

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL  
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA CIVIL**

**JULIANA PEREIRA REGO REMOR**

**ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UMA PONTE  
FERROVIÁRIA CONSIDERANDO EFEITOS DO LASTRO E DE  
IRREGULARIDADES DA VIA**

**DISSERTAÇÃO**

**CURITIBA**

**2017**

**JULIANA PEREIRA REGO REMOR**

**ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UMA PONTE  
FERROVIÁRIA CONSIDERANDO EFEITOS DO LASTRO E DE  
IRREGULARIDADES DA VIA**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia do Programa De Pós-Graduação Em Engenharia Civil (PPGEC), da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Ph.D João Elias Abdalla Filho

Coorientador: Prof. Dr. Fernando Luiz Martinechen Beghetto

**CURITIBA**

**2017**

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**

---

R389e Remor, Juliana Pereira Rego  
2017      Estudo do comportamento dinâmico de uma ponte ferroviária  
considerando efeitos do lastro e de irregularidades da via /  
Juliana Pereira Rego Remor.-- 2017.  
114 f.: il.; 2017.

    Texto em português, com resumo em inglês.  
    Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica  
Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Civil, Curitiba, 2017.  
    Bibliografia: p. 107-114.

    1. Engenharia civil - Dissertações. 2. Construção  
civil. 3. Dinâmica estrutural. 4. Dinâmica - Análise.  
5. Pontes ferroviárias. 6. Ferrovias. 7. Método dos  
elementos finitos. I. Abdala Filho, João Elias. II. Beghetto,  
Fernando Luiz Martinechen. III. Universidade Tecnológica  
Federal do Paraná - Programa de Pós-graduação em Engenharia  
Civil. IV. Título.

CDD: Ed. 22 -- 624

---

**Biblioteca Ecoville da UTFPR, Câmpus Curitiba**



Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

## TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº \_\_\_\_\_

A Dissertação de Mestrado intitulada ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UMA PONTE FERROVIÁRIA CONSIDERANDO EFEITOS DO LASTRO E DE IRREGULARIDADES DA VIA, defendida em sessão pública pelo(a) candidato(a) Juliana Pereira Rego Remor, no dia 05 de julho de 2017, foi julgada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração Construção Civil, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). João Elias Abdalla Filho - Presidente - UTFPR

Prof(a). Dr(a). Roberto Dalledone Machado - UFPR

Prof(a). Dr(a). Rogério Francisco Küster Puppi - UTFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 05 de julho de 2017.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador Prof. João Elias Abdalla Filho, pela sabedoria com que me guiou nesta trajetória.

Ao Prof. Rogério Francisco Küster Puppi e ao Prof. Fernando Luiz M. Beghetto pelo apoio durante toda a pesquisa.

Ao meu marido, Gustavo Takarada, pelo apoio e compreensão.

Às minhas amigas, Amanda Brandenburg Pivatto e Janina Mosci pela ajuda e amizade.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha família, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa financeira.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

O que podemos experimentar de mais belo é o mistério. É a fonte de toda a arte e ciência verdadeira. Aquele que for alheio a esta emoção, aquele que não se detenha a admirar as coisas, sentindo-se cheio de surpresa, é como se estivesse morto; seu espírito e seus olhos são fechados. (EINSTEIN, Albert)

## RESUMO

REMOR, Juliana P. R. **Estudo do comportamento dinâmico de uma ponte ferroviária considerando efeitos do lastro e de irregularidades da via.** 2017. 114f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017.

Esta dissertação tem como proposta investigar o comportamento dinâmico de uma ponte ferroviária sob cargas móveis por meio do método dos elementos finitos. A análise é feita considerando a interação da via com a ponte e o veículo de forma desacoplada. O modelo do veículo utilizado possui 9 graus de liberdade composto de uma associação de corpos rígidos conectados via sistemas de suspensão. As respostas dinâmicas do veículo são obtidas devido à velocidade e irregularidades da via, que são consideradas como funções senoidais harmônicas e como funções randômicas, estas duas abordagens são comparadas. Em seguida, as forças do veículo são aplicadas através das rodas do veículo no modelo de interação via-estrutura. O comportamento dinâmico do modelo via-estrutura é estudado integrando o trilho, lastro e ponte. Os trilhos são modelados como elementos superiores de pórtico e a ponte como elementos inferiores de pórtico. Os dormentes e o lastro são modelados usando a fundação de *Winkler* para a translação. O método de *Rayleigh* é usado para calcular o amortecimento estrutural. As equações de movimento de ambos os sistemas são integradas usando o método de *Newmark*. A influência das irregularidades da via é analisada.

**Palavras-chave:** Análise dinâmica, Ponte ferroviária, Ferrovias, Elementos finitos, Interação veículo-via-estrutura, Irregularidade randômica.

## ABSTRACT

REMOR, Juliana P. R. **Study of the dynamic behavior of a railway bridge considering the effects of ballast and of track irregularities.** 2017. 114pp. Thesis (Master in Civil Engineer) - Federal Technology University - Parana. Curitiba, 2017.

This master's thesis aims to investigate the dynamic behavior of a railway bridge under moving loads using the finite element method. The analysis is made considering an uncoupled vehicle-bridge-track interaction. The vehicle studied is a 9 degrees-of-freedom model composed of an association of rigid bodies connected via suspension systems. The dynamic responses of the vehicle are obtained due to the speed and tracks irregularities, which are considered as both harmonic sinusoidal functions and random functions. After that, the vehicle forces are applied on the railway track-bridge model through the vehicle wheels. The dynamic behavior of the railway track-bridge model is studied integrating the rail, ballast, and bridge. The rails are modeled as an elastic Euler-Bernoulli upper beam and the bridge as an Euler-Bernoulli lower beam. The sleepers and ballast are modeled using Winkler foundation for translation. The Rayleigh method is used to define structural damping. The equations of motion of both systems are integrated using Newmark's method. Track irregularities influence are analyzed.

**Keywords:** Railways, Vehicle-Track-Bridge Interaction, Finite Element Analysis, Structural Dynamics, Railways bridge, Random track irregularities.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Modelo da Ponte com lastro.....	20
Figura 2 – Resultados parâmetros de rigidez.....	22
Figura 3 – Comparação propriedades de rigidez .....	22
Figura 4 – Via ferroviária sem lastro.....	25
Figura 5 – Amortecimento de trilhos (redução de ruídos) .....	26
Figura 6 – Quatro tipos de irregularidades da via.....	27
Figura 7 – Variação geométrica da via.....	29
Figura 8 – Percentual de classes de via nos Estados Unidos.....	31
Figura 9 – Viga vão L .....	33
Figura 10 – Fluxograma para verificação da necessidade de análise dinâmica.....	35
Figura 11 – Fluxograma para verificação da necessidade de análise dinâmica.....	39
Figura 12 – Seção transversal da ponte ferroviária.....	49
Figura 13 – 1/2 Planta da ponte ferroviária .....	49
Figura 14 – Corte A-A da ponte ferroviária.....	50
Figura 15 – Vista 3D.....	50
Figura 16 – Seção de cálculo elemento finito apoios .....	51
Figura 17 – Seção de cálculo elemento finito central .....	51
Figura 18 – Vista 2D - Elementos finitos ponte ferroviária .....	53
Figura 19 – Locação elementos finitos ponte ferroviária .....	54
Figura 20 – Trilho TR-68 .....	55
Figura 21 – Amortecimento de <i>Rayleigh</i> .....	59
Figura 22 – Graus de liberdade do elemento finito.....	62
Figura 23 – Idealização estrutural do veículo .....	63
Figura 24 – Graus de liberdade do modelo do veículo ferroviário.....	64
Figura 25 – Disposição sistema mola-amortecedor das suspensões.....	64
Figura 26 – Vista superior – Elemento finito da ponte e pontos de contato do veículo .....	65
Figura 27 – Deslocamentos das suspensões.....	66
Figura 28 – Método de <i>Winkler</i> .....	71
Figura 29 – Interação via-estrutura .....	72
Figura 30 – Interação veículo-via-estrutura.....	78
Figura 31 – Irregularidades verticais da via.....	80
Figura 32 – Fluxograma – interação desacoplada via-ponte-veículo .....	85
Figura 33 – Influência da irregularidade da via no deslocamento vertical.....	91
Figura 34 – Aproximação irregularidade randômica da irregularidade harmônica no deslocamento vertical.....	92
Figura 35 – Influência da rigidez do lastro no deslocamento vertical para irregularidade harmônica.....	93

Figura 36 – Influência da rigidez do lastro no deslocamento vertical para irregularidade randômica.....	94
Figura 37 – Influência da rigidez do lastro na aceleração para irregularidade randômica.....	95
Figura 38 – Influência da velocidade na irregularidade randômica .....	97
Figura 39 – Influência do amortecimento do lastro no deslocamento vertical considerando irregularidade harmônica .....	98
Figura 40 – Influência do amortecimento do lastro no deslocamento considerando irregularidade randômica.....	99
Figura 41 – Influência do amortecimento do lastro na velocidade considerando irregularidade randômica.....	99
Figura 42 – Influência do amortecimento do lastro na velocidade considerando irregularidade harmônica.....	100
Figura 43 – Gráfico de velocidade do trem x interações x deslocamento .....	102
Figura 44 – Gráfico de velocidade do trem x interações x velocidade .....	102
Figura 45 – Gráfico de velocidade do trem x interações x aceleração .....	103
Figura 46 – Influência das classes de qualidade (FRA) no deslocamento vertical..	104

## LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÔNIMOS

### LISTA DE SIMBOLOS

#### ESCALARES

$A$	Parâmetro de irregularidade vertical	$m^2m/rad$
$A_a$	Área do elemento	$m^2$
$A_B$	Área da ponte	$m^2$
$A_n$	Parcelas da inversa da transformada de Fourier	-
$A_R$	Área do trilho	$m^2$
$A_{RO}$	Amplitudes de onda senoidal onde transitam as rodas ímpares	$m$
$A_{RE}$	Amplitudes de onda senoidal onde transitam as rodas pares	$m$
$A_v$	Parâmetro vertical de irregularidade da via	$m$
$a_0 e a_1$	Coefficientes de proporcionalidade	-
$B_n$	Parcelas da inversa da transformada de Fourier	-
$c_{BL}$	Valor discreto do amortecimento viscoso do lastro	$Ns/m$
$C_n$	Parcelas da inversa da transformada de Fourier	-
$C_P$	Amortecimento da suspensão primária	$Ns/m$
$C_T$	Amortecimento do trem	$Ns/m$
$E$	Módulo de elasticidade do concreto	$N/m^2$
$E_B$	Módulo de elasticidade da ponte	$N/m^2$
$E_{cs}$	Módulo de elasticidade secante do concreto, também denominado módulo de deformação secante do concreto.	$N/m^2$
$E_R$	Módulo de elasticidade do trilho	$N/m^2$
$f(x, \hat{t})$	Carga no ponto $x$ e tempo $t$ por unidade de comprimento da viga	$N/m$
$f$	Frequência	$Hz$
$f_{ck}$	Resistência característica à compressão do concreto aos 28 dias	$MPa$
$I$	Momento de Inércia	$m^4$
$I_a$	Momento de Inércia do Elemento (ponte)	$m^4$
$I_B$	Momento de inércia da ponte	$m^4$

$I_R$	Momento de inércia do trilho	$m^4$
$k$	Coeficiente de irregularidade vertical	-
$k_{BL}$	Valor discreto da rigidez do lastro	N/m
$k_P$	Rigidez da suspensão primária	N/m
$k_S$	Rigidez da suspensão secundária	N/m
$L$	Comprimento do elemento	m
$L_e$	Comprimento do elemento	m
$L_r$	Comprimento de onda devido a irregularidade	m
$L_{r_{max}}$	Maior limite do comprimento de onda do intervalo da função PSD	m
$L_{r_{min}}$	Menor limite do comprimento de onda do intervalo da função PSD	m
$l_W$	Comprimento da onda senoidal	m
$m$	Massa	kg
$m_B$	Valor discreto da massa da ponte	kg
$m_{BL}$	Valor discreto da massa do lastro	kg
$m_{CB}$	Massa do vagão	kg
$m_{F,RB}$	Massa dos truques (traseiro (F) ou dianteiro (R))	kg
$m_R$	Valor discreto da massa do trilho	kg
$n_0$	Primeira frequência natural de flexão da ponte	Hz
$n_T$	Primeira frequência natural de torção da ponte	Hz
$N$	Carga axial	N
$N_r$	Número total de incremento de frequência	-
$P$	Carga pontual	N
$q$	Carga distribuída	N/m
$r(x)$	Irregularidade vertical da via	m
$r_c(x)$	Irregularidade em superelevação	m
$r_h(x)$	Irregularidade no alinhamento	m
$r_v(x)$	Irregularidade na elevação	m
$S_{v,a}$	Função PSD para irregularidades devido a elevação e alinhamento da via	m.m/rad
$S_c$	Função PSD para irregularidades devido a superelevação	m.m/rad
$t$	Tempo	s
$T$	Período	s
$v$	Velocidade	m/s
$V$	Velocidade máxima da via	km/h
$\alpha_n$	Ângulo de fase uniformemente distribuídos entre 0 e $2\pi$	rad

$\beta_n$	Ângulo de fase uniformemente distribuídos entre 0 e $2\pi$	rad
$\Delta\Omega$	Incremento de frequência	rad
$\gamma_n$	Ângulo de fase uniformemente distribuídos entre 0 e $2\pi$	rad
$\xi$	Razão de amortecimento	%
$\rho$	Massa por unidade de comprimento	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_e$	Massa do elemento por unidade de comprimento	kg/m <sup>3</sup>
$\varphi$	Ângulo de fase uniformemente distribuídos entre 0 e $2\pi$	rad
$\omega$	Frequência circular de amortecimento viscoso	rad/s
$\omega_i$ e $\omega_j$	Frequências dos modos $i$ e $j$ respectivamente	rad/s
$\omega_n$	Frequência natural do elemento	rad/s
$\Omega$	Frequência espacial ou número de onda	rad/m
$\Omega_c$	Número de onda crítico	rad/m
$\Omega_i$	Frequência discreta da função PSD	rad/m
$\Omega_{max}$	Maior frequência do intervalo	rad/m
$\Omega_{min}$	Menor frequência do intervalo	rad/m
$\Omega_r$	Número de onda crítico	rad/m
$\Omega_s$	Número de onda crítico	rad/m

## VETORES

$\{d\}$	Vetor deslocamento	m
$\{F_{R_i}(t)\}$	Vetor de força que o veículo exerce sobre a estrutura	N
$\{f(t)\}$	Força aplicada no tempo $t$	N
$\{F_{BL}\}$	Força aplicada na interface trilho-ponte (lastro)	N
$\{f_d(t)\}$	Força de amortecimento no tempo $t$	N
$\{f_n\}$	Força sentido $n$	N
$\{f_s(t)\}$	Força elástica no tempo $t$	N
$\{f_e\}$	Vetor de forças do elemento	N
$\{I_R(t)\}$	Deslocamento devido a irregularidade da via	m
$\{\dot{I}_R(t)\}$	Velocidade devido a irregularidade da via	m/s
$\{\ddot{I}_R(t)\}$	Aceleração devido a irregularidade da via	m/s <sup>2</sup>
$\{N\}$	Funções de forma de Hermite ou funções de <i>Hermite</i>	-

$\{N_u\}$	Funções de Forma correspondentes aos graus de liberdade horizontais	-
$\{N_v\}$	Funções de Forma correspondentes aos graus de liberdade verticais e rotações	-
$\{\hat{p}_{i+1}\}$	Carregamento efetivo (Método de <i>Newmark</i> )	N
$\{P_W\}$	Coordenadas nos pontos de contato entre roda e trilho	m
$\{\ddot{U}(t)\}$	Aceleração na estrutura devido a interação veículo-via-estrutura	m/s <sup>2</sup>
$\{\dot{U}(t)\}$	Velocidade na estrutura devido a interação veículo-via-estrutura	m/s
$\{U(t)\}$	Deslocamento na estrutura devido a interação veículo-via-estrutura	m
$\{u(t)\}$	$u(t)$ = Deslocamento no tempo t	m
$\{\dot{u}(t)\}$	$\dot{u}(t)$ = Velocidade no tempo t	m/s
$\{\ddot{u}(t)\}$	$\ddot{u}(t)$ = Aceleração no tempo t	m/s <sup>2</sup>
$\{Z_B\}$	Deslocamento na ponte	m
$\{\dot{Z}_B\}$	Velocidade na ponte	m/s
$\{\ddot{Z}_B\}$	Aceleração na ponte	m/s <sup>2</sup>
$\{Z_{CB}\}$	Translação ao longo do eixo Z do vagão	m
$\{Z_{FB}\}$	Translação ao longo do eixo Z do truque dianteiro	m
$\{Z_{RB}\}$	Translação ao longo do eixo Z do truque traseiro	m
$\{Z_R\}$	Deslocamento no trilho	m
$\{\dot{Z}_R\}$	Velocidade no trilho	m/s
$\{\ddot{Z}_R\}$	Aceleração no trilho	m/s <sup>2</sup>
$\{\delta_P\}$	Deslocamentos nas suspensões primárias	m
$\{\delta_S\}$	Deslocamentos nas suspensões secundárias	m
$\{\phi_{FB}\}$	Rotação no truque dianteiro em torno de X	rad
$\{\phi_{RB}\}$	Rotação no truque traseiro em torno de X	rad
$\{\theta_{FB}\}$	Rotação no truque dianteiro em torno de Y	rad
$\{\theta_{RB}\}$	Rotação no truque traseiro em torno de Y	rad

## MATRIZES

$[C]$	Matriz de amortecimento global do sistema (interação via-estrutura)	Ns/m Ns/rad
$[c]$	Matriz de amortecimento	Ns/m Ns/rad

$[C_B]$	Matriz global de amortecimento viscoso da ponte	Ns/m Ns/rad
$[c_B]$	Matriz de amortecimento viscoso do elemento da ponte sem influência do lastro	Ns/m Ns/rad
$[c_B]^e$	Matriz de amortecimento viscoso do elemento da ponte com influência do lastro	Ns/m Ns/rad
$[C_{BL}]$	Matriz global de amortecimento viscoso do lastro	Ns/m Ns/rad
$[c_{BL}]^e$	Matriz de amortecimento viscoso do elemento do lastro	Ns/m Ns/rad
$[C_R]$	Matriz global de amortecimento viscoso do trilho	Ns/m Ns/rad
$[c_R]$	Matriz de amortecimento do elemento do trilho sem influência do lastro	Ns/m Ns/rad
$[c_R]^e$	Matriz de amortecimento do elemento do trilho com influência do lastro	Ns/m Ns/rad
$[C_T]$	Matriz de amortecimento do trem	Ns/m Ns/rad
$[K]$	Matriz de rigidez global do sistema (interação via-estrutura)	N/m N/rad
$[K_B]$	Matriz de rigidez global da ponte	N/m N/rad
$[k_B]^e$	Matriz de rigidez do elemento da ponte	N/m N/rad
$[K_{BL}]$	Matriz de rigidez global do lastro	N/m N/rad
$[k_{BL}]^e$	Matriz de rigidez do elemento do lastro	N/m N/rad
$[K_R]$	Matriz de rigidez global do trilho	N/m N/rad
$[k_R]^e$	Matriz de rigidez do elemento do trilho	N/m N/rad
$[k_T]$	Matriz de rigidez do trem	N/m N/rad
$[\hat{k}]$	Rigidez efetiva (Método de <i>Newmark</i> )	N/m N/rad
$[M]$	Matriz de massa global do sistema (interação via-estrutura)	kg
$[M_B]$	Matriz de massa global da ponte	kg

$[m_B]^e$	Matriz de massa do elemento da ponte	kg
$[m_e]$	Matriz de massa do elemento	kg
$[M_R]$	Matriz de massa global do trilho	kg
$[m_R]^e$	Matriz de massa do elemento do trilho	kg
$[Z_{CB}]$	Translação ao longo do eixo Z do vagão	m
$[Z_{FB}]$	Translação ao longo do eixo Z do truque dianteiro	m
$[Z_{RB}]$	Translação ao longo do eixo Z do truque traseiro	m

### LISTA DE ACRÔNIMOS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
FRA	<i>Federal Railroad Administration</i>
HHT	<i>Hilbert-Hughes-Taylor</i>
PSD	<i>One-sided Power Spectral Density Function</i>

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>15</b>
1.1 OBJETIVOS.....	16
1.1.1 Objetivos Gerais .....	16
1.1.2 Objetivos Específicos.....	16
1.2 JUSTIFICATIVA.....	16
1.3 METODOLOGIA .....	17
1.4 CONTEÚDO DO TRABALHO.....	17
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>19</b>
2.1 INFLUÊNCIA DO LASTRO FERROVIÁRIO NA ANÁLISE DINÂMICA .....	19
2.2 PONTES FERROVIÁRIAS SEM LASTRO.....	24
2.3 IRREGULARIDADES DA VIA.....	26
2.3.1 Irregularidades randômica .....	26
2.4 CONSIDERAÇÃO DA PROTENSÃO NA ANÁLISE DOS ELEMENTOS FINITOS 32	
2.5 IMPORTÂNCIA DOS EFEITOS DINÂMICOS.....	34
2.6 MODELAGEM DE AMORTECIMENTO VISCOSO.....	39
2.7 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA (ANÁLISE DO HISTÓRICO TEMPORAL).....	43
<b>3 MATERIAL E MÉTODO</b> .....	<b>47</b>
3.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DA PONTE FERROVIÁRIA.....	47
3.2 APRESENTAÇÃO DA ESTRUTURA ESTUDADA .....	48
3.3 MODELO DA PONTE FERROVIÁRIA EM ELEMENTOS FINITOS .....	51
3.4 TRILHOS SOBRE A PONTE FERROVIÁRIA .....	54
3.5 LASTRO.....	55
<b>4 EMBASAMENTO TEÓRICO</b> .....	<b>56</b>
4.1 DINÂMICA DAS ESTRUTURAS.....	56
4.1.1 Equações de movimento: .....	56
4.1.2 Frequências de vibração.....	57
4.1.3 Amortecimento de Rayleigh.....	58
4.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA .....	59
4.3 ELEMENTO FINITO UTILIZADO .....	60
4.4 CARGAS NODAIS .....	61
4.5 DESLOCAMENTOS.....	62
4.6 MODELO DO VEÍCULO .....	63
4.7 ELEMENTO DE VIGA COM INTERAÇÃO DO LASTRO .....	71
4.7.1 Método de <i>Winkler</i> .....	71
4.7.2 Elemento finito interação via-estrutura.....	72
4.8 INTERAÇÃO VEÍCULO-VIA-ESTRUTURA .....	78

4.9 IRREGULARIDADE DA VIA .....	80
4.9.1 Irregularidade Harmônica .....	80
4.9.2 Irregularidade Randômica.....	81
<b>5 DESCRIÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL .....</b>	<b>85</b>
<b>6 EXEMPLO NUMÉRICO .....</b>	<b>86</b>
6.1 DADOS DO VEÍCULO .....	86
6.2 DADOS DA IRREGULARIDADE DA VIA.....	87
6.3 DADOS DA PONTE.....	88
6.4 DADOS DO LASTRO.....	88
6.5 DADOS DO TRILHO.....	89
<b>7 RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>90</b>
7.1 METODOLOGIA DE ANÁLISE .....	90
7.2 ANÁLISE NUMÉRICA DA INTERAÇÃO .....	91
<b>8 CONCLUSÃO.....</b>	<b>106</b>
8.1 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS .....	107
<b>9 REFERÊNCIAS .....</b>	<b>108</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico tem sido tema de inúmeros estudos entre cientistas e engenheiros em todo o mundo.

O problema dinâmico surgiu após a construção da primeira ferrovia na Inglaterra, durante o século 19, quando os engenheiros se dividiram em dois grupos. Um grupo acreditava que a passagem da locomotiva sobre a ponte gerava um impacto adicional, enquanto o outro grupo acreditava que a estrutura não teria tempo de se deformar durante a passagem do trem. Por esta razão, surgiram os primeiros experimentos feitos por Willis e os primeiros estudos teóricos de Stokes que sugeriram que o efeito da carga móvel devido à locomotiva sobre a ponte estava entre estes dois extremos. (FRYBA, 1996, p.21).

O comportamento dinâmico de pontes ferroviárias devido à ação do trem é um fenômeno complexo. As pontes ferroviárias são formadas por componentes com diferentes propriedades como o lastro, trilhos, dormentes e a estrutura da ponte. Além disso, os efeitos dinâmicos são produzidos pela interação entre veículos e a ponte.

Nas pontes ferroviárias, de acordo com as normas, os efeitos dinâmicos são geralmente considerados pela introdução do coeficiente de impacto. Especificado na maioria das normas em função do vão da estrutura, esse coeficiente determina quantas vezes a carga estática será amplificada para levar em conta os efeitos dinâmicos. Este método tradicional é geralmente conservador, sua imprecisão pode encarecer algumas estruturas e até mesmo subestimar outras como no caso de ressonância.

A resposta dinâmica devido às cargas móveis depende do vão, da massa, da rigidez, do amortecimento do trem e da ponte e das cargas e velocidade do trem. Além do mais, o coeficiente dinâmico não considera aceleração e risco de ressonância na ponte.

Uma correta compreensão da influência da análise dinâmica em pontes ferroviárias permite um dimensionamento mais próximo do fenômeno físico em comparação com o cálculo quase-estático (utilizando coeficiente de impacto sugerido pelas normas).

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivos Gerais

O objetivo deste trabalho é avaliar a influência do lastro e de irregularidades da via no comportamento estrutural dinâmico de uma ponte ferroviária em concreto protendido.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são:

- 1) Comparar a influência de lastros com diferentes parâmetros de rigidez e de amortecimento no comportamento dinâmico da ponte ferroviária.
- 2) Comparar os resultados obtidos segundo o emprego de irregularidades da via randômicas e harmônicas.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Beghetto (2006) avaliou o comportamento dinâmico de uma ponte ferroviária através da análise numérica em elementos finitos. O autor considerou o veículo com nove graus de liberdade e modelou a ponte com elementos de viga *Euler-Bernoulli*. Em seu trabalho, foram consideradas as irregularidades da via por funções harmônicas senoidais onde foi avaliada a interação entre a viga e o veículo por meio de equações desacopladas.

Os trabalhos de Beghetto (2006) e Beghetto (2011) são importantes contribuições para o estudo de análise dinâmica em pontes ferroviárias e seu estudo merece ser aprofundado.

A inclusão do lastro em pontes ferroviárias tem sido estudada por diversos pesquisadores, os resultados e metodologias abordadas divergem bastante em cada pesquisa (ver capítulo 2.1). Na maioria dos casos, o lastro influencia na resposta dinâmica, não devendo ser negligenciado.

Com o intuito de aprofundar o conhecimento sobre análise dinâmica em pontes ferroviárias e obter resultados mais próximos do fenômeno físico, incluiu-se o

lastro e a irregularidade randômica no programa em Matlab® desenvolvido por Beghetto (2006).

### 1.3 METODOLOGIA

- a) Estuda-se o programa de Beghetto (2006) e analisam-se os resultados obtidos em sua dissertação de mestrado;
- b) Transforma-se as duas vigas paralelas em uma estrutura única unida pelas transversinas;
- c) Acrescentam-se os graus de liberdade horizontais e transforma-se o elemento finito de viga em elemento de pórtico;
- d) Acrescentam-se no programa de Beghetto (2006) as matrizes de rigidez, massa e amortecimento referentes ao trilho;
- e) Acrescentam-se a matriz de rigidez, massa e amortecimento referentes ao lastro;
- f) Substitui-se a irregularidade harmônica da via por irregularidade randômica;
- g) Os resultados obtidos (deslocamentos, velocidade de ressonância e frequência natural) nas análises numéricas são interpretados, comparados, validados e discutidos.

### 1.4 CONTEÚDO DO TRABALHO

Este trabalho é composto por 8 capítulos incluindo este introdutório, dispostos da seguinte maneira:

No primeiro capítulo deste trabalho apresenta-se uma introdução ao tema, os objetivos, a justificativa e a metodologia utilizada.

No capítulo segundo é apresentado uma síntese bibliográfica de trabalhos que abordam temas importantes para a análise da ponte a ser dimensionada e que serviram de base para as considerações adotadas nesta dissertação. Os temas pesquisados são: A influência da consideração do lastro na análise dinâmica; Pontes ferroviárias sem lastro; Irregularidade randômica da via; Análise não linear através do método dos elementos finitos; Consideração da protensão na análise dos elementos

finitos; Efeitos dinâmicos; Modelagem do amortecimento viscoso e Integração numérica. A contribuição dos trabalhos consultados, através dos resultados e recomendações são importantes para criar a base conceitual e a abordagem metodológica deste trabalho.

No terceiro capítulo é feita uma abordagem do método de cálculo utilizado e o modelo da ponte ferroviária estudada.

No capítulo quarto, apresenta-se o embasamento teórico para o desenvolvimento dos programas, incluindo-se a formulação da análise dinâmica da estrutura com suas equações de movimento e frequências de vibração, abordando-se o amortecimento de *Rayleigh* e a integração numérica. As equações dos elementos finitos da ponte, veículo e a abordagem da interação entre eles e o lastro e as considerações para os tipos de irregularidades no domínio do tempo são explicadas de forma detalhada no final do capítulo.

No capítulo cinco, apresenta-se o programa computacional.

No sexto capítulo apresentam-se as considerações utilizadas no exemplo numérico.

No sétimo capítulo, são apresentados os resultados e conclusões extraídos da análise numérica.

Por fim, no oitavo capítulo, é apresentado o resumo do trabalho, conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta os resultados e recomendações de pesquisadores nos diversos campos de conhecimento, necessários para a análise de comportamento de uma ponte ferroviária protendida submetida a cargas móveis dinâmicas.

Foram apresentados trabalhos relevantes para a compreensão deste tema e que serviram de base para os critérios e considerações adotados nesta dissertação.

As pesquisas relacionadas à análise da ponte ferroviária, devido a sua complexidade, foram divididas em diversos subcapítulos de forma a facilitar o entendimento do tema. Os trabalhos dos pesquisadores, na maioria das vezes pertencem a mais de um subcapítulo, mas foram locados nos subcapítulos pelo grau de importância no tema.

### 2.1 INFLUÊNCIA DO LASTRO FERROVIÁRIO NA ANÁLISE DINÂMICA

A modelagem do lastro é um ponto complicado no dimensionamento de vias férreas devido às suas propriedades granulares.

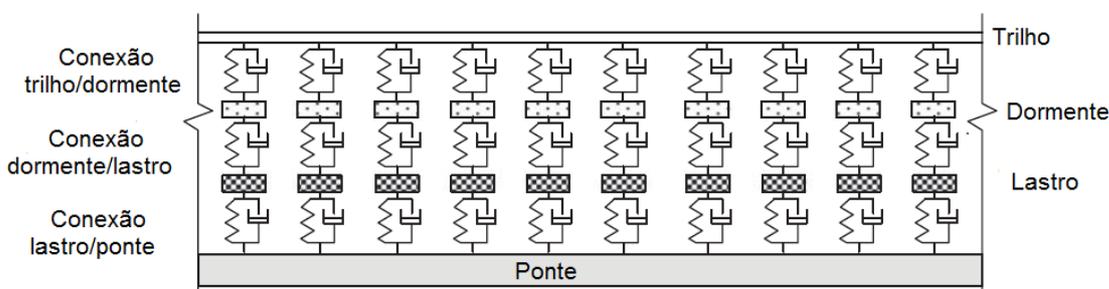
O lastro é um material granular. Na natureza, os materiais granulares (assim como o solo, rochas, dentre outros) pertencem ao meio bifásico constituídos de uma fase sólida dispersiva e de uma fase fluida. Como a distribuição estática e dinâmica da tensão depende do estado de contato entre as partículas no momento considerado, o meio granular é um meio não linear e dissipativo (NGUYEN, 2011).

