UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

SILVIA FRANCIELE PADILHA FROTA

# UM ESTUDO DA ESTRUTURA A TERMO DE TAXAS DE JUROS DE TÍTULOS PÚBLICOS PREFIXADOS E O MODELO DE SVENSSON

CURITIBA

2017

SILVIA FRANCIELE PADILHA FROTA

# UM ESTUDO DA ESTRUTURA A TERMO DE TAXAS DE JUROS DE TÍTULOS PÚBLICOS PREFIXADOS E O MODELO DE SVENSSON

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.
Orientador: Ronie Peterson Dario, Dr.
Coorientador: Francisco Itamarati Secolo Ganacim, Dr.

CURITIBA

2017

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**

F941e Frota, Silvia Franciele Padilha
2017 Um estudo da estrutura a termo de taxas de juros de títulos públicos prefixados e o modelo de Svensson / Silvia Franciele Padilha Frota.-- 2017.
37 f.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2017.
Bibliografia: f. 37.

1. Svensson, Lars E. O. 2. Taxas de juros. 3. Títulos públicos. 4. Modelos matemáticos. 5. Política monetária - Brasil. 6. Mercados financeiros futuros. 7. Matemática financeira. 8. Matemática - Dissertações. I. Dario, Ronie Peterson, orient. II. Ganacim, Francisco Itamarati Secolo, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD: Ed. 22 – 510

**Biblioteca Central do Câmpus Curitiba - UTFPR**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Curitiba
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

**Título da Dissertação No. 036**

# "Um Estudo da Estrutura a Termo de Taxas de Juros de Títulos Públicos Prefixados e o Modelo de Svensson"

por

## Silvia Franciele Padilha Frota

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 9h do dia 11 de fevereiro de 2017. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Francisco Itamarati Secolo Ganacim, Dr.
(Presidente - Co-orientador - UTFPR/Curitiba)

Prof. João Luis Gonçalves, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Prof. Roy Wilhelm Probst, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Prof. Jorge Luis Torrejon Matos, Dr.
(PUC/PR)

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Orientador - UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Márcio Rostirolla Adames
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

# AGRADECIMENTOS

Ao *Eterno*, o meu Pai.

Ao meu amado esposo Luciano Rocha Frota.

Aos meus orientadores Prof. Ronie Peterson Dario e Prof. Francisco Itamarati Secolo Ganacim.

À CAPES pelo apoio financeiro.

## RESUMO

FROTA, Silvia Franciele Padilha. UM ESTUDO DA ESTRUTURA A TERMO DE TAXAS DE JUROS DE TÍTULOS PUBLICOS PREFIXADOS E O MODELO DE SVENSSON. 37 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017

A Estrutura a Termo de Taxas de Juros (ETTJ) é um elemento essencial para formulação da política monetária. Ela é capaz de indicar as expectativas do mercado financeiro em relação as taxas de juros futuras. Nesse trabalho estudamos a formação da ETTJ com enfoque maior na matemática envolvida, haja visto que na literatura esse assunto em geral é tratado apenas com foco na economia. Demonstramos as relações matemáticas entre as taxas de juros à vista, futuras e instantâneas. Estudamos também o modelo matemático empírico de previsão da curva de juros proposta por Lars E. O. Svensson (SVENSSON, 1994). Esse modelo é de fácil aplicação pois necessita de poucos parâmetros para se ajustar a curva de juros. Por esse motivo esse modelo tem sido amplamente usado em Bancos Centrais de diversos países inclusive pelo Banco Central do Brasil. Concluímos com uma aplicação do modelo de Svensson (SVENSSON, 1994) utilizando os preços dos títulos prefixados do Tesouro Direto.

**Palavras-chave**: Estrutura a Termo de Taxas de Juros, Modelo de Svensson, Taxa Futura Instantânea, Títulos Públicos.

# ABSTRACT

FROTA, Silvia Franciele Padilha. FORECAST INTEREST. 37 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017

The Term Structure of Interest Rates (TSIR) is an essential element for the formulation of monetary policy. It is able to indicate the expectations of the financial market in relation to future interest rates. In this work we study the formation of TSIR with a greater focus on the mathematics involved, since in the literature this subject is generally treated only with a focus on economics. We prove the mathematical relation between spot, future and instantaneous interest rates. We also study the empirical mathematical model of forecasting the interest curve proposed by Lars E. O. Svensson (SVENSSON, 1994). This model is easy to apply since it requires few parameters to adjust the interest curve. For this reason, this model has been widely used by Central Banks of several countries, including the Central Bank of Brazil. We conclude with an application of the Svensson (SVENSSON, 1994) model using the prices of fixed-rate Treasury Direct securities.

**Keywords**: Term Structure of Interest Rates, Svensson Model, Instantaneous future rates, Govenment Securities.

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Taxa de juro é o índice que define o crescimento do dinheiro. A **Estrutura a Termo de Taxas de Juros (ETTJ)** é a relação entre as taxas de juros de curto e longo prazos de um ativo de renda fixa e suas maturidades, ou seja, prazos diferentes implicam em rendimentos diferentes. Geralmente a ETTJ é representada graficamente por uma curva, sendo chamada também de **curva de juros**.

A curva de juros é uma aproximação teórica dos dados reais, visto que o mercado financeiro oferece um número limitado de ativos, ou seja, não existem pontos suficientes para gerar uma curva. Entretanto, ter o conjunto completo de pontos é necessário para prever os juros futuros e auxiliar as decisões no mercado financeiro, como precificação de títulos, avaliações de riscos, decisões da política monetária entre outros (VARGA, 2009).

O mercado financeiro pode ser entendido como um ambiente de encontro entre quem tem recursos disponíveis para investimentos com os que precisam de recursos. Isso acontece através do que é chamado de ativos monetários ou financeiros. Esses ativos financeiros são disponibilizados através de um intermediador financeiro autorizado pelo Banco Central a operar, como por exemplo, bancos comerciais, cooperativas de crédito, corretoras entre outros.

Essas instituições oferecem diversas opções de investimentos, com diferentes riscos e remunerações, podendo ser classificadas em renda fixa ou renda variável. Dentre os inúmeros produtos de investimentos podemos citar as ações, fundos de investimentos, debêntures e títulos públicos.

Um dos ativos financeiros que mais tem se destacado no Brasil, principalmente a partir do ano de 2014, são os títulos públicos federais. Segundo o balanço divulgado no *site* do Tesouro Nacional <http://www.tesouro.gov.br/documents> houve 53.376 novos cadastros só em novembro de 2016, atingindo o total de 1.077.809 investidores cadastrados, sendo que em julho de 2006 o número de investidores não chegava a 70.000.

No Brasil os títulos públicos federais são emitidos pelo Tesouro Nacional, órgão central do Sistema de Administração Financeira Federal e do Sistema de Contabilidade Federal. Com a intenção de adquirir recursos para financiar suas despesas, o Governo Federal emite títulos públicos de renda fixa. De forma simples, podemos dizer que ao adquirir um título, o investidor se torna credor do governo em troca de uma remuneração.

O Tesouro Direto é um programa do Tesouro Nacional desenvolvido em parceria com a BM&FBovespa (Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo) para venda de títulos públicos federais para pessoas físicas, por meio da internet. A compra do título é feita diretamente pelo *site* do Tesouro Direto ou corretoras financeiras. Para tal, o investidor tem que possuir uma conta em uma instituição financeira (banco ou corretora de valores) habilitada a operar títulos


Figura 1 – Balanço do Números de Investidores do Tesouro Direto

públicos pelo programa.

Há diversas modalidades de títulos oferecidos pelo Tesouro Direto, cujas remunerações podem ser prefixadas ou pós-fixadas atreladas a índices financeiros. Outra característica é a forma do pagamento da remuneração, que pode ser feita parcelada ao longo do investimento ou de forma única ao final do contrato.

A formação dos preços dos títulos é diferente para cada modalidade. Focaremos nos títulos prefixados sem pagamentos antecipados de juros, conhecidos como títulos zero cupom, pois a partir deles que a ETTJ é construída.

O preço de um título prefixado é obtido através do desconto sobre o seu valor de face, que é o montante investido somado à rentabilidade. O desconto aplicado sobre o valor de face oscila de acordo com a taxa de juros vigente e a demanda de mercado. Quando a taxa de juros do mercado está alta o preço dos títulos tende a diminuir. E de forma inversa, quando a taxa de juros está baixa o preço tende a aumentar. Essa variação de preços é chamada no mercado financeiro de **marcação a mercado**.

Estudar a dinâmica de formação da curva de juros é extremamente relevante para os formuladores da política monetária e para os investidores em geral. Não antecipar os movimentos da curva de juros pode significar risco de perdas de capital, pois qualquer alteração nas taxas de juros pode causar um grande impacto nas atividades econômicas.

A taxa de juros de um título zero cupom é chamada de **taxa à vista** ou **taxa *spot***. Ela é o retorno efetivo de um título. A **taxa futura (taxa *forward*)** ou **taxa a termo** é a taxa à vista que irá vigorar em um período de tempo no futuro. Podemos estimar as taxas futuras a partir da curva de taxas à vista (FARO, 2015). Como já dito anteriormente, não existem títulos com vencimentos para todas as datas. Sendo assim, não é possível construir uma curva contínua apenas com as taxas observadas no mercado. Porém é indispensável se obter uma curva de juros contínua.

Nesse sentido, diversos modelos matemáticos foram desenvolvidos afim de modelar a curva de juros. Dentre eles, os modelos estatísticos têm se destacado por sua eficiência na aproximação da curva com os dados reais. Nesse trabalho vamos analisar o modelo paramétrico ou estatístico proposto por Nelson e Siegel (1987) e estendido por Svensson (1994). Esse modelo utiliza os juros observados no mercado financeiro e através de poucos parâmetros cria uma função que liga todos os dados disponíveis. Esse modelo tem sido amplamente utilizado por diversos bancos centrais como por exemplo, Brasil, Itália, Espanha, Bélgica, França, Alemanha e outros (BIS, 2005). Isso se deve a sua eficiência nos ajustes da curva, tais como nível, inclinação e curvatura, e também pela sua fácil aplicação (VARGA, 2009).

