

# ppgmat

**UNIVERSIDADE TECNÓLOGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

**RICARDO ALMEIDA DOS SANTOS  
CLAUDETE CARGNIN**

**PRODUTO EDUCACIONAL  
PRISMAS E PIRÂMIDES: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA**

**LONDRINA  
2021**

RICARDO ALMEIDA DOS SANTOS  
CLAUDETE CARGNIN

**PRISMAS E PIRÂMIDES: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA**  
**PRISMS AND PYRAMIDS: A DIDACTICAL SEQUENCE**

LONDRINA  
2021



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

### Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. *ACTIO*, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

<b>Instituição de Ensino Superior</b>	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
<b>Programa de Pós-Graduação</b>	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
<b>Título da Dissertação</b>	ENSINO DE PIRÂMIDES NO ENSINO MÉDIO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA APOIADA NA TEORIA DE REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA
<b>Título do Produto/Processo Educacional</b>	PRISMAS E PIRÂMIDES: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA
<b>Autores do Produto/Processo Educacional</b>	<b>Discente:</b> Ricardo Almeida dos Santos
	<b>Orientador/Orientadora:</b> Claudete Cargnin
	<b>Outros (se houver):</b>
<b>Data da Defesa</b>	

#### FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)

Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.

**Aderência:** avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação.

\*Apenas um item pode ser marcado.

Linhas de Pesquisa do PPGMAT:

*L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);

( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

(x) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

<p><i>L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).</p>	
<p><b>Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade:</b> refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p> <p>A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis:</p> <p>1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado;</p> <p>2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo;</p> <p>3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação.</p> <p>Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.</p>	<p><input type="checkbox"/> PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa.</p> <p><input type="checkbox"/> PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p> <p><input type="checkbox"/> PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p>
<p><b>Abrangência territorial:</b> refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u></p>	<p><input type="checkbox"/> Local</p> <p><input type="checkbox"/> Regional</p> <p><input type="checkbox"/> Nacional</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Internacional</p> <p>Justificativa (<i>obrigatória</i>): Está disponível na internet e em Língua Portuguesa, o que permite acesso aos países luso-brasileiros. Além disso, trabalha com conteúdo estudado na educação Básica.</p>
<p><b>Impacto:</b> considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho).</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p><input type="checkbox"/> PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto).</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.</p>

<p><b>Área impactada</b></p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p><input type="checkbox"/> Econômica;</p> <p><input type="checkbox"/> Saúde;</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Ensino;</p> <p><input type="checkbox"/> Cultural;</p> <p><input type="checkbox"/> Ambiental;</p> <p><input type="checkbox"/> Científica;</p> <p><input type="checkbox"/> Aprendizagem.</p>
<p><b>Complexidade:</b> compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE.</p> <p><u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u></p>	<p><input type="checkbox"/> O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação.</p> <p><input type="checkbox"/> A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação.</p> <p><input type="checkbox"/> Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.</p>
<p><b>Inovação:</b> considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.</p>	<p><input type="checkbox"/> PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito).</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos).</p> <p><input type="checkbox"/> PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).</p>
<p><b>Membros da banca examinadora de defesa</b></p>	
<p><b>Nome</b></p>	<p><b>Instituição</b></p>
<p>Dra. Claudete Cargnin</p>	<p>UTFPR-CM</p>
<p>Silvia Teresinha Frizzarini</p>	<p>UDESC- Joinville-SC</p>
<p>Zenaide de Fatima Dante Correia Rocha</p>	<p>UTFPR-LD</p>

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos que colaboraram de forma direta ou indireta à realização deste trabalho, em especial ao corpo docente da UTFPR – Campus Londrina e Cornélio Procópio – que muito contribuíram para a construção de conhecimento, à direção, professores, funcionários e alunos do segundo ano do ensino médio da turma 2019 do Colégio Estadual Behair Edna Mendonça, que muito cooperaram para a realização do presente estudo.

A educação não transforma o mundo. Educação muda as pessoas.

Pessoas mudam o mundo. (PAULO FREIRE)

SANTOS, Ricardo Almeida Dos; CARGNIN, Claudete. **Prismas e Pirâmides**: Uma sequência didática. 2021. 34f. Produto Educacional (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

## RESUMO

Este produto educacional é parte integrante da pesquisa realizada no Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Londrina, na qual foi elaborada uma sequência didática (SD), para o ensino de prismas e pirâmides, no ensino médio. A investigação realizada buscou desenvolver a autonomia do estudante, colocado à frente de seu processo de aprendizagem, interagindo com os múltiplos registros de representações semióticas (RRS) de um mesmo objeto, por meio de tarefas exploratórias. Para construir conceitos e verificar características e propriedades dos prismas e pirâmides, são utilizados diversos recursos, como: materiais manipuláveis, celulares e computadores para a realização de pesquisas, construções e manipulações de objetos via sua representação no software GeoGebra. A utilização desses recursos pode favorecer a desconstrução de um sólido geométrico e a identificação de seus elementos em dimensões inferiores. Em particular, o GeoGebra conta, ainda, com ferramentas que auxiliam a realização de cálculos, planificações e manipulações como rotação, translação, ampliação e redução. Juntas, essas ações podem ampliar o campo cognitivo do estudante, que vincula o objeto matemático às suas múltiplas representações. O objetivo desse material é disponibilizar, ao professor de geometria, tarefas já testadas em condições reais de ensino e reformuladas. Espera-se que a resolução das tarefas propostas na sequência didática estimule a curiosidade do estudante e possibilite o desenvolvimento de sua autonomia, tornando-o ativo em seu processo de aprendizagem.

**Palavras-chave:** Representação Semiótica; Ensino de Matemática; Engenharia Didática; Pirâmides; Construção do Conhecimento.

## Conteúdo

<a href="#"><u>1 INTRODUÇÃO</u></a> .....	9
<a href="#"><u>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</u></a> .....	7
<a href="#"><u>2.1 Tarefas Propostas</u></a> .....	9
<a href="#"><u>3 CONSIDERAÇÕES FINAIS</u></a> .....	27
<a href="#"><u>4 REFERÊNCIAS</u></a> .....	28

## 1 INTRODUÇÃO

Este produto educacional é uma sequência didática para o ensino de prismas e pirâmides, que foi reformulada a partir das observações da aplicação em uma turma de segundo ano do ensino médio e fruto de uma pesquisa desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Londrina (SANTOS, 2021), intitulada “Ensino de Pirâmides no ensino médio: uma sequência didática apoiada na teoria de registro de representação semiótica”.

