

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

PATRICIA GREZELLE

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DINÂMICOS ENVOLVENDO A INTERAÇÃO
SOLO-ESTRUTURA PELO MÉTODO DE ESPAÇO DE ESTADOS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**PATO BRANCO
2021**

PATRICIA GREZELLE

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DINÂMICOS ENVOLVENDO A INTERAÇÃO
SOLO-ESTRUTURA PELO MÉTODO DE ESPAÇO DE ESTADOS**

**Dynamic Problem Solving Involving Soil-Structure Interaction by the
State-Space Method**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Francisco Augusto Aparecido Gomes

Coorientadora: Prof^a. Dra. Paôla Regina Dalcanal

PATO BRANCO

2021



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Atribuição – Uso Não Comercial (CC BY-NC) - Permite que outros remixem, adaptem e criem obras derivadas sobre a obra licenciada, sendo vedado o uso com fins comerciais. As novas obras devem conter menção ao autor nos créditos e também não podem ser usadas com fins comerciais. Porém as obras derivadas não precisam ser licenciadas sob os mesmos termos desta licença.



**Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Pato Branco**



PATRICIA GREZELLE

**SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DINÂMICOS ENVOLVENDO A INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA PELO
MÉTODO DE ESPAÇO DE ESTADOS**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Materiais E Engenharia De Estruturas.

Data de aprovação: 30 de Agosto de 2021

Prof Francisco Augusto Aparecido Gomes, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Paola Regina Dalcanal, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Paulo Rogerio Novak, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Rodrigo Borges Santos, Doutorado - Universidade Federal da Grande Dourados (Ufgd)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 30/08/2021.

Dedico este trabalho à Deus e a minha família.

AGRADECIMENTOS

O mestrado foi uma jornada repleta de surpresas e grandes desafios. Mas acima de tudo a concretização de uma fase muito importante para poder alçar voos mais altos. Por isso, quero expressar meus sinceros agradecimentos, primeiramente à Deus, o maior autor e o Pai que me auxilia nas caminhadas mais turbulentas da vida.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Francisco Augusto Aparecido Gomes pelos conselhos, orientações e palavras de incentivo, o qual abraçou o trabalho e encarou os desafios vindouros.

À minha coorientadora Prof^a Dra. Paôla Regina Dalcanal pelos conhecimentos transmitidos, companheirismo e incentivo.

De forma especial agradeço a minha família, que foi um dos principais pilares para que pudesse concluir os estudos.

Aos professores Paulo Rogério Novak, Giovanni Bratti e Rodrigo Borges Santos pelas sugestões ao trabalho e pelos auxílios. Estendendo os agradecimentos à todos os professores e funcionários que direta ou indiretamente contribuíram para a realização do mestrado.

Encero agradecendo à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 pelo auxílio financeiro, amigos e colegas. O apoio de cada um foi importante para não desistir quando as adversidades surgiram.

*"O aprendiz é um mestre
em formação".
(Fernanda Simões Rodrigues)*

RESUMO

Com o avanço das tecnologias construtivas, o adensamento populacional e a escassez de terrenos, os edifícios passaram a ficar cada vez mais altos e esbeltos, e regiões sísmicamente ativas estão sendo habitadas. A análise do comportamento dinâmico na estrutura, considerando os efeitos de interação solo-estrutura (ISE), é importante para evitar estimativas errôneas na análise prévia do projeto e poder garantir a segurança e estabilidade estrutural. No entanto, o estudo envolve o uso de uma linguagem complexa e métodos que demandam alto custo computacional como é o caso do uso métodos de elementos finitos e elementos de contorno. No presente trabalho foi utilizado o método de solução de espaço de estados generalizado para N pavimentos, considerando apenas o efeito da flexão como resposta da vibração oriunda do problema acoplado solo-estrutura e excitação sísmica. O estudo consiste basicamente em quatro fases, todas aplicadas a estruturas metálicas bidimensionais. A primeira destina-se à validação do modelo de espaço de estados implementado nessa pesquisa. A segunda fase consiste na aplicação de um sismo agindo diretamente na primeira massa da estrutura metálica bidimensional com três pavimentos e comparar o algoritmo com a solução pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem de precisão. A terceira fase é a generalização do método de espaço de estado para problemas acoplados envolvendo ISE. A última fase é a comparação entre o pórtico (i) sendo excitado diretamente na estrutura e (ii) considerando o problema acoplado de ISE. Os cálculos foram implementados no software comercial Matlab e os resultados são apresentados no domínio do tempo e da frequência. Os resultados obtidos pelo método de espaço de estado, quando validado e comparado, tiveram excelente concordância com a solução analítica e com o método de Runge-Kutta, respectivamente.

Palavras-chave: Interação solo-estrutura, Problemas Acoplados, Método de Espaço de Estados, Runge-Kutta.

ABSTRACT

With the advancement of construction technologies, population density, and land scarcity, buildings have become increasingly tall and slender, and seismically active regions are being inhabited. The analysis of the dynamic behavior in the structure, considering the effects of soil-structure interaction (SSI), is important to avoid erroneous estimates in the previous analysis of the project and to guarantee the safety and structural stability. However, the study involves the use of complex language and methods that demand high computational cost, such as the use of finite element and boundary element methods. In the present work, the generalized state-space solution method for N floors was used, considering only the bending effect as a response to the vibration arising from the coupled soil-structure problem and seismic excitation. The study basically consists of four phases, all applied to two-dimensional metallic structures. The first is intended to validate the state-space model implemented in this research. The second phase consists of the application of a seism acting directly on the first mass of the two-dimensional metallic structure with three floors and comparing the algorithm with the solution using the 4th-order precision Runge-Kutta method. The third phase is the generalization of the state-space method for coupled problems involving SSI. The last phase is the comparison between the structure (i) being excited directly in the structure and (ii) considering the coupled SSI problem. The calculations were implemented in the commercial Matlab software and the results are presented in the time and frequency domain. The results obtained by the state-space method, when validated and compared, had an excellent agreement with the analytical solution and with the Runge-Kutta method, respectively.

Keywords: Soil-Structure Interaction, Coupled Problems, State-Space Method, Runge-Kutta.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Edifício <i>Champagne Towers</i> , em Santa Monica-CA	32
Figura 2 – Edifício <i>Sherman Way</i> em Van Nuys-CA	32
Figura 3 – Propagação de vibrações sísmicas de onda	33
Figura 4 – Modelo de elementos finitos para o sistema solo-estrutura	36
Figura 5 – Interação sísmica solo-estrutura com o método de subestrutura	37
Figura 6 – Modelo massa mola amortecedor com excitação sísmica: pórtico plano.	38
Figura 7 – Relação força-deslocamento de sistemas lineares e não lineares.	43
Figura 8 – Diferentes tipos de cargas dinâmicas e exemplos típicos.	45
Figura 9 – Modelo de Estado com entradas e saídas	47
Figura 10 – Método de RK4: inclinações k_1, k_2, k_3, k_4 e a média	55
Figura 11 – Modelo de Estado com entradas e saídas	57
Figura 12 – Diagrama de blocos de EE para um sistema linear invariante no tempo de múltiplas entradas e múltiplas saídas.	60
Figura 13 – Fluxograma de solução para EE via Matlab.	60
Figura 14 – Modelo massa mola amortecedor com excitação sísmica.	61
Figura 15 – Esquema de solução para EE.	65
Figura 16 – Pseudo-código para sistema solo-estrutura acoplado.	66
Figura 17 – Sistema mecânico com 1 grau de liberdade recebendo uma força harmônica.	68
Figura 18 – Resposta do deslocamento angular perante excitação de força harmônica para sistema amortecido com 1 grau de liberdade.	70
Figura 19 – Resposta da velocidade angular perante excitação de força harmônica para sistema amortecido com 1 grau de liberdade.	70
Figura 20 – Sistema mecânico com 1 grau de liberdade recebendo uma força harmônica.	71
Figura 21 – Deslocamento angular do corpo 1 considerando um sistema com 2 graus de liberdade.	73
Figura 22 – Deslocamento angular do corpo 2 considerando um sistema com 2 graus de liberdade.	74
Figura 23 – Velocidade angular do corpo 1 considerando um sistema com 2 graus de liberdade.	74
Figura 24 – Velocidade angular do corpo 2 considerando um sistema com 2 graus de liberdade.	75
Figura 25 – Pórtico plano com 3 graus de liberdade.	76
Figura 26 – Modelo discreto de massas concentradas.	76
Figura 27 – Registro sísmico de Northridge (1994) considerando a ação horizontal.	77

Figura 28 – Comparação entre as respostas dos métodos de RK4 e EE quanto ao deslocamento perante excitação sísmica considerando 3 graus de liberdade.	80
Figura 29 – Comparação entre as respostas dos métodos de RK4 e EE quanto a velocidade perante excitação sísmica considerando 3 graus de liberdade.	80
Figura 30 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de deslocamento dos dois métodos de solução: RK4 e EE.	81
Figura 31 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de velocidade dos dois métodos de solução: RK4 e EE.	81
Figura 32 – Pórticos planos de diferentes pavimentos considerando excitação sísmica e ISE.	82
Figura 33 – Discretização de massas concentradas das 3 estruturas	83
Figura 34 – Análise modal das estruturas com 3, 7 e 15 pavimentos.	86
Figura 35 – Resposta no domínio do tempo em termos de deslocamento relativos à fundação considerando 3 pavimentos.	87
Figura 36 – Resposta no domínio do tempo em termos de deslocamento relativo à fundação considerando 7 pavimentos.	87
Figura 37 – Resposta no domínio do tempo em termos de deslocamento relativo à fundação considerando 15 pavimentos.	88
Figura 38 – Resposta no domínio do tempo em termos de velocidade considerando 3 pavimentos.	88
Figura 39 – Resposta no domínio do tempo em termos de velocidade considerando 7 pavimentos.	89
Figura 40 – Resposta no domínio do tempo em termos de velocidade considerando 15 pavimentos.	89
Figura 41 – Resposta no domínio do tempo em termos de aceleração considerando 3 pavimentos.	90
Figura 42 – Resposta no domínio do tempo em termos de aceleração considerando 7 pavimentos.	90
Figura 43 – Resposta no domínio do tempo em termos de aceleração considerando 15 pavimentos.	91
Figura 44 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de deslocamentos relativos à fundação obtidos via EE para uma estrutura com 3 pavimentos.	91
Figura 45 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de deslocamentos relativos à fundação obtidos via EE para uma estrutura com 7 pavimentos.	92

Figura 46 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de deslocamentos relativos à fundação obtidos via EE para uma estrutura com 15 pavimentos.	92
Figura 47 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de velocidade obtidos via EE para uma estrutura com 3 pavimentos. . .	93
Figura 48 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de velocidade obtidos via EE para uma estrutura com 7 pavimentos. . .	93
Figura 49 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de velocidade obtidos via EE para uma estrutura com 15 pavimentos. .	94
Figura 50 – Comparação entre as respostas do último pavimento de uma estrutura com 3 andares considerando a ISE e sem ela em termos de deslocamento.	95
Figura 51 – Comparação entre as respostas do último pavimento de uma estrutura com 3 andares considerando a ISE e sem ela em termos de velocidade.	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Escala de intensidade de Mercali Modificada (resumida)	31
Tabela 2 – Diferença entre problemas estático e dinâmico.	44
Tabela 3 – Categoria sísmica.	48
Tabela 4 – Propriedades do sistema com 1 grau de liberdade.	69
Tabela 5 – Propriedades do sistema com 2 grau de liberdade.	71
Tabela 6 – Frequências naturais para o sistema de vibração forçada com dois graus de liberdade.	72
Tabela 7 – Propriedades do sistema com 3 graus de liberdade considerando excitação sísmica.	79
Tabela 8 – Frequências naturais do sistema com 3 GL.	79
Tabela 9 – Comparação do tempo de solução entre os métodos de RK4 e EE.	82
Tabela 10 – Propriedades do solo e da estrutura.	83
Tabela 11 – Dimensões da estrutura, massa e rigidez.	85
Tabela 12 – Rigidez e amortecimento do solo.	85
Tabela 13 – Respostas das máximas amplitudes de deslocamento, velocidade e aceleração no domínio do tempo.	86
Tabela 14 – Respostas das máximas amplitudes de vibração em termos deslocamento e velocidade no domínio da frequência.	94
Tabela 15 – Tempo de processamento de cada estrutura.	94
Tabela 16 – Comparação entre as respostas das máximas amplitudes de deslocamento e velocidade com e sem ISE.	94

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EE	Espaço de estados
RK	Runge-Kutta
RK2	Runge-Kutta de segunda ordem de precisão
RK3	Runge-Kutta de terceira ordem de precisão
RK4	Runge-Kutta de quarta ordem de precisão
RK5	Runge-Kutta de quinta ordem de precisão
EDO	Equação Diferencial Ordinária
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
ISE	Interação solo-estrutura
1 GL	1 Grau de liberdade
2 GL	2 Graus de liberdade
3 GL	3 Graus de liberdade
PGA	<i>Peak Ground Acceleration</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

M_{ag}	Magnitude
A_m	Amplitude máxima
f	Fator de correção para distância epicentral
Δ	Distância epicentral
h_s	Profundidade focal
C_s	Fator de correção para estação sismológica
C_r	Fator de correção regional
M_w	Magnitude de momento
M_o	Momento sísmico
T	Período da onda sísmica
t	Tempo
M	Matriz de massa
C	Matriz de amortecimento
K	Matriz de rigidez
M_s	Matriz de massa da superestrutura
I	Vetor unitário utilizado na localização da excitação ou força externa
$\ddot{x}_g(t)$	Vetor que contém os valores de acelerações do sismo
$\ddot{x}(t) \dot{x}(t) x(t)$	Vetores de aceleração, velocidade e deslocamento do sistema solo-estrutura
F	Força externa
X	Vetor modal
y_i, x_i	Inclinação e intervalo
Φ	Função de incremento
h	Distância do passo
ϕ	Fase do sistema

ρ	Densidade
S	Matriz dinâmica
λ	Autovalor
F_0	Amplitude da força
ω	Frequência de excitação
ω_d	Frequência de vibração amortecida
x_h	Solução homogênea
x_p	Solução particular
ζ	Fator de amortecimento
ω_n	Frequência natural
A	Matriz estado
B	Matriz entrada
C_y	Matriz saída
D	Matriz de transmissão
z	Vetor estado
u	Vetor entrada
c_θ, c_h	Amortecimento do solo
k_θ, k_h	Rigidez do solo
V_s	Velocidade de onda do solo
ν	Coefficiente de Poisson
G	Módulo de Cisalhamento
E	Módulo de Young
I_o	Momento de inércia de massa
$\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta$	Aceleração angular, velocidade angular e deslocamento angular

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	Delimitação do tema	26
1.2	Objetivos	27
1.2.1	Objetivo Geral	27
1.2.2	Objetivos Específicos	27
1.3	Organização do trabalho	27
2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	29
2.1	Sismos	29
2.1.1	Terremotos: origem, escalas de medidas e danos provocados à estrutura	29
2.1.2	Propagação das ondas	30
2.2	Interação solo-estrutura	33
2.3	Modelos matemáticos	34
2.3.1	Método direto	35
2.3.2	Método de subestrutura	36
2.3.3	Método massa mola amortecedores equivalentes	37
2.3.4	Domínio da frequência e domínio do tempo	39
2.4	Método de Runge-Kutta (RK)	39
2.5	Método Espaço de Estados (EE)	40
2.6	Vantagens e desvantagens dos métodos RK e EE	41
2.7	Dinâmica das estruturas	42
2.7.1	Vibrações	43
2.7.2	Análise modal	44
2.7.3	Excitação sísmica	46
3	MODELAGEM NUMÉRICA	49
3.1	Vibração forçada amortecida	49
3.1.1	Sistemas com 1 GL	49
3.1.2	Sistemas com 2 graus de liberdade	53
3.2	Modelagem no EE	55
3.2.1	EE para problemas iniciais	56
3.2.2	Generalização do EE para problemas de ISE	59
3.3	Recursos computacionais	64
4	RESULTADOS	67
4.1	Sistemas amortecidos com excitação harmônica	67
4.1.1	Vibração forçada amortecida para 1 GL	67
4.1.2	Vibração forçada amortecida para 2 GL	69
4.2	Excitação sísmica diretamente na estrutura	75
4.3	Excitação sísmica considerando a interação solo-estrutura	82

5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	97
	REFERÊNCIAS	99

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, principalmente após o surgimento dos computadores, a interação solo-estrutura (ISE) tem atraído um grande interesse entre pesquisadores de diversas áreas (KAUSEL, 2010; LU et al., 2005). Alguns dos motivos da investigação é devido ao aumento da urbanização em zonas sísmicas ativas, as construções de edifícios cada vez mais altos e esbeltos, o crescente aumento de usinas *offshore* e as construções de usinas nucleares (LI et al., 2020; WOLF, 1985; LI et al., 2017; HOKMABADI; FATAHI, 2016).

Um dos leques abordados no estudo da interação dinâmica solo-estrutura visa prever o comportamento às respostas sísmicas da estrutura (LI et al., 2017; HOKMABADI; FATAHI, 2016). Segundo Wolf (1985) existem várias forças que atuam ao longo do tempo e influenciam na resposta dinâmica da estrutura como é o caso de máquinas rotativas, terremotos e explosões. Dentre as cargas citadas a mais relevante é o terremoto (CHOPRA, 2012).

A ISE permite uma maior segurança e confiabilidade nos projetos estruturais. A relevância do assunto é bem justificado pelas marcas deixadas dos terremotos como o ocorrido na Cidade do México em 1985, no Northridge em 1994 e o de Kobe em 1995 (HOKMABADI; FATAHI, 2016). No entanto, apesar de existir um interesse nos últimos anos, a ISE ainda é um desafio principalmente para engenheiros estruturais e geotécnicos, pois sua linguagem é complexa e pouco comentada (CARBONARI et al., 2019; BYBORDIANI; ARICI, 2018). Além de apresentarem aplicações práticas limitadas e um alto custo computacional (NIST GCR 12-917-21, 2012).

De acordo com Kausel et al. (1978) houve um crescente esforço na intenção de formular soluções de engenharia para os problemas de vibração de fundações e resposta sísmica de edifícios. Dentre os métodos comumente utilizados são: direto, subestrutura, massa-mola-amortecedor (WOLF, 1985; WOLF, 1994; WOLF, 1988a; WOLF, 1998b) e em laboratório os testes de mesa (SHEN; QIAN, 2019). Existe, também, o método de cone apresentado por Wolf (1998b) com soluções de menor complexidade para calcular a rigidez dinâmica das fundações e o movimento de entrada na base. Apesar de ser um método mais simples, os resultados são considerados satisfatórios.

Para resolver a equação do movimento baseada na segunda lei de Newton pelo método de massa mola amortecedor são necessários utilizar métodos de solução que resolvem equações diferenciais ordinárias (EDOs). Dentre eles estão os métodos de Runge-Kutta de quarta ordem de precisão (RK4) e o espaço de estados (EE). Os métodos de Runge-Kutta (RK) contém um conjunto de técnicas numéricas explícitas de passo simples e são classificados de acordo com a sua ordem de precisão (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008). O método de RK iniciou há pouco mais de 100 anos com a publicação de Runge sobre soluções numéricas de equações diferenciais (BUTCHER;

WANNER, 1996). Posteriormente, importantes autores como Heun, Kutta e Nyström foram aperfeiçoando e contribuindo para a melhora do método, hoje existem várias técnicas dentro da família dos métodos de RK (BUTCHER, 1996).

O método de EE teve seus estudos iniciados na engenharia de controle sendo o artigo de Kalman em 1960 um dos pioneiros (COMMANDEUR; KOOPMAN; OOMS, 2011). Ele é composto por duas equações: uma de estado e a outra de saída e são resolvidas de forma matricial. Este, fornece uma abordagem no domínio do tempo (OGATA, 2010). Uma das principais aplicações foi em programas aeroespaciais: Apollo e Polaris (HUTCHINSON, 1984).

1.1 Delimitação do tema

A presente pesquisa procura generalizar pelo método de EE e estudar o comportamento de uma estrutura metálica bidimensional (2D) em função de uma excitação sísmica (terremoto) ocorrido na cidade de Northridge - Los Angeles (EUA), em 1994. O sismo causou um grande impacto nas construções da cidade e se tornou motivo de estudo de várias pesquisas como as de Pérez Peña (2017), Grezelle et al. (2020), Chopra (2012), Nazarimofrad, Farahani e Zahrai (2019).

Antes de se apresentar a generalização da solução pelo método de EE envolvendo a ISE via excitação sísmica, é necessário validar e posteriormente comparar o método de solução utilizado na presente pesquisa. Assim, a pesquisa inicia-se analisando um sistema dinâmico com 1 grau de liberdade (1GL) analiticamente, posteriormente com 2 graus de liberdade (2 GL) fazendo uma comparação com duas formas distintas de solução. Na sequência é modelado uma estrutura com 3 pavimentos recebendo excitação sísmica direta e comparada através do método de RK4.

Para investigar o problema de ISE, a estrutura é modelada no plano e discretizada como um sistema de massas concentradas, considerando apenas vibração em flexão e o solo representado por molas e amortecedores calculados através de funções de impedância. O comportamento físico da estrutura, i.e., sua resposta dinâmica, será analisado para verificar a acurácia da modelagem da ISE pelo método de EE. As análises foram realizadas no domínio do tempo e da frequência. O modelo terá como base os estudos apresentados por Wolf (1985), Wolf (1988a), Wolf (1998b), Grezelle et al. (2020), Lu et al. (2005), Pérez Peña (2017), Chopra (2012), Clough e Penzien (2003), Chen (1998), Ogata (2010).

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do trabalho é analisar e generalizar via EE o comportamento de uma estrutura no plano, somente em flexão, recebendo uma excitação sísmica, no caso o terremoto, levando em consideração a interação dinâmica solo-estrutura.

1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Validar o algoritmo do método de EE através de solução analítica com 1 GL.
- Comparar um sistema dinâmico com 2 GL através de duas soluções distintas com o método de EE.
- Comparar um sistema com 3 graus de liberdade (3 GL) recebendo excitação sísmica direta na estrutura através dos métodos de RK4 e EE (i).
- Generalizar o algoritmo de solução via EE para modelos acoplados envolvendo ISE e excitação sísmica considerando somente o modo de flexão para N graus de liberdade, sendo que é admitido 1 GL por pavimento (ii).
- Comparar as respostas da situação (i) com (ii).

1.3 Organização do trabalho

O estudo contém cinco capítulos. O primeiro refere-se à introdução do trabalho. O segundo traz o referencial teórico contendo os principais métodos disponíveis na literatura. O terceiro apresenta a modelagem numérica. O quarto aborda os resultados. O quinto contém as considerações finais do trabalho.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Neste capítulo será apresentado um pouco sobre a origem dos sismos, sua propagação pelo solo e seus efeitos na estrutura. Além disso, apresentar-se-á os conceitos de ISE bem como algumas aplicações e por fim, as equações do modelo físico que representarão o comportamento dinâmico da estrutura perante a ação de um evento sísmico.

2.1 Sismos

2.1.1 Terremotos: origem, escalas de medidas e danos provocados à estrutura

Uma das aplicações mais significativas na dinâmica estrutural é na análise das respostas da estrutura sob o tremor do solo causado por um terremoto (CHOPRA, 2012). Os terremotos remontam a centenas de milhões de anos. Até o século XVII era tido como algo sobrenatural, posteriormente que foi visto como um fenômeno natural. A partir do século XIX houve um forte progresso na medição, mapeamento e compreensão dos terremotos. Durante a formação da terra, ela foi constituída por diferentes placas com massas distintas, as mais densas tendem a aproximar-se do núcleo, elevando as placas mais leves, o encontro destas malhas é chamado de falhas geológicas (DATTA, 2010). Segundo Wolf (1985) a liberação de uma grande quantidade de energia sobre uma falha é conhecida como terremoto e acrescenta que o estado atual da arte permite a identificação e medição probabilística das forças sísmicas sobre o domínio do tempo. Cabe ao profissional a leitura e avaliação do risco da estrutura.

Para medir o tamanho do terremoto existem dois parâmetros básicos: magnitude e intensidade. A primeira mede a força ou no caso a tensão de energia liberada por ele e o segundo está relacionado com os efeitos que as ondas provocam em um dado local. Para especificar quantitativamente o tamanho de um terremoto existem disponíveis na literatura várias formulações, sendo as principais a escala de Richter e a escala de magnitude de momento. A escala de Richter é baseada na comparação de amplitudes máximas registradas em diferentes distâncias pelos sismômetros de torção. A magnitude pode ser expressa pela Equação 2.1 (DATTA, 2010; RICHTER, 1935).

$$M_{ag} = \log \left(\frac{A_m}{T} \right) + f(\Delta, h_s) + C_s + C_r, \quad (2.1)$$

em que A_m é a amplitude máxima, em microns; T é o período da onda sísmica em segundos; f é o fator de correção para distância epicentral (Δ) e a profundidade focal (h_s); C_s é o fator de correção para a estação sismológica; C_r é o fator de correção regional.

A escala de magnitude de momento tornou-se a mais usada porque tem a van-

tagem de não ficar saturada quando a dimensão de ruptura do terremoto excede o comprimento de onda das ondas sísmicas usadas para a determinação da magnitude e reflete melhor o valor absoluto baseado em processos físicos que ocorrem durante a ruptura. Enquanto as escalas baseadas em amplitude de Richter compara apenas terremotos entre si (TEIXEIRA et al., 2003; KANAMORI, 1977). A escala de magnitude de momento (M_w) é logarítmica, adimensional e quantifica a magnitude de um terremoto. A equação de M_w é formulada por Hanks e Kanamori (1979) apresentada na Eq 2.2. Em que M_o é o momento sísmico expressado em Newton-metro (N.m).

$$M_w = \frac{2}{3} \log M_o - 6.0. \quad (2.2)$$

A escala de intensidade é subjetiva pois não são utilizados instrumentos, apenas o sentido das pessoas, sendo muito empregada principalmente em regiões que não têm instrumentos de investigação. A Tabela 1 apresenta a escala resumida Modificada de Mercalli formulada por Wood e Neumann (1931), a partir da modificação e condensação da Escala Mercalli-Cancani apresentada por Sieberg (1923 apud WOOD; NEUMANN, 1931). A Tabela 1 também conta com a aceleração aproximada do solo.

Para medir o sismo o instrumento básico é o acelerógrafo, ele é acionado pelas primeiras ondas do sismo e se mantém até o momento em que o tremor não se torna mais perceptível. A maioria dos registros mais intensos são os terremotos ocorridos em San Fernando (1971) com magnitude de 6,4 M_w , Loma Prieta (1989) com magnitude de 6,9 M_w , Northridge - Califórnia (1994) com magnitude de 6,7 M_w , Kobe (1995) com magnitude de 6,9 M_w , Tohoku – Japão (2011) com magnitude de 8,9 M_w e Chi-Chi – Taiwan (1999) com magnitude de 7,65 M_w (CHOPRA, 2012). Como exemplo dos danos causados por um terremoto é citado o terremoto de Northridge com magnitude de 6,7 na escala de momento (M_w), que possuiu relevância, devido ao fato de ter ocorrido em local com grande densidade de edifícios e população, este foi um marco para execução de código de obras e o estudo de terremotos. Até a data de 14 fevereiro de 1994 o *Department of the Coroner* de Los Angeles atribuiu 58 mortes e estimou entre 80 mil à 125 mil pessoas que tiveram que ser remanejadas temporariamente ou permanentemente de suas casas e/ou apartamentos (TODD et al., 1994). As Figuras 1 e 2 mostram alguns danos causados por causa dos terremotos. Na Figura 1 apresentam-se as falhas de colunas causadas no edifício de 16 andares *Champagne Towers*, em Santa Monica-CA. O edifício de três andares da Figura 2 é o *Sherman Way* em Van Nuys-CA, ali ruiu a fileira central de colunas de concreto.