O objetivo desse trabalho é estudar a construção da ETTJ bem como seus elementos e os diversos formatos que ela pode assumir. Para isso, no capítulo 1 vamos fazer uma breve revisão dos principais conceitos da matemática financeira.

No capítulo 2 apresentaremos as principais características dos títulos públicos. Veremos como é feita a precificação e a marcação a mercado.

No capítulo 3 vamos demonstrar as relações matemáticas entre as taxas à vista e as taxas futuras. Veremos os principais formatos que a ETTJ pode assumir.

No capítulo 4 vamos estudar o modelo de previsão da curva de juros desenvolvido por Svensson (SVENSSON, 1994). Vamos dar ênfase na matemática envolvida, haja vista que a maioria das publicações sobre esse modelo são escritos por economistas ou áreas afins, e no entanto não têm como finalidade o desenvolvimento dos conceitos matemáticos do modelo. Por fim faremos uma aplicação do modelo com dados reais de títulos públicos prefixados.

# 1 TAXA DE JUROS

A Matemática Financeira tem por objetivo estudar os vários modelos de transformação do valor do dinheiro no tempo, possibilitando assim análises e comparações de investimentos para a multiplicação de recursos financeiros (NETO, 1998).

Quem faz um empréstimo em dinheiro ou adquire um bem a ser pago no futuro, em geral, paga um acréscimo pela utilização do dinheiro ou pelo adiamento do pagamento do valor do bem. Esse acréscimo pago ao credor, isto é, a quem emprestou, é denominado de **juro**. Toda vez que se empresta dinheiro à uma instituição financeira, com o objetivo de obter lucro, ocorre o que é chamado de **operação ou aplicação financeira**.

Neste capítulo faremos um breve estudo dos fundamentos principais da matemática financeira. Abordaremos taxa de juros, regimes de capitalização e desconto.

## 1.1 TAXA DE JUROS

O valor monetário aplicado em alguma operação financeira afim de obter rendimentos (juros), é chamado de **capital inicial** ou **valor presente**. A soma do capital inicial $C_0$ com os juros $J$ recebidos da aplicação é denominado de **montante**, conhecido também por **valor futuro** ou **capital acumulado** $C_n$. Assim

$$C_n = C_0 + J. \tag{1.1}$$

Isso implica que o *juro* $J$ é a diferença entre o capital acumulado $C_n$ e o capital inicial $C_0$, isto é

$$J = C_n - C_0.$$

A **taxa de juros** $i$ é a taxa de crescimento do capital emprestado/aplicado, ou seja, é a relação entre os juros $J$ e o capital inicial $C_0$, assim

$$i = \frac{C_n - C_0}{C_0} = \frac{J}{C_0}. \tag{1.2}$$

Podemos reescrever a fórmula (1.2) colocando o juro $J$ em função de $i$, desse modo temos que

$$J = C_0 i.$$

Reescrevendo a fórmula do capital acumulado (1.1), teremos que

$$C_n = C_0 + C_0 i = C_0(1 + i).$$

## 1.2 REGIME DE CAPITALIZAÇÃO

Regime de capitalização é a forma como o juro é inserido ao capital inicial com o transcorrer do tempo, ou seja, a taxa de juro $i$ pode ser inserida por $n$ períodos de tempo com $n > 0$.

Basicamente são duas formas de capitalização, **simples e composta** que podem ser aplicados de forma **discreta**, quando os juros são incorporados ao capital no final de cada intervalo de tempo a que se refere a taxa de juros (ao dia, ao mês, ao ano) ou **contínua** quando os intervalos de tempos são infinitesimais.

### 1.2.1 REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

Quando o juro de cada período é aplicado unicamente ao capital inicial $C_0$, chamamos de **juros simples**, que podem ser calculados pela fórmula da proposição abaixo.

**Proposição 1.1.** *Para um capital inicial $C_0$ aplicado a uma taxa de juros simples $i$ ao período, por $n$ períodos de tempo, tem-se*

$$J_n = C_0 in.$$

*Demonstração.* Usaremos indução sobre $n$. O caso $n = 1$ segue da definição de juros simples. Supondo $J_{n-1} = C_0 i(n-1)$, $n > 1$, temos $J_n = J_{n-1} + C_0 i = C_0 i(n-1) + C_0 i = C_0 in$. □

Consequentemente temos que o capital acumulado $C_n$ é dado por

$$C_n = C_0 + J_n = C_0 + C_0 in = C_0(1 + in).$$

**Exemplo 1.2.** Suponha que um capital de R$ 1.000,00 seja aplicado à taxa de juros simples de $5\%$ ao mês (a.m), por um período de 6 meses. O rendimento mensal será de R$ 50,00, isto é

$$J = 1000(0,05) = 50.$$

Como no regime de juros simples os juros são iguais para todos os períodos, para se obter os juros totais no final de 6 meses, basta multiplicar os juros mensais pela quantidade de períodos de tempo $(n)$ da aplicação, ou seja

$$J = C_0 in = 1000(0,05)6 = 300.$$

### 1.2.2 REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

No sistema de juros compostos devemos calcular os juros no fim de cada período, formando um montante sobre o qual calculamos os juros do período seguinte, até esgotarmos o tempo da aplicação, ou seja os juros obtidos no período anterior passam a compor o capital para o próximo período (é o que se chamamos de juros sobre juros).

**Proposição 1.3.** *Se um capital inicial $C_0$ for aplicado à uma taxa de juros compostos $i$ ao período e capitalizado $n$ vezes, então o capital acumulado $C_n$ será dado por*

$$C_n = C_0(1+i)^n.$$

*Demonstração.* Usaremos indução sobre $n$. Pela definição de capital acumulado, temos que a fórmula é valida para $n = 1$. Supondo $C_n = C_0(1+i)^n$ verdadeira então,

$$C_{n+1} = C_n(i+1) = C_0(1+i)^n(1+i) = C_0(1+i)^{n+1}.$$

□

**Exemplo 1.4.** Se um capital $C$ de R$ 5.000,00 for aplicado a uma taxa $i$ igual a 2% a.m por um período $n$ de 6 meses, o valor do montante no final desse período será de

$$C_n = 5000(1+0,02)^6 = 5.630,81.$$

### 1.2.3 REGIME DE CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA

A aplicação do juro de forma contínua sobre um capital ocorre do mesmo modo que o regime de capitalização composta, o que difere é a quantidade de vezes que a capitalização acontece em um mesmo período. Enquanto no regime de capitalização composta os juros são capitalizados em períodos discretos, como por exemplo, ao dia, ao mês, ao ano, no regime de capitalização contínua os juros são capitalizados a todo instante de tempo, o que pode ser chamado de período de tempo **instantâneo** ou **infinitesimal**.

**Teorema 1.5.** *O capital acumulado no tempo $t$ pelo regime de capitalização contínua é dado por*

$$C(t) = C_0e^{it}, \tag{1.3}$$

*onde $C_0$ é o capital inicial.*

*Demonstração.* A taxa de variação do capital $(dC)$ em relação à taxa de variação do tempo $(dt)$ é o produto da taxa de juros pelo valor aplicado, isto é

$$\frac{dC}{dt} = iC.$$

Segue que

$$\int \frac{dC}{C} = \int idt.$$

Daí, $\ln C = it + K$, onde $K$ é uma constante arbitrária. Segue que $C = e^{\ln C} = e^{it}e^K$. Para $t = 0$, temos $C_0 = C(0) = e^K$. Daí $C(t) = C_oe^{it}$. □

## 1.3 DESCONTO

Capitalização financeira é a incorporação dos juros ao capital aplicado. A operação inversa da capitalização é o **desconto**, ou seja, é a descapitalização de um valor financeiro.

**Definição 1.6.** *A função desconto $d(t, T)$ no intervalo de $t$ a $T$ é o valor no tempo $t$ de uma unidade monetária no tempo $T$ e é dada por*

$$d(t, T) = e^{-i(T-t)}. \tag{1.4}$$

No regime de capitalização contínua um capital inicial $C_0$ é convertido em $C_0 e^{i(T-t)}$ após $T - t$ períodos de tempo, com $t < T$. Ou seja, no tempo $T$ temos o valor futuro do capital, e no tempo $t$ o valor presente. Então, pela fórmula (1.3), temos

$$C_0 = C(t)e^{-i(T-t)}.$$

# 2 TÍTULOS DE DÍVIDA

**Títulos Financeiros** ou **Títulos de Dívidas**, chamados também de **Obrigações**, são ativos emitidos e vendidos pelos governos ou empresas diretamente a investidores, para obter recursos financeiros. Um título constitui uma dívida para quem o emite. Isto faz com que o emissor se caracterize como devedor e o investidor como credor. O valor a ser recebido pelo investidor no momento da liquidação do título de dívida é chamado de **valor de face** ou **valor nominal**. Os títulos dão aos investidores o direito de receber a quantia emprestada acrescida dos juros ou em alguns casos, são vendidos com desconto no valor de face. Chamamos de **maturidade** a quantidade de tempo que dura o investimento, isto é, o tempo entre a compra e a liquidação do título.

O rendimento de um título financeiro pode ser **prefixado**, quando o investidor conhece previamente a rentabilidade do título, ou **pós-fixado** quando sua rentabilidade só é conhecida no vencimento, que geralmente é vinculada a um indexador econômico.

Os títulos não representam propriedades de empresas que os emitiram, como acontecem com as ações. Os títulos somente garantem os recebimentos de valores no futuro. Podemos classificar os títulos oferecidos no mercado em duas categorias, conforme a seguir.