A proposta em questão foi elaborada a partir da percepção das dificuldades que os estudantes costumemente apresentam quando estudam Geometria Espacial, das quais se destacam: visualizar as dimensões inferiores de um desenho em 3D ou de um sólido espacial (material manipulável); identificar os elementos formadores de tais construções geométricas, como vértices, faces e arestas; e reconhecer um mesmo objeto por meio de suas múltiplas representações semióticas, sendo este um dos maiores complicadores encontrados no decurso do processo de aprendizado.

Os conteúdos trabalhados neste produto educacional são relativos ao estudo de prismas e pirâmides. A realização de pesquisas e de construções geométricas por meio do uso materiais manipuláveis e do software GeoGebra favorece que o estudante tenha uma postura ativa frente ao seu processo de aprendizagem, o que oportuniza o desenvolvimento de estratégias para a resolução de problemas. Tudo isso a partir da percepção da necessidade de identificar elementos que não estão diretamente acessíveis à percepção, mas podem ser reconhecidos por meio da utilização e da produção de diferentes registros de representação semiótica (SANTOS, 2021).

O fato de o estudante produzir uma resposta possibilita reflexões que podem gerar aprendizado. Por esse motivo, as tarefas aqui apresentadas priorizam a utilização de diferentes registros de representação e a utilização de metodologias variadas, que motivem o estudante a exteriorizar suas representações mentais. Assim sendo, todo o material aqui apresentado pode ser reproduzido e adaptado, total ou parcialmente, para o ensino de prismas, pirâmides ou outros sólidos geométricos, conforme a necessidade docente.

A avaliação do trabalho discente ocorre por meio de sua produção pedagógica, levando em conta, entre outros aspectos, o empenho para realizar as discussões em grupo, as construções geométricas (em 2D e 3D) e os indícios de aprendizagem que se manifestam por meio da observação de propriedades, da generalização, da utilização do material de apoio (figuras planas, materiais manipuláveis e artefatos tecnológicos), da identificação de elementos necessários à resolução de problemas que não estão diretamente acessíveis à percepção

(apreensão perceptiva), ou seja, da necessidade de olhar as dimensões inferiores da figura dada (apreensão operatória), de realizar tratamentos e conversões nos diferentes registros de representação utilizados.

Vale ressaltar que o acompanhamento atento dos professores, em relação às dúvidas e produções dos estudantes, com possíveis redirecionamentos, é fundamental para o sucesso na aprendizagem.

Para melhor compreensão do leitor, esse texto está organizado em seções. Na próxima, são discutidos aspectos da Teoria de Registro de Representação Semiótica, considerados importantes para a aprendizagem em geometria. Em seguida, são apresentadas as tarefas propostas para o estudo de prismas e pirâmides, com algumas orientações aos docentes que pretenderem utilizá-las. Ao final, são tecidas considerações acerca de todo esse processo.

Esperamos que a resolução das tarefas propostas na sequência didática estimule a curiosidade do estudante e possibilite o desenvolvimento de sua autonomia, tornando-o ativo em seu processo de aprendizagem.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Uma sequência didática é, para Calácia (2017), um conjunto de atividades entrelaçadas entre si que podem tornar mais eficiente o processo de ensino. A sequência proposta neste trabalho busca levantar elementos que permitam o desenvolvimento das apreensões apontadas por Duval (1995): a apreensão perceptiva, a apreensão sequencial, a apreensão discursiva e a apreensão operatória.

A apreensão perceptiva é a que possibilita o reconhecimento das formas e tem relação com a primeira impressão e com a leitura visual. A apreensão sequencial está relacionada com a ordem de construção de uma figura geométrica. A apreensão discursiva faz referência às hipóteses que são formuladas. A apreensão operatória é mobilizada quando o estudante opera sobre as figuras geométricas, seja por decomposição, transformação ou comparação. De acordo com Duval (1995), a última apreensão citada é cognitivamente mais sofisticada do que as outras e é alcançada quando o estudante alcança a proficiência.

Segundo Duval (2012), em Geometria:

Não importa qual a figura desenhada [...], ela é objeto de duas atividades geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva das formas, e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais (DUVAL, 2012, p. 120-121).

Para que ocorra o aprendizado, é necessário que o estudante formule e verifique a veracidade de hipóteses, reconheça as formas geométricas, suas propriedades e as diversas representações de um objeto matemático, além de realizar os possíveis tratamentos e conversões dos diferentes registros de representação semiótica, sejam eles registro em língua natural, registros escritos, gráficos cartesianos ou figuras geométricas.

Duval (2012) defende que os Registros de Representação Semiótica (RRS) devem permitir três atividades cognitivas ligadas à *semiosis*: primeiro, a formação de um registro identificável; segundo, o tratamento das representações, conforme as regras do sistema semiótico; e terceiro, a conversão de uma representação de um sistema semiótico em uma representação de outro sistema semiótico.

Diante da necessidade de estimular o estudante a formar uma representação identificável e a realizar os tratamentos e as conversões necessárias para que aconteça o aprendizado, é relevante a utilização de diferentes recursos que podem promover a aprendizagem de Matemática e Geometria.

Para Brasil (2018), as relações entre elementos de figuras planas e espaciais podem desenvolver o pensamento geométrico; a utilização de materiais manipuláveis pode levar o estudante a observar que as faces de muitas figuras espaciais podem ser representadas por figuras planas. Dessa forma, usá-los pode promover atividades de formação, tratamento e conversão de registros de representação semiótica, pois oferecem uma série de vantagens para a aprendizagem. Entre essas vantagens, é possível citar, de acordo com Sarmiento (2010): propicia um ambiente favorável ao aprendizado, pois desperta a curiosidade e aproveita todo o seu potencial lúdico; possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações com os colegas e com o professor; contribui para a (re)descoberta das relações matemáticas subjacentes em cada material; motiva, pois passa a dar sentido para o ensino de Matemática; facilita a internalização das relações percebidas.

Já o uso de softwares e artefatos tecnológicos é defendido por diversos autores, como Duval (2011), Gravina e Santarosa (1998) e Brasil (2018), por agilizar a realização de cálculos, proporcionar uma melhora significativa no aprendizado, auxiliar no desenvolvimento dos processos de visualização e exteriorização das imagens mentais, além de possibilitar a manipulação, na tela do computador ou Smartphone, da representação de um objeto geométrico. Hebenstreint (1987, *apud* GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p.78), classifica esse objeto como “concreto-abstrato [...], concreto porque existe na tela do computador [...] e abstrato por se tratarem de realizações feitas a partir de uma construção mental”, o que pode ajudar o estudante a observar e identificar propriedades necessárias à conversão entre registros de representação.