2.1.2 Propagação das ondas

A energia de propagação no movimento das placas tectônicas é dissipada na forma de ondas, estas possuem características que mudam conforme as propriedades

Tabela 1 – Escala de intensidade de Mercalli Modificada (resumida)

Grau	Avaliação	Descrição dos efeitos	Aceleração (g)
I	Insignificante	Detectado somente por instrumentos. Não sentido pelas pessoas.	
II	Muito leve	Sentido por poucas pessoas paradas, especialmente em andares superiores. Objetos delicadamente suspensos podem balançar.	< 0,003
III	Leve	Pequenas vibrações sentidas dentro de casa, similar a passagem de um caminhão leve. Duração estimada.	0,004 - 0,008
IV	Moderado	Objetos suspensos oscilam. Janelas e portas fazem barulho. Paredes e estrutura de madeira rangem. A sensação é similar a passagem de um caminhão pesado.	0,008-0,015
V	Ligeiramente forte	Sentido por muitas pessoas. Algumas despertam. Perceptível fora de casa. Objetos pequenos e instáveis são deslocados.	0,015-0,04
VI	Forte	Sentido por todos. Pessoas assustadas vão para as ruas. Janelas e louças quebram. Reboco fraco e construções de má qualidade racham. Danos leves	0,04-0,08
VII	Muito Forte	Todos correm para fora. Sentido por motoristas dirigindo. Ondas em piscinas. Algum dano em estruturas resistentes a sismo e danos graves a estruturas de alvenaria não reforçadas	0,08-0,15
VIII	Destruutivo	Sérios danos severos a moderado em estruturas. Trincas no chão.	0,15-0,30
IX	Ruína	Pânico total. Tubulações subterrâneas quebradas. Rachaduras visíveis no solo. Construções normais bem danificadas ou tiveram colapso total.	0,30-0,60
X	Desastroso	Danos sérios em barragens e diques. Grandes escorregamentos de terra. As estruturas só as resistentes a sismos permanecem. Trilhos dobrados.	0,6-1
XI	Desastroso ao extremo	Trilhos bastante entortados. Tubulações subterrâneas inutilizáveis.	~1-2
XII	Catastrófico	Destruição quase total. Ondas vistas nas superfícies do solo. Linhas de visão e nível distorcidos. Objetos lançados para o alto.	~2

Fonte: Adaptado de Teixeira et al. (2003), Datta (2010), Wood e Neumann (1931)

dos materiais por onde passam, sendo classificadas como ondas de volume e de superfície. As ondas de volume podem ser classificadas como primárias e secundárias. As primárias ou P (Figura 3a) são ondas longitudinais, nestas partículas se movimentam por compressão e dilatação. As ondas secundárias ou S são ondas de cisalhamento onde a movimentação é perpendicular a propagação (Figura 3b). As ondas de superfície podem ser tipo Rayleigh e Love. A onda Rayleigh é uma combinação de vibrações

Figura 1 – Edifício *Champagne Towers*, em Santa Monica-CA



Fonte: Todd et al. (1994)

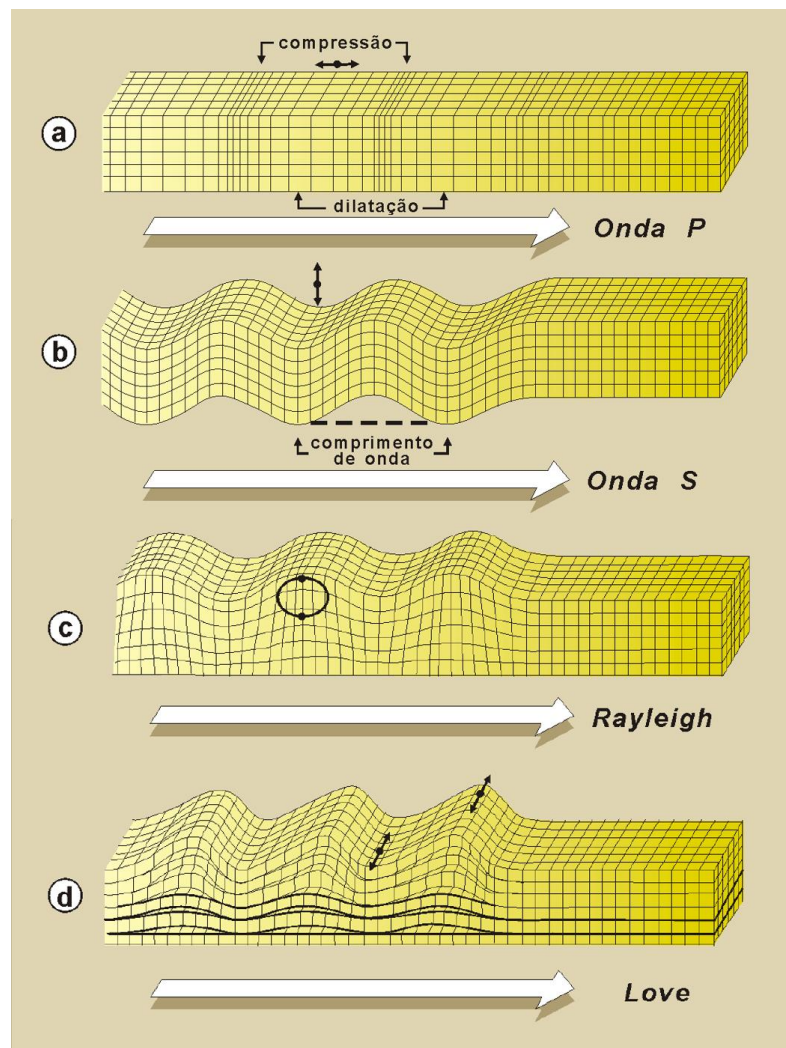
Figura 2 – Edifício *Sherman Way* em Van Nuys-CA



Fonte: Todd et al. (1994)

das ondas P e S contidas no plano vertical (Figura 3c). A onda Love corresponde a superposições de ondas S com vibrações horizontais (Figura 3d) (TEIXEIRA et al., 2003; DATTA, 2010).

Figura 3 – Propagação de vibrações sísmicas de onda



Fonte: Teixeira et al. (2003)

2.2 Interação solo-estrutura

A ISE pode ser definida segundo Fitzgerald e Basu (2016), Sunny e Mathai (2017) como o processo em que a resposta da estrutura interfere na resposta do solo subjacente e a resposta do solo influencia no comportamento da estrutura. Para Sotiriadis et al. (2020), a ISE pode ser entendida como sendo a alteração das características dinâmicas de um sistema estrutural quando comparado a uma base fixa.

Mylonakis, Nikolaou e Gazetas (2006) explicam que durante um terremoto o solo sofre influências das ondas sísmicas incidentes e as transmite dinamicamente para a fundação e superestrutura. Em contrapartida, o movimento induzido da superestrutura gera forças inerciais, isso promove tensões dinâmicas na fundação e são repassadas para o solo, onde se desenvolvem. Assim, fundação e superestrutura sofrem deslocamentos dinâmicos adicionais, logo produzem forças inerciais adicionais.

A resposta dinâmica de uma estrutura pode apresentar comportamentos distintos

conforme o tipo de solo em que é excitada (FITZGERALD; BASU, 2016; HARTE; BASU; NIELSEN, 2012). De acordo com os estudos de Veletsos e Verbič (1973), o solo flexível sob a fundação de uma estrutura aumenta a capacidade de amortecimento da fundação e reduz a frequência natural da estrutura.

O estudo de Kausel (2010) traz uma revisão dos principais desenvolvimentos da evolução da ISE, desde suas origens no final do século XIX até a era contemporânea. O grande avanço do estudo dinâmico da ISE aconteceu por volta das décadas de 1960 e 1970 devido ao surgimento dos computadores digitais e especialmente o método de elementos finitos os quais ajudaram a mudar radicalmente o paradigma das pesquisas e desviar a atenção dos métodos puramente analíticos.

A fim de avaliar a influência da fundação no desempenho sísmico de edificações considerando a ISE, Hokmabadi e Fatahi (2016) desenvolveram um modelo numérico tridimensional (3D) utilizando o método de diferenças finitas para avaliar quatro tipos de fundações diferentes. Os resultados mostraram que o tipo de fundação influencia na resposta sísmica de edifícios considerando a ISE.

Outro estudo apresentado por Mulliken e Karabalis (1998) mostra um modelo discreto para prever a interação dinâmica do solo entre fundações rígidas e superficiais. O acoplamento é dado por meio de funções de rigidez e amortecimento independentes de frequência. A análise dinâmica é realizada no domínio do tempo a partir de uma adaptação do método de Wilson - θ . O estudo mostrou a aplicação direta do modelo básico a sistemas de ISE complexos e enfatizou a importância da consideração da interação dinâmica por meio do solo no projeto estrutural.

Lu et al. (2005) apresentam uma análise numérica tridimensional via elementos finitos envolvendo interação solo-fundação-estrutura através do software Ansys e validaram o modelo a partir de testes experimentais. O modelo apresentado mostrou-se adequado para a análise numérica de um sistema com ISE sob movimentos de solo pequenos e fortes. Eles notaram que há um deslizamento entre a fundação profunda (tipo estaca) e o solo quando submetido a forte entrada sísmica. Além disso, mostraram que se não levar em consideração a não linearidade do solo pode haver erros significativos o cálculo para solo mole.

2.3 Modelos matemáticos

A dinâmica estrutural trata de métodos para determinar as tensões e deslocamentos de uma estrutura submetida a cargas dinâmicas. Dessa forma é indispensável modelar o solo (WOLF, 1994; WOLF, 1985; WOLF, 1988a). A seguir serão abordados três métodos que resolvem o problema de ISE: método direto, método da subestrutura e o método de massa, mola e amortecedores equivalentes.

2.3.1 Método direto

No método direto, tanto a estrutura quanto o solo são modelados juntos e a análise é realizada em uma fase (WOLF, 1994). Além disso, a ISE depende da rigidez do solo e das propriedades de massa e rigidez da estrutura. O efeito de interação associado à rigidez da estrutura é denominado interação cinemática e o efeito relacionado à massa correspondente é denominado interação inercial (CLOUGH; PENZIEN, 2003). A equação do movimento é dado pela equação 2.3 (PÉREZ PEÑA, 2017).

$$\mathbf{M}_{se}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_{se}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_{se}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{M}_s\mathbf{I}\ddot{\mathbf{x}}_g(t), \quad (2.3)$$

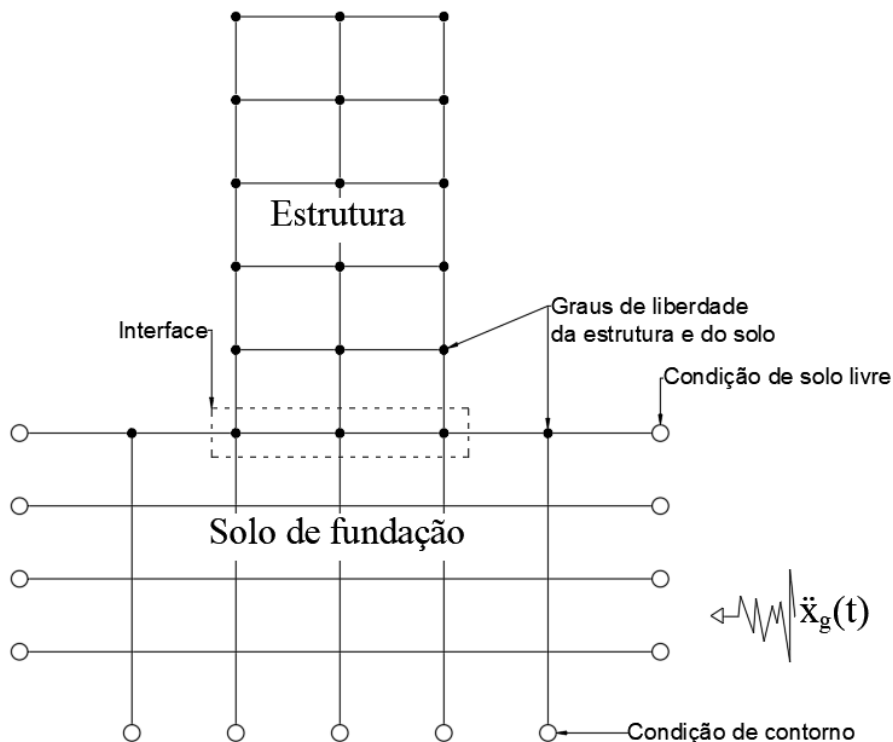
sendo:

- \mathbf{M}_{se} = Matriz massa do sistema solo-estrutura;
- \mathbf{C}_{se} = Matriz amortecimento do sistema solo-estrutura;
- \mathbf{K}_{se} = Matriz rigidez do sistema solo-estrutura;
- \mathbf{M}_s = Matriz massa da superestrutura;
- \mathbf{I} = Vetor unitário utilizado na localização da excitação ou força externa;
- $\ddot{\mathbf{x}}_g(t)$ = Vetor que contém os valores de acelerações do sismo;
- $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ $\dot{\mathbf{x}}(t)$ $\mathbf{x}(t)$ = Vetores de aceleração, velocidade e deslocamento do sistema solo-estrutura.

A Figura 4 representa a região do solo em campo livre, linear, isotrópico e homogêneo adjacente a interface de interação entre estrutura-solo modelada em elementos finitos, bem como a estrutura até as condições de contorno. A aplicação das condições de contorno faz-se necessário pelo fato de não ser possível modelar todo o domínio do solo. Assim, deve conter as características do solo fora do limite e colocado a uma distância significativa da estrutura a fim de evitar o contato das ondas que se propagam no limite artificial. Quanto a condição de radiação de energia, podem ser locais, no espaço, no tempo e independentes da frequência. Em geral, para as aproximações do contorno podem ser utilizados pontos de mola com coeficientes constantes calculados através de cones semi-infinitos truncados (WOLF, 1994; WOLF, 1985).

Para uma análise no domínio do tempo, o método direto pode ser atraente, embora o sistema dinâmico total, que deve ser calculado, seja maior do que no método de subestrutura. Em sua maioria, a interface solo-estrutura é complexa devido ao grande número de graus de liberdade, o que ocasiona um alto custo computacional e também na perda da percepção física. Nessas condições o método direto não é satisfatório para projetos padrão de tamanhos moderados e pequenos (KHAKPOUR; HAJIALILUE BONAB, 2020; WOLF, 1994; WOLF, 1985; WOLF, 1988a).

Figura 4 – Modelo de elementos finitos para o sistema solo-estrutura



Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (2003), NIST GCR 12-917-21 (2012)

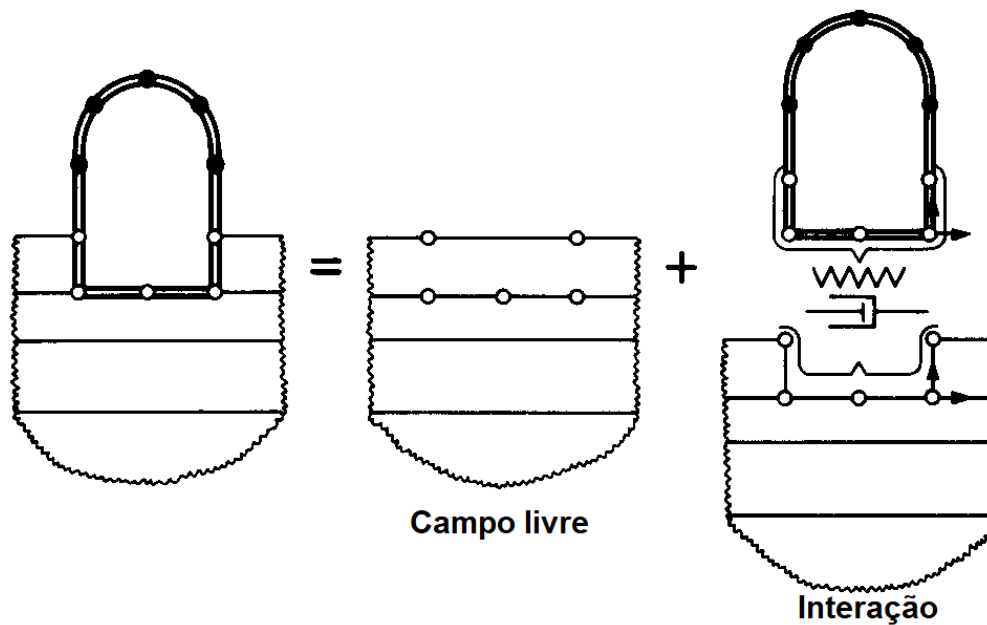
2.3.2 Método de subestrutura

No método da subestrutura, o problema de ISE é dividido em duas partes distintas, ou duas subestruturas, que são combinadas para resolver o problema completamente. A conexão entre eles é fornecida por forças de interação de igual amplitude, mas agindo em sentidos opostos nas duas subestruturas. A soma dos movimentos de campo livre na interface do solo sem a estrutura mais os movimentos adicionais da interação resulta o movimento total ocorrido na interface. Esses movimentos descrevem as relações de equilíbrio dinâmico para os graus de liberdade na interface e após solucionados são utilizados para calcular os deslocamentos resultantes (KHAKPOUR; HAJIALILUE BONAB, 2020; CLOUGH; PENZIEN, 2003).

Wolf (1985) faz uma explicação introdutória sobre o método de subestrutura para a situação apresentada na Figura 5. Dessa maneira, os nós do modelo dinâmico da estrutura são representados pelos círculos na interface solo-estrutura. Primeiramente é calculada a resposta em campo livre sem considerar a estrutura. Somado a isso, tem-se a interação que é realizado em duas fases. A primeira fase, o solo ilimitado é analisado em um subsistema dinâmico e determinado a relação força-deslocamento dos graus de liberdade nos nós da interface solo-estrutura que podem ser representados por

funções de impedâncias. A segunda parte, corresponde a estrutura, a análise depende de um carregamento em campo livre. O método da subestrutura é computacionalmente competitivo com outros métodos e é especialmente eficaz para a análise de sistemas de ISE, além de corrigir a maioria das desvantagens do método direto (WOLF, 1988a; CHOPRA, 2012).

Figura 5 – Interação sísmica solo-estrutura com o método de subestrutura



Fonte: Wolf (1985)

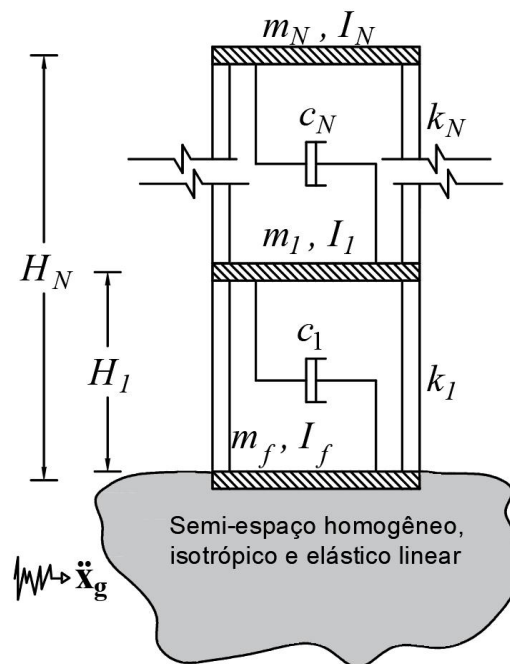
2.3.3 Método massa mola amortecedores equivalentes

O método de massa mola amortecedores ou modelo de parâmetros concentrados apresenta uma metodologia de estudo no domínio do tempo. Aqui, a rigidez e a capacidade de dissipação de energia no solo são representadas por meio de molas e amortecedores, respectivamente. O solo é considerado como um semi-espço homogêneo, isotrópico, elástico linear e as propriedades de rigidez e amortecimento são determinadas através de funções de impedância. Esse método pode ser usado em sistemas dinâmicos que recebem através do solo excitações sísmicas (WOLF, 1997; PÉREZ PEÑA, 2017).

Segundo Wolf (1998b), podemos utilizar elementos físicos simples para determinar as condições de contorno para resolver interações solo estrutura de forma eficiente, podendo relacionar a força-deslocamento das estruturas mediante a esforços sísmicos. Esse método consiste em um modelo de massa mola amortecedor eficiente mesmo para sistemas com mais de uma camada diretamente no domínio do tempo.

Na Figura 6 representa uma estrutura com N pavimentos, o solo como sendo um semi-espaço homogêneo, isotrópico e elástico linear e a fundação considerando grandezas adicionais de deslocamento e giro. As variáveis m , k , c e I referem-se a massa, rigidez, amortecimento e o momento de massa, respectivamente. Os subíndices f e N estão relacionados à fundação e aos pavimentos da estrutura, respectivamente. A variável H é a altura de cada pavimento em relação a superfície do solo e \ddot{x}_g contém os valores das acelerações do sismo. Esse sistema é apresentado na pesquisa de Pérez Peña (2017).

em relação at superfície do solo e
Figura 6 – Modelo massa molá amortecedor com excitação sísmica: pórtico plano.



Fonte: Pérez Peña (2017)

A seguir é apresentada a equação do movimento para um sistema massa, mola e amortecedor para N graus de liberdade considerando excitação sísmica e ISE. A Equação 2.4 é de acordo com a segunda lei de Newton. Essa equação será utilizada neste estudo e foram baseadas nas pesquisas de Pérez Peña (2017), Wolf (1985), Wolf (1988a).

$$\mathbf{M}_{se}\ddot{\mathbf{x}}_{se}(t) + \mathbf{C}_{se}\dot{\mathbf{x}}_{se}(t) + \mathbf{K}_{se}\mathbf{x}_{se}(t) = -\mathbf{G}\ddot{\mathbf{x}}_g(t), \quad (2.4)$$

em que:

- \mathbf{M}_{se} = Matriz de massa do sistema solo-estrutura;
- \mathbf{C}_{se} = Matriz de amortecimento do sistema solo-estrutura;
- \mathbf{K}_{se} = Matriz de rigidez do sistema solo-estrutura;
- \mathbf{x}_{se} = Vetor que contém o deslocamento horizontal do sistema solo-estrutura;

- \dot{x}_{se} = Vetor que contém a velocidade horizontal da estrutura do sistema solo-estrutura;
- \ddot{x}_{se} = Vetor que contém a aceleração horizontal do sistema solo-estrutura;
- G = Matriz de impedância do solo;
- \ddot{x}_g = Vetor que contém os valores de acelerações do sismo.

O método de massa mola amortecedor é usado no presente estudo para os problemas envolvendo ISE em que a partir da equação do movimento dada pela segunda lei de Newton é resolvida usando o método de espaço de estados generalizado para N pavimentos.

2.3.4 Domínio da frequência e domínio do tempo

Existem duas formas de análise dinâmica uma no domínio da frequência e a outra no domínio do tempo.

No domínio da frequência a excitação é decomposta em uma série de Fourier e a resposta é determinada independentemente para cada termo de Fourier correspondente a uma frequência especificada. A condição de contorno é formulada usando os coeficientes de rigidez dinâmica dependentes da frequência relacionando as amplitudes de deslocamento dos nós no horizonte de interação com as correspondentes amplitudes de força. Essa relação é totalmente acoplada (discretização espacial). Contudo, a formulação nesse domínio apresenta desvantagens, pois pode lidar apenas com respostas lineares (WOLF, 1994; WOLF, 1988a).

No domínio do tempo é possível prever o dano pois esse implica em não linearidades, possíveis de serem analisadas neste domínio. No domínio do tempo as integrais de convolução dos coeficientes de rigidez dinâmica e as correspondentes dos deslocamentos devem ser avaliadas para calcular as forças. Os coeficientes de rigidez dinâmica podem ser determinados usando o método de elementos de contorno na forma discretizada. A condição de contorno que representa o solo ilimitado é, portanto, global no espaço e no tempo. Os modelos físicos para o solo ilimitado, o cálculo pode ser realizado puramente no domínio do tempo (WOLF, 1994; WOLF, 1988a).

2.4 Método de Runge-Kutta (RK)

Os métodos de RK apresentam técnicas numéricas explícitas de passo simples usadas na solução de EDOs de primeira ordem (CHAPRA; CANALE, 2010). As EDOs têm a seguinte característica

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2.5)$$

Os métodos de RK chegaram a precisão de uma série de Taylor e, embora existam muitas variações, elas podem ser postas na forma geral dada por:

$$y_{i+1} = y_i + \Phi(x_i, y_i, h)h, \quad (2.6)$$

em que $\Phi(x_i, y_i, h)$ é chamada de *função incremento*, a qual pode ser interpretada como representativa da inclinação em um intervalo. A estimativa da inclinação é usada para extrapolar um valor antigo y_i para um valor novo y_{i+1} em uma distância h . A inclinação é obtida a partir do cálculo de inclinação nos vários pontos no interior do subintervalo (CHAPRA; CANALE, 2010). A *função incremento* pode ser escrita na forma geral

$$\Phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n, \quad (2.7)$$

sendo os a 's constantes e os k 's

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h), \\ k_3 &= f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h), \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h), \end{aligned} \quad (2.8)$$

os p 's e q 's são constantes. Os k 's são relações de recorrência e como cada k é um cálculo de função, isso torna o método RK eficiente para operações numéricas (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008; CHAPRA; CANALE, 2010).

As variações dos métodos de RK podem ser deduzidas de acordo com a ordem de precisão da abordagem n , para isso usa-se um número diferente de termos na *função de incremento*. No caso, um $n = 4$ significa que utilizam-se 4 pontos em um subintervalo para determinar o valor da inclinação. A precisão dos métodos de RK aumentam a medida que a ordem do método aumenta, assim, os métodos de segunda ordem de precisão (RK2) possuem erro global de $O(h^2)$, os de terceira ordem de precisão (RK3), o erro global é $O(h^3)$, os de quarta ordem de precisão (RK4) apresenta erro global de $O(h^4)$ e de quinta ordem de precisão (RK5) o erro global é de $O(h^5)$ (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008; CHAPRA; CANALE, 2010).

Os métodos RK mais populares são os de quarta ordem, que têm muitas versões. O método mais usual é o Runge-Kutta de quarta ordem clássico (RK4).

2.5 Método Espaço de Estados (EE)

A análise de séries temporais de espaço de espaços EE começou com o artigo pioneiro de Kalman (1960) e é bastante relevante na solução de problemas de en-

genharia de controle, onde se iniciou os estudos. A modelagem de EE fornece uma metodologia unificada para tratar uma ampla gama de problemas na análise de séries temporais (DURBIN; KOOPMAN, 2012).

O estado envolve informações de presente e passado de tal maneira que o comportamento futuro possa ser descrito pelo conhecimento do estado atual e da entrada futura (WEI, 2006).

A premissa do método de EE, de forma simplista é determinar todos os estados alcançáveis e suas mudanças e representá-los de forma gráfica direcionada (KRISTENSEN, 2000).

Uma aplicação de EE na engenharia civil está na previsão de anomalias em estruturas para garantir a sua operacionalidade e segurança. No artigo de Khazaeli, Nguyen e Goulet (2021) combinam-se modelos lineares dinâmicos Bayesianos existentes e uma forma particular de modelos de EE com a capacidade de planejamento de longo prazo do *Reinforcement Learning*.

Outras aplicações recentes do EE estão no estudo térmico de blocos de argamassa de aquecimento elétrico ventilado no modo de operação em que o ar é diretamente exaurido (GUO et al., 2021) e na identificação dos padrões espaço-temporais de clorofila da água (GONG et al., 2021).

2.6 Vantagens e desvantagens dos métodos RK e EE

A seguir é apresentado algumas das vantagens e desvantagens dos métodos de RK e do EE.

De acordo com Filho (2007) as vantagens dos métodos de RK são auto-iniciáveis: não dependem do auxílio de outros métodos e a facilidade em alterar o incremento h de modo que possa se aumentar a fim de minimizar o esforço computacional. Quanto as desvantagens o mesmo autor menciona que: o número de vezes que a função $f(x, y)$ necessita ser avaliada, por passo, é elevada e para limitar o erro de discretização é necessário escolher um h pequeno, o que pode implicar em um aumento no erro de arredondamento.

Dentre as vantagens da abordagem no EE é que se baseia na análise estrutural do problema, as observações ausentes podem ser facilmente integradas na estrutura e são flexíveis (DURBIN; KOOPMAN, 2012).

Para Shumway e Stoffer (2017) a formulação no EE apresenta a vantagem de poder tratar várias configurações de dados perdidos. Montgomery, Jennings e Kulahci (2008) mencionam que a formulação permite que uma estrutura matemática comum seja usada para o desenvolvimento do modelo, além de permitir a generalização relativamente fácil de vários modelos.

Ogata (2010) aborda em seu livro algumas vantagens do uso do EE como a

liberdade de escolha das variáveis de estado. Além disso, comenta que para sistemas difíceis com muitas entradas e saídas, podendo ser inter-relacionadas de maneira complexa, o uso da abordagem no EE se torna mais apropriada.

Segundo Kristensen (2000) a construção em um modelo de EE torna possível desenvolver por meio de algoritmos o comportamento de um sistema, permitindo ver certas propriedades desejadas ou identificar erros no sistema.

Quanto as desvantagens do método de EE, os estados do sistema devem ser conhecidos em todo o tempo (SCHITTENHELM; WANG; RINDERKNECHT, 2012). De acordo com Kristensen (2000) a principal desvantagem é o problema da explosão de estado, ou seja, sistemas pequenos podem ter um número extremamente elevado, até infinitos estados alcançáveis, o que para sistemas de vida real seria uma limitação do método.

2.7 Dinâmica das estruturas

O estudo da dinâmica tem um papel fundamental na avaliação do comportamento dinâmico das estruturas principalmente com o progresso das pesquisas sobre os efeitos sísmicos e de vento. Aqui, a ISE e interação fluido-estrutura são indispensáveis na avaliação da resposta. Um fato que torna evidente a necessidade de se estudar a dinâmica das estruturas é a Norma Brasileira de projeto de estruturas resistentes a sismos que entrou em vigor em 2006 (LIMA; SANTOS, 2008).

No período de graduação, geralmente, os estudos relacionados ao comportamento de estruturas é dentro da concepção estática. De certa forma, negligenciando a presença de forças de inércia e a energia cinética (BRASIL; SILVA, 2015).

O conceito de dinâmica para Newton trata dos movimentos dos corpos desencadeados por forças externas. Contudo, nas estruturas se os esforços forem em um curto período e apresentarem velocidades e acelerações baixas é comum tratá-las como estáticas ou quase estáticas (BRASIL; SILVA, 2015).

A análise dinâmica de estruturas devem ser realizadas em casos de terremotos, vento, explosão, movimentação de veículos, fundações de máquinas e equipamentos, movimento rítmico de pessoas e efeitos das ondas do mar sobre estruturas (LIMA; SANTOS, 2008; BRASIL; SILVA, 2015).

Na dinâmica das estruturas, a finalidade é obter o comportamento da estrutura em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações sob a ação de uma força dinâmica. Pois, ao inserir uma carga dinâmica na estrutura, esta gera forças inerciais e de amortecimento (LIMA; SANTOS, 2008).

2.7.1 Vibrações

Segundo Rao (2008), a vibração está presente na maioria das atividades humanas. Elas podem ser tanto favoráveis como nas aplicações de equipamentos vibratórios quanto prejudiciais devido a variação cíclica de tensão induzida o que pode levar a fadiga do material. Além disso, quando a frequência natural de vibração coincide com a frequência de excitação externa tem-se a ressonância, conseqüentemente deflexões excessivas e falha. Os sistemas vibratórios são composto por variáveis de entrada, representadas por uma ação/excitação e as variáveis de saída, no caso, as respostas. As variáveis do sistema são dependentes do tempo.