## 2.1 TÍTULOS SEM CUPOM DE JUROS

Títulos sem cupom de juros ou **zero cupom** não pagam juros durante o período da aplicação, somente na maturidade do título o investidor recebe o valor pago no título acrescido da rentabilidade. Normalmente esses títulos são negociados com desconto sobre o seu valor de face. Desta forma, o preço $P(t,T)$ é valor no tempo $t$ de um título com maturidade em $T$, com $T > t$. Em particular, $P(0,T)$ é o preço atual (no tempo $t = 0$), ou seja, o valor presente do título.

**Definição 2.1.** *O preço no tempo $t$ de uma unidade de um título zero cupom com maturidade no tempo $T$ é dado por*

$$P(t,T) = d(t,T) = e^{-(T-t)i(t,T)},$$

*onde $i(t,T)$ é a taxa de juros correspondente. Em particular, $i(0,T)$ é a taxa de juros atual.*

**Observação 2.2.** No mercado financeiro considera-se apenas os dias úteis. Por padrão, temos 21 dias úteis no mês e 252 dias úteis no ano. Para sermos precisos, é possível calcular o número de dias úteis entre duas datas no Excel utilizando a função DIADETRABALHOTOTAL. É necessário saber o número de feriados no período. A ANBIMA [1] disponibiliza uma planilha com

[1] Associação Nacional das Instituições do Mercado Financeiro, entidade representativa das instituições do mercado de capitais brasileiro. Produz e divulga um conjunto de relatórios, estatísticas, estudos, rankings, referências de preços e índices e ferramentas de consulta.

feriados até 2078. O *download* pode ser feito no endereço eletrônico <www.anbima.com.br>.

Assim temos que o tempo durante a aplicação é dado por $T = \frac{DU}{252}$, onde DU são os dias úteis entre a data de compra do título (exclusivo) e a data de venda (inclusivo).

**Exemplo 2.3.** Vamos supor que um título zero cupom com valor de face $(F)$ igual a R$1.000,00 e maturidade $(T)$ de 630 dias úteis, esteja sendo negociado a uma taxa $i$ de $8\%a.a.$ Com base nessas informações podemos determinar o preço atual desse título:

$$P(0,T) = Fe^{-Ti(0,T)}$$
$$P(0,3) = 1000e^{-\frac{630}{252}(0,08)} = 818,73.$$

Portanto, o preço desse título no tempo $t = 0$ é R$818,73.

## 2.2 TÍTULOS COM CUPOM DE JUROS

Essa modalidade de título paga periodicamente uma quantia em dinheiro, denominada **cupom de juro**, ou seja, o rendimento é distribuido de forma regular durante todo o período da aplicação. O valor monetário do cupom é uma porcentagem do valor de face do título, chamada de **taxa do cupom**, que é definida no momento da emissão do título. Na maturidade do título o credor recebe o último cupom de juro juntamente com o valor de face.

Para calcularmos o valor $C$ do cupom de juro devemos multiplicar a taxa de juro $i$ pelo valor de face $F$, isto é,

$$C = Fi. \tag{2.1}$$

Como já visto anteriormente, o preço de compra dos títulos prefixados é determinado pelo desconto dado pela taxa de juros sobre o seu valor de face. No caso dos títulos com cupons, o desconto também é aplicado nos cupons. Então, para calcularmos o preço de um título com cupom, devemos trazer o valor de face e de cada um dos cupons para o valor presente.

Podemos determinar o preço $P(t,T)$ de um um título com cupom, negociado no tempo $t = 0$ e com maturidade $T > t$, através do somatório do valor presente de cada cupom do título mais o valor presente do valor de face $F$. Então

$$\begin{aligned} P(0,T) &= Ce^{-i(1)} + Ce^{-i(2)} + Ce^{-i(3)} + \cdots + Ce^{-iT} + Fe^{-iT} \\ &= \sum_{t=1}^{T} Ce^{-it} + Fe^{-iT}. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.4.** Considere um título com cupom de juros de 8% a.a, com maturidade de 5 anos (1260 dias úteis) cujo valor de face é R$ 1.000,00 e a taxa de juros oferecida de 10% a.a.

Podemos encontrar o valor de cada um dos 5 cupons desse título através da fórmula (2.1). Assim

$$C = 1000(0,08) = 80.$$

Quando um investidor compra esse título ele tem o direito de receber R$ 80,00 por ano ao longo dos 5 anos até o vencimento. Ao final desses 5 anos, o emissor da dívida também paga ao investidor o valor de face de R$ 1.000,00.

Para obtermos o preço $P$ de venda desse título temos que trazer o valor dos cupons $C$ pagos e o valor de face $F$ para o valor presente. Assim

$$\begin{aligned}P &= Ce^{-i(1)} + Ce^{-i(2)} + Ce^{-i(3)} + Ce^{-i(4)} + Ce^{-i(5)} + Fe^{-i(5)} \\ &= 80e^{-1(0,1)} + 80e^{-2(0,1)} + 80e^{-3(0,1)} + 80e^{-4(0,1)} + 80e^{-5(0,1)} + 1000e^{-5(0,1)} = 924,23.\end{aligned}$$

Portanto, o preço a ser pago pelo título é de R$ 924,23.

De forma simples, podemos dizer que o título zero cupom difere do título com cupom apenas na quantidade de parcelas em que é dividida a remuneração a ser paga ao credor, que no caso do título zero cupom esse pagamento é feito em uma única parcela no final do investimento.

Vamos nos concentrar apenas no título zero cupom, pois é peça fundamental para a previsão de taxas de juros (CALDEIRA; TORRENT, 2011).

## 2.3 TÍTULOS PÚBLICOS DO BRASIL

No Brasil os títulos públicos federais são emitidos pelo Tesouro Nacional em parceria com a BM&F Bovespa (Bolsa de Valores de São Paulo). Os títulos do Tesouro Nacional são disponibilizados para pessoas físicas através da internet, em uma plataforma digital chamada **Tesouro Direto**. São negociados atualmente os seguintes títulos:

**Tesouro Prefixado** (Antiga LTN - Letras do Tesouro Nacional) Seu valor de face é de R$ 1.000,00, apresenta fluxo de pagamento simples, isto é, o comprador recebe o rendimento apenas no final da aplicação, juntamente com o valor aplicado.

**Tesouro Prefixado com Juros Semestrais** (Antiga NTN-F - Nota do Tesouro Nacional – série F) Título prefixado, seu valor de face é de R$ 1.000,00, e o seu rendimento é pago de forma antecipada através de cupons de juros semestrais. Na data de vencimento do título é feito o resgate do valor de face juntamente com o pagamento do último cupom.

**Tesouro Selic** (Antiga LFT - Letras Financeiras do Tesouro) Título pós-fixado que foi criado em 01/07/2000. Nesta data o valor de face era de R$ 1.000,00 e desde então, este valor vem sendo atualizado diariamente, de acordo com a taxa SELIC, a taxa de juros básica da economia. Todos os dias o preço, denominado de Valor Nominal Atualizado (VNA), aumenta. Na prática, o Tesouro Direto divide a taxa Selic, que é uma taxa anual, em pequenas taxas diárias. Possui fluxo de pagamento simples. Assim, o investidor recebe o rendimento apenas uma vez, na data de vencimento do título, junto com o valor do principal.

**Tesouro IPCA+** (Antiga NTN-B - Nota do Tesouro Nacional – série B) Título pós-fixado que está vinculado ao IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo) acrescido de uma taxa de juros prefixada na data da compra. Assim como no Tesouro Selic, o Valor Nominal era de R$ 1.000,00 na data base, o dia 15/07/2000. O seu Valor Nominal Atualizado (VNA) é calculado de acordo com o IPCA acumulado. Possui cupom de juros pagos semestralmente.

**Tesouro IPCA+ com Juros Semestral** (Antiga NTN-B Principal - Nota do Tesouro Nacional – série B Principal) Semelhante ao título Tesouro IPCA+, a diferença é que não possui cupons de juros, ou seja, seu fluxo de pagamento é simples.

## 2.4 MARCAÇÃO A MERCADO

O título adquirido pelo investidor pode ser vendido antecipadamente em qualquer momento antes de sua maturidade. Porém, nesse caso, o emissor comprará o título pelo valor de mercado. A rentabilidade pode ser maior ou menor do que a contratada na data da compra. O valor de resgate do título com taxa de juros prefixada não muda, o que pode variar é o preço em que esse título é negociado caso haja venda antecipada, isto é, se o título for mantido até o seu vencimento o rendimento não é alterado com a variação do mercado.

Os preços dos títulos são atualizados diariamente em função das expectativas do mercado para a taxa básica de juros até a data de vencimento do título, que é chamado de **marcação a mercado**. O mercado financeiro projeta a taxa de juros esperada para os meses seguintes e a partir desta projeção os títulos têm o seu preço determinado. Quando a expectativa do mercado é de aumento dos juros, a remuneração do título sobe e seu preço tende a cair; mas quando é esperada uma queda de juros, a remuneração do título também cai e o preço aumenta.

Se a taxa de juros de um título se mantivesse inalterada até seu vencimento e seu preço fosse determinado apenas pela incorporação de juros proporcional ao tempo decorrido desde sua emissão, teríamos o que é chamado de **marcação pela curva**.

O gráfico a seguir traz valores hipotéticos de um título zero cupom com taxa de juros de 15,42% a.a cujo valor de face é R$ 1.000,00 e a maturidade é de 10 anos (2.520 dias úteis). Note que quando a taxa de juros sobe para 18,5% o preço fica menor em relação a curva, e quando a taxa diminui para 11,5% o valor de mercado do título aumenta.

