

ppgmat

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

SILMARA RIBEIRO RODRIGUES

**CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO MOBILIZADO POR UMA
PROFESSORA NO CONTEXTO DO ESTUDO DE AULA**

LONDRINA

2021

SILMARA RIBEIRO RODRIGUES

**CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO MOBILIZADO POR UMA
PROFESSORA NO CONTEXTO DO ESTUDO DE AULA**

**MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR TEACHING MOBILIZED BY A TEACHER IN
THE CONTEXT OF LESSON STUDY**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Rizek Elias

LONDRINA

2021



4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina



SILMARA RIBEIRO RODRIGUES

**CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO MOBILIZADO POR UMA PROFESSORA NO
CONTEXTO DO ESTUDO DE AULA**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 10 de Junho de 2021

Prof Henrique Rizek Elias, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Renata Camacho Bezerra, Doutorado - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 13/07/2021.

À minha família, meu esposo Claudio, meus filhos Ana Paula,
Gustavo e Cezar Augusto, razão pela qual não desisto de lutar!

AGRADECIMENTOS

A Deus, o maior mestre que conheço! Pelo dom da vida, por me permitir chegar até aqui e realizar esse sonho. Por todo amor e cuidado que tem comigo, me fortalecendo nos momentos que mais me senti incapaz e por me fazer entender que para todas as coisas há um tempo determinado para acontecer.

Ao meu esposo Claudio, pelo cuidado e preocupação com o bem estar de nossa família. Pelas refeições que preparava com tanto carinho, por cuidar de cada detalhe enquanto estava fora, pelo incentivo e apoio em meus estudos.

Aos meus filhos, Ana Paula, Gustavo e Cezar Augusto, por compreenderem minhas ausências, mesmo em finais de semana. Pelo incentivo que vinha por meio dos abraços, beijos que eram como bálsamo para meu humor e principalmente pelos auxílios tecnológicos que tanto solicitava (vocês são feras!). Especialmente ao Cezinha, meu pequeno, que sempre me surpreendia com um abraço apertado me fazendo sorrir com uma de suas frases espontâneas, “ *você vai passar mãe!*”

Ao Bud, o mais novo integrante da família, que se tornou meu companheirinho de estudos, me fazendo parar algumas vezes para lhe dar atenção. Sem vocês na minha vida, nada disso seria possível... Eu amo vocês!

À minha mãe que me criou com tanto amor e carinho, meu exemplo de amor e fé, agradeço por cada sacrifício que enfrentou na vida para me criar e para que eu pudesse estudar. Seu exemplo me impulsiona a ser cada dia uma pessoa melhor.

Ao meu “pai”, que perdi ano passado, que tinha tanto orgulho em me levar à escola e que fez questão de cumprir esse ritual até no primeiro dia do meu mestrado, se tive onde ficar para estudar foi graças a ele! Seu legado carregarei sempre em meu coração... Infelizmente vai faltar seu sorriso, seu abraço neste dia tão importante da minha vida, mas sei que está olhando e vibrando com minha vitória! Obrigada pelo exemplo que falou mais alto do que palavras... Saudades eternas!

Aos meus irmãos Luiz Henrique e Fernando por estarem sempre ao meu lado me apoiando nos estudos. Principalmente ao Luiz Henrique pela contribuição com seu dom na tradução do abstract. Foi muito importante ter algo feito por você neste trabalho.

Ao meu orientador e professor Henrique Rizek Elias, minha eterna gratidão por me aceitar como orientanda, por me apresentar o projeto de *Formação Continuada em Matemática para Docentes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental* e acreditar que poderia desenvolver essa pesquisa. Pelas preciosas orientações e ensinamentos, também pelas críticas construtivas

que me fizeram crescer pessoalmente e profissionalmente. Acredite, nesses pouco mais de dois anos, se cheguei até aqui, foi porque aprendi muito com você! Muito obrigada!

Aos professores André Luís Trevisan e Renata Camacho Bezerra, por aceitarem compor a banca deste trabalho desde o exame da qualificação até a defesa. Pesquisadores que tive a honra em conhecer e estudar, enriquecendo meu conhecimento. Obrigada pelas contribuições e sugestões que deram no direcionamento a esta pesquisa.

À minha amiga companheira de mestrado, Flávia, por todas as vezes que me apoiou e deu forças nos estudos, pelas “trocas de figurinhas” em busca da realização desse sonho.

A todos os professores do PPGMAT, especialmente aos que caminharam comigo nessa trajetória, André, Henrique, Jader, Línlya, Marcele, Rodolfo e Zenaide, saibam que vocês superaram minhas expectativas! Agradeço aos questionamentos que me levaram à reflexão, os desafios propostos em cada aula e em cada grupo de estudos. Obrigada por compartilharem seus conhecimentos e saberes, e pelo exemplo de humildade que deixaram. Esses ensinamentos levarei para vida toda!