A influência do lastro na ponte ferroviária tem sido reportada por diversos autores.

Battini e Ülker-Kaustell (2011) fizeram um estudo sobre a influência da consideração do lastro ferroviário sobre a estrutura da ponte de concreto devido à vibração vertical através da proposta de um elemento finito simples. Este elemento possui duas camadas sendo que uma representa a ponte e a outra é composta pelos trilhos, dormentes e o lastro. A principal característica do elemento é transmitir o efeito do lastro através de uma rigidez longitudinal não linear associada ao escorregamento na interface da ponte e do lastro. A frequência natural obtida ficou entre 3,77 e 3,79 Hz, muito próxima da medida nos ensaios, 1,5% a 2,5% de diferença das pontes testadas.

Rigueiro et al. (2010) apresentam uma investigação numérica da resposta dinâmica de viadutos de vãos médios considerando a influência do lastro e da metodologia de modelagem das cargas através de 3 modelos das vias e 2 processos de carregamentos.

No modelo I, estão presentes apenas os elementos do trilho e a conexão entre o trilho e a estrutura. Neste modelo, os trilhos foram considerados como vigas infinitas com rigidez axial no plano e deflexão fora do plano. A representação da ligação é feita através da utilização de molas lineares e amortecedores espaçados a cada metro. Os modelos II e III consideraram os dormentes como massas suspensas e a conexão entre os trilhos e o dormente como uma mola linear com amortecimento viscoso em paralelo conforme indicado na Figura 1.



**Figura 1 – Modelo da Ponte com lastro**  
**Fonte: Adaptado de Rigueiro et al. (2010)**

A influência do modelo da laje foi perceptível no domínio do tempo apenas para as acelerações máximas. No domínio da frequência o lastro, não apresentou influência para frequências de 10-15 Hz, para frequências maiores que esta, o lastro funcionou com um filtro. Este resultado foi mais relevante na utilização das cargas móveis, na interação trem-estrutura este resultado foi menos significativo.

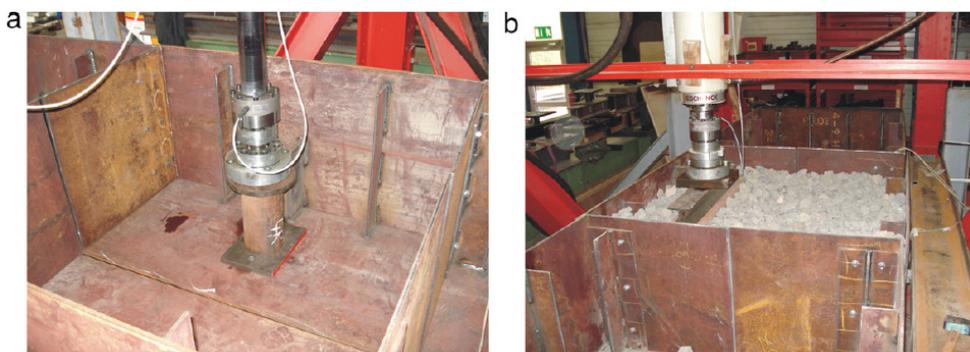
Rehnström e Widén (2012) investigaram dois aspectos a respeito da influência do lastro na vibração das pontes ferroviárias. Para este estudo foi implementado o modelo de elementos finitos de Battini e Ulker- Kaustell (2011), com o objetivo de calcular a aceleração vertical durante e após a passagem do trem. O segundo aspecto foi a distribuição da carga axial no lastro, por meio da análise de diferentes abordagens de distribuições de cargas.

Com base neste estudo, os autores concluíram que a distribuição das cargas é afetada principalmente pela altura do lastro e pelo módulo de *Young*, sendo a maior influência obtida pela altura do lastro. A aceleração máxima foi reduzida de 20% para a 30%, devido a utilização da distribuição das cargas. Os autores observaram que na

análise dinâmica com integração direta da ponte, a aceleração da ponte aumenta sem convergir. Isto se deve ao fato de que os modos altos não representam bem o modelo. Para este problema apenas poucos modos (conforme recomendado no *Eurocode 8*) devem ser incluídos na análise dinâmica.

Rauert et al. (2010) estudaram como o lastro afeta a carga transferida entre duas estruturas separadas. Pontes com duas vias são comumente constituídas de duas vigas separadas com um lastro contínuo sobre as duas. Por meio de estudos experimentais identificou-se o parâmetro que afeta a transferência de carga de uma via a outra.

O estudo experimental dos autores consistiu na medição da transferência de carga de uma caixa para a outra, onde foram avaliados a rigidez com e sem o lastro e o efeito de acoplamento. O objetivo foi obter a rigidez e acoplamento horizontal para simular a interação entre as duas vias. Foram medidos com diferentes preenchimentos de lastro e travamentos (vazio, parcialmente preenchido de brita e completamente cheio) alternando também os compartimentos conforme indicado nas fotografias a e b abaixo.

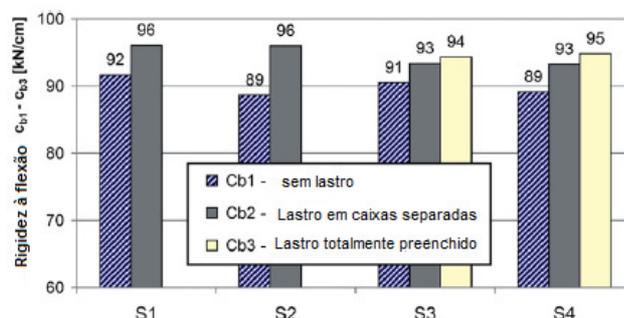


**Fotografia 1 – Estudo experimental**  
**Fonte: Adaptado de Rauert et al. (2010)**

De acordo com os autores, nas práticas comuns de projeto, a via e o lastro não são considerados, apenas a seção transversal de cisalhamento. No caso onde deseje-se obter a capacidade do momento resistente, esta aproximação é razoável, mas no caso do cálculo da excitação da ponte devido à passagem do trem, este resultado não é confiável. Através dos ensaios, os autores concluíram que o lastro introduz rigidez adicional durante a passagem do trem por isso sugerem que essa rigidez adicional devido ao lastro seja computada em projeto.

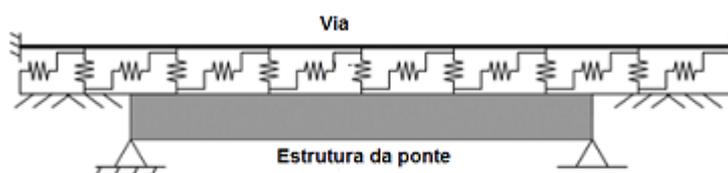
A Figura 2 indica os parâmetros de rigidez para cada um dos ensaios feitos por Rauert et al. (2010), onde avaliou-se a rigidez sem lastro, com lastro em caixas

separadas e finalmente com o lastro totalmente preenchido. Pode-se observar que sem lastro, a rigidez à flexão obtida foi menor do que a obtida com a consideração do lastro e o trilho.



**Figura 2 – Resultados parâmetros de rigidez**  
Fonte: Adaptado de Rauert et al. (2010)

A Figura 3 compara os valores de rigidez com o lastro carregado e descarregado, estes valores são adotados no modelo numérico dos autores.



Comparação das propriedades de rigidez	
Rigidez horizontal (carregada) - domínio elástico	10000 kN/m <sup>3</sup>
Rigidez horizontal (descarreg.) - domínio elástico	3300 kN/m <sup>3</sup>
Rigidez vertical para interação dos lastros (valor médio dos resultados)	4300 kN/m <sup>3</sup>

**Figura 3 – Comparação propriedades de rigidez**  
Fonte: Adaptado de Rauert et al. (2010)

Correa (2008) estudou o problema da influência da interação dinâmica entre veículo-via-estrutura. O autor utilizou um modelo de veículo com nove graus de liberdade, considerou as irregularidades geométricas, aleatórias e determinísticas nas rodas e nos trilhos, utilizou também sistemas para atenuar a vibração. O autor concluiu que as irregularidades nas rodas são mais prejudiciais à estrutura devido aos impactos causados pelas “mossas” das rodas sobre os trilhos, gerando picos de deslocamentos e de esforços solicitantes na estrutura.

Fryba (1996 – pg. 81) menciona que o lastro não tem influência significativa em pontes ferroviária em treliças, uma vez que essas pontes possuem grande rigidez e

são geralmente utilizadas em grandes vãos. No entanto, em pontes de concreto a presença ou ausência do lastro é significativa, pois o concreto é considerado pesado em relação a outros materiais e possui um módulo de elasticidade muito inferior ao do aço.

Através da revisão bibliográfica é possível concluir que o lastro tem uma grande influência na resposta dinâmica e sem a consideração dele, não é possível obter a mesma frequência natural dos ensaios em campo, principalmente para pontes de concreto. O lastro introduz rigidez adicional que deve ser precisamente incorporada na estrutura, o deslizamento entre a laje e o lastro varia com a aplicação da carga, por esta razão a análise não linear é mais adequada para este caso.

Na Tabela 1, estão indicados diversos módulos de elasticidade utilizados para o lastro em diferentes artigos, resumo feito por (Rehnröm & Widén, 2012) e adaptado pela autora.

<b>E<sub>b</sub></b>	<b>Referencia</b>
150 – 300	(Kumaran et al., 2003)
150	(Bourgeois et al., 2011)
100	(Ricci et al., 2005)
150,165,180	(Shahu et al., 1999)
97	(Costa et al., 2011)
110	(Zhai et al, 2004)
200 (compressão)	(Nguyen, 2002)
20 (tração ANL)	
MPa	

**Fonte: Autoria própria**

Essa divergência de resultados ocorre devido ao tipo de material utilizado por cada pesquisador, espessura do lastro adotado e carregamentos. O lastro é um material não linear e sua compactação aumenta em função da magnitude da carga aplicada sobre ele.

A rigidez e amortecimento do lastro tem sido estudado por diversos autores e um resumo dos resultados estão indicados na Tabela 2 e servirão de referência nesta dissertação.

Tabela 2– Valores coeficientes de rigidez e amortecimento do lastro

Referencia	$k_{BL}$		$C_{BL}$	
	Vertical	Horizontal	Vertical	Horizontal
Yang et al. (2004)	$104 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	$10,4 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	$50 \text{ kNs/m}^2$	$50 \text{ kNs/m}^2$
Ruge e Birk (2007)	$600 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	-	-	-
Cai et al. (1994)	$50 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$ (extremidades) $30 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$ (interno)	-	$65,6 \text{ kNs/m}^2$	-
Guimarães (1999)	$3,7/9,4/19,4 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	-	$25 \text{ kNs/m}^2$	$0,8 \text{ kNs/m}^2$
Dahlberg(2006)	$13 \times 10^3$ e $26 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	-	-	-
Cheng et al. (2001)	$9,12 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	-	$86 \text{ kNs/m}^2$	-
Di Mino e Di Liberto (2007)	$78,4 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	-	$80 \text{ kNs/m}^2$	-
Ruge et al. (2009)	$30 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	-	-	-
	$23 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	$23 \times 10^3 \text{ kN/m}$	$11 \text{ kNs/m}^2$	$11 \text{ kNs/m}^2$
Rigueiro et al. (2010)	$27 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	-	$11 \text{ kNs/m}^2$	-
Rauert et al. (2010)	$2,61 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	$2 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$ (descarregado) $0,6 \times 10^4 \text{ kN/m}^2$ (carregado)	-	-
Nguyen (2002)	$100 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	-	$1 \text{ kNs/m}^2$	-
Correa (2008)	$2,225 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	-	$5 \text{ kNs/m}^2$	-

Fonte: Autoria própria

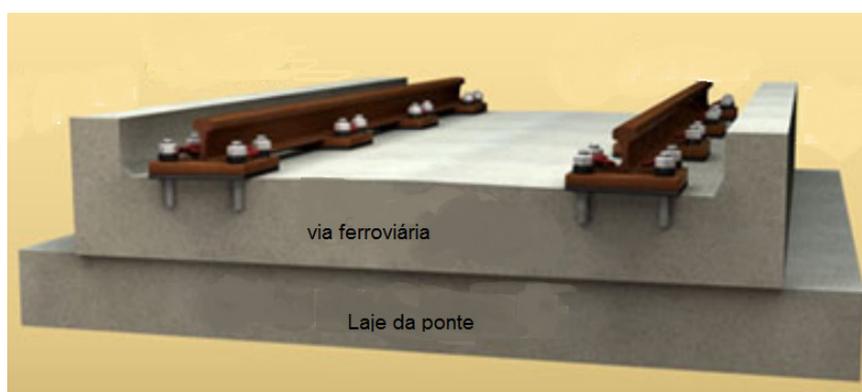
## 2.2 PONTES FERROVIÁRIAS SEM LASTRO

O tráfego ferroviário está evoluindo para sistemas sem lastros (*ballastless track*). A vantagem desse sistema em relação ao sistema com lastro é a capacidade de atingir velocidades maiores, maior conforto para o usuário que podem tomar café tranquilamente em velocidades maiores que 300 km/h. O sistema sem lastro possui maior capacidade de carga transportada, ciclos de vida maiores (no mínimo 60 anos), pouquíssima manutenção e sendo por este motivo a solução mais rentável a longo

prazo. Outra razão para utilizar este tipo de lastro é a necessidade de tornar a via acessível para veículos rodoviários.

As ferrovias que utilizam lastro, tem a vantagem de possuir uma alta elasticidade do material, custos baixos e alta absorção de ruídos, mas exige manutenção frequente (variando de 0,5 a 6 anos). O lastro pode se deslocar horizontalmente com facilidade e oferece resistência lateral limitada, em altas velocidades, o material granular pode se agitar causando dano aos trilhos e rodas, além de ser pesado, aumentando o custo das pontes.

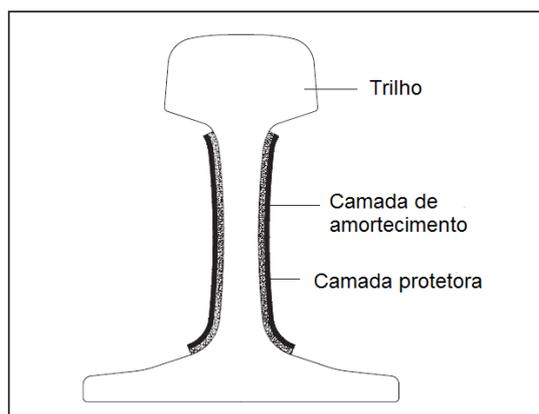
As pontes sem lastro, não se deslocam horizontalmente (Figura 4). É colocada uma argamassa regularizadora entre as duas lajes de concreto, absorvendo os esforços horizontais pelo atrito entre os materiais.



**Figura 4 – Via ferroviária sem lastro**

**Fonte: adaptado de <http://www.railsystem.net/track-structure/>**

De acordo com Cui et al. (2014), as vias sem lastro são muito utilizadas para trens de alta velocidade devido à maior regularidade e menor manutenção. A baixa elasticidade do elemento em concreto apresenta maiores vibrações e emissão de ruídos, principalmente quando for construído em fundação rígida como é o caso das pontes. O autor propõe a análise da redução de vibração com a utilização de amortecedores de trilhos (Figura 5), o amortecedor utilizado possui módulo de elasticidade transversal de 6,75 MPa . O autor concluiu que houve uma redução da vibração e da duração da vibração na estrutura com a utilização dos amortecedores, mas esta redução não foi significativa em pontes muito rígidas.



**Figura 5 – Amortecimento de trilhos (redução de ruídos)**  
**Fonte: Adaptado de Cui et al. (2014)**

## 2.3 IRREGULARIDADES DA VIA

### 2.3.1 Irregularidades randômica

As irregularidades da via consistem no desvio do trilho em relação a geometria ideal de projeto. De acordo com Frýba (1996) existem quatro tipos de irregularidades, vertical ( $r_v$ ), alinhamento ( $r_h$ ), superrelavação ( $r_c$ ) e irregularidade da bitola ou largura da via ( $r_g$ ) que são causadas principalmente pelo uso, execução, degradação do material de suporte, recalque dos apoios da ponte e suas combinações. As ilustrações apresentadas na Figura 6 referem-se a estes quatro tipos de irregularidades.

O método para análise das irregularidades randômicas é um método estatístico de análise que utiliza dados estatísticos para obtenção da irregularidade da via. Este método descreve as possíveis irregularidades que a via estará sujeita durante sua utilização e sua probabilidade de ocorrência.

No campo da análise dinâmica, o método para obtenção do campo randômico mais utilizado é o PSD (*Power spectral density function*). Seus resultados servem como *input* para o método de *Monte Carlo*. Sem entrar em detalhes matemáticos, o método de *Monte Carlo* consiste na somatória da inversa de componentes das séries de *Fourier*, cada um deles deslocados por um ângulo de fase randômico, uniformemente distribuído de 0 a  $2\pi$ , escolhidos aleatoriamente durante o processo de cálculo com N números de termos nas séries (Podworna, 2015).

As equações referentes a cada método serão melhor descritas no capítulo 4.9.

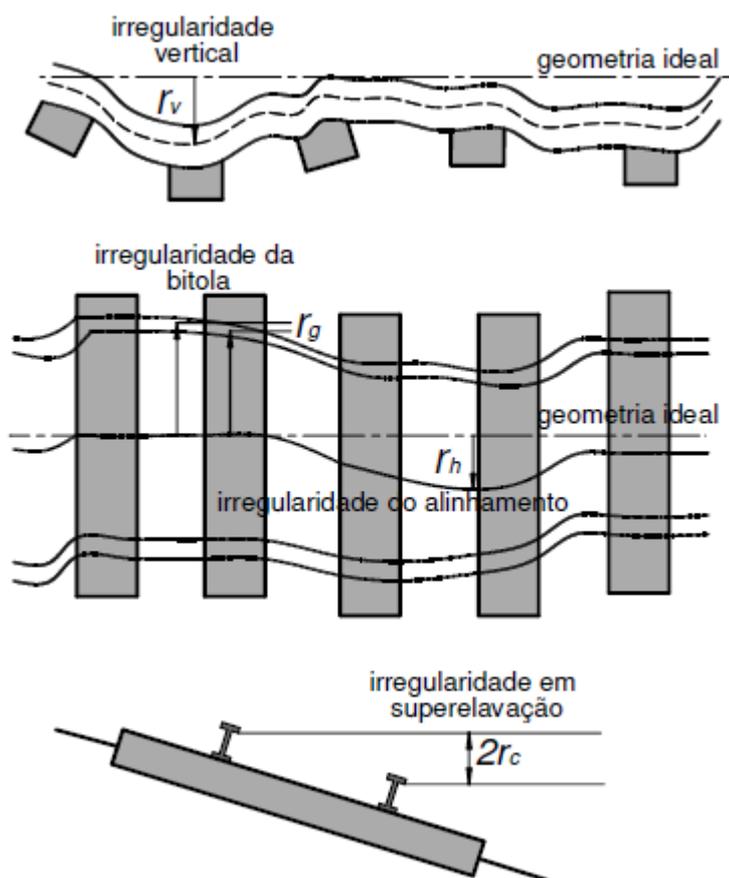


Figura 6 – Quatro tipos de irregularidades da via  
Fonte: Adaptado de Yang et al. (2004)

Yang et al. (2004) estudaram a combinação dos desvios da via devido às irregularidades verticais, em superelevação e no alinhamento. Os autores utilizaram a função PSD (*Power spectral density function*) de acordo com os estudos de Fries e Coffey (1990), cujas equações estão descritas a seguir:

Para irregularidades devido à elevação vertical e alinhamento da via:

$$S_{v,a}(\Omega) = \frac{A_v \Omega_c^2}{(\Omega^2 + \Omega_r^2)(\Omega^2 + \Omega_c^2)} \quad (1)$$

Para irregularidades devido a superelevação:

$$S_c(\Omega) = \frac{(A_v \Omega_c^2 / l_a) \Omega^2}{(\Omega^2 + \Omega_r^2)(\Omega^2 + \Omega_c^2)(\Omega^2 + \Omega_s^2)} \quad (2)$$

Onde  $\Omega = 1/Lr$  , denota a frequência espacial (Hz) e  $Lr$  é o comprimento de onda devido à irregularidade (m). Os demais coeficientes são obtidos de acordo com a classe de qualidade da via, classificados pela *Federal Railroad Administration* (FRA). As classes de qualidade variam de 1 a 9, sendo que a classe 9 indica a melhor qualidade e a classe 1, a pior. A partir dessas classes obtém-se os parâmetros PSD que são utilizados na análise randômica. A Tabela 3 indica os parâmetros PSD para as classes de 4 a 6 utilizadas por Yang et al. (2004).

**Tabela 3 – Parâmetros PSD da via**

Qualidade (classe FRA)	Muito pobre (4)	Pobre (5)	Moderada (6)
$A_v$ (m)	$2,39 \times 10^{-5}$	$9,35 \times 10^{-6}$	$1,50 \times 10^{-6}$
$\Omega_s$ (rad/m)	1,130	0,821	0,438
$\Omega_r$ (rad/m)	$2,06 \times 10^{-2}$	$2,06 \times 10^{-2}$	$2,06 \times 10^{-2}$
$\Omega_c$ (rad/m)	0,825	0,825	0,825

Fonte: Esveld (1989) apud Yang et al. (2004)

Contudo, a função PSD não pode ser usada no domínio tempo, apenas no domínio de frequência. Para superar este problema Yang et al. (2004) implementaram os espectros conforme equações (1) e (2) e após inseridos no domínio do tempo, utilizando formulações em relação ao eixo  $x$ . As equações a seguir referem-se à irregularidade vertical ( $r_v$ ), de alinhamento ( $r_h$ ), e de superelevação ( $r_c$ ) respectivamente:

$$r_v(x) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N_r-1} A_n \cos(\Omega_i x + \alpha_n) \quad (3)$$

$$r_h(x) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N_r-1} B_n \cos(\Omega_i x + \beta_n) \quad (4)$$

$$r_c(x) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N_r-1} C_n \cos(\Omega_i x + \gamma_n) \quad (5)$$

Onde  $N_r$  é a quantidade total de frequência espacial discreta considerada e  $\Omega_i$  é a frequência discreta computada na equação (6).

$$\Omega_i = n\Delta\Omega_i = \frac{n(\Omega_{max} - \Omega_{min})}{N_r} \quad (6)$$

Na equação (6)  $\Omega_{max}$  e  $\Omega_{min}$  representam a maior e a menor frequência considerada no intervalo.  $A_n$ ,  $B_n$  e  $C_n$  são parcelas da inversa da transformada de Fourier e  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_n$  são os ângulos de fase uniformemente distribuídos entre 0 e  $2\pi$ .

Os autores aplicaram o método de representação espectral e obtiveram alguns resultados que podem não satisfazer as classes de qualidade da via, necessitando normalizar os desvios máximos em função dos desvios toleráveis para vias de alta velocidade.

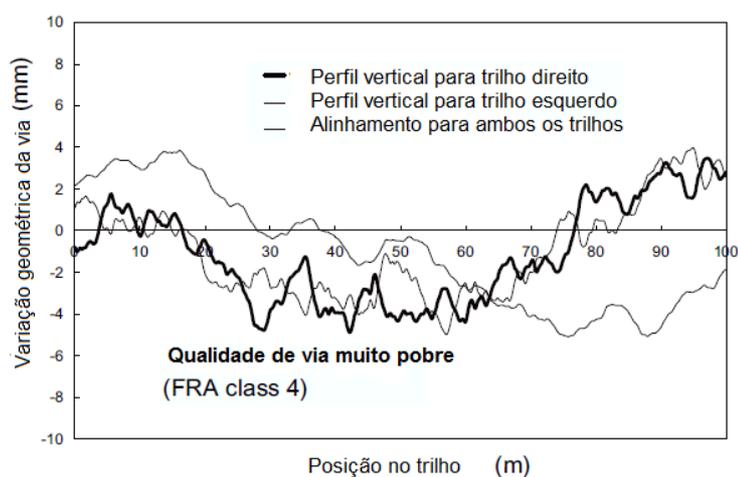
Na Tabela 4 estão indicados os máximos valores para variação geométrica em relação a posição do trilho para vias 4, 5 e 6.

**Tabela 4 – Desvios máximos toleráveis de irregularidade da via**

Qualidade (classe FRA)	Muito pobre (4)	Pobre (5)	Moderada (6)
$r_{v,max}$ (mm)	4,05	3,38	2,70
$r_{h,max}$ (mm)	5,10	4,25	3,40
$r_{c,max}$ (mm)	1,50	1,25	1,00

Fonte: Fonte: Esveld (1989) apud Yang et al. (2004)

A Figura 7 ilustra os resultados para variação geométrica da via normalizados em relação à posição do trilho para vias muito pobres, obtida com o método de Yang et al. (2004).



**Figura 7 – Variação geométrica da via**  
Fonte: Adaptado de Yang et al. (2004)

Podwórna (2015) apresentou um estudo analítico e numérico da irregularidade randômica de ferrovias contínuas com lastro por meio do método de *Monte Carlo*. Seu artigo compara três métodos de cálculos de diferentes

pesquisadores com o objetivo de determinar o número mínimo de interações  $N_r$  recomendado para a modelagem da irregularidade vertical próxima da realidade. A pesquisadora concluiu que o número de interações recomendado para obtenção de um perfil muito próximo da realidade é  $N_r=2000$ , e um valor aceitável é  $N_r=1500$ .

Garg e Dukkipati (1984) descreveram a geometria da via de acordo com os parâmetros de segurança da FRA (*Federal Railroad Administration*). Segundo eles, a geometria da via é definida em termos de 4 irregularidades que são, irregularidade da bitola da via ou largura da via ( $r_g$ ), em superelevação ( $r_c$ ), alinhamento ( $r_h$ ), e do perfil vertical ( $r_v$ ), descritos a seguir:

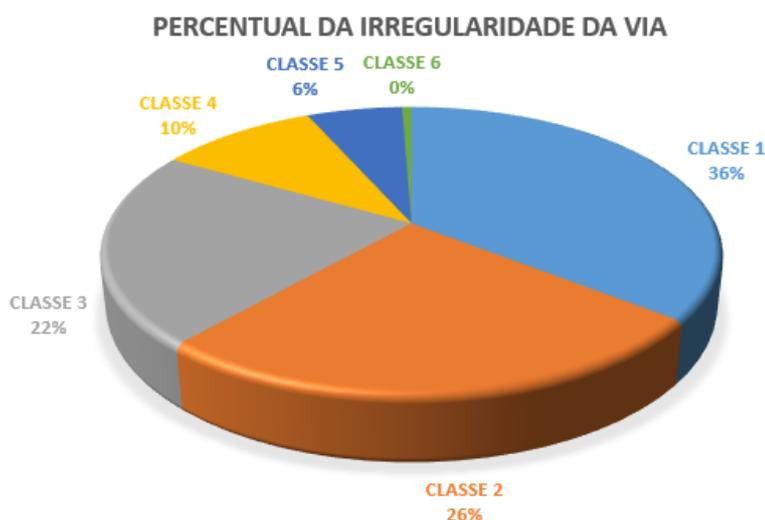
Erros no perfil vertical são os desvios do trilho esquerdo ou direito de um perfil uniforme, resultantes principalmente da existência de poucas juntas ou de cargas térmicas impostas na via. Conhecendo os erros do perfil em ambos os trilhos, pode-se determinar o erro em superelevação.

Erros de alinhamento ocorrem no plano lateral e resultam da deformação lateral da via, dos erros de construção, dos procedimentos de manutenção e do movimento lateral do tráfego.

Erros da bitola são erros no plano lateral da via, resultante principalmente da construção e manutenção e de movimentos laterais relativos do trilho devido às cargas do trem. Erros de bitola sempre acompanham o alinhamento da via.

Erros de superelevação ou empenamento são definidos como a taxa de modificação em superrelavação sobre o comprimento da via. Ocorrem devido às cargas térmicas impostas pela via, aos recalques diferenciais e aos carregamentos impostos pelo trânsito de veículos. Geralmente são os erros responsáveis pela perda de contato das rodas com os trilhos.

Os autores explicam que, dependendo da irregularidade, a via é dividida em 6 classes, sendo a primeira a pior. A Figura 8 representa os percentuais de classe medidos nos Estados Unidos para um total de 513 000 km.



**Figura 8 – Percentual de classes de via nos Estados Unidos**  
**Fonte: Adaptado de Garg e Dukkipati (1984)**

Estes requisitos de irregularidade da via são aplicados para as condições de tráfego conforme Tabela 5.

**Tabela 5 – Padrões de via para vias retilíneas (FRA)**

Parâmetros	Classe da via					
	1	2	3	4	5	6
<u>Velocidade limite de operação</u>						
Carga	16,1 km/h	40,2 km/h	64,4 km/h	96,60 km/h	128,8 km/h	177km/h
Passageiros	24,1 km/h	48,3 km/h	96,6 km/h	128,8 km/h	144,0 km/h	177km/h
<u>Largura da Via (Bitola)</u>						
Mínima	142,2 cm	142,2 cm	142,2 cm	142,2 cm	142,2 cm	142,2 cm
Máxima	146,7 cm	146,0 cm	146,1 cm	145,4 cm	144,8 cm	144,1 cm
<u>Alinhamento (<math>r_h</math>)</u>						
Desvio máximo em 18,9 m	12,7 cm	7,62 cm	4,44 cm	3,17 cm	1,90 cm	1,27 cm
<u>Perfil vertical</u>						
Desvio máximo de perfil uniforme do trilho ( $r_v$ ) em 18,9 m	7,62 cm	6,98 cm	5,72 cm	5,08 cm	3,18 cm	1,27 cm
Desvio superelavação ( $r_c$ ) zero a qualquer ponto em tangente	7,62 cm	5,08 cm	4,45 cm	3,18 cm	2,54 cm	1,27 cm
Diferença entre dois pontos em superelevação ( $r_c$ ) medidos em 18,9 m	7,62 cm	5,08 cm	4,45 cm	3,18 cm	2,54 cm	1,27 cm

**Fonte: Adaptado de Garg e Dukkipati (1984)**

A *Federal Railroad Administration* (FRA) indica também limites diferentes para trilhos em curvas. Garg e Dukkipati (1984) afirmam que condições críticas podem ocorrer em velocidades superiores ou inferiores aos limites de operação especificados e estas velocidades devem ser avaliadas.

De acordo com os limites de irregularidade, pode-se considerar que as classes que correspondem a ponte estudada estão entre a 1 e a 3, em função dos limites de velocidade impostos.

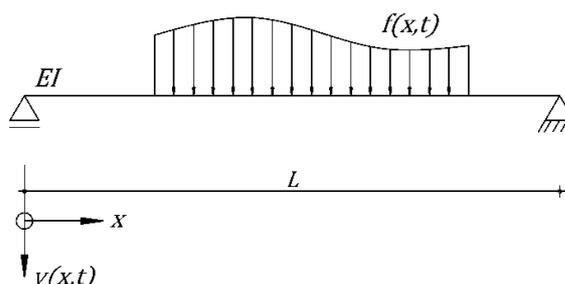
A FRA já possui novas classes limites para ferrovias de alta velocidade (classe 7 a 9), cujos manuais estão disponíveis gratuitamente no site do governo dos Estados Unidos. Estas classes não serão indicadas aqui por não fazerem parte do escopo da análise. Os valores indicados por Garg e Dukkipati (1984) continuam válidos para as classes estudadas.