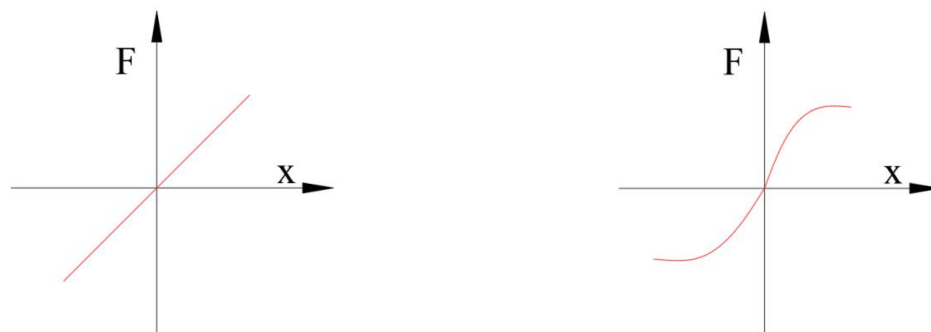
A explicação física para sistema vibratório envolve a interação entre energia potencial e energia cinética. Um sistema vibratório deve ter um componente que armazena energia potencial (mola ou elasticidade) e a libera como energia cinética na forma de movimento (vibração) de uma massa ou inércia. Por sua vez, o armazenamento da energia cinética transfere sua energia na forma de energia potencial para o componente de armazenamento, no caso um componente de perda gradual (amortecedor) (RAO, 2008; INMAN, 2018).

O sistema dinâmico pode se comportar linearmente, os seja, todos os elementos envolvidos no sistema comportam-se de maneira linear, conforme mostra a Figura 7a. Um sistema não linear ocorre quando qualquer elemento não apresentar comportamento linear, conforme mostrado na Figura 7b.

Figura 7 – Relação força-deslocamento de sistemas lineares e não lineares.

(a) Linear

(b) Não Linear



Fonte: Lima e Santos (2008)

As cargas dinâmicas podem apresentar vibração determinística ou não determinística, também conhecido como uma excitação aleatória. As determinísticas são quando a excitação é conhecida a qualquer instante de tempo. Já a aleatória não pode ser prevista num dado instante de tempo (RAO, 2008). Na Figura 8 são apresentadas algumas forças de excitação, sendo que as duas primeiras podendo ser classificadas

como periódicas e as duas últimas como não periódicas (CLOUGH; PENZIEN, 2003). A Figura 8a a excitação é dita como harmônica representadas através de funções seno ou co-seno. A Figura 8b é uma outra representação de carga periódica, porém um pouco mais complexa envolvendo pressões hidrodinâmicas ou efeitos inerciais (LIMA; SANTOS, 2008). Nesses casos, através de uma análise de Fourier qualquer carregamento periódico pode ser representado como a soma de uma série de componentes harmônicos simples (CLOUGH; PENZIEN, 2003). A Figura 8c é uma carga impulsiva, considerada também uma carga transiente, com uma curta duração de tempo. Quanto a Figura 8d tem-se uma excitação com variação arbitrária ao longo do tempo, considerada também como uma carga transiente e pode ser tratada apenas por procedimentos de análise dinâmica completamente gerais, exemplos disso são terremotos e vento (CLOUGH; PENZIEN, 2003; LIMA; SANTOS, 2008).

Grande parte dos sistemas vibratórios na prática são bastante complexos. Para poder calcular matematicamente só algumas características mais importantes são consideradas. A análise dos sistemas envolvem a modelagem matemática, equações governantes, soluções destas equações e interpretação dos resultados (RAO, 2008).

Os modelos matemáticos na dinâmica das estruturas são compostos por equações diferenciais, onde a variável independente, o tempo, é fundamental. Na Tabela 2 é apresentada as equações para problemas estáticos e dinâmicos.

Tabela 2 – Diferença entre problemas estático e dinâmico.

Estática	Dinâmica
Sistema de equações algébricas	Sistema de equações diferenciais ordinárias
$\mathbf{Kx} = \mathbf{F}$	$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{Kx} = \mathbf{F}(t)$

Fonte: Brasil e Silva (2015)

Na Tabela 2, os termos \mathbf{M} , \mathbf{K} e \mathbf{C} são matrizes de massa, rigidez e amortecedor, respectivamente e $\ddot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{x}}$ e \mathbf{x} são vetores de aceleração, velocidade e deslocamento e \mathbf{F} é a força externa.

As equações do movimento podem ser obtidas utilizando a segunda lei de Newton.

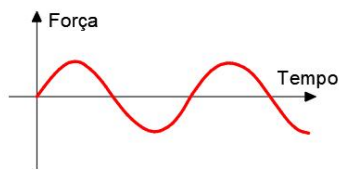
2.7.2 Análise modal

A análise modal é a determinação de frequências naturais, formas modais e fatores de amortecimento de um sistema. Conhecer as frequências naturais de um sistema é de suma importância pois possibilita a previsão e compreensão do comportamento dinâmico de um sistema (INMAN, 2018).

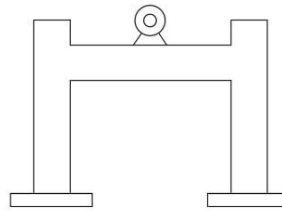
De acordo com Rao (2008) quando um sistema tem N graus de liberdade, ele também possui N frequências naturais e cada uma possui sua própria forma modal.

Figura 8 – Diferentes tipos de cargas dinâmicas e exemplos típicos.

(a) Excitação harmônica



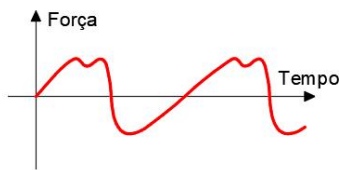
Histórico de cargas



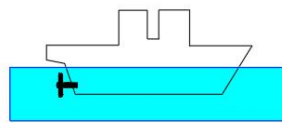
Exemplo Típico

Máquina rotativa desbalanceada de construções

(b) Excitação complexa



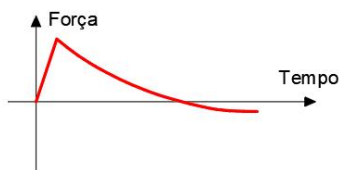
Histórico de cargas



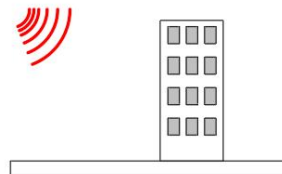
Exemplo Típico

Rotação da hélice da poupa de navios

(c) Impulso



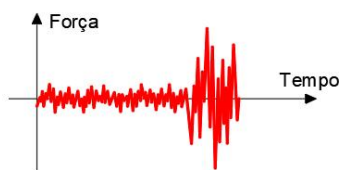
Histórico de cargas



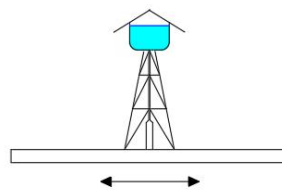
Exemplo Típico

Pressão exercida pela explosão de bombas em edifício

(d) Excitação aleatória



Histórico de cargas



Exemplo Típico

Efeitos de terremotos em caixas d'água

Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (2003)

Existem na literatura vários métodos numéricos e analíticos para determinar a análise modal. Podem-se calcular as frequências naturais e os modos de vibrar por meio dos autovalores e autovetores. O problema de autovalor pode ser expresso como

$$SX = \lambda X, \quad (2.9)$$

e o autovetor

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{S}\mathbf{X}_i, \quad (2.10)$$

em que $\mathbf{S} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$ é a matriz dinâmica, $\lambda \simeq 1/\omega^2$ sendo λ o autovalor e ω a frequência natural. \mathbf{X} é o vetor da forma modal. Para uma solução não trivial o determinante da Equação 2.9 deve ser igual a zero (RAO, 2008). A equação de frequência é dada por:

$$\det|\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}| = 0. \quad (2.11)$$

Uma das equações para se normalizar um autovetor em relação a matriz de massa para sistemas de vibração livre é

$$\mathbf{X}_{\sim j} = \frac{\overline{\mathbf{X}}_{\sim j}}{\sqrt{\overline{\mathbf{X}}_{\sim j}^T \mathbf{M}_{\sim} \overline{\mathbf{X}}_{\sim j}}}, \quad (2.12)$$

o termo T indica a transposição, $\overline{\mathbf{X}}_{\sim j}$ é o autovetor antes da normalização. A representação da matriz modal é apresentada na Equação 2.13.

$$\mathbf{X}_{\sim} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

em que n está relacionado com a quantidade de autovetores (LIMA; SANTOS, 2008).

Quando o sistema possui muitos graus de liberdade, em alguns casos, para otimizar o cálculo é utilizada a propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração.

2.7.3 Excitação sísmica

Embora o Brasil seja um país que apresente registros de sismos com intensidade baixa, pode ter os sismos induzidos causados por explosivos. A Figura 9 mostra o zoneamento sísmico do Brasil bem como a aceleração característica para cada zona.

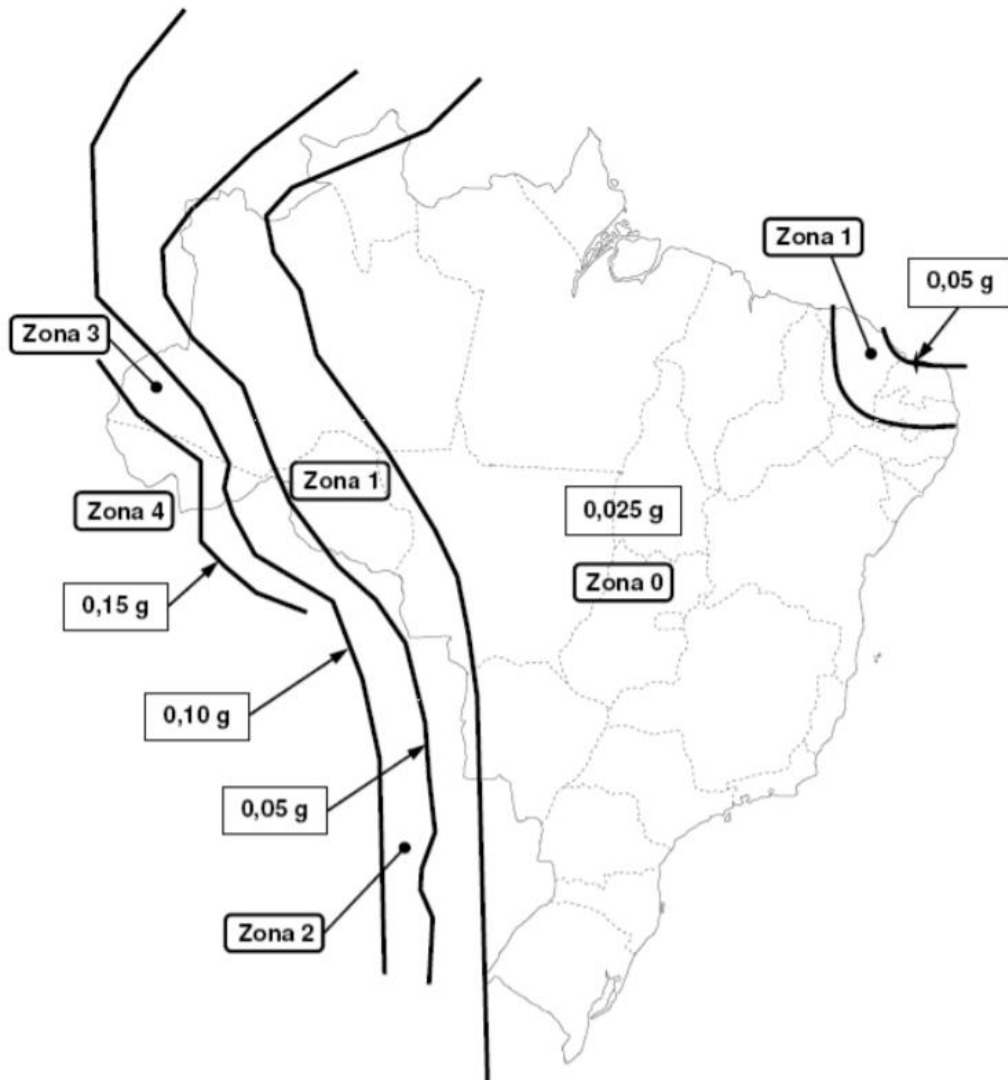
Brasil e Silva (2015) mencionam os fatores que são importantes na consideração do projeto sísmico como o tipo da estrutura (sua finalidade), a intensidade do sismo na região, o tipo de solo, características de resistência e ductibilidade da estrutura e as características modais dela (frequência e modos de vibrações).

A EDO para estruturas simples sujeitas a terremotos pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_g, \quad (2.14)$$

sendo \mathbf{M} , \mathbf{K} e \mathbf{C} as matrizes de massa, rigidez e amortecimento, respectivamente. \mathbf{F} a força de excitação e $\ddot{\mathbf{x}}_g$ a aceleração do sismo.

Figura 9 – Mapa de aceleração sísmica horizontal do Brasil e suas respectivas zonas para terrenos considerados rochosos.



Fonte: NBR 15421 ABNT (2006)

Um dos métodos mais utilizados para simular excitação sísmica em edifícios é via elementos finitos e elementos de contorno. Em elementos finitos, a estrutura é modelada sendo composta por elementos e nós, no interior dos elementos, os deslocamentos são aproximados pela superposição de funções de forma, representadas por

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}(t), \quad (2.15)$$

\mathbf{N} contém as funções de forma e \mathbf{q} a representação física dos nós de cada elemento (BRASIL; SILVA, 2015).

De acordo com a NBR 8681 ABNT (2004) as ações sísmicas são consideradas como cargas excepcionais. Para cada tipo de estrutura é considerada uma categoria sísmica, conforme mostrado na Tabela 3.

Tabela 3 – Categoria sísmica.

Zona sísmica	Categoria sísmica
Zonas 0 e 1	A
Zona 2	B
Zonas 3 e 4	C

Fonte: NBR 15421 ABNT (2006)

Na categoria A com zona sísmica zero não é exigido resistência anti-sísmica. Para a zona 1 devem apresentar resistência sísmicas horizontais e nas duas direções ortogonais (ABNT, 2006). A força sísmica de projeto relacionada ao piso x é dada por:

$$F_x = 0,01w_x, \quad (2.16)$$

em que w_x é o peso total da estrutura correspondente ao piso x .

As categorias B e C podem ser analisadas pelo método das forças horizontais equivalentes dado por:

$$H = C_d W, \quad (2.17)$$

em que C_d é o coeficiente de resposta sísmica e W é o peso total da estrutura (ABNT, 2006).

3 MODELAGEM NUMÉRICA

O capítulo inicia apresentando dois sistemas dinâmicos um com 1 GL e outro com 2 GL. O primeiro apresenta os equacionamentos envolvidos em um sistema massa mola amortecedor sob excitação de força harmônica de forma analítica. O segundo apresenta um sistema genérico com dois graus de liberdade, também, excitado harmonicamente. Por fim são apresentados a modelagem no EE de forma genérica, i.e., para N graus de liberdade, e a montagem para problemas acoplados envolvendo ISE.

3.1 Vibração forçada amortecida

Nesta seção será considerada a excitação harmônica para sistemas amortecidos. Os sistemas são compostos por massa, mola e amortecedor.

3.1.1 Sistemas com 1 GL

Para um sistema com 1 GL excitado harmonicamente, a força é dada por:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t), \quad (3.1)$$

em que F_0 é a amplitude da força em N, ω é a frequência de excitação em rad/s e t é o tempo em s . A equação do movimento obtida pela segunda lei de Newton para o sistema é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t). \quad (3.2)$$

A solução geral é dada pela soma da solução homogênea com a solução particular dada por:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t). \quad (3.3)$$

A solução homogênea $x_h(t)$ representa a vibração livre do sistema e a solução particular $x_p(t)$ é a vibração em regime permanente.

A solução homogênea pode ser:

$$x_h(t) = A_h e^{-\zeta \omega t} \cos(\omega_d t - \phi) \quad \text{se } \zeta < 1 \quad (\text{sistema subamortecido}), \quad (3.4)$$

$$x_h(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\omega_n t} \quad \text{se } \zeta = 1 \quad (\text{sistema criticamente amortecido}), \quad (3.5)$$

$$x_h(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad \text{se } \zeta > 1 \quad (\text{sistema superamortecido}), \quad (3.6)$$

sendo ζ o fator de amortecimento, A_h é a amplitude, ϕ a fase, A_1 e A_2 são constantes, ω_d é a frequência de vibração amortecida, s_1 e s_2 são raízes reais.

A solução particular para o sistema amortecido é dada pelo conjunto das equações 3.7 a 3.9:

$$x_p(t) = A_0 \cos(\omega t - \phi_0), \quad (3.7)$$

$$\dot{x}_p(t) = -A_0\omega \sin(\omega t - \phi_0), \quad (3.8)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -A_0\omega^2 \cos(\omega t - \phi_0), \quad (3.9)$$

os termos A_0 e ϕ_0 são constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições iniciais.

Substituindo as Equações 3.7, 3.8 e 3.9 em 3.2, tem-se:

$$-mA_0\omega^2 \cos(\omega t - \phi_0) - cA_0\omega \sin(\omega t - \phi_0) + kA_0 \cos(\omega t - \phi_0) = F_0 \cos(\omega t), \quad (3.10)$$

reescrevendo a equação

$$A_0[(k - m\omega^2) \cos(\omega t - \phi_0) - c\omega \sin(\omega t - \phi_0)] = F_0 \cos(\omega t). \quad (3.11)$$

Usando as relações trigonométricas para abrir o cosseno

$$\begin{cases} \cos(\omega t - \phi) = \cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi, \\ \sin(\omega t - \phi) = \sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi. \end{cases} \quad (3.12)$$

A Equação 3.11 fica

$$A_0[(k - m\omega^2)(\cos \omega t \cos \phi_0 + \sin \omega t \sin \phi_0) - c\omega(\sin \omega t \cos \phi_0 - \cos \omega t \sin \phi_0)] = F_0 \cos(\omega t). \quad (3.13)$$

Igualando os termos de $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$, têm-se

$$\begin{cases} A_0(k - m\omega^2) \cos \phi_0 + A_0c\omega \sin \phi_0 = F_0, \\ A_0(k - m\omega^2) \sin \phi_0 - A_0c\omega \cos \phi_0 = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Colocando A_0 em função de A_1 e A_2 estabelece-se a seguinte relação

$$A_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad (3.15)$$

$$A_1 = A_0 \cos \phi_0, \quad (3.16)$$

$$A_2 = A_0 \sin \phi_0. \quad (3.17)$$

Reescrevendo a Equação 3.14

$$\begin{cases} A_1(k - m\omega^2) + A_2c\omega = F_0, \\ A_2(k - m\omega^2) - A_1c\omega = 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

dividindo as duas linhas da Equação 3.18 por m tem-se:

$$\begin{cases} A_1\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) + A_2\frac{c}{m}\omega = \frac{F_0}{m}, \\ A_2\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) - A_1\frac{c}{m}\omega = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Para um sistema massa, mola e amortecedor na horizontal, as relações de frequência natural e fator de amortecimento são dadas pelas equações 3.20 e 3.21, respectivamente.

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad (3.20)$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c}, \quad \therefore \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad \therefore \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n. \quad (3.21)$$

Dessa forma, a Equação 3.19 fica

$$\begin{cases} A_1(\omega_n^2 - \omega^2) + A_22\zeta\omega_n\omega = \frac{F_0}{m}, \\ A_2(\omega_n^2 - \omega^2) - A_12\zeta\omega_n\omega = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Resolvendo o sistema de forma matricial

$$\begin{bmatrix} (\omega_n^2 - \omega^2) & 2\zeta\omega_n\omega \\ -2\zeta\omega_n\omega & (\omega_n^2 - \omega^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F_0}{m} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.23)$$

A partir da Equação 3.23 consegue-se encontrar A_1 e A_2 apresentadas nas equações 3.24 e 3.25, respectivamente.

$$A_1 = \frac{F_0(\omega_n^2 - \omega^2)}{m(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}, \quad (3.24)$$

$$A_2 = \frac{F_0(2\zeta\omega_n\omega)}{m(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}. \quad (3.25)$$

Substituindo as Equações 3.24 e 3.25 na Equação 3.15, A_0 será

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}. \quad (3.26)$$

Para encontrar ϕ_0 usando a relação

$$\frac{A_2}{A_1} = \tan \phi_0, \quad (3.27)$$

tem-se que

$$\phi_0 = \arctan \left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)} \right). \quad (3.28)$$

A solução particular resulta em:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \cdot \cos \left(\omega t - \arctan \left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \right). \quad (3.29)$$

Para um sistema subamortecido, as Equações 3.4 e 3.29 são substituídas na Equação 3.3, assim tem-se:

$$x(t) = A_h e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) + \underbrace{\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}}_{A_0} \cdot \cos \left(\omega t - \underbrace{\arctan \left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right)}_{\phi_0} \right). \quad (3.30)$$

A equação da velocidade é obtida derivando a Equação 3.30 em relação ao tempo, dessa maneira obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -\zeta\omega_n A_h e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) - \omega_d \text{sen}(\omega_d t - \phi) A_h e^{-\zeta\omega_n t} \dots \\ & - \underbrace{\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}}_{A_0} \cdot \omega \text{sen} \left(\omega t - \underbrace{\arctan \left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right)}_{\phi_0} \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

A_h e ϕ são encontradas a partir das condições iniciais, considerando $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, a amplitude e a fase, respectivamente, são:

$$A_h = \frac{x_0 - A_0 \cos(-\phi_0)}{\cos(-\phi)}. \quad (3.32)$$

$$\phi = -\arctan \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n(x_0 - A_0 \cos(-\phi_0)) + A_0\omega \text{sen}(-\phi_0)}{-\omega_d(x_0 - A_0 \cos(-\phi_0))} \right). \quad (3.33)$$

Para sistemas sujeitos à movimento em rotação (θ) de acordo com a lei Newton tem-se que:

$$M_o = I_o \ddot{\theta}, \quad (3.34)$$

em que M_o é o momento resultante em torno do ponto de giro para o sistema analisado, I_o é o momento de inércia de massa do corpo e $\ddot{\theta}$ é a aceleração angular resultante.

De acordo com o princípio de D'Alembert a equação de equilíbrio para a Equação 3.34 é:

$$M_o - I_o \ddot{\theta} = 0. \quad (3.35)$$

3.1.2 Sistemas com 2 graus de liberdade

Nesta seção é considerado um sistema amortecido com 2GL excitado harmonicamente por uma força $F(t)$ apresentada na Equação 3.2. A equação genérica do movimento geral para esse modelo é expressa de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \dots \quad (3.36)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$$

As frequências naturais desse sistema são encontradas através do polinômio característico. Para isso, considera-se o sistema em vibração livre, ou seja, os valores de c são iguais a zero, assim como as forças de excitação atuante e considerando que as duas massas possam vibrar na mesma frequência e fase usando as equações a seguir

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t - \phi), \quad \ddot{x}_1(t) = -\omega^2 X_1 \cos(\omega t - \phi), \quad (3.37)$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t - \phi), \quad \ddot{x}_2(t) = -\omega^2 X_2 \cos(\omega t - \phi), \quad (3.38)$$

em que X_1 e X_2 são as amplitudes máximas do sistema. A partir das equações 3.37 e 3.38 a equação fica

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & -m_2\omega^2 + k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.39)$$

em que,

$$\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & -m_2\omega^2 + k_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.40)$$

o determinante da Equação 4.15 resulta no polinômio característico ou equação característica.

As duas equações diferenciais expressas de forma matricial na Equação 3.36, de um sistema com dois graus de liberdade são decompostas em equações diferenciais de primeira ordem, para isso são feitas as seguintes considerações:

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = \dot{x}_1, \quad x_3 = x_2 \text{ e } x_4 = \dot{x}_2.$$

Assim, a forma vetorial do conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é expressa da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_2 \\ \left[\frac{F_1(t) - c_{11}x_2 + c_{12}x_4 - k_{11}x_1 + k_{12}x_3}{m_1} \right] \\ x_4 \\ \left[\frac{F_2(t) + c_{12}x_2 - c_{22}x_4 + k_{12}x_1 - k_{33}x_3}{m_2} \right] \end{array} \right\}. \quad (3.41)$$

Com as equações diferenciais de primeira ordem, o sistema dinâmico pode ser resolvido através dos métodos de RK, EE e/ou outro método de solução de equações diferenciais ordinárias.

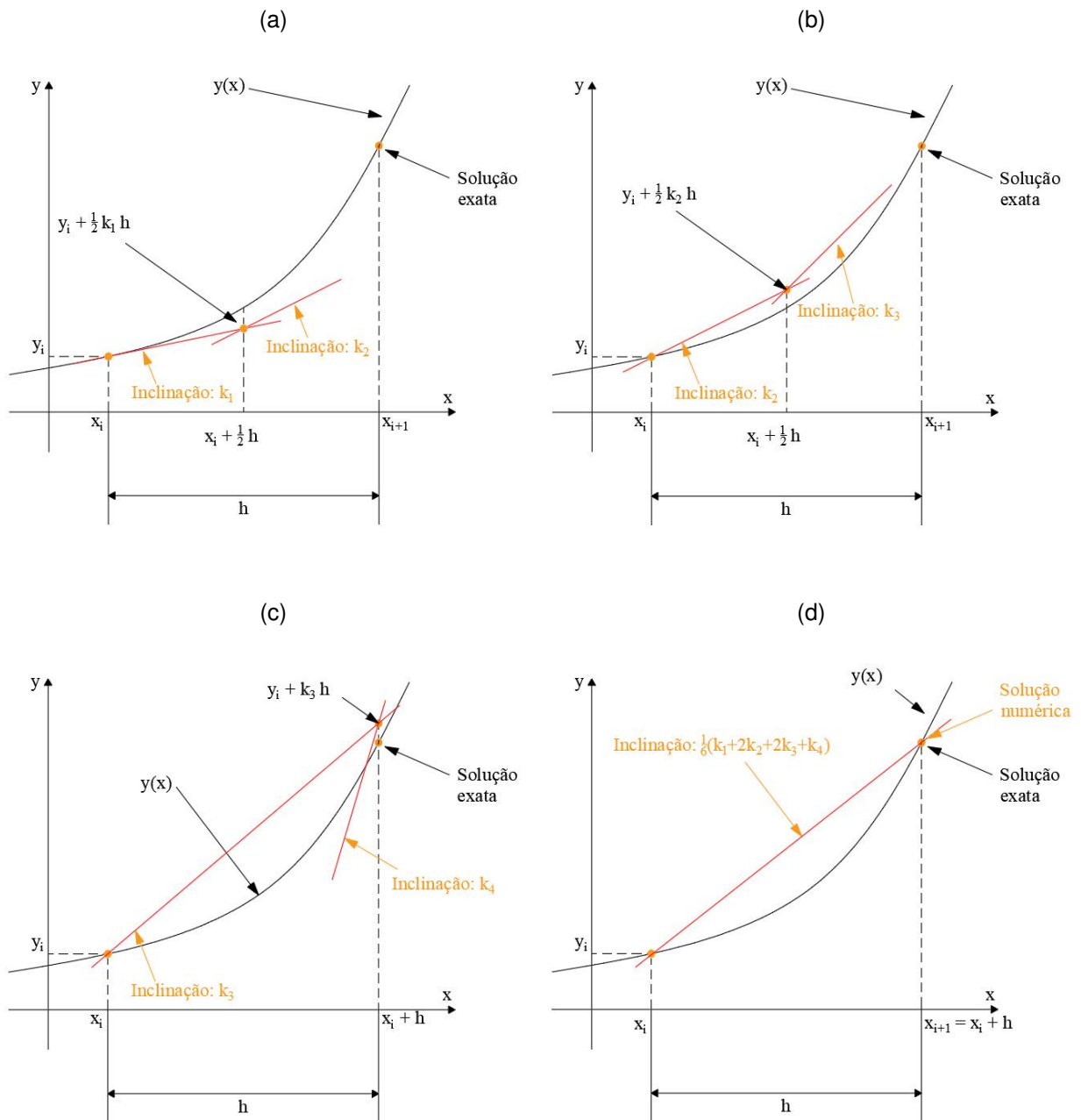
O método de RK4 consiste de quatro passos para a solução numérica do conjunto de equações diferenciais ordinárias. A equação geral é dada por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h, \quad (3.42)$$

sendo

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h), \\ k_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h), \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3h), \end{aligned} \quad (3.43)$$

em que k_1 , k_2 , k_3 e k_4 representam inclinações e h é a largura do passo de integração. A Equação 3.42 descreve uma média ponderada de todo o conjunto de inclinações para atingir uma inclinação melhorada. Uma representação disso é apresentada na Figura 10. A Figura 10a se refere o uso da inclinação k_1 para a obtenção de k_2 . A Figura 10b é a determinação da inclinação k_3 a partir de k_2 , enquanto a Figura 10c mostra como é utilizado a inclinação k_3 para ter k_4 e finalmente a Figura 10d ilustra a média ponderada considerando todas as inclinações. O erro de truncamento local deste método é de $O(h^5)$ (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008).

Figura 10 – Método de RK4: inclinações k_1, k_2, k_3, k_4 e a média

Fonte: Gilat e Subramaniam (2008)

3.2 Modelagem no EE

Nesta seção é apresentada a modelagem de EE para problemas gerais invariantes no tempo, que são utilizados para solucionar os problemas dinâmicos com 1 GL e 2 GL sujeitos à força harmônica e para os casos envolvendo excitação sísmica direta na estrutura e posteriormente para o problema de ISE, também, recebendo excitação sísmica. Dessa forma, primeiramente é apresentado o equacionamento de forma geral para os problemas iniciais e na sequência a forma generalizada para o caso acoplado

com o solo.