Pensando nisso, as tarefas propostas permitem que o estudante faça uso de diferentes ferramentas para construir seu aprendizado, dentre as quais se destacam:

- desenhos planos (em 2D) e tridimensionais (em 3D);
- materiais manipuláveis (material dourado, maquetes e planificações);
- lápis, papel, borracha, régua, tesoura, compasso, artefatos tecnológicos<sup>1</sup>, além do software GeoGebra, que permite ao estudante realizar a construção e a manipulação da representação de sólidos geométricos na tela do computador.

Juntas, essas ferramentas oferecem suporte ao aprendizado geométrico para a construção de conceitos e para a generalização de situações, permitindo ao estudante reconhecer formas, realizar cálculos de perímetro, área e volume de sólidos geométricos.

---

<sup>1</sup>Podem ser calculadoras, computadores, notebooks, celulares e outros equipamentos capazes de aliar a visualização instantânea à manipulação de registros gráficos e geométricos.

Na próxima seção, apresentamos as tarefas propostas, as quais estão organizadas em blocos, denominados aulas.

## 2.1 TAREFAS PROPOSTAS

O mapa conceitual da Figura 1 a seguir sintetiza o objetivo das aulas (conjunto de tarefas propostas) da sequência didática. Importa ressaltar que um bloco, denominado aula, pode envolver mais que o tempo de uma hora-aula.

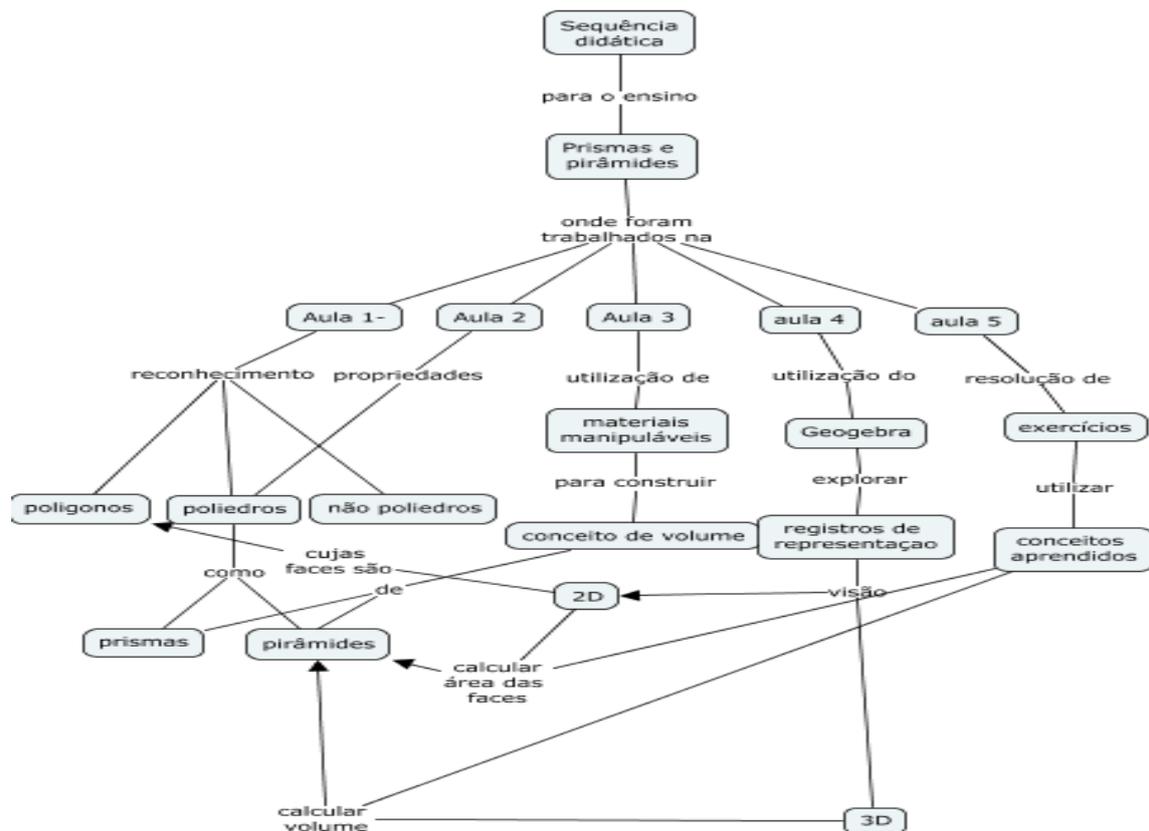


Figura 1 – objetivo das tarefas da SD

Fonte: elaboração própria

Por meio da diversidade de registros de representação aqui apresentada, espera-se que o estudante observe as formas, identifique elementos como vértices, faces, arestas e apótemas, bem como construa conceitos que o torne apto a reconhecer um mesmo objeto por meio de diferentes registros de representação. Além disso, é desejado que o aluno perceba as ligações necessárias para a construção de estratégias voltadas à resolução de problemas que envolvam o reconhecimento das formas e a necessidade da realização da desconstrução geométrica dos sólidos em suas representações 2D e 3D, a fim de os capacitar para fazer os cálculos da área e do volume das pirâmides.

Na aula 1, a partir da percepção do que é plano e do que é espacial, é esperado que os estudantes reflitam sobre as diferenças entre polígonos e poliedros, indo além da apreensão

perceptiva e produzindo uma resposta que possa levá-los a uma reflexão acerca das propriedades de cada tipo de figura (2D ou 3D).

A avaliação dessa tarefa leva em conta a produção escrita dos estudantes e a classificação das figuras geométricas em poliedros, não poliedros, polígonos e não polígonos. Essa percepção é necessária para o aprendizado e para a realização das tarefas futuras. Caso o estudante não consiga realizar essa classificação, é possível que o professor faça questionamentos que direcionem o estudante à percepção da diferença entre polígono, não polígono, poliedro e não poliedro. O quadro a seguir apresenta algumas dúvidas dos estudantes podem apresentar e possíveis intervenções do professor.

Possíveis dúvidas	Possíveis intervenções
Não identificar um polígono.	Mostrar uma figura que representa um triângulo, um quadrado, um quadrilátero, um pentágono e questionar o que essas figuras têm em comum (lados, vértices).
Não identificar um não polígono.	Mostrar as figuras supracitadas e confrontá-las com a figura que representa um círculo. Explorar as diferenças.
Não diferenciar um polígono de um poliedro.	Mostrar uma figura que representa um quadrado e uma que representa um cubo e explorar as diferenças. Explorar mais casos, conforme a necessidade.