Às professoras participantes do grupo de Formação Continuada, pela colaboração e envolvimento nas atividades propostas, dando vida a um material rico no desenvolvimento desta pesquisa.

Aos amigos da turma de 2019, por todos momentos em que compartilhamos nossas experiências, pela nossa união que fez toda diferença! Aos companheiros de “sorveteria”, onde tivemos nossos momentos de descontração que foram fundamentais para recarregar as energias... Quantas histórias temos para contar! Lembrarei de todos com muito carinho...

À minha amiga Érika Regina pela pessoa incrível e querida que Deus colocou no meu caminho! Pelas caronas e noitadas estudando em sua casa, pelos momentos de diversão também. Sempre era um bom motivo estar em Londrina e encontrá-la.

Ao amigo João Paulo, pelos almoços junto à sua família, obrigada por me receberem tão bem em sua casa. Jamais me esquecerei da sua avó linda!

À Escola Rui Barbosa, onde leciono, e à minha diretora Doralice Cicarelli de Moraes, pelo apoio recebido que me fizeram seguir em busca desse sonho, por me permitirem levar os conhecimentos que aprendi para dentro da minha sala de aula.

Ao Leandro, pelo desenvolvimento de uma tarefa investigativa com minha turma, fatos que me levaram a prestar novamente a seleção do mestrado.

À Ivone pela revisão gramatical e ortográfica para a qualificação e defesa.

Ao Victor Scub pelo excelente trabalho realizado na diagramação do Produto Educacional.

Os sonhos não determinam o lugar que você vai estar, mas produzem
a força necessária para o tirar do lugar em que está.

Augusto Cury

RODRIGUES, Silmara Ribeiro. **Conhecimento Matemático para o Ensino mobilizado por uma professora no contexto do Estudo de Aula**. 2021. 153 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

RESUMO

A presente dissertação teve como objetivo identificar e analisar os subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino mobilizados por uma professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental durante um ciclo de Estudo de Aula. A pesquisa é de cunho qualitativo e de natureza interpretativa, realizada no contexto de um projeto de extensão desenvolvido na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) e intitulado *Formação Continuada em Matemática para Docentes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental*. Nesse projeto, cuja intenção foi trabalhar de forma colaborativa por meio do Estudo de Aula, o grupo constituía-se de professores formadores, estudantes de mestrado e professoras de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental que ensinam Matemática na rede municipal de ensino de Londrina – PR. Ao longo de 2019, foram realizados oito encontros presenciais, mas esta pesquisa analisa somente até o terceiro encontro do grupo, período que envolveu um ciclo completo de Estudo de Aula, composto pelo planejamento, pelo desenvolvimento e pela análise (individual e coletiva) de uma aula. A pesquisa está fundamentada no quadro teórico do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) proposto por Deborah Ball e colaboradores. O foco das análises desta pesquisa esteve nos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino mobilizados pela professora Maria, que aceitou desenvolver a aula, planejada no grupo, com sua turma de 5º ano. Os dados analisados na pesquisa foram produzidos por meio de gravações em áudio e vídeo dos três encontros presenciais do grupo, pela observação participante da pesquisadora e seu diário de bordo nesses encontros, por gravação em vídeo da aula desenvolvida pela professora Maria e por gravação em áudio de uma reflexão individual dessa professora. As análises, divididas em nove *Episódios*, mostram que quase todos os subdomínios do MKT foram mobilizados pela professora Maria, sendo os subdomínios do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes e do Conhecimento Especializado do Conteúdo os mais evidenciados. Concluímos que todas as etapas do ciclo do Estudo de Aula apresentaram potencial para mobilizar subdomínios do MKT e que certos aspectos parecem ter favorecido isso, tais como: o uso de tarefas matemáticas desafiadoras, a abordagem de ensino pautada no ensino exploratório, o trabalho colaborativo no planejamento e análise da aula, o uso de tarefas organizadas pelos formadores para promover a discussão coletiva entre os participantes durante a análise das aulas. Com base nisso, enquanto Produto Educacional resultante desta pesquisa de mestrado profissional, foi proposto um conjunto de Tarefas de Aprendizagem Profissional a partir das análises aqui empreendidas e que consideramos ter potencial para promover o desenvolvimento do MKT de professores em formação inicial ou continuada.

Palavras-chave: Desenvolvimento Profissional. Ensino de Matemática nos anos iniciais. Estudo de Aula. Conhecimento Matemático para o Ensino.

