, várias listas de exercícios, trabalhos e provas que permitiram a coleta de produções escritas dos alunos. Além dessas listas de exercícios, foram propostas duas provas escritas em cada turma. Ao todo, foram coletadas cerca de 130 produções escritas de cada tarefa citada nas quatro turmas em que trabalhávamos.

Houve diversidade nas produções escritas coletadas, sendo classificadas como corretas, parcialmente corretas e incorretas. As produções escolhidas para elaboração das TAPE foram as corretas e legíveis para serem digitalizadas e com diferentes resoluções.

3.2 SEGUNDO MOMENTO: ELABORAÇÃO DAS TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA (TAPE)

Esse momento ocorreu no início de 2020 e aconteceu a partir das produções escritas dos alunos coletadas nas quatro turmas supracitadas, em 2019. A partir das Tarefas de Análise da Produção Escrita que foram elaboradas nos trabalhos que serviram como aporte teórico, entende-se que, para elaborar uma TAPE, inicialmente é preciso estar claro o objetivo que se deseja alcançar por meio dos questionamentos propostos. No tópico 4.2, em que são apresentados os resultados desse segundo momento a cada TAPE é indexado o objetivo específico que se pretende alcançar com cada uma delas.

Na elaboração de uma TAPE pode haver questionamentos a produções escritas corretas, parcialmente corretas, incorretas, com diferentes resoluções para serem comparadas. No caso deste trabalho, em que a proposta é desenvolver o ensino de um conteúdo que os alunos não tiveram contato, na elaboração das TAPE foram utilizadas apenas produções escritas corretas, podendo haver diferentes formas de resolução.

Os questionamentos propostos nas TAPE são elaborados a partir de interpretação dos enunciados, interpretação ou comparação das resoluções e resolução de atividades semelhantes, após a compreensão da resolução dos alunos.

Foram elaboradas 12 TAPE e 5 trabalhos, listados abaixo, para verificar a aprendizagem oportunizada por meio das mesmas, que foram organizadas em uma sequência didática, apresentada no capítulo seguinte, além de constar no Produto Educacional vinculado a esta investigação.

TAPE 1 - Princípio multiplicativo (atividade 1 presencial)

TAPE 2 - Princípio multiplicativo excluindo opções (atividade 2 presencial)

Trabalho 1 – Princípio multiplicativo (atividade 3 presencial)

TAPE 3 – Fatorial (atividade 1 remoto)

TAPE 4 – Fatorial simplificação (atividade 1 remoto)

TAPE 5 – Fatorial generalização (atividade 1 remoto)

Trabalho 2 – Fatorial (atividade 2 remoto)

TAPE 6 – Permutação (atividade 3 remoto)

TAPE 7 – Permutação anagramas (atividade 4 remoto)

TAPE 8 – Permutação anagramas com repetição (atividade 5 remoto)

Trabalho 3 – Permutação (atividade 6 remoto)

TAPE 9 – Arranjo (atividade 7 remoto)

TAPE 10 – Soma de arranjos (atividade 8 remoto)

Trabalho 4 – Arranjo (atividade 9 remoto)

TAPE 11 – Combinação (atividade 10 remoto)

TAPE 12 – Diferenciar agrupamentos (atividade 11 remoto)

Trabalho 5 – Diferenciar agrupamentos (atividade 12 remoto)

3.3 TERCEIRO MOMENTO: ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DAS TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA (TAPE)

Esse momento ocorreu no primeiro e segundo trimestres de 2020 com duas turmas de 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Londrina, cada turma com 40 alunos. O trabalho com essas turmas foi desenvolvido somente no período de aplicação das tarefas que são propostas nesse trabalho, uma vez que as aulas foram cedidas pelo professor regente das turmas.

O trabalho iniciou com quatro aulas presenciais que aconteceram nas duas primeiras semanas de março. Depois disso, houve paralisação das aulas a partir do dia 20 de março em razão da pandemia do COVID-19, retornando as aulas no formato de aulas não presenciais no início do mês de abril de acordo com a Resolução Seed nº 1.016 - 03/04/2020 - Regime especial - aulas não presenciais[1].

No formato presencial, foi possível trabalhar com os alunos as duas TAPE e o primeiro trabalho de princípio multiplicativo. As demais TAPE aplicadas como estratégia de ensino do conteúdo de Análise Combinatória foram desenvolvidas no formato não presencial no ensino remoto. Nesse caso, toda semana eram postadas tarefas e/ou trabalhos para os alunos responderem e resolverem, depois digitalizavam suas resoluções e anexavam-nas na respectiva tarefa na plataforma *Google Classroom*.

Como a proposta era verificar as contribuições das TAPE para a compreensão dos conteúdos envolvidos no ensino de Análise Combinatória, mesmo nas aulas presenciais a interferência do professor deveria ser mínima, apenas esclarecendo dúvidas, de forma alguma respondendo às questões. No formato remoto, as dúvidas eram respondidas da mesma forma, conforme os alunos tinham dificuldades ou não compreendiam o questionamento, eram orientados com comentários nos *chats*, nunca dando respostas.

Como os alunos estavam sendo avaliados no primeiro trimestre e parte do segundo trimestre, eles se preocupavam em responder corretamente aos questionamentos, muitas de suas respostas foram consideradas em razão de apresentarem sua compreensão. No primeiro trimestre, as tarefas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 e os trabalhos 1, 2 e 3 pontuaram as notas desse trimestre.

Houve dois momentos de videoaula – aula síncrona - com os alunos, em que as ideias desenvolvidas com as TAPE foram formalizadas para que pudessem tirar suas dúvidas a respeito dos conceitos desenvolvidos. Entre tantas produções escritas de TAPE e de trabalhos coletados, foram selecionadas as tarefas entregues pela aluna Ana[2], pois se considera que o seu envolvimento nas respostas, resoluções e também a sua participação para esclarecer dúvidas por meio de mensagens ocorreu da forma esperada.

[1] Essa resolução estabelece em regime especial as atividades escolares na forma de aulas não presenciais, em decorrência da pandemia causada pelo COVID-19.

[2] Para preservar o anonimato da participante da pesquisa, utilizamos o nome fictício Ana.

4 RESULTADOS E ANÁLISES

Apresentam-se nesse capítulo os resultados obtidos nos três momentos em que a pesquisa foi desenvolvida e algumas análises desses resultados.

4.1 RESULTADOS DO PRIMEIRO MOMENTO: COLETA DE PRODUÇÕES ESCRITAS

Os resultados desse primeiro momento foram as produções escritas coletadas dos alunos das quatro turmas de 2º ano do Ensino Médio com as quais foi abordado o conteúdo de Análise Combinatória no terceiro trimestre de 2019. Constam produções escritas consideradas corretas, incorretas e parcialmente corretas das listas de atividades, provas e trabalhos que foram propostos a esses alunos.

4.2 RESULTADOS DO SEGUNDO MOMENTO: ELABORAÇÃO DAS TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA (TAPE)

Neste tópico são apresentadas as TAPE elaboradas a partir das produções escritas coletadas no primeiro momento, os objetivos pretendidos e alguns comentários.

Tarefa 1

Objetivo: Perceber semelhanças na resolução de situações que envolvem princípio multiplicativo.

Figura 7: TAPE 1

Observe as resoluções de Mariana para três situações apresentadas.

Em certa lanchonete, para montar um sanduíche, os clientes possuem duas opções de pão (centeio ou integral) e quatro de recheio (frango, presunto, queijo ou vegetariano). De quantas maneiras distintas um cliente pode montar um sanduíche com um tipo de pão e um de recheio?

$2 . 4 = 8$

Renato levou em uma viagem três calças, dois pares de sapatos e 4 camisas todos diferentes entre si. De quantas maneiras distintas ele pode se vestir?

$3 . 2 . 4 = 24$

Uma loja de telefones oferece 3 modelos de telefone celular, 2 planos de tarifa e 3 formas de pagamento. Quantas possibilidades diferentes uma pessoa tem para comprar um telefone nessa loja?

3 modelos, 2 planos
3 formas de pagamento

3 . 2 . 3 = 18 possibilidade

a) Em que essas situações são semelhantes?
b) Se o questionamento das situações fossem quais possibilidades ao invés de quantas, como você resolveria essas situações?
c) Elabore uma situação semelhante a essas e resolva-a.

Fonte: Autores

A intenção do item *a* dessa tarefa é que os alunos observem as três resoluções e percebam que é comum a multiplicação pelos números de opções que aparecem nos enunciados de cada situação. O item b pretende fazer com que os alunos percebam a diferença de responder ao questionamento “quais” ao invés de “quantos”, para distinguirem as respostas solicitadas, e, ao mesmo tempo, perceberem que o princípio multiplicativo permite quantificar o total de possibilidades sem precisar descrever cada uma delas. O item c solicita a elaboração de uma situação semelhante, pois, se o aluno compreendeu a ideia de princípio multiplicativo, possivelmente é capaz de perceber a mesma ideia em outra situação.

Tarefa 2

Objetivo: Resolver o princípio fundamental da contagem alterando a quantidade de opções.

Figura 8: TAPE 2

Veja as respostas do aluno André para a seguinte situação apresentada.
A seguir estão apresentadas as opções que uma pessoa tem ao realizar a compra de certo pacote turístico em uma agência de viagens.

Transporte	**Hospedagem**	**Tempo de permanência**
Rodoviário	**Albergue**	**4 dias**
Aéreo: 1ª classe	**Pousada**	**7dias**
Aéreo; 2ª classe	**Hotel 3 estrelas**	**10 dias**
	Hotel 4 estrelas	

a) De quantas maneiras distintas a pessoa pode compor o pacote turístico?

b-) a-) 3 opções de transporte, 3 para tempo e 4 para hospedagem = 3.3.4=36 formas,,

b) Se a pessoa optar por transporte aéreo e hospedagem em hotel, de quantas maneiras distintas ela pode compor o pacote turístico?

b) 2 opção de transporte, 2 de hotel e 3 para tempo = 2.2.3=12 formas,,

a) A que se referem os números utilizados para resolução do problema?
b) Por que no item b alguns números foram alterados?
c) Caso a agência de viagens dispusesse de 4 opções de transporte, 3 opções de hospedagem e 2 opções de tempo de permanência; como você responderia ao item a da situação apresentada acima?

Fonte: Autores

O objetivo da tarefa 2 é continuar a ideia de princípio multiplicativo, mas nesse caso os alunos podem perceber que, alterando a quantidade de opções, alteram-se os números no cálculo da multiplicação e diminui assim o total de possibilidades. O item c apresenta outras quantidades de opções para a situação da agência de viagens, solicitando que o aluno responda mostrando que compreendeu a ideia de princípio multiplicativo com alterações nas quantidades de opções.

Tarefa 3

Objetivo: Entender cálculo de fatorial.

Figura 9: TAPE 3

Observe a resolução de Ana, Pedro e Gustavo para o cálculo de fatorial.

Resolução de Ana para 5! $5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$ Resolução de Pedro para 6! $6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$ Resolução Gustavo $9! = 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 362880$	a) O símbolo **!** na pontuação na Língua Portuguesa é o ponto de exclamação; em Matemática é o fatorial. A partir da observação das resoluções dos alunos explique como é calculado o fatorial. b) Agora, calcule os fatoriais a seguir: 3! 4! 7! c) Pesquise quanto é 0! d) Em sua opinião, porque esse valor foi assim definido matematicamente?

Fonte: Autores

Por meio da observação de três cálculos de fatorial, é solicitado aos alunos que expressem sua compreensão sobre o cálculo de fatorial e depois é proposto que calculem, pesquisem o valor de 0![3] e reflitam o porquê de 0! ser 1.

Tarefa 4

Objetivo: Entender cálculo de divisão de fatorial com simplificação.

---

3 A definição de 0! é igual a 1, pois nesse conjunto de dados há apenas um único arranjo possível.

Figura 10: TAPE 4

Observe a seguir o cálculo de uma divisão de fatoriais de dois alunos.

Resolução de Bruno	Resolução de Areta
e) $\frac{7!}{5!} = \frac{5040}{120} = 42$ $7.6.5.4.3.2.1 = 5040$ $5.4.3.2.1 = 120$	$\frac{7!}{5!} = \frac{7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 7.6 = 42$

a) Por que na resolução de Areta o fatorial foi interrompido?
b) Que diferença existe nas resoluções?

Veja outros cálculos com fatorial.

b) $6! + 4! = 744$ $6.5.4.3.2.1 = 720$ $4.3.2.1 = 24$ + $2! + 3! = 2 + 6 = 8$ $1! + 4! = 1 + 24 = 25$ $3! - 2! = 6 - 2 = 4$ $0! + 1! = 1 + 1 = 2$ $2!3! = 2.6 = 12$ $0!5! = 1.120 = 120$	a) $\frac{8!}{9!} = \frac{\cancel{8!}}{9.\cancel{8!}} = \frac{1}{9}$ b) $\frac{15!}{13!} = \frac{15.14.\cancel{13!}}{\cancel{13!}} = 210$ c) $\frac{4!}{6!} = \frac{\cancel{4!}}{6.5.\cancel{4!}} = \frac{1}{30}$ d) $\frac{6!}{5!2!} = \frac{6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}2.1} = \frac{6}{2} = 3$

c) O que você pode concluir sobre simplificação dos cálculos com fatorial?

Fonte: Autores

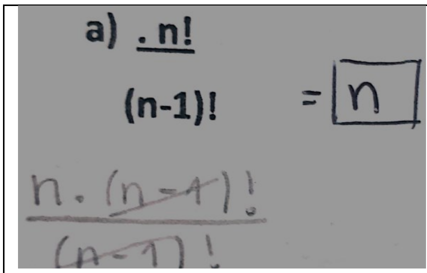
A intenção da tarefa 4 é apresentar resoluções de vários cálculos com fatorial, principalmente a divisão na forma de fração, comparando cálculo simplificado e sem simplificação. É solicitado aos alunos que percebam a diferença entre o cálculo simplificado e o não simplificado e vejam que o resultado final é o mesmo. Por fim, é questionada a conclusão dos alunos a respeito da simplificação.

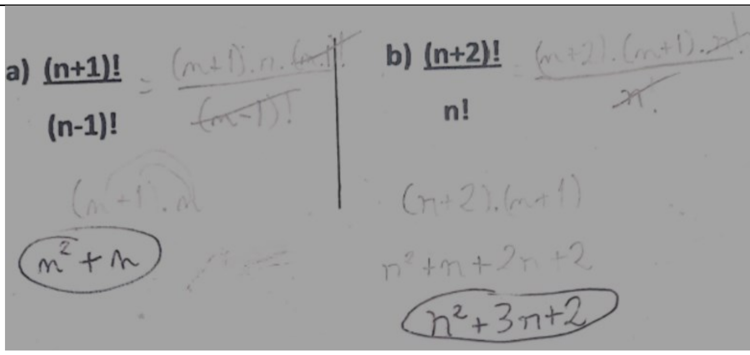
Tarefa 5

Objetivo: Generalizar o processo de resolução de fatorial.

Figura 11: TAPE 5

Seguindo a ideia do cálculo de fatorial, Daniela resolveu o cálculo a seguir.





a) De acordo com essa ideia, o que está antes de **n**? E depois?
b) Ao iniciar a resolução, em sua opinião, o que se pretende?

Fonte: Autores

A tarefa 5 questiona os alunos sobre a generalização do cálculo de fatorial. Espera-se que os alunos observem nas resoluções quem são os termos anteriores e posteriores a n em um cálculo de fatorial generalizado. Também é importante que eles percebam que, ao iniciar o cálculo, é necessário observar como é possível simplificar eliminando termos.

Tarefa 6

Objetivo: Entender situações problema de contagem que envolvem permutação.

Figura 12: TAPE 6

Veja a resolução de Tiago e de Bianca para a seguinte situação.

De quantas formas diferentes 5 pessoas podem ocupar um sofá de 5 lugares, de modo que todos fiquem sentados?

Resolução de Tiago

$\overline{5} . \overline{4} . \overline{3} . \overline{2} . \overline{1} =$ 120 maneiras

Resolução de Bianca

$5! = 120$

R: 120 formas

a) Quantas são as pessoas que vão se sentar no sofá?
b) Quantos lugares cada pessoa pode ocupar?
c) Utilizemos as letras iniciais dos nomes de 5 pessoas, Ana (A), Bia (B), Caio (C), Dani (D), Eva (E). Uma das formas de acomodá-las no sofá é ABCDE, se alterarmos essa ordem para BACDE é outra opção de forma de acomodar as pessoas no sofá?
d) Sendo assim, a ordem interfere na quantidade de formas diferentes de acomodar as 5 pessoas no sofá?
e) Observando a resolução de Tiago o que há de semelhante com fatorial?

Fonte: Autores

Os questionamentos propostos na tarefa 6 permitem observação das resoluções e características de situações que envolvem agrupamentos do tipo permutação. É importante que os alunos percebam que, nesse caso, são utilizados todos os elementos para formar cada possibilidade de agrupamento e que a ordem interfere formando uma nova possibilidade ao alterar a ordem dos elementos. O último questionamento propõe aos alunos observar a semelhança com o cálculo de fatorial, que se refere a fórmula do cálculo de permutação.

Tarefa 7

Objetivo: Entender o que são anagramas e calcular a quantidade de anagramas de uma palavra.

Figura 13: TAPE 7

Veja as resoluções de Talita para a seguinte situação.

Escreva todos os anagramas da palavra RUA usando a árvore das possibilidades.

RUA, URA, RAU, ARU, AUR, UAR

Quantos são os anagramas da palavra RUA?

$3! \quad 3.2.1 = 6$

Agora, veja a resolução de Amanda para quantidade de anagramas da palavra DILEMA.

$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

a) O que você entendeu que são anagramas?
b) Escreva os anagramas da palavra NILO.
c) Quantos são os anagramas da palavra NILO?
d) Qual o total de letras da palavra NILO?
e) Quantas letras tem cada anagrama da palavra NILO?
f) Que semelhança você observa entre essa tarefa e a tarefa 6?

Fonte: Autores

Os questionamentos da tarefa 7 permitem aos alunos entender o que é anagrama, perceberem que anagramas são casos de permutação em que todas as letras são utilizadas nos novos anagramas alterando apenas a ordem das letras. Isso quando não há repetição de letras na palavra.

Tarefa 8

Objetivo: Calcular permutações de anagrama com repetição.

Figura 14: TAPE 8

Observe as resoluções corretas de três alunos Diego, Luana e Julia para a situação a seguir.

Se a palavra a ser permutada fosse MATEMÁTICA. Quantos anagramas seriam possíveis formar?