## 2.4 CONSIDERAÇÃO DA PROTENSÃO NA ANÁLISE DOS ELEMENTOS FINITOS

De acordo com Frýba (1996, p. 43), o concreto protendido pode ser dividido em dois casos principais: cabos perfeitamente aderentes à estrutura ou completamente livres. Em ferrovias de concreto protendido, o reforço adere ao concreto em toda a trajetória do cabo, tanto na pré-tensão quanto na pós-tensão (com injeção de nata). Conseqüentemente, neste caso, a protensão não tem influência na energia potencial da viga, e, portanto, não causa nenhuma mudança na frequência natural da viga. A carga aplicada na estrutura não varia, pois, a tensão de protensão está em equilíbrio com as forças de compressão do concreto. Portanto, no caso de cordoalhas preenchidas com *grout*, a análise dinâmica procede conforme equação (7) que indica a equação de equilíbrio da viga representada na Figura 9.

$$EI \frac{(\partial^4 v(x, t))}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + 2\rho\omega_b \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = f(x, t) \quad (7)$$

- $E$  = Módulo de elasticidade do concreto
- $I$  = Momento de Inércia da seção transversal
- $\rho$  = Massa por unidade de comprimento
- $\omega_b$  = Frequência circular de amortecimento viscoso
- $f(x, t)$  = carga no ponto  $x$  e tempo  $t$  por unidade de comprimento da viga



**Figura 9 – Viga vão L**  
**Fonte: Autoria própria**

No segundo caso, quando a viga está exposta a compressão \$N\$ constante nas extremidades apenas, a equação (8) é aplicada. A frequência natural desta viga é influenciada pela carga axial. Contudo, os cabos desta viga devem estar livres em toda a extensão, não aderentes ao concreto, situados no eixo neutro da viga e as tensões não devem variar na passagem do veículo. A equação (8) representa a equação de equilíbrio da viga da Figura 9, acrescida da carga de compressão \$N\$ devido aos esforços dos cabos de protensão não aderentes.

$$EI \frac{(\partial^4 v(x, t))}{\partial x^4} - N \frac{(\partial^2 v(x, t))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + 2\rho\omega_b \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = f(x, t) \quad (8)$$

\$N\$ = carga axial (positiva para tração).

Mari (1999) desenvolveu um programa em elementos finitos de barra 3D. Neste artigo o pesquisador relata que a pré-tensão foi considerada como um vetor de cargas equivalente, obtido através do equilíbrio das forças em cada ponto ao longo do cabo. Além disso, foi considerado a influência da idade do concreto até 500 dias. Os resultados fornecidos pelo programa ficaram muito próximos do modelo experimental de uma ponte, no entanto a deflexão ficou menor que a real e o autor recomenda a utilização de um modelo com elementos de placa para melhorar a precisão.

Marin (2000) criou uma rotina para análise linear em elementos finitos pós-tensionados. A aproximação utilizada para esta análise consiste em incorporar o aço tensionado no ponto em que ele intercepta o elemento de concreto. Os cabos foram representados como elemento de barra unidimensional inserido em um elemento plano de 8 nós isoparamétrico. O modelo da interface foi feito utilizando-se elementos de ligação (*links*) cuja rigidez equivale à coesão entre o *grout* ou duto e os cabos de

aço. Os carregamentos são aplicados no elemento plano, e posteriormente, através dos deslocamentos, nos cabos de aço. O programa obteve resultados muito próximos aos obtidos em outros programas já desenvolvidos utilizados para comparação fornecendo resultados precisos.

Com base no estudo de Frýba (1996), para a resposta dinâmica da ponte ferroviária, a protensão não será considerada. Uma vez que a protensão adere completamente ao concreto garantindo o equilíbrio com as tensões de compressão do concreto e, portanto, não influencia na frequência natural da viga.

## 2.5 IMPORTÂNCIA DOS EFEITOS DINÂMICOS

O problema de interação dinâmica entre veículos e pontes é considerado um dos mais antigos da dinâmica estrutural. Os primeiros trabalhos desenvolvidos reportam ao ano de 1849 na Inglaterra onde o engenheiro civil *Willis* e o matemático *Stokes* estudaram as causas do rompimento e da queda da ponte ferroviária *Chester* no ano de 1847. Este foi o primeiro caso de colapso em uma ponte ferroviária na história (MELCER, 2007 *apud* BEGHETTO, 2011).

Cada vez mais tem-se estudado os efeitos dinâmicos em ferrovias para trens de altas velocidades com ênfase na análise dinâmica e interação veículo-estrutura. Trens movimentando-se em altas velocidades impactam dinamicamente na estrutura da ponte, a vibração na ponte afeta a estabilidade e segurança no trem tornando um fator importante a ser estudado.

Pontes ferroviárias submetidas à trens de alta velocidade causam vibração intensa similar ao fenômeno de ressonância. A ressonância ocorre quando a frequência da carga coincide com a frequência natural da estrutura. A vibração de ressonância de pontes ferroviárias causa desconforto aos passageiros, redução da segurança no tráfego, a desestabilização do lastro (alto custo de manutenção) e a deterioração da ponte por fadiga (GOEL, 2009).

Um dos pontos mais importantes na análise dinâmica em trens de alta velocidade é o comportamento dinâmico da estrutura. O modo clássico para levar em consideração esses efeitos é o uso do coeficiente dinâmico multiplicado por todos os efeitos estáticos (deformações, deslocamentos, momentos, tensões, etc.). Infelizmente, a experiência francesa confirmada por análises dinâmicas, mostra que o

método não cobre alguns efeitos de ressonância, como os causados por trens longos, de alta velocidade e truques com espaçamento constante. Um desses efeitos (aceleração vertical) pode causar desestabilização do lastro e instabilidade do trilho. (CALÇADA et al., 2008, p.23)

A norma Européia (EUROCODE EN1991-2) leva em conta o fato que para altas velocidades, o método clássico não pode mais ser utilizado. A norma sugere um fluxograma que indica quando considerar a análise dinâmica no dimensionamento. Este fluxograma foi traduzido e está indicado na Figura 10:

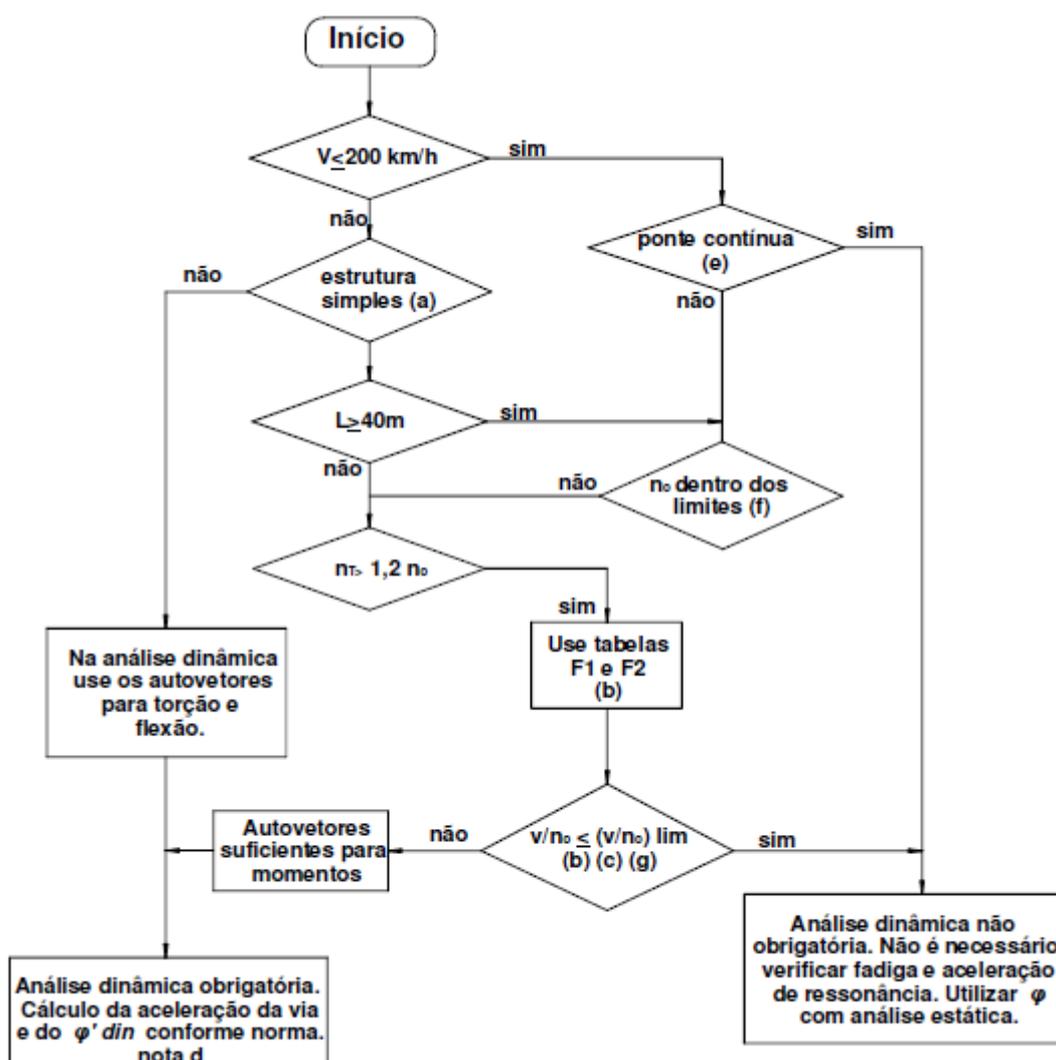


Figura 10 – Fluxograma para verificação da necessidade de análise dinâmica  
Fonte: Adaptado de EN 1991-2 (6.4.4)

Onde:

- $V$  é a velocidade máxima da via (km/h);
- $L$  é o comprimento do vão da ponte;

- $n_0$  é a primeira frequência natural de flexão;
- $n_T$  é a primeira frequência natural de torção;
- $v$  é a máxima velocidade nominal da via em m/s;
- $(v/n_0)_{lim}$  é dado no anexo F da norma EN1991-2.

Nota (a): válida para pontes simplesmente apoiadas com vigas longitudinais ou comportamento de placa com efeitos oblíquos negligenciáveis nos apoios rígidos.

Nota (b): Tabelas F1 e F2 com limites de frequências já pré-calculados pela norma.

Nota (c): Análise dinâmica é necessária quando a frequência de operação da linha é igual a frequência de ressonância da estrutura.

Nota (d):  $\varphi'_{din}$  é o coeficiente de impacto para trens reais para a estrutura analisada em (c).

Nota (e): Válido desde que a ponte satisfaça os requisitos de resistência, limites de deformação indicados na norma e a aceleração máxima do veículo (ou limites de deflexão associados) correspondente ao conforto dos passageiros dado em EN 1990: 2002 / A1 (Anexo 2).

Nota (f): Pontes com primeira frequência natural  $n_0$  dentro dos limites da norma e velocidade máxima da linha inferior a 200 km/h, pode ser dispensada a análise dinâmica.

Nota (g): Pontes com primeira frequência natural  $n_0$  acima dos limites da norma requer análise dinâmica cujo cálculo está indicado na equação (9).

$$n_0 = \frac{17,75}{\sqrt{\delta_0}} \quad (9)$$

Onde:

- $\delta_0$  é a flecha no meio do vão devido às ações permanentes (mm)

De acordo com o fluxograma apresentado (Fig. 8), se a flecha limite for respeitada, para velocidades inferiores a 200 km/h não é necessária análise dinâmica. No caso de pontes simples (a) não é necessária análise dinâmica se a primeira frequência natural da ponte à flexão estiver dentro dos limites estipulados pela norma. A análise dinâmica não é obrigatória em pontes contínuas.

Abaixo estão indicados alguns autores que estudaram o comportamento dinâmico entre o trem e a estrutura:

Beghetto (2006) estudou os comportamentos dinâmicos de uma ponte ferroviária e de um veículo através da associação de corpos rígidos conectados em sistemas de suspensões. As equações de movimento são obtidas através do princípio de *D'Alembert*, segunda lei de *Newton* e do equilíbrio de forças e de momentos. O modelo da ponte ferroviária é feito através do método dos elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*. As irregularidades da via são representadas por funções harmônicas senoidais onde são estudadas as respostas dinâmicas da via e o comportamento dinâmico da ponte ferroviária considerando as variações de velocidade e de irregularidades da via.

Beghetto (2011) estudou a interação tridimensional entre veículo e ponte ferroviária considerando a mecânica de contato entre as rodas e os trilhos frente a variação de velocidade e a presença de irregularidade das vias por meio de análises numéricas computacionais. O veículo ferroviário foi modelado pela associação de corpos rígidos conectados a sistemas de suspensões com 25 graus de liberdade. As irregularidades da via foram apresentadas através de funções harmônicas e o modelo de contato entre rodas e trilhos é embasado nas teorias de *Hertz* e de *Kalker*. O autor considerou também o modelo de contato mecânico e a variação de coeficiente de atrito entre rodas e trilhos em função da velocidade e das condições de contaminações entre as superfícies em contato. No modelo de saturação do contato foi inserido o modelo de *Vermeulen* e *Johnson*, restringindo as forças tangenciais de contato e o momento de rotação *spin* das rodas segundo um polinômio cúbico de modo a contemplar as não linearidades geométricas devido aos perfis das rodas e dos trilhos. O modelo da ponte foi feito através do método dos elementos finitos por elementos de barra de pórtico.

Cunha (2011) analisou o problema das vibrações induzidas em estruturas de concreto de pontes ferroviárias produzidas pela passagem da composição de um trem elétrico. O veículo foi modelado utilizando-se 9 graus de liberdade sobre um tabuleiro rígido indeslocável, considerando as irregularidades geométricas apresentadas nos trilhos e nas rodas. Os carregamentos foram condensados estaticamente e aplicados em um modelo estrutural simplificado (unifilar) de uma ponte de seção celular, de forma a identificar a resposta dinâmica proveniente das irregularidades geométricas e compará-la com o coeficiente de amplificação dinâmica da norma brasileira para

projetos de pontes ferroviárias. Os resultados foram analisados e obteve-se, em geral, coeficientes menores que o da norma (redução média das análises de 11%), sendo necessário mais estudos com formas diferentes de viga para uma conclusão mais realista, uma vez que o coeficiente de amplificação dinâmico é influenciado apenas pelo vão e não pelo tipo de viga e velocidade.

Yang et al (2004) escreveram um livro que cobre os problemas da análise dinâmica em pontes ferroviárias para veículos de alta velocidade. O conhecimento é exposto de forma didática e gradativa ao longo do livro. O autor separa o livro em duas partes, a primeira é dedicada aos problemas de cargas móveis e a segunda parte dedicada ao problema de interação entre o trem e a via. A primeira parte pode ser resolvida de forma analítica e a segunda apenas de forma numérica. A interação é feita de forma desacoplada através dos pontos de contato e com isto é possível, simular vários modelos tridimensionais assim como simular dois trens atravessando a ponte simultaneamente, a perda de contato com o trilho e a estabilidade do trem juntamente com a ocorrência de terremotos.

Lei Xiaoyan (2002) autor do livro High Speed Railway Track Dynamics, models, algorithms and Applications, explica diversos conceitos sobre análise dinâmica ao longo dos 15 capítulos de seu livro, sendo alguns desses conceitos o de viga elástica em várias camadas representando a via, irregularidade randômica, teoria básica da resposta harmônica, *power spectrum* e simulação numérica, influência da velocidade do trem e da irregularidade da via, influência da rigidez da via na análise dinâmica, influência da zona de transição da via com lastro e sem lastro e finaliza com o estudo da vibração induzida pelo veículo em metrô.

A norma brasileira NBR 7187 (ASSOCIAÇÃO...,2003, p.5) aborda o efeito dinâmico de forma pseudo-estática através do coeficiente de impacto  $\varphi$ : “O efeito dinâmico das cargas móveis deve ser analisado pela teoria da dinâmica das estruturas. É permitido, no entanto, assimilar as cargas móveis a cargas estáticas, através de sua multiplicação pelos coeficientes de impacto definidos a seguir:

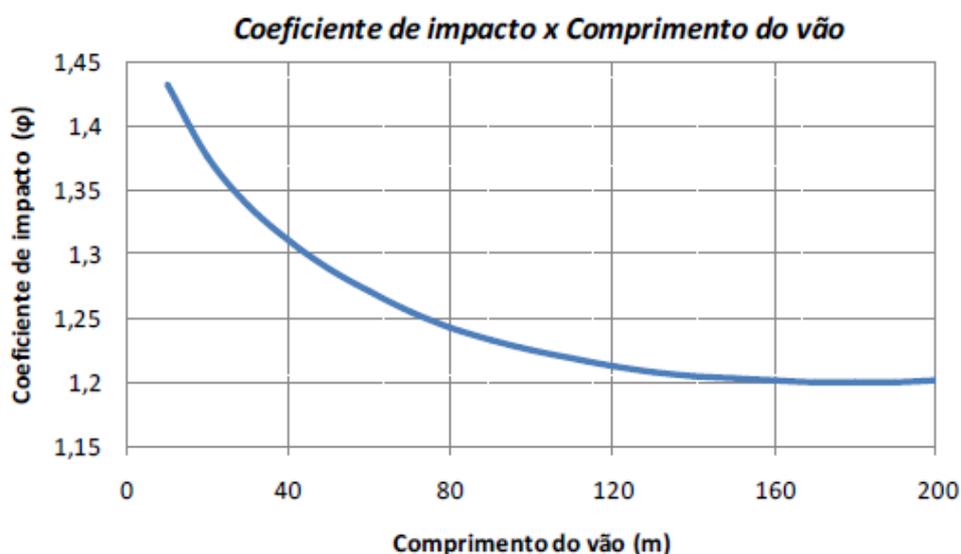
b) nos elementos estruturas de obras ferroviária:

$$\varphi = 0,001 \cdot (1600 - 60\sqrt{l} + 2,25l) \geq 1,2 \quad (10)$$

Onde:

$l$  é o comprimento de cada vão teórico do elemento carregado, qualquer que seja o sistema estrutural, em metros.

No caso de vãos desiguais, em que o menor vão seja igual ou superior a 70% do maior, permite-se considerar um vão ideal equivalente à média aritmética dos vãos teóricos. No caso de vigas em balanço,  $l$  é tomado igual a duas vezes o seu comprimento. Não deve ser considerado o impacto na determinação do empuxo de terra provocado pelas cargas móveis, no cálculo de fundações e nos passeios das pontes rodoviárias”.



**Figura 11 – Figura 10 – Fluxograma para verificação da necessidade de análise dinâmica**  
**Fonte: Cunha (2011)**

O coeficiente de impacto devido a estruturas de obras rodoviárias não deve mais ser obtidos através da norma citada acima pois foram revisados na NBR 07188 (ASSOCIAÇÃO..., 2013).

## 2.6 MODELAGEM DE AMORTECIMENTO VISCOSO

(Frýba, 1995 p.95) afirma que o amortecimento é uma propriedade desejável, pois na maioria dos casos, reduz a resposta dinâmica e faz com que a ponte atinja antes o estado de equilíbrio.

O autor explica que as causas do amortecimento são muito complexas. Durante a vibração, uma forma de energia de dissipação muda para outra (potencial em cinética e vice-versa), parte da energia é perdida por deformação plástica do material ou se transforma em outras formas de energia (térmica, acústica, etc.).

As fontes de amortecimento são tanto internas como externas.

As fontes internas incluem fricção interna do material durante a deformação, abertura de fissuras, etc. As fontes externas incluem fricção nos suportes e rolamentos e no lastro, propriedades viscoelásticas do solo, etc. Obviamente, essas fontes de amortecimentos são muitas, tornando-se impossível considerar todas no cálculo de engenharia.

O amortecimento depende do material (aço, concreto armado, concreto protendido), e do estado do material (presença de fissuras, lastro da estrutura).

A magnitude do amortecimento também depende da amplitude de vibração, (BRAUNE et al. , 1997; KORENEVE et al., 1972; apud FRÝBA,1995 p. 95 ), a influência da vibração forçada ainda não foi completamente investigada (FRÝBA, 1995 p.95).

O amortecimento depende muito pouco da frequência de vibração no intervalo até 50 Hz (intervalo de vibração da maioria das pontes). (IDEM, 1995 p.95)

Normalmente, a matriz de amortecimento  $[C]$  é computada usando o amortecimento de *Rayleigh* o qual baseia-se nas propriedades elásticas iniciais do sistema. Esta prática é baseada na noção de que a energia de dissipação devido ao amortecimento viscoso é negligenciável comparada com a energia de dissipação devido a não linearidade do material na fase plástica. Contudo, aplicações convencionais do amortecimento de *Rayleigh* podem levar a amortecimentos altos e irreais. (HALL, 2006)

Pant e Wijeyewickrerna (2012) analisaram os efeitos do amortecimento viscoso na resposta de bases isoladas reforçadas de edifícios de concreto submetidos a esforços sísmicos. Foi utilizado um edifício de 3 andares, cujo modelo reduzido foi testado anteriormente em uma mesa vibratória. Para o cálculo foi utilizado elementos finitos tridimensionais e diferentes formulações de amortecimento viscoso na estrutura. A análise adotada foi não linear.

O amortecimento foi analisado para os deslocamentos, aceleração e esforço cortante e a diferença entre o cálculo teórico e o modelo experimental foram computados.

Os amortecimentos foram aplicados apenas na superestrutura, onde foi dividido em amortecimento massa-proporcional ( $c=a_0m$ ), amortecimento rigidez-proporcional ( $c=a_1k$ ) e amortecimento de *Rayleigh*, que corresponde a combinação dos amortecimentos rigidez-proporcional e massa-proporcional. Os amortecimentos foram calculados pela frequência da estrutura ou pela análise modal.

Através da investigação descrita acima, o autor concluiu que aplicando o Amortecimento de *Rayleigh* onde os coeficientes de amortecimentos  $a_0$  e  $a_1$  são calculados pela frequência da superestrutura e amortecimento massa-proporcional devem ser evitados, pois estas aproximações podem produzir grandes erros na resposta dinâmica.

Amortecimento de *Rayleigh* onde os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$  são calculados a partir das frequências da base isolada, pode ser usado. No entanto, a razão de amortecimento deve ser cuidadosamente selecionada pois a resposta do edifício depende enormemente disso. Como alternativa, amortecimento com rigidez-proporcional onde o coeficiente  $a_1$  é computado a partir das frequências da superestrutura pode ser usado, desta forma a resposta na estrutura não depende significativamente da razão de amortecimento adotada.

Ryan e Polanco (2008) estudaram a energia de dissipação em edifícios de bases isoladas com três, cinco e oito andares.

O cálculo foi feito através de modelos bidimensionais e considerando o comportamento elástico linear.

Foi aplicado o amortecimento de *Rayleigh* apenas na superestrutura. De acordo com o estudo dos autores, o amortecimento de *Rayleigh* resulta na indesejável supressão da resposta do primeiro modo. Para corrigir esse problema, é preferível utilizar o método rigidez proporcional que praticamente não afeta a resposta do primeiro modo. Com o método de *Rayleigh*, negligenciou-se 10 a 25% do resultado do deslocamento no ponto mais alto do edifício.

Gonzales e Karoumi (2014) analisaram a variação das propriedades dinâmicas (amortecimento e frequência) devido aos efeitos sazonais em uma ponte ferroviária mista com lastro, bi apoiada e demonstraram que estes valores variam significativamente com as condições do ambiente e as amplitudes de vibração. Os valores de aceleração foram monitorados durante um ano utilizando a transformação de *Hilbert*, a frequência instantânea e o amortecimento viscoso foram calculados durante a vibração livre. Foram analisados mais de 1000 trens com temperaturas ambientes variando de  $-30^{\circ}$  a  $30^{\circ}\text{C}$  e faixas de amplitudes variando de  $0,5 \text{ m/s}^2$  até  $0,0 \text{ m/s}^2$ , a ponte analisada foi a *Skidtråsk* na Suécia.

A ponte obteve variação no comportamento não linear durante o ano, sendo acentuado durante o inverno. As frequências naturais medidas para amplitudes próximas a zero durante o verão foram de 3,85% a 4,65% e durante o inverno

aumentaram de 4,50% a 6,24%. O amortecimento passou de 0,5% durante o verão para valores maiores de 1,0 % durante o inverno. A ponte trabalha mais de modo não-linear durante o inverno que durante o verão concordando com a hipótese de solo e lastro congelados no comportamento da ponte.

De acordo com Calçada et al. (2008), são recomendados os valores de amortecimento para pontes ferroviárias submetidas a trens de alta velocidade, conforme mostra a Tabela 6:

**Tabela 6 – Valores de amortecimento proposto para projetos**

Tipo de Ponte Ferroviária	$\xi$ Limite mínimos de percentagem de amortecimento crítico (%)	
	Vão L<20m	Vão L≥20m
Aço e composta	$\xi=0,5 + 0,125 (20-L)$	$\xi=0,5$
Concreto protendido	$\xi=1,0 + 0,07 (20-L)$	$\xi=1,0$
Concreto armado	$\xi=1,5 + 0,07 (20-L)$	$\xi=1,5$

**Fonte: Adaptado de Calçada et al. (2008 p. 27)**

Esta tabela não inclui a contribuição do lastro no amortecimento e pode-se observar que o valor de amortecimento para ponte *Skidtråsk* (aço com lastro) medido foi de  $\xi=0,5$ , coerente com o valor proposto por Calçada et al. (2008).

Chopra (2011 p.416) recomenda valores de amortecimento devido ações sísmicas muito superiores aos recomendados por Calçada et al. (2008). Os valores indicados no livro de Chopra foram retirados de Newmark e Hall (1982), conforme a Tabela 7.

**Tabela 7 – Valores de amortecimento recomendados**

Ponto de tensão	Tipo de estrutura	$\xi$ (%)
Tensão abaixo da metade do limite de elasticidade	Aço soldado, concreto protendido, concreto com pouca fissuração	2-3
	Concreto armado com fissuras consideráveis	3-5
	Aço aparafusado ou chumbado, estruturas de madeira aparafusada ou pregada	5-7
Tensão no limite de elasticidade	Aço soldado, concreto protendido (sem perda)	5-7
	Concreto protendido (com perda completa)	7-10
	Concreto Armado	7-10
	Aço aparafusado ou chumbado, estruturas de madeira aparafusada	10-15
	Estruturas de madeira com pregos	15-20

**Fonte: Adaptado de Newmark e Hall (1982)**

Embora, o amortecimento de *Rayleigh* não seja tão indicado quanto o método da rigidez-proporcional, esta dissertação utilizará o amortecimento de *Rayleigh* por ser o método mais utilizado em programas comerciais e em dissertações de pesquisadores e artigos científicos. Por este motivo, o valor do amortecimento considerado no trabalho é o amortecimento mínimo sugerido pelas normas, a favor da segurança.

## 2.7 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA (ANÁLISE DO HISTÓRICO TEMPORAL)

Métodos de integração numérica são métodos de cálculo passo a passo no tempo, sem mudar a forma da equação dinâmica, como acontece na análise modal. A resposta é calculada em instantes separados por incrementos de tempo  $\Delta t$  (COOK et al.,2002).

Algoritmos de integração são largamente utilizados para resolver equações de movimento de modo a obter a resposta dinâmica para um específico carregamento. Inúmeros algoritmos de integração foram propostos e vários métodos foram utilizados para desenvolver algoritmos de integração, como series de *Taylor*, funções polinomiais, método do peso residual, princípio de *Hamilton*, método dos mínimos quadrados, *Wilson  $\theta$* , *Houbolt*, diferença central, etc.

Os métodos de integração se dividem em implícitos e explícitos. Métodos explícitos são métodos onde o deslocamento do próximo passo é determinado pela aceleração, velocidade e deslocamento do passo anterior. Estes métodos são condicionalmente estáveis, o que significa que existe um passo de tempo crítico ( $\Delta t_{cr}$ ) que deve ser suficientemente pequeno. Embora a análise necessite de mais passos, o custo computacional é em geral menor que nos métodos implícitos.

Os métodos implícitos são incondicionalmente estáveis independente do  $\Delta t$  escolhido, a escolha do  $\Delta t$  é importante apenas para acuracidade dos resultados. Em geral, pode ser escolhido um  $\Delta t$  muito maior que no método explícito.

O método implícito é o método mais apropriado para análise dinâmica, o método explícito é melhor para análise de propagação de ondas (geralmente causada

para cargas de impacto) mas não é muito adequado para análise dinâmica. Ambos os métodos acomodam bem a não linearidade (COOK et al., 2002 p.409).

Um método é considerado convergente se o erro para um específico intervalo de tempo, reduz com a redução deste intervalo. Um método é considerado consistente se o limite superior do resíduo (erro para satisfazer a equação de movimento) é uma potência constante de intervalo de tempo. A avaliação da acuracidade dos métodos de integração é determinada, geralmente, pela dissipação e dispersão (HILBERT; HUGHES, 1978). A dissipação (decaimento da amplitude) e a dispersão (amplitude do período) são dois critérios utilizados para avaliar o desempenho de um algoritmo de integração. (CHOPRA, 2011)

Inúmeros algoritmos de integração têm sido propostos. Houbolt (1951) sugeriu um dos mais antigos métodos implícitos incondicionalmente estáveis que utiliza a terceira ordem da interpolação de *Lagrange* para simular os vetores de deslocamentos e velocidades em cada incremento de tempo. Este método se mostrou excessivamente dissipativo em frequências baixas e não é autoiniciável. Em 1959, *Newmark* apresentou um dos mais comuns métodos implícitos utilizados para análise dinâmica utilizando as séries de *Taylor* com dois parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  que controlam a estabilidade e acuracidade da integração. Para garantir a precisão e a condição de estabilidade, deve-se utilizar  $\gamma = 1/2$  e  $\beta \geq 1/4$ . No entanto o algoritmo de *Newmark* não é dissipativo pois quando se introduz dissipação numérica se perde a precisão do método. Muitos estudos foram feitos para aprimorar a precisão do método como *Wilson- $\theta$*  (WILSON et al., 1972), *HHT- $\alpha$*  (HILBERT et al., 1977), método da colocação (HILBERT; HUGHES, 1978), *WBZ- $\alpha$*  (WOOD et al., 1980), método  $\rho$  de *Bazzi e Anderheggen* (BAZZI; ANDERHEGGEN, 1982) e método  $\alpha$  generalizado (CHUNG; HILBERT, 1993). Alguns algoritmos de ordem maior foram propostos baseados nestes conceitos, como por exemplo, Zienkiewicz et al. (1984) utilizaram o método do peso residual para formular algoritmos de ordem maior e de uma etapa. (ZIENKIEWICZ et al., 1984).

Fung aprimorou a acuracidade do método de *Newmark* com o auxílio de uma combinação linear dos resultados avaliados em alguns pontos específicos do cálculo. (FUNG, 1998). Atualmente inúmeros métodos numéricos têm sido propostos como o método da quártica *spline-B* modificado proposto por Shojaee et al. (SHOJAEI et al.,

2015) e o método implícito composto proposto por Batthe e Baig (BATTHE; BAIG, 2005). Outros métodos foram descritos com mais detalhes na sequência.

Liu et al. (2011) apresentam um método de integração numérica confiável para não linearidade dinâmica de segunda ordem em problemas de engenharia estrutural. O método aplica tanto a forma diferencial da aceleração retrograda (*backward acceleration*) quanto a regra trapezoidal (a mesma utilizada no método de *Newmark*) resultando em um único passo autoiniciável e em um algoritmo de segunda ordem. Com o mesmo custo computacional que o custo da regra trapezoidal, o método proposto continua estável em grandes deformações e grande intervalo de tempo. As principais vantagens desse método são sua aplicabilidade tanto em análises lineares e não lineares, não necessita adicionar multiplicadores e parâmetros artificiais (como multiplicadores de *Lagrange*), é fácil de implementar em *softwares* existentes. De acordo com o autor, de todos os métodos numéricos disponíveis, *Newmark -  $\beta$*  é o mais eficiente e comumente usado, como o método da diferença central ( $\beta = 0$ ), o método *Fox-Goodwin* ( $\beta = 1/12$ ), método da aceleração linear ( $\beta = 1/6$ ), método da regra trapezoidal ( $\beta = 1/4$ ). O método proposto é um novo membro da família de *Newmark* ( $\beta = 1/2$ ), proposto para resolver o problema com os valores iniciais devido à simulação por elementos finitos de sólidos e estruturas. O novo método conserva a energia total. Usando as iterações de *Newton-Raphson*, apenas um conjunto de equações implícitas necessitam ser resolvidas no intervalo de tempo desejado. De acordo com os dados numéricos, o método proposto é uma ferramenta poderosa para análise não linear de forma prática.