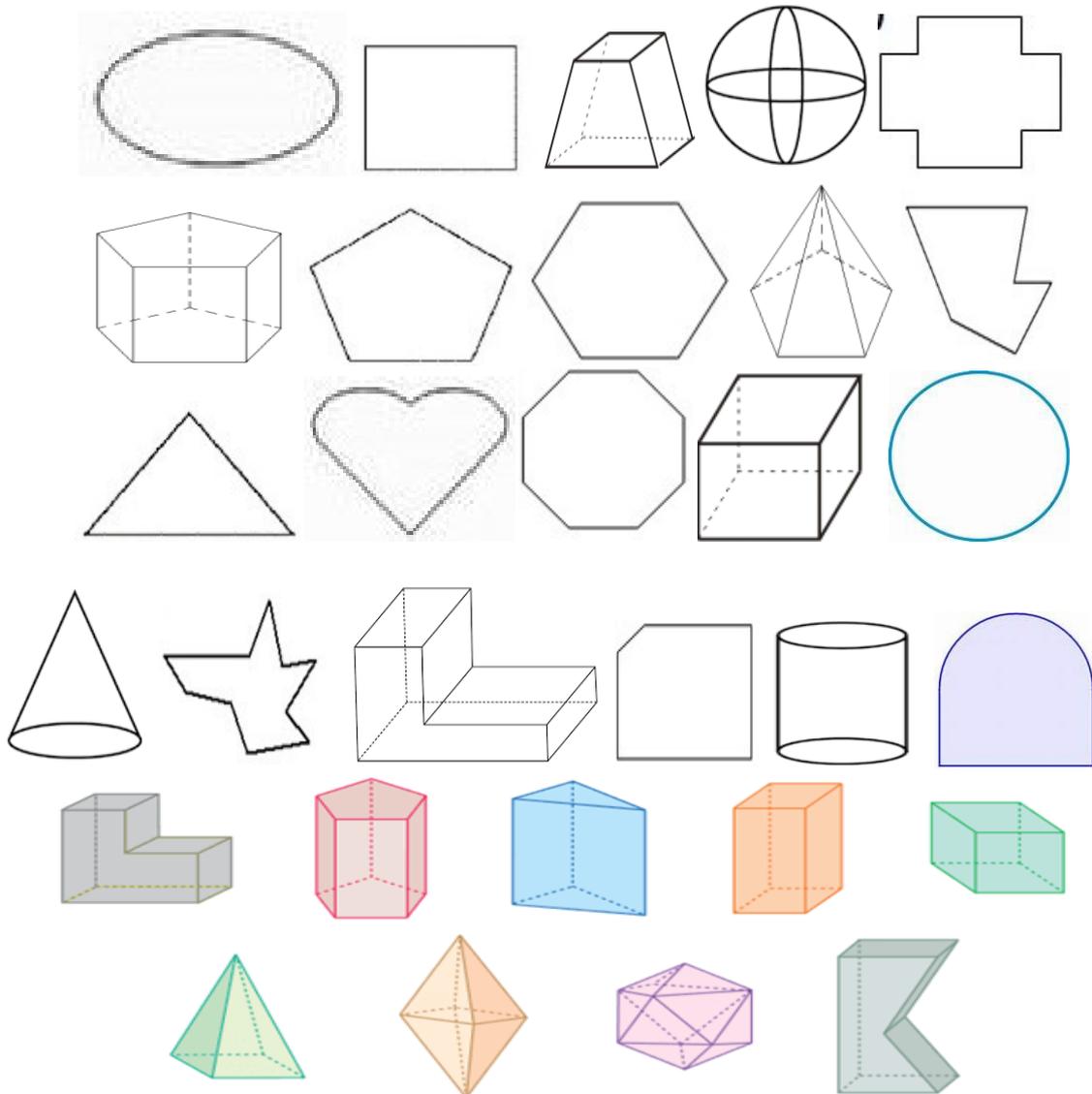
Com a exploração dessas diferenças e abrangendo mais casos conforme a necessidade é possível que os estudantes consigam identificar polígonos, não polígonos, poliedros e não poliedros.

### Aula 1: Pesquisa sobre poliedros.

**Duração: 1 hora-aula.**

Utilizando dicionários, livros disponíveis na biblioteca ou a internet, pesquise sobre poliedros e, em seguida, responda às questões abaixo.

- Em sua opinião, o que são poliedros? Como podemos reconhecer um poliedro? Qual a diferença entre poliedro e polígono? Comente.
- Em sua opinião, o que é um não poliedro? Comente.
- Classifique as figuras abaixo como polígonos, não polígonos, poliedros e não poliedros



Fonte: Dante, 2012

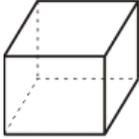
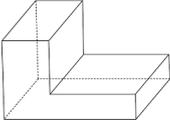
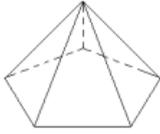
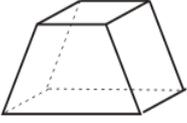
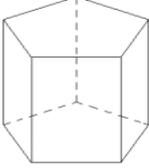
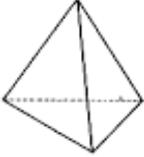
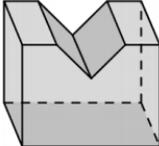
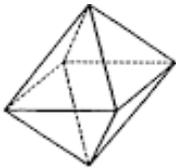
Na aula 2, as tarefas de pesquisa e produção de uma resposta e a proposta de conversão entre registros de representações semióticas podem impulsionar o aprendizado, uma vez que os estudantes poderão reconhecer polígonos, não polígonos, poliedros e não poliedros em tarefas futuras, por meio do reconhecimento visual de suas dimensões e seus contornos.

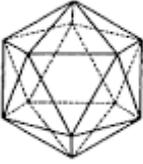
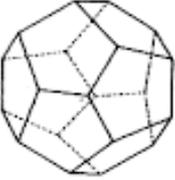
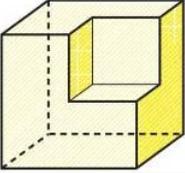
O objetivo desta aula é explorar as dimensões inferiores de um poliedro, proporcionando ao estudante a oportunidade de ver um desenho em 3D além da apreensão perceptiva, o que pode ser decisivo no processo de aprendizagem em Geometria, pois, ao identificar vértices, faces e arestas, o estudante terá que realizar ações além da simples visualização. Outro objetivo dessa aula é familiarizar o estudante com a realização da conversão de registros de representação, como a conversão de 3D para 2D (planificação do desenho em 3D) e a nomeação de poliedros (conversão de um registro figural em língua materna), o que, segundo Duval (2012), não costuma ser ensinado, pode não ocorrer naturalmente e não é meramente a relação entre dois objetos.

A avaliação desse conjunto de tarefas leva em conta a capacidade do estudante de realizar uma avaliação qualitativa que o permita: identificar os elementos formadores dos poliedros (vértices, faces e arestas); verificar a igualdade da relação de Euler para poliedros convexos e para alguns poliedros não convexos; classificar cada poliedro levando em consideração a forma (se prismas, pirâmides, poliedros de Platão, poliedros convexos e não convexos); relacionar as figuras tridimensionais a objetos do dia a dia; e produzir uma representação distinta da original (conversão de registros de representação semiótica). Juntas, essas tarefas podem unir diferentes representações para um mesmo objeto, o que é fundamental para o aprendizado da Geometria, para a realização de tratamentos e conversões.