3.2.1 EE para problemas iniciais

O método de EE consiste de dois conjuntos de equações. O primeiro trata das equações de estado, que descrevem a evolução dos estados como uma função das variáveis de entrada e de estado, sendo um conjunto de equações diferenciais ordinárias dependentes do tempo. O segundo conjunto são as equações de saída que relacionam o valor dos sinais de saída ao estado e os sinais de entrada, sendo equações algébricas. Para um sistema linear invariante no tempo tem-se:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (3.44)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_y\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (3.45)$$

em que: $\dot{\mathbf{z}}(t)$ é uma quantidade vetorial variável no tempo, a derivada do vetor estado em relação ao tempo n -dimensional, $\mathbf{z}(t)$ é o vetor estado de tamanho n , $\mathbf{y}(t)$ é o vetor saída de tamanho m , $\mathbf{u}(t)$ é o vetor de entrada de tamanho r , \mathbf{A} é a matriz estado ou matriz do sistema de tamanho $n \times n$, \mathbf{B} é a matriz de entrada/controla/perturbação (são encontrados vários nomes na literatura) de tamanho $n \times r$, \mathbf{C}_y é a matriz de saída de tamanho $m \times n$ e \mathbf{D} é a matriz de transmissão direta de tamanho $m \times r$ (OGATA, 2010; WILLIAMS; LAWRENCE, 2007). As representações de cada vetor e matriz, respectivamente, são:

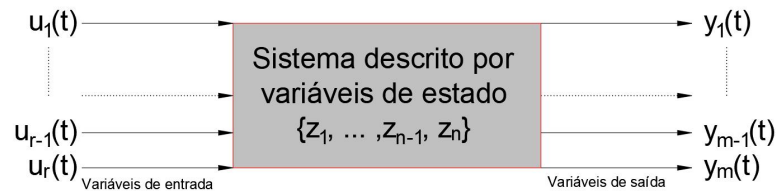
$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \dot{z}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{m-1}(t) \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{r-1}(t) \\ u_r(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} c_{y11} & \dots & c_{y1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{ym1} & \dots & c_{ymn} \end{bmatrix} e$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix}.$$

O modelo de estados pode representar um sistema com r entradas diferentes e m saídas conforme mostrado na Figura 11, as variáveis internas do sistema são representadas pelo vetor estado e o n além de estar atrelado as variáveis de estado, também está relacionado com a ordem do sistema.

Figura 11 – Modelo de Estado com entradas e saídas



Fonte: Adaptado de Rowell (2002)

A solução para a Equação 3.44 envolve a determinação do tempo de resposta de todas as variáveis de estado. A solução no domínio do tempo ou no domínio da frequência resulta em um exato conhecimento do comportamento de todas as variáveis de estado. Uma vez que x é conhecido, y também é conhecido (SHULTZ; MELSA, 1967).

A fim de poder resolver o sistema em um estado inicial $z(0)$ e uma entrada $u(t)$, esses dependem de uma função exponencial de A que é e^{At} .

O termo exponencial e^{At} pode ser expandido como uma série de potência

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n t^n}{n!}, \quad (3.46)$$

que converge todos os λ 's e t 's finitos. Similarmente a Equação 3.46, a matriz quadrada A também pode ser expressa em uma série de potências como:

$$e^{At} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathbf{A}^k. \quad (3.47)$$

Algumas propriedades são importantes de e^{At}

$$e^0 = \mathbf{I}, \quad (3.48)$$

$$e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} = e^{\mathbf{A}t_1} e^{\mathbf{A}t_2}, \quad (3.49)$$

$$[e^{\mathbf{A}t}]^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}, \quad (3.50)$$

para mostrar a Equação 3.50, $t_2 = -t_1$. Dessa forma, as Equações 3.48 e 3.49 implicam em:

$$e^{\mathbf{A}t_1} e^{-\mathbf{A}t_1} = e^{\mathbf{A} \cdot 0} = e^0 = \mathbf{I}, \quad (3.51)$$

diferenciando termo por termo da Equação 3.47

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} \mathbf{A}^k, \\ &= \mathbf{A} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathbf{A}^k \right), \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathbf{A}^k \right) \mathbf{A},\end{aligned}\tag{3.52}$$

assim tem-se a propriedade para poder resolver o sistema

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A},\tag{3.53}$$

e desenvolver a solução. Se ambos os lados são multiplicados pela matriz exponencial $e^{-\mathbf{A}t}$ como fator de integração, o lado esquerdo torna-se um perfeito diferencial. A diferenciação e a integração da matriz são definidas para serem operações elemento a elemento. Dessa forma, a pré-multiplicação de $e^{-\mathbf{A}t}$ em ambos os lados de 3.44 produz

$$e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{z}}(t) - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{z}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t),\tag{3.54}$$

que implica

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{z}(t)) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t).\tag{3.55}$$

A integração da Equação 3.55 de 0 a t produz

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{z}(\tau))d\tau = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{z}(t) - e^{-\mathbf{A}0}\mathbf{z}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,\tag{3.56}$$

reescrevendo

$$e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{z}(\tau)\Big|_{\tau=0}^t = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,\tag{3.57}$$

assim

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{z}(t) - e^0\mathbf{z}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,\tag{3.58}$$

como o inverso de $e^{-\mathbf{A}t}$ é $e^{\mathbf{A}t}$ e $e^0 = \mathbf{I}$, a Equação 3.58 implica

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,\tag{3.59}$$

sendo a solução da Equação 3.44.

É instrutivo verificar se a Equação 3.59 é a solução da Equação 3.44. Para verificar isso, devemos mostrar que a Equação 3.59 satisfaz a equação de estado e a condição inicial $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(0)$ em $t = 0$. De fato, em $t = 0$, na Equação 3.59, reduz a

$$\mathbf{z}(0) = e^{\mathbf{A} \cdot 0}\mathbf{z}(0) = e^0\mathbf{z}(0) = \mathbf{I}\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(0).\tag{3.60}$$

Assim a Equação 3.59 satisfaz a condição inicial. Agora, precisa-se da equação

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t f(t, \tau) d\tau = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau) \right) d\tau + f(t, \tau) \Big|_{\tau=t}, \quad (3.61)$$

para mostrar que a Equação 3.59 satisfaz a Equação 3.44. Diferenciando a Equação 3.59 e usando a Equação 3.61, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \right], \\ &= \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}(0) + \int_0^t \mathbf{A} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) \Big|_{\tau=t}, \\ &= \mathbf{A} \left(e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \right) + e^{\mathbf{A} \cdot 0} \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \end{aligned} \quad (3.62)$$

que se torna, após a substituição da Equação 3.59,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t).$$

Assim, a Equação 3.59 atende a Equação 3.44 e a condição inicial $\mathbf{z}(0)$ é a solução da Equação 3.44.

Substituindo a Equação 3.59 na Equação 3.45 produz a solução da Equação 3.45 como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_y e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}(0) + \mathbf{C}_y \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t). \quad (3.63)$$

Esta solução é calculada diretamente no domínio do tempo (CHEN, 1998).

A solução apresentada nas equações 3.59 e 3.63 é a forma clássica de solução para problemas invariantes no tempo. Um diagrama do sistema linear invariante no tempo na forma de EE é exemplificado na Figura 12. Nesse sistema, a região demarcada em rosa representa a Equação 3.44 enquanto a região em azul refere-se à Equação 3.45. A parte central do código é o integrador em que $\mathbf{z}(t)$ é a integral da derivada do estado e cada estado a equação expressa uma derivada como uma soma de variáveis de estado ponderadas e entradas. Um sistema de ordem n possui n integradores em seu diagrama de blocos.

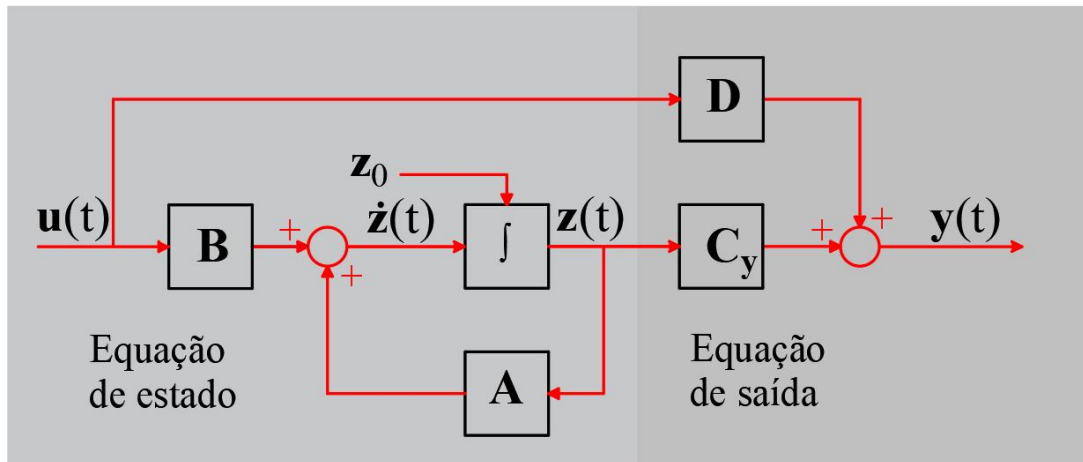
Outra forma de solução é utilizando o software Matlab, um fluxograma com o esquema de solução é apresentado na Figura 13 na forma de EE.

No Matlab, o algoritmo *ss* constrói um modelo no EE e o *lsim* simula a resposta de tempo de sistemas dinâmicos à entradas arbitrárias. Para modelos de EE, a entrada \mathbf{u} retorna o histórico de saída \mathbf{y} e a trajetória de estado \mathbf{z} .

3.2.2 Generalização do EE para problemas de ISE

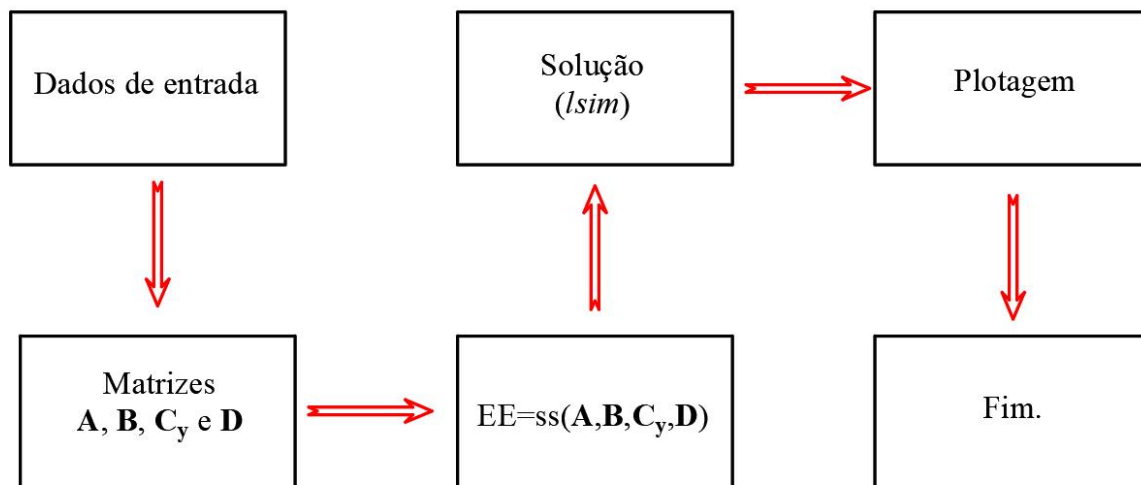
Nesta etapa são apresentadas as matrizes generalizadas para um problema acoplado de ISE considerando excitação sísmica e adotando o método de massa mola

Figura 12 – Diagrama de blocos de EE para um sistema linear invariante no tempo de múltiplas entradas e múltiplas saídas.



Fonte: Adaptado Williams e Lawrence (2007).

Figura 13 – Fluxograma de solução para EE via Matlab.



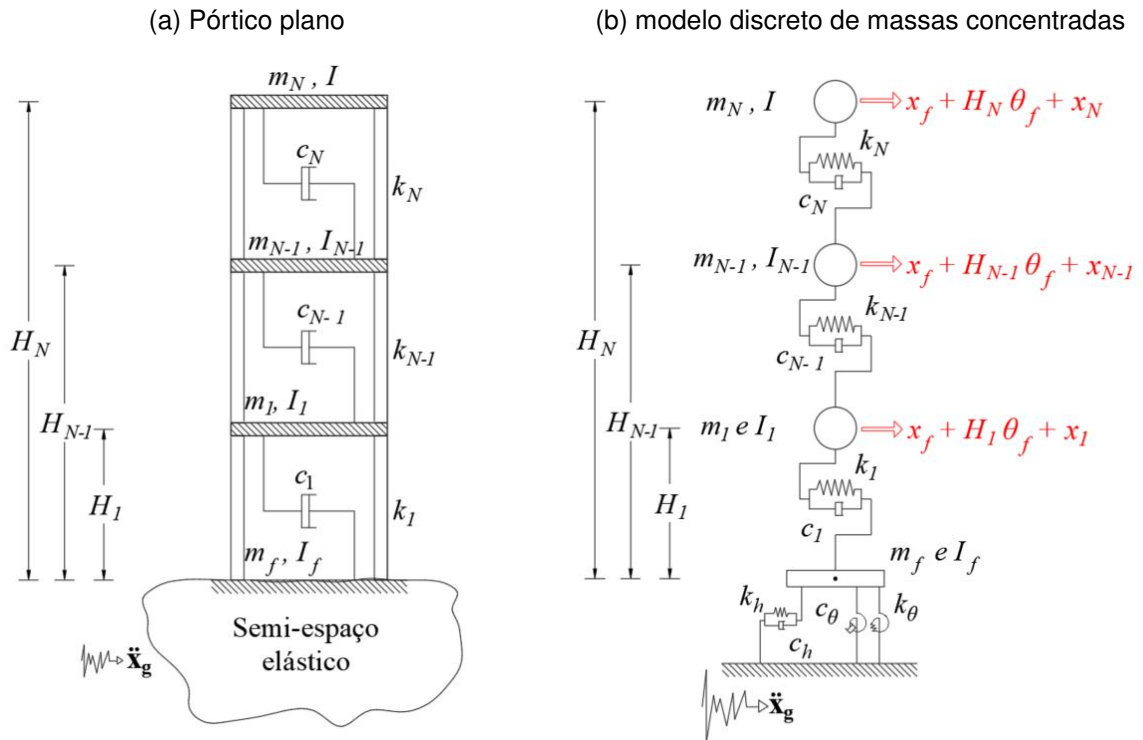
Fonte: autoria própria.

amortecedor. O modelo é considerado para estruturas bidimensionais. Na Figura 14a representa a edificação para uma estrutura com N pavimentos, o solo como sendo um semi-espaco, homogêneo, isotrópico e elástico linear e a fundação considerando grandezas adicionais de deslocamento e giro. A Figura 14b mostra a discretização em um sistema massa-mola-amortecedor. A variável H é a altura de cada pavimento em relação a superfície do solo e \ddot{x}_g contém os valores das acelerações do sismo. m , k e c são as massas, rigidez e amortecimento, respectivamente. I é o momento de massa e o x é o deslocamento. Os subíndices f e N referem-se à fundação e ao número do pavimentos da estrutura, respectivamente. θ_f é o giro na fundação da estrutura. O modelo da Figura 14 é apresentado na pesquisa de Pérez Peña (2017).

A equação geral do movimento que representa o sistema foi mostrada na Equ-

ção 2.4 e ela também pode ser expressa na forma matricial conforme Equação 3.64.

Figura 14 – Modelo massa mola amortecedor com excitação sísmica.



Fonte: Adaptado de Pérez Peña (2017)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_s & \mathbf{m}_{se} \\ \mathbf{m}_{es} & \mathbf{m}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_s \\ \ddot{\mathbf{x}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{c}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_s \\ \dot{\mathbf{x}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_e \end{Bmatrix} = \dots \quad (3.64)$$

$$- \left(\begin{bmatrix} \mathbf{m}_s & \mathbf{m}_{se} \\ \mathbf{m}_{es} & \mathbf{m}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_s \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \ddot{x}_g(t)$$

em que:

- \mathbf{m}_e = Matriz massa $n \times n$ da estrutura (Eq. 3.65);
- \mathbf{c}_e = Matriz de amortecimento $n \times n$ da estrutura (Eq. 3.66);
- \mathbf{k}_e = Matriz de rigidez $n \times n$ da estrutura (Eq. 3.67);
- \mathbf{m}_s = Matriz massa 2×2 do solo (Eq. 3.68);
- \mathbf{c}_s = Matriz de amortecimento 2×2 do solo (Eq. 3.69);
- \mathbf{k}_s é a matriz de rigidez 2×2 do solo (Eq. 3.70);
- \mathbf{m}_{se} = Matriz que representa a interação inercial entre estrutura e o solo $2 \times n$ (Eq. 3.75);
- \mathbf{m}_{es} = Matriz que representa a interação inercial entre estrutura e o solo $n \times 2$ (Eq. 3.75);
- \mathbf{x}_s = Vetor que contém o deslocamento (\mathbf{x}_f) e o valor de giro da fundação (θ_f) (Eq. 3.76);

- $\dot{\mathbf{x}}_s$ = Vetor que contém a velocidade ($\dot{\mathbf{x}}_f$) e o valor de giro da fundação ($\dot{\theta}_f$) (Eq. 3.77);
- $\ddot{\mathbf{x}}_s$ = Vetor que contém a aceleração ($\ddot{\mathbf{x}}_f$) e giro da fundação ($\ddot{\theta}_f$) (Eq. 3.78);
- \mathbf{x}_e , $\dot{\mathbf{x}}_e$ e $\ddot{\mathbf{x}}_e$ = Vetores que contém os deslocamentos, velocidades e acelerações, respectivamente, da edificação relativos à fundação (Eq. 3.79, 3.80 e 3.81);
- \mathbf{v}_e e \mathbf{v}_s = Vetores que definem os graus de liberdade a serem excitados (Eq. 3.82).

A forma generalizada das matrizes \mathbf{m}_e , \mathbf{c}_e , \mathbf{k}_e , \mathbf{m}_s , \mathbf{c}_s e \mathbf{k}_s considerando estruturas no plano para n pavimentos são apresentadas a seguir

$$\mathbf{m}_e = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & m_{n-1} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & m_n \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

$$\mathbf{c}_e = \begin{bmatrix} c_1^2 + c_2^2 & -c_2^2 & & & & \\ -c_2^2 & c_2^2 + c_3^2 & -c_3^2 & & & \\ & -c_3^2 & \ddots & & & \\ & & & & -c_{n-1}^2 & c_{n-1}^2 + c_n^2 & -c_n^2 \\ & & & & -c_n^2 & c_n^2 \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} k_1^2 + k_2^2 & -k_2^2 & & & & \\ -k_2^2 & k_2^2 + k_3^2 & -k_3^2 & & & \\ & -k_3^2 & \ddots & & & \\ & & & & -k_{n-1}^2 & k_{n-1}^2 + k_n^2 & -k_n^2 \\ & & & & -k_n^2 & k_n^2 \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

$$\mathbf{m}_s = \begin{bmatrix} I_f + \sum_{i=1}^n I_i & \sum_{i=1}^n H_i m_i \\ \sum_{i=1}^n H_i m_i & m_f + \sum_{i=1}^n m_i \end{bmatrix}, I_i = H_i^2 m_i, \quad (3.68)$$

$$\mathbf{c}_s = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 \\ 0 & c_h \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

$$\mathbf{k}_s = \begin{bmatrix} k_\theta & 0 \\ 0 & k_h \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Os coeficientes c_θ (Eq. 3.71), c_h (Eq. 3.72), k_θ (Eq. 3.73), e k_h (Eq. 3.74) são obtidos a partir de funções de impedâncias, os quais dependem do módulo de cisalhamento do solo (G), da velocidade de onda do solo nos 30 metros superiores de depósito (V_s), da massa específica do solo (ρ), do raio das sapatas r e do coeficiente de Poisson (ν).

$$c_\theta = \frac{0,4}{(1-\nu)} \rho V_s r^4, \quad (3.71)$$

$$c_h = \frac{4,6}{(2-v)} \rho V_s r^2, \quad (3.72)$$

$$k_\theta = \frac{8Gr^3}{3(1-v)}, \quad (3.73)$$

$$k_h = \frac{8Gr}{(2-v)}, \quad (3.74)$$

$$\mathbf{m}_{se} = \mathbf{m}_{es}^T = \begin{bmatrix} H_1 m_1 & \dots & H_{n-1} m_{n-1} & \dots & H_n m_n \\ m_1 & \dots & m_{n-1} & \dots & m_n \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

$$\mathbf{x}_s^T = \{ \theta_f \quad x_f \}, \quad (3.76)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s^T = \{ \dot{\theta}_f \quad \dot{x}_f \}, \quad (3.77)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_s^T = \{ \ddot{\theta}_f \quad \ddot{x}_f \}, \quad (3.78)$$

$$\mathbf{x}_e^T = \{ x_1 \quad \dots \quad x_{n-1} \quad \dots \quad x_n \}, \quad (3.79)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_e^T = \{ \dot{x}_1 \quad \dots \quad \dot{x}_{n-1} \quad \dots \quad \dot{x}_n \}, \quad (3.80)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_e^T = \{ \ddot{x}_1 \quad \dots \quad \ddot{x}_{n-1} \quad \dots \quad \ddot{x}_n \}, \quad (3.81)$$

$$\mathbf{v}_e = 1_{i=1,\dots,n}, \quad v_2^T = \{ 0 \quad m_f \}. \quad (3.82)$$

Para resolver o problema de segunda ordem de ISE apresentado na Equação 2.4 este é derivado em um modelo de primeira ordem de EE dado pela Equação 3.83. A equação de saída, segunda linha da Equação 3.83 a matriz de transmissão dela é zero ($\mathbf{D} = 0$) porque nenhuma parte da força de entrada está diretamente acoplada à saída, por isso não está sendo representada nesta equação.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{x}}_g(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_y\mathbf{z}(t), \end{cases} \quad (3.83)$$

o vetor estado $z(t)$ contém as variáveis internas de estado que é composto pelos vetores de deslocamento e velocidade apresentadas nas equações 3.76, 3.77, 3.79 e 3.80.

$$z(t)^T = \left\{ x_{se}(t) \quad \dot{x}_{se}(t) \right\}, \quad (3.84)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_{se}^{-1}K_{se} & -M_{se}^{-1}C_{se} \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

$$B^T = \left\{ 0 \quad -v_{se}M_{se}^{-1} \right\}, \quad (3.86)$$

$$C_y = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ -M_{se}^{-1}K_{se} & -M_{se}^{-1}C_{se} \end{bmatrix}, \quad (3.87)$$

$$y(t)^T = \left\{ x_{se}(t) \quad \dot{x}_{se}(t) \quad \ddot{x}_{se}(t) \right\}. \quad (3.88)$$

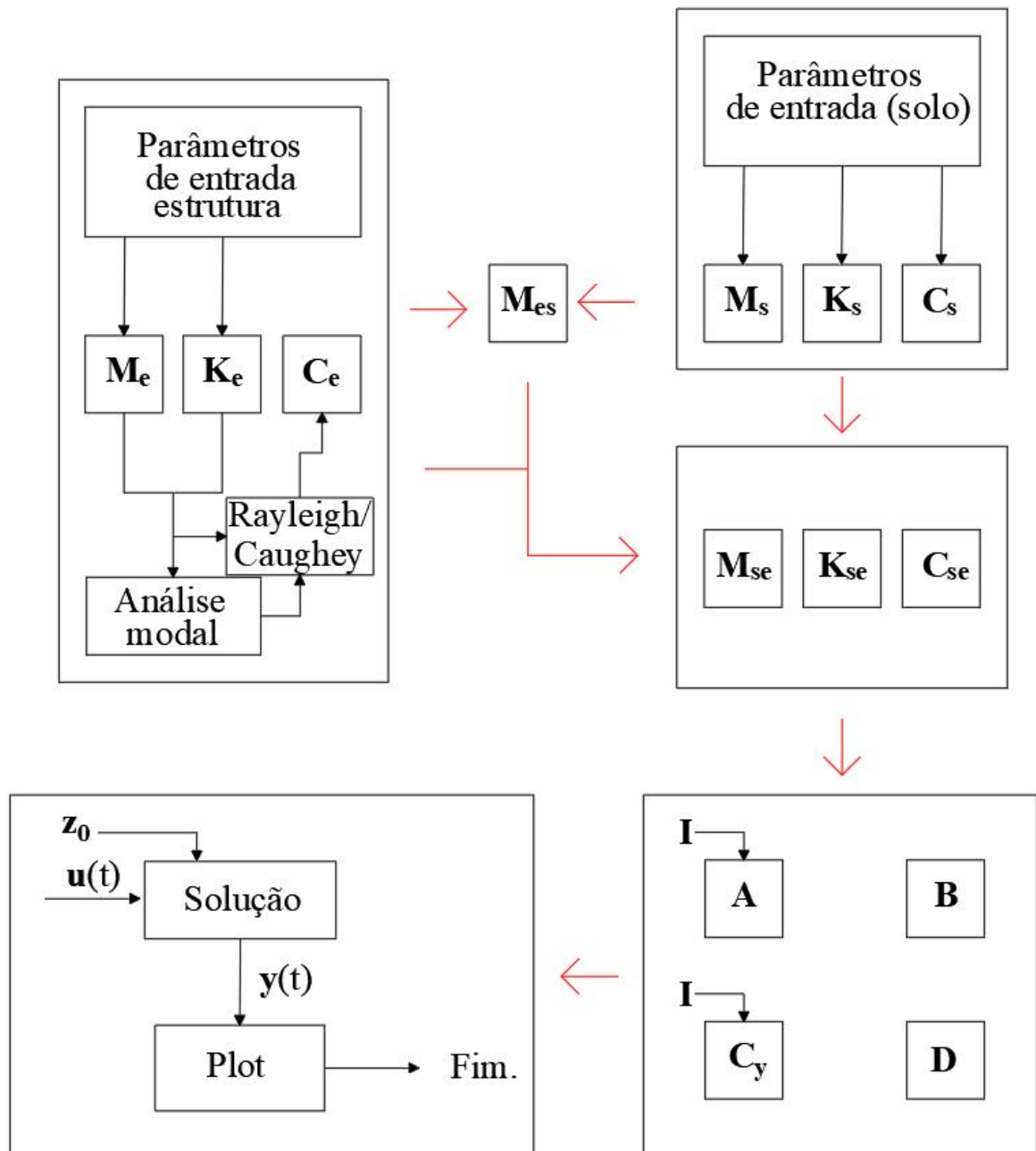
A Figura 15 apresenta um fluxograma do esquema de solução de EE envolvendo ISE. A Figura 16 mostra um pseudo-código de solução usando o software Matlab.

3.3 Recursos computacionais

Para a realização das simulações no MATLAB[®] (2021) foi utilizado um notebook com as seguintes características:

- Notebook Acer Predator G3-572
 - Processador Intel Core i7-7700HQ @ 2.80GHz, 2808 Mhz, 4 Núcleos, 8 Processadores Lógicos e 6MB Cache
 - 32 GB (2 x 16 GB) RAM DDR4 2400 MHz
 - Sistema operacional Windows[®]10 Home
 - Placa de vídeo GTX 1060, 6 GB

Figura 15 – Esquema de solução para EE.



Fonte: autoria própria.

Figura 16 – Pseudo-código para sistema solo-estrutura acoplado.

```

% Parâmetros de entrada:

% dimensões da estrutura
% propriedades dos materiais
- estrutura
- solo

% Montagem das matrizes
- Massa da estrutura
- Massa do solo
- Rigidez da estrutura
- Rigidez do solo
- Amortecimento da estrutura
- Amortecimento do solo

% A montagem das matrizes
solo-estrutura dependem das
matrizes anteriores, delas saem
as matrizes acopladas:
- Massa solo-estrutura
- Rigidez solo-estrutura
- Amortecimento solo-estrutura

% Montagem dos vetores:
- Vetores de entrada u(t)
- Vetor com as condições
  iniciais do sistema z0

% A montagem do sistema de
espaço de estados depende de
todas as condições elencadas
acima;

% A partir das matrizes
acopladas, o sistema de espaço
de estados é montado através das
matrizes de estado (A), entrada
(B), saída (Cy) e de transmissão
(D);

% A solução do sistema de espaço
de estados depende de um vetor
entrada u (sismo), do tempo t, e
do vetor com as condições
iniciais;

% A saída do sistema retorna y
contendo as respostas do sistema
em termos de deslocamento,
velocidade e aceleração. O
tamanho de y possui a mesma
quantidade de linhas que o vetor
tempo e a mesma quantidade de
colunas do vetor estado;

% Plotagem;

% Fim.

```

Fonte: autoria própria.

4 RESULTADOS

Nesse capítulo serão apresentadas o percurso de soluções e comparações de resultados até se atingir o objetivo final com a generalização do problema de ISE recebendo excitação sísmica.

O capítulo inicia com a apresentação de dois sistemas dinâmicos, o caso com 1 GL resolvido analiticamente e o segundo com 2 GL determinado através dos métodos de Runge-Kutta. Os resultados desses dois modelos foram comparados com o método de solução via EE com a finalidade de validar o método.

Na sequência é modelada uma estrutura com três pavimentos e aplicada uma excitação sísmica diretamente nela, os resultados dessa análise são confrontados entre os métodos de RK4 e EE. A partir disso é realizada a implementação do EE para problemas de ISE de N pavimentos, considerando apenas a flexão. São apresentados 3 pórticos com 3, 7 e 15 pavimentos no plano bidimensional. Por fim, é apresentada uma analogia de uma estrutura com 3 pavimentos recebendo a excitação direta do sismo e outra considerando os efeitos de ISE.