Fujikawa et al. (2003) desenvolveram um método numérico que tem grande precisão e dissipação numérica mas necessita uma matriz de rigidez grande. De acordo com o autor, o método *Newmark -  $\beta$*  é absolutamente estável, mas não tem dissipação numérica. Os métodos de *Houbolt's*, *Wilson's*, Colocação, HHT-  $\alpha$ , método generalizado- $\alpha$  foram desenvolvidos para levar em conta essa dissipação, no entanto apresentam alguns problemas. O método de *Houbolt* e de *Wilson* são excessivamente dissipativos para baixas frequências  $\Delta t/T=0,02-0,05$ , portanto deve-se utilizar intervalos de tempo pequeno para manter a precisão. Além disso, nos métodos *Wilson* e no método da colocação, uma larga flutuação ocorre no início do cálculo. Os métodos HHT-  $\alpha$  e generalizado-  $\alpha$  são difíceis de aplicar em problemas não lineares. Os valores encontrados com o método aprimorado foram comparados com os

métodos de *Newmark* e *Wilson* e os autores concluíram que este método é incondicionalmente estável, é mais preciso que os métodos de *Newmark* e *Wilson*, possui dissipação numérica suficiente para suprimir altos modos além de ser fácil de aplicar em problemas não lineares.

### 3 MATERIAL E MÉTODO

#### 3.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DA PONTE FERROVIÁRIA

O método dos elementos finitos é um método numérico aplicado principalmente a problemas complexos onde não se pode obter soluções satisfatórias por métodos analíticos.

Historicamente, a origem do método pode ser encontrada nos trabalhos de *Fermat e Bernouilli* (1743) com o cálculo de variações, mas apenas no início do século XX com o progresso em análises com o método de *Galerkin* que foi difundido.

Em 1943 *Robert Courant* introduziu o princípio variacional às funções de bases, introduzindo um domínio considerado “elementos”. Com o desenvolvimento dos computadores este trabalho teve aplicações com os trabalhos pioneiros de *Zienkiewicz e Argyris* que definiram o método em 1960.

A Mecânica dos Meios Contínuos e mais especificamente a Teoria da Elasticidade, tem como preocupação básica o desenvolvimento de modelos matemáticos que possam representar adequadamente a situação física real do problema. A teoria da elasticidade tem auxiliado muito na determinação de variáveis envolvidas na determinação do campo de deslocamentos, deformações internas e tensões atuantes. Porém, a aplicação de tais teorias a casos práticos apresenta dificuldades.

O Método dos Elementos Finitos é seguramente o processo que mais tem sido utilizado para a discretização de meios contínuos, podendo ser aplicado para outros problemas além do elástico-linear para o qual foi inicialmente desenvolvido.

A análise estrutural pode ser feita por elementos finitos de barra, elementos planos, elementos de placa ou casca ou ainda por elementos sólidos ou axi-simétricos.

As classes de problemas solucionados pelo método de elementos finitos abrangem sólidos e estruturas, térmica e fluidos, eletromagnetismo, acústica e vibrações, entre outros.

### 3.2 APRESENTAÇÃO DA ESTRUTURA ESTUDADA

A estrutura estudada é uma ponte ferroviária da empresa Engefer, projeto do engenheiro Fernando Uchôa Cavalcanti, publicada na revista ESTRUTURA 93, em dezembro de 1980.

A ponte é composta por duas vigas simétricas em concreto armado protendido com seções variáveis, um tabuleiro em concreto, lastro, dormentes e trilhos. As vigas da ponte possuem comprimento de 30,60 m, o vão de cálculo considerado é de 30,0 m, a alma da viga varia de 70 cm nos 3,00 m das extremidades e 25 cm na parte central, ambos com formato "I" (Figura 12), a altura das vigas é de 2,85 m. A laje tabuleiro tem 25 cm de espessura no meio do vão e 15 cm nas extremidades devido ao caimento para a drenagem da via. O lastro é composto de material granular e possui uma espessura média de 30 cm abaixo do dormente. As duas vigas são unidas pela laje em concreto e pelas transversinas localizadas nas extremidades das vigas e no meio do vão.

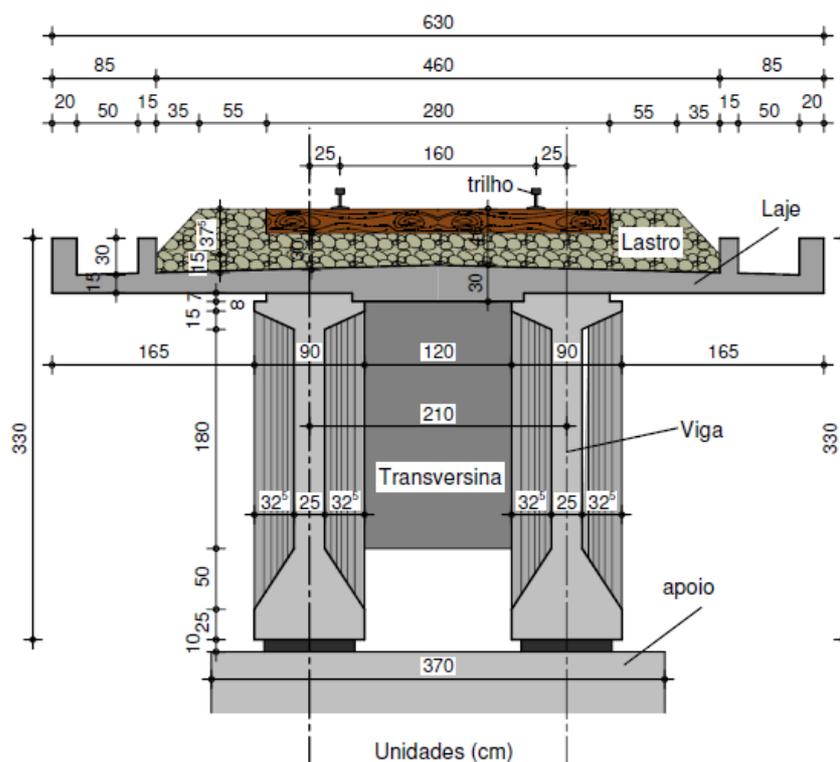
O concreto considerado para o dimensionamento da ponte possui resistência de 28 MPa.

As vigas possuem 8 cabos de protensão (C1 a C8) de 12Ø12,7 localizados de modo a otimizar a estrutura, seguindo o diagrama dos momentos fletores.

Ressalta-se que este projeto foi utilizado apenas para fins acadêmicos e ilustrativo.

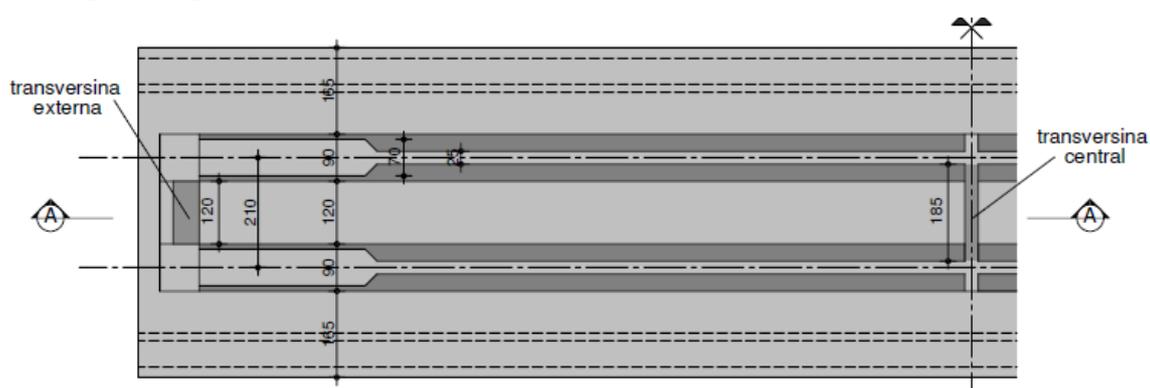
Nas próximas páginas é apresentado o projeto da ponte ferroviária:

A Figura 12 mostra a seção transversal da ponte ferroviária modelada. As vigas possuem seção variável e são conectadas pela laje e pelas transversinas. Nesta seção está indicado o lastro de concreto, dormente e trilhos utilizados no projeto. A laje variável foi considerada na inércia da ponte.



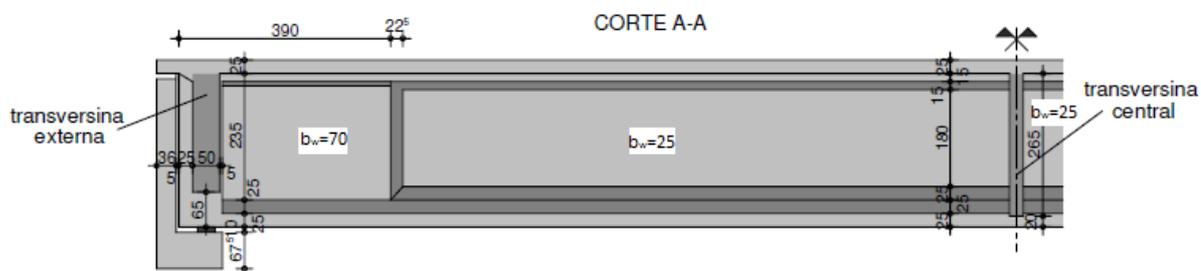
**Figura 12 – Seção transversal da ponte ferroviária**  
**Fonte: Autoria própria**

A Figura 13 indica meia seção da ponte ferroviária simétrica em planta. Com esta vista, pode-se analisar a localização das transversinas e a variação da dimensão das vigas longitudinais.



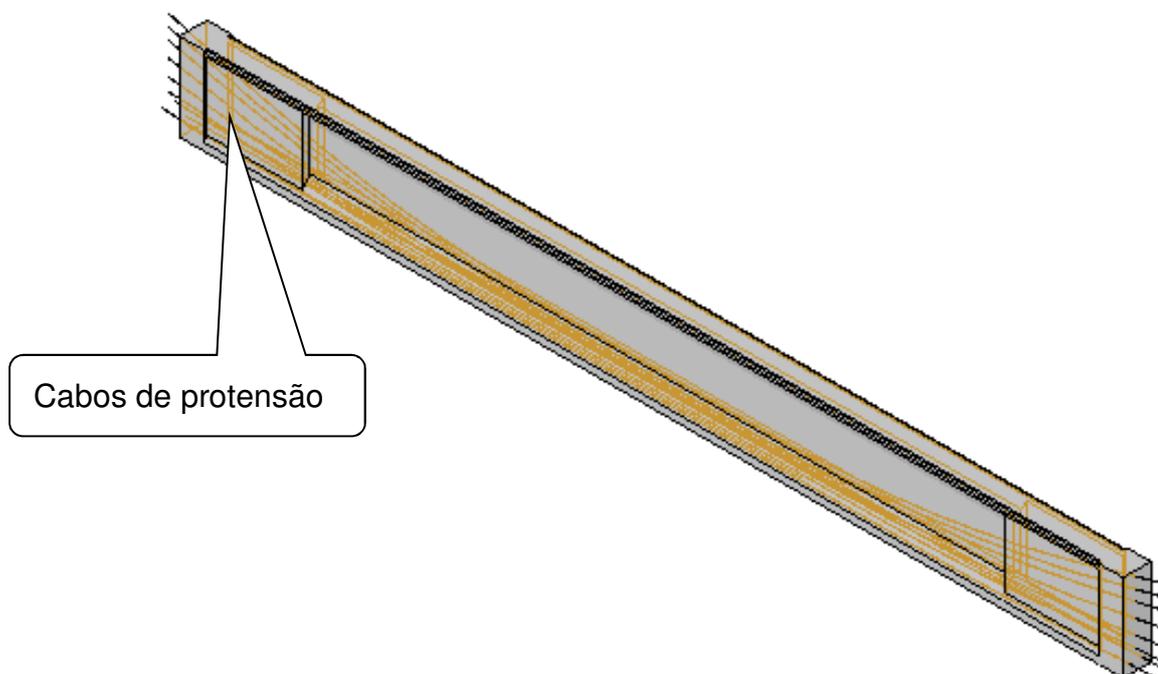
**Figura 13 – 1/2 Planta da ponte ferroviária**  
**Fonte: Autoria própria**

A Figura 14 indica meia seção da ponte ferroviária simétrica em corte, facilitando a compreensão das transversinas e apoios.



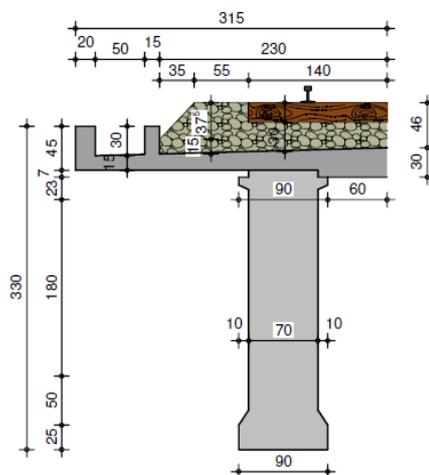
**Figura 14 – Corte A-A da ponte ferroviária**  
**Fonte: Autoria própria**

A Figura 15 Figura 13 é a vista 3D de uma das longarinas (viga longitudinal) da ponte. Nesta seção indica-se a localização dos cabos de protensão.



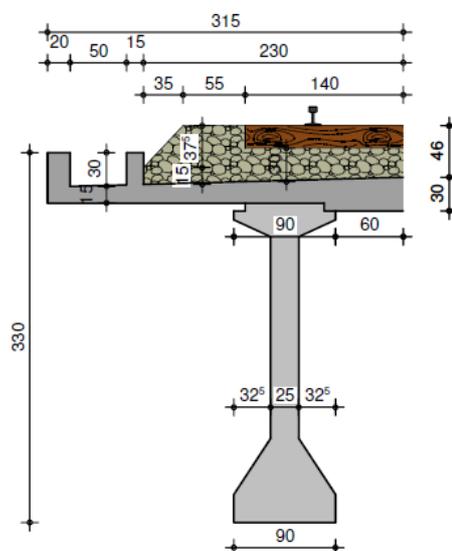
**Figura 15 – Vista 3D**  
**Fonte: Autoria própria**

O modelo da ponte ferroviária foi dividido em dois tipos de elementos finitos, os elementos de extremidades, com maior inércia estão indicados na Figura 16.



**Figura 16 – Seção de cálculo elemento finito apoios**  
Fonte: Autoria própria

Os elementos centrais da ponte ferroviária estão indicados na Figura 17.



**Figura 17 – Seção de cálculo elemento finito central**  
Fonte: Autoria própria

### 3.3 MODELO DA PONTE FERROVIÁRIA EM ELEMENTOS FINITOS

A rigidez da ponte ferroviária é considerada nas propriedades geométricas das seções transversais apresentadas na Tabela 8. A modelagem é feita

considerando a fase final, viga pronta, pois o trem só trafegará na viga nestas condições, não sendo influenciado pelas etapas construtivas.

As seções de cálculo estão indicadas nas Figura 16 e Figura 17.

A ponte possui duas vigas divididas em 30 elementos de pórtico plano cada e 3 elementos que correspondem às transversinas. Cada elemento possui 3 graus de liberdade por nó conforme indicado na Figura 18.

As propriedades geométricas dos elementos indicados na Figura 18 estão resumidas na Tabela 8 e representam 1 m de viga longitudinal de concreto acrescida da laje na inércia e na área. O lastro não está sendo considerado nestes valores.

**Tabela 8 - Propriedades da Ponte  $E_{cs} = 25187 \text{ MPa}$  ( $f_{ck}=28 \text{ MPa}$ )**

<b>Elemento</b>	$L_e$	$A_a$	$I_a$	$\rho_a$
1-3/28-30/31-33/58-60	1,0	2,822	2,948	2500
4-27/34/57	1,0	1,911	2,563	2500
61/63	2,1	1,1087	0,429	2500
62	2,1	0,6438	0,358	2500
Unidades	m	m <sup>2</sup>	m <sup>4</sup>	kg/m <sup>3</sup>

**Fonte: Autoria própria**

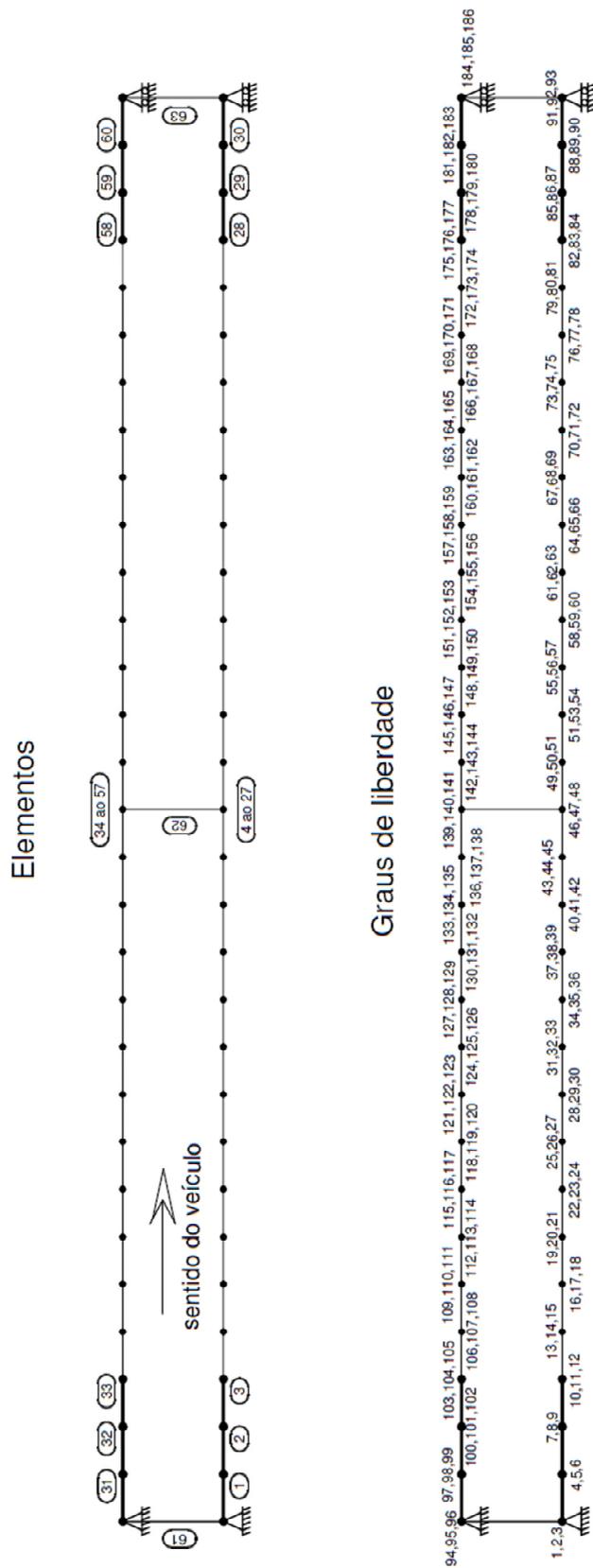
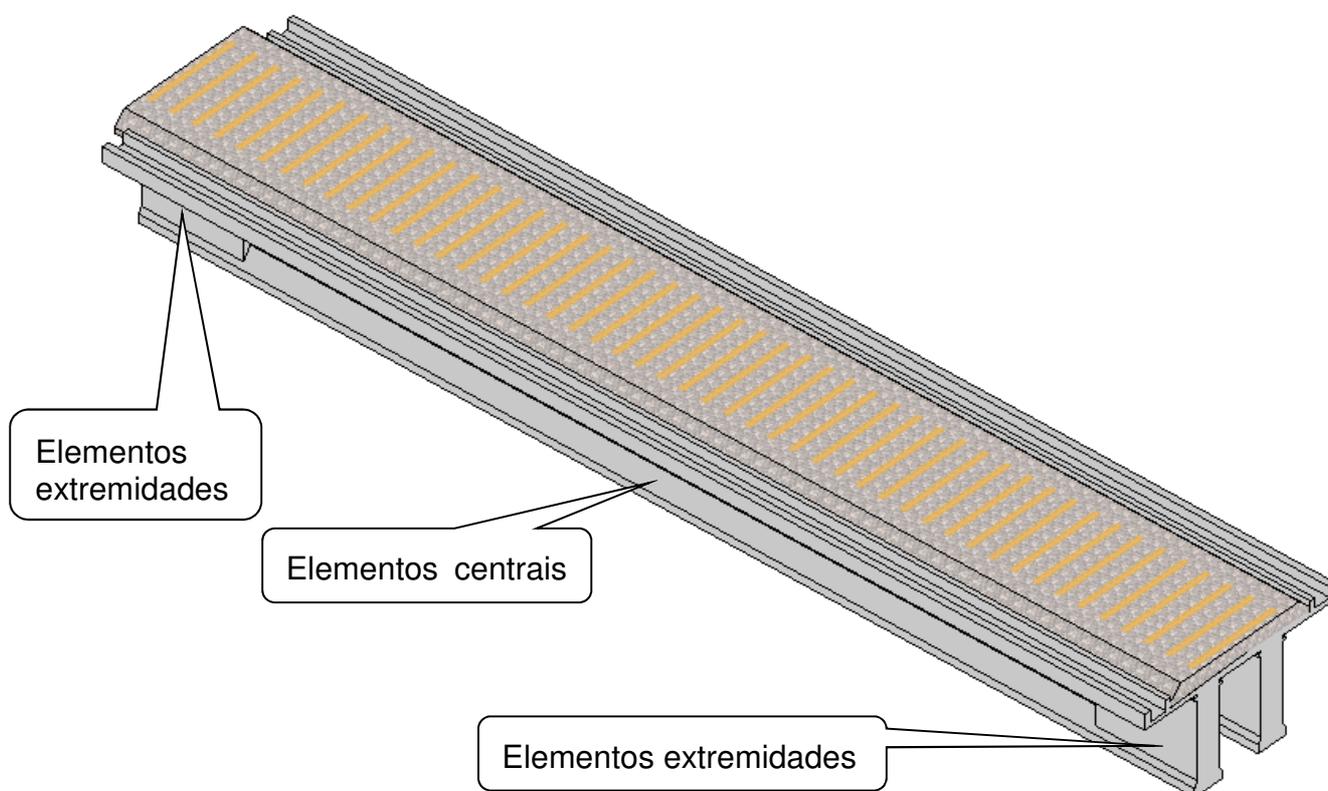


Figura 18 – Vista 2D - Elementos finitos ponte ferroviária  
 Fonte: Autoria própria

A Figura 19 representa uma vista 3D da ponte ferroviária, indicando a localização do elemento finito de pórtico plano.

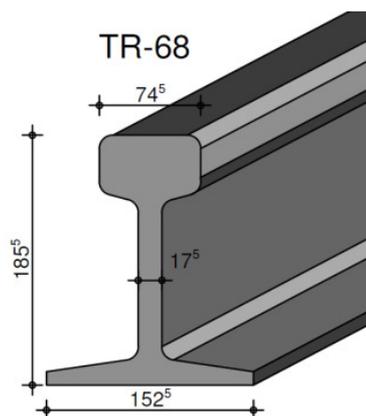


**Figura 19 – Localização elementos finitos ponte ferroviária**  
**Fonte: Autoria própria**

### 3.4 TRILHOS SOBRE A PONTE FERROVIÁRIA

O trilho utilizado nesta dissertação foi o TR 68. Este trilho foi dividido em elementos de 1 m de comprimento e calculado pelo método dos elementos finitos de pórtico.

A área nominal da seção transversal do trilho é  $86,3 \text{ cm}^2$  e o momento de inércia é  $3950 \text{ cm}^4$ . As dimensões do trilho estão indicadas em mm na Figura 20.



**Figura 20 – Trilho TR-68**  
**Fonte: Autoria própria**

O amortecimento adotado para o elemento do trilho foi de 0,5%.

### 3.5 LASTRO

A rigidez e amortecimento do lastro foram obtidos tomando-se a média de diversos estudos publicados. Os estudos utilizados nesta média estão indicados no capítulo 2.1. A Tabela 9 mostra os valores de rigidez  $k_{BL}$  e amortecimento  $c_{BL}$  verticais e horizontais considerados na análise. Não se avaliou o confinamento devido à aplicação da carga.

**Tabela 9 - Valores coeficientes de rigidez e amortecimento do lastro**

	$k_{BL}$		$c_{BL}$	
	Vertical	Horizontal	Vertical	Horizontal
	60.000 kN/m <sup>2</sup>	60.000 kN/m <sup>2</sup>	50 kNs/m <sup>2</sup>	50 kNs/m <sup>2</sup>

**Fontes: Autoria própria**

## 4 EMBASAMENTO TEÓRICO

Este capítulo tem o objetivo de apresentar a teoria de cálculo utilizada para o desenvolvimento dos códigos computacionais.

### 4.1 DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

No cálculo das estruturas, o problema dinâmico difere do estático em dois importantes aspectos. A primeira diferença é a variação da carga com o tempo na análise dinâmica, portanto para cada intervalo de tempo existe uma variação de carga e resposta. Diferentemente da solução estática, onde se obtém apenas uma resposta, a solução dinâmica estabelece uma sucessão de respostas correspondente a todos os intervalos de tempos considerados, levando a soluções mais complexas e que consomem mais tempo de processamento.

A segunda distinção entre problema estático e dinâmico está no equilíbrio das forças. Se uma viga é submetida a uma carga estática  $f$ , os momentos internos, cortantes e deslocamentos dependem apenas deste carregamento e podem ser computados pelo equilíbrio das forças, enquanto que, para o carregamento dinâmico  $f(t)$  o resultado da viga não depende apenas do carregamento, mas das forças inerciais que se opõem à aceleração produzida.

Portanto, os momentos e esforços cortantes internos na viga devem equilibrar não apenas a força  $f(t)$  mas também a aceleração produzida na viga. (CLOUGH; PENZIEN, 2003).

#### 4.1.1 Equações de movimento:

A equação de movimento (11) é uma mera expressão do equilíbrio das forças. Para uma determinada força  $f(t)$  aplicada, resultam três forças resistentes: força inercial  $f_I(t)$ , força de amortecimento  $f_D(t)$  e força elástica  $f_S(t)$ :

$$\{f_I(t)\} + \{f_D(t)\} + \{f_S(t)\} = \{f(t)\} \quad (11)$$

De acordo com o princípio *D'Alembert* a força inercial é o produto da massa e aceleração, conforme indicado na equação (12):

$$\{f_I(t)\} = [m]\{\ddot{u}(t)\} \quad (12)$$

Assumindo o mecanismo de amortecimento viscoso, a força de amortecimento é o produto entre a constante de amortecimento  $[c]$  e a velocidade, indicado na equação (13):

$$\{f_D(t)\} = [c]\{\dot{u}(t)\} \quad (13)$$

Finalmente, a força elástica é o produto da rigidez da mola e o deslocamento, conforme equação (14):

$$\{f_S(t)\} = [k]\{u(t)\} \quad (14)$$

A partir das equações (12), (13) e (14), obtém-se a equação (15) de movimento do sistema:

$$[m]\{\ddot{u}(t)\} + [c]\{\dot{u}(t)\} + [k]\{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (15)$$

No caso de excitação causada pelas irregularidades da via (excitação da base), a força resultante  $\{f(t)\}$  equivale a irregularidade da via que pode ser considerada harmônica, contínua ou randômica.

#### 4.1.2 Frequências de vibração

Quando se descreve o comportamento dinâmico, as frequências de ressonâncias ou frequências naturais, são os pontos centrais do problema. O sistema excitado próximo a frequência natural tem os movimentos amplificados. A frequência natural é obtida através do problema de autovalores generalizados. Como resultado, o vetor de frequências circulares  $\omega_n$  em cada grau de liberdade, através da equação (16).

$$\|[k] - \omega_n^2 * [m]\| = 0 \quad (16)$$

A frequência cíclica é dada pela equação (17).

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (17)$$

Onde  $T$  é o tempo necessário para completar um ciclo, também chamado de período. Usualmente  $T$  é medido em segundos e  $f$  em ciclos por segundo ou *Hertz* (Hz).

#### 4.1.3 Amortecimento de Rayleigh

Foi utilizado o amortecimento de *Rayleigh* onde a matriz de amortecimento global  $[c]$  é definida como a combinação linear da massa global e da rigidez global indicados na equação (18);

$$[c] = a_0[m] + a_1[k] \quad (18)$$

Os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$  são obtidos da razão de amortecimento  $\xi_n$  e pela frequência natural dos modos  $i$  e  $j$ , equações (19),(20),(21) explicados no próximo parágrafo.

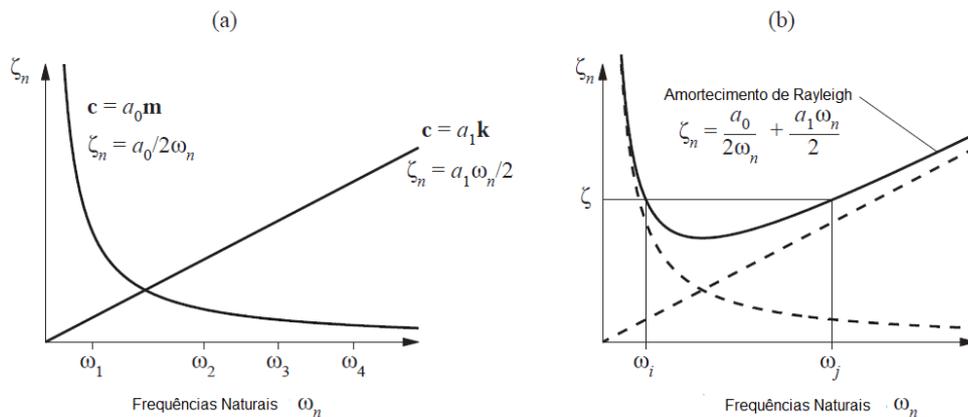
$$\xi_n = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1\omega_n}{2} \quad (19)$$

$$a_0 = \xi_n \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad (20)$$

$$a_1 = \frac{2\xi_n}{\omega_i\omega_j} \quad (21)$$

Segundo Chopra (2011 p.457-458)  $\omega_i$  e  $\omega_j$  são as frequências dos modos  $i$  e  $j$ , respectivamente. Os dois modos  $i$  e  $j$  foram escolhidos para garantir aproximadamente o mesmo amortecimento para todos os modos significativamente contribuintes para a resposta da estrutura. Tipicamente,  $\omega_i$  é selecionado para ser a frequência do primeiro modo e  $\omega_j$  corresponde geralmente ao segundo ou terceiro modo de vibração.

Está indicado na Figura 21 o amortecimento em relação a frequência natural. Na Figura 21 (a) estão indicados os métodos de amortecimento massa-amortecimento proporcional e rigidez-amortecimento proporcional, na Figura 21 (b) estão indicados a soma dos dois amortecimentos ou o amortecimento de *Rayleigh*.



**Figura 21 – Amortecimento de *Rayleigh***  
**Fonte: Adaptado de Chopra (2011)**

## 4.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Geralmente não é possível obter a solução analítica da equação de movimento se a força aplicada  $p(t)$  ou aceleração  $\ddot{u}(t)$  varia arbitrariamente com o tempo ou se o sistema é não linear. Esses problemas podem ser resolvidos com a utilização da integração numérica. Conforme comentado no item 2.7, o método de integração se divide em implícito e explícito. Métodos explícitos são condicionalmente estáveis para um  $\Delta t$  suficientemente pequeno e têm menor custo computacional, no entanto, nesse trabalho foi utilizado o método de *Newmark* que é um método implícito, por ser o método mais apropriado para análise dinâmica. Além disso, pode incorporar a não linearidade sem muitos problemas. O método explícito é melhor para análise de propagação de ondas (geralmente causada para cargas de impacto) mas não é muito adequado para análise dinâmica, embora também acomode bem a não linearidade (COOK et al., 2002 p.409).