**Aula 2: Reconhecimento de propriedades**  
**Duração: 2 horas-aula**

a) Dados os poliedros, observe e responda: qual a quantidade de vértices, faces e arestas?

Poliedros	Vértices (V)	Faces (F)	Arestas (A)	V+F	A+2
					
					
					
					
					
					
					
					

- b) O que é possível afirmar sobre as relações  $V+F$  e  $A+2$ ? Isso é verdadeiro em todos os casos? Explique.
- c) Pesquise e procure classificar cada um dos poliedros do quadro do item a.
- d) Você já viu algum desses poliedros no seu dia a dia? Onde? Quais? Comente.
- e) Em sua opinião, quais medidas podem ser calculadas com esses poliedros?
- f) Construa a planificação de cada um dos poliedros, de forma que seja possível montar o sólido a partir de sua planificação, e comente as dificuldades encontradas para realizar cada planificação.

Na aula 3, a utilização de materiais manipuláveis pode proporcionar ao estudante realizar observações que o levem a identificar as dimensões de um prisma de base quadrangular (paralelepípedo e cubo) e desenvolver a apreensão sequencial, apontada por Duval (2011) como sendo desenvolvida em tarefas de construção de sólidos geométricos.

Assim sendo, essa tarefa tem o objetivo de levar o estudante a relacionar a quantidade de peças utilizadas para as construções com a capacidade (volume) de um sólido geométrico. A atividade foi dividida em três momentos distintos. No primeiro, o material dourado foi oferecido aos estudantes para dar subsídios à construção do conceito de volume do bloco retangular (paralelepípedo) e do cubo<sup>2</sup>. No segundo momento, foram apresentadas as questões teóricas, que tinham o intuito de levar o discente a refletir sobre os volumes de poliedros com base regular (cubo) e irregular (paralelepípedo). No último momento, propiciou-se a realização de um experimento que busca sistematizar que o volume de uma pirâmide é sempre um terço do volume do prisma de mesma área da base e mesma altura.

A avaliação para esse conjunto de tarefas da aula 3 leva em consideração a produção escrita, a explicação dos procedimentos utilizados para realizar as tarefas e os cálculos. Espera-se que, com a utilização do material dourado, os estudantes cheguem ao volume de um prisma (paralelepípedo e cubo) como sendo o produto de suas dimensões (comprimento, largura e altura).

A montagem dos paralelepípedos com o material montessoriano pode favorecer o desenvolvimento da apreensão sequencial, a conversão de registros de representação semiótica e o aprimoramento das ideias gerais para explicar as situações, sem a utilização da contagem. Esses conceitos podem ser identificados ou reforçados com a reflexão sobre a teoria, fechando o ciclo com a realização do experimento que relaciona a capacidade (volume) da pirâmide em relação à capacidade do cubo. Essa ação oferece ao estudante a possibilidade de interagir com situações que trabalham diferentes registros de representações semióticas, sendo necessário realizar tratamentos e conversões sobre essas representações.

---

<sup>2</sup>A escolha dessas duas formas geométricas ocorreu pela facilidade de construí-las com o material dourado.

### Aula 3: Utilização de materiais manipuláveis

Duração: 3 horas/aula

#### Momento 1: utilização do material dourado.

O Material Dourado é composto por 4 tipos de peças:

- os cubinhos, que representam as unidades;
- as barras com dez unidades, que representam as dezenas;
- as placas com dez barras, que representam as centenas;
- o cubo com 10 placas, que representa a unidade de milhar.



Imagem 1: Material Dourado

Fonte: <http://www.edupp.com.br/2015/05/aplicacao-do-material-dourado-montessoriano-em-sala-de-aula/>.

Utilizando o material dourado, construa e responda:

1. Um paralelepípedo com 8 unidades de comprimento, 6 unidades de largura e 4 unidades de altura. Quantas peças foram usadas? Justifique sua resposta.
2. Um paralelepípedo com 10 unidades de comprimento, 5 unidades de largura e 3 unidades de altura. Quantas peças foram usadas? Quais peças foram usadas? Existem outras possibilidades? Justifique sua resposta.
3. Um cubo com 3 unidades de lado. Quantas unidades foram utilizadas? Como você chegou a esse resultado? Explique.
4. Um cubo com 5 unidades de lado. Quantas unidades foram utilizadas? Como você chegou a esse resultado? Explique.
5. Um cubo com 10 unidades de lado. Quantas unidades foram utilizadas? Justifique sua resposta.

#### Momento 2: aprofundamento na teoria

6. Uma caixa tem forma cúbica com 10 cm de lado. Quantas caixinhas de forma cúbica de lado 1cm podem ser colocadas dentro dessa caixa até ela ficar totalmente cheia? Podemos dizer que a quantidade de caixinhas representa volume dessa caixa cúbica? Por quê? Explique.
7. Se você soubesse somente a medida do lado do cubo, poderia calcular o seu volume? Como? Explique.
8. Em sua opinião, se a caixa fosse um paralelepípedo qualquer. O que mudaria na forma de calcular o volume? Explique.

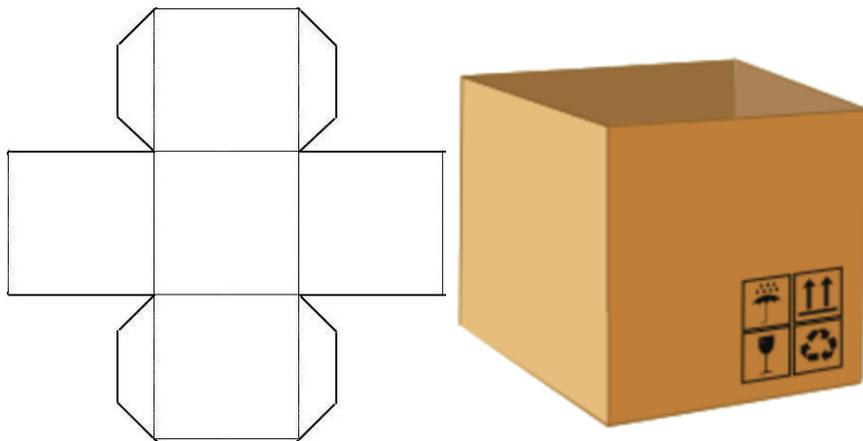
9. Sabendo que prisma é poliedro que possui duas bases congruentes paralelas e as faces laterais são paralelogramos, explique e apresente um exemplo de como você faria para calcular o volume de um prisma cuja base é:

- um triângulo equilátero;
- um triângulo isósceles;
- um triângulo retângulo;
- um quadrado;
- um retângulo;
- um pentágono regular;
- um hexágono regular.