Resolução de Diego

M = 2
A = 3
T = 2

$\frac{10!}{2!\,3!\,2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3!}{2.1 \cdot 3! \cdot 2.1} = \frac{604.800}{4} = 151.200$

Resolução de Luana

$\frac{10!}{2!\,3!\,2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3!}{2.3!.2!} = \frac{604800}{4} = 151200$ anagramas

Resolução de Julia

$= \frac{10!}{2!\,3!\,2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3!}{2!\,3!\,2} = \frac{604800}{4} = 151200$

a) O que você percebeu de diferente nessa resolução em relação à resolução da tarefa 7?
b) Os fatoriais do denominador correspondem a que?
c) Em sua opinião, por que nesse caso a divisão é necessária?
d) Seguindo o raciocínio mostrado acima calcule quantos anagramas possui a palavra ARARAQUARA?
e) E a palavra JARARACA, quantos anagramas têm?

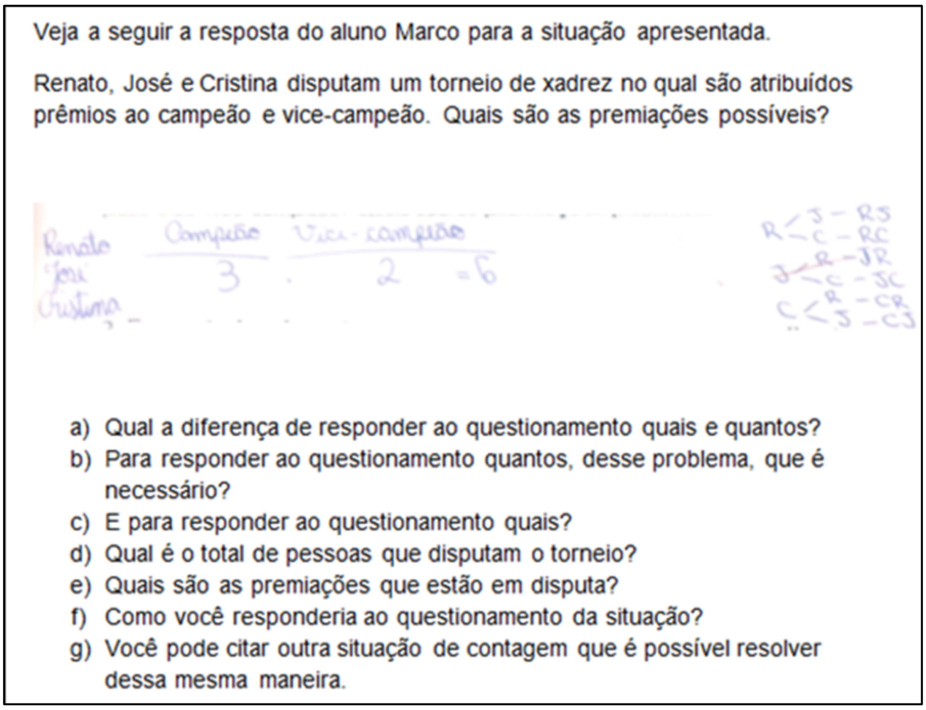
Fonte: Autores

As resoluções e os questionamentos da tarefa 8 apresentam aos alunos a resolução de situações que envolvem anagramas com repetição. É importante que os alunos percebam que os números que são multiplicados no denominador referem-se às letras que se repetem na palavra e que, com essa divisão, eliminam-se os anagramas em que as letras repetidas ocorrem no mesmo lugar, eliminando casos iguais de possibilidades de permutação das letras. Depois, os alunos resolvem duas situações com anagramas com repetição semelhantes às das resoluções.

Tarefa 9

Objetivo: Entender arranjo simples.

Figura 15: TAPE 9



Veja a seguir a resposta do aluno Marco para a situação apresentada.

Renato, José e Cristina disputam um torneio de xadrez no qual são atribuídos prêmios ao campeão e vice-campeão. Quais são as premiações possíveis?

Renato
José
Cristina

Campeão . Vice-campeão
3 . 2 = 6

R < J – RJ, C – RC
J < R – JR, C – JC
C < R – CR, J – CJ

a) Qual a diferença de responder ao questionamento quais e quantos?
b) Para responder ao questionamento quantos, desse problema, que é necessário?
c) E para responder ao questionamento quais?
d) Qual é o total de pessoas que disputam o torneio?
e) Quais são as premiações que estão em disputa?
f) Como você responderia ao questionamento da situação?
g) Você pode citar outra situação de contagem que é possível resolver dessa mesma maneira.

Fonte: Autores

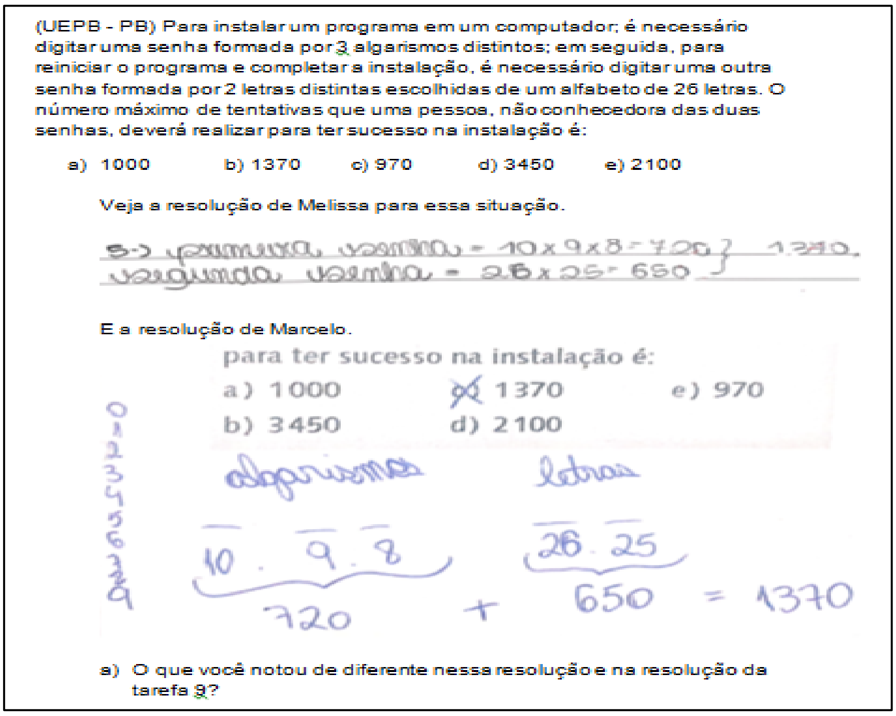
Os questionamentos da tarefa 9 favorecem que os alunos percebam que os subgrupos formados não envolvem o total de elementos do grupo maior. Novamente é questionado a respeito da diferença entre “quantos” e “quais”, nesse caso são apenas 6 possibilidades. A intenção é que os alunos percebam que saber a quantidade auxilia também a saber quantas possibilidades deve listar ao responder quais. Além disso, é importante que os alunos percebam como a Análise Combinatória tem grandes contribuições nos cálculos de agrupamentos.

No final da tarefa é solicitado aos alunos para citarem outra situação que é possível resolver da mesma maneira. Espera-se que os alunos citem situações em que, de um grupo maior, são formados subgrupos menores não utilizando todos os elementos do grupo maior e que nesse caso a ordem interfira nos agrupamentos formados.

Tarefa 10

Objetivo: Conhecer o cálculo com soma de arranjos.

Figura 16: TAPE 10



(UEPB - PB) Para instalar um programa em um computador; é necessário digitar uma senha formada por 3 algarismos distintos; em seguida, para reiniciar o programa e completar a instalação, é necessário digitar uma outra senha formada por 2 letras distintas escolhidas de um alfabeto de 26 letras. O número máximo de tentativas que uma pessoa, não conhecedora das duas senhas, deverá realizar para ter sucesso na instalação é:

a) 1000 b) 1370 c) 970 d) 3450 e) 2100

Veja a resolução de Melissa para essa situação.

5-) primeira senha = 10 x 9 x 8 = 720 } 1.370.
segunda senha = 26 x 25 = 650 }

E a resolução de Marcelo.

para ter sucesso na instalação é:

a) 1000 ~~c)~~ 1370 e) 970
b) 3450 d) 2100

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

algarismos letras

$\underbrace{\overline{10} \cdot \overline{9} \cdot \overline{8}}_{720} + \underbrace{\overline{26} \cdot \overline{25}}_{650} = 1370$

a) O que você notou de diferente nessa resolução e na resolução da tarefa 9?

Fonte: Autores

A tarefa 10 apresenta a diferença com a tarefa anterior, que, nesse caso, calculam-se dois arranjos e depois se somam os resultados. Essa é a resposta esperada ao questionamento da tarefa.

Tarefa 11

Objetivo: Entender situações que envolvem contagem por meio da combinação de agrupamentos.

Figura 17: TAPE 11

Veja como Felipe resolveu a situação apresentada a seguir.

De um grupo de 18 atletas de uma equipe de vôlei, técnico deve selecionar 12 atletas para disputa de uma partida. Considerando que todos os atletas podem atuar em qualquer posição, de quantas maneiras distintas essa seleção pode ser formada?

$$C_{18,12} = \frac{18}{(18-12)\,12!} = \frac{18.17.16.15.14.13.12!}{6!\ 12!}$$

$$C_{18,12} = \frac{18!}{6!\,12!} \qquad \begin{array}{r}18\\-12\\\hline 6\end{array} \quad \to \frac{13.366.080}{720} = 18.564$$

E a resolução de Arthur.

$$C_{18,12} = \frac{18!}{(18-12)!\,12!} \qquad C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

$$C_{18,12} = \frac{18!}{6!\,12!} = \frac{18.17.16.15.14.13.12!}{6!\,12!} \qquad \begin{array}{r}18\\-12\\\hline 6\end{array} \to \frac{13.366.080}{720}$$

18.564 maneiras

Agora, veja a resolução de Mariana.

$n = 18$
$p = 12$

$$\frac{18.17.16.15.14.13.12!}{12!\ 6.5.4.3.2.1} = \frac{13366080}{720} = 18.564$$

A seleção pode ser realizada 18.564 vezes.

Sabendo que a fórmula para calcular a combinação de agrupamentos é:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

a) Em sua opinião, que número corresponde ao n, nessa fórmula? O que ele representa?
b) E o p?
c) Nessa situação a ordem dos 12 atletas escolhidos interfere ocorrendo um novo time, ou uma nova seleção só por mudar a ordem?
d) Seguindo a mesma ideia apresentada acima resolva as situações a seguir.

1) Um pizzaiolo tem a sua disposição ingredientes para fazer pizzas nos seguintes sabores: atum (A), queijo (Q), calabresa (C), milho (M), e portuguesa (P). Quantas são as possibilidades de pizzas que podem ser feitas com três sabores diferentes?

2) Solange faz salada de frutas para vender na praia. Ela dispõe de 10 frutas: abacaxi (A), mamão (M), kiwi (K), pêssego (P), laranja (L), manga (M1), morango (M2), uva (U), maçã (M3), melão (M4). Sabendo que ela prepara as saladas de frutas em copos para vender combinando 3 frutas de cada vez, de quantas maneiras diferentes ela pode combinar as frutas que dispõem para fazer as saladas de frutas?

Fonte: Autores

A tarefa 11 apresenta situações e resoluções de combinação de agrupamentos. Nesse caso foi apresentada a fórmula utilizada no cálculo de combinação. Os questionamentos aqui propostos solicitam ao aluno identificar os números que correspondem a n e a p na fórmula, por meio da observação do enunciado e da resolução. Depois disso, eles devem analisar se a ordem interfere nesse tipo de agrupamento e no final são apresentadas duas situações semelhantes para os alunos resolverem da forma que compreenderam.

Tarefa 12

Objetivo: Diferenciar situações de contagem que envolvem permutação, arranjo e combinação.

Figura 18: TAPE 12

Observe a seguir três situações diferentes e suas respectivas resoluções.

1ª situação resolvida por Danilo.

Qual é o total de anagramas da palavra BRASIL?

$6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720$

a) Qual é o total de letras da palavra?
b) Cada anagrama formado terá quantas letras?
c) Ao trocar a ordem das letras, forma-se um novo anagrama?
d) Sendo assim, você considera que nessa situação a ordem das letras tem importância?

2ª situação resolvida por Gabriele de duas maneiras diferentes.

Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto E = { 1, 2, 3, 4, 5 }?

Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto E = {1, 2, 3, 4, 5}?

$n = 5$
$p = 3$

$A_{5,3} = \frac{5}{(5-3)!}$

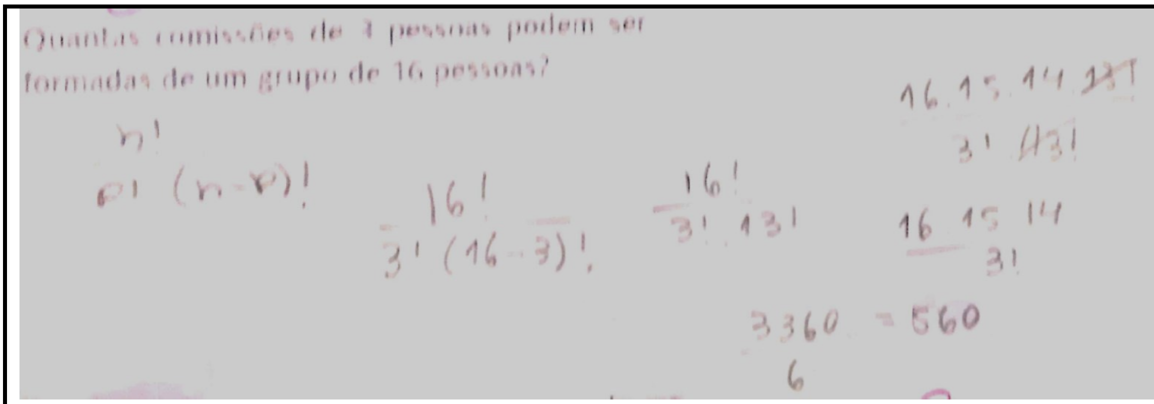
$\frac{C}{5} . \frac{D}{4} . \frac{U}{3} = 60$

$A_{5,3} = \frac{5!}{3!} = \frac{5.4\,3!}{3!} = 60$

e) O que você entende como distinto? Caso você não saiba pesquise o significado dessa palavra.
f) Qual é o total de elementos que podem ser utilizados para compor os números?
g) Cada agrupamento formado, ou seja, nesse caso, cada número formado tem quantos elementos?
h) Ao formar um número com 3 algarismos, se mudar a ordem dos algarismos, forma-se um novo número?
i) Assim, você considera que nessa situação a ordem dos algarismos tem importância?
j) Quais são as duas maneiras que Gabriele utilizou para resolver essa situação?

3ª situação resolvida por Luana.

Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas de um grupo de 16 pessoas?



k) Nessa situação, qual é o total de pessoas que serão agrupadas?
l) Quantas pessoas há em cada grupo formado?
m) Uma comissão formada por Ana, Bia e Caio; e a comissão formada por Caio, Ana e Bia; formam outra comissão ou não?
n) Sendo assim, a ordem das pessoas que formam a comissão tem importância ou não?
o) Veja a seguir algumas explicações sobre arranjo, permutação e combinação e relacione as situações 1, 2 e 3 à explicação correspondente.

( ) Os problemas de contagem que envolvem a ideia de combinação, em geral, estão associados à ideia de subconjunto e os agrupamentos formados não diferem pela ordem dos elementos. A fórmula para calcular combinação de n elementos p a p é:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

( ) Permutação simples é o tipo de agrupamento ordenado, sem repetição, em que entram todos os elementos em cada grupo. A fórmula para calcular a permutação de n elementos é o fatorial do total de elementos:

$$P_n = n!$$

( ) Arranjo simples são todos os agrupamentos sem repetição que se podem formar com p elementos diferentes escolhidos estre os n elementos de um conjunto dado. A fórmula para calcular arranjo simples de n elementos p a p é:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Fonte: Autores

A tarefa 12 é a mais extensa, pois seu objetivo é que os alunos comparem 3 situações de agrupamento e consigam distinguir os agrupamentos por meio dos questionamentos e de suas compreensões das tarefas anteriores. Os questionamentos das primeiras situações envolvem o total de elementos, quantos elementos são utilizados em cada possível agrupamento formado e se a ordem interfere na quantidade de possibilidades de agrupamentos formados.

A segunda situação traz um questionamento sobre a palavra “distinto”, um significado necessário à compreensão desses conceitos. Em seguida a atenção dos estudantes ao responder volta-se ao total de elementos do conjunto e quantos elementos fazem parte de cada agrupamento formado. Depois, como fundamental nesses conceitos, há questionamentos sobre a interferência ou não da ordem em situações desse tipo. Nessa situação são apresentados dois tipos de resolução pelo princípio multiplicativo e por meio de fórmula chegando à mesma solução, o que também é questionado.

Os questionamentos da terceira situação também destacam o total de elementos, quantos são utilizados em cada agrupamento formado e se a ordem tem interferência ou não na quantidade de possibilidades de agrupamentos. Na sequência, são apresentadas explicações sobre os três tipos de agrupamentos envolvidos, permutação, arranjo e combinação; inclusive com as respectivas fórmulas, e é solicitado que os estudantes relacionem as situações apresentadas à explicação de agrupamento correspondente.

É possível inferir que as principais ideias desse conteúdo foram contempladas nessas 12 TAPE. Aprofundamentos podem ser propostos a partir de outras metodologias ou serem elaboradas novas TAPE que contemplem essas ideias.

Os trabalhos que foram aplicados após as TAPE encontram-se nos apêndices de A até F. A partir dos comentários dos alunos foi perceptível muitas dúvidas relacionadas a generalização do fatorial. Então, após as resoluções da TAPE 5 e das questões do trabalho 2 foi proposta uma aula online para maior esclarecimento desse conteúdo e a realização de um trabalho básico sobre essa ideia que está no apêndice C.

4.3 RESULTADOS DO TERCEIRO MOMENTO: ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DAS TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA (TAPE)

O ensino de Análise Combinatória por meio das TAPE ocorreu de forma presencial nas duas primeiras semanas de março de 2020 nas turmas 2A e 2B, totalizando 4 aulas presenciais em cada turma. Nessas aulas foram trabalhadas as TAPE 1 e 2 e o trabalho 1, todas essas tarefas abordando o conteúdo princípio multiplicativo. Alguns alunos responderam individualmente e outros preferiram trabalhar em duplas ou grupos de até três alunos.

Em razão da pandemia do Covid-19, as aulas foram paralisadas no dia 20 de março, retornando como ensino remoto em abril de 2020. Continuamos com as tarefas propostas postando semanalmente TAPE e trabalhos, e mantendo a comunicação com os alunos por meio de chat.