4.1 Sistemas amortecidos com excitação harmônica

A fim de verificar a solução via EE o primeiro caso apresentado é de um sistema dinâmico de vibração forçada amortecido com 1 GL e o segundo modelo é com 2 GL, os modelos são apresentados, respectivamente, nos itens 4.1.1 e 4.1.2.

4.1.1 Vibração forçada amortecida para 1 GL

O sistema dinâmico modelado com 1 GL é composto por massa presa por um pivô, mola fixa e amortecedor fixo. O sistema é excitado harmonicamente por uma força $F(t)$. A barra desloca-se por um ângulo θ . A representação do sistema é mostrado na Figura 17.

A equação do movimento que modela este sistema é obtida a partir da segunda lei Newton:

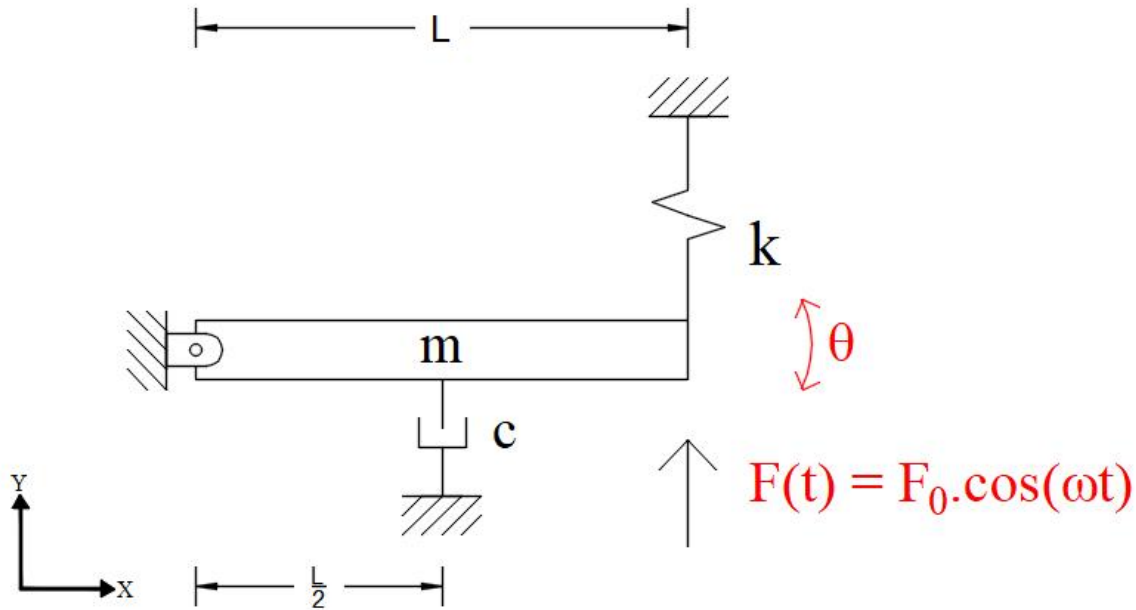
$$I_o \ddot{\theta} + \frac{cL^2}{4} \dot{\theta} + kL^2 \theta = F_0 \cos(\omega t)L. \quad (4.1)$$

Resolvendo o sistema analítico chega-se as equações de deslocamento angular, Equação 4.2 e velocidade angular, Equação 4.3.

$$\theta(t) = A_h e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) + A_0 \cos(\omega t - \phi_0), \quad (4.2)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\zeta \omega_n A_h e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) - \omega_d \sin(\omega_d t - \phi) A_h e^{-\zeta \omega_n t} - A_0 \omega \sin(\omega t - \phi_0), \quad (4.3)$$

Figura 17 – Sistema mecânico com 1 grau de liberdade recebendo uma força harmônica.



Fonte: autoria própria.

em que,

$$A_0 = \frac{F_0 L}{I_0 \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}, \quad (4.4)$$

$$\phi_0 = \arctan \left(\frac{(2\zeta\omega_n\omega)}{(\omega_n^2 - \omega^2)} \right), \quad (4.5)$$

$$A_h = \frac{\theta_0 - A_0 \cos(-\phi_0)}{\cos(-\phi)}, \quad (4.6)$$

$$\phi = -\arctan \left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n(\theta_0 - A_0 \cos(-\phi_0)) + A_0\omega \sin(-\phi_0)}{-\omega_d(\theta - A_0 \cos(-\phi_0))} \right). \quad (4.7)$$

A modelagem no EE desse sistema é dada pelas matrizes **A**, **B**, **C_y** e **D**, em que **D** = 0. As demais matrizes são apresentadas a seguir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(kL^2)}{I_0} & -\frac{c}{I_0} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_0} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{C}_y = [1 \quad 0], \quad (4.10)$$

a montagem do sistema fica

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{F}(t)L, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_y\mathbf{z}(t). \end{cases} \quad (4.11)$$

Para o sistema descrito na Figura 17, as propriedades consideradas são apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4 – Propriedades do sistema com 1 grau de liberdade.

Propriedades do sistema	Valores numéricos
θ_0	0
$\dot{\theta}_0$	0
m	2,54 kg
k	27040 N/m
L	0,7 m
I_0	$\left(\frac{mL^2}{3} = 0,4149\right)$ kg m ²
t	0:0,001:4 s
ζ	0,0061
ω_n	$L\sqrt{\frac{k}{I_0}} = 178,71$ rad/s (28,44 Hz)
ω	ω_n
F(t)	$F_0 \cos \omega t$
F_0	1 N
c	$2\zeta\omega_n I_0$ Ns/m

Fonte: autoria própria.

As propriedades de massa, rigidez e fator de amortecimento foram consideradas do sistema montado no Laboratório de Vibrações da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Pato Branco (UTFPR-PB). O fator de amortecimento foi obtido experimentalmente durante o período de aulas práticas da disciplina de dinâmica das estruturas.

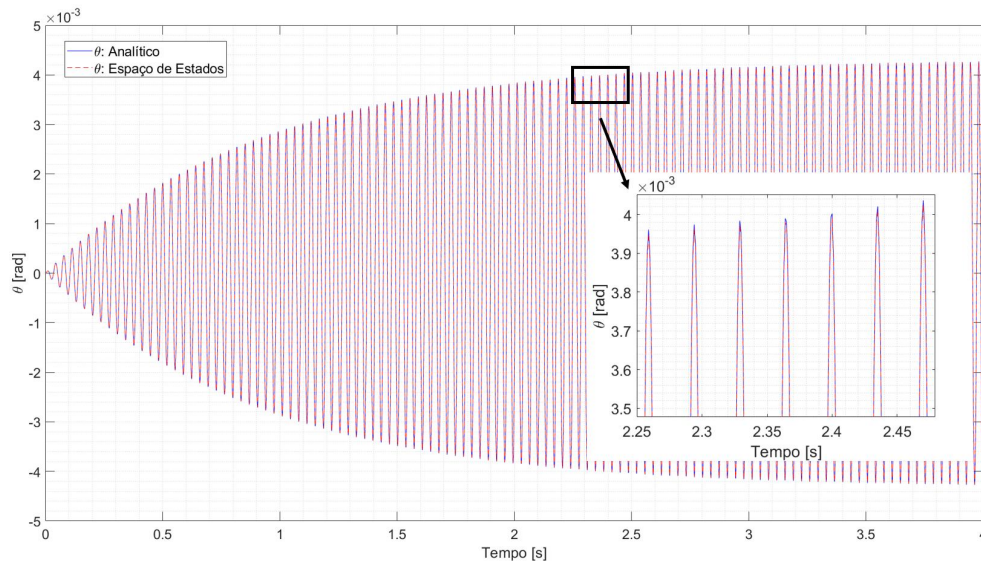
Os resultados obtidos no domínio do tempo para o sistema são apresentados nas figuras 18 e 19, sendo a primeira relacionada com o deslocamento angular e a segunda com a velocidade angular.

Ao comparar as respostas das duas soluções nota-se que tanto no deslocamento angular quanto na velocidade angular os resultados se sobrepuseram. Dessa forma, pode-se dizer que o método de EE mostrou-se satisfatório para resolução desse tipo de sistema dinâmico.

4.1.2 Vibração forçada amortecida para 2 GL

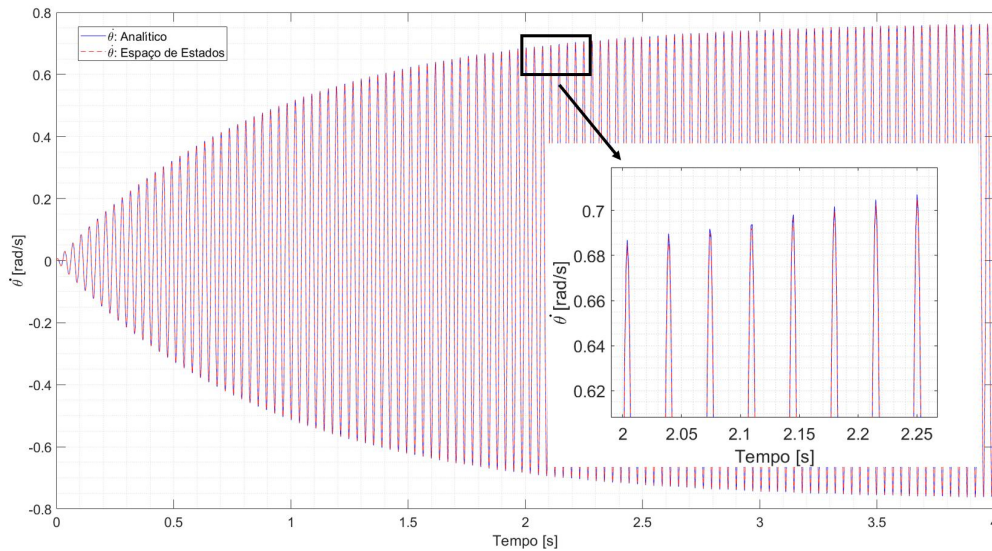
O sistema dinâmico modelado com 2 GL é composto por 2 massas (m_1 e m_2) presas por pivôs, 3 molas (k_1 , k_2 e k_3) sendo duas fixas e uma ligando as duas massas e 1 amortecedor (c) fixo. O sistema é excitado harmonicamente por uma força $F(t)$. As

Figura 18 – Resposta do deslocamento angular perante excitação de força harmônica para sistema amortecido com 1 grau de liberdade.



Fonte: autoria própria.

Figura 19 – Resposta da velocidade angular perante excitação de força harmônica para sistema amortecido com 1 grau de liberdade.



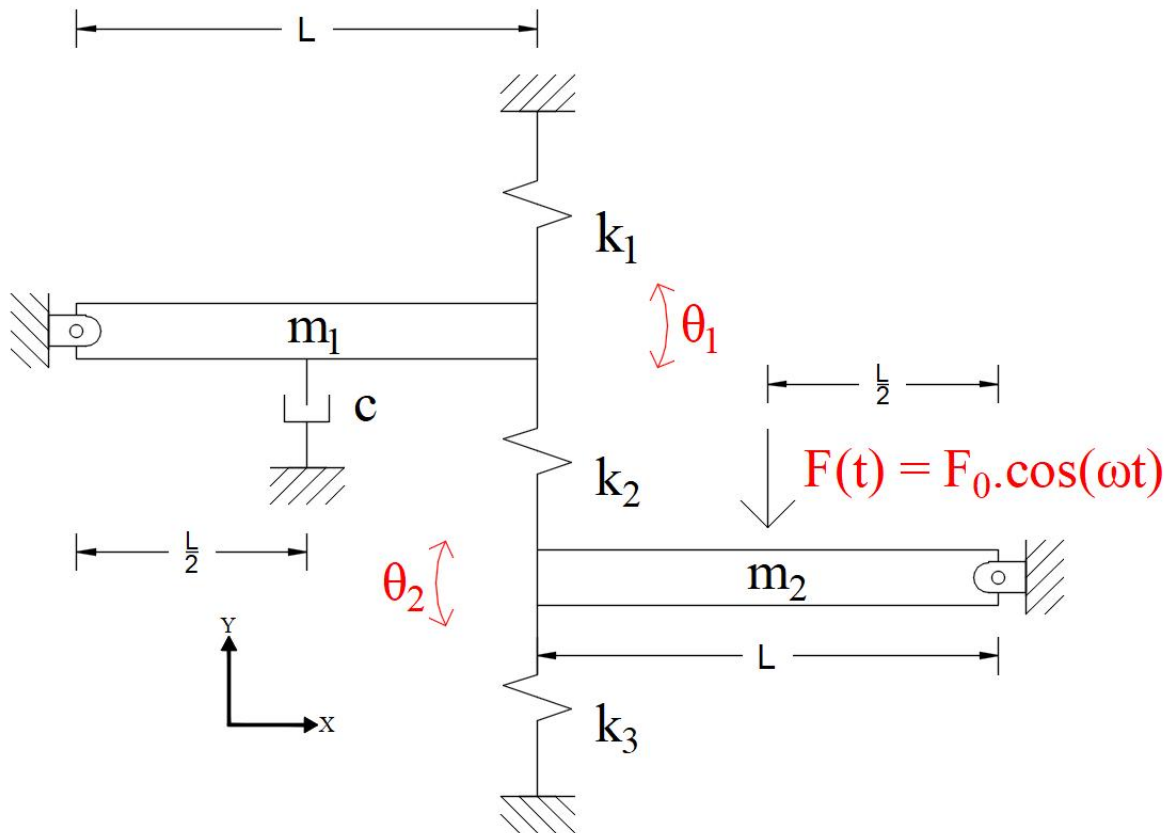
Fonte: autoria própria.

barras deslocam-se por um ângulo θ_1 e θ_2 . A representação do sistema é mostrado na Figura 20.

As propriedades consideradas para a solução do problema são apresentadas na tabela 5. Vale destacar que para o corpo 1 (representado por m_1 na Figura 20) foram consideradas as mesmas propriedades para o sistema com 1 grau de liberdade.

A equação do movimento para o sistema da Figura 20 é representada de forma

Figura 20 – Sistema mecânico com 1 grau de liberdade recebendo uma força harmônica.



Fonte: autoria própria.

Tabela 5 – Propriedades do sistema com 2 grau de liberdade.

Propriedades do sistema	Valores numéricos
$\theta_{01} = \theta_{02}$	0
$\dot{\theta}_{01} = \dot{\theta}_{02}$	0
m_2	7,62 kg
k_2	13520 N/m
k_3	6760 N/m
L	0,7 m
I_{01}	$\left(\frac{mL^2}{3} = 0,4149\right)$ kg m ²
I_{02}	$\left(\frac{mL^2}{3} = 1,2446\right)$ kg m ²
ω	ω_{n2}
c	$\zeta \frac{2I_{01}\omega_{n1}}{(L/2)^2}$ 3,1369 Ns/m

Fonte: autoria própria.

matricial a seguir

$$\begin{bmatrix} I_{01} & 0 \\ 0 & I_{02} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{cL^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)L^2 & -k_2L^2 \\ -k_2L^2 & (k_2 + k_3)L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \cos(\omega t)L/2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

As frequências naturais do sistema são obtidas através da equação característica (Equação 4.13), as respostas são apresentadas na Tabela 6.

$$(38725729w^4)/75000000 - (360728641w^2)/12500 + 3840197816/25. \quad (4.13)$$

Tabela 6 – Frequências naturais para o sistema de vibração forçada com dois graus de liberdade.

Frequências	Hz
f_{n1}	12.28
f_{n2}	35.56

Fonte: autoria própria.

A solução da Equação 4.12 foi obtida de três formas distintas usando a função *ode23*, *ode45* e o método de solução de EE. A função *ode23* resolve equações diferenciais de primeira ordem utilizando os métodos de RK explícitos através da combinação de RK2 e RK3, enquanto a função *ode45* utiliza os métodos de RK4 e RK5.

Para resolver via Matlab o sistema com 2 GL, a equação diferencial de segunda ordem foi expressa em um sistema de primeira ordem acoplada. Para conseguir solucionar a equação são introduzidas novas variáveis mostradas a seguir

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = \dot{x}_1, \quad x_3 = x_2, \quad x_4 = \dot{x}_2, \quad (4.14)$$

assim a Equação 4.12 é expressa na forma vetorial da seguinte maneira

$$\left\{ \begin{array}{c} x_2 \\ \frac{-(cL^2)x_2 - (k_1 + k_2)L^2x_1 + k_2L^2x_3}{I_{01}} \\ x_4 \\ \frac{F + k_2L^2x_1 - (k_2 + k_3)L^2x_3}{I_{02}} \end{array} \right\}. \quad (4.15)$$

Para a solução via EE as matrizes **A**, **B**, **C_y** e **D** são dadas como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(k_1+k_2)L^2}{I_{01}} & \frac{k_2L^2}{I_{01}} & -\frac{cL^2}{I_{01}} & 0 \\ \frac{k_2L^2}{I_{02}} & -\frac{(k_2+k_3)L^2}{I_{02}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{I_{01}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{02}} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

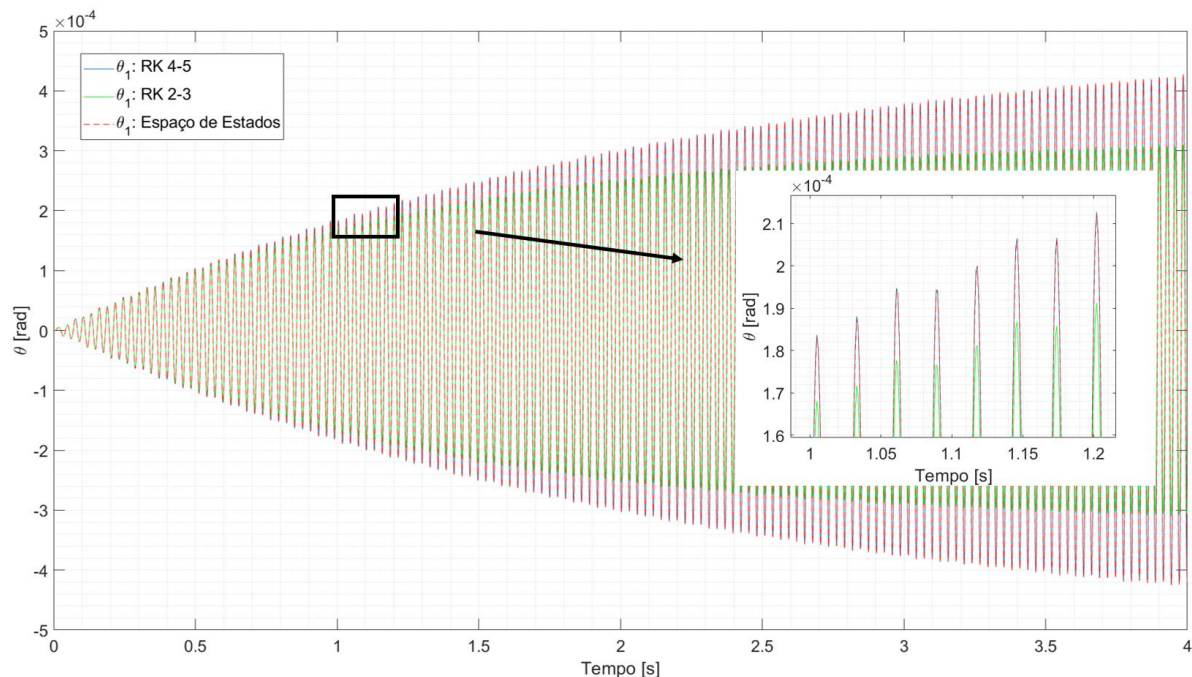
$$\mathbf{D} = 0, \quad (4.19)$$

e a montagem do sistema fica,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{F}(t)\frac{L}{2}, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_y\mathbf{z}(t). \end{cases} \quad (4.20)$$

A seguir são apresentadas as respostas para o sistema de 2 GL no domínio do tempo. A Figura 21 se refere ao deslocamento angular relacionado ao corpo 1 e a Figura 22 se refere ao deslocamento angular do corpo 2. Enquanto as figuras 23 e 24 são as velocidades angulares, sendo a primeira relacionada com o corpo 1 e a última com o corpo 2.

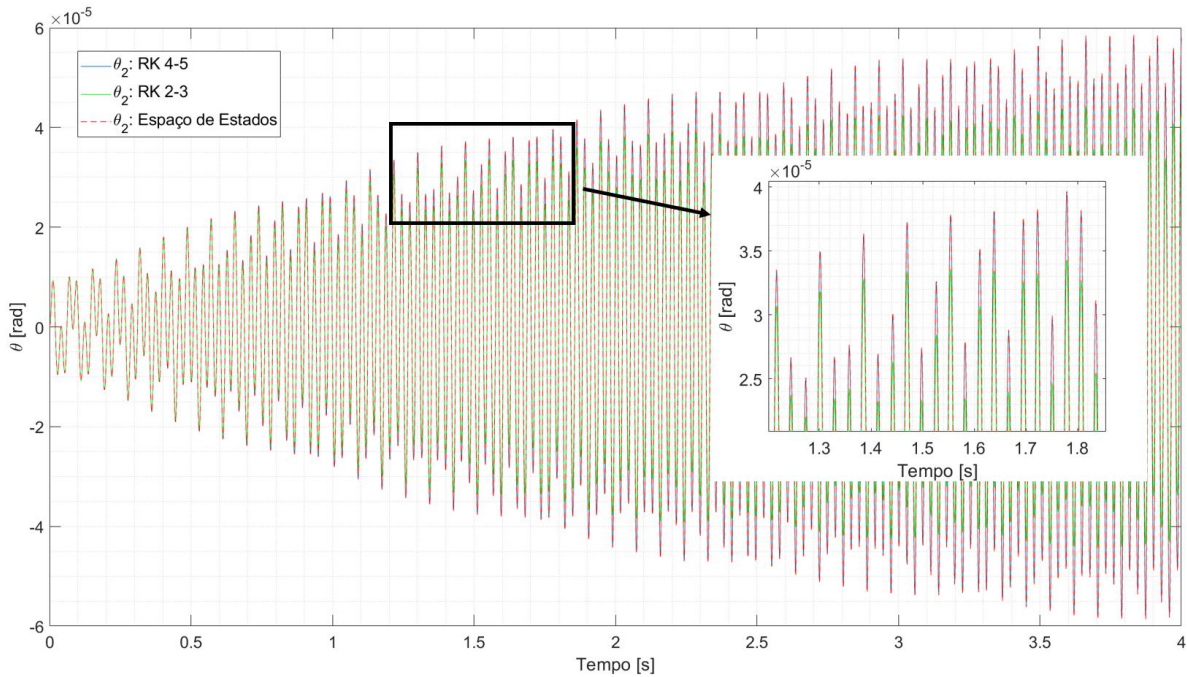
Figura 21 – Deslocamento angular do corpo 1 considerando um sistema com 2 graus de liberdade.



Fonte: autoria própria.

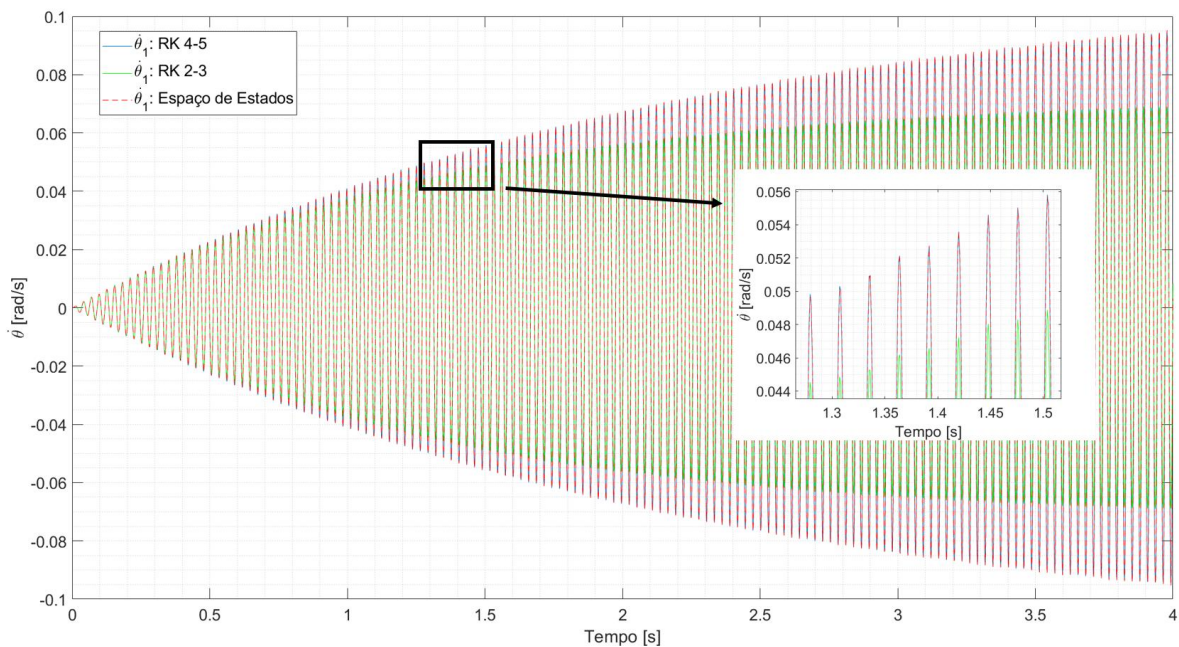
Nos métodos de RK o erro de truncamento diminui à medida que a ordem do método aumenta. Assim, quanto maior a ordem do método melhor é a sua precisão (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008; CHAPRA; CANALE, 2010). Ao comparar o método de solução de EE com as duas formas de solução de RK, nota-se que o modelo de EE se

Figura 22 – Deslocamento angular do corpo 2 considerando um sistema com 2 graus de liberdade.



Fonte: autoria própria.

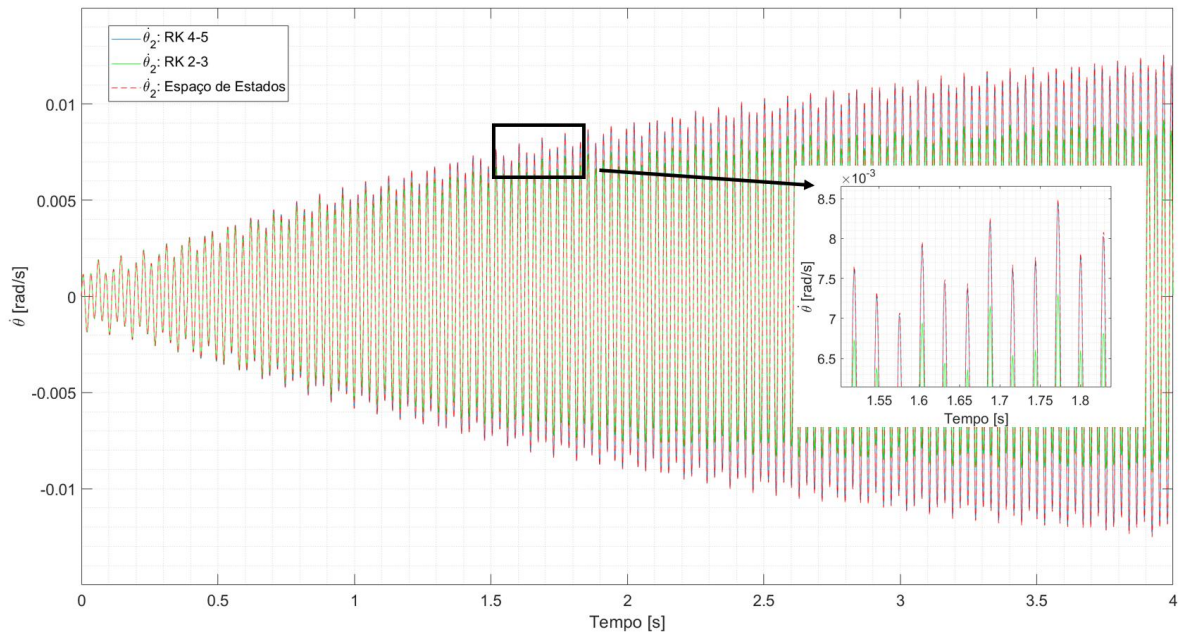
Figura 23 – Velocidade angular do corpo 1 considerando um sistema com 2 graus de liberdade.



Fonte: autoria própria.

aproximou da solução com maior precisão ficando praticamente com as respostas uma sobre a outra. Com base nisso, a precisão do método de EE apresenta-se de forma satisfatória.

Figura 24 – Velocidade angular do corpo 2 considerando um sistema com 2 graus de liberdade.



Fonte: autoria própria.

4.2 Excitação sísmica diretamente na estrutura

Com a solução via EE verificada através dos sistemas dinâmicos com 1 GL e 2 GL excitadas harmonicamente, agora é analisado o método de solução para uma estrutura com três pavimentos recebendo excitação sísmica direta na estrutura. O sistema possui 3 GL sendo vibrado apenas em flexão. O modelo é comparado com o método de RK4. A estrutura metálica é um modelo teórico, bidimensional.

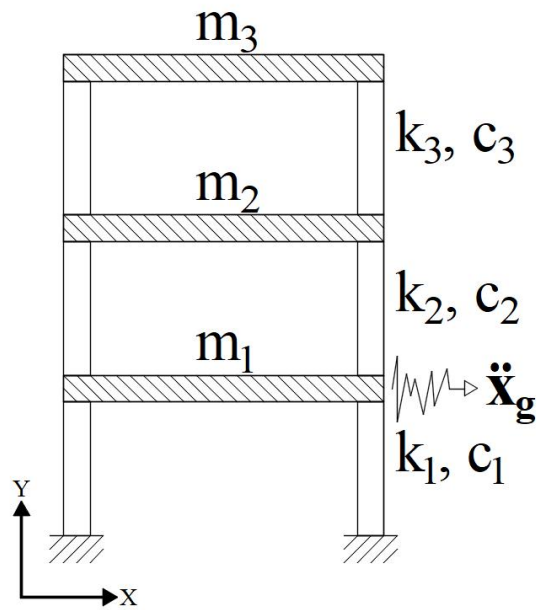
A forma discretizada no sistema massa, mola e amortecedor é apresentada na Figura 26. A excitação sísmica é considerada na horizontal, considerando o plano cartesiano xy , na direção do eixo x . Pelo fato desse modelo não ser acoplado com o solo a excitação é passada diretamente na primeira massa.