**Exemplo 2.5.** Vamos fazer uma análise com dados reais do Tesouro Direto.

No dia 02/01/2014 o preço de um título prefixado LTN com vencimento em 01/01/2017 era de R$ 705,00, e a taxa de juros contratada era de 12,41%a.a, se mantida até o vencimento. Suponhamos que o investidor queira se desfazer desse título antecipadamente, no dia 18/01/2016, onde o valor de mercado desse título é R$ 872,33, e a taxa oferecida é de 15,42%. Nessas condições, vamos verificar qual foi o rendimento anual do investidor.

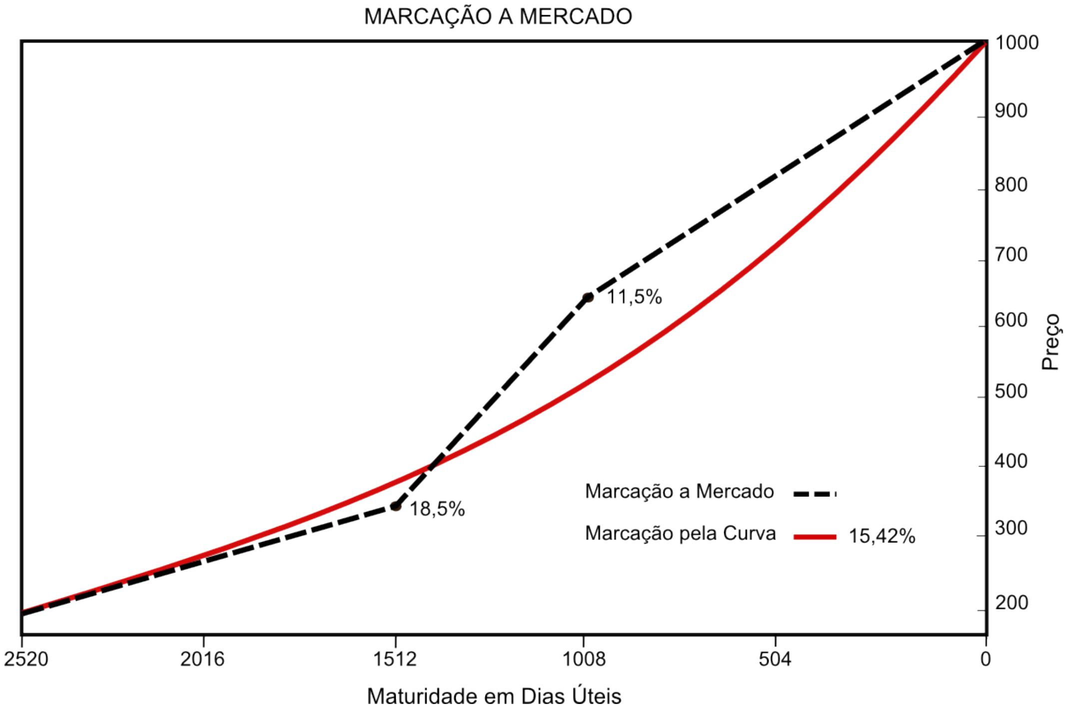


Figura 2 – Marcação a Mercado de Títulos

Inicialmente vamos calcular o rendimento total do dia da compra até 18/01/2016.

$$i = \frac{V_f}{V_p} - 1 = \frac{872,33}{705} - 1 = 0,2373.$$

Portanto o rendimento total até o dia 18/01/2016 foi de 23,73%. Para podermos comparar se foi vantajoso a venda antecipada, temos que encontrar qual foi a taxa anual durante esse período.

O número de dias úteis dessa aplicação foi de 491. Então, pela equivalência das taxas, temos $1 + 0,2373 = (1+i)^{\frac{491}{252}}$ , isto é, $i = 0,1154$.

A taxa de juros anual na venda antecipada foi de 11,54%, menor do que a taxa contratada.

Podemos também calcular o preço desse título no dia 18/01/16 usando o princípio da marcação pela curva.

Temos agora que o tempo $t$ é 491 e o tempo $T$ é 760 (total de dias úteis até a maturidade). Então $T - t$ = 269 e

$$P(491, 760) = 1000e^{-0,1542(269)} = 967,27.$$

O preço pela marcação na curva seria de R$ 967,27.

# 3 ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS

As taxas de juros são um dos aspectos mais importantes do sistema econômico. Elas regulam o valor do dinheiro, o custo de empréstimo e os retornos de investimentos.

A Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) é a relação entre o rendimento e a maturidade de títulos de renda fixa com as mesmas características. Por ser a ETTJ derivada de títulos públicos, ela é base para formação de outras taxas de juros do mercado.

A ETTJ não é construída de forma direta. Ela precisa ser estimada através das cotações de títulos disponíveis no mercado financeiro. No entanto, não há títulos com vencimentos para todas as datas, isto é, temos um conjunto discreto de pontos, e a partir deles podemos encontrar uma função que descreva uma curva contínua que se aproxime dos dados observados.

A inclinação, a forma e o nível das curvas de rendimento podem variar ao longo do tempo, de acordo com as mudanças nas taxas de juros. O formato da curva de juros dá uma ideia de como serão as alterações futuras nas atividades financeiras. Existem quatro formas principais de curvas, **normal, corcunda, invertida** e **horizontal**.

Curva de rendimentos **normal** ou **ascendente** indica que os rendimentos dos títulos de prazos mais longos tendem a continuar aumentando.

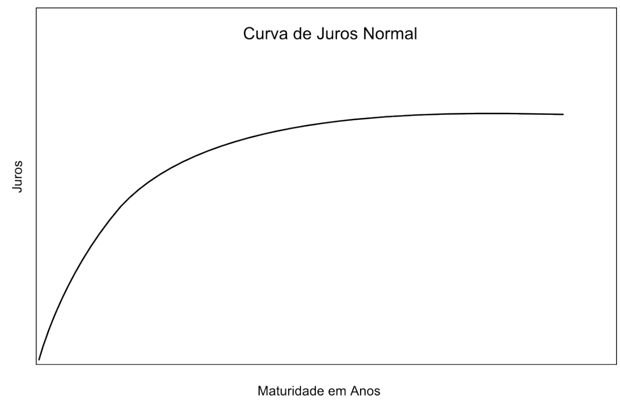


Figura 3 – Curva de juros normal

Curva de rendimentos **corcunda** indica transição na economia visto que, as taxas para prazos mais longos diminuem.

Curva de rendimentos **invertida** ou **inclinada para baixo** sugere que os rendimentos das obrigações de mais longo prazo podem continuar a cair, correspondendo a períodos de recessão econômica.

Curva de rendimentos **horizontal**, quando as taxas de curto e longo prazo são parecidas.

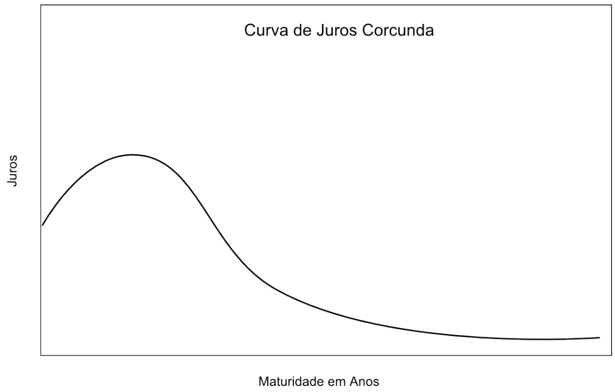


Figura 4 – Curva de juros corcunda

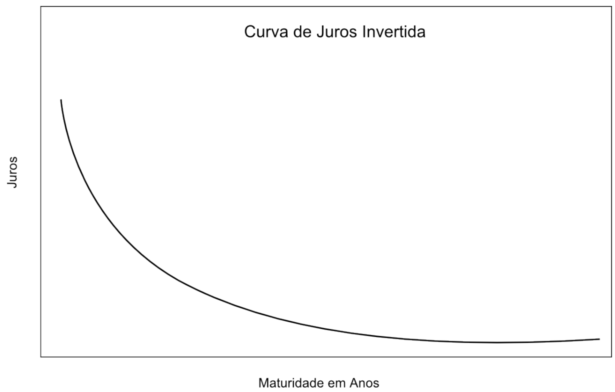


Figura 5 – Curva de juros invertida

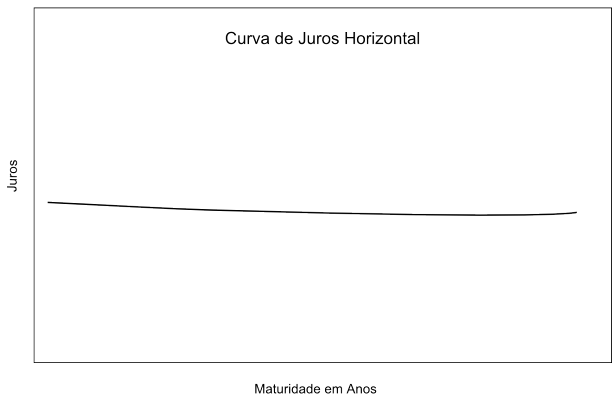


Figura 6 – Curva de juros horizontal

## 3.1 TAXA À VISTA (TAXA *SPOT*)

A taxa à vista é a taxa de juros implícita no preço contratado de um título zero cupom para uma determinada maturidade, conhecido também como *yield to maturity*. Ou seja, a taxa à vista é o rendimento efetivo que um investidor vai receber ao comprar um título e o manter até sua maturidade.