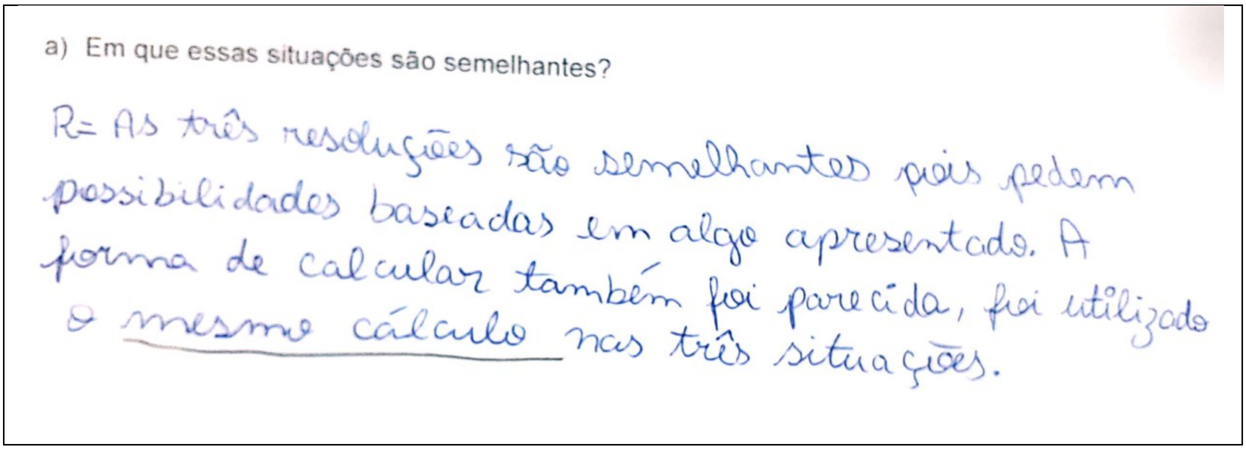
As TAPE 1 a 8 e os trabalhos 1, 2 e 3 foram avaliados fechando as notas do primeiro trimestre. Na sequência, as TAPE 9 a 12 e os trabalhos 4 e 5 pontuaram 30 pontos do 2º trimestre. Essas tarefas foram recebidas até setembro quando finalizou o segundo trimestre.

Para acompanhar os alunos, houve duas aulas online – síncronas – para esclarecer dúvidas e para as tarefas propostas no segundo trimestre foram elaborados áudios para auxiliá-los nas dúvidas que eles enviavam por mensagens quanto aos questionamentos.

Foram coletados 12 TAPE e 5 trabalhos de 80 alunos, sendo 40 alunos do 2A e 40 alunos do 2B. Não serão apresentados os resultados de todos os alunos, pois muitos apresentam respostas e resoluções semelhantes. A escolha de apresentar os resultados das TAPE e trabalhos da aluna Ana foi em razão do envolvimento da aluna com as tarefas propostas, até mesmo por meio de troca de mensagens em Chat e por apresentar respostas e resoluções coerentes com o esperado. Dessa forma, é possível analisar as contribuições das TAPE no aprendizado de Ana.

A seguir, são apresentados os retornos das TAPE e dos trabalhos da estudante Ana. Inicialmente as respostas dela aos questionamentos da TAPE 1.

Figura 19: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 1


a) Em que essas situações são semelhantes?

R= As três resoluções são semelhantes pois pedem possibilidades baseadas em algo apresentado. A forma de calcular também foi parecida, foi utilizado o mesmo cálculo nas três situações.

b) Se o questionamento das situações fossem quais possibilidades ao invés de quantas, como você resolveria essas situações?

① Pão de centeio com recheio de frango.
Pão de centeio com recheio de presunto.
Pão de centeio com recheio de queijo.
Pão de centeio com recheio vegetariano.

Pão integral com frango
Pão integral com presunto
Pão integral com queijo
Pão integral com recheio vegetariano.

② calça 1, sapato 1, camisa 1; calça 1, sapato 1, camisa 2; calça 1, sapato 1, camisa 3; calça 1, sapato 1, camisa 4; calça 2, sapato 1, camisa 1; calça 2, sapato 1, camisa 2; calça 2, sapato 1, camisa 3; calça 2, sapato 1, camisa 4; calça 3, sapato 1, camisa 1; calça 3, sapatos, camisa 2; calça 3, sapato 1, camisa 3; calça 3, sapato 1, camisa 4; calça 1, sapato 2, camisa 1; calça 1, sapato 2, camisa 2; calça 1, sapato 2, camisa 3; calça 1, sapato 2, camisa 4; são 12 possibilidades com o sapato 1 + 12 possibilidades com o sapato 2, que também são 12, totalizando 24. (só mudar o sapato nas possibilidades já apresentadas.)

③ telefone 1, plano 1, pagamento 1; mudando o plano e o pagamento são 6 possibilidades.

c) Elabore uma situação semelhante a essas e resolva-a.

Situação: Uma pessoa foi a uma sorveteria que tem 5 tipos de sorvete, 3 tipos de cobertura e 2 tipos de acompanhamentos. Quantas possibilidades de sorvetes diferentes essa pessoa pode montar?

R= 5 · 3 · 2
15 · 2 = 30

R= Essa pessoa pode montar 30 tipos diferentes de sorvete.

③ cont. telefone 2, plano 1, pagamento 1; mudando o plano e o pagamento são mais 6 possibilidades.
telefone 3, plano 1, pagamento 1; mudando o plano e o pagamento são mais 6 possibilidades, totalizando assim 18 possibilidades.

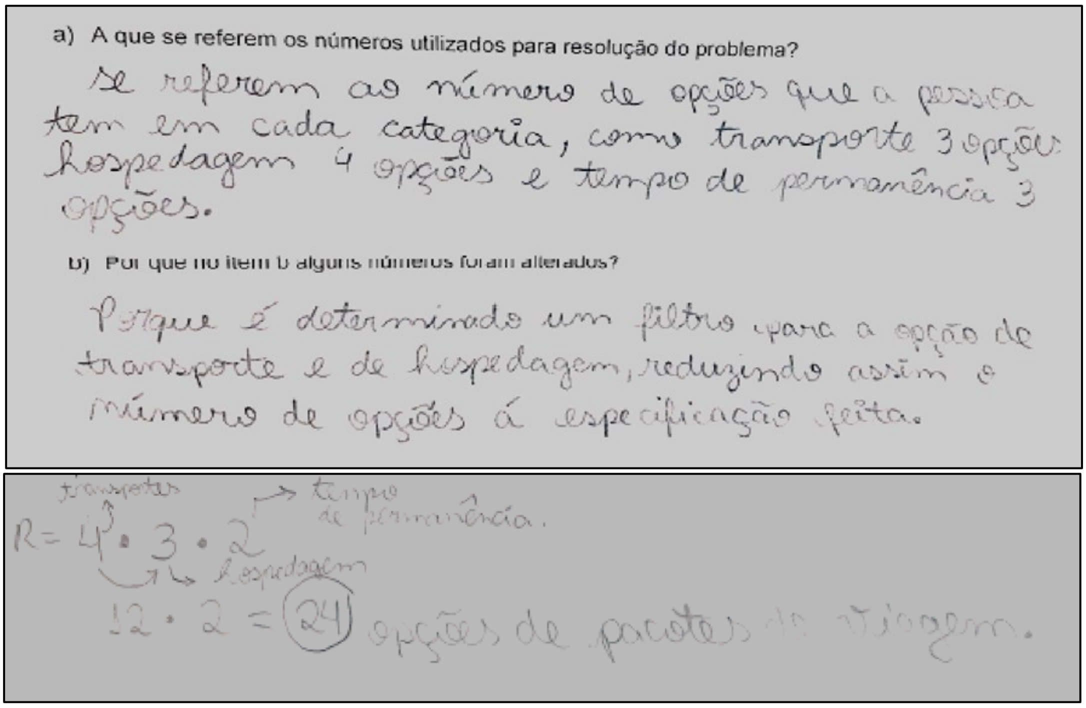
Fonte: Autores

Conforme o que era esperado como resposta a esse questionamento, Ana conseguiu identificar a mesma operação nas resoluções das situações apresentadas e que eram sempre solicitadas as possibilidades de acordo com as opções apresentadas.

É perceptível nas respostas de Ana ao questionamento do item b que ela diferencia “quantas” de “quais” ao responder esse item. No item c nota-se que a aluna apresenta um exemplo de acordo com o que é esperado, mostrando apresentar compreensão das ideias de princípio multiplicativo apresentadas até o momento.

Na sequência, apresentam-se as respostas de Ana aos questionamentos da TAPE 2 em que é apresentada a ideia de princípio multiplicativo, excluindo-se algumas opções.

Figura 20: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 2



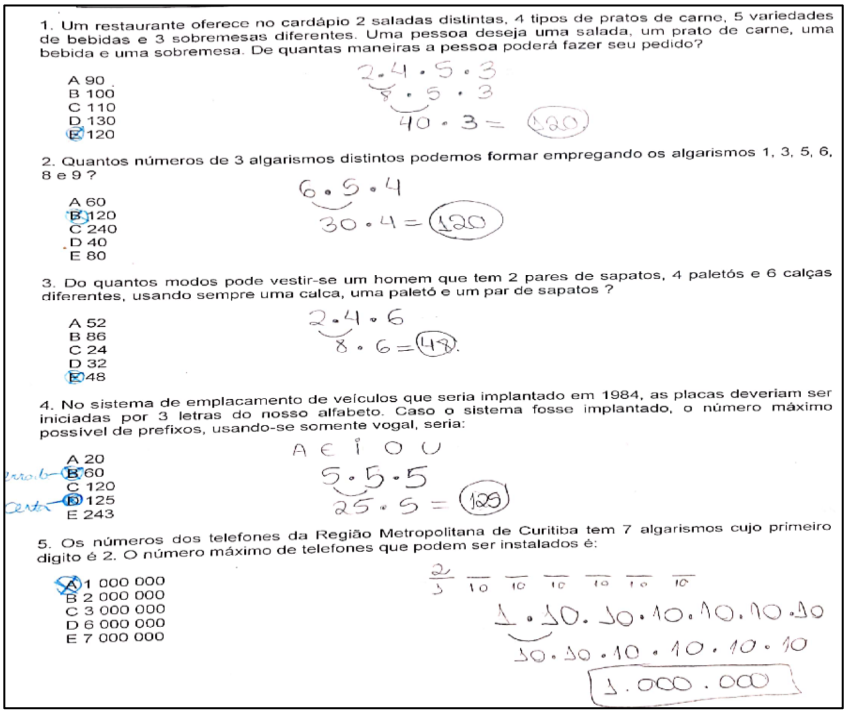
Fonte: Autores

As respostas de Ana aos questionamentos a e b da TAPE 2 mostram sua interpretação ao texto das situações apresentadas e os números envolvidos nas resoluções. É notável a percepção de Ana de que os números envolvidos no cálculo do princípio multiplicativo referem-se exatamente às quantidades de opções fornecidas em cada situação.

Ana respondeu ao item c que propõe a resolução de uma situação problema relacionada à situação apresentada. De acordo com a resolução de Ana no item c, podemos perceber que ela seguiu a compreensão de interpretação do enunciado e dos números envolvidos nas resoluções apresentadas nas respostas aos questionamentos a e b para desenvolver seu cálculo de acordo com o enunciado do item c.

As resoluções das TAPE 1 e 2 e do trabalho 1 foram presenciais com o auxílio do professor. A seguir são apresentadas as resoluções de Ana no trabalho 1. Foi solicitado que os alunos seguissem somente seus entendimentos baseados nas resoluções das TAPE 1 e 2 para resolverem o trabalho 1.

Figura 21: Resolução da aluna Ana as situações apresentadas no trabalho 1



1. Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido?

A 90
B 100
C 110
D 130
E 120

2 · 4 · 5 · 3
8 · 5 · 3
40 · 3 = 120

2. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar empregando os algarismos 1, 3, 5, 6, 8 e 9 ?

A 60
B 120
C 240
D 40
E 80

6 · 5 · 4
30 · 4 = 120

3. Do quantos modos pode vestir-se um homem que tem 2 pares de sapatos, 4 paletós e 6 calças diferentes, usando sempre uma calca, uma paletó e um par de sapatos ?

A 52
B 86
C 24
D 32
E 48

2 · 4 · 6
8 · 6 = 48

4. No sistema de emplacamento de veículos que seria implantado em 1984, as placas deveriam ser iniciadas por 3 letras do nosso alfabeto. Caso o sistema fosse implantado, o número máximo possível de prefixos, usando-se somente vogal, seria:

A 20
errado — B 60
C 120
certo — D 125
E 243

A E I O U
5 · 5 · 5
25 · 5 = 125

5. Os números dos telefones da Região Metropolitana de Curitiba tem 7 algarismos cujo primeiro digito é 2. O número máximo de telefones que podem ser instalados é:

A 1 000 000
B 2 000 000
C 3 000 000
D 6 000 000
E 7 000 000

$\frac{2}{1}$ $\frac{}{10}$ $\frac{}{10}$ $\frac{}{10}$ $\frac{}{10}$ $\frac{}{10}$ $\frac{}{10}$
1 · 10 · 10 · 10 · 10 · 10 · 10
10 · 10 · 10 · 10 · 10 · 10
1.000.000

Fonte: Autores

Ana resolveu corretamente à Tarefa 1 do trabalho que apresenta uma situação-problema de princípio multiplicativo das opções de salada, carne, bebida e sobremesa. A tarefa 2 que apresenta um arranjo de 6 algarismos três a três, também foi solucionado corretamente por meio do princípio multiplicativo, não utilizando a fórmula. A terceira situação apresentada é de modos de se vestir que também foi resolvida corretamente por Ana. A tarefa 4, sobre o emplacamento antigo de veículos iniciando por 3 vogais, também foi interpretada e resolvida corretamente por Ana. O mesmo ocorreu com a situação 5 apresentada sobre os prefixos de telefone.

Durante a resolução das tarefas deste trabalho, as questões em que os demais alunos solicitaram esclarecimentos foram, principalmente, a questão 6, sobre números formados por algarismos, que, além de envolver a mesma ideia de princípio multiplicativo em um arranjo, ainda apresenta a questão do algarismo zero que não pode estar no início do número formado. Nesses casos, os alunos foram questionados sobre a diferença entre número e algarismo, e que um número de 3 algarismos tem 3 ordens, unidade, dezena e centena, e foram inseridas as “casinhas”, como no caso das resoluções das situações apresentadas nas TAPE. Essas “casinhas” correspondem às posições envolvidas na situação abordada, e servem para organizar o raciocínio sobre quantas possibilidades há para cada posição.

Na atividade 6, os alunos foram questionados sobre a necessidade de fazer em separado os cálculos dos pares terminados em zero e depois terminados em 2 e 4 para os números pares possíveis de se formar com os algarismos disponíveis.

Ana utiliza o princípio multiplicativo das possibilidades de cada uma das posições, conhecido como “método das casinhas”, e responde corretamente a atividade 7, que também apresenta situação de cardápio de restaurante com opções de pratos quentes, saladas e de sobremesas, e questiona de quantas maneiras diferentes um cliente pode se servir escolhendo uma opção de prato quente, uma de salada e uma de sobremesa. O mesmo ocorre com a atividade 8, sobre a quantidade de números de três algarismos distintos que existem.

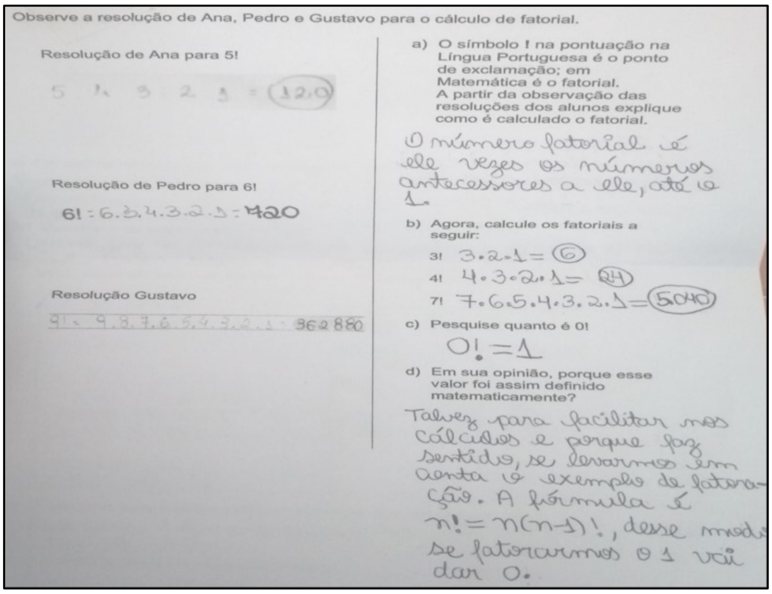
Seguindo o mesmo raciocínio, Ana resolve a situação problema 9 sobre a quantidade possível de placas antigas e atuais de veículos. Da mesma forma, Ana resolveu a situação 10 que questiona quantas palavras de três letras podem ser formadas de um alfabeto de 26 letras. A questão 11 segue a mesma ideia, solicitando a quantidade de possibilidades de entrada e saída de um estádio, saindo por um portão diferente do que foi utilizado como entrada.

Em todas as questões Ana utilizou a ideia das casinhas com a quantidade de opções representada embaixo e seguiu o raciocínio esperado para solução da atividade.

De acordo com o desempenho de Ana nas TAPE 1 e 2 e no trabalho 1, é possível verificar indícios de que ela tenha compreendido as ideias de princípio multiplicativo e aplicado essas ideias na resolução das situações apresentadas no trabalho 1.

As TAPE 3, 4, 5 e o trabalho 2 abordam o conteúdo fatorial. A seguir são apresentadas as resoluções de Ana para essas tarefas.

Figura 22: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 3


Observe a resolução de Ana, Pedro e Gustavo para o cálculo de fatorial.

Resolução de Ana para 5!

5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

Resolução de Pedro para 6!

6! = 6.5.4.3.2.1 = 720

Resolução Gustavo

9! = 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 362 880

a) O símbolo ! na pontuação na Língua Portuguesa é o ponto de exclamação; em Matemática é o fatorial. A partir da observação das resoluções dos alunos explique como é calculado o fatorial.

O número fatorial é ele vezes os números antecessores a ele, até o 1.

b) Agora, calcule os fatoriais a seguir:

3! 3.2.1 = 6

4! 4.3.2.1 = 24

7! 7.6.5.4.3.2.1 = 5040

c) Pesquise quanto é 0!

0! = 1

d) Em sua opinião, porque esse valor foi assim definido matematicamente?