A equação do movimento que modela sistema é baseada na segunda lei de Newton e é dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{j}\ddot{x}_g(t), \quad (4.21)$$

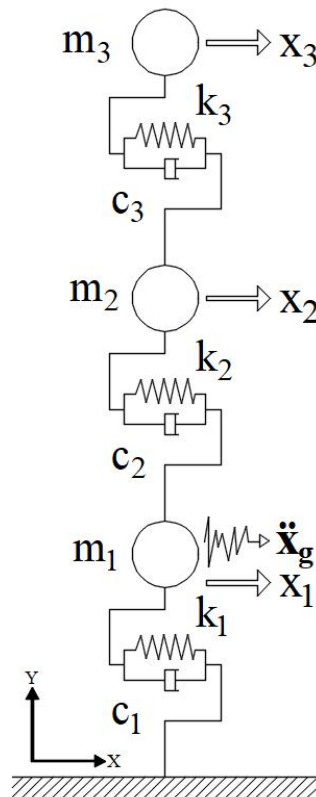
em que \mathbf{j} é o vetor que define os graus de liberdade do sistema. O sismo considerado é o que ocorreu Northridge (Los Angeles - EUA) no dia 17 de Janeiro de 1994. O registro do sismo foi obtido através do site *Pacific Earthquake Engineering Research Center - PEER* Peer Ground Motion Database (2013), o qual possui uma base de dados com registros de vários terremotos já ocorridos em várias regiões do planeta. Na Figura 27, apresenta-se a resposta no tempo do sismo considerando um intervalo

Figura 25 – Pórtico plano com 3 graus de liberdade.



Fonte: autoria própria.

Figura 26 – Modelo discreto de massas concentradas.

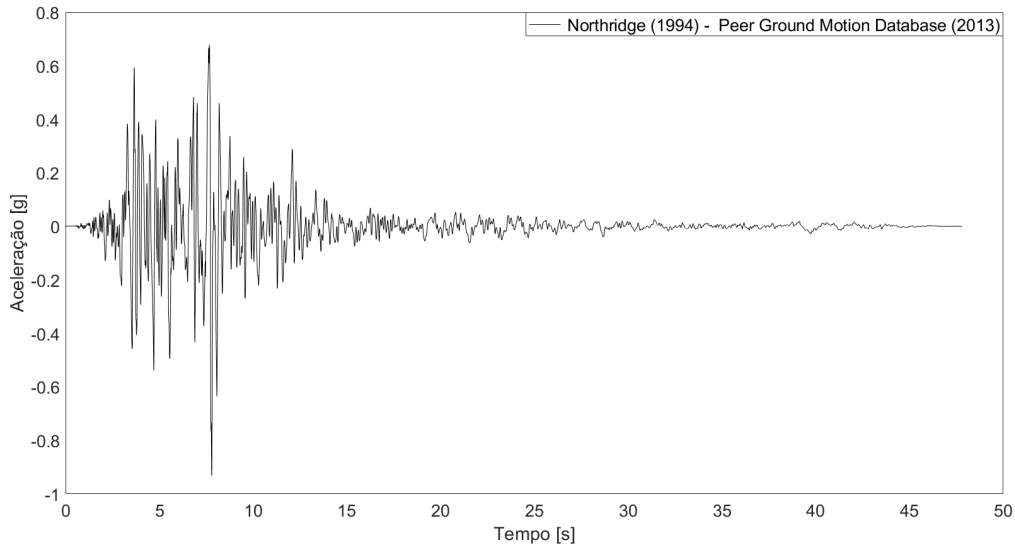


Fonte: autoria própria.

entre um ponto e outro de 0,005s. O sismo foi registrado na estação LA - Sepulveda VA Hospital, componente NORTH-SPV360.AT2, possui magnitude de momento de 6.7

M_w , com uma aceleração de pico efetivo (PGA) de $-0,932g$ e a distância do local de medida ao epicentro de $8,44$ Km.

Figura 27 – Registro sísmico de Northridge considerando a ação horizontal.



Fonte: (Peer Ground Motion Database, 2013)

A primeira forma de solução da equação diferencial de segunda ordem (Equação 4.21) é realizada através do método de RK4. Para isso, a Equação 4.21 é expressa em uma equação diferencial de primeira ordem acoplada dada por um conjunto de equações, mas antes são consideradas novas variáveis dadas por

$$x_1 = x_1, x_2 = \dot{x}_1, x_3 = x_2, x_4 = \dot{x}_2, x_5 = x_3, x_6 = \dot{x}_3, \quad (4.22)$$

o conjunto de 6 equações é expressa de forma vetorial mostrada a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_2 \\ \frac{-c_{11}x_2 + c_{12}x_4 + c_{13}x_6 - k_{11}x_1 + k_{12}x + F}{m_1} \\ x_4 \\ \frac{c_{21}x_2 - c_{22}x_4 + c_{23}x_6 + k_{21}x_1 - k_{22}x_3 + k_{23}x_5}{m_2} \\ x_6 \\ \frac{c_{31}x_2 + c_{32}x_4 - c_{33}x_6 + k_{32}x_3 - k_{33}x_5}{m_3} \end{array} \right\}. \quad (4.23)$$

No EE a representação fica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_{11}}{m_1} & \frac{k_{12}}{m_1} & 0 & -\frac{c_{11}}{m_1} & \frac{c_{12}}{m_1} & \frac{c_{13}}{m_1} \\ \frac{k_{21}}{m_2} & -\frac{k_{22}}{m_2} & \frac{k_{23}}{m_2} & \frac{c_{21}}{m_2} & -\frac{c_{22}}{m_2} & \frac{c_{23}}{m_2} \\ 0 & \frac{k_{23}}{m_3} & -\frac{k_{33}}{m_3} & \frac{c_{31}}{m_3} & \frac{c_{32}}{m_3} & -\frac{c_{33}}{m_3} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{C}_y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (4.26)$$

$$\mathbf{D} = 0, \quad (4.27)$$

e a montagem do sistema resulta em:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{x}}_g(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_y\mathbf{z}(t), \end{cases} \quad (4.28)$$

a matriz \mathbf{D} é zero, porque as equações de saída não possuem nenhum valor correspondente às entradas $\mathbf{u}(t)$.

As propriedades consideradas para o modelo são apresentadas na Tabela 7. O modelo com 3 pavimentos foi baseado em uma estrutura existente no Laboratório de Vibrações do curso de Engenharia Mecânica da UTFPR-PB. Porém, para esta considerou-a toda em aço estrutural e as massas foram adotadas iguais por tratar-se de uma analogia do estudo teórico com a prática. Para uma estrutura convencional considerando pavimento tipo e estruturas pequenas, as massas são consideradas iguais, bem como a rigidez. O pavimento tipo ou pavimento padrão é o modelo de apartamento que se repete em vários andares de um edifício.

A matriz de amortecimento foi obtida por meio do série de *Caughey* dada por:

$$\mathbf{c} = \mathbf{m} \sum_{l=0}^{N-1} a_l [\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}]^l, \quad (4.29)$$

Tabela 7 – Propriedades do sistema com 3 graus de liberdade considerando excitação sísmica.

Propriedades do sistema	Valores numéricos
Dimensões da laje	0,14 m × 0,012 m × 8×10 ⁻⁴ m (C × L × espessura)
Altura	0,9 m
Seção do pilar (a)	8×10 ⁻⁴ m
Seção do pilar (b)	0,012 m
Densidade (ρ)	7850 kg/m ³
Módulo de Young (E)	2×10 ¹¹ Pa
Distância entre pavimentos (h)	0,3 m
ζ	0,01
t	0:0,005:30
x_0	0
$m_1=m_2=m_3$	0,0105504 kg
$k_1=k_2=k_3$	91,0222 N/m
Inércia ($I=b.a^3/12$)	5,12×10 ⁻¹³ m ⁴

Fonte: autoria própria.

em que, N está relacionado com o número de graus de liberdade do sistema e a_l são constantes (CHOPRA, 2012).

Para a rigidez foi considerada a seguinte equação

$$k = 2 \frac{12EI}{h^3}. \quad (4.30)$$

As frequências naturais da estrutura foram calculadas através de autovalores utilizando o software MATLAB[®] (2021) sendo apresentadas na Tabela 8.

Tabela 8 – Frequências naturais do sistema com 3 GL.

Frequências naturais	Hz
f_{n1}	6,58
f_{n2}	18,43
f_{n3}	26,64

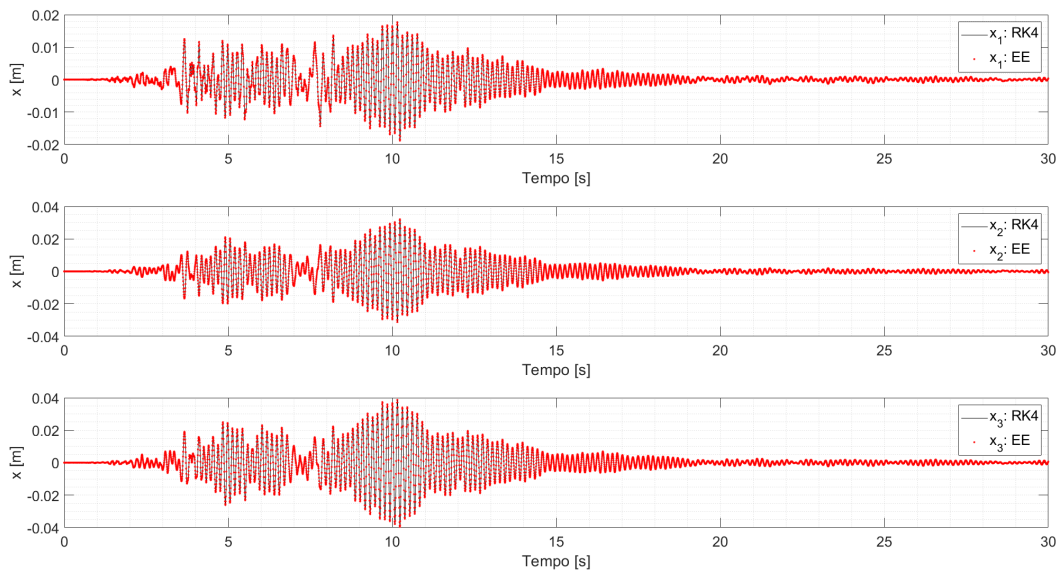
Fonte: autoria própria.

A resposta da estrutura considerando dois métodos de solução distintos (RK4 e EE) em termos de deslocamento e velocidade são apresentadas nas figuras 28 e 29, respectivamente.

Ao observar a resposta da estrutura sobre uma excitação sísmica nota-se que os maiores deslocamentos ocorreram no terceiro pavimento, sendo as máximas amplitudes de deslocamento e velocidade de -0,03959 m e -1,617 m/s, respectivamente. Outro fator é que assim como nos modelos anteriores o método de solução de EE apresentaram novamente resultados satisfatórios pois, como pode ser observados nas figuras 28 e 29, ambos os métodos aparecem sobrepostos.

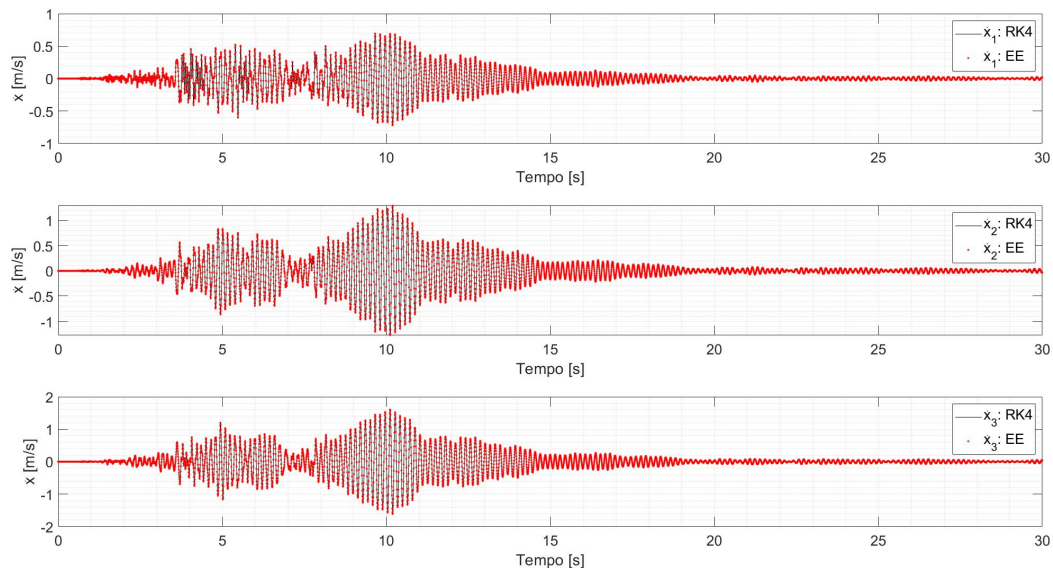
As respostas no domínio da frequência são apresentadas nas figuras 30 e 31. Aqui, foi aplicada uma FFT (Transformada Rápida de Fourier) para a obtenção dos

Figura 28 – Comparação entre as respostas dos métodos de RK4 e EE quanto ao deslocamento perante excitação sísmica considerando 3 graus de liberdade.



Fonte: autoria própria.

Figura 29 – Comparação entre as respostas dos métodos de RK4 e EE quanto a velocidade perante excitação sísmica considerando 3 graus de liberdade.

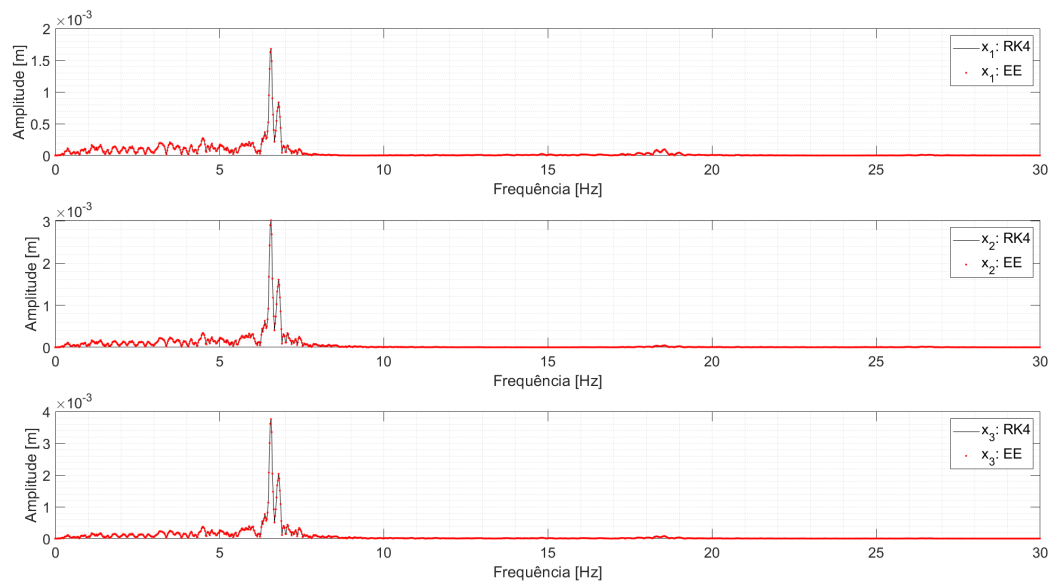


Fonte: autoria própria.

novos resultados em termos de deslocamento e velocidade.

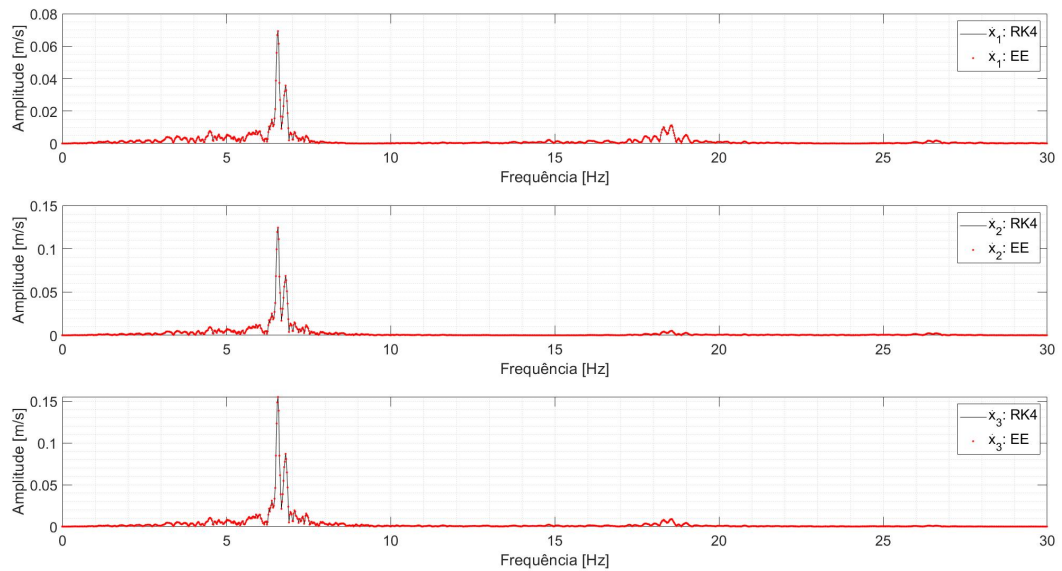
Com base nas respostas apresentadas nas figuras 30 e 31, as máximas amplitudes de vibração foram identificadas no terceiro pavimento e no primeiro modo de vibrar, tanto no deslocamento quanto na velocidade à uma amplitude de 0,003763 m à frequência de 6,572 Hz (deslocamento) e amplitude de 0,1554 m/s à frequência de 6,573 Hz

Figura 30 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de deslocamento dos dois métodos de solução: RK4 e EE.



Fonte: autoria própria.

Figura 31 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de velocidade dos dois métodos de solução: RK4 e EE.



Fonte: autoria própria.

(velocidade).

Outro fator a ser considerado é o tempo de simulação, na Tabela 9 são comparados os tempos de processamento entre o método de RK4 e a solução via EE.

Os resultados mostraram que a solução via EE consome um tempo menor de processamento do que utilizando o método de RK4.

Tabela 9 – Comparação do tempo de solução entre os métodos de RK4 e EE.

Método	Tempo (s)
RK4	415,355692 \cong 7 min
EE	0,789512

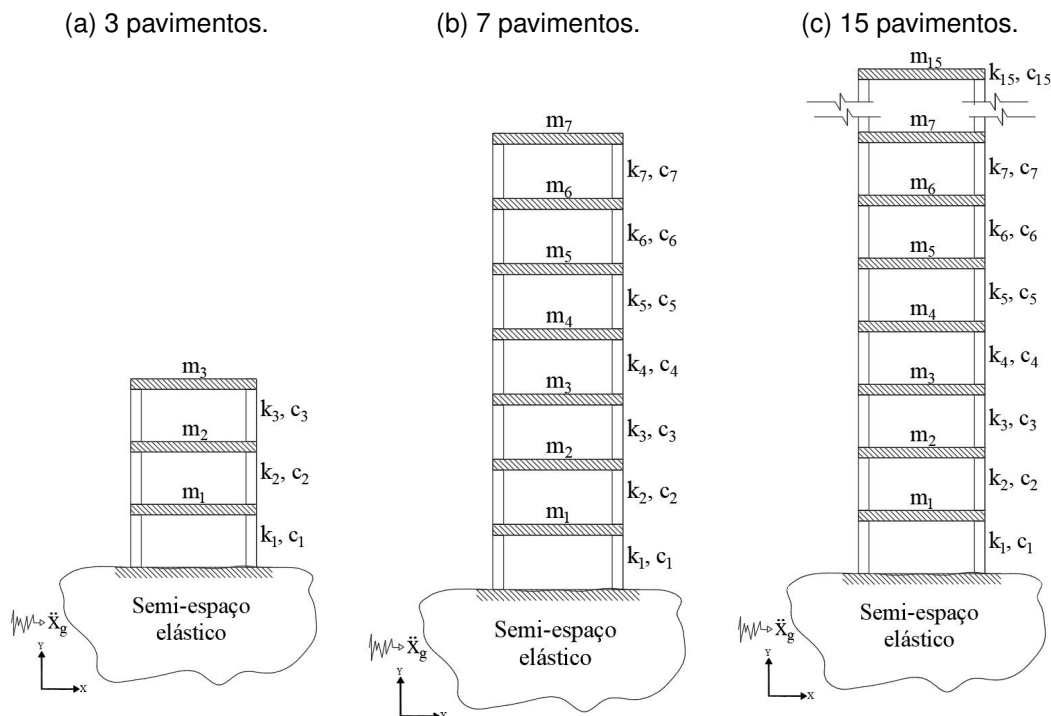
Fonte: autoria própria.

4.3 Excitação sísmica considerando a interação solo-estrutura

Para resolver o problema envolvendo ISE e a generalização no EE considerando somente a flexão para N graus de liberdade passou por várias etapas, primeiramente, com os problemas iniciais com 1 e 2 graus de liberdade, posteriormente com a aplicação do sismo diretamente a estrutura e agora o acoplamento abrangendo o solo e finalizando com a comparação entre o problema acoplado e sem acoplamento.

Para mostrar a generalização são apresentadas três estruturas metálicas bidimensionais, com 3, 7 e 15 pavimentos, representadas na Figura 32. Posteriormente, o caso com 3 pavimentos será comparado com a estrutura do caso anterior, onde se tinha o efeito do sismo agindo diretamente na estrutura. Os resultados serão mostrados no domínio do tempo em termos de deslocamento, velocidade e aceleração. Para o domínio da frequência apenas às duas primeiras respostas são aplicadas a FFT.

Figura 32 – Pórticos planos de diferentes pavimentos considerando excitação sísmica e ISE.

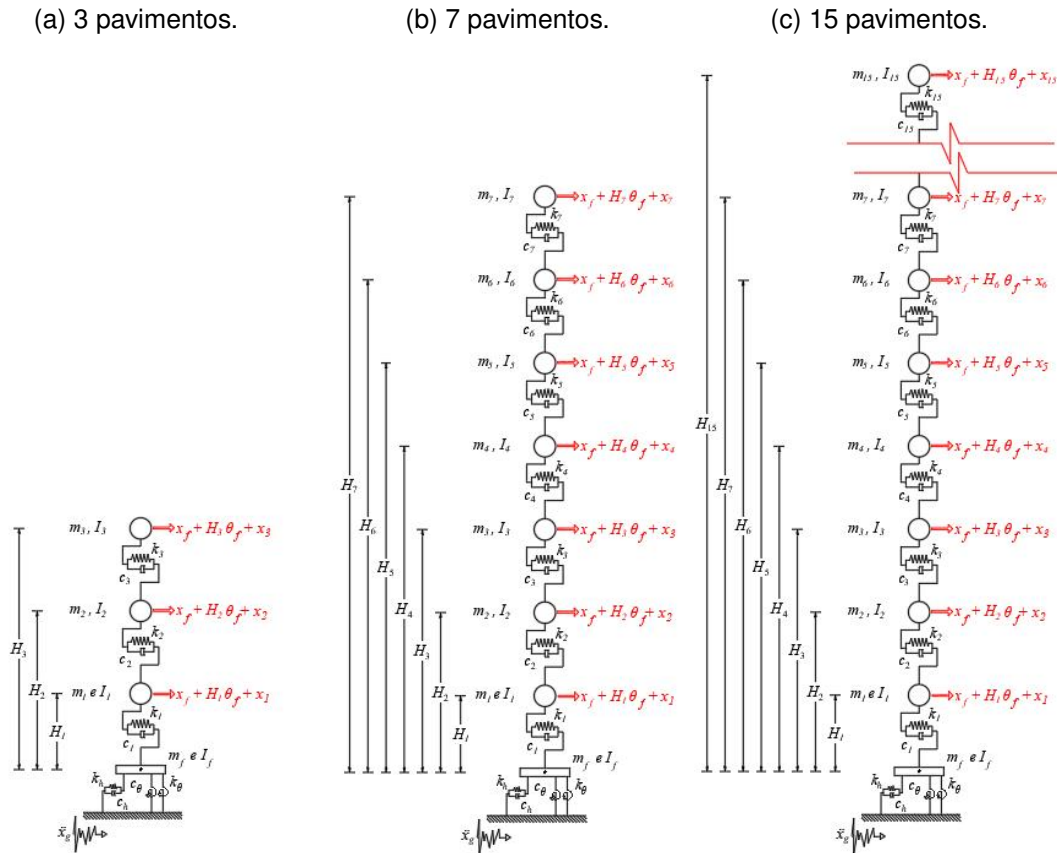


Fonte: autoria própria.

A Figura 33 ilustra a discretização de massas concentradas dos três modelos. O sistema possui 1 GL por pavimento sendo vibrado apenas em flexão. Nele a excitação

sísmica é considerada na horizontal, no plano cartesiano xy , na direção do eixo x .

Figura 33 – Discretização de massas concentradas das 3 estruturas



Fonte: autoria própria.

A equação do movimento que representa os sistemas generalizados, apresentadas na Figura 33, assim como as anteriores é baseada na segunda de lei de Newton e foi apresentada de forma matricial no capítulo 3, na Equação 3.64. As propriedades da estrutura e do solo estão dispostas na Tabela 10. Os dados do solo foram baseados em Bowles (1996).

Tabela 10 – Propriedades do solo e da estrutura.

Propriedades do sistema	Valores numéricos
Densidade ($\rho_{\text{aço estrutura}}$)	7850 kg/m ³
Massa específica do solo	16000 N/m ³
Módulo cisalhante G_{solo}	5400000 N/m ²
V_{solo}	57,3 m/s
Coeficiente de Poisson (ν_{solo})	0,4
Módulo de Young ($E_{\text{estrutura}}$)	2×10^{11} Pa
Distância entre pavimentos (h)	0,3 m
ζ	0,01
t	0:0,005:47,79
Condição inicial (z_0)	0

Fonte: autoria própria.

Os parâmetros de entrada considerados no código além das propriedades dos materiais são:

- Altura entre pavimentos;
- Dimensões das lajes e pilares;
- Número de pavimentos;
- Número de modos;
- Número de variáveis (deslocamento + velocidade).

Quanto aos cálculos para a obtenção da inércia e rigidez seguem as mesmas equações dos casos anteriores. As massas e rigidez da estrutura com 3 pavimentos foram consideradas as mesmas do caso com excitação sísmica direta, a alteração que teve foi a inserção do solo. O solo é caracterizado como um semi-espaco homogêneo, isotrópico, elástico linear.

O caso com 7 pavimentos foi considerado os pavimentos com massas iguais e conseqüentemente a rigidez. Para o caso com 15 pavimentos nos três primeiros pavimentos, as massas foram adotadas 3 vezes o valor do pavimento tipo e o último com 1,26 vezes o tipo, os pavimentos centrais possuem mesma massa. A variação de massas conseqüentemente de rigidez para o estudo teórico foi pensando em uma analogia com estruturas convencionais em que os três primeiros pavimentos são de garagem o qual possuem mais massa e o último com uma carga adicional, algo que pode ser entendido como a presença, por exemplo, de uma piscina no último andar. As massas iguais são consideradas como pavimento tipo. As considerações feitas sobre as cargas adicionais foram baseadas na NBR 6120 ABNT (2019).

O tipo de fundação utilizada é *radier*, dentro das classificações de fundações é tida como uma fundação superficial. Vale destacar que, o tipo de fundação analisada é considerada para estudos teóricos. Outro tipo de fundação que pode ser analisada dentro da classificação superficial são as sapatas, que para o cálculo considera a sua massa, inércia, rigidez e o raio de abrangência no solo.

A Tabela 11 apresenta as dimensões de cada pórtico, bem como suas massas e rigidez e a Tabela 12 apresenta a rigidez e amortecimento do solo. Na Tabela 11 o raio foi obtido através da área equivalente da fundação, tendo em vista que a fundação é do tipo *radier*. As dimensões da estrutura surgiu de um projeto inicial em realizar ensaios em laboratório antes do advento da pandemia por meio de estruturas já existentes.

As respostas modais considerando apenas os 3 primeiros modos da estrutura são mostradas na Figura 34 sendo a seqüência com 3, 7 e 15 pavimentos. Como pode ser visto na Figura 34 conforme foram alteradas as matrizes de massa e rigidez as frequências naturais foram se alterando, bem como os seus modos de vibrar.

Tabela 11 – Dimensões da estrutura, massa e rigidez.

Propriedades	Pórticos		
	3 pavimentos	7 pavimentos	15 pavimentos
Altura total	0,9 m	2,1 m	4,5 m
Altura parcial	0,3 m		
Dimensões da laje	¹ 0,14 m × 0,012 m × 8 × 10 ⁻⁴ m (C × L × E)		
Dimensões da fundação	¹ 0,1416 m × 0,012 m × 8 × 10 ⁻⁴ m (C × L × E)		
raio (r)	0,0233 m		
massa da fundação	² 0,0107 kg		
massa	² 0,0106 kg	² 0,0106 kg	³ 0,0106 kg
Rigidez	² 91.022 N/m	² 91.022 N/m	⁴ 91.022 N/m

¹ C é comprimento, L é largura e E é espessura.