De acordo com Chopra (2012, p.175), os parâmetros para garantir acuracidade e estabilidade numérica para aceleração média são  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ .

A formulação indicada é uma formulação modificada para permitir soluções sem iterações conforme descrito nas equações (22) a (29).

A equação a ser resolvida em cada passo de tempo é:

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = P_{i+1} \quad (22)$$

Onde  $\dot{u}_{(i+1)}$  e  $\ddot{u}_{(i+1)}$  podem ser expressos por:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{4}{(\Delta t)^2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{4}{\Delta t} \dot{u} - \ddot{u}_i \quad (23)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{2}{\Delta t} (u_{i+1} - u_i) - \dot{u}_i \quad (24)$$

Substituindo as equações (23) e (24) na equação (22), obtém-se:

$$\hat{k} u_{i+1} = \hat{p}_{i+1} \quad (25)$$

Onde:

$$\hat{k} = k + \frac{2}{\Delta t} c + \frac{4}{\Delta t^2} m \quad (26)$$

$$\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} \left[ \frac{4}{(\Delta t)^2} m + \frac{2}{\Delta t} c \right] u_i + \left[ \frac{4}{\Delta t} m + c \right] \dot{u}_i + m \ddot{u}_i \quad (27)$$

Com  $\hat{k}$  e  $\hat{p}_{i+1}$  obtidos através das propriedades  $m$ ,  $k$  e  $c$  e o deslocamento ( $u$ ), velocidade ( $\dot{u}$ ) e aceleração ( $\ddot{u}$ ), definidos para o tempo  $i$ , pode-se obter o deslocamento para o tempo  $i+1$ , conforme equação abaixo:

$$u_{i+1} = \frac{\hat{p}_{i+1}}{\hat{k}} \quad (28)$$

Após conhecer o deslocamento, a aceleração e velocidade no tempo  $i+1$  calculados a partir das equações (22) à (24), para começar os passos de tempo, é necessário conhecer a aceleração para o tempo  $t=0$ , que pode ser calculado segundo equação (29):

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 + c \dot{u}_0 + k u_0}{m} \quad (29)$$

#### 4.3 ELEMENTO FINITO UTILIZADO

O elemento utilizado nesta dissertação é o elemento finito de pórtico composto pelo elemento finito de barra (graus de liberdade axiais) e de viga (*Euler-Bernoulli*) e estão representados nas equações (30) e (31), o elemento está representado graficamente na Figura 22, página 62.

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$[m_e] = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

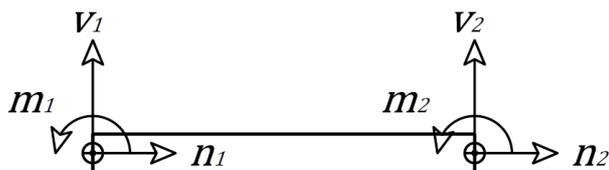
#### 4.4 CARGAS NODAIS

O trem atravessa a viga solicitando pontualmente o elemento com uma certa velocidade. Em elementos finitos, a carga pode apenas ser aplicada nos graus de liberdade, a carga pontual deve ser distribuída nos nós próximos à carga através das funções de forma, conforme equação (32) onde  $f$  corresponde a carga pontual,  $L$  é o comprimento do elemento e  $x$  é a distância da carga até o nó esquerdo.

$$\{f_e\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = f \begin{bmatrix} \frac{x}{L} \\ 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

#### 4.5 DESLOCAMENTOS

Os deslocamentos do elemento finito de pórtico são representados pelos 3 graus de liberdades em cada nó, que representam o deslocamento vertical ( $v_1$  e  $v_2$ ), horizontal ( $n_1$  e  $n_2$ ), e a rotação ( $m_1$  e  $m_2$ ) nos nós 1 e 2 respectivamente, conforme indicado na Figura 22.



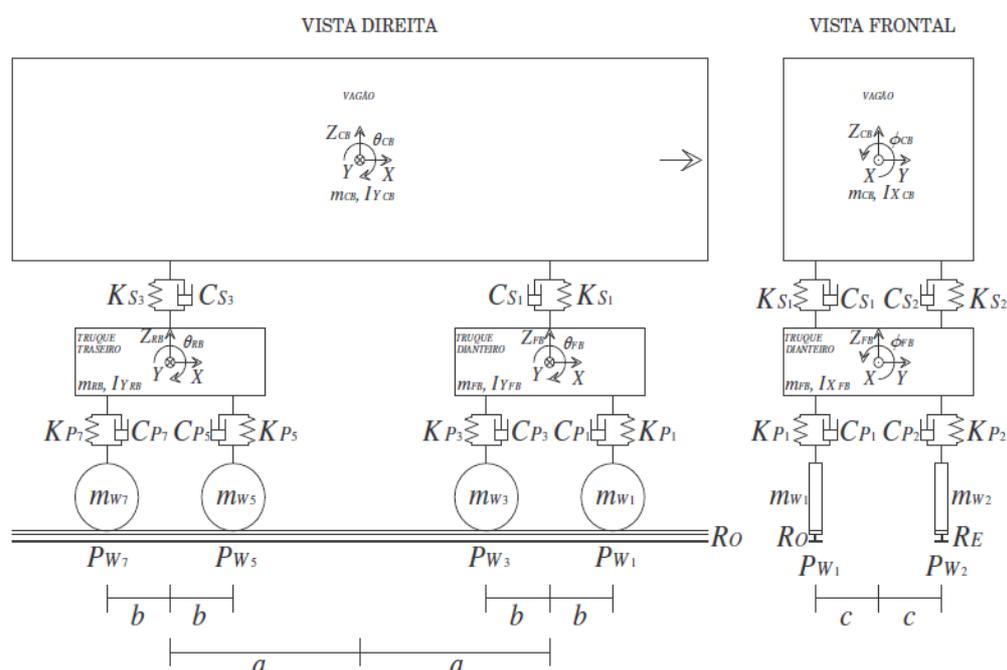
**Figura 22 – Graus de liberdade do elemento finito**  
**Fonte: Autoria própria**

A equação (33), iguala os deslocamentos descritos na Figura 22 ao vetor de força da equação (32) multiplicado pela matriz de rigidez indicado na equação (30) de cada elemento. Esta equação calcula os deslocamentos estáticos de uma estrutura.

$$\begin{Bmatrix} n_1 \\ v_1 \\ m_1 \\ n_2 \\ v_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \{f_e\}[k_e]^{-1} \quad (33)$$

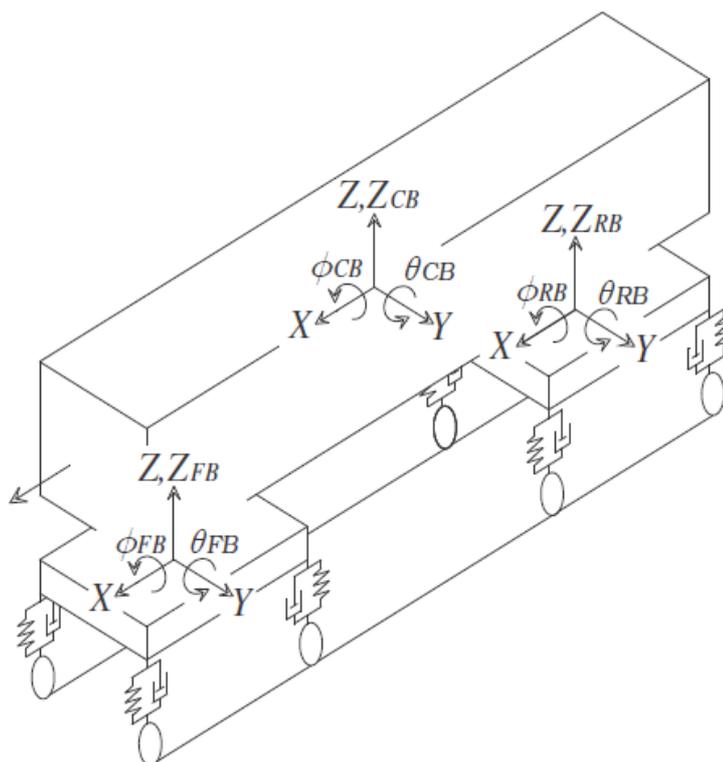
#### 4.6 MODELO DO VEÍCULO

O veículo utilizado nesta dissertação, é o veículo apresentado por Beghetto (2006), representado pela associação de corpos rígidos interconectados a sistemas de suspensões. O veículo é composto por um vagão, um truque dianteiro, um truque traseiro e um conjunto de roda, conforme mostrado na Figura 22.



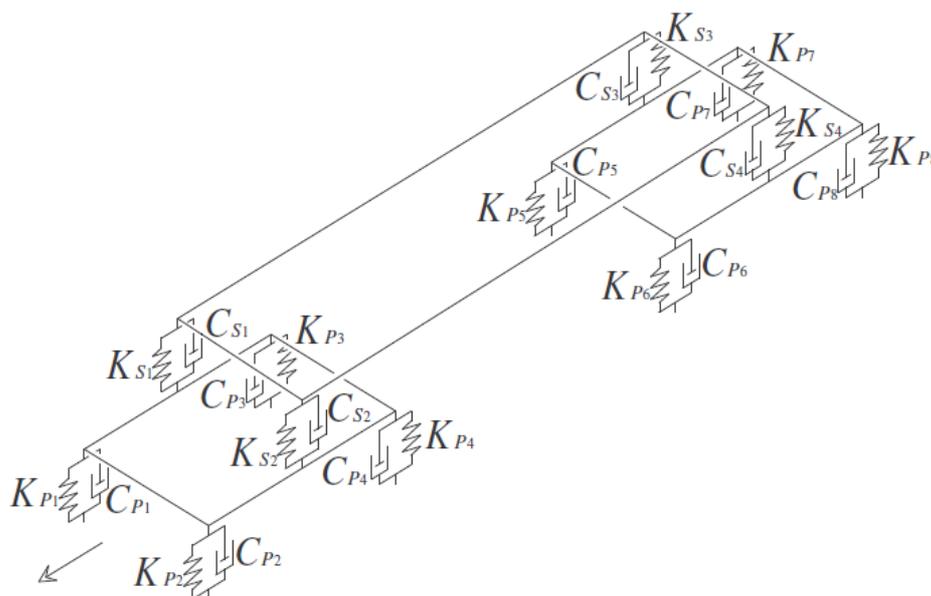
**Figura 23 – Idealização estrutural do veículo**  
**Fonte: Beghetto (2006)**

O modelo dinâmico do veículo tem 9 graus de liberdade, resultante da modelagem dos movimentos de deslocamentos vertical (3 graus de liberdade) e rotacional (6 graus de liberdade) separadamente do vagão e dos truques, dianteiro e traseiro e que estão indicados na Figura 24.



**Figura 24 – Graus de liberdade do modelo do veículo ferroviário**  
 Fonte: Beghetto (2006)

As suspensões primárias são mais rígidas comparadas as secundárias e agem entre as rodas e os truques. As suspensões secundárias agem entre os truques e o corpo do vagão, conforme Figura 25.



**Figura 25 – Disposição sistema mola-amortecedor das suspensões**  
 Fonte: Beghetto (2006)

A força  $F_R$  do veículo é transmitida para a estrutura pelos pontos de contato ( $P_W$ ) indicados na Figura 26.

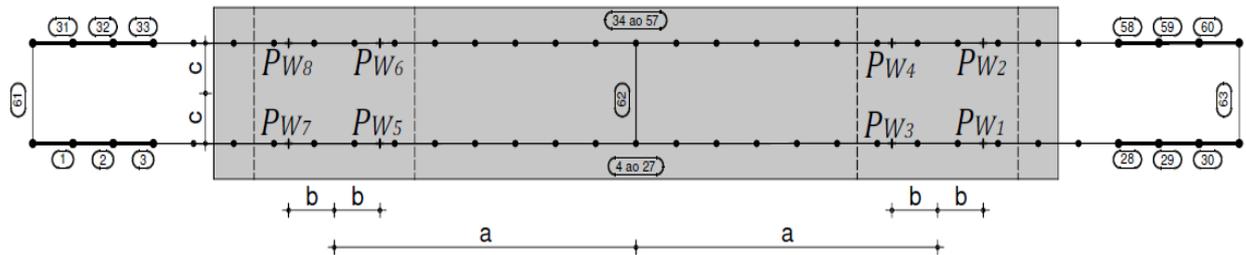


Figura 26 – Vista superior – Elemento finito da ponte e pontos de contato do veículo  
Fonte: Autoria própria

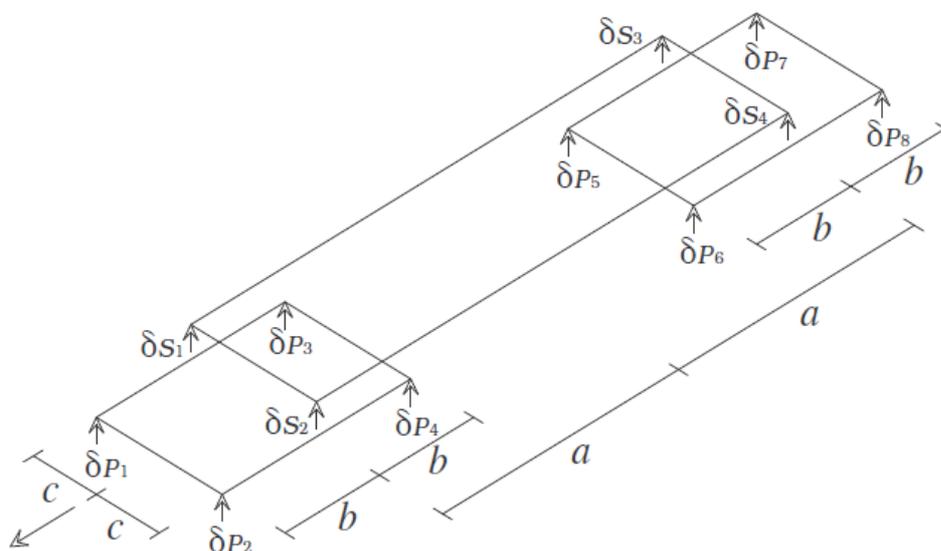
Estas forças são obtidas pela contribuição do peso dos veículos e das forças inerciais conforme equação (34) conforme Beghetto (2006).

$$F_{R_i}(t) = \left( \frac{m_{CB}}{8} + \frac{m_B}{4} + m_{W_i} \right) g + m_{W_i} \ddot{I}_{R_i}(t) + c_{P_i} \dot{\delta}_{P_i} + k_{P_i} \delta_{P_i}(t) + \frac{c_{S_i} \dot{\delta}_{S_i}}{2} + \frac{k_{S_i} \delta_{S_i}(t)}{2} \quad \text{Para } i = 1, \dots, 8 \quad (34)$$

Onde:

- $F_R(t)$  são as forças aplicadas na ponte pelo veículo (cada roda).
- $m_{CB}$ ,  $m_w$  e  $m_B$  representam as massas do vagão, da roda e dos truques (sendo calculado ora pelo truque dianteiro e ora pelo truque traseiro conforme a roda analisada) respectivamente;
- $\ddot{I}_R(t)$  é a aceleração devido à irregularidade da via, ou seja, a segunda derivada de  $I_R(t)$ ;
- $c_P$  e  $c_S$  representam os amortecimentos viscosos das suspensões primárias e secundárias respectivamente;
- $k_P$  e  $k_S$  representam as rigidezes das suspensões primárias e secundárias respectivamente;
- $\delta_P$  e  $\delta_S$  representam as equações dos deslocamentos das suspensões primárias e secundárias, respectivamente. O símbolo  $(\cdot)$  acima dos deslocamentos, representa a primeira derivada em relação ao tempo, ou seja, a velocidade.

Os deslocamentos nas suspensões primárias  $\delta_P$  e secundárias  $\delta_S$  são indicados na Figura 27.



**Figura 27 – Deslocamentos das suspensões**  
Fonte: Beghetto (2006)

As equações dos deslocamentos nas suspensões primárias e secundárias estão indicadas na equação (35) conforme Beghetto (2006):

$$\begin{aligned}
 \delta_{P_i}(t) &= Z_{FB}(t) + (-1)^i c \phi_{FB}(t) + b \theta_{FB}(t) - I_{R_i}(t) && \text{para } i = 1, 2 \\
 \delta_{P_i}(t) &= Z_{FB}(t) + (-1)^i c \phi_{FB}(t) - b \theta_{FB}(t) - I_{R_i}(t) && \text{para } i = 3, 4 \\
 \delta_{P_i}(t) &= Z_{RB}(t) + (-1)^i c \phi_{RB}(t) - b \theta_{RB}(t) - I_{R_i}(t) && \text{para } i = 5, 6 \\
 \delta_{P_i}(t) &= Z_{RB}(t) + (-1)^i c \phi_{RB}(t) + b \theta_{RB}(t) - I_{R_i}(t) && \text{para } i = 7, 8 \quad (35) \\
 \delta_{S_i}(t) &= Z_{CB}(t) + (-1)^i c \phi_{CB}(t) - a \theta_{CB}(t) - Z_{FB}(t) + (-1)^{i+1} c \phi_{FB}(t) && \text{para } i = 1, 2 \\
 \delta_{S_i}(t) &= Z_{CB}(t) + (-1)^i c \phi_{CB}(t) + a \theta_{CB}(t) - Z_{RB}(t) + (-1)^{i+1} c \phi_{FB}(t) && \text{para } i = 3, 4
 \end{aligned}$$

Onde:

- $Z_{CB}$ ,  $Z_{FB}$  e  $Z_{RB}$  representam as translações ao longo do eixo ( $Z$ ) do vagão, do truque dianteiro e do truque traseiro, respectivamente;
- $a$ ,  $b$  e  $c$  são as distâncias indicadas na Figura 27;
- $\phi_{FB}$  e  $\phi_{RB}$  são as rotações nos truques dianteiros e traseiros em torno do eixo ( $X$ ) associados à distância  $c$ ;





Sendo:

$$\begin{aligned}
c_{T_{11}} &= \sum_{i=1}^4 C_{S_i} & c_{T_{64}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^i b (C_{P_{2i-1}} + C_{P_{2i}}) \\
c_{T_{21}} &= \sum_{i=1}^4 (-1)^i c C_{S_i} & c_{T_{65}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} b c (C_{P_{2i-1}} - C_{P_{2i}}) \\
c_{T_{22}} &= \sum_{i=1}^4 c^2 C_{S_i} & c_{T_{66}} &= \sum_{i=1}^2 b^2 C_{P_i} \\
c_{T_{31}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^i a (C_{S_{2i-1}} + C_{S_{2i}}) & c_{T_{71}} &= - \sum_{i=3}^4 C_{S_i} \\
c_{T_{32}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} a c (C_{S_{2i-1}} - C_{S_{2i}}) & c_{T_{72}} &= \sum_{i=3}^4 (-1)^{i+1} c C_{S_i} \\
c_{T_{33}} &= \sum_{i=1}^4 a^2 C_{S_i} & c_{T_{73}} &= - \sum_{i=3}^4 a C_{S_i} \\
c_{T_{41}} &= - \sum_{i=1}^2 C_{S_i} & c_{T_{77}} &= \sum_{i=5}^8 C_{P_i} + \sum_{i=3}^4 C_{S_i} \\
c_{T_{42}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} C_{S_i} & c_{T_{81}} &= \sum_{i=3}^4 (-1)^{i+1} c C_{S_i} \\
c_{T_{43}} &= \sum_{i=1}^2 a C_{S_i} & c_{T_{82}} &= - \sum_{i=3}^4 c^2 C_{S_i} \\
c_{T_{44}} &= \sum_{i=1}^4 C_{P_i} + \sum_{i=1}^2 C_{S_i} & c_{T_{83}} &= \sum_{i=3}^4 (-1)^{i+1} a c C_{S_i} \\
c_{T_{51}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} c C_{S_i} & c_{T_{87}} &= \sum_{i=3}^4 (-1)^{2i-1} c (C_{P_{2i-1}} - C_{P_{2i}}) + \sum_{i=3}^4 (-1)^i c C_{S_i} \\
c_{T_{52}} &= - \sum_{i=1}^2 c^2 C_{S_i} & c_{T_{88}} &= \sum_{i=5}^8 c^2 C_{P_i} + \sum_{i=3}^4 c^2 C_{S_i} \\
c_{T_{53}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^i a c C_{S_i} & c_{T_{97}} &= \sum_{i=3}^4 (-1)^i b (C_{P_{2i-1}} + C_{P_{2i}}) \\
c_{T_{54}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{2i+1} c (C_{P_{2i-1}} - C_{P_{2i}}) + \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{S_i} & c_{T_{98}} &= \sum_{i=3}^4 (-1)^{i+1} b c (C_{P_{2i-1}} - C_{P_{2i}}) \\
c_{T_{55}} &= \sum_{i=1}^4 c^2 C_{P_i} + \sum_{i=1}^2 c^2 C_{S_i} & c_{T_{99}} &= \sum_{i=5}^8 b^2 C_{P_i}
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
k_{T_{11}} &= \sum_{i=1}^4 K_{S_i} & k_{T_{64}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^i b (K_{P_{2i-1}} + K_{P_{2i}}) \\
k_{T_{21}} &= \sum_{i=1}^4 (-1)^i c K_{S_i} & k_{T_{65}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} b c (K_{P_{2i-1}} - K_{P_{2i}}) \\
k_{T_{22}} &= \sum_{i=1}^4 c^2 K_{S_i} & k_{T_{66}} &= \sum_{i=1}^2 b^2 K_{P_i} \\
k_{T_{31}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^i a (K_{S_{2i-1}} + K_{S_{2i}}) & k_{T_{71}} &= - \sum_{i=3}^4 K_{S_i} \\
k_{T_{32}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} a c (K_{S_{2i-1}} - K_{S_{2i}}) & k_{T_{72}} &= \sum_{i=3}^4 (-1)^{i+1} c K_{S_i} \\
k_{T_{33}} &= \sum_{i=1}^4 a^2 K_{S_i} & k_{T_{73}} &= - \sum_{i=3}^4 a K_{S_i} \\
k_{T_{41}} &= - \sum_{i=1}^2 K_{S_i} & k_{T_{77}} &= \sum_{i=5}^8 K_{P_i} + \sum_{i=3}^4 K_{S_i} \\
k_{T_{42}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} K_{S_i} & k_{T_{81}} &= \sum_{i=3}^4 (-1)^{i+1} c K_{S_i} \\
k_{T_{43}} &= \sum_{i=1}^2 a K_{S_i} & k_{T_{82}} &= - \sum_{i=3}^4 c^2 K_{S_i} \\
k_{T_{44}} &= \sum_{i=1}^4 K_{P_i} + \sum_{i=1}^2 K_{S_i} & k_{T_{83}} &= \sum_{i=3}^4 (-1)^{i+1} a c K_{S_i} \\
k_{T_{51}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} c K_{S_i} & k_{T_{87}} &= \sum_{i=3}^4 (-1)^{2i-1} c (K_{P_{2i-1}} - K_{P_{2i}}) + \sum_{i=3}^4 (-1)^i c K_{S_i} \\
k_{T_{52}} &= - \sum_{i=1}^2 c^2 K_{S_i} & k_{T_{88}} &= \sum_{i=5}^8 c^2 K_{P_i} + \sum_{i=3}^4 c^2 K_{S_i} \\
k_{T_{53}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^i a c K_{S_i} & k_{T_{97}} &= \sum_{i=3}^4 (-1)^i b (K_{P_{2i-1}} + K_{P_{2i}}) \\
k_{T_{54}} &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{2i+1} c (K_{P_{2i-1}} - K_{P_{2i}}) + \sum_{i=1}^2 (-1)^i K_{S_i} & k_{T_{98}} &= \sum_{i=3}^4 (-1)^{i+1} b c (K_{P_{2i-1}} - K_{P_{2i}}) \\
k_{T_{55}} &= \sum_{i=1}^4 c^2 K_{P_i} + \sum_{i=1}^2 c^2 K_{S_i} & k_{T_{99}} &= \sum_{i=5}^8 b^2 K_{P_i}
\end{aligned} \tag{39}$$

Onde:

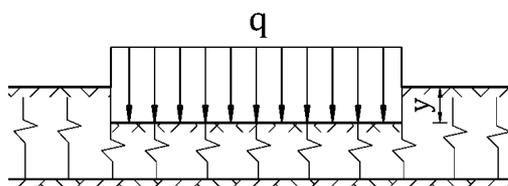
- Os símbolos  $(\cdot)$  and  $(\ddot{\cdot})$  acima das variáveis, representam a primeira e segunda derivada em relação ao tempo.
- $m_{CB}$ ,  $m_w$  e  $m_B$  representam a massa do vagão, rodas e truques respectivamente;

- $I_{Y_{CB}}, I_{X_{CB}}, I_{Y_{FB}}, I_{X_{FB}}, I_{Y_{RB}}$  e  $I_{X_{RB}}$  representam o momento de inércia do vagão, truque dianteiro e traseiro, para as direções Y e X respectivamente;
- $Z_{CB}, Z_{FB}$  e  $Z_{RB}$  representam a translação no eixo Z do vagão, truque dianteiro e traseiro, respectivamente;
- $\phi_{CB}, \phi_{FB}$  e  $\phi_{RB}$  representam a rotação ao redor do eixo X do vagão, truque dianteiro e traseiro, respectivamente;
- $\theta_{CB}, \theta_{FB}$ , e  $\theta_{RB}$  representam a rotação em torno do eixo Y do vagão, truque dianteiro e traseiro, respectivamente;
- $I_R(t)$  são as irregularidades verticais da via, indicadas no capítulo 4.9.
- $K_P$  and  $C_P$  são as molas e amortecedores da suspensão primária localizada entre as rodas e os truques.

## 4.7 ELEMENTO DE VIGA COM INTERAÇÃO DO LASTRO

### 4.7.1 Método de *Winkler*

A teoria clássica de *Winkler* de 1867 considera a estrutura apoiada sobre molas. A análise de vigas sobre fundação elástica é feita considerando que as forças da reação na fundação são proporcionais aos deslocamentos em cada ponto. A deformação vertical se caracteriza por molas elásticas lineares independentes e com espaçamentos constantes (ver Figura 28). A constante de proporcionalidade destas molas é conhecida como coeficiente de reação  $k_s$ .



**Figura 28 – Método de *Winkler***  
**Fonte: Autoria própria**

A equação (40) representa a teoria de *Winkler*, cuja carga é proporcional ao deslocamento:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial^4 x} = q = -k'_s y \quad (40)$$

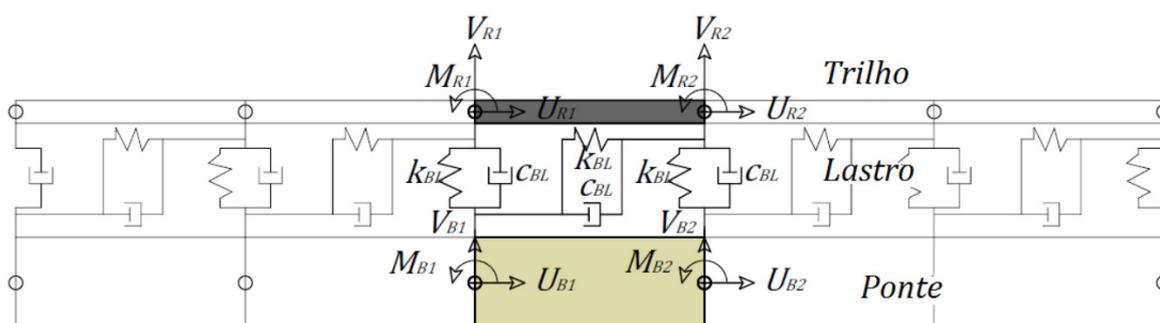
Onde:

- $q$  = carga aplicada
- $k'_s$  = módulo de reação do solo multiplicado pela largura  $B$
- $y$  = recalque

De acordo com Bowles (1996), a solução clássica não tem uma aplicação geral como o método dos elementos finitos obtido utilizando o conceito proposto por *Winkler*.

#### 4.7.2 Elemento finito interação via-estrutura

O elemento finito da interação via-estrutura é composto pelo elemento superior de pórtico referente ao trilho, pelo elemento de pórtico inferior referente a ponte conectados pelos elementos do lastro conforme indicado na Figura 29:



**Figura 29 – Interação via-estrutura**  
**Fonte: Autoria própria**

A matriz de rigidez pode ser obtida através das funções de forma ou funções de Hermite  $\{N\}$  e indicadas na equação (41).

As equações (41) a (61) foram obtidas de Yang et al (2004).

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{x}{L} \\ 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Este vetor pode ser dividido em funções de forma axiais, verticais e de rotação.

$N_u$  são as funções de forma correspondentes aos graus de liberdade horizontais indicados na equação (42):

$$\{N_u\} = \begin{Bmatrix} \frac{x}{L} \\ 1 - \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

e  $N_v$  são as funções de forma correspondentes aos graus de liberdade verticais e rotações indicados na equação (43) :

$$\{N_v\} = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

A matriz de rigidez do elemento do trilho é dada pela equação (44):

$$[k_R]^e = E_R I_R \int_0^L \{N_v''\}^T \{N_v''\} dx + E_R A_R \int_0^L \{N_u'\}^T \{N_u'\} dx + k_{BL} \int_0^L \{N\}^T \{N\} dx \quad (44)$$

A resultante matricial da equação (44) é dada pela equação (45):

$$\begin{aligned}
 [k_R]^e = & \begin{bmatrix} \frac{E_R A_R}{L} & 0 & 0 & \frac{E_R A_R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_R I_R}{L^3} & \frac{6E_R I_R}{L^2} & 0 & -\frac{12E_R I_R}{L^3} & \frac{6E_R I_R}{L^2} \\ 0 & \frac{6E_R I_R}{L^2} & \frac{4E_R I_R}{L} & 0 & -\frac{6E_R I_R}{L^2} & \frac{2E_R I_R}{L} \\ \frac{E_R A_R}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_R I_R}{L^3} & -\frac{6E_R I_R}{L^2} & 0 & \frac{12E_R I_R}{L^3} & -\frac{6E_R I_R}{L^2} \\ 0 & \frac{6E_R I_R}{L^2} & \frac{2E_R I_R}{L} & 0 & -\frac{6E_R I_R}{L^2} & \frac{4E_R I_R}{L} \end{bmatrix} \\
 & + \frac{k_{BL} L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (45)$$

Onde:

- $A_R, E_R, I_R$  correspondem a área, módulo de elasticidade e momento de inércia do trilho, respectivamente
- $k_{BL}$  é o valor discreto da rigidez do lastro

A matriz de massa consistente do elemento do trilho é dada pela equação (46):

$$[m_R]^e = m_R \int_0^L \{N\}^T \{N\} dx \quad (46)$$

Onde:

- $m_R$  é o valor discreto da massa do trilho

A resultante da equação (46) é dada pela Matriz (47):

$$[m_R]^e = \frac{m_R L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

A matriz de amortecimento do elemento do trilho é dada pela equação (48):

$$[c_R]^e = [c_R] + c_{BL} \int_0^L \{N\}^T \{N\} dx \quad (48)$$

Onde:

- $c_{BL}$  é o valor discreto do amortecimento do lastro

A resultante da equação (48) é dada pela Matriz (49):

$$[c_R]^e = [c_R] + \frac{c_{BL}L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Onde:  $[c_R]$  é obtido pelo método de *Rayleigh* (ver capítulo 0), onde obtém-se os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$  e aplica-se nas equações (47), (49) e (48).

$$[c_R] = a_0[m_R]^e + a_1[k_R]^e \quad (50)$$

De forma análoga, as matrizes de rigidez, massa e amortecimento da ponte podem ser obtidas através das funções Hermitianas  $\{N\}$  conforme equação (41).