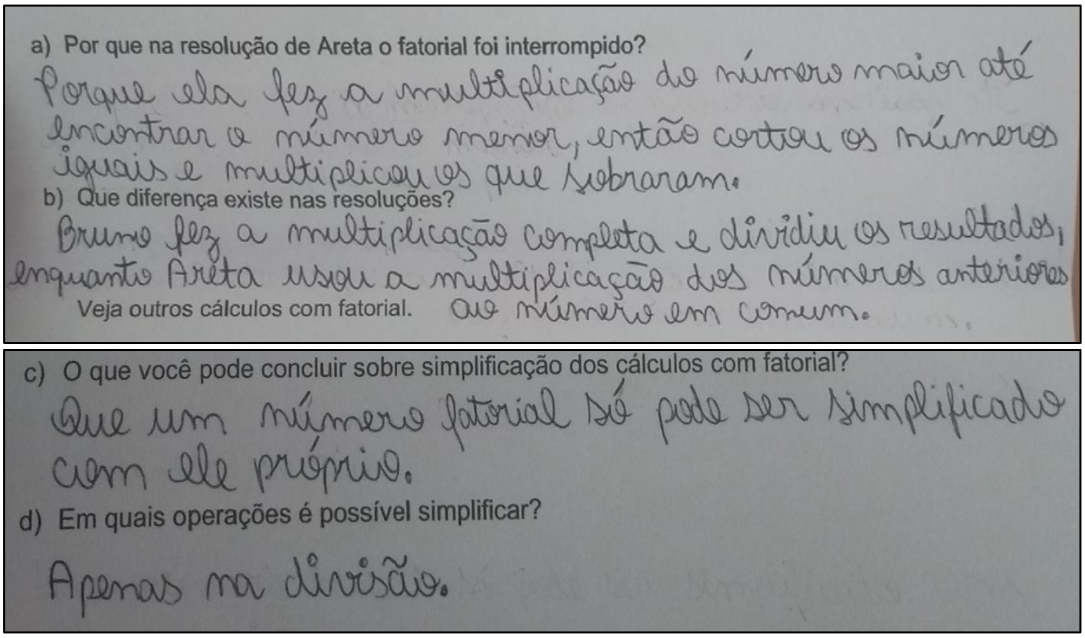
Talvez para facilitar nos cálculos e porque faz sentido, se levarmos em conta o exemplo de fatoração. A fórmula é n! = n(n-1)!, desse modo se fatorarmos o 1 vai dar 0.

Fonte: Autores

Ana apresentou sua explicação sobre o cálculo do fatorial e resolveu de forma correta os cálculos de fatorial 3!, 4! e 7!, mostrando compreensão desse cálculo demonstrado na TAPE. Também apresentou o valor de 0! obtido por meio de pesquisa. A resposta esperada para o item d seria que o valor de 0! não poderia ser 0 porque iria zerar o valor do fatorial, sendo definido como 1 que é o elemento neutro da multiplicação.

O objetivo da TAPE 4 é entender cálculo de divisão de fatorial com simplificação. A resposta de Ana ao item a explica o que aparece no cálculo simplificado. No item b ela explica o que entendeu no cálculo sem a simplificação e a diferença entre os dois cálculos.

Figura 23: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 4

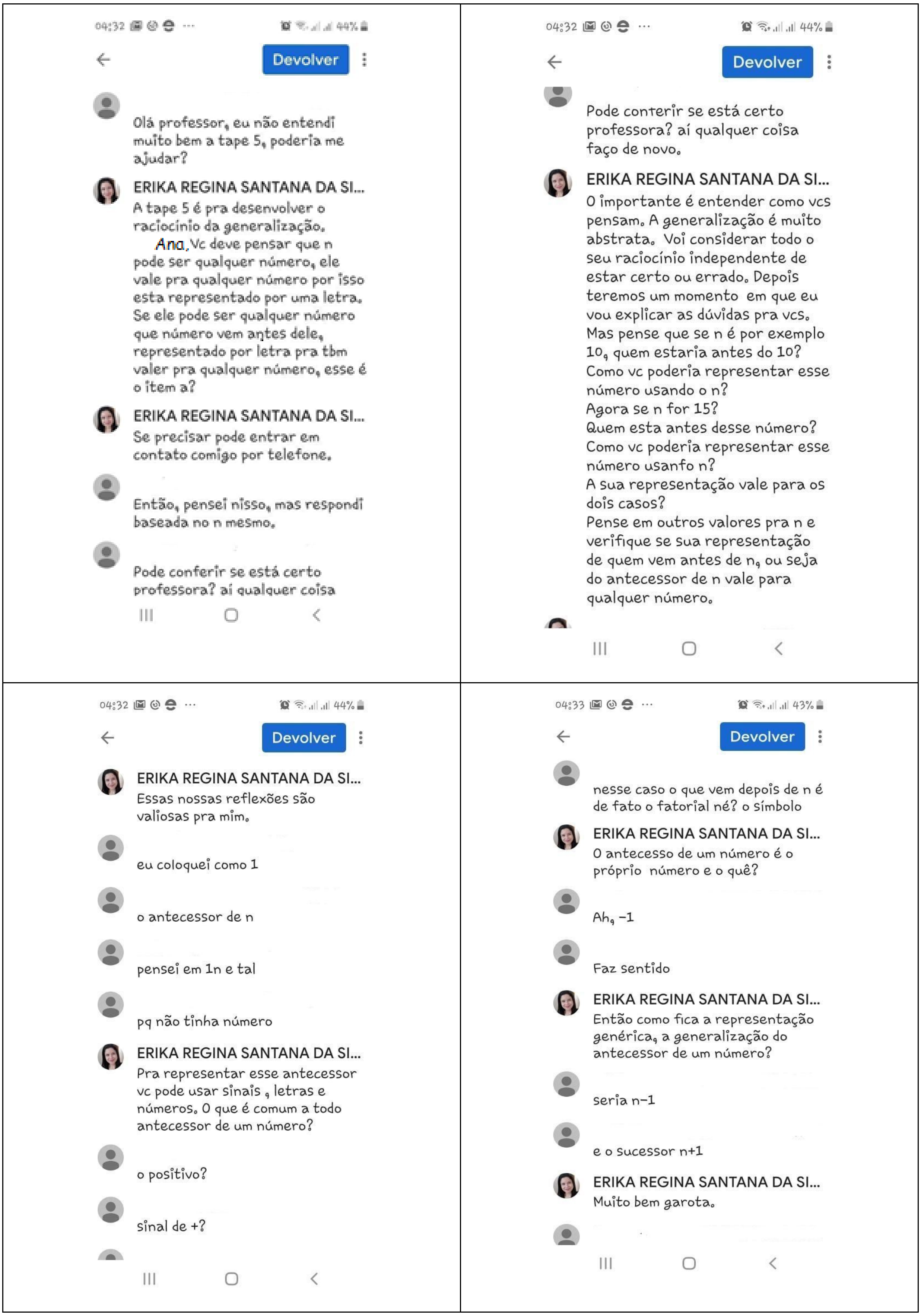


Fonte: Autores

No item c a aluna apresenta sua conclusão sobre a simplificação, que está incompleta, pois seria esperada uma resposta mais completa, em que fosse possível simplificar em uma divisão de fatorial que tivesse o mesmo número multiplicando e dividindo e no item d. Ela responde a operação que permite esse tipo de simplificação, no caso também uma resposta incompleta, pois a operação que é possível simplificar é a divisão em que aparece multiplicação e divisão pelo mesmo número.

A tarefa 5 aborda a generalização do fatorial na resolução do cálculo. Os alunos apresentaram bastante dificuldade para generalizar trabalhando algebricamente. Ana foi uma das alunas que fez vários questionamentos para resolver a tarefa 5. A seguir é apresentada a troca de mensagens de Ana com a professora em razão do ensino remoto.

Figura 24: Troca de mensagens entre a professora e Ana

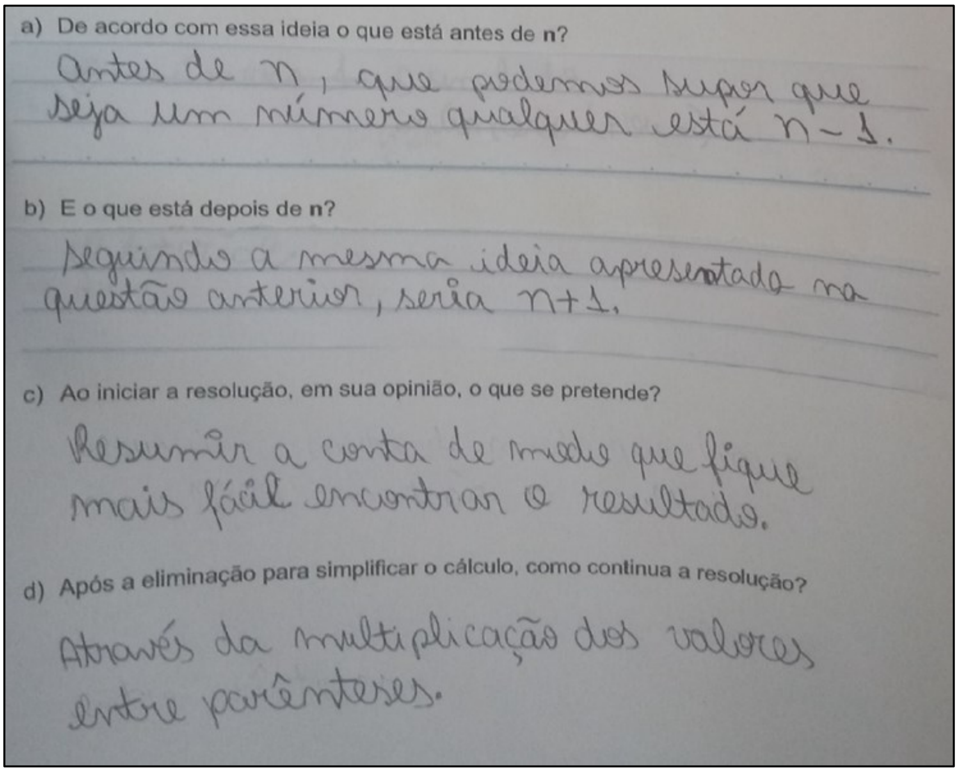


Fonte: Autores

Nessa troca de mensagem é possível perceber a preocupação de Ana em compreender, e a minha em não responder e anular a reflexão de Ana. Geralmente os alunos não conseguem entender que a letra está ocupando uma posição numérica, nesse caso. Ana respondia 1, n, 1n e até o símbolo de fatorial respondendo que vem logo após. Ana só pensou em incluir -1 a n quando foi questionada sobre o antecessor de um número ser o próprio número e algo mais, incluindo n. Outros alunos enviaram a mesma mensagem de dúvida, e a resposta que receberam foi a mesma de Ana, mas a maioria desistiu de refletir, não chegando a uma conclusão.

A seguir, são apresentadas as respostas de Ana aos questionamentos da TAPE 5 após a troca de mensagens. Aparentemente as respostas aos itens a e b a respeito do antecessor e do sucessor de n foram compreendidas.

Figura 25: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 5


a) De acordo com essa ideia o que está antes de **n**?

Antes de n, que podemos supor que seja um número qualquer está n-1.

b) E o que está depois de **n**?

Seguindo a mesma ideia apresentada na questão anterior, seria n+1.

c) Ao iniciar a resolução, em sua opinião, o que se pretende?

Resumir a conta de modo que fique mais fácil encontrar o resultado.

d) Após a eliminação para simplificar o cálculo, como continua a resolução?

Através da multiplicação dos valores entre parênteses.

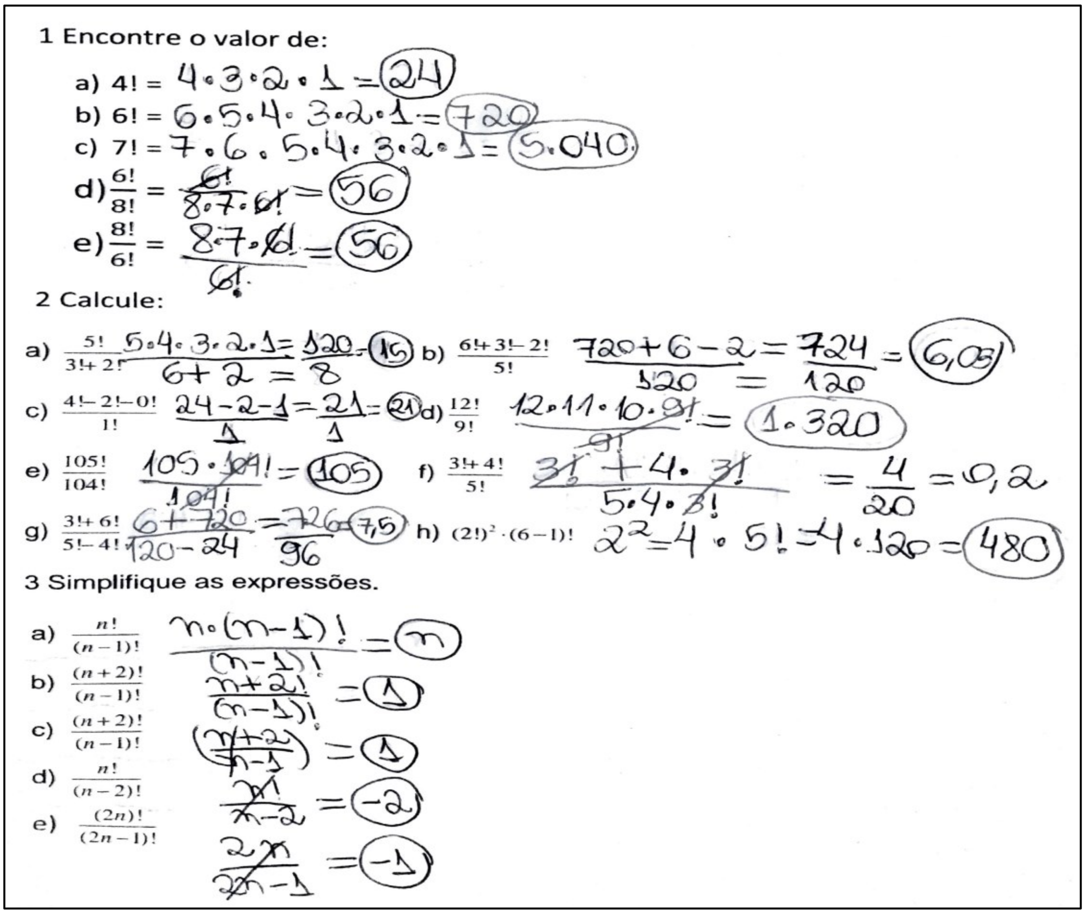
Fonte: Autores

A resposta de Ana para o item c é coerente, pensando-se na simplificação para desenvolver a resolução de fatorial algébrico. Essa questão não foi questionada por ela. É possível inferir que "resumir a conta" se refere a simplificação.

No item d, a resposta de Ana está de acordo com o que está apresentado nas resoluções a multiplicação dos valores restantes, após a simplificação. A expressão entre parênteses refere-se ao cálculo das expressões restantes após a simplificação.

Alguns erros se apresentam na resolução de Ana no trabalho 2, como no item d da atividade 1, cuja resposta é 1/56, na simplificação do item f da atividade 2 e nas simplificações das expressões da atividade 3.

Figura 26: Resolução da aluna Ana aos cálculos propostos no trabalho 2



1 Encontre o valor de:

a) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

c) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$

d) $\frac{6!}{8!} = \frac{\cancel{6!}}{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}} = 56$

e) $\frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$

2 Calcule:

a) $\frac{5!}{3!+2!}$ $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6+2} = \frac{120}{8} = 15$

b) $\frac{6!+3!-2!}{5!}$ $\frac{720+6-2}{120} = \frac{724}{120} = 6{,}03$

c) $\frac{4!-2!-0!}{1!}$ $\frac{24-2-1}{1} = \frac{21}{1} = 21$

d) $\frac{12!}{9!}$ $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!}} = 1.320$

e) $\frac{105!}{104!}$ $\frac{105 \cdot \cancel{104!}}{\cancel{104!}} = 105$

f) $\frac{3!+4!}{5!}$ $\frac{\cancel{3!} + 4 \cdot \cancel{3!}}{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}} = \frac{4}{20} = 0{,}2$

g) $\frac{3!+6!}{5!-4!}$ $\frac{6+720}{120-24} = \frac{726}{96} = 7{,}5$

h) $(2!)^2 \cdot (6-1)!$ $2^2 = 4 \cdot 5! = 4 \cdot 120 = 480$

3 Simplifique as expressões.

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$ $\frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$

b) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$ $\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = 1$

c) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$ $\left(\frac{\cancel{n}+2}{\cancel{n}-1}\right) = 1$

d) $\frac{n!}{(n-2)!}$ $\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}-2} = -2$

e) $\frac{(2n)!}{(2n-1)!}$ $\frac{2n}{\cancel{2n}-1} = -1$

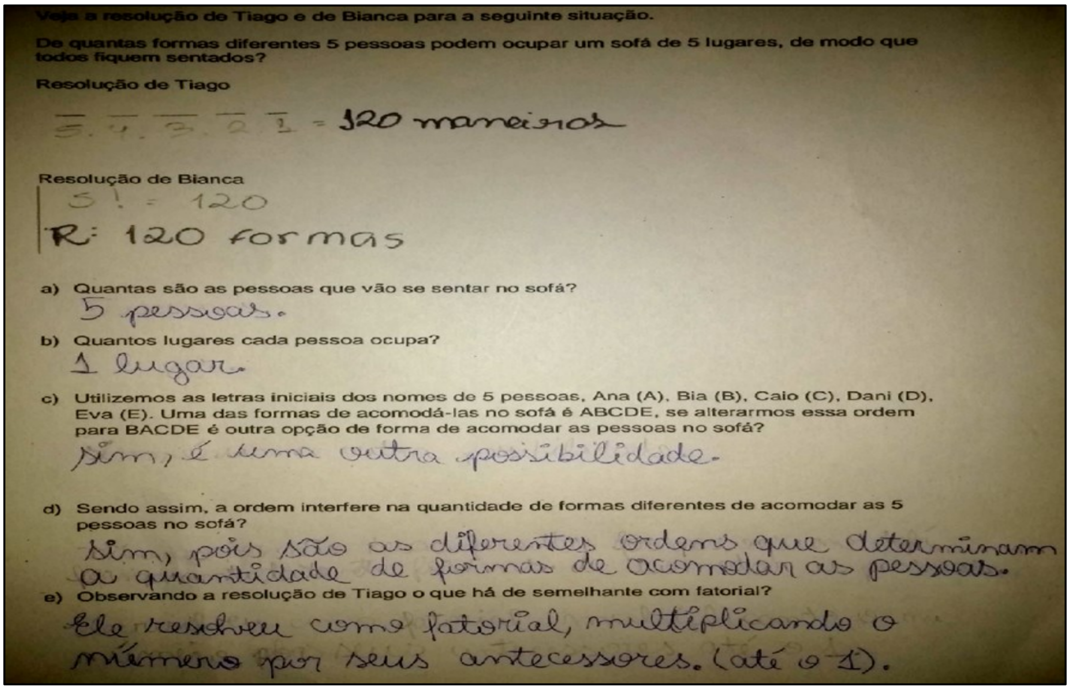
Fonte: Autores

Ana errou várias questões, principalmente sobre simplificação, que envolvem cálculos algébricos. Desse modo, é perceptível que os cálculos com fatorial foram parcialmente compreendidos.