O preço $P(t,T)$ no instante $t$ do título zero cupom que paga uma unidade monetária em

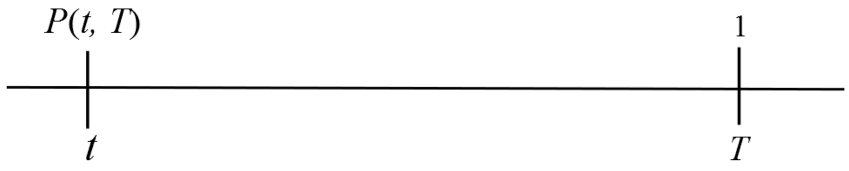


Figura 7 – Preço do título no tempo $t$

$T$, com $t < T$, é calculado a partir do desconto da taxa $i(t,T)$ sobre o valor de face. Portanto

$$P(t,T) = 1e^{-i(t,T)(T-t)} = e^{-i(t,T)(T-t)}.$$

Do mesmo modo, a taxa à vista pode ser calculada a partir do preço. Assim,

$$\ln P(t,T) = \ln e^{-i(t,T)(T-t)}.$$

E portanto,

$$i(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}. \quad (3.1)$$

**Observação 3.1.** Como $P(t,T)$ é o preço de uma unidade no tempo $t$, então $P(t,T) < 1$, para todo $t < T$. Isso decorre do fato que a taxa de juros $i(t,T)$ é maior que zero, para todo $t < T$.

**Exemplo 3.2.** Suponha que em um determinado dia o preço $P(0,T)$ de um título com maturidade $T$ de 4 anos e valor de face $F$ de R$ 1.000,00 esteja a venda por R$ 652,50. Podemos determinar a taxa à vista oferecida por esse título a partir de seu preço:

$$i(0,T) = -\frac{\ln (P(0,T))}{T} = 0,1067.$$

Temos então que à taxa a vista desse título é de 10,67%.

## 3.2 TAXA FUTURA (*TAXA FORWARD*)

**Taxa futura**, denominada também de taxa a termo ou taxa ***forward***, é a taxa à vista para períodos de tempo no futuro, ou seja, as taxas futuras indicam o rendimento esperado entre duas datas no futuro. Podemos também entender que a taxa futura $f(t,s,T)$ é a taxa à vista contratada no tempo $t$, mas que vigorará entre $s$ e $T$, com $t < s < T$, de forma que a combinação entre a taxa à vista $i(t,s)$ e a taxa futura $f(t,s,T)$ tenha o mesmo retorno que a taxa à vista $i(t,T)$.

A taxa futura $f(t,s,T)$ quando aplicada a um título comprado em $t$ e liquidado em $s$ com preço $P(t,s)$, deve produzir o mesmo retorno de um título com preço $P(t,T)$ comprado no tempo $t$ com maturidade $T$.

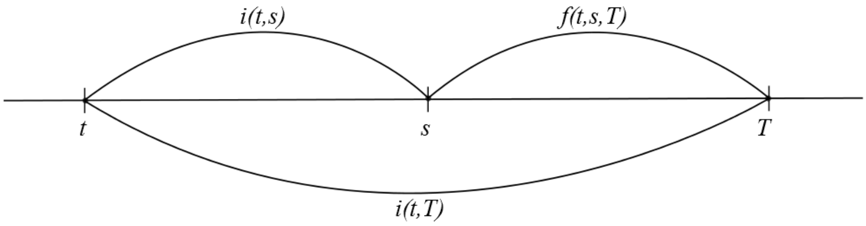


Figura 8 – Taxas Equivalentes

**Definição 3.3.** *Taxa futura no intervalo $[s, T]$ determinada no tempo $t$ com $t < s < T$ é denotada por $f(t, s, T)$ e definida como a taxa de juros $f(t, s, T)$ tal que*

$$P(t,T) = P(t,s)e^{-(T-s)f(t,s,T)}.$$

**Proposição 3.4.** *Mantidas as notações acima, podemos obter $f(t, s, T)$ como*

$$f(t,s,T) = \frac{i(t,T)(T-t) - i(t,s)(s-t)}{T-s}. \tag{3.2}$$

*Demonstração.* Seja $P(t, T)$ o preço de um título no tempo $t$ com maturidade em $T$ e $P(t, s)$ o preço de um título também no tempo $t$ mas com vencimento no tempo $s$ com $t < s < T$. Note que as taxas à vista $i(t, T)$ e $i(t, s)$ implícitas em $P(t, T)$ e $P(t, s)$ respectivamente, determinam a taxa futura $f(t, s, T)$ de modo que, ao obter o título com tempo de maturidade $s - t$ e ao final de sua maturidade no tempo $s$ reinvesti-lo no título de maturidade $T - s$ tenha o mesmo retorno do título de maturidade $T - t$.

Sendo $P(t,T) = e^{-i(t,T)(T-t)}$ e $P(t,s) = e^{-i(t,s)(s-t)}$, podemos determinar a taxa de juros futura $f(t, s, T) = e^{-f(t,s,T)(T-s)}$ igualando as duas opções de investimentos (CAPINSKI; ZASTAWNIAK, 2006). Assim

$$e^{-i(t,T)(T-t)} = e^{-i(t,s)(s-t)}e^{-f(t,s,T)(T-s)}.$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros da equação, temos

$$\ln e^{-i(t,T)(T-t)} = \ln e^{-i(t,s)(s-t)} + \ln e^{-f(t,s,T)(T-s)}.$$

Logo

$$f(t,s,T) = \frac{i(t,T)(T-t) - i(t,s)(s-t)}{T-s}. \tag{3.3}$$

□

**Exemplo 3.5.** Considere dois títulos zero cupom, ambos com o mesmo valor de face. O título A tem maturidade de um ano e o título B tem maturidade de dois anos. Seja $i_a$ = 9% a.a a taxa de juros do título A, e $i_b$ = 12% a.a a taxa de juros do título B. Suponha que um investidor queira aplicar seu dinheiro por dois anos. Ele precisa então analisar qual é a melhor estratégia, comprar o título A com vencimento de um ano e reinvestir por mais um ano em um título de mesma maturidadade ou comprar o título B de maturidade de 2 anos e mantê-lo até o final.

Lembramos que a taxa futura é a taxa de juros fixada no presente para um contrato futuro, ou seja, é o que define se o investidor terá o mesmo retorno em títulos de maturidades diferentes.

Supondo que a escolha tenha sido o título A com maturidade de 1 ano, vamos calcular qual deve ser a taxa futura $f(0,1,2)$ para o contrato de um título no ano posterior que resulte no mesmo rendimento do título B de maturidade de 2 anos.

$$f(0,1,2) = \frac{2(0,12) - 1(0,09)}{2-1} = 0,1508.$$

Portanto, a taxa para o contrato no segundo ano deve ser de 15,08%a.a para que o investidor tenha o mesmo retorno nas duas opções.

## 3.3 TAXA FUTURA INSTÂNTANEA

Para fins financeiros geralmente medimos o tempo em anos, meses ou dias. Mas se o período de tempo de maturidade de um contrato futuro for medido em minutos, segundos ou até mesmo intervalos de tempo infinitesimais, chamamos o rendimento de **taxa futura instântanea**, isto é, quando o tempo para a maturidade do título tende a zero.

Já definimos anteriomente que taxa futura $f(t,s,T)$ é a taxa determinada no tempo $t$ e que atua no intervalo $[s,T]$, com $t < s < T$. Se o intervalo de tempo entre o tempo $s$ e o tempo $T$ tende a zero, $T$ é descrito como sendo o instante $s$ mais um acréscimo de tempo infinitesimal $h$, depois de s, ou seja $T = s + h$.

**Definição 3.6.** *A **taxa futura instantânea** é definida como a taxa*

$$f(t,s) := \lim_{h\to 0} f(t,s,s+h).$$

**Proposição 3.7.** *Mantidas as notações acima e assumindo $i(t,T)$ diferenciável, tem-se*

$$(i)\ \ f(t,s) = i(t,s) + (s-t)\frac{\partial i(t,s)}{\partial s}$$

$$(ii)\ \ i(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds.$$

*Demonstração.* Vamos demonstrar (i). Pela equação (3.3) temos que

$$f(t,s,T) = \frac{i(t,T)(T-t) - i(t,s)(s-t)}{T-s}.$$

Substituindo $T$ por $s+h$, temos

$$f(t,s,T) = \frac{i(t,s+h)(s+h-t) - i(t,s)(s-t)}{s+h-s}.$$

Aplicando o limite quando $h \to 0$,

$$\begin{aligned} f(t,s) = \lim_{h\to 0} f(t,s,s+h) &= \lim_{h\to 0} \frac{i(t,s+h)(s+h-t) - i(t,s)(s-t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{hi(t,s+h) + i(t,s+h)(s-t) - i(t,s)(s-t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{hi(t,s+h)}{h} + \lim_{h\to 0}(s-t)\frac{[i(t,s+h) - i(t,s)]}{h} \\ &= i(t,s) + (s-t)\lim_{h\to 0} \frac{i(t,s+h) - i(t,s)}{h} \\ &= i(t,s) + (s-t)\frac{\partial i(t,s)}{\partial s}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do item $(ii)$. Note que na penúltima igualdade utilizamos a continuidade da função $i(t,s)$.

$(ii)$ Se temos o preço $P(t,T)$ de um título zero cupom, podemos conhecer todas as taxas futuras $f(t,T)$ para todos os valores de $t$ no intervalo $[t,T]$. De igual modo, se temos as taxas futuras instântaneas do intervalo de tempo $[t,T]$ podemos obter as taxas à vista ao integrarmos a função das taxas futuras, isto é, podemos interpretar a taxa à vista como uma média das taxas futuras instântaneas. Sendo assim, integrando a fórmula das taxas futuras instântaneas no intervalo de $t$ a $T$ temos

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t,s)ds &= \int_t^T i(t,s) + (s-t)\frac{\partial i(t,s)}{\partial s} ds \\ &= \int_t^T \frac{\partial[(s-t)i(t,s)]}{\partial s} ds. \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_t^T f(t,s)ds = (s-t)i(t,s)\Big|_t^T = (T-t)i(t,T).$$

E portanto,

$$i(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds.$$

$\square$

Desse modo, também podemos calcular o preço $P(t,T)$ em função do acúmulo de taxas futuras instantâneas $f(t,T)$ no intervalo de tempo entre $t$ e $T$. Assim temos que

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}.$$

# 4 MODELAGEM DA ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JUROS

Prever o comportamento das curvas de juros é fundamental para as atividades financeiras. As curvas das taxas de juros indicam as expectativas de inflação e do crescimento econômico. Portanto, é de grande importância obter métodos eficientes para prever e modelar a curva de juros futuros.