² Iguais para todos os pavimentos.

³ Os 3 primeiros pavimentos são m×3, o último é m×1,26 e os centrais são iguais a m.

⁴ Os 5 primeiros pavimentos são k×3, os 5 últimos são k/2 e os centrais são iguais a k.

Fonte: autoria própria.

Tabela 12 – Rigidez e amortecimento do solo.

	k_h	k_θ
Rigidez	627929,776 N/m	301,8930964 N/m
	C_h	C_θ
Amortecimento	1425,630836 Ns/m	0,178802093 Ns/m

Fonte: autoria própria.

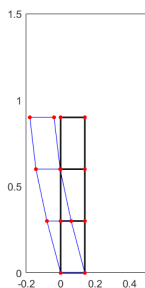
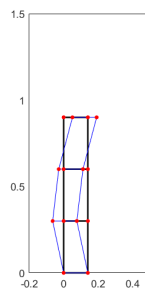
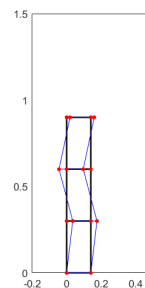
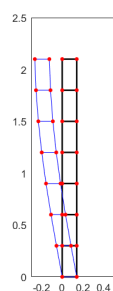
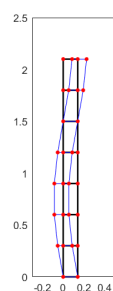
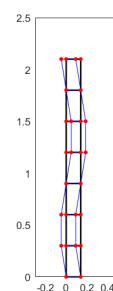
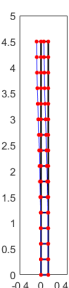
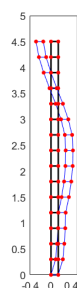
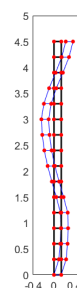
A partir das propriedades dos materiais e da geometria de cada sistema, pelo algoritmo de solução são montadas as matrizes **A**, **B**, **C_y** e **D**. A forma das matrizes foram apresentadas nas equações 3.85, 3.86, 3.87, no capítulo 3. A matriz **D** é zero, pois não tem nenhuma entrada agindo nela.

As respostas obtidas a partir do algoritmo generalizado no EE em termos de deslocamentos relativos à fundação, velocidade e aceleração no domínio do tempo para as três estruturas considerando a excitação sísmica pela base e os efeitos da ISE para os modelos no plano adotando somente o modo de flexão são apresentadas nas figuras 35, 36 e 37 (deslocamento) 38, 39 e 40 (velocidade) 41, 42 e 43 (aceleração), respectivamente.

A Tabela 13 apresenta as respostas das máximas amplitudes das figuras 35 a 43 que são os deslocamentos relativos à fundação, velocidades e acelerações obtidas para as três estruturas.

Ao observar as figuras 35 a 43 nota-se que as maiores amplitudes de todos os pórticos ocorreram no último pavimento de cada estrutura. Se verificar na Figura 27 o intervalo de tempo de 5 a 15 s são os que apresentam maiores amplitudes do terremoto de Northridge (1994), o mesmo se observa nas figuras supracitadas. Além disso, é possível observar através das 3 estruturas que quanto maior o número de pavimentos e mais esbelto, o amortecimento da estrutura é mais lento e as amplitudes são maiores.

Figura 34 – Análise modal das estruturas com 3, 7 e 15 pavimentos.

(a) 1º modo: 6,58 Hz
Esc. = 10x.(b) 2º modo: 18,43 Hz
Esc. = 10x.(c) 3º modo: 26,64 Hz
Esc. = 10x.(d) 1º modo: 3,09 Hz
Esc. = 10x.(e) 2º modo: 9,14 Hz
Esc. = 10x.(f) 3º modo: 14,78 Hz
Esc. = 10x.(g) 1º modo: 0,83 Hz
Esc. = 1x.(h) 2º modo: 2,05 Hz
Esc. = 10x.(i) 3º modo: 2,72 Hz
Esc. = 10x.

Fonte: autoria própria.

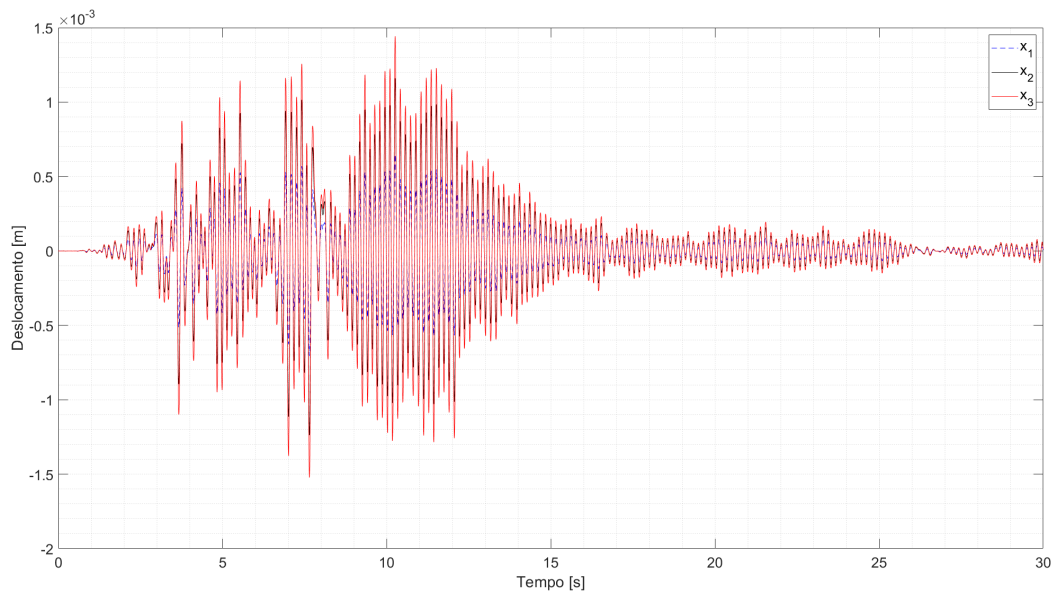
Tabela 13 – Respostas das máximas amplitudes de deslocamento, velocidade e aceleração no domínio do tempo.

	3 pavimentos	7 pavimentos	15 pavimentos
Deslocamento	-0,001523 m	-0,008333 m	0,04247 m
Velocidade	0,05346 m/s	0,1462 m/s	-0,3395 m/s
Aceleração	-2,09 m/s ²	2,914 m/s ²	-3,742 m/s ²

Fonte: autoria própria.

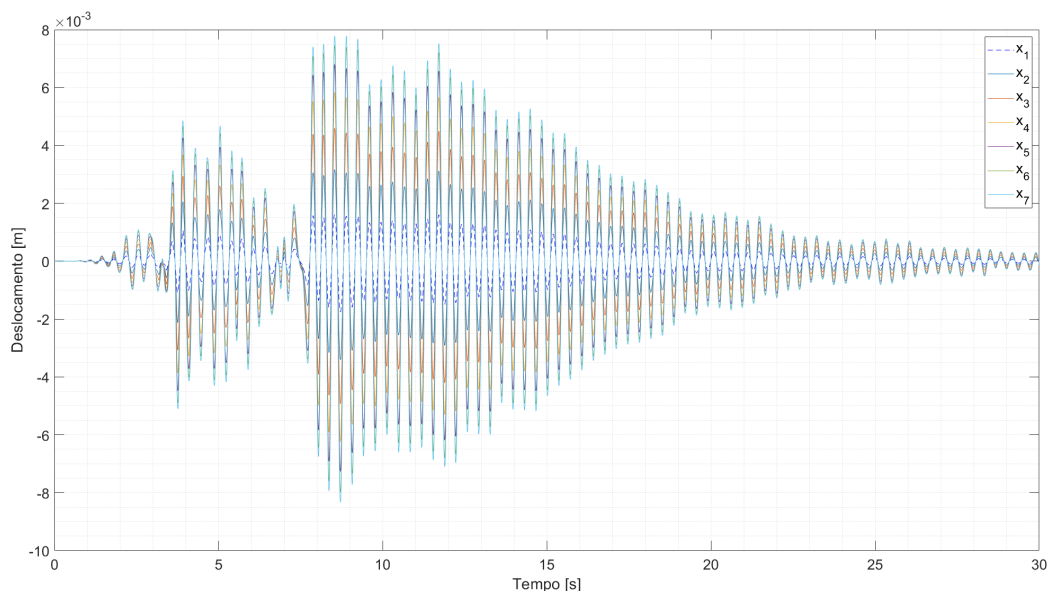
Observa-se na Figura 27 que o PGA do sismo é de -0,932 g no tempo de 7,79 s, quando comparado com as máximas amplitudes das figuras 35 a 43 percebe-se que, os tempos das repostas ficaram próximas do tempo de maior pico do sismo. Um dos efeitos dessa diferença de tempo do registro do sismo até a resposta da estrutura, se

Figura 35 – Resposta no domínio do tempo em termos de deslocamento relativo à fundação considerando 3 pavimentos.



Fonte: autoria própria.

Figura 36 – Resposta no domínio do tempo em termos de deslocamento relativo à fundação considerando 7 pavimentos.

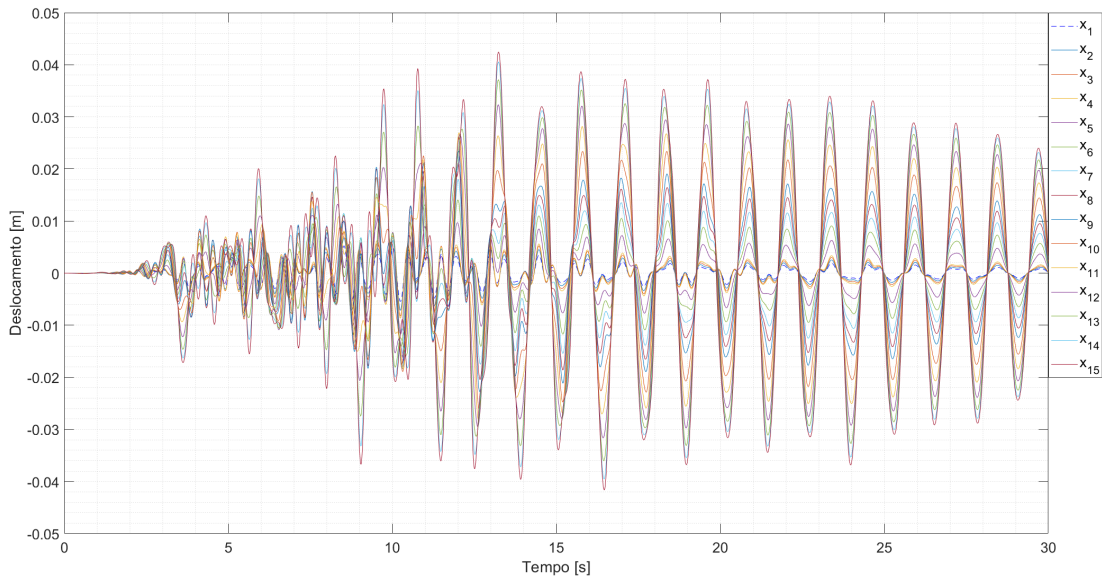


Fonte: autoria própria.

deve ao tempo de reposta da passagem da onda (vibração) pela fundação.

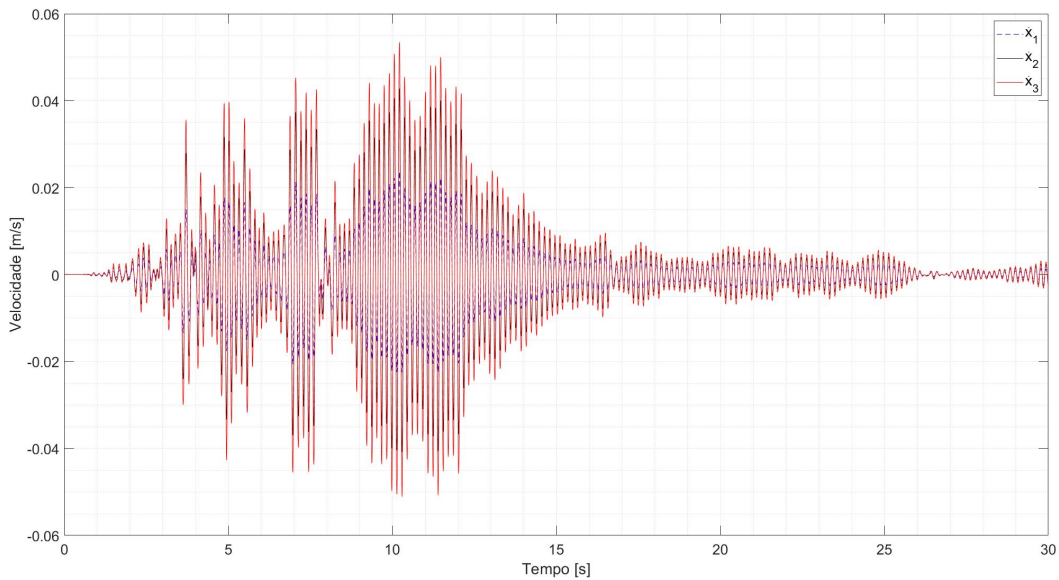
Aplicado a FFT nos resultados obtidos via EE, as amplitudes de vibração em termos de deslocamento relativo à fundação e velocidade no domínio da frequência para as três estruturas são apresentadas nas figuras 44, 45, 46 (deslocamento), 47, 48 e 49 (velocidade), respectivamente.

Figura 37 – Resposta no domínio do tempo em termos de deslocamento relativo à fundação considerando 15 pavimentos.



Fonte: autoria própria.

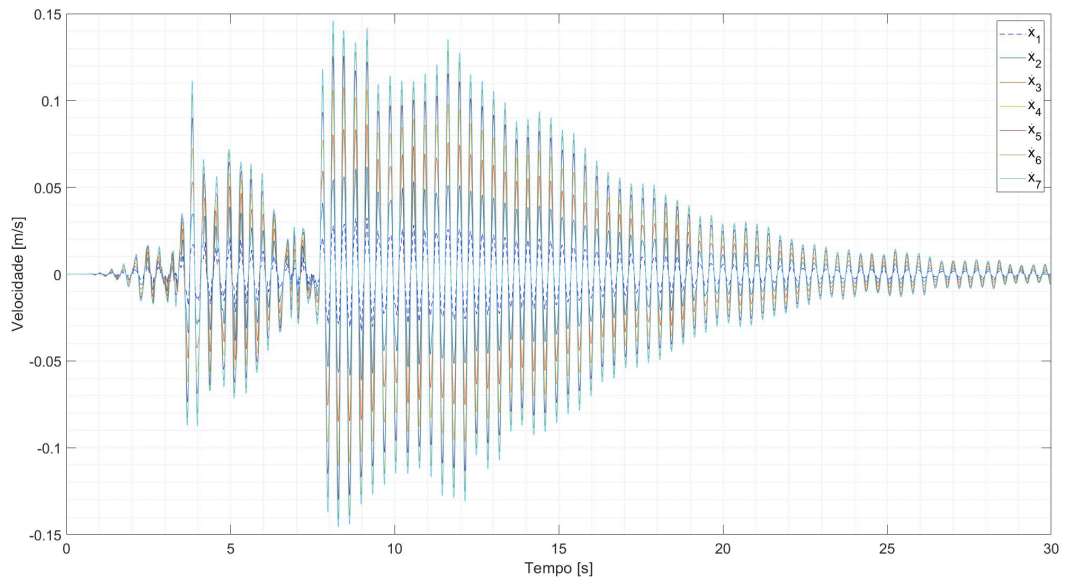
Figura 38 – Resposta no domínio do tempo em termos de velocidade considerando 3 pavimentos.



Fonte: autoria própria.

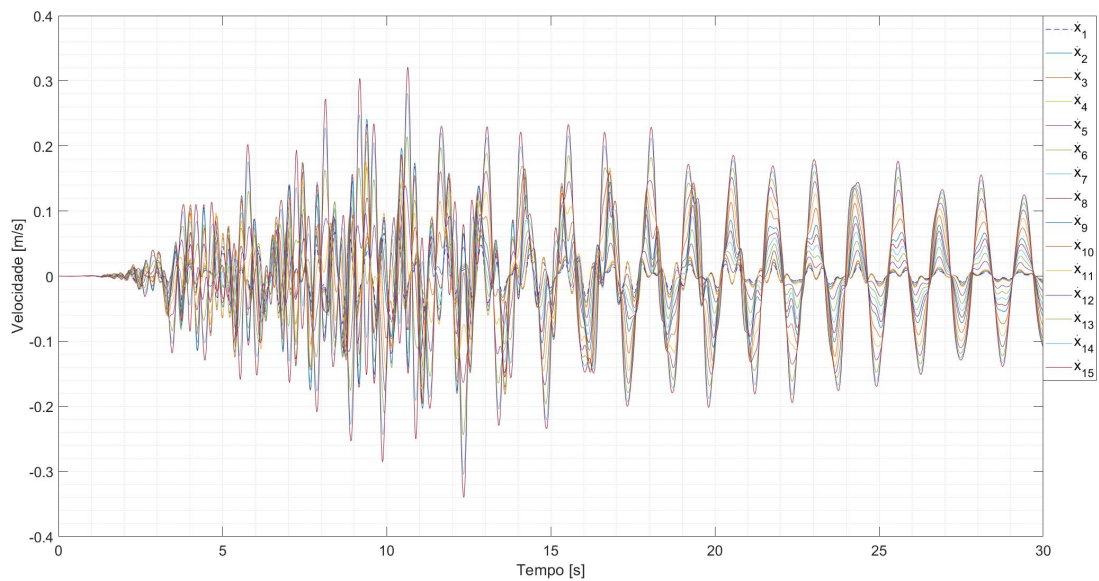
A Tabela 14 contém as máximas amplitudes de vibração considerando o domínio da frequência das figuras 44 a 49. Aqui, as maiores amplitudes também ocorrem todas no último pavimento de cada estrutura e sendo as amplitudes mais significativas no primeiro modo de vibrar. Ao observar nas figuras mencionadas acima, percebe-se que a medida que o número de pavimentos aumenta a ordem de grandeza diminui, ou

Figura 39 – Resposta no domínio do tempo em termos de velocidade considerando 7 pavimentos.



Fonte: autoria própria.

Figura 40 – Resposta no domínio do tempo em termos de velocidade considerando 15 pavimentos.

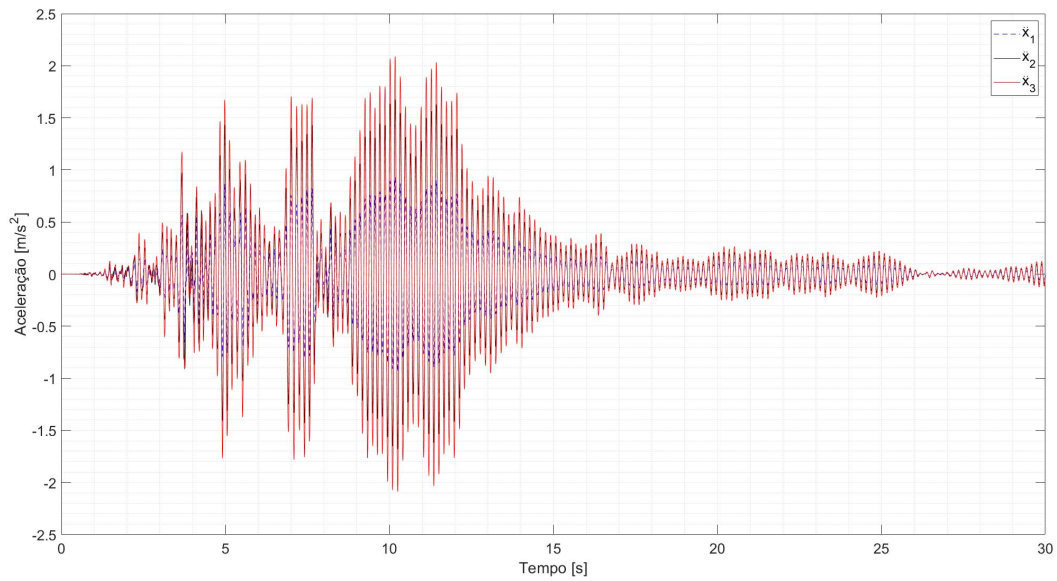


Fonte: autoria própria.

seja, para os modelos apresentados quanto mais altos e esbeltos, maiores são as amplitudes de vibrações.

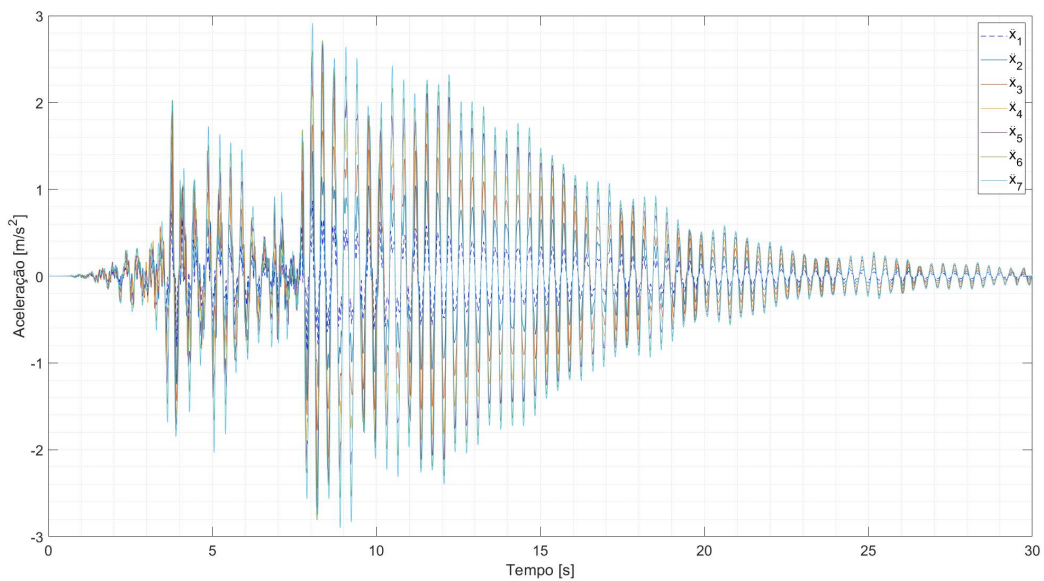
A Tabela 15 apresenta o tempo de processamento que o método de EE levou para calcular cada modelo (3, 7 e 15 pavimentos). Com base nos dados apresentados na Tabela 15, nota-se que, embora a complexidade das matrizes aumentem conforme se eleva o número de graus de liberdade do sistema, o tempo de processamento é

Figura 41 – Resposta no domínio do tempo em termos de aceleração considerando 3 pavimentos.



Fonte: autoria própria.

Figura 42 – Resposta no domínio do tempo em termos de aceleração considerando 7 pavimentos.

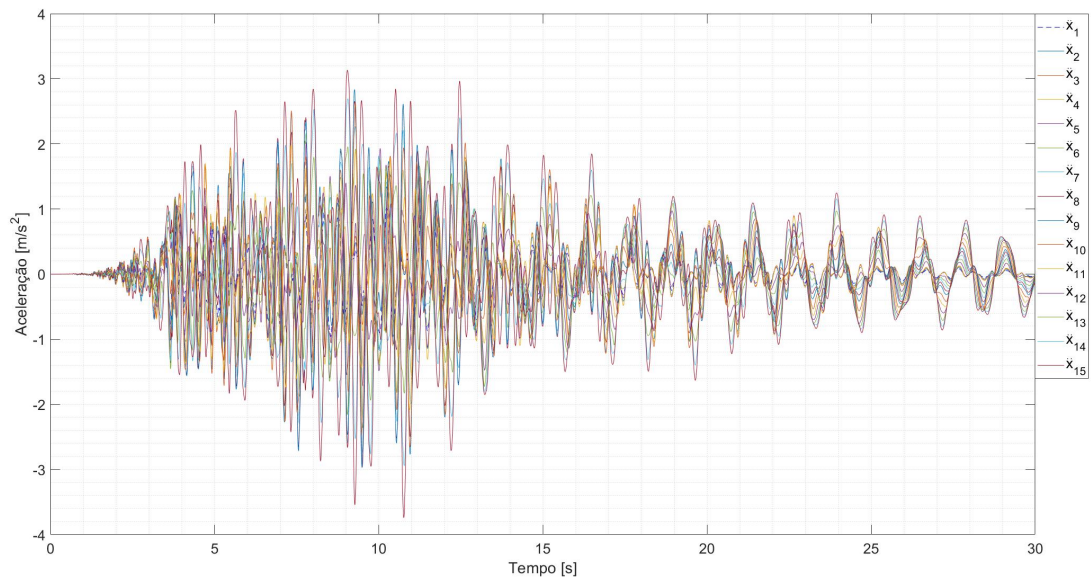


Fonte: autoria própria.

relativamente baixo. Quando analisado o tempo de processamento entre EE e RK4 (Tabela 9), o RK4 levou aproximadamente 7 minutos para calcular uma estrutura com 3 pavimentos sem considerar ISE, aqui o maior tempo de processamento para uma estrutura com 15 pavimentos considerando ISE, o que aumenta a complexidade do modelo, o tempo foi de aproximadamente 40 s.

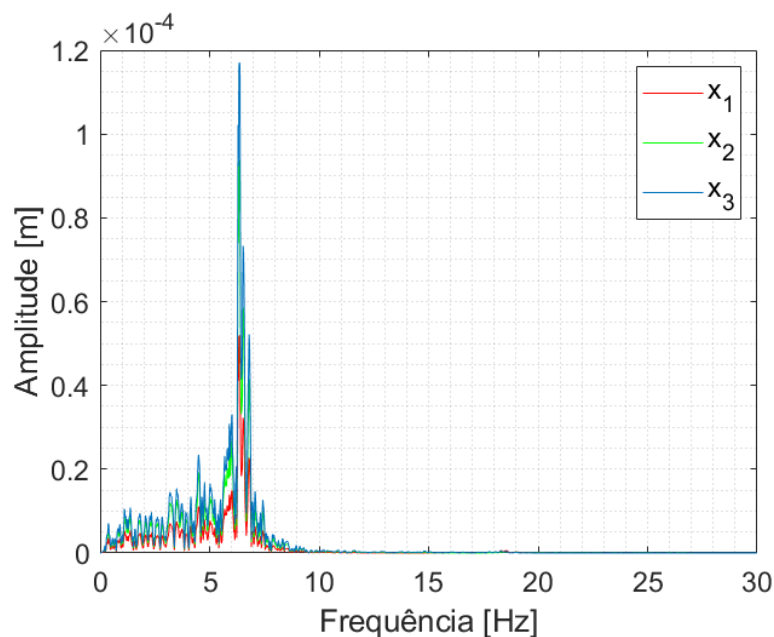
A última análise é feita comparando as respostas em termos de deslocamento e

Figura 43 – Resposta no domínio do tempo em termos de aceleração considerando 15 pavimentos.



Fonte: autoria própria.

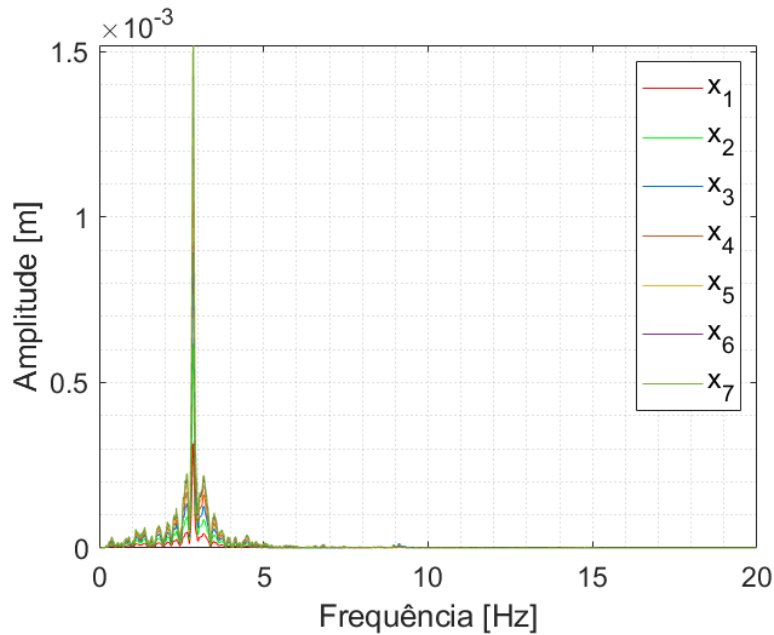
Figura 44 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de deslocamentos relativos à fundação obtidos via EE para uma estrutura com 3 pavimentos.



Fonte: autoria própria.

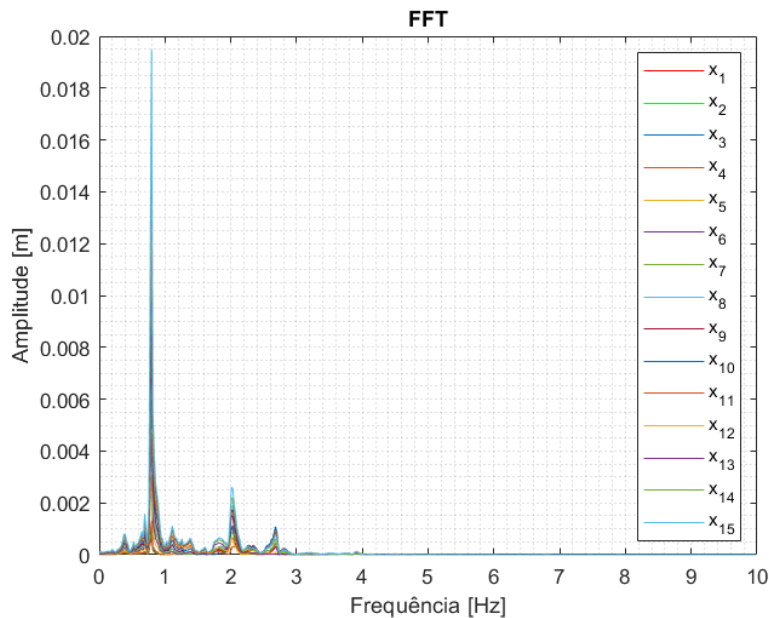
velocidade no domínio do tempo considerando a excitação sísmica e a influência da ISE. As estruturas já foram apresentadas anteriormente com três pavimentos, contudo uma possui acoplamento com o solo (Figura 32a) e a outra não (Figura 25). Nas figuras 50 e 51 apresentam-se os resultados do deslocamento e velocidade, respectivamente, determinados através do algoritmo de EE.