**Momento 3: experimento do volume do cubo e volume da pirâmide.**

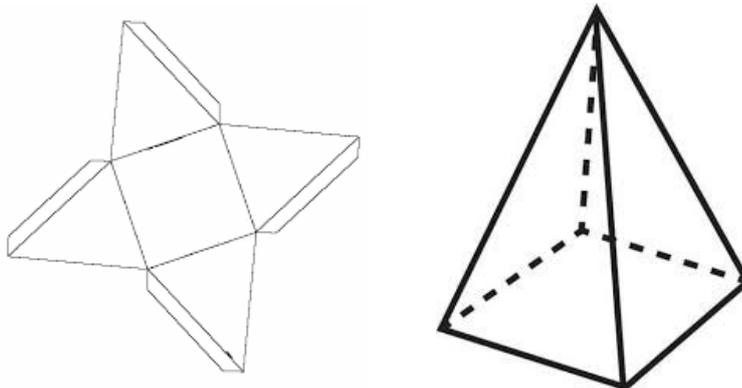
10. Construa um sólido geométrico, conforme as instruções a seguir:

- construa um quadrado medindo 10 cm;
- em cada lado desse quadrado, construa outro quadrado congruente;
- em duas faces postas, aumente 1 (um) cm nas laterais para colar;
- recorte e cole formando uma caixa em forma de cubo sem tampa.



11. Construa um quadrado, com 10 cm de lado;

- em cada um dos lados desse quadrado, construa um triângulo isósceles com 11,2cm de altura;
- nas faces triangulares, faça uma aba de 1cm em um dos lados, para colar;



- recorte o fundo da pirâmide.

12. Encha a pirâmide (questão 11) com areia e despeje na caixa cúbica (questão 10). Analise e responda cada uma das questões seguintes:
  - i) Quantas vezes é preciso repetir o experimento até que a caixa cúbica esteja completamente cheia?
  - ii) A partir desse experimento, qual relação matemática pode ser escrita entre o volume da caixa cúbica e da pirâmide correspondente? Explique.
  - iii) Como a relação escrita por você no item anterior passa a ser escrita se for o volume da pirâmide em relação ao volume da caixa? Por quê?
  
13. Encontre uma regra geral para calcular o volume de uma pirâmide qualquer conhecendo a figura da base e sua altura.
  
14. Qual a relação que pode ser observada entre o volume de uma pirâmide e de um prisma com mesma área da base e altura da pirâmide? Explique.
  
15. Teste a relação descrita por você na questão 14 com os prismas da questão 9. (Você pode usar o GeoGebra para isso).

O objetivo da aula 4 é unir o uso de artefatos tecnológicos e de softwares de Geometria Dinâmica ao ensino de Matemática, em especial ao ensino de Geometria, já que esses recursos possibilitam ao estudante interagir em tempo real com a representação do objeto estudado. O uso do software pode estimular o interesse e melhorar o aprendizado dos estudantes, além de familiarizá-los com a conversão de registros de representações semióticas e seus tratamentos.

Nessa aula, foi proposto um conjunto de tarefas com o uso do software GeoGebra, possibilitando que os estudantes realizem construções, investigações e transformações para fortalecer o aprendizado a partir da visualização das representações dos objetos de estudo, via tela de computador ou Smartphone.

A avaliação desse grupo de tarefas levará em consideração as produções discentes<sup>3</sup> utilizando o software GeoGebra. A utilização do protocolo de construção como ferramenta avaliativa possibilita ao professor verificar o desenvolvimento (passos utilizados) para as construções dos grupos. Essa ação oferece, ainda, uma nova forma de avaliação da produção discente, que, se bem explorada, pode levar o estudante a desenvolver a apreensão sequencial, bem como a realizar ações de: rotação, para melhorar os ângulos de visão; ampliação, redução e planificação, para explorar faces, vértices, arestas e apótema; identificar formas, que possibilitam a realização de cálculos de área e de volume.

Com a utilização desse software, é possível que o estudante faça ligação dos conteúdos estudados anteriormente com a necessidade de desconstruir o sólido geométrico para, entre outras coisas, observar a forma da base da pirâmide e das faces laterais, bem como identificar elementos que não estão diretamente acessíveis à percepção, como o apótema da base, o apótema da pirâmide, a altura da pirâmide e as relações entre os diferentes registros de representação de um mesmo objeto.

---

<sup>3</sup>Essas produções são realizadas pelo estudante e enviadas por e-mail ou *pendrive* ao professor, que, a partir da análise, irá confeccionar um *feedback* para a reflexão discente.

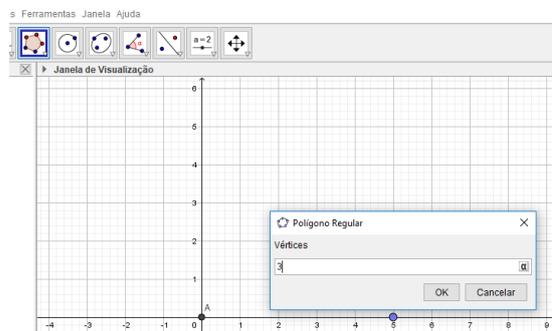
## Aula 4: utilização do software GeoGebra

Duração: 2 horas-aulas

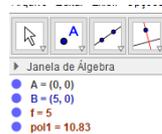
- a) Para construir um triângulo equilátero utilizando o GeoGebra, selecione, na quinta caixa de ferramenta, a opção “polígono regular”.



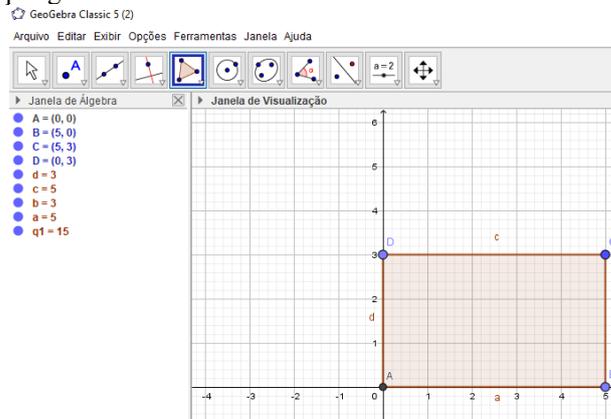
Selecione dois pontos,  $A(0,0)$  e  $B(5,0)$ . Ao abrir a caixa de diálogo “vértices”, digite 3 e clique em OK.



Para ver a área do polígono, olhe na janela algébrica em pol1.