A estrutura a termo pode ser construída a partir das taxas à vista, taxas futuras ou pela função desconto, porém todas estão relacionadas entre si, conforme demonstramos no capítulo anterior, de modo que através de uma podemos encontrar ou estimar as outras (SVENSSON, 1994).

Nas últimas décadas diversos modelos de construção da curva de juros foram desenvolvidos. Podemos citar como exemplo, McCulloch (MCCULLOCH, 1971), Vasicek (VASICEK, 1977), Dobbie-Wilkie (DOBBIE; WILKIE, 1977), Cox et al. (COX, 1985) e Nelson e Siegel (NELSON; SIEGEL, 1987) e sua versão estendida por Svensson (SVENSSON, 1994).

Utilizando a função desconto à partir das taxas a vista de títulos zero cupom com diferentes maturidades McCulloch (MCCULLOCH, 1971) desenvolveu um modelo de curva denominado de **Interpolação Cúbica**. Seguindo esse modelo Vasicek e Fong (VASICEK, 1977) modelaram a curva de desconto através de **Interpolação Exponencial**. Esses modelos se mostraram bastante eficientes em construir os diversos formatos que a curva pode apresentar. No entanto, houve divergência para títulos com prazos mais longos.

Esses modelos citados acima são baseados em fórmulas paramétricas que se ajustam às curvas de juros com um número pequeno de parâmetros. Nesse trabalho vamos estudar o modelo desenvolvido por Charle R. Nelson e Andrew F. Sielgel (NELSON; SIEGEL, 1987) e estendido por Lars E. O. Svensson (SVENSSON, 1994). Atualmente esse modelo é bastante usado por diversos bancos centrais, incluindo o Banco Central do Brasil (BIS, 2005). A grande utilização desse modelo por mercados financeiros em muitos países se dá justamente pela eficiência do ajuste aos diversos formatos que as curvas de juros podem assumir.

Na procura por um modelo mais simples e flexível para a previsão das curvas de juros através de dados do passado, Nelson e Siegel (NELSON; SIEGEL, 1987) perceberam de forma empírica que certas soluções das equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem geravam formatos de curvas semelhantes aos formatos observados pela curva de juros.

Esse modelo é denominado de **parcimonioso** pois a função estatística exponencial utilizada necessita de poucos parâmetros para se modelar as diversar formas que as curvas de juros podem assumir, **monótona, corcunda e em forma de s**, por exemplo.

## 4.1 O MODELO NELSON E SIEGEL (1987)

No início Nelson e Siegel (NELSON; SIEGEL, 1987) propuseram o uso da equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com raízes da equação característica reais e diferentes, conforme segue.

Para simplificar as notações, denotaremos por $f(m) = f(t,T)$ e $i(m) = i(t,T)$ com $m = T - t$. Portanto $m$ é o período de tempo entre $t$ e $T$. Assim

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda_1 m} + \beta_2 e^{-\lambda_2 m}$$

onde $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são constantes de tempo associadas à equação e $\beta_0$, $\beta_1$ e $\beta_2$ são determinados pelas condições iniciais.

Posteriormente notaram que a curva se ajustava melhor e de forma mais parcimoniosa (suave) com equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem com raízes da equação característica reais e iguais. Desse modo a equação do modelo Nelson e Siegel (NELSON; SIEGEL, 1987) passou a ser

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda m} + \beta_2 \lambda m e^{-\lambda m}.$$

## 4.2 ANÁLISE DOS PARÂMETROS

O modelo de Nelson e Siegel possui três termos que podem ser interpretados como curto, médio e longo prazos. Os parâmetros $\beta_0$, $\beta_1$ e $\beta_2$ podem ser classificados como parâmetros de regressão e $\lambda$ como parâmetro do tempo.

Analisando cada um dos parâmetros, podemos observar que:

- $\beta_0$ é uma constante que representa o nível de juros de longo prazo, pois quando o tempo de maturidade tende ao infinito as taxas futuras convergem para $\beta_0$, isto é

$$\lim_{m\to\infty} f(m) = \lim_{m\to\infty} \left[\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda m} + \beta_2 \lambda m e^{-\lambda m}\right] = \beta_0.$$

- $\beta_1$ determina o declive da curva decrescendo exponencialmente para zero com o decorrer da maturidade. Geralmente é associado às taxas de juros de curto prazo. O sinal desse coeficiente determina se a curva está aumentando ou diminuindo. Em geral, se $\beta_1$ é negativo a função cresce e se o sinal de $\beta_1$ for positivo a curva diminui. Se a maturidade do título tender a zero teremos que

$$\lim_{m\to 0} f(m) = \lim_{m\to 0} \left[\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda m} + \beta_2 \lambda m e^{-\lambda m}\right] = \beta_0 + \beta_1.$$

- $\beta_2$ inicia com valor zero, cresce para a maturidade de médio prazo e decresce para zero novamente no longo prazo, e então gera a curva.

- $\lambda$ determina a velocidade que a curva da taxa de juros decai, ou seja, quando $\lambda$ assume valores pequenos a curva cai de forma mais rápida e se ajusta melhor a títulos de curto prazo e de forma contrária, se $\lambda$ assume valores maiores a curva decai de forma mais lenta e se ajusta a títulos com maturidades maiores.

## 4.3 MODELO DE QUATRO FATORES DE SVENSSON

Na intenção de melhorar a flexibilidade e o ajuste do modelo de três parâmetros de Nelson e Siegel (NELSON; SIEGEL, 1987) Lars Svensson (SVENSSON, 1994) adicionou um quarto termo, sendo ele o segundo termo relacionado as taxas de juros de médio prazo com decaimento próprio que se ajusta com mais facilidade ao formato das estruturas a termo com mais de um ponto de máximo e mínimo local. Dessa forma esse modelo incorpora mais dois parâmetros, um parâmetro de regressão $\beta_3$ e um parâmetro de tempo $\lambda_2$. Assim a função estendida passa a ter seis parâmetros e é dada por

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda_1 m} + \beta_2 \lambda_1 m e^{-\lambda_1 m} + \beta_3 \lambda_2 m e^{-\lambda_2 m}. \tag{4.1}$$

Os parâmetros $\beta_0$, $\beta_1$ e $\beta_2$ tem as mesmas características do modelo de Nelson e Siegel, isto é, $\beta_0$ determina o nível da curva e está relacionado aos longos prazos, $\beta_1$ determina a inclinação da curva e reflete às taxas de curto prazo, e $\beta_2$ juntamente com $\beta_3$ determinam o movimento da curva e estão relacionados ao médio prazo. Os parâmetros de decaimento $\lambda_1$ e $\lambda_2$ por serem diferentes, fazem com que $\beta_2$ e $\beta_3$ assumam máximos e/ou mínimos diferentes, possibilitando novos formatos de curvas.

Já vimos que a taxa à vista pode ser obtida ao integrarmos as taxas futuras dada pela função $f(m)$. Sendo $i(m)$ a taxa à vista que expressa $i(t, t+m)$ com maturidade $m$ e negociada no tempo $t$, temos

$$i(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f(x)dx. \tag{4.2}$$

Combinando as equações (4.1) e (4.2) temos que

$$i(m) = \frac{1}{m} \int_0^m \left( \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda_1 x} + \beta_2 \lambda_1 x e^{-\lambda_1 x} + \beta_3 \lambda_2 x e^{-\lambda_2 x} \right) dx.$$

Utilizando a regra da integração por partes obtemos a equação que expressa a taxa à vista segundo o modelo de Svensson (SVENSSON, 1994). Assim

$$i(m) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\lambda_1 m}}{\lambda_1 m} + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-\lambda_1 m}}{\lambda_1 m} - e^{-\lambda_1 m} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-\lambda_2 m}}{\lambda_2 m} - e^{-\lambda_2 m} \right).$$

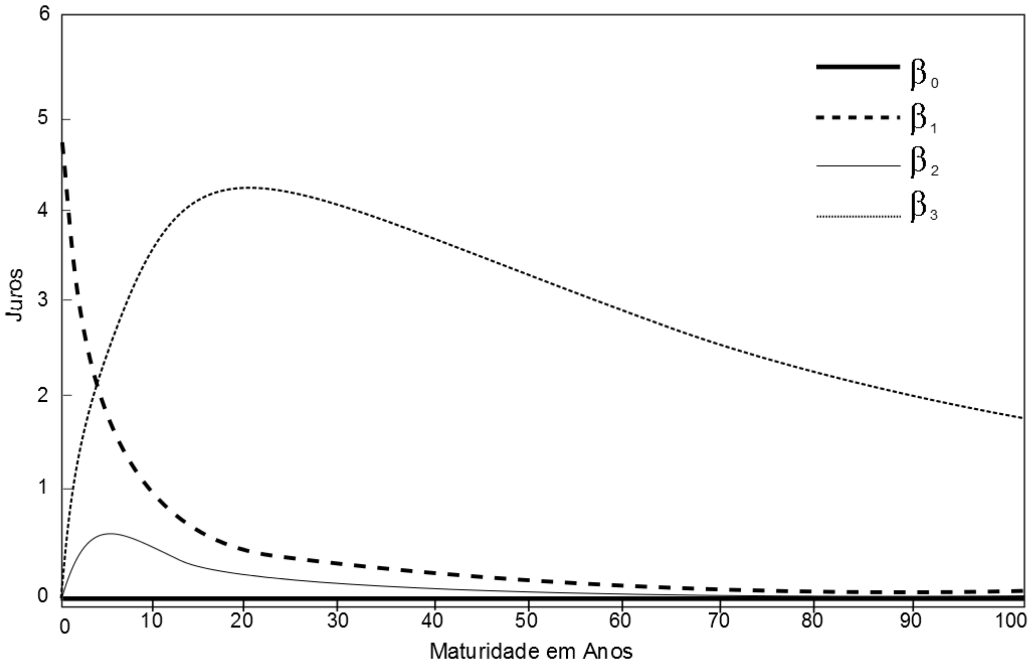


Figura 9 – Componentes da curva de taxas a termo do modelo de Svensson (SVENSSON, 1994).