A matriz de rigidez do elemento da ponte é dada pela equação (51):

$$[k_B]^e = E_B I_B \int_0^L \{N_v''\}^T \{N_v''\} dx + E_B A_B \int_0^L \{N_u'\}^T \{N_u'\} dx + k_{BL} \int_0^L \{N\}^T \{N\} dx \quad (51)$$

A resultante da equação (51) é dada pela Matriz (52):

$$\begin{aligned}
[k_B]^e = & \begin{bmatrix} \frac{E_B A_B}{L} & 0 & 0 & \frac{E_B A_B}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_B I_B}{L^3} & \frac{6E_B I_B}{L^2} & 0 & -\frac{12E_B I_B}{L^3} & \frac{6E_B I_B}{L^2} \\ 0 & \frac{6E_B I_B}{L^2} & \frac{4E_B I_B}{L} & 0 & -\frac{6E_B I_B}{L^2} & \frac{2E_B I_B}{L} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_B I_B}{L^3} & -\frac{6E_B I_B}{L^2} & 0 & \frac{12E_B I_B}{L^3} & -\frac{6E_B I_B}{L^2} \\ 0 & \frac{6E_B I_B}{L^2} & \frac{2E_B I_B}{L} & 0 & -\frac{6E_B I_B}{L^2} & \frac{4E_B I_B}{L} \end{bmatrix} \\
& + \frac{k_{BL} L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{52}$$

Onde:

- $A_B, E_B, I_B$  correspondem a área, módulo de elasticidade e momento de inercia da ponte, respectivamente

A matriz de massa consistente do elemento da ponte é dada pela equação (53):

$$[m_B]^e = m_B \int_0^L \{N\}^T \{N\} dx + m_{BL} \int_0^L \{N\}^T \{N\} dx \tag{53}$$

A resultante da equação (53) é dada pela equação (54):

$$\begin{aligned}
[m_B]^e = & \frac{m_B L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \\
& + \frac{m_{BL} L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{54}$$

Onde  $m_{BL}$  é o valor discreto da massa do lastro

A matriz de amortecimento do elemento da ponte é dada pela equação (55):

$$[c_B]^e = [c_B] + c_{BL} \int_0^L \{N\}^T \{N\} dx \quad (55)$$

A resultante da equação (55) é dada pela equação (56):

$$[c_B]^e = [c_B] + \frac{c_{BL}L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Onde:  $[c_B]$  é obtido pelo método de *Rayleigh* (ver capítulo 0), onde obtém-se os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$  e aplica-se nas equações (52) e (54).

$$[c_B] = a_0[m_B]^e + a_1[k_B]^e \quad (57)$$

A matriz de amortecimento da viga é obtida de forma análoga ao trilho, conforme equação (56).

A matriz de rigidez  $[k_{BL}]^e$  e amortecimento do lastro  $[c_{BL}]^e$  são indicados nas equações a seguir, respectivamente são obtidas da seguinte forma:

$$[k_{BL}]^e = k_{BL} \int_0^L \{N\}^T \{N\} dx \quad (58)$$

$$[c_{BL}]^e = c_{BL} \int_0^L \{N\}^T \{N\} dx \quad (59)$$

As equações (58) e (59) servem para interpolar o valor discreto  $k_{BL}$  e  $c_{BL}$  nos nós dos elementos finitos do lastro que serão acrescentados aos nós dos elementos finitos da ponte e do trilho. As matrizes resultantes desta interpolação são indicadas nas equações (60) e (61):

$$[k_{BL}]^e = \frac{k_{BL}L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$[c_{BL}]^e = \frac{c_{BL}L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Onde:

- $k_{BL}$  é o valor discreto da rigidez do lastro
- $c_{BL}$  é o valor discreto do amortecimento do lastro

#### 4.8 INTERAÇÃO VEÍCULO-VIA-ESTRUTURA

A Figura 30 ilustra a vista longitudinal do veículo tridimensional em contato com a ponte protendida e o corte A-A.

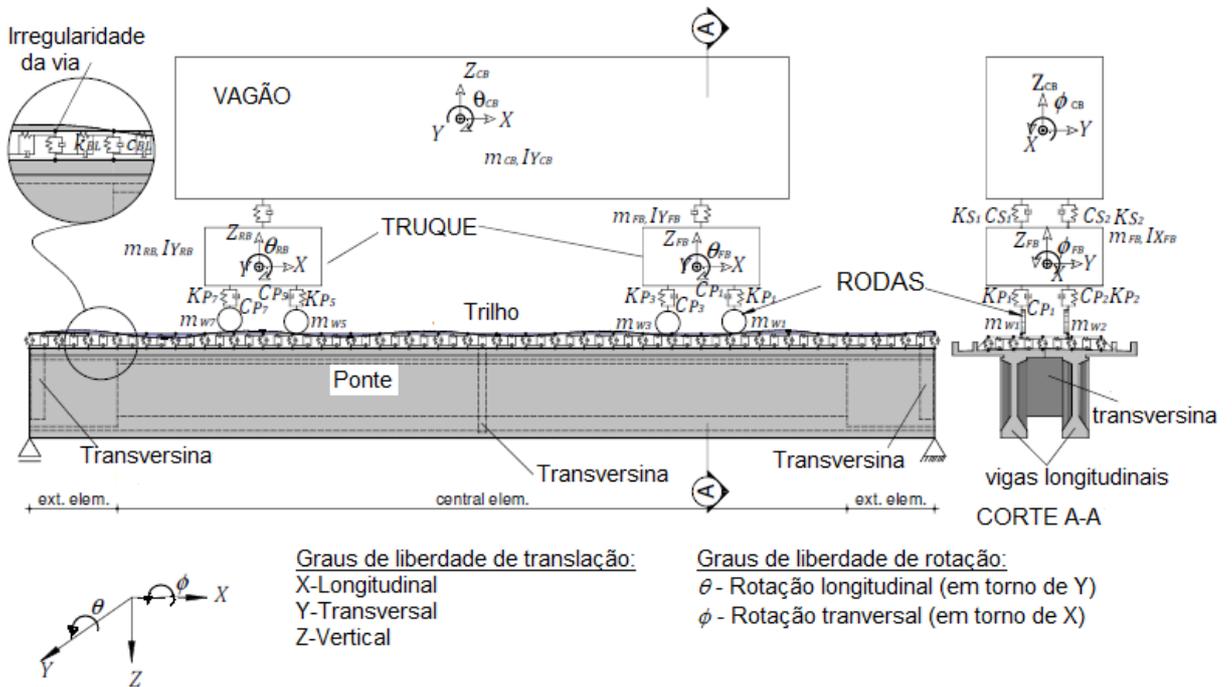


Figura 30 – Interação veículo-via-estrutura  
Fonte: Autoria própria

A interação do modelo do veículo é obtida de forma desacoplada, ou seja, primeiramente se calcula o veículo conforme item 4.6 com o objetivo da obtenção da força exercida pelo veículo na estrutura. A estrutura da ponte é calculada considerando-se a influência do lastro e do trilho conforme explicado no item 4.7.

A equação de movimento de todo o sistema é dada pela equação (62):

$$[M]\{\ddot{U}(t)\} + [C]\{\dot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = \{F_{R_i}(t)\} \quad (62)$$

As matrizes globais são obtidas pela soma de todos os elementos adotados na análise conforme indicado nas equações (63), (64) e (65) conforme Yang et al (2004):

$$[M] = [M_R] + [M_B] + [M_{BL}] \quad (63)$$

$$[C] = [C_R] + [C_B] + [C_{BL}] \quad (64)$$

$$[K] = [K_R] + [K_B] + [K_{BL}] \quad (65)$$

Onde:

- $\{F_{R_i}(t)\}$  é o vetor de força que o veículo exerce sobre a estrutura, obtido na equação (34).
- $[M]$  é a matriz de massa global do sistema (interação via-estrutura)
- $[C]$  é a matriz de amortecimento global do sistema (interação via-estrutura)
- $[K]$  é a matriz de rigidez global do sistema (interação via-estrutura)
- $\{\ddot{U}(t)\}$  é a aceleração na estrutura devido à interação veículo-via-estrutura
- $\{\dot{U}(t)\}$  é a velocidade na estrutura devido à interação veículo-via-estrutura
- $\{U(t)\}$  é o deslocamento na estrutura devido à interação veículo-via-estrutura
- $[M_R]$  é a matriz de massa global do trilho
- $[M_B]$  é a matriz de massa global da ponte
- $[C_R]$  é a matriz global de amortecimento viscoso do trilho
- $[C_B]$  é a matriz global de amortecimento viscoso da ponte
- $[C_{BL}]$  é a matriz global de amortecimento viscoso do lastro

- $[K_R]$  é a matriz de rigidez global do trilho
- $[K_B]$  é a matriz de rigidez global da ponte
- $[K_{BL}]$  é a matriz de rigidez global do lastro

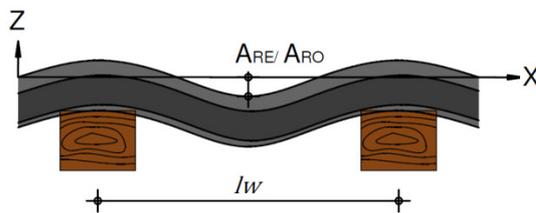
#### 4.9 IRREGULARIDADE DA VIA

As irregularidades da via foram obtidas de duas formas nesta dissertação, pela forma da função harmônica e da função randômica.

##### 4.9.1 Irregularidade Harmônica

A irregularidade harmônica procura representar o deslocamento da via entre os dormentes devido ao trânsito de veículos de transporte ferroviário por meio de funções senoidais, representadas na Figura 31.

A irregularidade da via  $I_R$  está representada por funções harmônicas onde cada linha do trilho ( $RE$  e  $RO$ ) apresenta uma função conforme indicado nas equações (66).



**Figura 31 – Irregularidades verticais da via**  
Fonte: Autoria própria

O efeito das irregularidades é particularizado para cada roda do veículo ferroviário segundo a posição que ocupa ao longo do tempo, conforme indicado nas equações (66), as equações foram obtidas de Beghetto (2006).

$$I_{R_{2i-1}}(t) = A_{RO} \text{sen} \left[ \frac{2\pi v}{l_w} \left( t + \frac{|P_{W_{2i-1}} - P_{W_1}|}{v} \right) \right] \quad \text{para } i = 1, \dots, 4$$

$$I_{R_{2i}}(t) = A_{RE} \text{sen} \left[ \frac{2\pi v}{l_w} \left( t + \frac{|P_{W_{2i}} - P_{W_2}|}{v} \right) \right] \quad \text{para } i = 1, \dots, 4$$
(66)

Onde:

- $A_{RO}$  e  $A_{RE}$  representam as amplitudes de onda senoidal onde transitam as rodas ímpares e pares do veículo respectivamente;
- $l_W$  é o comprimento da onda senoidal;
- $v$  e  $t$  representam a velocidade e o tempo de trânsito respectivamente;
- $P_W$  são as coordenadas nos pontos de contato entre roda e trilho em função de  $a$ ,  $b$  e  $c$  indicados na Figura 23.

#### 4.9.2 Irregularidade Randômica

O método para análise da irregularidade randômica é um método estatístico de análise, que utiliza dados estatísticos para obtenção da função da irregularidade da via.

O modelo mais comum para a inserção da irregularidade vertical da via é obtido através do método de *Monte Carlo*, que utiliza a inversa da transformação de *Fourier* e mapeia em uma curva de *Gauss*.

As irregularidades verticais da via são caracterizadas pela função PSD (*one-sided power spectral density*), obtidos de Zhang et al. (2001) conforme equação (67):

$$S_{rr}(\Omega) = kA \frac{\Omega_c^2}{(\Omega^2 + \Omega_c^2)\Omega^2} \quad (67)$$

Onde:

- $k = 0,25$  é o coeficiente de irregularidade vertical.
- $A$  é o parâmetro de irregularidade vertical, de acordo com a qualidade da via indicado na Tabela 10
- $\Omega = \frac{2\pi}{L_r}$  é a frequência espacial ou número de onda
- $\Omega_c$  é o número crítico indicado na Tabela 10
- $L_r$  é o comprimento da onda indicado na Tabela 11

As amostras aleatórias da irregularidade da função da irregularidade da via no plano vertical são obtidas com a utilização da inversa da transformada de *Fourier* e que corresponde ao método de *Monte Carlo* (ZHANG et al., 2001) conforme equação (68).

$$r(x) = 2 * \sum_{n=1}^{N_r} \sqrt{S_{rr}(\Omega_i)\Delta\Omega} \cos(\Omega_i x + \varphi) \quad (68)$$

Onde:

- $\Omega_i = \Omega_{min} + (n - 0,5)\Delta\Omega$  é a frequência discreta da função PSD;
- $\varphi$  é o ângulo de fase uniformemente distribuído em  $[0-2\pi]$  ;
- $\Delta\Omega = (\Omega_{max} - \Omega_{min})/N_r$  incremento de frequência;
- $N_r$  é o número total de incrementos de frequência no intervalo de  $(\Omega_{max}, \Omega_{min})$ ;
- $\Omega_{min} = \frac{2\pi}{L_{rmax}}, \Omega_{max} = \frac{2\pi}{L_{rmin}}$  máximo e mínimo limites de frequência espacial que definem o intervalo da função PSD;
- $L_{rmax}, L_{rmin}$  maior e menor limite do comprimento de onda do intervalo da função PSD.

Assim como a análise da irregularidade harmônica, é necessário adaptar esta equação para o domínio do tempo e para cada roda do veículo conforme equações (69) e (70).

$$I_{R_{2i-1}}(t) = 2 * \sum_{n=1}^{N_r} \sqrt{S_{rr}(\Omega_i)\Delta\Omega} \cos \left( \left[ \frac{\Omega_{min} v(n-0,5)(\Omega_{max} v - \Omega_{min} v)}{N_r} \right] \left( t + \frac{|P_{W_{2i-1}} - P_{W_1}|}{v} \right) + \varphi \right)^* \quad (69)$$

para  $i = 1, \dots, 4$

$$I_{R_{2i}}(t) = 2 * \sum_{n=1}^{N_r} \sqrt{S_{rr}(\Omega_i)\Delta\Omega} \cos \left( \left[ \frac{\Omega_{min} v(n-0,5)(\Omega_{max} v - \Omega_{min} v)}{N_r} \right] \left( t + \frac{|P_{W_{2i}} - P_{W_2}|}{v} \right) + \varphi \right)^* \quad (70)$$

para  $i = 1, \dots, 4$

Onde:

- $v$  e  $t$  representam a velocidade e o tempo respectivamente;
- $P_W$  são as coordenadas nos pontos de contato entre roda e trilho em função de  $a$ ,  $b$  e  $c$  indicadas na Figura 23.

\*Os demais termos estão referenciados juntos da equação (68).

Os coeficientes utilizados na função PSD foram elaborados pela Administração Federal de Rodovia dos Estados Unidos (FRA), onde são especificados para 9 graus de qualidade da via, sendo o grau 1 a pior qualidade, inaceitável em trens

de alta velocidade, e o grau 9, a melhor qualidade. A Tabela 10 mostra valores de coeficientes  $A$  e  $\Omega_c$ , para as classe de 1 a 6.

**Tabela 10 – Parâmetros PSD da via**

Qualidade (classe FRA)	$A$ (cm <sup>2</sup> rad/m)	$\Omega_c$ (rad/m)
1	1,2107	0,8245
2	1,0181	0,8245
3	0,6816	0,8245
4	0,5376	0,8245
5	0,2095	0,8245
6	0,0339	0,8245

**Fonte: Adaptado de Lei e Noda (2002)**

Medições e modelos experimentais de irregularidade da via são considerados em diversas reverencias sendo o mais importante proposto por Esveld (1986) (Podwórna, 2015) e indicados na Tabela 11:

**Tabela 11 – Comprimentos de onda  $L_r$**

Comprimentos de onda $L_r$ (m)	Tipo de irregularidade no trilho
0,03 – 0,10	Ondulação de comprimento de onda curto
0,10 – 1,00	Ondulação de comprimento de onda longo
1,00 – 3,00	Ondas longas e defeitos de laminação
Comprimentos de onda $L_r$ (m)	Tipo de irregularidade da plataforma
3,00 – 25,00	Alinhamento, inclinação, bitola, torção, etc.
25,00 – 70,00	Alinhamento
>70,00	Geometria de projeto

**Fonte: Adaptado de Esveld (1986) apud Podwórna (2015)**

Os programas computacionais possuem métodos para cálculos randômicos simples de serem utilizados. No entanto, esses métodos possuem limitações e não são simples de serem compreendidos.

O Matlab® possui como método *default*, o método *Mersenne Twister*, que é um método pseudoaleatório que permite esta simulação estocástica desenvolvido em por Makoto Matsumoto (MATSUMOTO; NISHIMURA, 1998). Este método fornece uma geração rápida de variáveis com alta qualidade de aleatoriedade.

A cada simulação, são gerados números aleatórios dentro do intervalo de 0 a 1 com o objetivo de gerar cenários de variáveis de entrada do sistema, sendo

necessário adaptar este intervalo àquele escolhido. Simulando um grande número de cenários, a distribuição de probabilidade de todas as saídas da simulação pode ser aproximada com precisão.

O problema deste método pré-programado é que todos os valores têm a mesma probabilidade de ocorrência e podem não ser reais em relação às irregularidades da via, onde existem tipos de desvios que podem ocorrer com uma frequência maior pois são causadas por motivos variados.

Além deste problema, a cada nova simulação, os dados de saída são sempre os mesmos. Para o cálculo da irregularidade randômica  $I_R$  são necessários dois *dopings*, um para simular o  $Nr$  (número de interações) e o segundo para simular o tempo. A cada novo tempo, o Matlab® alimenta as interações da irregularidade randômica com os mesmos valores, portanto utilizou-se o comando *rng* ('*Shuffle*'), que significa embaralhar. Para obter uma maior aleatoriedade nas demais interações, o comando *Shuffle* alimenta as interações com um valor aleatório em função do dia e da hora escolhida, em vez do número 0,8147 alimentado para o caso *default*.

Em função da diferença de hora não ser relevante de um *looping* ao outro, este embaralhamento não trouxe nenhum ganho para o programa desenvolvido, não existindo outra forma de fazê-lo. Não se deve incluir mais variáveis aleatórias no programa pois prejudica a aleatoriedade final, fazendo com que convirja para uma curva normal.

## 5 DESCRIÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

O programa computacional desenvolvido no Matlab<sup>®</sup> está representado na forma de fluxograma (Fig.34) para facilitar a compreensão. O programa foi desenvolvido de forma a calcular os esforços produzidos pelo veículo, que são obtidos e posteriormente são inseridos no modelo da ponte para obtenção da influência da análise dinâmica sobre a ponte.

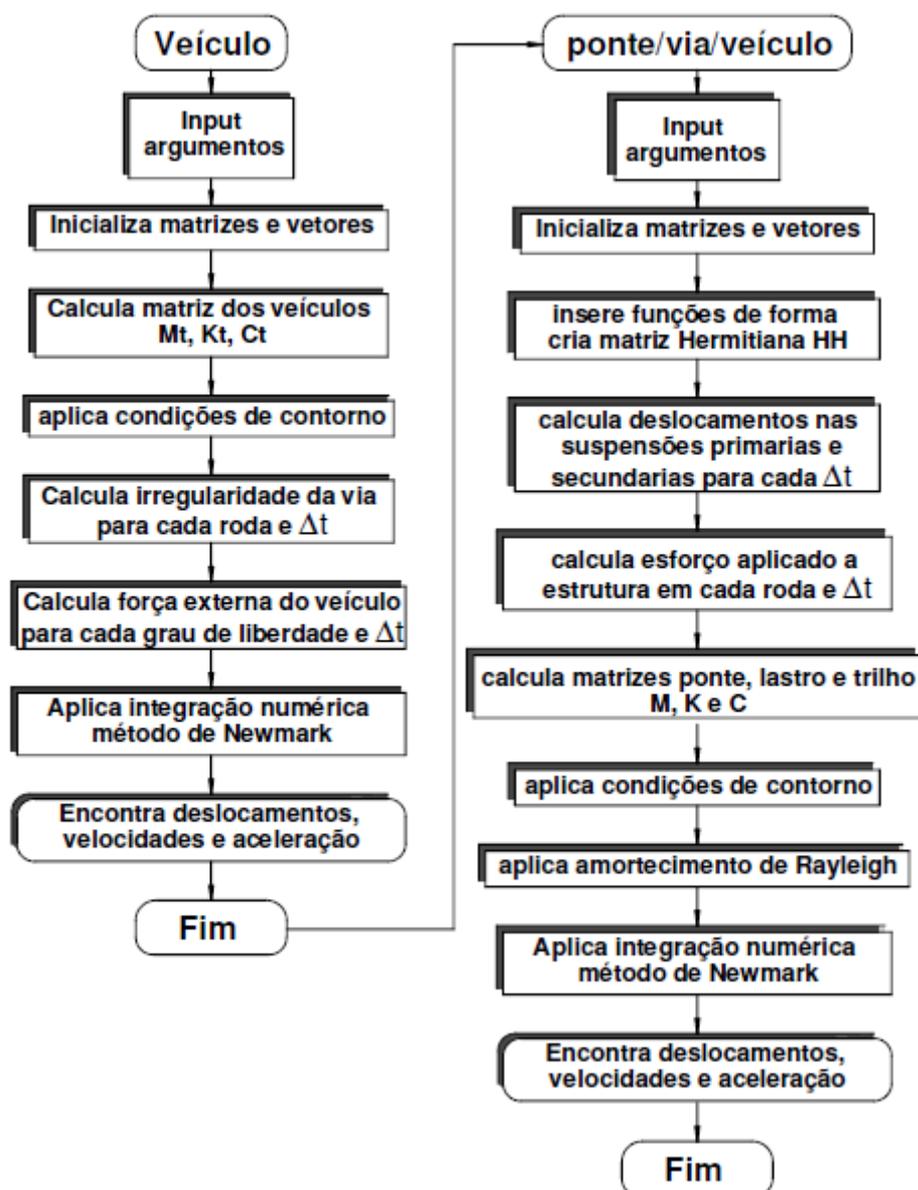


Figura 32 – Fluxograma – interação desacoplada via-ponte-veículo  
Fonte: Autoria própria

## 6 EXEMPLO NUMÉRICO

Este capítulo apresenta os parâmetros adotados no estudo da interação veículo-ponte-estrutura.

### 6.1 DADOS DO VEÍCULO

A Tabela 12 apresenta as propriedades dinâmicas dos corpos rígidos do veículo utilizadas no modelo numérico.

**Tabela 12 – Propriedades dinâmicas dos corpos rígidos do veículo**

Corpos rígidos	Parâmetros	Símbolos	Valores	Unidades
Vagão	massa	$m_{CB}$	44420	kg
	Momento de inércia em X	$IX_{CB}$	1816726,269	Kg.m <sup>2</sup>
	Momento de inércia em Y	$IY_{CB}$	57925,731	kg.m <sup>2</sup>
Truque dianteiro	massa	$m_{FB}$	14000	kg
	Momento de inércia em X	$IX_{FB}$	26469,468	kg.m <sup>2</sup>
	Momento de inércia em Y	$IY_{FB}$	11150,037	Kg.m <sup>2</sup>
Truque traseiro	massa	$m_{FB}$	14000	kg
	Momento de inércia em X	$IX_{RB}$	26469,468	kg.m <sup>2</sup>
	Momento de inércia em Y	$IY_{RB}$	11150,037	Kg.m <sup>2</sup>
Rodas	massa	$m_W$	750	kg

Fonte: Beghetto (2010)

A Tabela 13 apresenta as propriedades dinâmicas do sistema de suspensão do veículo utilizadas no modelo numérico.

**Tabela 13 – Propriedades dinâmicas do sistema de suspensão**

Itens	Símbolos	Valores	Unidades
Suspensão primária	$K_P$	1606,09	kN/m
	$C_P$	31,152	kNs/m
Suspensão secundária	$K_S$	429,51	kN/m
	$C_S$	17,089	kNs/m

Fonte: Beghetto (2010)

A Tabela 14 apresenta as distâncias geométricas utilizadas para calcular as equações do veículo através do equilíbrio das forças (ver Figura 27).

**Tabela 14 – Distâncias geométricas**

Distâncias	Símbolos	Valores	Unidades
Distância longitudinal do centro do vagão	2a	15	m
Distância longitudinal do centro das rodas	2b	3	m
Distância transversal do centro das rodas	2c	1,6	m

Fonte: Beghetto (2010)

## 6.2 DADOS DA IRREGULARIDADE DA VIA

A Tabela 15 indica os comprimentos de onda considerados na irregularidade harmônica e a amplitude das ondas senoidais. A velocidade

**Tabela 15 – Propriedades das irregularidades harmônicas**

Itens	Símbolos	Valores	Unidades
Velocidade do veículo	$v$	50	km/h
Amplitude da onda senoidal no trilho RO Rodas Ímpares	$A_{RO}$	0,01	m
Amplitude da onda senoidal no trilho RE Rodas Pares	$A_{RE}$	0,01	m
Comprimento das ondas senoidais	$l_w$	1,0	m

Fonte: Autoria própria

A Tabela 16 indica os parâmetros utilizados no cálculo da irregularidade randômica.

**Tabela 16 – Propriedades das irregularidades randômicas**

Itens	Símbolos	Valores	Unidades
Coefficiente de irregularidade randômica	$k$	0,25	-
Parâmetro irregularidade vertical randômica	$A$	101,81	mm <sup>2</sup> rad/m
Comprimento das ondas máximo	$L_r \max$	70,0	m
Comprimento das ondas mínimo	$L_r \min$	0,1	m
Número crítico	$\Omega_c$	0,8245	rad/m
Incremento de frequência	$N_r$	2000	-

Fonte: Autoria própria

### 6.3 DADOS DA PONTE

A Tabela 17 indica as propriedades de cada elemento finito considerado na análise.

**Tabela 17 – Propriedades da Ponte Ecs = 25187 MPa (fck = 28 MPa)**

Elemento	Comprimento	Área	Momento de inércia	Massa
	m	m <sup>2</sup>	m <sup>4</sup>	kg/m <sup>3</sup>
1-3/28-30/31-33/58-60	1,0	2,822	2,948	2500
4-27/34/57	1,0	1,911	2,563	2500
61/63	2,1	1,1087	0,429	2500
62	2,1	0,6438	0,358	2500

**Fonte: Autoria própria**

Onde:

- Ecs é o modulo de elasticidade do concreto da ponte;
- fck é a resistência do concreto aos 28 dias;

O comprimento total da ponte é de 30,0 m e o amortecimento considerado é 1.0 % quando se considera o lastro no dimensionamento e 2,5 % sem considerá-lo.

### 6.4 DADOS DO LASTRO

A Tabela 18 apresenta as propriedades do lastro consideradas na análise numérica. Desconsiderou-se o confinamento do lastro no tabuleiro obtendo-se valores iguais horizontais e verticais para a rigidez e amortecimento do lastro.

**Tabela 18 – Propriedades do Lastro**

Rigidez ( $k_{BL}$ )		Amortecimento ( $C_{BL}$ )	
Vertical	Horizontal	Vertical	Horizontal
6x10 <sup>4</sup> kN/m <sup>2</sup>	6x10 <sup>4</sup> kN/m <sup>2</sup>	50 kNs/m <sup>2</sup>	50 kNs/m <sup>2</sup>

**Fonte: Autoria própria**

## 6.5 DADOS DO TRILHO

A Tabela 19 apresenta as propriedades geométricas do trilho consideradas na análise.

**Tabela 19 – Propriedades do trilho TR 68**

<b>Propriedades geométricas do trilho</b>	<b>Símbolos</b>	<b>Valores</b>	<b>Unidades</b>
Área da seção	$A_r$	8,63E-03	m <sup>2</sup>
Momento de inércia em Z	$I_{Zr}$	3,95E-05	m <sup>4</sup>

**Fonte: Autoria própria**

O amortecimento do trilho considerado foi de 0,5%.

## 7 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 7.1 METODOLOGIA DE ANÁLISE

O veículo ferroviário atravessa a ponte com velocidade constante e está sujeito aos efeitos das irregularidades da via. Admite-se que as rodas do veículo são indeformáveis e não possuem irregularidades. O atrito entre as superfícies das rodas e a superfície dos trilhos são desconsiderados. O problema é analisado com o método de excitação de base, cujo princípio consiste em considerar o veículo parado e em suas rodas, considera-se a passagem das irregularidades da via com certa frequência. O programa considera dois tipos de irregularidade, a irregularidade randômica e a harmônica, separadamente (BEGHETTO, 2006).

A consideração da irregularidade randômica foi feita considerando classe 2 de qualidade da via, referente a classe de degradação muito pobre, sendo que as classes variam evolutivamente de 1 a 9. Utilizou-se o método PSD para obtenção do campo randômico. Os valores obtidos não satisfazem à classe de qualidade da via, portanto, foi necessário normalizar os desvios máximos em função dos desvios toleráveis conforme Yang et al. (2004), utilizando 6,98 cm como valor máximo de deslocamento devido à irregularidade para classe 2, adotada (*Federal Railroad Administration*, 2017).

Os esforços do veículo são transmitidos à estrutura da ponte através dos pontos de contato das rodas com os trilhos. Estes esforços são formados pela contribuição do peso próprio do veículo e dos esforços inerciais. As forças, devido à passagem do veículo, são transmitidas aos nós da estrutura, que é calculada por elementos finitos de pórtico. O elemento finito da ponte é considerado como elemento de duas camadas, sendo a camada superior representando o trilho e a inferior representando a ponte. A conexão destas duas camadas é feita por meio da rigidez e amortecimento do lastro.

As equações de movimento do veículo e da ponte são integradas numericamente com 181 passos iguais de tempo utilizando o método de Newmark. Foi necessário reduzir o número de passos em relação ao programa original para facilitar a visualização da irregularidade randômica, que utiliza uma amplitude de onda

diferente para cada passo. O tempo de simulação do programa é de 15 segundos, em um computador de 8,00 GB de RAM e processador de 2.60 GHz.

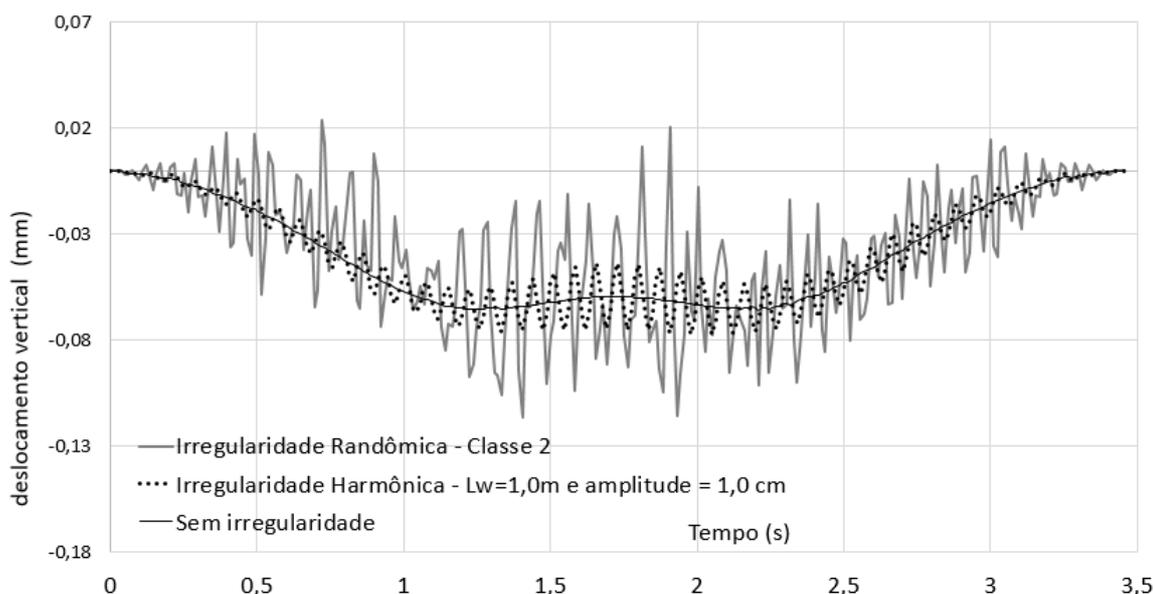
O fluxograma do programa está indicado no capítulo 5. Estes procedimentos de análise foram programados utilizando-se o software Matlab® versão R2015a.