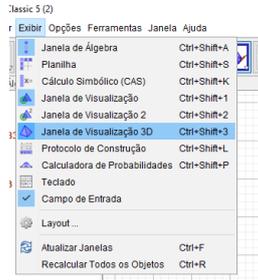
- b) Para construir um retângulo no GeoGebra, selecione, na quinta caixa de ferramenta, a ferramenta polígono.



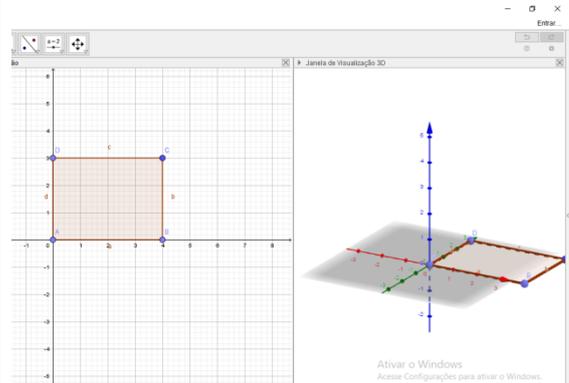
Selecione os vértices do polígono:  $A(0,0)$ ,  $B(4,0)$ ,  $C(4,3)$  e  $D(0,3)$ .

Para ver a área do polígono na janela de álgebra, veja q1.

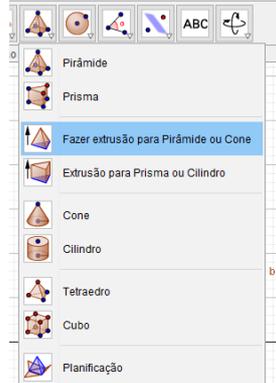
c) Para exibir a janela 2D e 3D, clique na opção exibir e escolha a opção janela 3D.



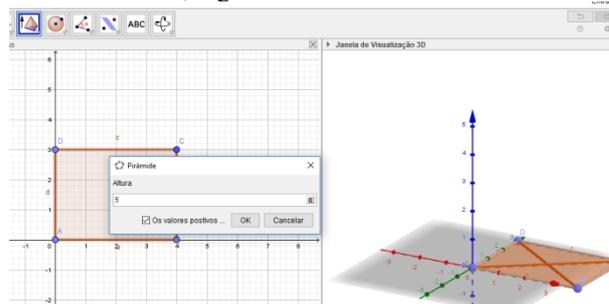
Aparecerão as janelas de visualização 2D e 3D.



d) Para construir uma pirâmide de determinada altura, selecione, na caixa de ferramenta pirâmide, a ferramenta “fazer extrusão para pirâmide”.

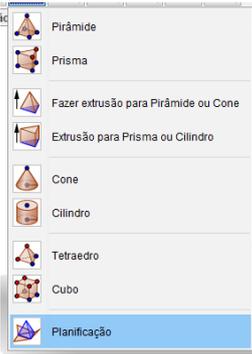
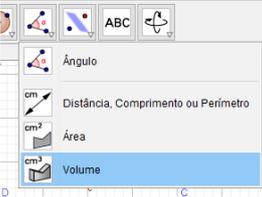
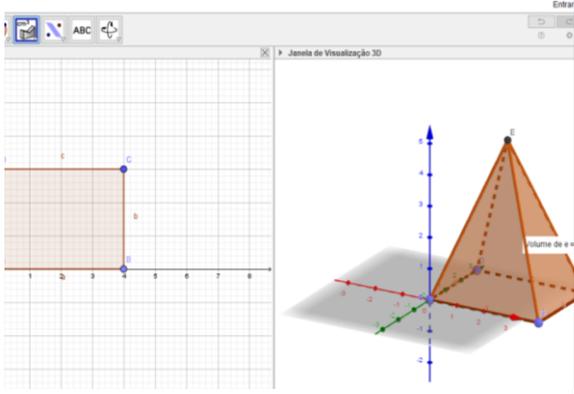
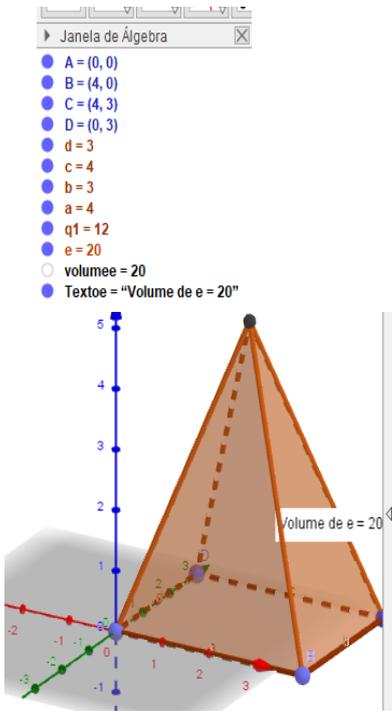


Clique na aresta do retângulo ABCD. Ao abrir a caixa de texto “altura”, digite 5.



Clique em OK.

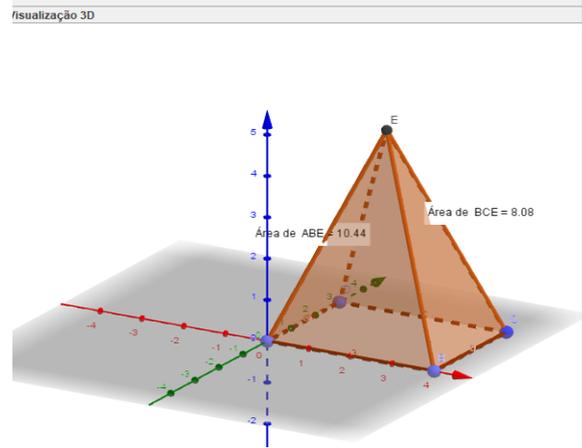
e) Para fazer a planificação de um sólido geométrico, clique na opção pirâmide e escolha a opção planificação.

 <p>Clique na pirâmide.</p>	
<p>f) Para calcular o volume do sólido geométrico, selecione, na 11ª ferramenta, a ferramenta “volume”.</p>  <p>Clique no sólido.</p>	
<p>g) Comparando o volume calculado pelo GeoGebra com o volume obtido na aula 3:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Calcule a área da base.</li> <li>- Multiplique a área da base pela altura.</li> <li>- Divida o resultado por 3.</li> <li>- Qual o valor obtido?</li> </ul>	

h) Para calcular a área de cada face do sólido geométrico, selecione, na 1ª ferramenta, a ferramenta “área”.



Clique na face a ser calculada a área.



i) De acordo com os passos descritos acima, construa outras pirâmides, cujas bases sejam:

- um triângulo equilátero;
- um triângulo isóceles;
- um retângulo;
- um pentágono regular;
- um hexágono regular.