## 4.4 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS PELO MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS

Estimar os parâmetros do modelo de Svensson é uma tarefa difícil devido à natureza não-linear da curva de rendimentos que se apresenta em formas complexas onde podem existir múltiplos mínimos locais (ou máximos) além de um mínimo global (ou máximo global).

A estimativa dos parâmetros $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ pode ser feita através do método de mínimos quadrados, podendo ser o objeto de estimação, o preço do título, a taxa à vista ou a taxa futura.

O método de mínimos quadrados (MMQ) é uma importante ferramenta que permite encontrar uma função matemática que melhor se ajusta a um conjunto de pontos predefinidos, ou seja, dado um conjunto de $N$ pontos $(x_i, y_i)$, podemos encontrar a função $f(x)$ que melhor se aproxima dos pontos dados.

O método de mínimos quadrados consiste em minimizar a soma dos quadrados das distâncias entre as coordenadas $y_i$ e a função desejada em $f(x_i)$,

**Exemplo 4.1.** Suponha que foram obtidos por meio de algum experimento os dados apresentados no gráfico a seguir.

Como o erro está em função de duas variáveis, $a$ e $b$, e $y$ é uma variável relacionada a $x$ pela equação da reta $y = ax + b$, vamos determinar os parâmetros $a$ e $b$ da reta que melhor se

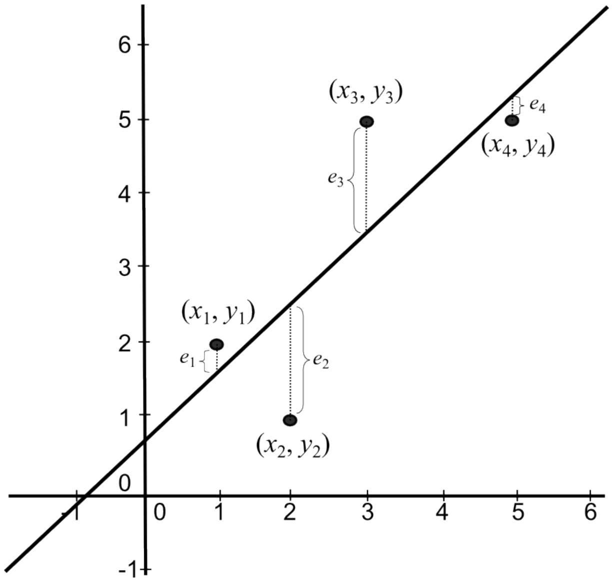


Figura 10 – Distância de um ponto $(x_i, y_i)$ à reta $y = ax + b$

ajustam aos pontos obtidos no experimento, ou seja, temos que encontrar a reta em que a soma dos quadrados das distâncias (erros) dos pontos predefinidos até a reta seja a menor possível.

O erro em cada ponto $(x_i, y_i)$ é dado por $e_i = |y_i - (ax_i + b)|$. Assim

$(x_1, y_1)$ = $(1, 2)$→ $e_1 = |2 - a - b|$

$(x_2, y_2)$ = $(2, 1)$→ $e_2 = |1 - 2a - b|$

$(x_3, y_3)$ = $(3, 5)$→ $e_3 = |5 - 3a - b|$

$(x_4, y_4)$ = $(5.5)$→ $e_4 = |5 - 5a - b|$

Então a soma dos quadrados dos erros será dado por $q = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$. Logo

$$q = (2 - a - b)^2 + (1 - 2a - b)^2 + (5 - 3a - b)^2 + (5 - 5a - b)^2.$$

Como o objetivo é encontrar os coeficientes $a$ e $b$ que gerem o menor erro possível, vamos derivar a função $q$ em relação a $a$ e $b$ e igualar a zero. Assim

$$\frac{\partial q}{\partial a} = -88 + 78a + 22b$$

$$\frac{\partial q}{\partial b} = -26 + 22a + 8b$$

Igualando a zero temos $\begin{cases} 78a + 22b = 88 \\ 22a + 8b = 26 \end{cases}$.

Portanto, a solução do sistema é $a = 0,94$ e $b = 0,66$.

Assim, a reta que melhor se ajusta aos dados apresentado no gráfico é $y = 0,94x + 0,66$.

Suponha que temos um palpite inicial para valores de $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\tau_1$ e $\tau_2$. Então temos que o erro em $m_0$ é dado por $\left|\bar{d}(m_0) - D_0\right|$, onde $\bar{d}(m_0)$ é a função estimada e $D_0$ o valor real conhecido.

Assim, definimos um critério de otimalidade por

$$E(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=0}^{k} \left|d(m_i) - \bar{d}(m_i)\right|^2,$$

ou seja, a soma dos erros quadráticos dos pontos conhecidos.

## 4.5 APLICAÇÃO DO MODELO DE SVENSSON EM TÍTULOS ZERO CUPOM DO TESOURO DIRETO

Para estimarmos os parâmetros do modelo de Svensson devemos primeiro definir se o item de estimação é o preço do título, a taxa de juros à vista ou a taxa de juros futura. Os preços dos títulos de curta maturidade são menos suscetíveis a variações nas taxas de juros do que os títulos de maturidades mais longas. Uma pequena alteração nos preços dos títulos de curto prazo resultam em grandes variações nas taxas de juros. Em nosso exemplo usaremos a taxa à vista.

Temos, na tabela a seguir, os títulos prefixados (LTN) que estavam disponíveis para venda no site do Tesouro Direto no dia 25 de outubro de 2016.

| Maturidade em dias | Maturidade em anos | Taxa à vista anual |
|---|---|---|
| 21 | 0,0833333 | 13.8078 |
| 42 | 0.166667 | 13.7671 |
| 63 | 0.25 | 13.6802 |
| 126 | 0.5 | 13.2859 |
| 252 | 1 | 12.4723 |
| 504 | 2 | 11.5837 |
| 756 | 3 | 11.2658 |
| 1008 | 4 | 11.1451 |
| 1260 | 5 | 11.0947 |
| 2520 | 10 | 11.0436 |

A partir desses dados coletados, vamos estimar os valores de $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ através da função desconto,

$$d(m) = e^{-i(0,m)m} = e^{-\int_0^m f(w)dw},$$

de forma que o resultado seja o mais preciso possível, ou seja, queremos encontrar $\bar{d}(m)$ de maneira que o erro dos valores conhecidos de $m$ seja mínimo. Para facilitar o entendimento, em alguns lugares trocaremos na notação da função exponencial $e^x$ por $\exp\{x\}$. Assim

$$E(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{n=1}^{k}\Big(e^{-im_n}-\bar{d}(m_n)\Big)^2=\sum_{n=1}^{k}\Big(e^{-im_n}-e^{\Big[-\beta_0-\beta_1\frac{1-e^{-\lambda_1 m_n}}{\lambda_1 m_n}-\beta_2\Big(\frac{1-e^{-\lambda_1 m_n}}{\lambda_1 m_n}-e^{-\lambda_1 m_n}\Big)-\beta_3\Big(\frac{1-e^{-\lambda_2 m_n}}{\lambda_2 m_n}-e^{-\lambda_2 m_n}\Big)\Big]m_n}\Big)^2=$$

$$\left(-0.988559+\exp\Big\{-0.0833\beta_0-\frac{\beta_1\left(1-e^{-0.0833\lambda_1}\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_2 e^{-0.0833\lambda_1}\left(-0.0833\lambda_1+e^{0.0833\lambda_1}-1\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_3 e^{-0.0833\lambda_2}\left(-0.0833\lambda_2+e^{0.0833\lambda_2}-1\right)}{\lambda_2}\Big\}\right)^2+$$

$$\left(-0.977316+\exp\Big\{-0.1667\beta_0-\frac{\beta_1\left(1-e^{-0.1667\lambda_1}\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_2 e^{-0.1667\lambda_1}\left(-0.1667\lambda_1+e^{0.1667\lambda_1}-1\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_3 e^{-0.1667\lambda_2}\left(-0.1667\lambda_2+e^{0.1667\lambda_2}-1\right)}{\lambda_2}\Big\}\right)^2+$$

$$\left(-0.966378+\exp\Big\{-0.25\beta_0-\frac{\beta_1\left(1-e^{-0.25\lambda_1}\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta 2 e^{-0.25\lambda_1}\left(-0.25\lambda_1+e^{0.25\lambda_1}-1\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_3 e^{-0.25\lambda_2}\left(-0.25\lambda_2+e^{0.25\lambda_2}-1\right)}{\lambda_2}\Big\}\right)^2+$$

$$\left(-0.935729+\exp\Big\{-0.5\beta_0-\frac{\beta_1\left(1-e^{-0.5\lambda_1}\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_2 e^{-0.5\lambda_1}\left(-0.5\lambda_1+e^{0.5\lambda_1}-1\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_3 e^{-0.5\lambda_2}\left(-0.5\lambda_2+e^{0.5\lambda_2}-1\right)}{\lambda_2}\Big\}\right)^2+$$

$$\left(-0.882741+\exp\Big\{-\beta_0-\frac{\beta_1\left(1-e^{-\lambda_1}\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_2 e^{-\lambda_1}\left(-\lambda_1+e^{\lambda_1}-1\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_3 e^{-\lambda_2}\left(-\lambda_2+e^{\lambda_2}-1\right)}{\lambda_2}\Big\}\right)^2+$$