## 7.2 ANÁLISE NUMÉRICA DA INTERAÇÃO

As propriedades utilizadas no dimensionamento da ponte e do veículo foram indicadas no capítulo 6.

Os resultados da análise dinâmica da ponte são indicados no centro da ponte, considerando a velocidade de 50 km/h. Na Figura 33 está indicada a influência do tipo de irregularidade da via durante a passagem do veículo.

Neste caso, a rigidez do lastro  $k_{BL}$  considerada foi 60.000 kN/m<sup>2</sup> e o amortecimento do lastro  $c_{BL}$  considerado foi 50 kN.s/m<sup>2</sup>, valores médios obtidos da revisão bibliográfica (ver Tabela 2). Para a irregularidade randômica foram utilizados os parâmetros referentes à classe 2 (FRA) com comprimento de onda para a irregularidade variando de 0,3 m a 70 m, limitando o máximo deslocamento vertical conforme Tabela 3 (página 28). Para a irregularidade harmônica foram considerados comprimentos de onda de 1,0 m e deslocamento entre os dormentes de 1,0 cm.



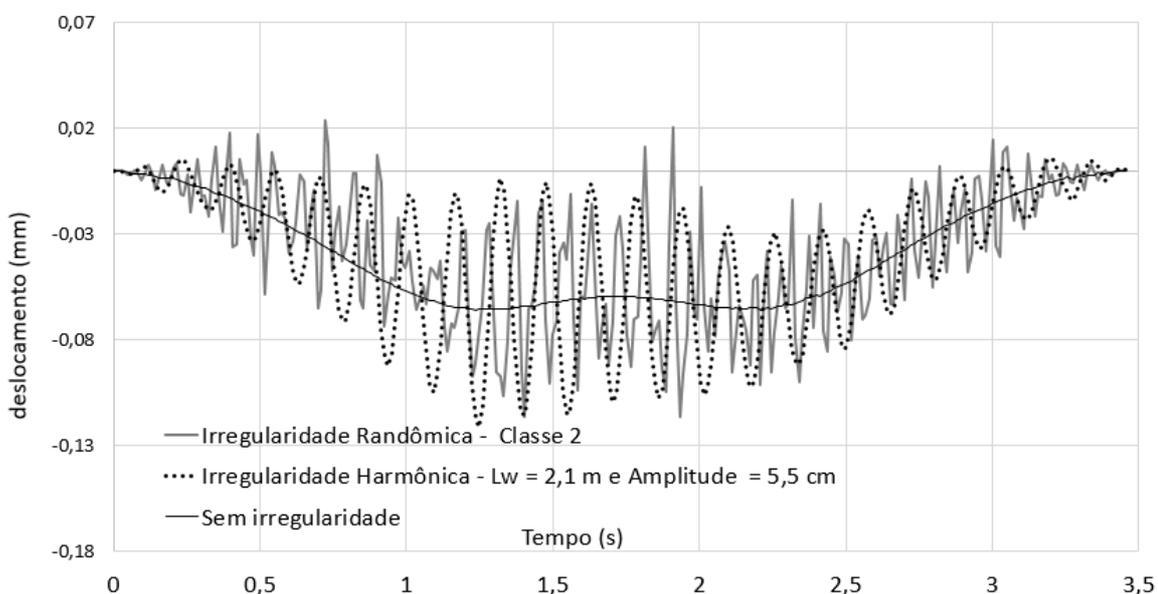
**Figura 33 – Influência da irregularidade da via no deslocamento vertical**  
**Fonte: Autoria própria**

Como se pode observar, a consideração da irregularidade da via influencia nos resultados, visto que a irregularidade da via aumenta o deslocamento vertical da ponte. Para esta rigidez de ponte e lastro, a irregularidade randômica (linha contínua cinza) apresenta valores de deslocamentos cerca de 42% maiores que os obtidos com o dimensionamento considerando irregularidade harmônica (linha pontilhada escura).

O deslocamento máximo obtido foi -0,135 mm (linha cheia) a 2,20 segundos, com a consideração da irregularidade randômica. Sem a consideração da irregularidade da via (linha tracejada), o deslocamento máximo foi de -0,066 mm a 2,21 segundos, representando um aumento de 48,90% com irregularidade randômica em relação ao deslocamento máximo sem irregularidade.

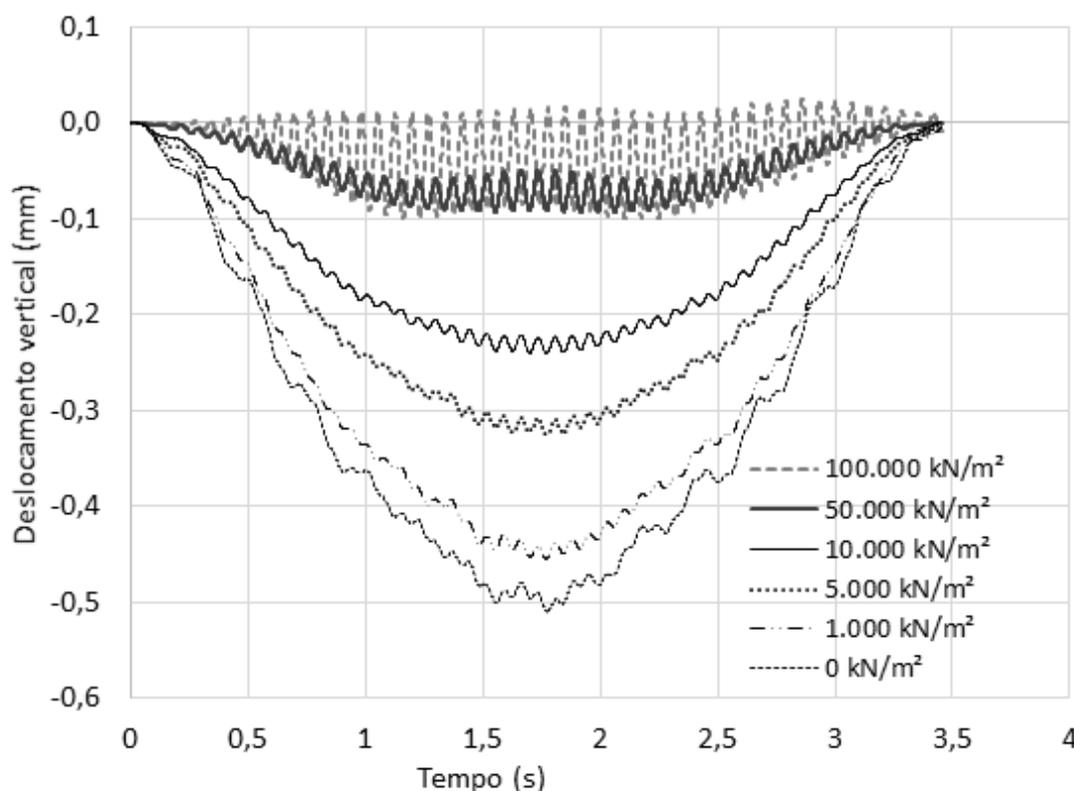
Já no caso da consideração da irregularidade harmônica, o deslocamento máximo obtido foi -0,09 mm a 2,06 segundos, indicando um aumento de 14,89% em relação ao deslocamento sem irregularidade.

Para aproximar a irregularidade harmônica da irregularidade randômica classe 2, deve-se utilizar um comprimento de onda  $L_w$  de 2,1 m e amplitude de 5,5 cm. Representando o deslocamento de um grupo de dormentes ao longo da via, os resultados com esta aproximação estão representados na Figura 34.



**Figura 34 – Aproximação irregularidade randômica da irregularidade harmônica no deslocamento vertical**  
**Fonte: Autoria própria**

A Figura 35 mostra a influência da rigidez do lastro no deslocamento vertical durante a passagem do veículo para irregularidade harmônica. A rigidez do lastro varia de 0 kN/m<sup>2</sup> a 100 000 kN/m<sup>2</sup> e os efeitos da variação são retratados na Figura 35.



**Figura 35 – Influência da rigidez do lastro no deslocamento vertical para irregularidade harmônica**  
**Fonte: Autoria própria**

A Figura 35 e a Tabela 20 apresentam a comparação entre a influência do deslocamento vertical no meio do vão, onde foram considerados cinco tipos de rigidez de lastro diferentes conforme Tabela 2 (página 24) com irregularidade harmônica.

**Tabela 20 – Influência da rigidez do lastro na irregularidade harmônica**

Rigidez do lastro (kN/m <sup>2</sup> )	Redução da rigidez do lastro*	Linha	Deslocamento máximo (mm)	Tempo (s)	Redução do deslocamento*
0	100%	-----	0,510	1,77	0,00%
1.000	99%	— . .	0,454	1,77	10,89%
5.000	95%	.....	0,325	1,77	36,30%
10.000	90%	————	0,240	1,77	52,80%
50.000	50%	————	0,093	1,99	81,85%
100.000	0%	-----	0,099	1,23	80,54%

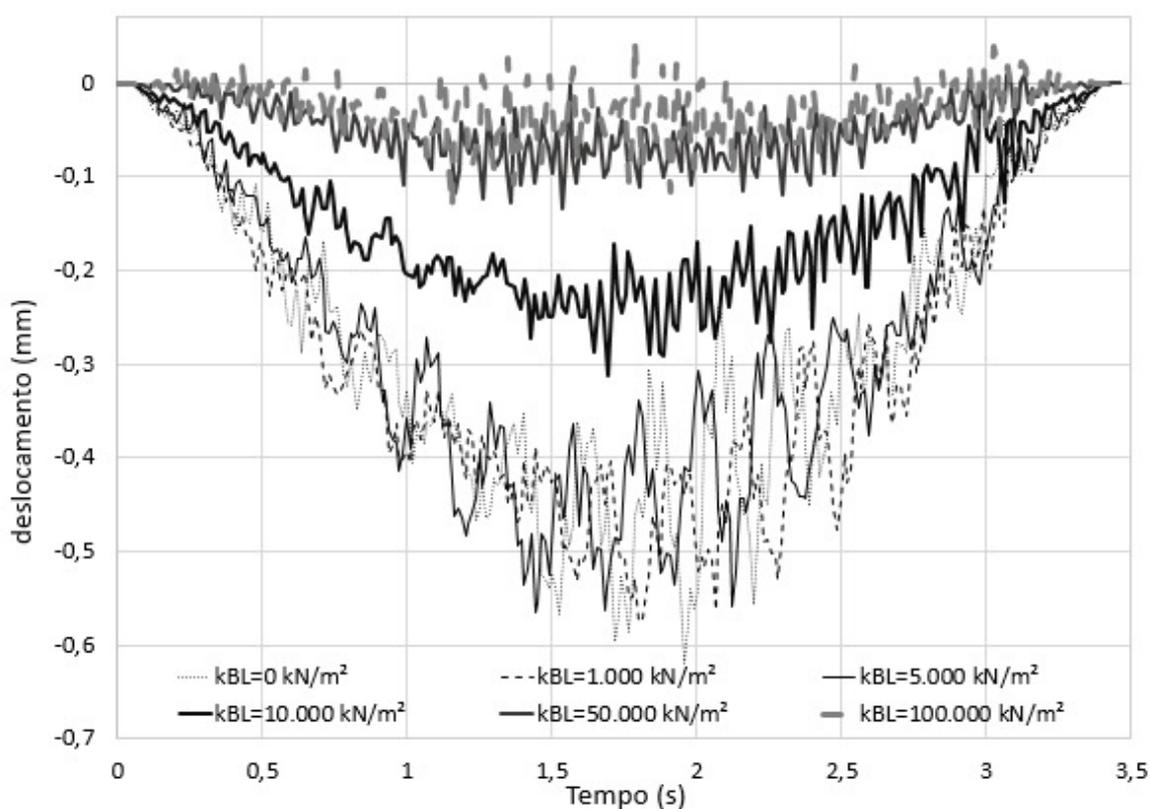
**Fonte: Autoria própria**

Quando não se considera a influência do lastro, o deslocamento máximo que ocorre a 1,77 segundos é -0,51 mm (tracejada preta).

O deslocamento diminui cerca de 80% com a consideração da rigidez do lastro.

Estes percentuais são obtidos dividindo o deslocamento máximo no meio do vão com a consideração do lastro pelo deslocamento máximo no meio do vão sem a consideração do lastro.

Da mesma forma, a Figura 36 mostra a influência da rigidez do lastro no deslocamento vertical durante a passagem do veículo para irregularidade randômica. A rigidez do lastro varia de 0 kN/m<sup>2</sup> até 100.000kN/m<sup>2</sup> e os efeitos da variação são retratados na Figura 36.



**Figura 36 – Influência da rigidez do lastro no deslocamento vertical para irregularidade randômica**

**Fonte: Autoria própria**

A Tabela 21 resume os valores obtidos na Figura 36:

Tabela 21 – Influência da rigidez do lastro no deslocamento com irregularidade randômica

Rigidez do lastro (kN/m <sup>2</sup> )	Redução da rigidez do lastro*	Linha	Deslocamento máximo (mm)	Tempo (s)	Redução do deslocamento
0	100%	—————	-0,947	2,43	0,00%
1.000	99%	.....	-0,773	2,31	18,40%
5.000	95%	— — — — —	-0,554	2,10	41,48%
10.000	90%	— . . .	-0,416	2,31	56,03%
50.000	50%	—————	-0,180	2,25	80,95%
100.000	0%	—————	-0,149	1,8	84,22%

Fonte: Autoria própria

De forma análoga à irregularidade harmônica, quanto maior a rigidez do lastro, menor o deslocamento no centro do vão. A irregularidade aumenta o deslocamento na ponte.

O deslocamento diminui cerca de 84% com a consideração da rigidez do lastro. Avaliou-se também a diferença da aceleração com diferentes valores de lastro para a irregularidade randômica e velocidade do trem de 50 km/h, no meio do vão. A Figura 37 indica graficamente esta avaliação.

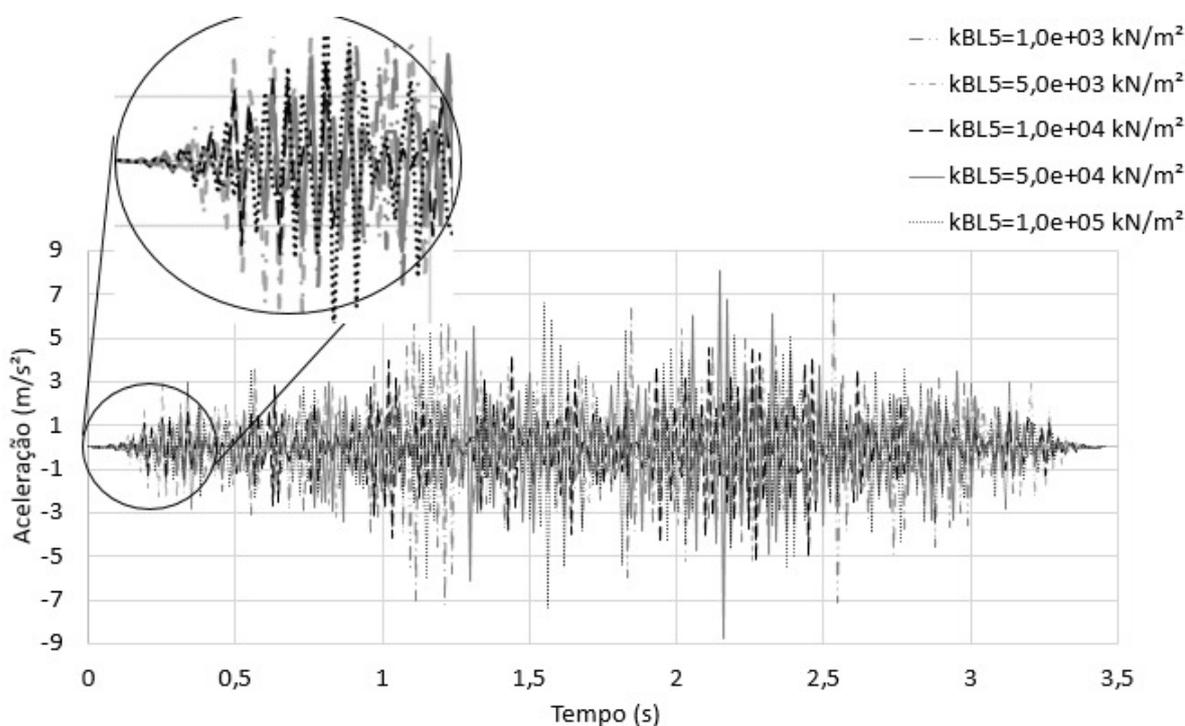


Figura 37 – Influência da rigidez do lastro na aceleração para irregularidade randômica

Fonte: Autoria própria

A Tabela 22 apresenta os máximos valores de aceleração para cada tipo de rigidez do lastro retratados na Figura 38 e o tempo em que ocorreram.

**Tabela 22 – Influência da rigidez do lastro na aceleração com irregularidade randômica**

Rigidez do lastro (kN/m <sup>2</sup> )	Redução da rigidez do lastro*	Linha	Aceleração máxima (m/s <sup>2</sup> )	Tempo (s)
1.000	99%	— . .	7,46	1,11
5.000	95%	— . —	5,44	2,016
10.000	90%	— — —	5,22	2,27
50.000	50%	————	8,77	2,16
100.000	0%	.....	7,34	1,56

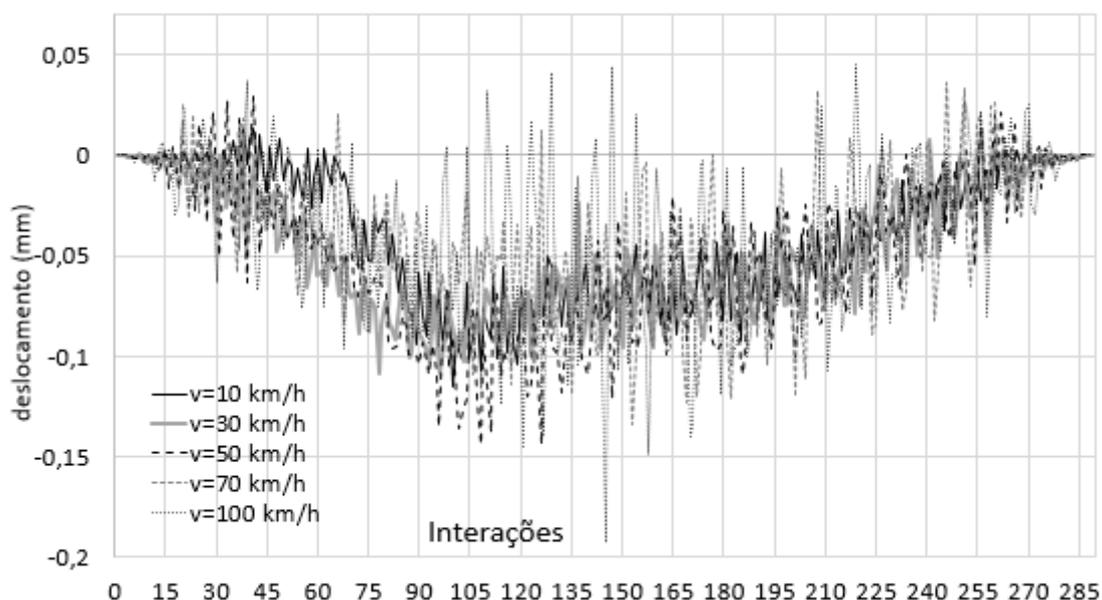
Fonte: Autoria própria

O aumento de rigidez no lastro não mostra tendência simples de variação de aceleração. A aceleração obtida nesta análise é superior a recomendada pelo *Eurocode* para garantir o conforto dos passageiros de 3,5 m/s<sup>2</sup>. (Rehnström e Widén, 2012).

Na Figura 38, estão indicados os resultados do deslocamento vertical da ponte durante a passagem do veículo no vão central, considerando diferentes velocidades.

Neste caso, a rigidez do lastro  $k_{BL}$  considerada foi 60.000 kN/m<sup>2</sup> e o amortecimento do lastro  $c_{BL}$  considerado foi 50 kN.s/m<sup>2</sup>, valores médios obtidos da revisão bibliográfica (ver Tabela 2).

Sabendo que a classe 2 utilizada no dimensionamento é válida para no máximo 48,3 km/h analisou-se para valores entre 10 km/h e 100 km/h para as 289 interações simuladas.



**Figura 38 – Influência da velocidade na irregularidade randômica**  
**Fonte: Autoria própria**

Através do gráfico da Figura 38, pode-se observar que os maiores deslocamentos foram obtidos para a velocidade de 100 km/h. A Tabela 22 indica os valores de deslocamentos máximos obtidos na Figura 38 para as velocidades de 10 km/h até 100 km/h, classe 2.

**Tabela 23 – Influência da velocidade na irregularidade randômica**

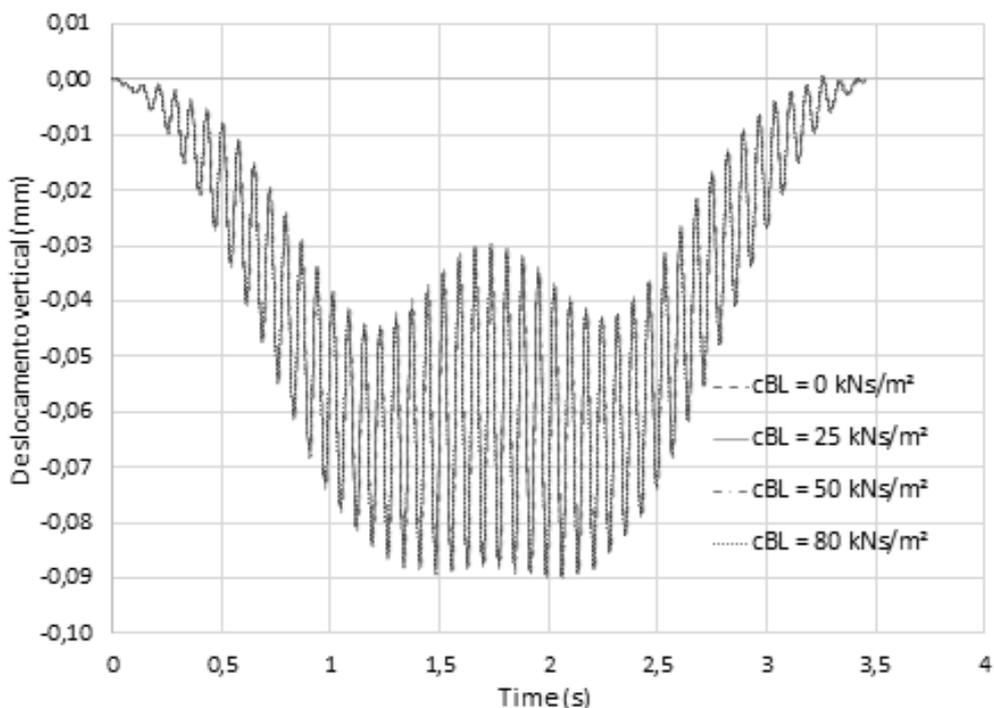
Velocidade (km/h)	Linha	Deslocamento (m)	Passos de tempo
10	—————	-0,115	98
30	—————	-0,108	94
50	- - - - -	-0,144	105
70	- - - - -	-0,134	150
100	.....	-0,193	143

**Fonte: Autoria própria**

A diferença de amortecimento devido ao lastro também foi avaliada.

Para esta análise foram utilizados valores considerados por outros pesquisadores em artigos publicados (ver Tabela 2, página 24) e estes valores foram comparados. É importante salientar que este amortecimento comparado se refere unicamente ao amortecimento devido ao lastro. O amortecimento devido ao trilho e a ponte estão sendo considerados em todas as análises.

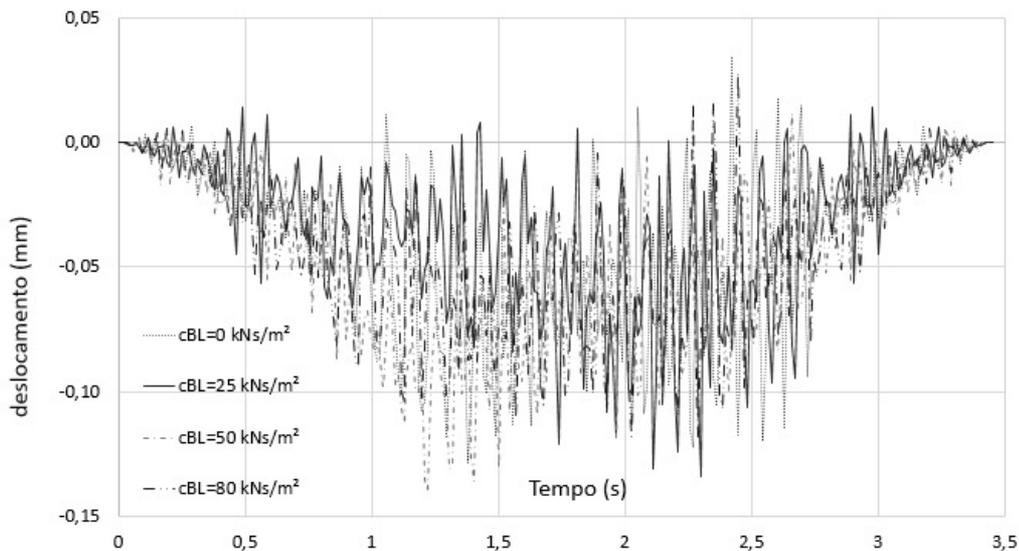
A Figura 39 indica a diferença de irregularidade da via para os valores de amortecimento ( $c_{BL}$ ) 0 kN.s/m<sup>2</sup>, 25 kN.s/m<sup>2</sup>, 50 kN.s/m<sup>2</sup>, and 80 kN.s/m<sup>2</sup>, considerando irregularidade harmônica para velocidade de 50 km/h.



**Figura 39 – Influência do amortecimento do lastro no deslocamento vertical considerando irregularidade harmônica**  
**Fonte: Autoria própria**

De acordo com a análise, pode-se observar que a redução de deslocamento para estes valores usuais de amortecimento não são significativos e que o amortecimento não tem grande influência o deslocamento vertical da ponte.

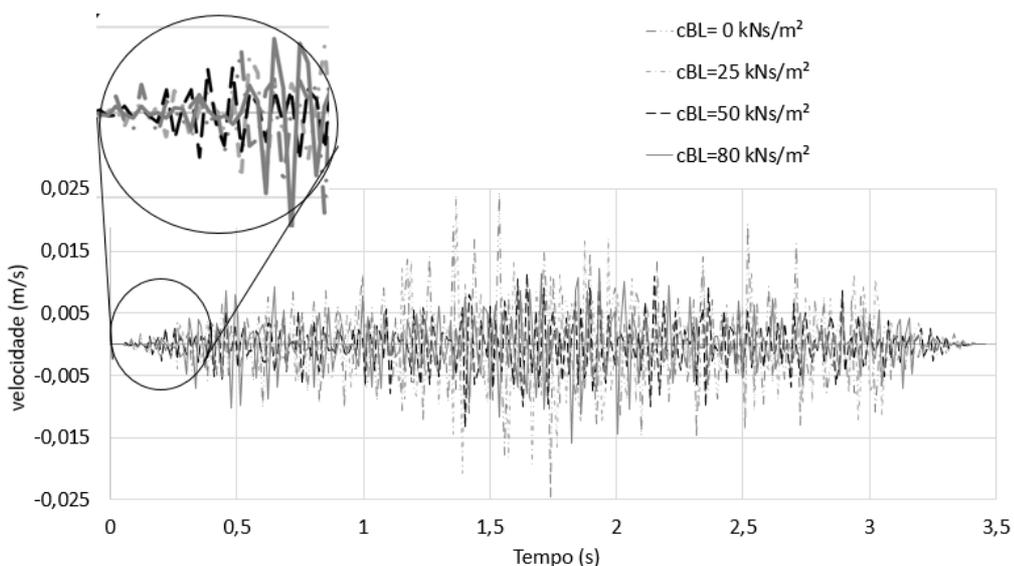
A Figura 40 indica a diferença de deslocamento para a irregularidade da via randômica classe 2, considerando valores de amortecimento de 0 kN.s/m<sup>2</sup>, 25 kN.s/m<sup>2</sup>, 50 kN.s/m<sup>2</sup>, e 80 kN.s/m<sup>2</sup>, considerando irregularidade randômica para velocidade de 50 km/h.



**Figura 40 – Influência do amortecimento do lastro no deslocamento considerando irregularidade randômica**  
**Fonte: Autoria própria**

São analisados os deslocamentos máximos e os médios. Não se observou redução efetiva considerando o amortecimento viscoso do lastro nesta análise para os valores usuais de projeto.

A Figura 41 indica a diferença da velocidade para a irregularidade da via randômica classe 2, considerando valores de amortecimento de 0 kN.s/m², 25 kN.s/m², 50 kN.s/m², e 80 kN.s/m², considerando irregularidade randômica para velocidade de 50 km/h.



**Figura 41 – Influência do amortecimento do lastro na velocidade considerando irregularidade randômica**  
**Fonte: Autoria própria**

Tabela 24 – Influência da rigidez do lastro no deslocamento com irregularidade randômica

Rigidez do lastro (kNs/m <sup>2</sup> )	Linha	Velocidade máxima (m/s) em módulo	Tempo (s)	Redução da velocidade
0	— . . .	0,025	1,74	0,00%
25	- - . - -	0,024	1,37	2,46%
50	- - - - -	0,014	1,44	46,27%
80	—————	0,016	1,93	35,97%

Fonte: Autoria própria

São analisadas as velocidades máximas na ponte em módulo para os diferentes tipos de amortecimento. As velocidades na ponte são a primeira derivada do deslocamento em função do tempo e são obtidas pela integração numérica. A partir dos resultados analisados, observa-se uma tendência de redução da velocidade em função do amortecimento do lastro, justificado pela equação de movimento do sistema na equação (62), página 79.