Houve uma aula online, após a entrega do trabalho 2, para esclarecer as dúvidas dos alunos a respeito dos cálculos de fatorial envolvendo simplificação, cálculos aritméticos e algébrico na generalização. Durante essa aula, foram propostas questões bem simples de simplificação algébrica de fatorial, após as explicações. Essa atividade proposta está no apêndice C.

A seguir, são apresentadas as respostas de Ana para os questionamentos da TAPE 6, cujo objetivo é entender situações problema de contagem que envolvem permutação.

Figura 27: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 6



Veja a resolução de Tiago e de Bianca para a seguinte situação.

De quantas formas diferentes 5 pessoas podem ocupar um sofá de 5 lugares, de modo que todos fiquem sentados?

Resolução de Tiago

5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120 maneiras

Resolução de Bianca

5! = 120

R: 120 formas

a) Quantas são as pessoas que vão se sentar no sofá?

5 pessoas.

b) Quantos lugares cada pessoa ocupa?

1 lugar.

c) Utilizemos as letras iniciais dos nomes de 5 pessoas, Ana (A), Bia (B), Caio (C), Dani (D), Eva (E). Uma das formas de acomodá-las no sofá é ABCDE, se alterarmos essa ordem para BACDE é outra opção de forma de acomodar as pessoas no sofá?

Sim, é uma outra possibilidade.

d) Sendo assim, a ordem interfere na quantidade de formas diferentes de acomodar as 5 pessoas no sofá?

Sim, pois são as diferentes ordens que determinam a quantidade de formas de acomodar as pessoas.

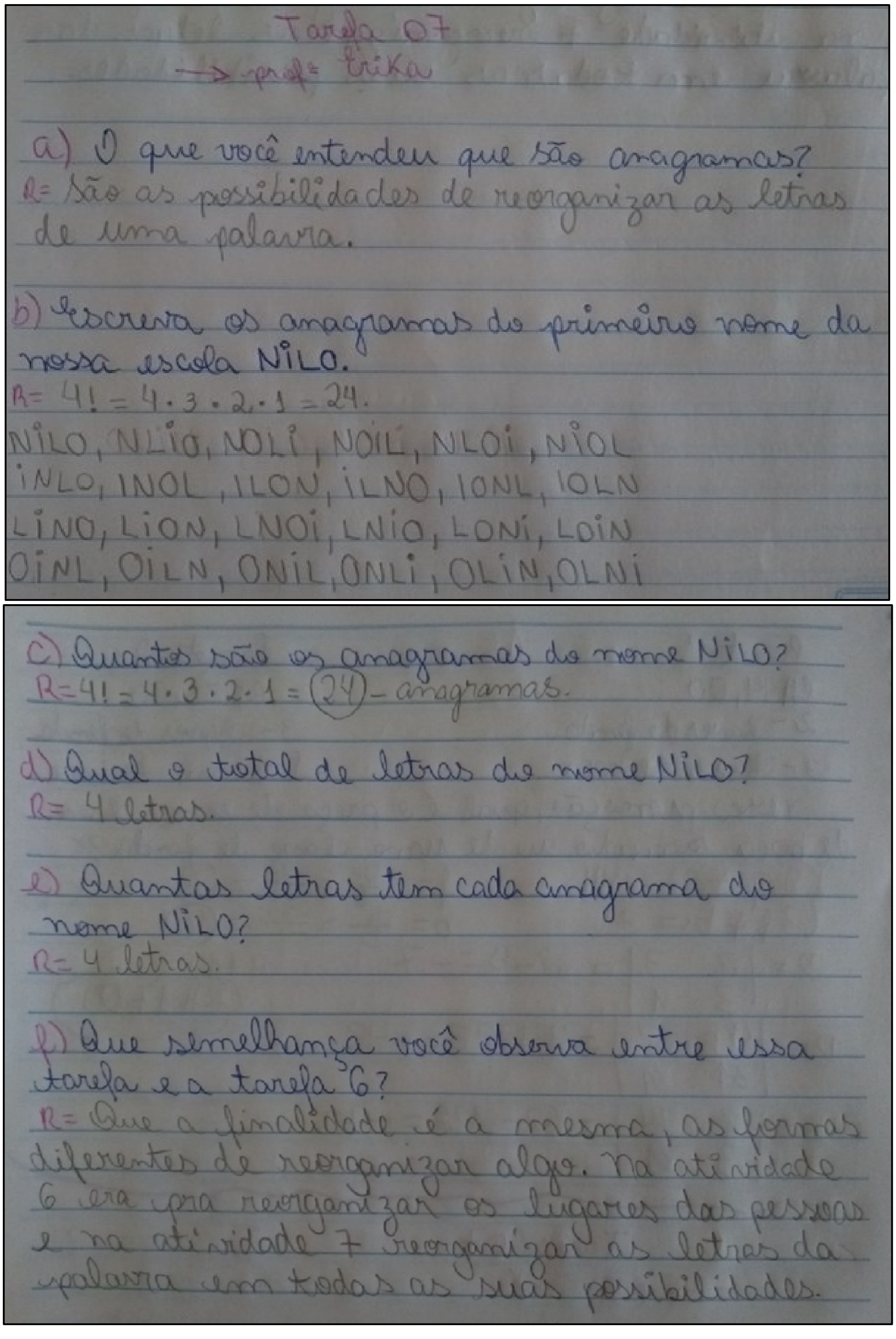
e) Observando a resolução de Tiago o que há de semelhante com fatorial?

Ele resolveu como fatorial, multiplicando o número por seus antecessores. (até o 1).

Fonte: Autores

As respostas de Ana aos questionamentos da TAPE 6 estão coerentes com o que era esperado. A resposta à questão a está correta, que o total de pessoas para se sentar ao sofá é exatamente o total de lugares, a questão b também está respondida de forma correta para que percebam que cada pessoa ocupa um lugar de cada vez e se já ocupou um lugar é uma opção a menos para ocupar o lugar seguinte. No item c, de acordo com a resposta, Ana mostra entender que a ordem interfere nessa situação. Assim, ela conclui no item d que as diferentes ordens determinam a quantidade de formas de acomodar as pessoas no sofá. No item e ela percebe a semelhança da resolução da situação com o cálculo do fatorial multiplicando o número por seus antecessores. Portanto, aparentemente, ela percebeu que a ordem interfere na quantidade de possibilidades e também que a resolução é o cálculo de fatorial.

Figura 28: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 7



Tarefa 07
→ profª Erika

a) O que você entendeu que são anagramas?
R= São as possibilidades de reorganizar as letras de uma palavra.

b) Escreva os anagramas do primeiro nome da nossa escola NILO.
R= 4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24.
NILO, NLIO, NOLI, NOIL, NLOI, NIOL
INLO, INOL, ILON, ILNO, IONL, IOLN
LINO, LION, LNOI, LNIO, LONI, LOIN
OINL, OILN, ONIL, ONLI, OLIN, OLNI

c) Quantos são os anagramas do nome NILO?
R= 4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24 – anagramas.

d) Qual o total de letras do nome NILO?
R= 4 letras.

e) Quantas letras tem cada anagrama do nome NILO?
R= 4 letras.

f) Que semelhança você observa entre essa tarefa e a tarefa 6?
R= Que a finalidade é a mesma, as formas diferentes de reorganizar algo. Na atividade 6 era pra reorganizar os lugares das pessoas e na atividade 7 reorganizar as letras da palavra em todas as suas possibilidades.

Fonte: Autores

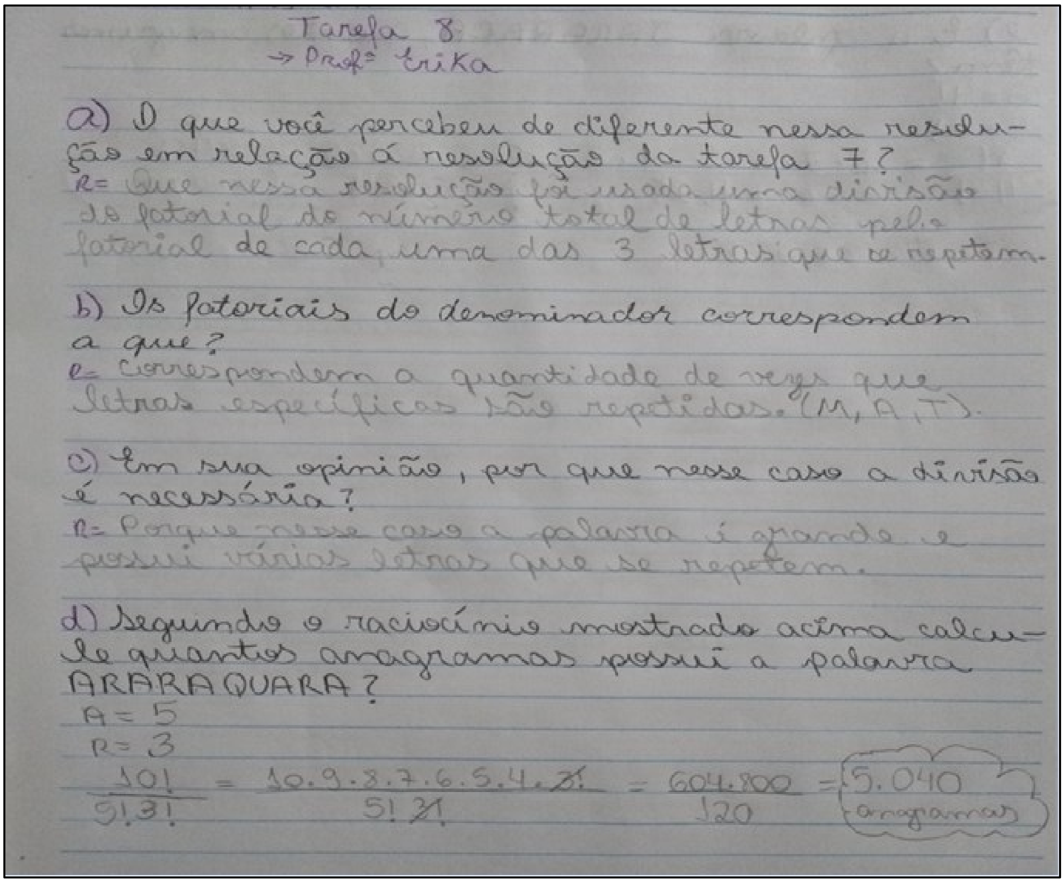
A TAPE 7 aborda anagramas, e tem por objetivo entender o que são anagramas e calcular a quantidade de anagramas de uma palavra. As respostas de Ana aos questionamentos da TAPE 7 estão coerentes com o esperado. A resposta de Ana à questão do item a mostra compreensão sobre anagramas. De acordo com sua resposta, são as possibilidades de reorganizar as letras de uma palavra. No item b, além de escrever os anagramas da palavra NILO, ela faz o cálculo, quantificando quantos são os anagramas dessa palavra, o que depois também foi respondido no item c. No item d e e, para que percebam que o total de letras da palavra NILO e a quantidade de letras de cada anagrama são iguais, pois anagramas são casos de permutação em que são utilizados o total de elementos.

Ana respondeu de forma satisfatória ao item f sobre semelhanças entre a TAPE 7 e a 6, ela responde que são formas de reorganizar algo, no caso da 6 os lugares no sofá e a 7 as letras de uma palavra.

A TAPE 8 aborda o cálculo de anagramas de palavras com letras repetidas. As respostas de Ana aos questionamentos estão coerentes com o esperado e os cálculos das situações propostas estão corretos.

No item a, Ana respondeu ao questionamento sobre a diferença na resolução dessa tarefa e a anterior que nessa há uma divisão. Ao item b respondeu que correspondem os fatoriais do denominador que correspondem às letras repetidas. A resposta ao item c é pessoal, sobre a necessidade da divisão no cálculo, e Ana menciona sobre as letras repetidas. Além disso, ela resolve corretamente as situações propostas nos itens D e E sobre a quantidade de anagramas das palavras Araraquara e Jararaca.

Figura 29: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 8


Tarefa 8:
→ Profª Erika

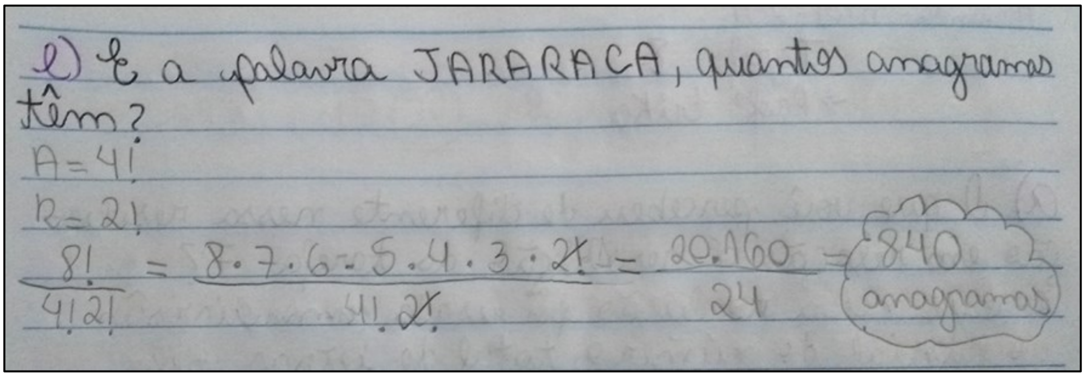
a) O que você percebeu de diferente nessa resolução em relação à resolução da tarefa 7?
R= Que nessa resolução foi usada uma divisão do fatorial do número total de letras pelo fatorial de cada uma das 3 letras que se repetem.

b) Os fatoriais do denominador correspondem a que?
R= Correspondem a quantidade de vezes que letras específicas são repetidas. (M, A, T).

c) Em sua opinião, por que nesse caso a divisão é necessária?
R= Porque nesse caso a palavra é grande e possui várias letras que se repetem.

d) Segundo o raciocínio mostrado acima calcule quantos anagramas possui a palavra ARARAQUARA?
A = 5
R = 3

$$\frac{10!}{5!3!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.\cancel{3!}}{5!\cancel{3!}} = \frac{604.800}{120} = 5.040$$ anagramas



l) E a palavra JARARACA, quantos anagramas têm?

$A = 4!$

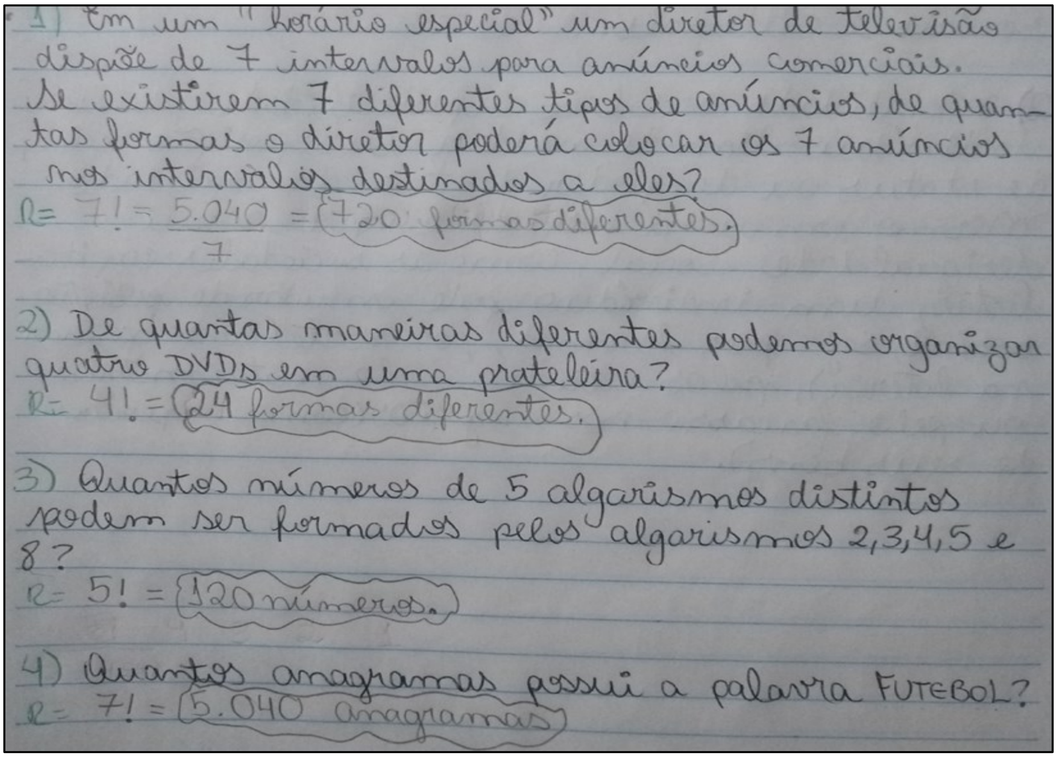
$R = 2!$

$$\frac{8!}{4!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{4! \cdot \cancel{2!}} = \frac{20.160}{24} = 840 \text{ anagramas}$$

Fonte: Autores

Na sequência, é proposto o trabalho 3 para verificação das aprendizagens construídas ao responderem e resolverem as TAPE 6, 7 e 8 que exploram o conceito de permutação.

Figura 30: Resoluções da aluna Ana as situações apresentadas no trabalho 3.



1) Em um "horário especial" um diretor de televisão dispõe de 7 intervalos para anúncios comerciais. Se existirem 7 diferentes tipos de anúncios, de quantas formas o diretor poderá colocar os 7 anúncios nos intervalos destinados a eles?

R= $7! = \frac{5.040}{7} = 720$ formas diferentes.

2) De quantas maneiras diferentes podemos organizar quatro DVDs em uma prateleira?