Figura 45 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de deslocamentos relativos à fundação obtidos via EE para uma estrutura com 7 pavimentos.



Fonte: autoria própria.

Figura 46 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de deslocamentos relativos à fundação obtidos via EE para uma estrutura com 15 pavimentos.

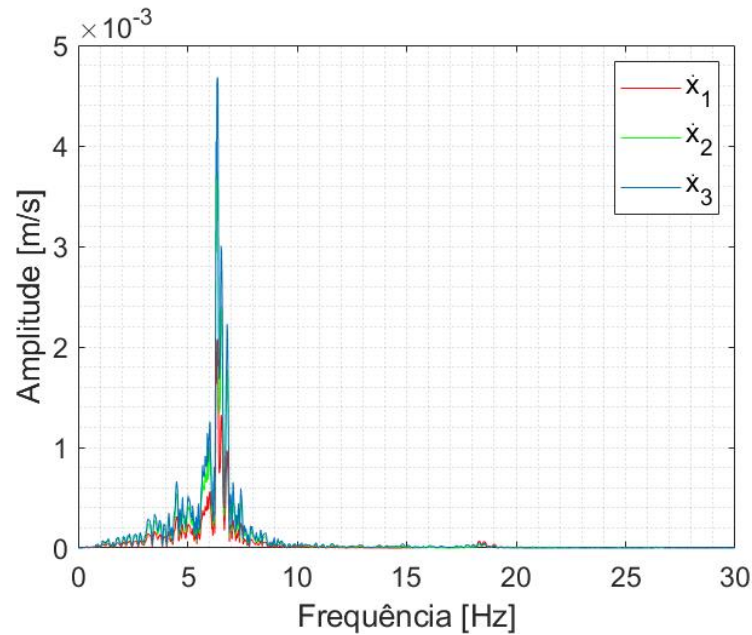


Fonte: autoria própria.

A Tabela 16 apresenta a comparação entre as respostas das máximas amplitudes de deslocamento (Figura 50) e velocidade (Figura 51), no domínio do tempo para as duas estruturas de 3 andares.

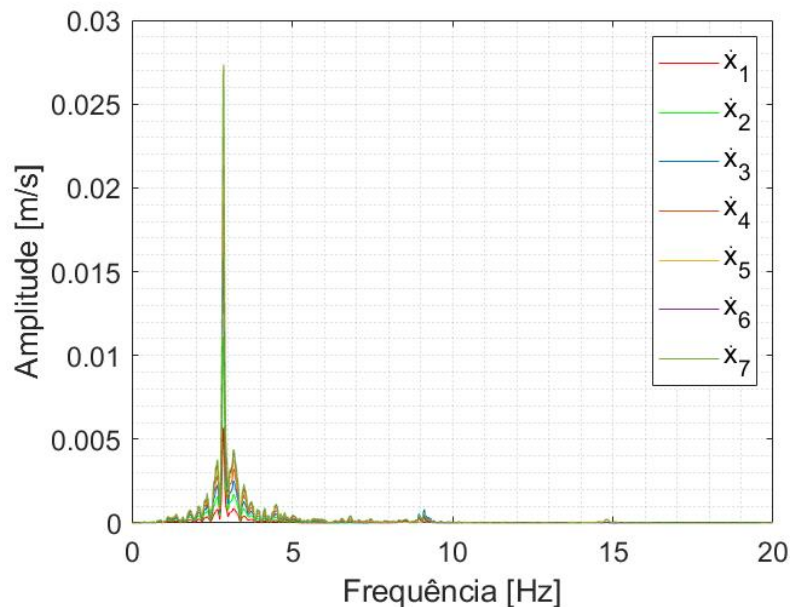
Nota-se na Tabela 16 que, as máximas amplitudes ocorreram em sentidos opostos, um dos motivos de ocorrer isso é devido as matrizes de rigidez e massa dos sistemas

Figura 47 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de velocidade obtidos via EE para uma estrutura com 3 pavimentos.



Fonte: autoria própria.

Figura 48 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de velocidade obtidos via EE para uma estrutura com 7 pavimentos.

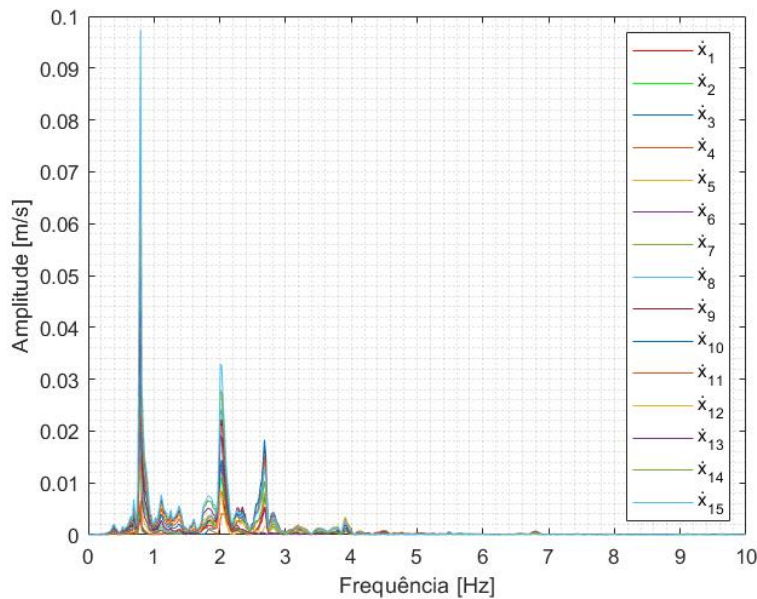


Fonte: autoria própria.

serem diferentes afetando na resposta dos sistemas, conseqüentemente mudam-se as propriedades dinâmicas.

Observa-se nas figuras 50, 51 e na Tabela 16 que, quando considerada a estrutura sem a presença do solo e recebendo a excitação sísmica direta na base, as amplitudes foram maiores. Um dos motivos dessa diferença de amplitudes é que o solo possui

Figura 49 – Resposta no domínio da frequência considerando os resultados de velocidade obtidos via EE para uma estrutura com 15 pavimentos.



Fonte: autoria própria.

Tabela 14 – Respostas das máximas amplitudes de vibração em termos deslocamento e velocidade no domínio da frequência.

	3 pavimentos	7 pavimentos	15 pavimentos
¹ D	0,0001171 m - 6,342 Hz	0,001519 m - 2,867 Hz	0,01947 m - 0,7953 Hz
² V	0,004681 m/s - 6,362 Hz	0,02736 m/s - 2,867 Hz	0,09728 m/s - 0,7953 Hz

¹ D: deslocamento; ² V: velocidade.

Fonte: autoria própria.

Tabela 15 – Tempo de processamento de cada estrutura.

	3 pavimentos	7 pavimentos	15 pavimentos
Tempo	9,623340 s	10,655012 s	38,326293 s

Fonte: autoria própria.

Tabela 16 – Comparação entre as respostas das máximas amplitudes de deslocamento e velocidade com e sem ISE.

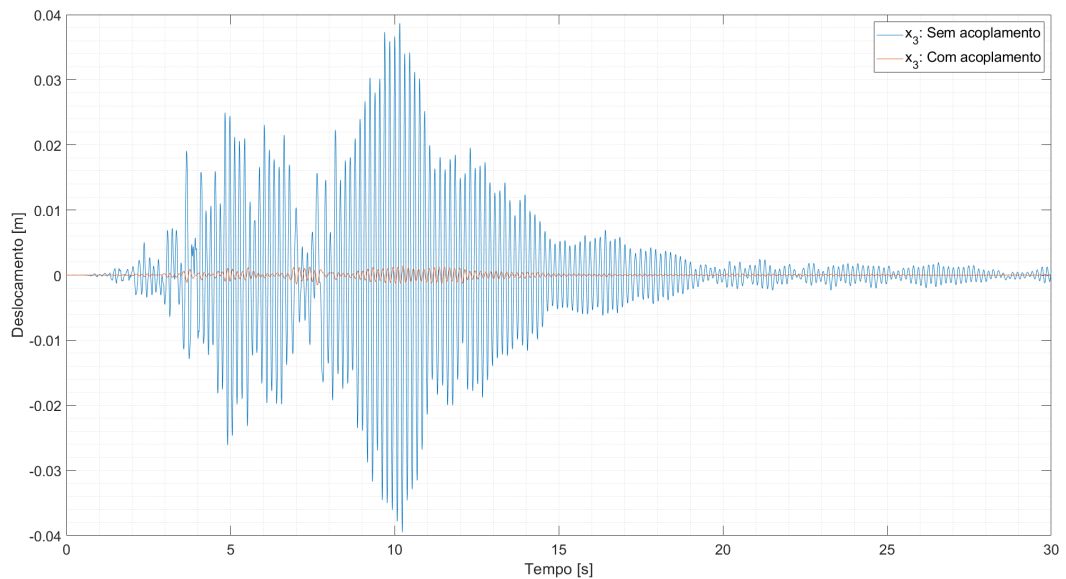
	Sem ISE	Com ISE	Diferença
Deslocamento	0,03959 m	-0,001523 m	0,041113 m
Velocidade	-1,617 m/s	0,05346 m/s	1,67046 m/s

Fonte: autoria própria.

amortecimento. Assim, de acordo com os resultados obtidos, o solo suavizou o impacto direto do sismo, ou seja, ele consegue dissipar parte da energia que irá agir no sistema.

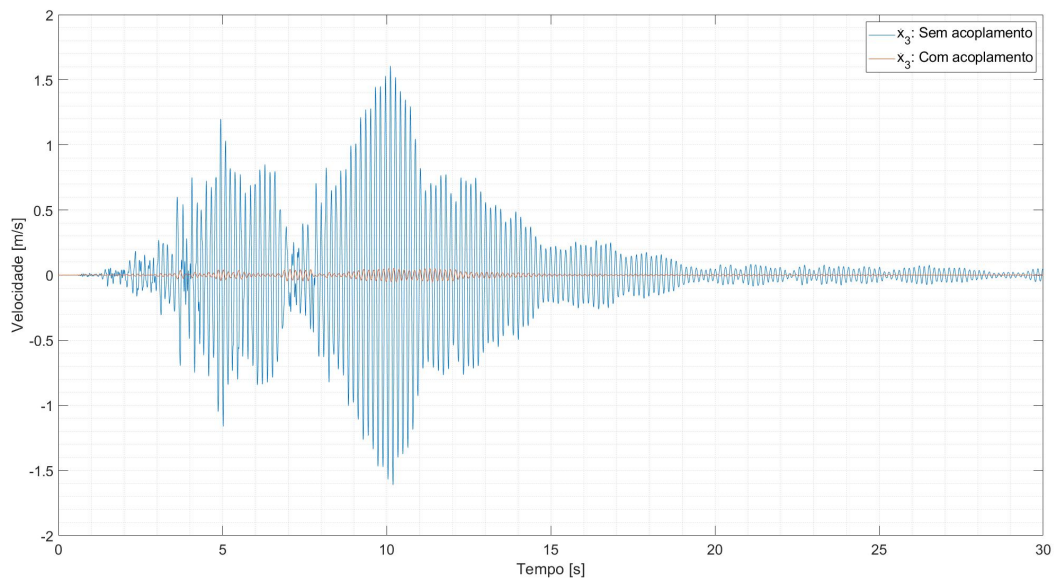
A maioria dos sistemas vibratórios são muito complexas e prever todas as variáveis envolvidas é extremamente difícil. Assim, o modelo via EE para problemas bidimensionais, considerando apenas a flexão foi apresentado de várias maneiras

Figura 50 – Comparação entre as respostas do último pavimento de uma estrutura com 3 andares considerando a ISE e sem ela em termos de deslocamento.



Fonte: autoria própria.

Figura 51 – Comparação entre as respostas do último pavimento de uma estrutura com 3 andares considerando a ISE e sem ela em termos de velocidade.



Fonte: autoria própria.

distintas como uma alternativa rápida de solução e com aplicações que mostraram a viabilidade do uso para problemas envolvendo ISE e excitação sísmica. A maior dificuldade do método é a modelagem, em que o usuário tem que conhecer o problema que está analisando pra poder entrar com as propriedades e matrizes corretamente, porque qualquer equívoco pode provocar imprecisões no resultado final do problema.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para este trabalho foi implementado um algoritmo para a generalização do método EE envolvendo problemas dinâmicos de ISE sob excitação sísmica. O algoritmo foi utilizado para a solução de três estruturas com 3, 7 e 15 pavimentos. A fim de poder verificar o método de solução, o método de EE foi comparado com outras abordagens de soluções e para problemas distintos.

A primeira abordagem do método de EE foi em sistemas com vibração harmônica amortecida com 1 GL. Esse caso foi resolvido analiticamente para se realizar a validação do algoritmo implementado utilizando o método de EE. No sistema com 2 GL notou-se que ao comparar com as combinações do método de RK2 e RK3 ouve uma diferença nas amplitudes. Porém, quando verificado com as combinações dos métodos de RK4 e RK5 as respostas obtiveram praticamente as mesmas amplitudes. Dessa forma, pode-se dizer pelas observações feitas que a solução via EE possui uma boa acurácia.

Quando comparados os métodos de solução de RK4 com EE para uma estrutura metálica com 3 pavimentos recebendo excitação sísmica direta, os resultados apresentaram excelente concordância, pois as repostas ficaram sobrepostas. Além disso, ao confrontar o tempo de processamento de ambos os métodos, a solução via RK4 demandou de mais tempo processamento que o método de EE.

Com base em todas as análises realizadas foi implementado um algoritmo que resolve a equação dinâmica para problemas acoplados envolvendo ISE e excitação sísmica. Foram plotados os resultados para 3 estruturas diferentes e com graus de liberdade diferentes. Os resultados mostraram que para as três estruturas, com 3, 7 e 15 pavimentos, considerando apenas a flexão, o último pavimento de cada estrutura apresentou maior vulnerabilidade, ou seja, maiores amplitudes. Quando aplicada a FFT o modo que apresentou maiores amplitudes de vibração para os três casos foi o primeiro modo e no último pavimento.

Ao comparar as estruturas com 3, 5 e 7 pavimentos nota-se que as respostas tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo diferem uma das outras, um dos motivos que leva a isso é a diferença nas propriedades mecânicas que é provocada pela altura das edificações, a qual depende do número de pavimentos, pois quando foi aumentada a quantidade de andares as matrizes de massa e rigidez sofrem alterações, tornando as estruturas mais flexíveis ou rígidas.

Por fim foi realizada uma comparação entre a estrutura recebendo excitação direta do sismo com a do modelo acoplado com o solo. Nessa análise percebeu-se que a estrutura acoplada com o solo obteve amplitudes mais baixas. De acordo com as pesquisas de Yang, Li e Lu (2019) através dos resultados experimentais e analíticos, os sistemas ISE têm períodos naturais mais longos do que a estrutura de base fixa.

Outro ponto destacado é que para solo mole há efeito de amplificação sob excitações sísmicas menores e efeitos de isolamento sob intensidades de terremoto maiores. Pap e Kollár (2018) mencionam que a deformabilidade do solo influencia na resposta em projetos sísmicos, eles apresentaram que para um solo que possui modos próprios, ou seja, o solo mole delimitado por rocha, quando em ressonância ele tende a amplificar de maneira significativa as cargas do terremoto. Como o terremoto analisado possui intensidade elevada o solo acabou absorvendo parte da energia do terremoto, sendo benéfica para este tipo de análise adotando somente à flexão.

Outro ponto é que se analisar o gráfico do sismo com as respostas das estruturas, percebe-se que as máximas amplitudes ocorreram mínima diferença à frente do PGA do sismo. Isso se deve ao atraso no movimento de entrada nas fundações devido à sua vibração e passagem da onda.

A seguir são listadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Simulações com diferentes sismos e solos;
- Acréscimos de mais graus de liberdade ao sistema, como movimentos de torção;
- Generalização para casos tridimensionais (3D);
- Comparação com a modelagem via elementos finitos e elementos de contorno;
- Acoplar à estrutura absorvedores dinâmicos de vibrações para o estudo da atenuação da vibração estrutural provocada pelo sismo.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas: Procedimento. Rio de Janeiro, 2004. 18 p. Citado na página 47.

_____. **NBR 15421**: Projeto de estruturas resistentes a sismos: Procedimento. Rio de Janeiro, 2006. 26 p. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.

_____. **NBR 6120**: Ações para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 2019. 60 p. Citado na página 84.

BOWLES, J. E. **Foundation Analysis and Design**. New York, NY: McGraw-Hill, 1996. 1175 p. Citado na página 83.

BRASIL, R. M. L. R. F.; SILVA, M. A. d. **Introdução á dinâmica das estruturas para a engenharia civil**. São Paulo: Blucher, 2015. 268 p. ISBN 978-85-212-0910-2. Citado 4 vezes nas páginas 42, 44, 46 e 47.

BUTCHER, J. C. A history of runge-kutta methods. **Applied Numerical Mathematics**, v. 20, p. 247–260, 1996. Citado na página 26.

BUTCHER, J. C.; WANNER, G. Runge-kutta methods: Some historical notes. **Applied Numerical Mathematics**, v. 22, p. 113–151, 1996. Citado na página 26.

BYBORDIANI, M.; ARICI, Y. Structure-soil-structure interaction of adjacent buildings subjected to seismic loading. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 47, n. 7, p. 731–748, 2018. Citado na página 25.

CARBONARI, S. et al. A lumped parameter model for time-domain inertial soil-structure interaction analysis of structures on pile foundations. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 48, n. 11, p. 2147–2171, 2019. Citado na página 25.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Numerical methods for engineers**. 6. ed. New York: McGraw-Hill. Inc., 2010. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 73.

CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. 3. ed. New York: Oxford University Press, Inc., 1998. 350 p. ISBN 0-19-511777-8. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 59.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Loading**. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 2012. 992 p. Citado 6 vezes nas páginas 25, 26, 29, 30, 37 e 79.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structure**. Berkeley, CA 94704, USA: Computers & Structures, Inc., 2003. 752 p. Citado 5 vezes nas páginas 26, 35, 36, 44 e 45.

COMMANDEUR, J. J. F.; KOOPMAN, S. J.; OOMS, M. Statistical software for state space methods. **Journal of Statistical Software**, v. 41, n. 1, p. 1–18, 2011. Citado na página 26.

DATTA, T. K. **Seismic analysis of structures**. 2 Clementi Loop, #02-01, Singapore 129809: John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 2010. 454 p. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31 e 32.

DURBIN, J.; KOOPMAN, S. J. **Time series analysis by State Space Methods**. United Kingdom: Oxford University Press, 2012. 346 p. ISBN 978-0-19-964117-8. Citado na página 41.

FILHO, F. F. C. **Algoritmos numéricos**. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2007. Citado na página 41.

FITZGERALD, B.; BASU, B. Structural control of wind turbines with soil structure interaction included. **Engineering Structures**, v. 111, p. 131–151, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Porto Alegre: Bookman, 2008. 479 p. ISBN 978-85-7780-205-0. Citado 5 vezes nas páginas 25, 40, 54, 55 e 73.

GONG, M. et al. State space functional principal component analysis to identify spatiotemporal patterns in remote sensing lake water quality. **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, Springer Berlin Heidelberg, 2021. Citado na página 41.

GREZELLE, P. . et al. Simulação numérica de uma estrutura tridimensional considerando a interação solo-estrutura. In: **CILAMCE 2020, Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC**. Foz do Iguaçu/PR, Brazil: [s.n.], 2020. p. 1–7. Citado na página 26.

GUO, J. et al. A dynamic state-space model for predicting the thermal performance of ventilated electric heating mortar blocks integrated with phase change material. **Energy and Buildings**, v. 244, p. 111010, 2021. Citado na página 41.

HANKS, T. C.; KANAMORI, H. A moment magnitude scale. **Journal of Geophysical Research: Solid Earth**, v. 84, n. B5, p. 2348–2350, 1979. Citado na página 30.

HARTE, M.; BASU, B.; NIELSEN, S. R. Dynamic analysis of wind turbines including soil-structure interaction. **Engineering Structures**, v. 45, p. 509–518, 2012. Citado na página 34.

HOKMABADI, A. S.; FATAHI, B. Influence of Foundation Type on Seismic Performance of Buildings Considering Soil-Structure Interaction. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 16, n. 8, p. 1–29, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 34.

HUTCHINSON, C. E. The kalman filter applied to aerospace and electronic systems. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, AES-20, n. 4, p. 500–504, 1984. Citado na página 26.

INMAN, D. J. **Vibrações mecânicas**. Rio de Janeiro: GEN LTC, 2018. 969 p. ISBN 978-85-3528-889-6. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.

KANAMORI, H. The energy release in great earthquakes. **Journal of Geophysical Research (1896-1977)**, v. 82, n. 20, p. 2981–2987, 1977. Citado na página 30.

KAUSEL, E. Early history of soil–structure interaction. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 30, n. 9, p. 822 – 832, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 34.

KAUSEL, E. et al. The spring method for embedded foundations. **Nuclear Engineering and Design**, v. 48, n. 2-3, p. 377–392, 1978. Citado na página 25.

KHAKPOUR, M.; HAJIALILUE BONAB, M. Soil-Structure-Interaction using Cone Model in Time Domain for Horizontal and Vertical Motions in Layered Half Space. **Journal of Earthquake Engineering**, Taylor and Francis Ltd., v. 24, n. 4, p. 529–554, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.

KHAZAELI, S.; NGUYEN, L. H.; GOULET, J. A. Anomaly detection using state-space models and reinforcement learning. **Structural Control and Health Monitoring**, v. 28, n. 6, p. 1–23, 2021. Citado na página 41.

KRISTENSEN, L. M. **State Space Methods for Coloured Petri Nets**. Tese (Doutorado) — (Ph.D. Degree) — Faculty of Science of the University of Aarhus, Aarhus, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.

LI, J. et al. Vibration analysis of third generation nuclear power plant considering soil-structure-interaction effect under the impact of large commercial aircraft. **Structural Design of Tall and Special Buildings**, p. 1–25, 2020. Citado na página 25.

LI, P. et al. Numerical analysis of a shaking table test on dynamic structure-soil-structure interaction under earthquake excitations. **Structural Design of Tall and Special Buildings**, v. 26, n. 15, p. 1–13, 2017. Citado na página 25.

LIMA, S. d. S.; SANTOS, S. H. d. C. **Análise dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008. 171 p. ISBN 978-85-7393-584-4. Citado 4 vezes nas páginas 42, 43, 44 e 46.

LU, X. et al. Computer simulation of the dynamic layered soil-pile-structure interaction system. **Canadian Geotechnical Journal**, v. 42, n. 3, p. 742–751, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 34.

MATLAB[®]. **v. R2021a. The Language of Technical Computing**. 2021. Mathworks Inc. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 79.

MONTGOMERY, D. C.; JENNINGS, C. I.; KULAHCI, M. **Introduction to Time Series Analysis and Forecasting**. New Jersey: John Wiley & Sons. Inc., 2008. 445 p. ISBN 978-0-4 71-65397-4. Citado na página 41.

MULLIKEN, J. S.; KARABALIS, D. L. Discrete model for dynamic through-the-soil coupling of 3-D foundations and structures. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 27, n. 7, p. 687–710, 1998. Citado na página 34.

MYLONAKIS, G.; NIKOLAOU, S.; GAZETAS, G. Footings under seismic loading: Analysis and design issues with emphasis on bridge foundations. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 26, n. 9, p. 824–853, 2006. Citado na página 33.

NAZARIMOFRAD, E.; FARAHANI, S.; ZAHRAI, S. M. Multiobjective optimal placement of active tendons to control irregular multistory buildings with soil–structure interaction. **Structural Design of Tall and Special Buildings**, v. 28, n. 4, p. 1–18, 2019. Citado na página 26.

NIST GCR 12-917-21. **Soil Structure Interaction for Building Structures**. [S.l.]: NEHRP Consultants Joint Venture. A partnership of the Applied Technology Council and the Consortium of Universities for Research in Earthquake Engineering, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 36.

OGATA, K. **Modern Control Engineering**. New Jersey: Prentice Hall, 2010. 894 p. ISBN 978-0-13-615673-4. Citado 3 vezes nas páginas 26, 41 e 56.

PAP, Z. B.; KOLLÁR, L. P. Effect of resonance in soil-structure interaction for finite soil layers. **Periodica Polytechnica Civil Engineering**, v. 62, n. 3, p. 1–9, 2018. Citado na página 98.

Peer Ground Motion Database. **Pacific Earthquake Engineering Research Center (PEER)**. 2013. Disponível em: <<https://ngawest2.berkeley.edu/site>>. Acesso em: 1 aug. 2020. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 77.

PÉREZ PEÑA, L. A. **Resposta dinâmica de edificações adjacentes acopladas: considerações sobre a interação solo – estrutura**. Tese (Doutorado) — (Doutorado em Estruturas e Construção Civil)—Universidade de Brasília, Brasília, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 26, 35, 37, 38 e 61.

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. 424 p. ISBN 978-85-7605-200-5. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 46.

RICHTER, C. F. An instrumental earthquake magnitude scale*. **Bulletin of the Seismological Society of America**, v. 25, n. 1, p. 1–32, 01 1935. Citado na página 29.

ROWELL, D. **State-space representation of LTI systems**. 2002. MIT, Cambridge. Retrieved from <http://web.mit.edu/214/www/Handouts/StateSpace.pdf>. Accessed 15 Jun 2021. Citado na página 57.

SCHITTENHELM, R. S.; WANG, Z.; RINDERKNECHT, S. Observer design for rotating shafts excited by unbalance. **Woodhead Publishing Limited**, p. 357–366, 2012. Citado na página 42.

SHEN, C.; QIAN, D. Dynamic characteristics and seismic response of frame–core tube structures, considering soil–structure interactions. **Structural Design of Tall and Special Buildings**, v. 28, n. 3, p. 1–20, 2019. Citado na página 25.

SHULTZ, D. G.; MELSA, J. L. **State functions and linear control systems**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, Inc., 1967. 435 p. Citado na página 57.

SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S. **Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples**. [S.l.]: Springer, 2017. 562 p. ISBN 978-3-319-52452-8. Citado na página 41.

SIEBERG, A. "**Erdbebenkunde**". Jena: Gustav Fischer, 1923. 102-104 p. Citado na página 30.

SOTIRIADIS, D. et al. Analytical expressions relating free-field and foundation ground motions in buildings with basement, considering soil-structure interaction. **Engineering Structures**, v. 216, p. 110757, 2020. Citado na página 33.

SUNNY, N. A.; MATHAI, A. Soil Structure Interaction Analysis of Multi Storey Building. **IJSTE-International Journal of Science Technology & Engineering**, v. 3, n. 11, p. 67–70, 2017. Citado na página 33.

TEIXEIRA, W. et al. **Decifrando a Terra**. São Paulo: Oficina de Textos : USP, 2000., 2003. 558 p. Citado 4 vezes nas páginas 30, 31, 32 e 33.

TODD, D. et al. **1994 Northridge Earthquake: Performance of Structures, Lifelines and Fire Protection Systems (NIST SP 862)**. Gaithersburg, MD, EUA, 1994. 454 p. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.

VELETSOS, A. S.; VERBIČ, B. Vibration of viscoelastic foundations. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 2, n. 1, p. 87–102, 1973. Citado na página 34.

WEI, W. W. S. **Time series analysis: univariate and multivariate methods**. 2. ed. New York: Pearson Education, Inc., 2006. 634 p. ISBN 0-321-32216-9. Citado na página 41.

WILLIAMS, R. L. u.; LAWRENCE, D. A. **Linear state-space control systems**. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2007. 473 p. ISBN 0-471-73555-8. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 60.

WOLF, J. P. **Dynamic soil-structure interaction**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1985. 466 p. Citado 8 vezes nas páginas 25, 26, 29, 34, 35, 36, 37 e 38.

_____. **Soil-Structure-Interaction Analysis in Time Domain**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1988a. 446 p. Citado 7 vezes nas páginas 25, 26, 34, 35, 37, 38 e 39.

_____. **Foundation vibration analysis using simple physical models**. Englewood Cliffs (NJ): PTR Prentice Hall, 1994. 464 p. Citado 4 vezes nas páginas 25, 34, 35 e 39.

_____. Spring-dashpot-mass models for foundation vibrations. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 26, n. 9, p. 931–949, 1997. Citado na página 37.

_____. Simple physical models for foundation dynamics. **Developments in Geotechnical Engineering**, v. 83, p. 1–70, 1998b. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 37.

WOOD, H. O.; NEUMANN, F. Modified Mercalli intensity scale of 1931. **Bulletin of the Seismological Society of America**, v. 21, n. 4, p. 277–283, 12 1931. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

YANG, J.; LI, P.; LU, Z. Large-scale shaking table test on pile-soil-structure interaction on soft soils. **Structural Design of Tall and Special Buildings**, v. 28, n. 18, p. 1–19, 2019. Citado na página 97.