Calcule dessas pirâmides:

- área da base;
- área de cada face lateral;
- área total;
- volume.

O objetivo da aula 5 é aplicar as relações geométricas estudadas e sistematizadas nas aulas anteriores, além de fazer uso de tais relações, em forma de desenhos, esquemas, conjecturas e fórmulas que permitam a visualização de dimensões inferiores às da figura dada e de elementos ocultos e encobertos, necessários à resolução de problemas. Para a averiguação da produção desses conhecimentos, foi proposta a tarefa apresentada da aula 5.

Essa aula requer maior mobilização da interpretação da representação geométrica das pirâmides, tanto em duas quanto em três dimensões, e caminha para a sistematização de relações métricas num triângulo, tais como:

$$(\text{apótema da pirâmide})^2 = (\text{altura da pirâmide})^2 + (\text{apótema da base})^2$$

$$(\text{aresta lateral})^2 = (\text{apótema da pirâmide})^2 + (\text{metade da aresta da base})^2$$

entre outras.

Alertamos ao professor que fique atento sobre a observação das medidas, pelos alunos, especialmente na questão 2. Sugerimos que a verificação da tarefa seja feita em conjunto com toda a turma, assim, se houver divergência de interpretação, os próprios alunos poderão ajudar-se e o professor pode acompanhar a capacidade argumentativa de seus educandos, bem como perceber se os alunos compreenderam as relações métricas visadas.

Caso isso não seja possível, analisar a produção escrita e/ou solicitar a gravação das conversas do grupo durante a resolução das questões para a identificação das estratégias utilizadas, que são fontes valiosas de informação ao docente. A partir dos erros ou estratégias utilizadas, é possível melhor direcionar ou otimizar o trabalho de resolução de problemas.

É importante salientar que a avaliação sobre cada aula pode fornecer elementos para uma avaliação mais ampla sobre o aprendizado alcançado pelo estudante durante a realização da sequência didática, juntas essas avaliações podem oferecer condições para o professor realizar uma análise qualitativa sobre o empenho dos alunos; a pertinência das discussões produzidas; as dificuldades apresentadas nas diferentes formas de ver e representar a pirâmide e até mesmo oferece a possibilidade de realizar uma análise quantitativa e qualitativa que permite verificar o empenho da turma, dos grupos ou mesmo individual durante a resolução das tarefas.

**Aula 5- Apótema da face, altura da pirâmide, área lateral e área total.****Duração: 2 horas-aula**

- 1) A face lateral de uma pirâmide reta é um triângulo isósceles, conforme a figura a seguir.
- a) Calcule a medida da altura dessa face.
- b) Explique o que essa medida representa em relação à pirâmide.
- 2) Abaixo está a representação tridimensional de uma pirâmide. Analise a imagem e responda:

- i) Qual o polígono da base?
- ii) Quais as coordenadas do centro do polígono da base?
- iii) Qual a medida da aresta da base?
- iv) Qual a medida do apótema da base?
- v) Qual a medida da aresta lateral da pirâmide?
- vi) Qual a medida do apótema da pirâmide?
- vii) Qual a medida da altura da pirâmide?

- 3) Se uma pirâmide tem 8 cm de altura e tem como base um quadrado de 12 cm de lado, qual a medida de seu apótema? Como podemos calculá-lo? Explique:

- 4) A grande pirâmide de Guizé, no Egito, tem 146 metros de altura e base quadrada de 227 metros.



**Figura 1:** Pirâmide de Queóps

Fonte: <https://www.lisztrangel.com.br/index.php/blog/item/239-desvendando-a-grande-piramide-quem-a-construiu>.

Com base nos dados apresentados, calcule:

- a) O perímetro da base.
- b) A área da base.
- c) A área de cada face lateral.
- d) A área total.
- e) O volume.

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conjunto de atividades aqui apresentado pode oportunizar que o estudante construa seu aprendizado por meio da interação com os objetos de estudo da Matemática em suas diferentes representações. Ao observar um desenho tridimensional, o aprendiz pode identificar elementos necessários à aprendizagem, produzir respostas ou questionamentos que o levem a avançar ao nível de proficiência matemática. Duval, em seus trabalhos, defende a utilização de diferentes registros de representação para um mesmo objeto, haja vista que é necessário que o estudante realize de maneira espontânea a atividade da conversão, pois é a partir dela que o aprendizado se manifesta.

A utilização de sequências didáticas para o ensino de Matemática se mostrou uma interessante ferramenta para que os estudantes construam conceitos, por meio de atividades planejadas e encadeadas entre si, o que pode promover o aumento da abstração e facilitar o reconhecimento de propriedades e a produção de generalizações, sendo essas condições essenciais ao aprendizado. A utilização das atividades interligadas da SD pode, ainda, promover o desenvolvimento da autonomia do estudante e estimular sua curiosidade e seu interesse pela Matemática, já que são propiciados momentos para a pesquisa, para a troca de ideias com seus pares e para o desenvolvimento do ensino por meio das próprias experiências. Isso é vivido durante a resolução de tarefas, realização de experimentos com materiais manipuláveis, observação e manipulação das representações de objetos matemáticos em diferentes campos de representação, utilizando meios digitais. Para o professor, as sequências didáticas também são uma maneira de organizar o trabalho em sala de aula.

Por fim, a elaboração, a aplicação e a reflexão sobre as tarefas propostas nessa sequência didática são ações que permitem ao professor aprimorar a sua prática, desenvolver metodologias personalizadas que atendam às necessidades e dificuldades de cada turma. Essas ações, amparadas pelo referencial teórico, podem favorecer a construção de sua identidade docente, a formação do professor-pesquisador e a reflexão sobre a prática docente, promovendo a superação das dificuldades encontradas no decorrer do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

#### 4 REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CALÁCIA, D. **O que é uma sequência didática**. 2017. Disponível em <<http://naescola.eduqa.me/registros/o-que-e-uma-sequencia-didatica/>>. Acesso em: 20/02/2021.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica**. **Org.:** Tânia M. M. Campos; tradução: Marlene Alves Dias. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Mérciles T. Moretti. **REVEMAT**, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012. Disponível em <<http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>>.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. Anais do IV Congresso RIBIE, 1998.

SANTOS, R. A. **Ensino de pirâmides no ensino médio: uma sequência didática apoiada na teoria de registro de representação semiótica**. 2021. Dissertação, 175 pg. (Mestrado Profissional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021.

SARMENTO, A. K. C. **A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática**. In: VI Encontro de pesquisa em educação, 2010. Disponível em: <<https://docplayer.com.br/10323217-A-utilizacao-dos-materiais-manipulativos-nas-aulas-de-matematica.html>>. Acesso em: 20 dez. 2020.