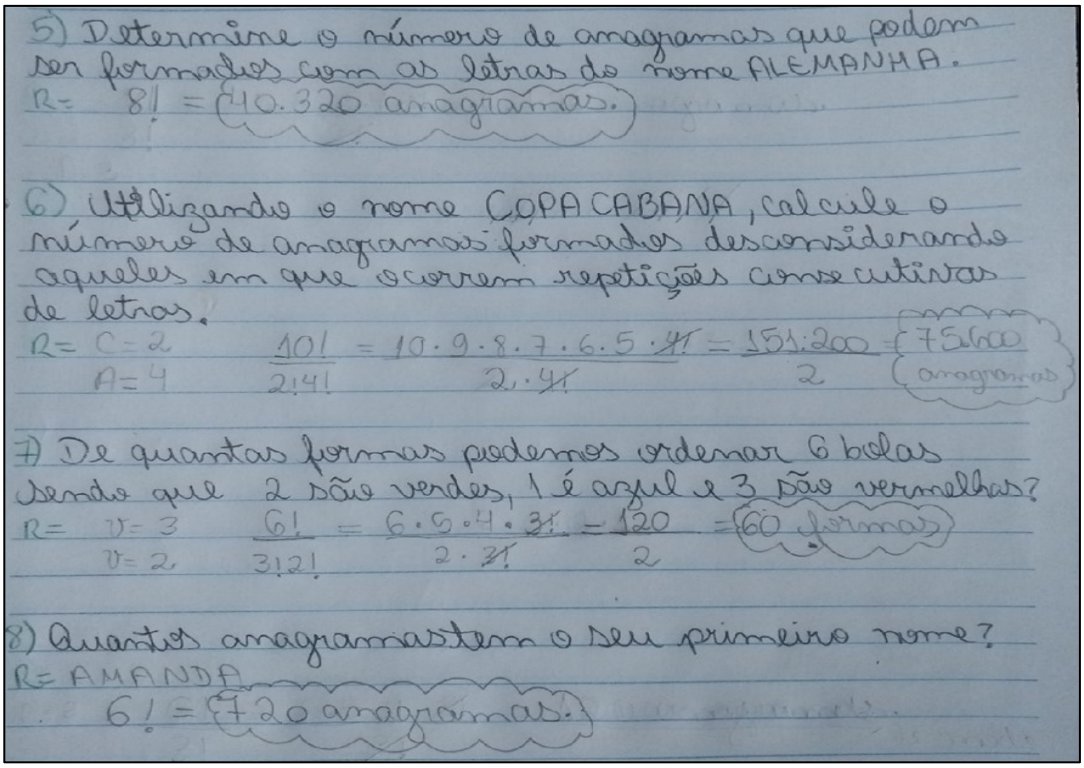
R= $4! = 24$ formas diferentes.

3) Quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados pelos algarismos 2,3,4,5 e 8?

R= $5! = 120$ números.

4) Quantos anagramas possui a palavra FUTEBOL?

R= $7! = 5.040$ anagramas


5) Determine o número de anagramas que podem ser formados com as letras do nome ALEMANHA.

R= 8! = 40.320 anagramas.

6) Utilizando o nome COPACABANA, calcule o número de anagramas formados desconsiderando aqueles em que ocorrem repetições consecutivas de letras.

R= C = 2 A = 4 $\frac{10!}{2!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot \cancel{4!}} = \frac{151.200}{2} =$ 75.600 anagramas

7) De quantas formas podemos ordenar 6 bolas sendo que 2 são verdes, 1 é azul e 3 são vermelhas?

R= V = 3 V = 2 $\frac{6!}{3!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot \cancel{3!}} = \frac{120}{2} =$ 60 formas

8) Quantos anagramas tem o seu primeiro nome?

R= AMANDA

6! = 720 anagramas.

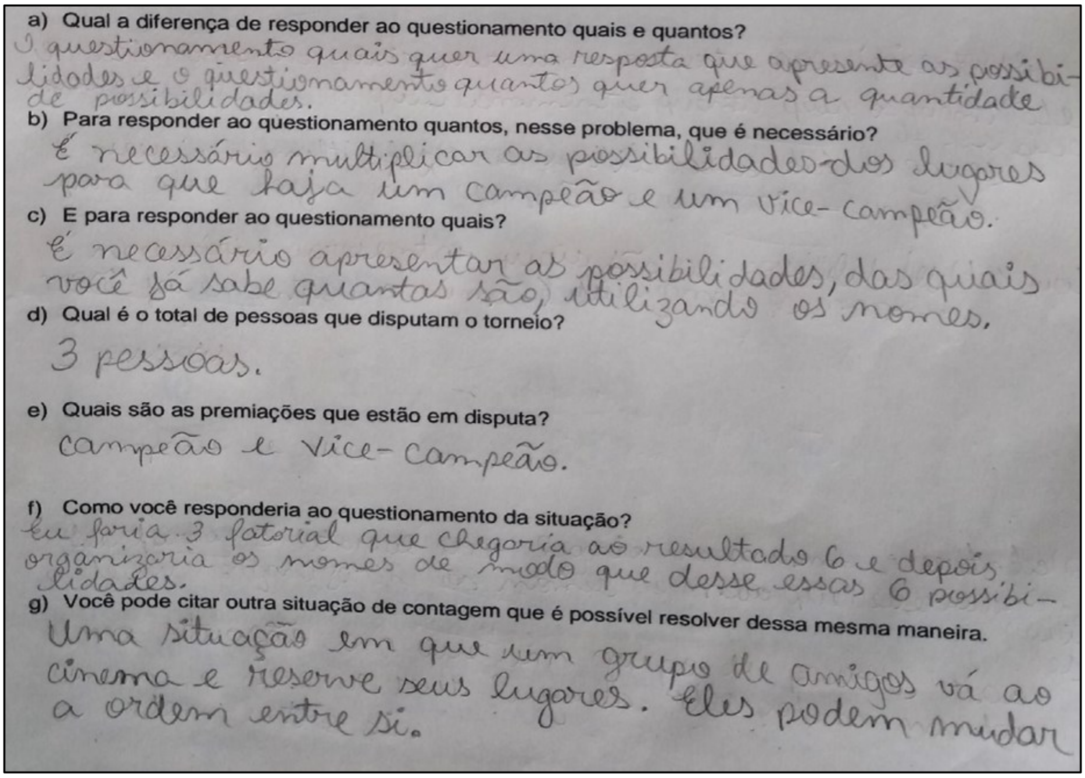
Fonte: Autores

As resoluções de Ana no trabalho 3 mostram que ela utilizou os cálculos de permutação explorados nas TAPE 6, 7 e 8. Porém, ela cometeu alguns equívocos, como dividir por 7 na situação 1, o que não é correto, e também em alguns cálculos com anagramas com letras repetidas ela não dividiu pela quantidade de letras repetidas, como na situação 5 e 8.

Houve uma aula online para esclarecer as dúvidas dos alunos com a correção de algumas questões. Os conteúdos finais já do segundo trimestre geraram bastante dúvidas e confusão, o que já era esperado dessa parte do conteúdo, pois é comum que haja dúvidas em distinguir os tipos de agrupamentos, arranjo, permutação ou combinação. Nesse momento, alguns áudios foram gravados em relação às tarefas 9, 10, 11 e 12 e os trabalhos 4 e 5. O objetivo das gravações era orientar os alunos sobre o que era esperado em cada questionamento a partir da interpretação e compreensão de cada um sobre as resoluções e enunciados.

Na sequência, foi proposto aos alunos responderem aos questionamentos da TAPE 9 que aborda cálculos de arranjo.

Figura 31: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 9



a) Qual a diferença de responder ao questionamento quais e quantos?

O questionamento quais quer uma resposta que apresente as possibilidades e o questionamento quantos quer apenas a quantidade de possibilidades.

b) Para responder ao questionamento quantos, nesse problema, que é necessário?

É necessário multiplicar as possibilidades dos lugares para que haja um campeão e um vice-campeão.

c) E para responder ao questionamento quais?

É necessário apresentar as possibilidades, das quais você já sabe quantas são, utilizando os nomes.

d) Qual é o total de pessoas que disputam o torneio?

3 pessoas.

e) Quais são as premiações que estão em disputa?

campeão e vice-campeão.

f) Como você responderia ao questionamento da situação?

Eu faria 3 fatorial que chegaria ao resultado 6 e depois organizaria os nomes de modo que desse essas 6 possibilidades.

g) Você pode citar outra situação de contagem que é possível resolver dessa mesma maneira.

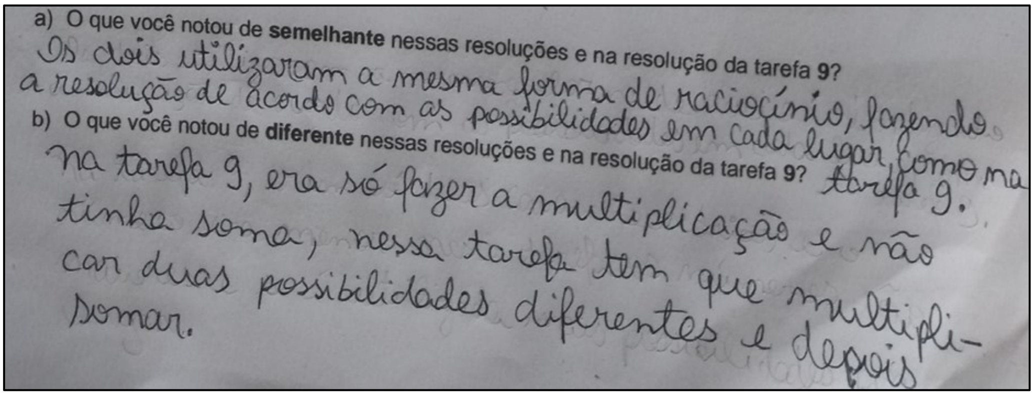
Uma situação em que um grupo de amigos vá ao cinema e reserve seus lugares. Eles podem mudar a ordem entre si.

Fonte: Autores

Ana responde da forma esperada aos questionamentos a, b e c sobre a diferença de responder ao questionamento "quantos" e "quais". Apesar de Ana ter respondido corretamente aos questionamentos d e e da TAPE 9, nota-se, a partir de sua resposta ao questionamento f e g, que Ana ainda está associando as ideias dessa TAPE à permutação, não percebendo que são 3 pessoas para disputar 2 cargos, havendo um conjunto maior de pessoas do que de cargos. Isso é perceptível no exemplo de situação semelhante que ela sugeriu no item g e pela explicação do seu cálculo no item f, que seria resolver 3!. Assim, possivelmente ela ainda não distingue arranjo de permutação.

Em seguida, os alunos respondem aos questionamentos da TAPE 10, que apresenta uma situação em que a resolução ocorre por meio da soma de dois arranjos.

Figura 32: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 10


a) O que você notou de **semelhante** nessas resoluções e na resolução da tarefa 9?

Os dois utilizaram a mesma forma de raciocínio, fazendo a resolução de acordo com as possibilidades em cada lugar, como na tarefa 9.

b) O que você notou de **diferente** nessas resoluções e na resolução da tarefa 9?

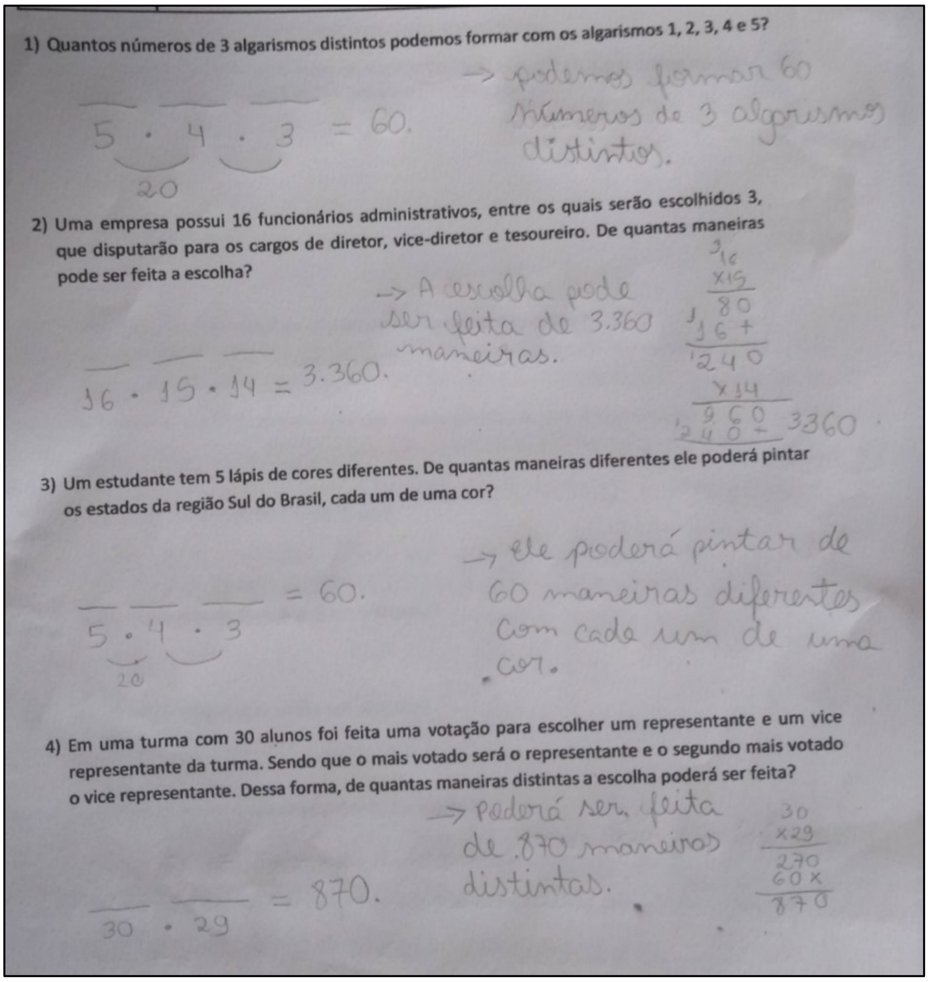
na tarefa 9, era só fazer a multiplicação e não tinha soma, nessa tarefa tem que multiplicar duas possibilidades diferentes e depois somar.

Fonte: Autores

De acordo com as respostas de Ana, nota-se que ela entendeu que a diferença dessa TAPE e da anterior é apenas a adição necessária na finalização do cálculo.

Na sequência, foi proposto o trabalho 4 para verificar as aprendizagens dos estudantes referentes às TAPE 9 e 10 sobre arranjo.

Figura 33: Resoluções da aluna Ana as situações apresentadas no trabalho 4.


1) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$

20

→ podemos formar 60 números de 3 algarismos distintos.

2) Uma empresa possui 16 funcionários administrativos, entre os quais serão escolhidos 3, que disputarão para os cargos de diretor, vice-diretor e tesoureiro. De quantas maneiras pode ser feita a escolha?

→ A escolha pode ser feita de 3.360 maneiras.

$16 \cdot 15 \cdot 14 = 3.360.$

16 × 15 = 80 + 160 = 240; 240 × 14 = 960 + 2400 = 3360

3) Um estudante tem 5 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele poderá pintar os estados da região Sul do Brasil, cada um de uma cor?

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$

20

→ ele poderá pintar de 60 maneiras diferentes com cada um de uma cor.

4) Em uma turma com 30 alunos foi feita uma votação para escolher um representante e um vice representante da turma. Sendo que o mais votado será o representante e o segundo mais votado o vice representante. Dessa forma, de quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita?

→ Poderá ser feita de 870 maneiras distintas.

$30 \cdot 29 = 870.$

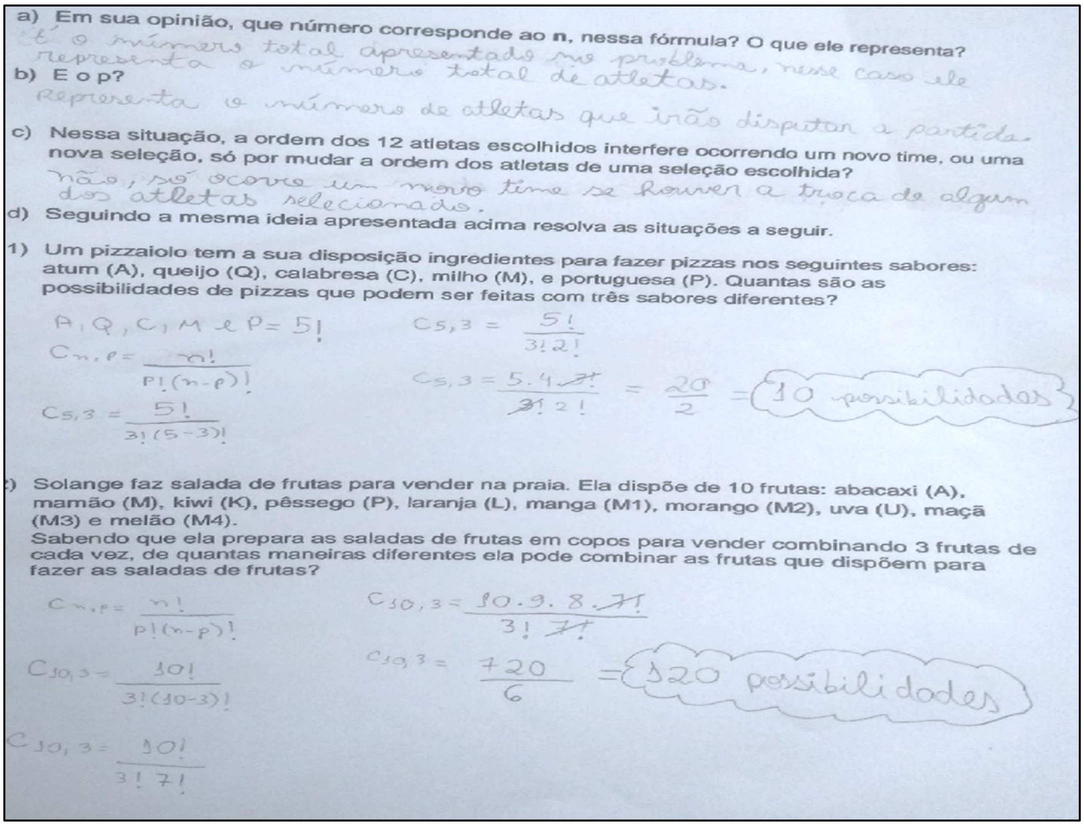
30 × 29 = 270 + 60 = 870

Fonte: Autores

Como sempre, foi solicitado aos estudantes que resolvessem os trabalhos baseados nas aprendizagens das TAPE, assim podemos inferir que Ana entendeu os cálculos de arranjo, pois acertou as situações propostas no trabalho 4.

Na sequência foi proposta aos estudantes a TAPE 11 que aborda situações que envolvem contagem por meio da combinação de agrupamentos.

Figura 34: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 11



a) Em sua opinião, que número corresponde ao **n**, nessa fórmula? O que ele representa?

É o número total apresentado no problema, nesse caso ele representa o número total de atletas.

b) E o p?

Representa o número de atletas que irão disputar a partida.

c) Nessa situação, a ordem dos 12 atletas escolhidos interfere ocorrendo um novo time, ou uma nova seleção, só por mudar a ordem dos atletas de uma seleção escolhida?

Não, só ocorre um novo time se houver a troca de algum dos atletas selecionados.

d) Seguindo a mesma ideia apresentada acima resolva as situações a seguir.

1) Um pizzaiolo tem a sua disposição ingredientes para fazer pizzas nos seguintes sabores: atum (A), queijo (Q), calabresa (C), milho (M), e portuguesa (P). Quantas são as possibilidades de pizzas que podem ser feitas com três sabores diferentes?