$$\left(-0.793205+\exp\Big\{-2\beta_0-\frac{\beta_1\left(1-e^{-2\lambda_1}\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_2 e^{-2\lambda_1}\left(-2\lambda_1+e^{2\lambda_1}-1\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_3 e^{-2\lambda_2}\left(-2\lambda_2+e^{2\lambda_2}-1\right)}{\lambda_2}\Big\}\right)^2+$$

$$\left(-0.713214+\exp\Big\{-3\beta_0-\frac{\beta_1\left(1-e^{-3\lambda_1}\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_2 e^{-3\lambda_1}\left(-3\lambda_1+e^{3\lambda_1}-1\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_3 e^{-3\lambda_2}\left(-3\lambda_2+e^{3\lambda_2}-1\right)}{\lambda_2}\Big\}\right)^2+$$

$$\left(-0.640309+\exp\Big\{-4\beta_0-\frac{\beta_1\left(1-e^{-4\lambda_1}\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_2 e^{-4\lambda_1}\left(-4\lambda_1+e^{4\lambda_1}-1\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_3 e^{-4\lambda_2}\left(-4\lambda_2+e^{4\lambda_2}-1\right)}{\lambda_2}\Big\}\right)^2+$$

$$\left(-0.574224+\exp\Big\{-5\beta_0-\frac{\beta_1\left(1-e^{-5\lambda_1}\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_2 e^{-5\lambda_1}\left(-5\lambda_1+e^{5\lambda_1}-1\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_3 e^{-5\lambda_2}\left(-5\lambda_2+e^{5\lambda_2}-1\right)}{\lambda_2}\Big\}\right)^2+$$

$$\left(-0.331423+\exp\Big\{-10\beta_0-\frac{\beta_1\left(1-e^{-10\lambda_1}\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_2 e^{-10\lambda_1}\left(-10\lambda_1+e^{10\lambda_1}-1\right)}{\lambda_1}-\frac{\beta_3 e^{-10\lambda_2}\left(-10\lambda_2+e^{10\lambda_2}-1\right)}{\lambda_2}\Big\}\right)^2.$$

Para calcular os valores de $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ minimizamos a função de erro utilizando o *software MATHEMATICA*®. Para tanto usamos a função NMinimize que otimiza funções usando rotinas numéricas. Não faz parte do escopo deste trabalho tais métodos e portanto omitiremos seus detalhes. Desse modo os valores encontrados foram $\beta_0 = 0,1072$, $\beta_1 = 0,0368128$, $\beta_2 = 0,253873$, $\beta_3 = 0,295918$, $\lambda_1 = 0,536189$ e $\lambda_2 = 0,585685$.

Substituindo os parâmetros encontrados na equação proposta por Svensson (SVENSSON, 1994) para o cálculo da taxa à vista, obtemos a equação

$$i(m) = 0,1072 + 0.0368128\frac{1-e^{-0.536189m}}{0.536189m} +$$
$$0.253873\left(\frac{1-e^{-0,536189m}}{0.536189m} - e^{-0.536189m}\right) + 0.295918 + \left(\frac{1-e^{-0.585685m}}{0.585685m} - e^{-0.585685m}\right).$$

Diariamente a ANBIMA divulga na internet no *link* <http://www.anbima.com.br/est_termo/CZ.asp> a ETTJ extraída das taxas à vista dos títulos zero cupom do tesouro direto. Coletamos a curva divulgada no dia 25/10/16 para compararmos com a curva que geramos com nossa estimação. A curva que encontramos é uma boa aproximação para a curva que foi estimada

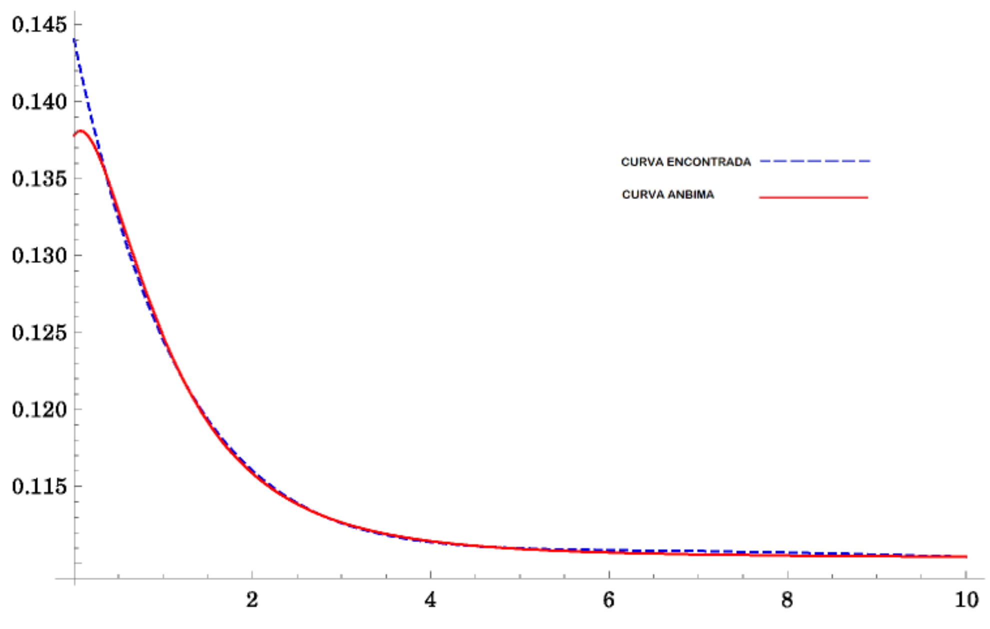


Figura 11 – Comparação da ETTJ disponível no *site* da ANBIMA no dia 25/10/16 com a ETTJ estimada a partir dos preços da LTN na mesma data. No eixo horizontal temos a maturidade em anos e no eixo vertical o índice da taxa de juros anual

pela ANBIMA. A diferença entre as curvas se deve ao método de otimização usado. A ANBIMA, segundo a metodologia própria disponível em <www.anbima.com.br/est_termo/arqs/est-termo_metodologia.docx>, utiliza um algoritmo genético criado por Holland (HOLLAND, 1975).

# 5 CONCLUSÃO

Nosso objetivo principal era estudar a matemática envolvida no modelo de previsão da curva de juros proposta pelo professor de economia Lars E. O. Svensson (SVENSSON, 1994).

Para isso revisamos alguns conceitos básicos da matemática financeira: taxa de juros, regimes de capitalização e desconto financeiro. Vimos também que a Estrutura a Termo de Taxas de Juros (ETTJ) é um elemento fundamental para o sistema econômico. Ela indica a expectativa do mercado financeiro e direciona as decisões da política monetária.

Apresentamos os títulos públicos federais oferecidos pelo Tesouro Nacional e suas características. Demos maior atenção aos títulos prefixados pois é com base em seus preços que a ETTJ é construída. Estudamos a formação dos preços dos títulos sem cupom de juros e como é feita a marcação a mercado. Apresentamos as diferentes taxas de juros (à vista, futura e instantânea) e as relações matemáticas entre elas. Demonstramos nas proposições 3.4 e 3.7 resultados que estabelecem estas relações, dado que tivemos dificuldade de encontrar na literatura.

Estudamos o modelo matemático proposto Nelson e Siegel (NELSON; SIEGEL, 1987) e que posteriormente foi estendido por Svensson (SVENSSON, 1994) para a previsão da curva de juros. Esse modelo sugere que de forma geral as curvas de juros apresentam formatos semelhantes às curvas geradas por equações diferencias ordinárias lineares de segunda ordem.

Por ser um modelo de fácil aplicação e apresentar resultados satisfatórios ele tem sido amplamente utilizado por formadores da política econômica como o Banco Central do Brasil e a ANBIMA.

Para concluirmos nosso estudo coletamos os preços dos títulos prefixados oferecidos pelo Tesouro Direto em um determinado dia e aplicamos o modelo de Svensson (SVENSSON, 1994) para a construção da curva de juros. Comparamos com a curva gerada pela ANBIMA e verificamos que houve uma boa aproximação.

# REFERÊNCIAS


BIS, M. Economic department: Zero-coupon yield curves: technical documentation. **BIS papers**, n. 25, 2005.

CALDEIRA, J. F.; TORRENT, H. Previsão de curvas de juros zero-cupom: Estimação não-paramétrica de dados funcionais. **Escola de Séries Temporais e Econometria**, 2011.

CAPINSKI, M.; ZASTAWNIAK, T. **Mathematics for finance: an introduction to financial engineering**. [S.l.]: Springer, 2006.

COX, T. The nature and measurement of stress. **Ergonomics**, Taylor & Francis, v. 28, n. 8, p. 1155–1163, 1985.

DOBBIE, G.; WILKIE, A. The financial times-actuaries fixed interest indices. **Transactions of the Faculty of Actuaries**, Cambridge Univ Press, v. 36, p. 203–213, 1977.

FARO, C. de. **Administração bancária: uma visão aplicada**. [S.l.]: Editora FGV, 2015.

HOLLAND, J. H. Adaptation in natural and artificial systems. an introductory analysis with application to biology, control, and artificial intelligence. **Ann Arbor, MI: University of Michigan Press**, 1975.

MCCULLOCH, J. H. Measuring the term structure of interest rates. **The Journal of Business**, JSTOR, v. 44, n. 1, p. 19–31, 1971.

NELSON, C. R.; SIEGEL, A. F. Parsimonious modeling of yield curves. **Journal of business**, JSTOR, p. 473–489, 1987.

NETO, J. F. **Matemática Financeira**. [S.l.]: São Paulo: Makron Books, 1998.

SVENSSON, L. E. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994. 1994.

VARGA, G. Teste de modelos estatísticos para a estrutura a termo no brasil. **Revista Brasileira de Economia**, SciELO Brasil, v. 63, n. 4, p. 361–394, 2009.

VASICEK, O. An equilibrium characterization of the term structure. **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 5, n. 2, p. 177–188, 1977.