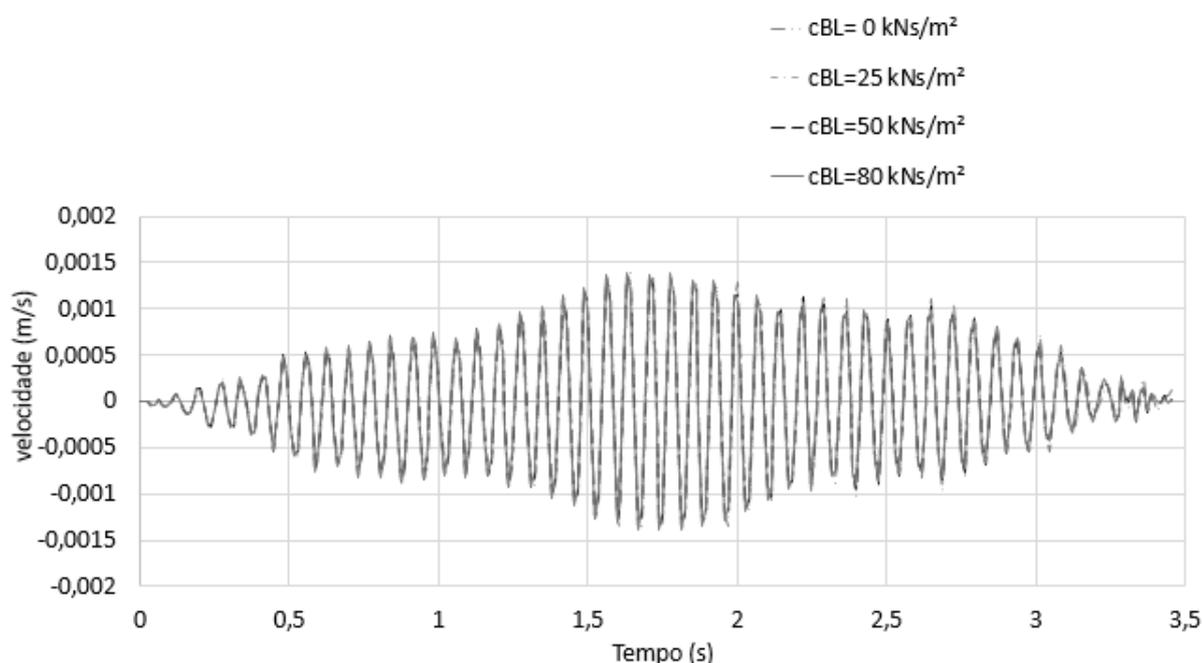


Figura 42 – Influência do amortecimento do lastro na velocidade considerando irregularidade harmônica

Fonte: Autoria própria

A mesma verificação é feita considerando a irregularidade harmônica, neste caso os valores ficaram muito próximos e não se observou nenhuma redução de

velocidade em função da mudança de amortecimento do lastro, os valores ficaram muito próximos, com diferença apenas na quinta casa decimal. As velocidades obtidas por esta análise, considerando comprimento de onda de 1,0m e deslocamento de 1cm entre dormentes foram muito baixas se comparadas às velocidades obtidas com irregularidade randômica.

A ressonância da ponte ocorre quando as frequências naturais de amortecimento coincidem com a velocidade com que o veículo passa pela irregularidade da via. Desta forma pode-se calcular as velocidades ressonantes da ponte conforme as equações (71), (72) e (73) descritas em Beghetto (2006).

$$\omega_{db} = \omega_i \quad (71)$$

$$\omega_i = 2\pi f \quad (72)$$

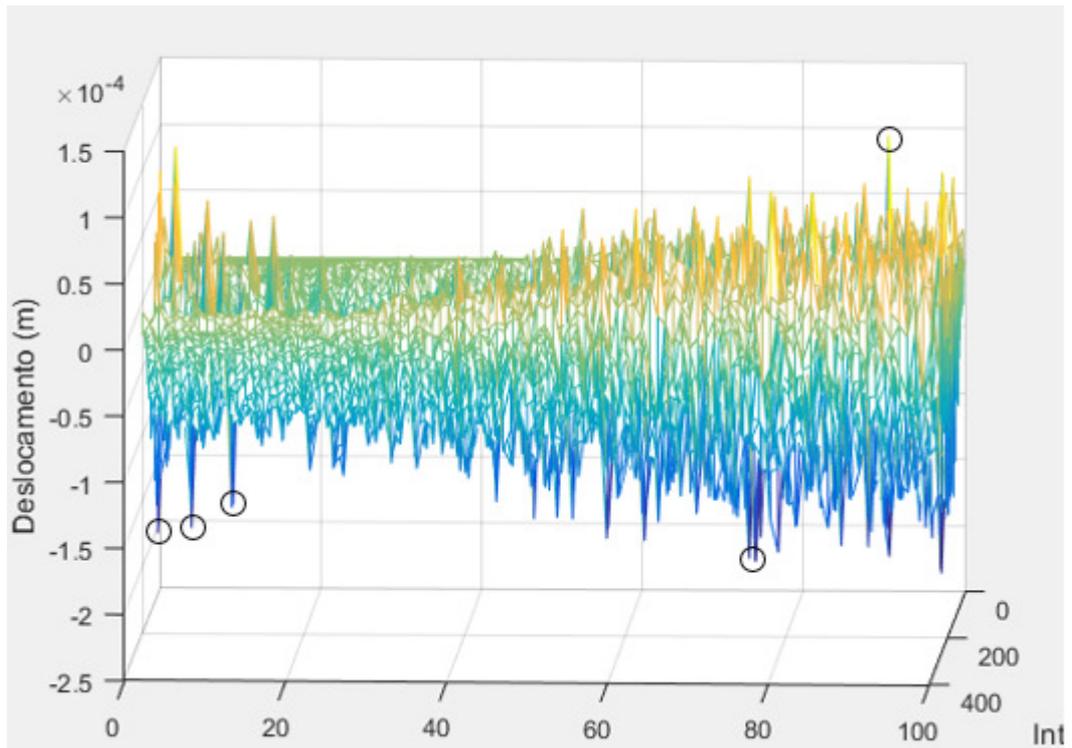
$$V_{Rb} = \frac{\omega_{db} L_r}{2\pi} \quad (73)$$

Onde:

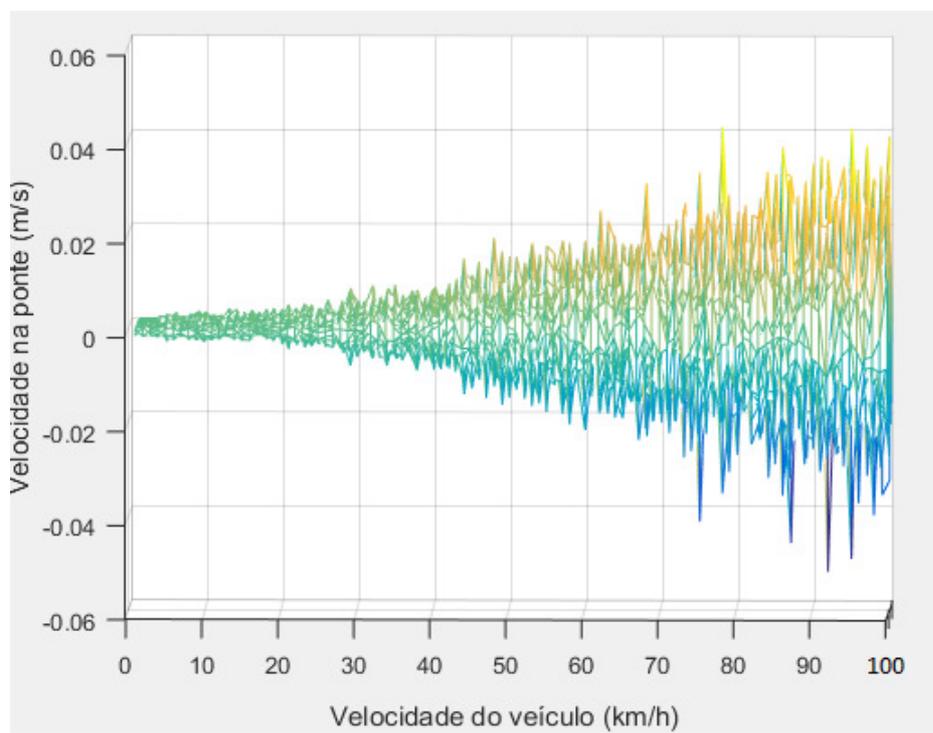
- $\omega_{db}$  representam as frequências naturais amortecidas da ponte;
- $\omega_i$  representam as frequências associadas às irregularidades;
- $L_r$  representa o comprimento de onda da irregularidade da via;
- $V_{Rb}$  representa a velocidade do veículo para causar a ressonância na ponte.

Na irregularidade randômica, o comprimento de onda  $L_r$  é escolhido de forma aleatória (variando de 0,3 m a 70 m ), portanto a velocidade de ressonância da via também varia de forma aleatória e a velocidade de ressonância não é obtida de forma tão óbvia.

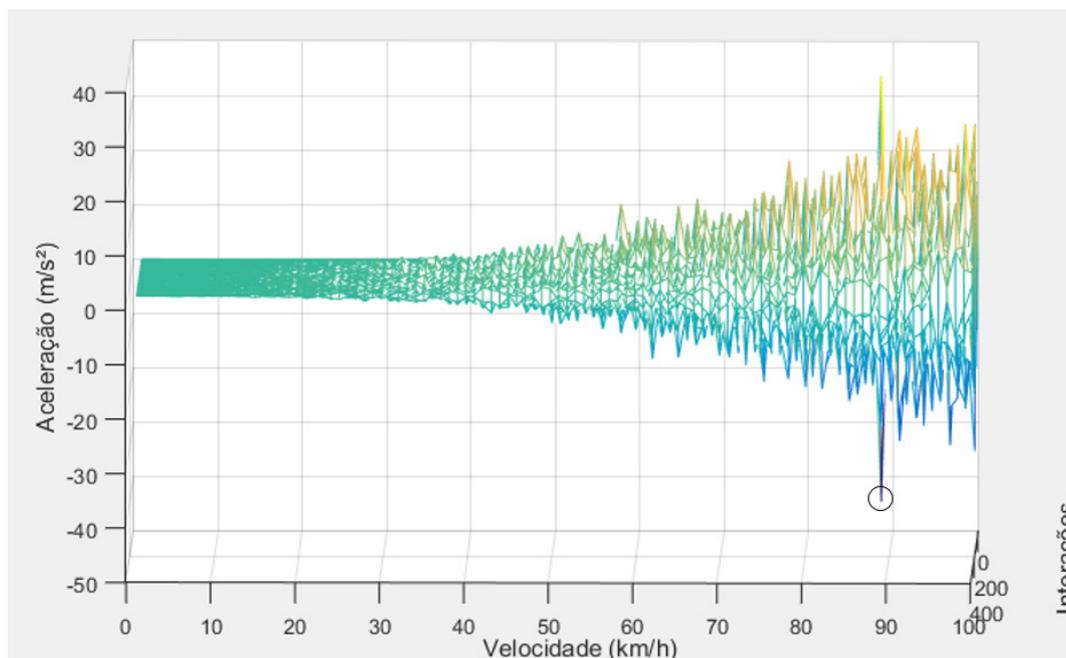
As Figura 43, Figura 44 e Figura 45 indicam deslocamentos, velocidades e acelerações no centro da ponte para o intervalo de velocidades de 1 km/h a 100 km/h. Por meio destes gráficos é possível observar os picos de deslocamentos e assim analisar os pontos de ressonância, que são indicados por círculos próximos dos 1km/h, 8 km/h, 55 km/h, 80 km/h e 90 km/h (velocidade percorrida pelo trem sobre a ponte).



**Figura 43 – Gráfico de velocidade do trem x interações x deslocamento**  
**Fonte: Autoria própria**



**Figura 44 – Gráfico de velocidade do trem x interações x velocidade**  
**Fonte: Autoria própria**



**Figura 45 – Gráfico de velocidade do trem x interações x aceleração**  
**Fonte: Autoria própria**

Segundo Axelsson e Syk (2013), o *Eurocode* recomenda que a aceleração na ponte seja limitada a  $3,5 \text{ m/s}^2$ . De acordo com os valores obtidos e retratados na Figura 45, a ponte atende a este critério para velocidades até  $38 \text{ km/h}$ . A partir desta velocidade, a aceleração excede este limite prejudicando o conforto dos passageiros. Este limite pode ser reduzido com a utilização do espraçamento da carga indicado pelo *Eurocode* e mostrado no estudo de Rehnström e Widén (2012).

Foram avaliadas as classes de qualidade da via de acordo com *Federal Railroad Administration* (2017) e os deslocamentos obtidos utilizando estas classes são comparados. Como estas classes não podem ser utilizadas para qualquer velocidade, a comparação foi feita utilizando a velocidade máxima para trens de passageiros admitida para cada classe, conforme retratado na Tabela 25.

Tabela 25 –Parâmetros das classes de via – Irregularidade Randômica

Qualidade (classe FRA)	A (cm <sup>2</sup> rad/m)	$\Omega_c$	$\delta$ vertical máx. (cm)	velocidade máx. km/h
1	1,2107	0,8245	7,62	24,1
2	1,0181	0,8245	6,98	48,3
3	0,6816	0,8245	5,72	96,60
4	0,5376	0,8245	5,08	128,8
5	0,2095	0,8245	3,18	144,0
6	0,0339	0,8245	1,27	177,0

Fonte: Autoria própria

A Figura 46 indica os deslocamentos no meio do vão durante a passagem do veículo para as diversas classes da *Federal Railroad Administration* (2017). Para cada classe é utilizado no dimensionamento o deslocamento vertical máximo, o coeficiente “A” respectivo e a velocidade máxima admissível para cada classe conforme a norma e indicada na Tabela 26.

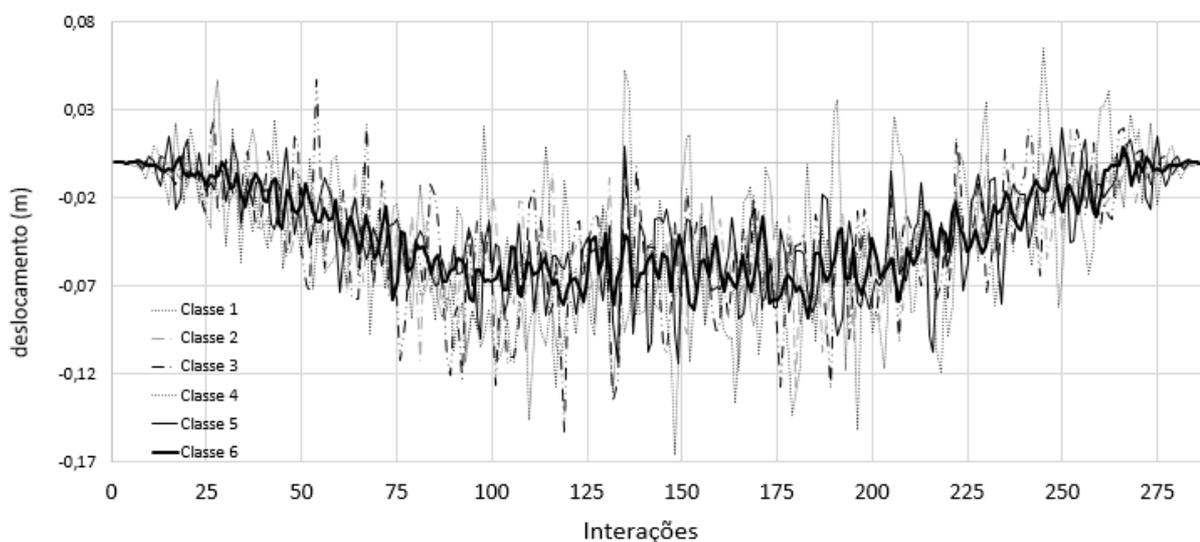


Figura 46 – Influência das classes de qualidade (FRA) no deslocamento vertical  
Fonte: Autoria própria

A Tabela 26 mostra as classes de carregamento adotadas com suas respectivas velocidades máximas consideradas no cálculo. Os resultados são extraídos da Figura 46 para os deslocamentos máximos e médios. A redução do deslocamento é comparada para o deslocamento médio.

Tabela 26 – Influência das classes de qualidade (FRA) no deslocamento vertical

Qualidade (classe FRA)	Linha	Deslocamento máximo (mm)	Deslocamento médio (m)	Interação	Acréscimo do deslocamento médio
1 (v=24,1 km/h)	.....	0,118	0,0495	163	37,23%
2 (v=48,3 km/h)	- . -	0,127	0,0405	177	12,37%
3 (v=96,6 km/h)	- . . .	0,153	0,0374	117	3,68%
4 (v=128,8 km/h)	————	0,166	0,0361	145	0,00%
5 (v=144 km/h)	————	0,114	0,0374	147	3,68%
6 (v=177 km/h)	————	0,089	0,0421	178	16,40%

Fonte: Autoria própria

Pode-se observar que o deslocamento máximo aumentou até a classe 4 e posteriormente voltou a diminuir.

## 8 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho é avaliar a influência do lastro e de irregularidades da via no comportamento estrutural dinâmico de uma ponte ferroviária em concreto.

Por meio das equações de movimento de um modelo tridimensional de veículo ferroviário com nove graus de liberdade desenvolvido por Beghetto (2006) foram obtidas as forças nas suspensões considerando lineares as propriedades de rigidez e amortecimento. As irregularidades da via foram consideradas de duas formas, as harmônicas senoidais e as randômicas. A irregularidade harmônica é obtida com ondas senoidais de 1,0 m, considerando deslocamento entre os dormentes. A irregularidade randômica é obtida considerando o critério de *Federal Railroad Administration* (2017), classe 2, com comprimentos de onda que variam de 0,3 m a 70 m.

Os esforços do veículo são transmitidos à ponte por meio dos pontos de contato entre as rodas e os trilhos.

A estrutura da ponte foi modelada com elementos finitos de duas camadas, sendo a camada superior que corresponde ao trilho e a camada inferior que corresponde a ponte em concreto protendido, ambas conectadas pelo lastro, por meio do amortecimento e rigidez. A rigidez e amortecimento do lastro são analisados avaliando diferentes valores obtidos de diversas referências bibliográficas. As equações de movimento de ambas as estruturas do veículo e da ponte foram integradas numericamente usando o método de *Newmark* com aceleração média.

A velocidade, aceleração e deslocamento da ponte são avaliados.

Mediante os resultados analisados, pode-se concluir que:

- A irregularidade randômica apresenta valores de deslocamentos máximos maiores que a irregularidade harmônica ( $L_w = 1,0$  m e amplitude = 1cm) para as classes 1 a 5 (*Federal Railroad Administration*), a Classe 6 apresenta valores de irregularidade randômica inferiores à irregularidade harmônica avaliada;
- O lastro influencia significativamente no deslocamento da via. Quanto maior a rigidez do lastro, menor o deslocamento da estrutura. O deslocamento reduziu cerca de 80% com a consideração do lastro;

- O amortecimento devido ao lastro não foi significativo na avaliação do deslocamento considerando a irregularidade harmônica e randômica, necessitando uma avaliação aprofundada para uma conclusão efetiva;
- O amortecimento devido ao lastro apresentou redução da resposta da velocidade da ponte. Esta redução foi significativa apenas na avaliação da irregularidade randômica, na irregularidade harmônica a variação foi muito pequena;
- O aumento de rigidez do lastro não tem influência na aceleração;
- A ressonância para a irregularidade randômica não é óbvia devido à aleatoriedade no comprimento da onda, sendo melhor analisada por meio dos gráficos;
- A variação de deslocamento para a variação de velocidade na irregularidade randômica apresentou maiores valores para as velocidades de 1km/h, 8 km/h, 55 km/h, 80 km/h e 90 km/h onde possivelmente ocorreu o efeito de ressonância.

## 8.1 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Para aumentar o conhecimento e entendimento sobre modelos de ponte, algumas análises numéricas adicionais podem ser feitas:

- Utilizar séries estatísticas para alimentar os valores da irregularidade randômica;
- Utilizar as demais irregularidades randômicas descritas no capítulo 2.3;
- Distribuir a carga ao longo dos dormentes para obter esforços mais próximos do fenômeno físico da ponte;
- Analisar a influência da não linearidade do lastro;
- Realizar a análise de tensões na ponte;
- Considerar aceleração e frenagem, bem como a influência da temperatura e vento nas solicitações;
- Considerar a influência da composição dos veículos nos resultados.

## 9 REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7187**: Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido – Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7188**: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro, 2013.

AXELSSON, Erik; SYK, Annelie. **Effect of axle load spreading and support stiffness on dynamic response of short span railway bridges**. Tese Mestrado. Department of Civil and Architectural Engineering. KHT, Royal Institute of Technology, SE, 2013.

BATTHE, Klaus-Jürgen; BAIG, Mirza M. Irfan. **On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics**. Computer & Structures, 83 (31-32), p. 2513-2524 (2005).

BATTINI, Jean-Marc; ULKER-KAULTELL, Mahir. **A simple finite element to consider non-linear influence of the ballast on vibrations of railway bridges**. Department of Civil and Architectural Engineering. KHT, Royal Institute of Technology, SE. Engineering Structures 33, 2597–2602, 2011.

BAZZI, G; ANDERHEGGEN, E. **An alpha modification of Newmark's method**. Numerical Methods in Engineering, 10, p. 537-550, 1982

BEGHETTO, F. L. M. **Modelagem tridimensional da interação dinâmica entre veículo e ponte ferroviária considerando contato roda-trilho, irregularidades da via e variação de velocidade**. Tese (Doutorado), Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2011.

BEGHETTO, F. L; M. ABDALLA, J. E. **Modeling the Dynamic Response of a Railway Bridge and Vehicle System**. Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology, Civil-Comp Press, Stirlingshire, Scotland, 2010.

BEGHETTO, F. L. M. **Efeitos dinâmicos em modelo de veículo e ponte ferroviária diante da variação de velocidade e irregularidades verticais da via.** Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

BOURGEOIS, E.; SOYEZ, L.; KOUBY, A. L. **Experimental and numerical study of the behaviour of a reinforced-earth wall subjected to a local load.** Elsevier Computers and Geotechnics 38, 515–525, 2011.

BOWLES, Joseph. **Foundation Analysis and Design.** McGraw-Hill International Editions, 1996.

CAI, Z.; RAYMOND, G. P.; IGWEMEZIE, J. O. **Contact loads from vertical dynamic wheel/rail and track interaction.** Fourth International Conference on Contact Mechanics and Wear of Wheel/Rail Systems, Vancouver, 1994.

CALÇADA, Rui; DELGADO, Raimundo; MATOS; CAMPOS, António. **Bridges for High-Speed Railway.** Taylor & Francis Group, LLC, 2008.

CHENG, Y. S.; AU, F. T. K.; CHEUNG, Y. K. **Vibration of railway bridges under a moving train by using bridge-track-vehicle element.** Engineering Structures, Great Britain, v. 23, p. 1597 - 1606, 2001.

CHOPRA, A.K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering,** Pearson Education: New Jersey, Estados Unidos, 2011.

CHUNG J., HULBERT G. **A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method.** Journal of Applied Mechanics, 60, p. 371-375 (1993)

COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E.; WITT, R.J. **Concepts and applications of Finite Elements.** University of Wisconsin – Madison, 2002.

COOK, Robert D. **Finite Element Modelling for Stress Analysis.** University of Wisconsin – Madison, 1995.

CORREA, Walber da Luz. **Controle de vibrações induzidas pela interação dinâmica entre trens-trilho-dormente-estrutura de aço de pontes ferroviária.** Rio de Janeiro (Tese). Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.

COSTA, P. A.; CALÇADA, R.; CARDOSO, A. S. **Track-ground vibrations induced by railway traffic: in-situ measurements and validation of a 2.5d fem-model.** Soil Dynamics and Earthquake Engineering 32, 111–128, 2011.

CUI, Rixin ; GAO, Liang ; ZHONG, Yanglong ; XIN, Tao. **Analysis of vibration reduction properties of rail damping under high-speed vehicle moving load.** Noise & Vibration Worldwide, Vol.45(3), pp.8-12, 2014.

CUNHA, P. G. **Análise Dinâmica de Pontes Ferroviárias: Uma metodologia simplificada.** São Paulo. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica de São Paulo, 2011.

DAHLBERG, T. **Handbook of Railway Vehicle Dynamics.** Track Issues, Taylor & Francis Group, LLC, 2006.

DELGADO, Raimundo; CALÇADA, Ruy; GOICOLEA, José Maria; GABALDÓN, Felipe. **Dynamic of High Speed Railway Bridges.** Taylor & Francis Group, LLC, 2008.

DI MINO, G.; DI LIBERTO, C. M. **A model of dynamic interaction between a train vehicle and a rail track.** 4th International SIIV Congress – Palermo (Italy), 12-14 September, 2007.

ESVELD, C. **Measuring and rectifying rail roughness and bad welds, 3rd Int. Heavy Haul Railways Conf., Paper BIB-52, Vancouver (Canadá), 1986.**

FRIES, R. H; COFFEY, B. M. **“A state-space approach to the synthesis of random vertical and crosslevel rail irregularities,”** J. Dyn. Syst., Measurement, and Control, 112(1), 83–87, 1990.

FRYBA, Ladislav. **Dynamic of Railway Bridges.** Academia of Sciences of the Czech Republic, Praha. Second edition, 1996.

FUJIKAWA, T.; IMANISHI, E.; NANJYO, T.; SUGANO N. **A precise and Stiffly Stable Time integration Method for Dynamic Analysis.** JSME International Journal, Series C, Vol 46, No 2, 2003.

FUNG T.C. **Complex-time-step Newmark methods with controllable numerical dissipation.** Numerical Methods in Engineering, 41, p. 65-93, 1998.

FUNG T.C. **Unconditionally stable higher-order Newmark methods by sub-stepping procedure.** Computer methods in applied mechanics and engineering, 147, p. 61-84, 1997.

GOEL, R. K. **Effects of increasing speed on dynamic impact – An analytical study on standard steel girder bridges.** IRICEN Journal of Civil Engineering, 2009.

GONZALES, Ignacio; KAROUMI, Raid. **Analysis of the annual variations in the dynamic behaviour of the ballasted railway bridge using Hilbert transform.** KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden. Universitat Politècnica de Catalunya, Jordi Girona. Engineering Structures 60, 126-132, 2014.

GUIMARÃES, Carlos Alberto B. **Análise das solicitações dinâmicas na via férrea através da simulação da interação entre o veículo e a via.** Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas, 1999.

HALL, J.F. **Problems encountered from the use (or misuse) of Rayleigh damping.** Earthquake Engineering and Structural Dynamics 35, 525-545, 2006.

HILBERT, H.M.; HUGHES, T.J. **Collocation, dissipation and overshoot for time integration schemes in structural dynamics.** Earthquake Eng Struct Dynam, 6, p. 99-117, 1978.

HILBERT, H.M.; HUGHES, T.J.; TAYLOR, R.L. **Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics.** Earthquake Eng Struct Dynam, 5 p. 283-292, 1977.

HOUBOLT, JC. **A recurrence matrix solution for the dynamic response of aircraft in gusts;** 1951

KUMARAN, G.; MENON, D.; NAIR, K. K. **Dynamic studies of railtrack sleepers in a track structure system.** Journal of Sound and Vibration 268, 485–501, 2003.

LEI X., N.; NODA A., **Analyses of dynamic response of vehicle and track coupling system with random irregularity of track vertical profile,** Sound Vib, 258, 2002.

LIU, TY.; LI, QB.; ZHAO, CB. **An efficient time-integration method for nonlinear dynamic analysis of solids and structures.** Science China Vol.56 No.4:798-804, 2011.

MATSUMOTO, Makoto; NISHIMURA, Takuji. **Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator.** ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS) - Volume 8, 1998.

MARI, Antonio R. **Numerical simulation of the segmental construction of three-dimensional concrete.** Universitat Politècnica de Catalunya, Jordi Girona. Engineering Structures 22, 585, 2000.

MARIN, R. A. H. **Two dimensional Linear Finite Element Analysis of Post-tensioned Beam with Embedded Elements using MATLAB.** Panama City, Panama. Dissertação (Mestrado). Universidad Santa Mara La Antigua, 2000.

MELCER, Jozef. **A vehicle-bridge interaction.** Communications/Komunikacie, Scientific letters of the University of Žilina, Slovakia, v. 9, n. 3, p. 5-10, 2007.

NEWMARK N. **A method of computation for structural dynamics.** Proc ASCE 1959.

NEWMARK N. M. e HALL, W. J. **Earthquake Spectra and Design, Earth-quake Engineering Research Institute,** Berkeley, California, 1982.

NGUYEN, Vu Hieu. **Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles.** (Tese doutorado). L'écola Nationale des Ponts e Chaussees, França, 2002.

PANT; WIJEYEWICKREMA. **On Modeling Viscous Damping in Nonlinear Dynamic Analysis of Base-Isolated Reinforced Concrete Buildings.** Tokyo Institute of Technology, Japan. 15 WCEE LISBOA, 2012.

PODWORNA Monika. **Modelling of Random Vertical Irregularities of Railway Tracks.** Int. J. of Applied Mechanics and Engineering, 2015, vol.20, N<sup>o</sup>.3, pp.647-655, 2015.

RAUERT, T.; BIGELOW, H.; HOFFMEISTER, B.; FELDMANN, M. **On the prediction of the interaction, effect caused by continuous ballast on filler beam railway bridges by experimentally supported numerical studies.** *Engineering Structures* 32, 3981–3988, 2012.

REHNSTRÖM, Rikard; WIDÉN, Daniel. **The influence of ballast on the vibrations of railway bridges.** Tese Mestrado. Department of Civil and Architectural Engineering. KHT, Royal Institute of Technology, SE, 2012.

RICCI, L.; NGUYEN, V.; SAB, K., DUHAMEL, D., SCHMITT, L. **Dynamic behaviour of ballasted railway tracks: A discrete/continuous approach.** *Computers and Structures* 83, 2282–2292, 2015.

RIGUEIRO, Constança et al. **Influence of ballast models in the dynamic response of railway viaducts.** Department of Civil Engineer EST, Institute Polytechnic of Castelo Branco. *Journal of Sound and Vibration* 329, 3030–3040, 2010.

RUGE, P.; BIRK, C. **Longitudinal forces in continuously welded rails on bridgedecks due to nonlinear track-bridge interaction.** *Computers & Structures*, n. 85, p. 458-475, 2007.

RUGE, P.; WIDARDA, D. R.; SCHMÄLZLIN, G.; BAGAYOKO, L. **Problems with Rayleigh Damping in Base-Isolated Buildings.** *Journal of structural engineering ASCE*, 134(11): 1780-1784, 2008.

RYAN, Keri L.; POLANCO, Jose. **Longitudinal track-bridge interaction due to sudden change of coupling interface.** *Computers and Structures*, 87 (2009), p. 47-58.

SHAHU, J.; RAO, N. K.; YUDHBIR. **Parametric study of resilient response of tracks with a sub-ballast layer.** *Canadian Geotechnical Journal* 36(6), 1137–1150, 1999.

SHOJAEI, Saeed; ROSTAMI, Sobhan; ABBASI Asghar. **An unconditionally stable implicit time integration: Modified quartic B-spline method.** *Computer & Structures*, 153, p. 98-111 (2015).

SHRIKHANDE, M. **Finite Element Method and Computational Structural Dynamics,** Department of Earthquake Engineering, Indian Institute of Technology, Roorke, India, 2014.

THOMAZ, E. C. S. **Concreto Prótendido, Ponte Ferroviária, Projeto Real, Notas de Aula**, Instituto Militar de Engenharia, 2008.

WILSON, E; FARHOOMAND, I; BATHE, K. **Nonlinear dynamic analysis of complex structures**. Earthquake Eng Struct Dynam, 1 p. 241-252,1972.

WOOD W.L., BOSSAK M., ZIENKIEWICZ O.C. **An alpha modification of Newmark's method**. Numerical Methods in Engineering, 15 p. 1562-1566, 1980.

YANG, Y.B; YAU, J.D; WU, Y.S. **Vehicle-Bridge Interaction Dynamics: With applications to High-Speed Railways**. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapur, 2004.

ZIENKIEWICZ, O., WOOD, W.L; HINE, N.M; TAYLOR, R.L. **A unified set of single step algorithms. Part 1: General formulation and applications**. Numerical Methods in Engineering, 20, p. 1529-1552, 1984.

ZHAI, W.; WANG, K.;LIN, J. **Modelling and experiment of railway ballast vibrations**. Journal of Sound and Vibration 270, 673-683, 2004.

ZHANG, Q-L; VROUWENVELDER A.; WARDENIER J. **Numerical simulation of train-bridge interactive dynamics**, Computers & Structures, 79, 2001.