A, Q, C, M e P = 5!

$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$

$C_{5,3} = \frac{5!}{3!2!}$

$C_{5,3} = \frac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}2!} = \frac{20}{2} =$ 10 possibilidades

2) Solange faz salada de frutas para vender na praia. Ela dispõe de 10 frutas: abacaxi (A), mamão (M), kiwi (K), pêssego (P), laranja (L), manga (M1), morango (M2), uva (U), maçã (M3) e melão (M4).
Sabendo que ela prepara as saladas de frutas em copos para vender combinando 3 frutas de cada vez, de quantas maneiras diferentes ela pode combinar as frutas que dispõem para fazer as saladas de frutas?

$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$C_{10,3} = \frac{10!}{3!(10-3)!}$

$C_{10,3} = \frac{10!}{3!7!}$

$C_{10,3} = \frac{10.9.8.\cancel{7!}}{3!\cancel{7!}}$

$C_{10,3} = \frac{720}{6} =$ 120 possibilidades

Fonte: Autores

Ana responde de forma satisfatória aos questionamentos a e b sobre a que correspondem as letras na fórmula e à questão c, em que, nesse caso, a ordem não altera o time formado. De acordo com as respostas de Ana aos questionamentos e às resoluções das situações apresentadas na TAPE 11, infere-se que Ana compreendeu o cálculo de combinação.

Em seguida, a TAPE 12 é proposta como uma forma de revisão com questionamentos de três situações de cada tipo de agrupamento, permutação, arranjo e combinação. O objetivo é que os estudantes diferenciem situações de contagem que envolvem permutação, arranjo e combinação.

Figura 35: Respostas da aluna Ana aos questionamentos da TAPE 12

Observe a seguir três situações diferentes e suas respectivas resoluções.

Situação 1 resolvida por Danilo.

Qual é o total de anagramas da palavra BRASIL?

$6.5.4.3.2.1 \rightarrow 720$

a) Qual é o total de letras da palavra?

6 letras.

b) Cada anagrama formado terá quantas letras?

6 letras.

c) Ao trocar a ordem das letras, forma-se um novo anagrama?

Sim.

d) Sendo assim, você considera que nessa situação a ordem das letras tem importância?

Tem importância sim, pois cada vez que se muda a ordem das letras forma-se um novo anagrama.

Situação 2 resolvida por Gabriele de duas maneiras diferentes.

Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto E = { 1, 2, 3, 4, 5 }?

Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto E = {1, 2, 3, 4, 5}?

$n = 5$

$p = 3$

$A_{5,3} = \frac{5}{(5-3)!}$

C D U

$\underline{5} . \underline{4} . \underline{3} = 60$

$A_{5,3} = \frac{5!}{3!} = \frac{5.4.3!}{3!} = 60$

e) O que você entende como distinto? Caso você não saiba, pesquise o significado dessa palavra.

Distinto quer dizer diferente, sem repetição.

f) Qual é o total de elementos que podem ser utilizados para compor os números, ou seja, a quantidade de elementos do conjunto E?

5 elementos.

g) Cada agrupamento formado, ou seja, nesse caso, cada número formado tem quantos elementos?

3 elementos.

h) Ao formar um número com 3 algarismos, se mudar a ordem dos algarismos, forma-se um novo número?

Sim, forma-se.

i) Assim, você considera que nessa situação a ordem dos algarismos tem importância?

Tem.

j) Quais são as duas maneiras que Gabriele utilizou para resolver essa situação?

Ela utilizou a fórmula e também a multiplicação de acordo com os lugares ocupados pelos números por possibilidade.

Situação 3 resolvida por Luana.

Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas de um grupo de 16 pessoas?

Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas de um grupo de 16 pessoas?

$\frac{n!}{p!(n-p)!}$ $\frac{16!}{3!(16-3)!}$ $\frac{16!}{3!\,13!}$ $\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13!}{3!\,13!}$ $\frac{16\cdot 15\cdot 14}{3!}$ $\frac{3360}{6}$ 560

k) Nessa situação, qual é o total de pessoas que serão agrupadas?

16 pessoas.

l) Quantas pessoas há em cada grupo formado?

3 pessoas.

m) Uma comissão formada por Ana, Bia e Caio; ou formada por Bia, Caio e Ana, ou formada por Caio, Ana e Bia; formam comissões diferentes ou não?

não, formam a mesma comissão só que em ordens diferentes.

n) Sendo assim, a ordem das pessoas que formam a comissão tem importância ou não?

não, continua sendo a mesma comissão.

o) Veja a seguir algumas explicações sobre arranjo, permutação e combinação e relacione as situações 1, 2 e 3 à explicação correspondente.

(3) Os problemas de contagem que envolvem a ideia de combinação, em geral, estão associados à ideia de subconjunto e os agrupamentos formados não diferem pela ordem dos elementos. A fórmula para calcular combinação de n elementos p a p é:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

(1) Permutação simples é o tipo de agrupamento ordenado, sem repetição, em que entram todos os elementos em cada grupo. A fórmula para calcular a permutação de n elementos é o fatorial do total de elementos:

$$P_n = n!$$

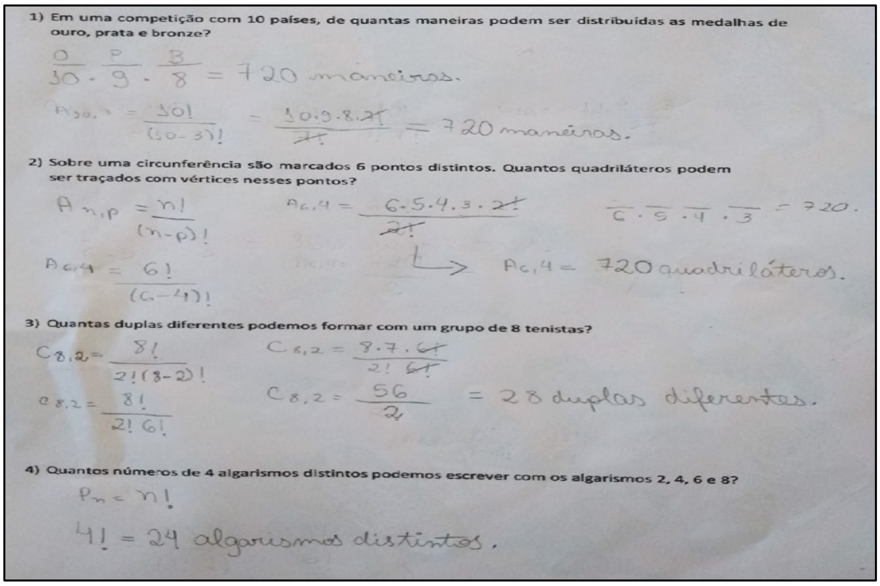
(2) Arranjo simples são todos os agrupamentos sem repetição que se podem formar com **p** elementos diferentes escolhidos entre os **n** elementos de um conjunto dado. A fórmula para calcular arranjo simples de n elementos p a p é:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Fonte: Autores

Ana respondeu de forma coerente aos questionamentos da TAPE 12 de acordo com o esperado. Assim, inferimos que Ana compreendeu os conceitos envolvidos no estudo de Análise Combinatória. Há ainda as resoluções de Ana do trabalho 5 que traz algumas situações envolvendo os agrupamentos estudados.

Figura 36: Resoluções da aluna Ana as situações apresentadas no trabalho 5.



1) Em uma competição com 10 países, de quantas maneiras podem ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?

$\underset{10}{\underline{O}} \cdot \underset{9}{\underline{P}} \cdot \underset{8}{\underline{B}} = 720$ maneiras.

$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$ maneiras.

2) Sobre uma circunferência são marcados 6 pontos distintos. Quantos quadriláteros podem ser traçados com vértices nesses pontos?

$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ $\quad A_{6,4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}}$ $\quad \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 720.$

$A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!}$ $\quad \rightarrow A_{6,4} = 720$ quadriláteros.

3) Quantas duplas diferentes podemos formar com um grupo de 8 tenistas?

$C_{8,2} = \frac{8!}{2!(8-2)!}$ $\quad C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{2!\,\cancel{6!}}$

$C_{8,2} = \frac{8!}{2!\,6!}$ $\quad C_{8,2} = \frac{56}{2} = 28$ duplas diferentes.

4) Quantos números de 4 algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 2, 4, 6 e 8?

$P_n = n!$

$4! = 24$ algarismos distintos.

Fonte: Autores

Apesar do resultado da situação 2 estar incorreto (é 360 e não 720), o tipo de agrupamento escolhido para resolução de cada situação está correto. Dessa forma, Ana possivelmente compreendeu os conceitos trabalhados nas TAPES, mostrando isso com suas respostas aos questionamentos e no seu desempenho nos trabalhos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho era investigar a utilização da Análise da Produção Escrita como estratégia de ensino para aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória para alunos do Ensino Médio, baseada nas experiências prévias de trabalhos que utilizaram a Análise da Produção Escrita como estratégia de ensino.

Para desenvolver as TAPES, foram tomados como referência os procedimentos de Minato (2019), Doneze (2019) e Pereira (2019), que utilizam produções escritas de alunos e elaboram TAPE a partir dos objetivos previamente definidos.

Durante o desenvolvimento dessa pesquisa ocorreram os três momentos do trabalho com TAPE, o primeiro de coleta de produções escritas de alunos por meio da resolução de listas de tarefas, o segundo momento de elaboração das Tarefas de Análise da Produção Escrita a partir das resoluções coletadas e o terceiro momento de ensinar Análise Combinatória utilizando as tarefas elaboradas.

O primeiro momento que ocorreu em 2019 foi fundamental para obtenção de produções escritas para a continuidade desse trabalho. Caso algum colega se interesse em elaborar TAPE para outro conteúdo, é importante definir os objetivos e as TAPE que pretende produzir antes do momento desta coleta, pois é possível já propor tarefas que exijam produções escritas que se pretende utilizar. Como isso não ocorreu durante essa experiência, eram observadas as produções escritas e pensados os questionamentos que podiam ser feitos.

No segundo momento da elaboração das TAPE é importante listar as principais ideias necessárias ao entendimento dos conceitos, apesar de conhecermos os conteúdos e sabermos sobre pré-requisitos e sequência de abordagem dos conceitos. Cada profissional da educação tem uma preferência de ordem de apresentação dos conceitos e exemplos que considera representativos; isso tudo pode ser aproveitado nessa etapa. A partir da lista das principais ideias se definem os objetivos de cada TAPE e quantas TAPE são necessárias para esgotar o que é preciso explicar.

Esta pesquisa mostrou que a elaboração das TAPES, a partir de produções escritas genuínas de alunos, contribui para que o estudante que responder aos questionamentos das TAPE se identifique com tal escrita, resolução e resposta. Além disso, as TAPE visam chamar a atenção dos estudantes para detalhes fundamentais dos conceitos estudados por meio de questionamentos, isso difere dos exemplos trazidos pelos livros didáticos, que normalmente apresentam questões rotineiras e suas resoluções para os alunos acompanharem e reproduzirem.

Os resultados do terceiro momento mostram que houve aprendizagem dos principais conceitos envolvidos no ensino de Análise combinatória ao utilizar uma estratégia de ensino com as Tarefas de Análise da Produção Escrita. Isso ficou evidente nas respostas aos questionamentos e nas resoluções apresentadas por Ana na resolução das TAPE e nas resoluções das tarefas dos trabalhos aplicados.

As TAPE 1 e 2 e o trabalho 1 envolvem princípio multiplicativo, conteúdo esse já desenvolvido em anos escolares anteriores com a ideia de possibilidades. Sendo assim, pode-se considerar que alguns dos alunos já tiveram contato com esse conteúdo, mas infere-se que a TAPE contribuiu para compreensão dos que já tinham esse conhecimento, como uma forma de revisão ou como um novo aprendizado, no caso dos alunos que não tiveram esse contato ou que não se recordem desse conteúdo.

Já era esperado que, enquanto o cálculo de fatorial estivesse somente aritmético, os alunos estariam com facilidade na compreensão, e, ao introduzir a simplificação, e a generalização para o cálculo algébrico, muitas dúvidas surgiriam. Os alunos que entraram em contato, como Ana, foram questionados da mesma forma, mas alguns não foram além na troca de mensagens. A aula online foi necessária nesse momento para que os alunos não desanimassem, continuando as ideias desenvolvidas cheios de dúvidas. Entretanto, ocorreu pouca participação dos alunos na aula online. Esse foi um dos problemas enfrentados pelos professores no ensino remoto com os alunos acostumados com o ensino presencial.

Atividades que propõem reflexão e interpretação não são vistas com muita frequência como tarefas matemáticas. Alguns alunos entendem que atividade matemática obrigatoriamente tem que ter como resultado números e cálculos. Uma aluna chegou a questionar se as tarefas propostas eram “matéria”, ou seja, ela questionava se as tarefas faziam parte do conteúdo de Matemática do 2º ano do Ensino Médio.

Algumas possibilidades para aprofundar as análises dos resultados apresentados é fazer ajustes em algumas TAPE a partir dessas análises. Por exemplo, na TAPE 5, da generalização do fatorial, é possível que seja necessário fazer, ao menos, três propostas com diferentes níveis de dificuldade envolvendo essa ideia.

Em 2021, coincidentemente, a autora desta pesquisa ministrou aulas remotas para a turma da irmã de Ana. Em uma aula, a irmã de Ana divulgou um trabalho da irmã, que é autora de um livro aos 17 anos de idade. Ana acessou o ambiente de aula por alguns minutos, e relatou a experiência no ano anterior com o ensino por meio das TAPE, e comentou que, ao realizar o Enem como treineira, acertara várias questões de Matemática do conteúdo de Análise Combinatória, ensinado por meio das TAPE. Dessa forma, é possível entender que as

TAPE utilizadas como instrumentos para o ensino do conteúdo de Análise combinatória tiveram um bom resultado e possibilitaram aprendizagem, apesar do ensino remoto. Não podermos afirmar que, na construção do conhecimento de Ana, houve apenas influência das TAPE ou não, mas toda a condução partiu desse instrumento.

A autora desta pesquisa leciona na rede estadual de educação do Paraná desde 2005, com experiência na modalidade de ensino EJA, além do ensino regular, e, em sua prática sempre há muitos questionamentos de forma oral com os estudantes, há listas de atividades que contemplem diferentes exemplos de abordagem dos conceitos, há momentos de correção e de tirar dúvidas. Assim, normalmente ocorre com todas as turmas com as quais trabalha. No entanto, o trabalho com as TAPE foi significativo, pois até a elaboração do material utilizado foi planejado antecipadamente, criado e aplicado por esta autora.

Outro diferencial foi estar no ensino remoto, e esta pesquisa corroborou para a perspectiva de que as TAPE, por terem um formato questionador, foram instrumentos de diálogo entre professor e estudantes, mesmo que somente na escrita. Além disso, é possível também concluir que contribuíram com a aprendizagem dos estudantes, atingindo, mesmo que parcialmente, os objetivos dessa investigação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. Brasília, 1998.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

CELESTE, L. B. **A Produção Escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de matemática do PISA**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina,

CARDOSO, M. A. **Análise da Produção Escrita em Matemática**: Quatro Histórias da Construção de uma proposta de ensino para a Educação de Jovens e Adultos. 2017a. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.

DALTO, J. O. **A produção escrita em Matemática**: análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e a 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002. 2007. 100f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2007.

DONEZE, I. S. **A construção de tarefas de análise da produção escrita para o ensino e a aprendizagem de matemática**. 2019. 102 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO. R. L. C. **Enunciados de Tarefas de Matemática baseados na perspectiva da Educação Matemática Realística**. Rio Claro, Bolema, v. 29, n. 52, p. 452-472, 2015.

GAFANHOTO, A. P.; CANAVARRO, A. P. **A adaptação das tarefas Matemáticas**: como promover o uso de múltiplas representações. Práticas de Ensino da Matemática, p. 121 -134, 2012.

MINATO, Nadia Schimomukai. **Tarefas de análise da produção escrita para o ensino de progressões geométricas**. 2019. 49f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019.

MORAES, R; GALIAZZI, M. C. **Análise Textual Discursiva**. Ijuí: Editora Unijuí, 2011.

NAGY-SILVA, M. C. **Do Observável ao Oculto**: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

PEREGO, F. **O que a produção escrita pode revelar?** Uma análise de questões de matemática. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

PONTE, J. P. **Gestão Curricular em Matemática**. In GTI (Ed.), O professor e o Desenvolvimento Curricular, Lisboa: APM. 2005, p. 11-34

PEREIRA, FERNANDO FRANCISCO. **Conhecimentos mobilizados por graduandos e professores que ensinam Matemática em um curso de formação sobre Tarefas de Análise da Produção Escrita**. 2019. 124f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2017, 2019.

PEREIRA, F. F.; DONEZE, I. S. DALTO, J. O. **Caracterizando Tarefas de Análise da Produção Escrita por meio do ensino de Equações**. Revista Paranaense de Educação Matemática, v.7, n.14, p.236-255, jul.- dez. 2018.

SANTOS, E. R. **Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões discursivas não rotineiras de Matemática**. 2008. 166f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2008.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em Matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. 156 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

WATSON, A.et al. **Task Design in Mathematics Education**. MARGOLINAS, C et al. (Eds.). Proceedings of the ICMI Study 22, Oxford, UK, Oxford: ICMI, 2013, p. 9-16.

ANEXO A: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CAMPUS LONDRINA/CORNÉLIO PROCÓPIO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Título da pesquisa: TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE ANALISE COMBINATÓRIA

Pesquisadores: [1]Erika Regina Santana da Silva Pereira

[1]Discente do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT) E-mail: erikarssp@gmail.com ou erikas@alunos.utfpr.edu.br

Orientador: Jader Otavio Dalto

Professor adjunto da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Cornélio Procópio.

E-mail: jaderdalto@utfpr.edu.br

Local de realização da pesquisa:

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Cornélio Procópio. Av. Alberto Carazzai, 1640 – CEP 86300-000

Cornélio Procópio – Paraná - Brasil

A) Informações ao participante da pesquisa

1. Apresentação da pesquisa

Este projeto se refere a uma pesquisa de mestrado em Ensino de Matemática que tem por objetivo investigar a utilização da Análise da produção escrita como estratégia de ensino para a aprendizagem do conteúdo de Análise combinatória para alunos do Ensino Médio. A pesquisa será realizada com alunos que cursam o 2º ano do Ensino Médio de uma escola públicas situadas no município de Londrina. Os dados analisados serão obtidos a partir dos registros escritos dos alunos e diário de campo da pesquisadora. Para o desenvolvimento dessa proposta teremos três momentos, o primeiro de coleta de produções escritas de alunos por meio da resolução de uma lista de tarefas, o segundo momento que é a elaboração das tarefas de Produção Escrita a partir das resoluções coletadas e o terceiro momento em que estamos agora, cujo objetivo é ensinar Análise Combinatória utilizando as tarefas elaboradas.

2. Objetivo da pesquisa.

Investigar a utilização da Análise da produção escrita como estratégia de ensino para a aprendizagem do conteúdo de Análise combinatória para alunos do Ensino Médio. Esperamos que os resultados desse trabalho possam contribuir para a aprendizagem do conteúdo de Análise combinatória e para Educação Matemática.

3. Participação na pesquisa.

Participará da pesquisa alunos 2º ano do Ensino Médio.

4. Confidencialidade.

A identidade dos participantes tem garantia de sigilo e será mantida em total privacidade.

5. Desconfortos e/ou Riscos:

Conforme a Resolução nº 466 de dezembro de 2012, toda pesquisa que envolva seres humanos apresenta a possibilidade de riscos e danos à dimensão física, psíquica, moral, intelectual, social, cultural e espiritual. Desta forma, nesta pesquisa, os riscos são, mesmo que mínimos, de dimensão, intelectual, social e cultural. Logo, frente a qualquer desconforto por parte do participante, o pesquisador responsável suspenderá a pesquisa imediatamente, principalmente se perceber algum risco ou dano à saúde do sujeito participante da pesquisa, não previstos neste termo. Os participantes não pagarão, nem serão remunerados por sua participação e poderão, sem qualquer ônus, desistir a qualquer momento da pesquisa.

6. Benefícios:

O projeto de pesquisa foi elaborado pensando em verificar as contribuições das Tarefas de Análise da Produção Escrita na condução das aulas de Matemática. A partir de então, ser vista como uma nova possibilidade de condução das aulas de Matemática.

7. Critérios de inclusão:

Serão incluídos na pesquisa alunos do 2º ano do Ensino Médio, cuja faixa etária varia entre 16 e 18 anos e que, por ventura, demonstrarem interesse em participar da pesquisa, além de darem o consentimento em relação à coleta de dados.

8. Critérios de exclusão:

Não se aplica.

9. Ressarcimento e indenização:

Subsidiada pelo item II.7, a indenização se dará por meio da cobertura material para reparação a dano, causado pela pesquisa ao participante da pesquisa e o ressarcimento, pelo item II.21 por meio compensação material, exclusivamente de despesas do participante e seus acompanhantes, quando necessário, tais como transporte e alimentação.

10. Direito de sair da pesquisa e a esclarecimentos durante o processo.

O participante da pesquisa tem o direito a deixar o estudo a qualquer momento e também o direito a receber esclarecimentos em qualquer etapa da pesquisa. Liberdade de recusar ou retirar o consentimento sem penalização.

B) CONSENTIMENTO

Eu declaro ter conhecimento das informações contidas neste documento e ter recebido respostas claras às minhas questões a propósito da participação (direta ou indireta) na pesquisa e, adicionalmente, declaro ter compreendido o objetivo, a natureza, os riscos e benefícios deste estudo.

Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, participar deste estudo, permitindo que os pesquisadores relacionados neste documento obtenham fotografia, filmagem ou gravação de voz de minha pessoa para fins de pesquisa científica/ educacional.

Concordo que o material e as informações obtidas relacionadas a minha pessoa possam ser publicados em aulas, congressos, eventos científicos, palestras ou periódicos científicos. Porém, não devo ser identificado por nome ou qualquer outra forma.

As fotografias, vídeos e gravações ficarão sob a propriedade do grupo de pesquisadores pertinentes ao estudo e sob sua guarda.

E estou consciente de que posso deixar o projeto a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

Nome completo participante:____

Nome do responsável:____

RG:_______________________ CPF:_______________________

Data de Nascimento:__/___/___

Endereço:____

Telefone:_______________________ CEP:_______________________

Cidade:_______________________ Estado: _______________________

Assinatura: _______________________ Data: __/__/__

Eu declaro ter apresentado o estudo, explicado seus objetivos, natureza, riscos e benefícios e ter respondido da melhor forma possível às questões formuladas.

Assinatura do(a) pesquisador(a): __________ Data: ___/___/___

Para todas as questões relativas ao estudo ou para se retirar do mesmo, poderão se comunicar com Erika Regina Santana da Silva Pereira, via e-mail (erikarssp@gmail.com / erikas@alunos.utfpr.edu.br) ou telefone (43 99926-1486), ou telefone (43 99814-0064) e com Jader Otávio Dalto, via e-mail (jaderdalto@utfpr.edu.br) ou telefone (43 35203908).

Endereço do Comitê de Ética em Pesquisa para recurso ou reclamações do sujeito pesquisado Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR) REITORIA: Av. Sete de Setembro, 3165, Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, telefone: 3310-4943, e-mail: coep@utfpr.edu.br.

ANEXO B: TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CAMPUS LONDRINA/CORNÉLIO PROCÓPIO

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)

Título da pesquisa: TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE ANALISE COMBINATÓRIA

Pesquisadores: [1]Erika Regina Santana da Silva Pereira

[1]Discente do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT) E-mail:
erikarssp@gmail.com ou erikas@alunos.utfpr.edu.br

Orientador: Jader Otavio Dalto

Professor adjunto da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Cornélio Procópio.

E-mail: jaderdalto@utfpr.edu.br

Local de realização da pesquisa:

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Cornélio Procópio. Av. Alberto Carazzai, 1640 – CEP 86300-000

Cornélio Procópio – Paraná - Brasil

O que significa assentimento?

O assentimento significa que você concorda em fazer parte de um grupo, da sua faixa de idade, para participar de uma pesquisa. Serão respeitados seus direitos e você receberá todas as informações por mais simples que possam parecer.

Pode ser que este documento denominado TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO contenha palavras que você não entenda. Por favor, peça ao responsável pela pesquisa ou à equipe do estudo para explicar qualquer palavra ou informação que você não entenda claramente.

A) Informações ao participante da pesquisa

1. Apresentação da pesquisa

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa, com o objetivo de analisar suas produções escritas nas respostas e resoluções de atividades proposta para o ensino do conteúdo de Análise Combinatória.

Este projeto se refere a uma pesquisa de mestrado em Ensino de Matemática que tem por objetivo investigar a utilização da Análise da produção escrita como estratégia de ensino para a aprendizagem do conteúdo de Análise combinatória para alunos do Ensino Médio. A pesquisa será realizada com alunos que cursam o 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública situada no município de Londrina. Os dados analisados serão obtidos a partir dos registros escritos dos alunos e diário de campo da pesquisadora. Para o desenvolvimento dessa proposta teremos três momentos, o primeiro de coleta de produções escritas de alunos por meio da resolução de uma lista de tarefas, o segundo momento que é a elaboração das tarefas de Produção Escrita a partir das resoluções coletadas e o terceiro momento em que estamos agora, cujo objetivo é ensinar Análise Combinatória utilizando as tarefas elaboradas.

2. Objetivo da pesquisa.

Investigar a utilização da Análise da produção escrita como estratégia de ensino para a aprendizagem do conteúdo de Análise combinatória para alunos do Ensino Médio. Esperamos que os resultados desse trabalho possam contribuir para a aprendizagem do conteúdo de Análise combinatória e para Educação Matemática.

3. Participação na pesquisa.

Participará da pesquisa alunos 2º ano do Ensino Médio.

4. Confidencialidade.

A identidade dos participantes tem garantia de sigilo e será mantida em total privacidade.

5. Desconfortos e/ou Riscos:

Conforme a Resolução nº 466 de dezembro de 2012, toda pesquisa que envolva seres humanos apresenta a possibilidade de riscos e danos à dimensão física, psíquica, moral, intelectual, social, cultural e espiritual. Desta forma, nesta pesquisa, os riscos são, mesmo que mínimos, de dimensão, intelectual, social e cultural. Logo, frente a qualquer desconforto por parte do participante, o pesquisador responsável suspenderá a pesquisa imediatamente, principalmente se perceber algum risco ou dano à saúde do sujeito participante da pesquisa, não previstos neste termo. Os participantes não pagarão, nem serão remunerados por sua participação e poderão, sem qualquer ônus, desistir a qualquer momento da pesquisa.

6. Benefícios:

O projeto de pesquisa foi elaborado pensando em verificar as contribuições das Tarefas de Análise da Produção Escrita na condução das aulas de Matemática. A partir de então, ser vista como uma nova possibilidade de condução das aulas de Matemática.

7. Critérios de inclusão:

Serão incluídos na pesquisa alunos do 2º ano do Ensino Médio, cuja faixa etária varia entre 16 e 18 anos e que, por ventura, demonstrarem interesse em participar da pesquisa, além de darem o consentimento em relação à coleta de dados.

8. Critérios de exclusão:

Não se aplica.

9. Ressarcimento e indenização:

Subsidiada pelo item II.7, a indenização se dará por meio da cobertura material para reparação a dano, causado pela pesquisa ao participante da pesquisa e o ressarcimento, pelo item II.21 por meio compensação material, exclusivamente de despesas do participante e seus acompanhantes, quando necessário, tais como transporte e alimentação.

10. Direito de sair da pesquisa e a esclarecimentos durante o processo.

O participante da pesquisa tem o direito a deixar o estudo a qualquer momento e também o direito a receber esclarecimentos em qualquer etapa da pesquisa. Liberdade de recusar ou retirar o consentimento sem penalização.

Você pode assinalar o campo a seguir, para receber o resultado desta pesquisa, caso seja de seu interesse:
( ) quero receber os resultados da pesquisa (email para envio :____________________)
( ) não quero receber os resultados da pesquisa

<u>**DECLARAÇÃO DE ASSENTIMENTO DO PARTICIPANTE DA PESQUISA:**</u>

Eu li e discuti com o investigador responsável pelo presente estudo os detalhes descritos neste documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar, e que posso interromper a minha participação a qualquer momento sem dar uma razão. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Eu entendi a informação apresentada neste TERMO DE ASSENTIMENTO. Eu tive a oportunidade para fazer perguntas e todas as minhas perguntas foram respondidas.

Eu receberei uma cópia assinada e datada deste Documento DE ASSENTIMENTO INFORMADO.

Nome do participante: ____

____

Assinatura: ____ Data:____/____/____

Eu declaro ter apresentado o estudo, explicado seus objetivos, natureza, riscos e benefícios e ter respondido da melhor forma possível às questões formuladas.

Nome do (a) investigador (a): Erika Regina Santana da Silva Pereira

Assinatura: ___________________________________ Data:___/___/___

Se você ou os responsáveis por você (s) tiver(em) dúvidas com relação ao estudo, direitos do participante, ou no caso de riscos relacionados ao estudo, você deve contatar o(a) investigador (a) do estudo ou membro de sua equipe: Erika Regina Santana da Silva Pereira, telefone fixo número: (43) 3025 5867e celular (43) 99926 1486. Se você tiver dúvidas sobre direitos como um participante de pesquisa, você pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

ESCLARECIMENTOS SOBRE O COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA:

O Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos (CEP) é constituído por uma equipe de profissionais com formação multidisciplinar que está trabalhando para assegurar o respeito aos seus direitos como participante de pesquisa. Ele tem por objetivo avaliar se a pesquisa foi planejada e se será executada de forma ética. Se você considerar que a pesquisa não está sendo realizada da forma como você foi informado ou que você está sendo prejudicado de alguma forma, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR). **Endereço:** Av. Sete de Setembro, 3165, Bloco N, Térreo, Bairro Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, **Telefone:** (41) 3310-4494, **e-mail:** coep@utfpr.edu.br.

ANEXO C: FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	TAREFAS DE ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA
Título do Produto/Processo Educacional	Cadernos de Tarefas de Análise da Produção Escrita para o Ensino de Análise Combinatória
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: **Erika Regina Santana da Silva**
	Orientador/Orientadora: Jader Otavio Dalto
	Outros (se houver):
Data da Defesa	24/09/2021

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); *L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática* (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *Apenas um item pode ser marcado. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	( ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). (X) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.	( ) Local ( ) Regional (X) Nacional ( ) Internacional Justificativa (*obrigatória*): Está disponível no RIUT – Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). *Apenas um item pode ser marcado.	( ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada	( ) Econômica;

*Apenas um item pode ser marcado.	( ) Saúde; (X) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; ( ) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.	(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. ( ) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (X) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. (X) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	**Instituição**
JADER OTAVIO DALTO	UTFPR
EDILAINE REGINA DOS SANTOS	UEL
MARCELE TAVARES	UTFPR

APÊNDICE A: TRABALHO 1 - PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

1. Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido?

A 90
B 100
C 110
D 130
E 120

2. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar empregando os algarismos 1, 3, 5, 6, 8 e 9 ?

A 60
B 120
C 240
D 40
E 80

3. Do quantos modos pode vestir-se um homem que tem 2 pares de sapatos, 4 paletós e 6 calças diferentes, usando sempre uma calca, uma paletó e um par de sapatos ?

A 52
B 86
C 24
D 32
E 48

4. No sistema de emplacamento de veículos que seria implantado em 1984, as placas deveriam ser iniciadas por 3 letras do nosso alfabeto. Caso o sistema fosse implantado, o número máximo possível de prefixos, usando-se somente vogal, seria:

A 20

B 60

C 120

D 125

E 243

5. Os números dos telefones da Região Metropolitana de Curitiba tem 7 algarismos cujo primeiro digito é 2. O número máximo de telefones que podem ser instalados é:

A 1 000 000

B 2 000 000

C 3 000 000

D 6 000 000

E 7 000 000

6. Quantos números de pares, distintos, de quatro algarismos, podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4 sem os repetir? Dica: Separar 2 grupos 1 terminado em 0 e outro terminado em 2 e 4.

A 156

B 60

C 6

D 12

E 216

7. Um restaurante prepara 4 pratos quentes (frango, peixe, carne assada, salsickão), 2 saladas (verde e russa) e 3 sobremesas (sorvete, romeu e julieta, frutas). De quantas maneiras diferentes um freguês pode se servir consumindo um prato quente, uma salada e uma sobremesa?

A 24

B 36

C 27

D 18

E 28

8. Quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem?

A 468

B 864

C 648

D 486

E 864

9. As placas de automóveis eram todas formadas por 2 letras (inclusive K, Y e W) seguidas por 4 algarismos. Hoje em dia, as placas dos carros estão sendo todas trocadas e passaram a ter 3 letras seguidas e 4 algarismos. Quantas placas de cada tipo podem formar?

A 6 175 000 e 760 000 000

B 7 175 000 e 175 000 000

C 6 870 000 e 185 760 000

D 6 760 000 e 175 760 000

E 7 600 000 e 715 000 000

10. Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

A 16 500

B 14 600

C 15 600

D 12 800

E 15 200

11. Um estádio de futebol possui 8 portões de entrada/saída. De quantas maneiras distintas uma pessoa pode entrar no estádio e sair por um portão diferente daquele usado na entrada?

A 76

B 55

C 65

D 43

E 56

APÊNDICE B: TRABALHO 2 - CÁLCULO DE FATORIAL

1 Encontre o valor de:

a) $4! =$

b) $6! =$

c) $7! =$

d) $\frac{6!}{8!} =$

e) $\frac{8!}{6!} =$

2 Calcule:

a) $\frac{5!}{3!+2!}$

b) $\frac{6! \mid 3! \quad 2!}{5!}$

c) $\frac{4! \quad 2! \quad 0!}{1!}$

d) $\frac{12!}{9!}$

e) $\frac{105!}{104!}$

f) $\frac{3!+4!}{5!}$

g) $\frac{3!+6!}{5!-4!}$

h) $(2!)^2 \cdot (6 \quad 1)!$

3 Simplifique as expressões.

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$

b) $\frac{(n+2)!}{(n \quad 1)!}$

c) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

d) $\frac{n!}{(n-2)!}$

e) $\frac{(2n)!}{(2n \quad 1)!}$

APÊNDICE C: AULA ONLINE - GENERALIZAÇÃO DE FATORIAL

QUAL O ANTECESSOR DE (N + 2)?

(N+3)

(N+1)

(N-2)

N

QUAL É O ANTECESSOR DE (N-1)? *

N

(N+1)

(N+2)

(N-2)

QUAL É O SUCESSOR DE (N - 1)? *

(N - 2)

(N+ 2)

N

(N + 1)

QUAL É O SUCESSOR DE (N+1)? *

N

(N +2)

(N-1)

(N-2)

QUAL É O RESULTADO SIMPLIFICADO DE *

$$\frac{(n+1)!}{(n+2)!}$$

Opção 1 ( )

$$\frac{n}{(n+1)}$$

Opção 2 ( )

$$\frac{1}{(n+2)}$$

Opção 3 ( )

$$\frac{(n+1)!}{(n+2)!}$$

Opção 4 ( )

$$\frac{(n+1)}{n}$$

APÊNDICE D: TRABALHO 3 – PERMUTAÇÃO

1) **Em um "horário especial" um diretor de televisão dispõe de 7 intervalos para anúncios comerciais. Se existirem 7 diferentes tipos de anúncios, de quantas formas o diretor poderá colocar os 7 nos intervalos destinados a eles?**

2) **De quantas maneiras diferentes podemos organizar quatro DVDs em uma prateleira?**

3) **Quantos números de 5 algarismos** distintos **podem ser formados pelos algarismos 2, 3, 4, 5 e 8?**

4) **Quantos anagramas possui a palavra FUTEBOL?**

5) **Determine o número de anagramas que podem ser formados com as letras do nome ALEMANHA.**

6) **Utilizando o nome COPACABANA, calcule o número de anagramas formados desconsiderando aqueles em que ocorrem repetições consecutivas de letras.**

7) **De quantas formas podemos ordenar 6 bolas sendo que 2 são verdes, 1 é azul e 3 são vermelhas?**

8) **Quantos anagramas tem o seu primeiro nome?**

APÊNDICE E: TRABALHO 4 – ARRANJO

1) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

2) Uma empresa possui 16 funcionários administrativos, entre os quais serão escolhidos 3, que disputarão para os cargos de diretor, vice-diretor e tesoureiro. De quantas maneiras pode ser feita a escolha?

3) Um estudante tem 5 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele poderá pintar os estados da região Sul do Brasil, cada um de uma cor?

4) Em uma turma com 30 alunos foi feita uma votação para escolher um representante e um vice representante da turma. Sendo que o mais votado será o representante e o segundo mais votado o vice representante. Dessa forma, de quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita?

APÊNDICE F: TRABALHO 5 – AGRUPAMENTOS

1) Em uma competição com 10 países, de quantas maneiras podem ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?

2) Sobre uma circunferência são marcados 6 pontos distintos. Quantos quadriláteros podem ser traçados com vértices nesses pontos?

3) Quantas duplas diferentes podemos formar com um grupo de 8 tenistas?

4) Quantos números de 4 algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 2, 4, 6 e 8?