RODRIGUES, Silmara Ribeiro. **Mathematical Knowledge for Teaching mobilized by a teacher in the context of Lesson Study**. 2021. 153 p. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

ABSTRACT

The present dissertation is aimed to identify and analyze the subdomains of Mathematical Knowledge for Teaching, mobilized by a teacher of the early years of Elementary School during a Lesson Study cycle. The research is qualitative and interpretative in nature, carried out in the context of an extension project developed at the Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) and entitled *Continuing Education in mathematics to teachers of the initial years of Elementary School*. In this project, whose intention was to work collaboratively through Lesson Study, the group consisted of teachers educator, master's degree students and teachers of the 4th and 5th grades of elementary school who teach Mathematics in the municipal school system of Londrina - PR. Throughout 2019, eight face-to-face meetings were held, but this research analyzes only up to the third meeting of the group, a period that involved a complete Lesson Study cycle, composed of the planning, development and analysis (individual and collective) of a class. The research is based on the theoretical framework of Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) proposed by Deborah Ball and collaborators. The focus of this research analysis was on the subdomains of Mathematical Knowledge for Teaching mobilized by the teacher Maria, who agreed to develop the lesson, planned by the group, with her 5th grade class. The data analyzed in this research were produced through audio and video recordings of the three face-to-face group meetings, by the researcher's participant observation and her logbook of these meetings, by video recording of the lesson developed by Maria and by audio recording of an individual reflection of this teacher. The analyses, divided into nine Episodes, show that almost all subdomains of MKT were mobilized by Teacher Maria, with the subdomains of Knowledge of Content and Teaching, Knowledge of Content and Students, and Specialized Content Knowledge being the most evident. We conclude that all stages of the Lesson Study cycle presented potential to mobilize subdomains of MKT and that certain aspects seem to have favored this, such as: the use of challenging mathematical tasks, the teaching approach based on exploratory teaching, the collaborative work in lesson planning and analysis, the use of tasks organized by the trainers to promote collective discussion among participants during lesson analysis. Based on this, as an Educational Product resulting from this professional masters research, a set of Professional Learning Tasks was proposed based on the analyses undertaken here and that we consider to have potential to promote the MKT development of teachers in initial or continued training.

Keywords: Professional Development; Mathematics teaching in the early years; Lesson Study; Mathematical Knowledge for Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino	25
Figura 2 - Situação-problema 1	62
Figura 3 - Situação-problema 2	67
Figura 4 - Representação feita na lousa pelo professor formador 1	69
Figura 5 - Representação feita no quadro pela professora Maria	75
Figura 6 - Professora Maria medindo o mural da sala de aula.	81
Figura 7 - Produção escrita do grupo E	84
Figura 8 - Karina demonstrando o meio do canudo.	88
Figura 9 - O aluno Gustavo, após localizar 0,50 na reta numérica, aponta a posição do 0,25.	93
Figura 10 - Algoritmo da divisão 1 por 2, feito pela professora	97
Figura 11 - A representação fracionária do meio feita por uma aluna	100

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – <i>Tarefa dos Canudos</i>	38
Quadro 2 – Ações desenvolvidas no processo formativo de abril a julho de 2019.....	42
Quadro 3 – Síntese das ações que são foco de análise na pesquisa	47
Quadro 4 – Síntese das manifestações do Conhecimento Matemático para o Ensino da professora Maria evidenciado nos diálogos.....	49
Quadro 5 – <i>Tarefa dos Canudos</i> apresentada às professoras em 2019	54
Quadro 6 – <i>Tarefa dos Canudos</i> reformulada pela professora Maria	60
Quadro 7 – Transcrição da Figura 7.....	84
Quadro 8 – Subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino manifestados nos Episódios	107

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	19
2.1 DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES	21
2.2 CONHECIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE	23
2.3 ESTUDO DE AULA	27
3. METODOLOGIA DA PESQUISA.....	34
3.1 CONTEXTO DA PESQUISA.....	35
3.1.1 O grupo de 2018	35
3.1.2 O grupo de 2019 – o contexto da pesquisa.....	39
3.2 PROCEDIMENTOS PARA A ORGANIZAÇÃO E A ANÁLISE DOS DADOS	47
3.2.1 A elaboração das TAP (Produto Educacional).....	51
4. ANÁLISE DOS DADOS	53
4.1 <i>Episódio 1: o início do processo formativo e engajamento da professora Maria</i> 53	
4.2 <i>Episódio 2: o “pedacinho”</i>	<i>57</i>
4.3 <i>Episódio 3: o problema das tortas.....</i>	<i>62</i>
4.4 <i>Episódio 4: a groselha e o remédio.....</i>	<i>66</i>
4.5 <i>Episódio 5: repartindo em equipes</i>	<i>72</i>
4.6 <i>Episódio 6: “você quer levar o aluno a perceber sozinho”</i>	<i>75</i>
4.7 <i>Episódio 7: “mas, o que é a metade? e meio?”</i>	<i>83</i>
4.8 <i>Episódio 8: existe número entre 0 e 1?.....</i>	<i>90</i>

4.9	<i>Episódio 9: o fim!</i>	100
5.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	106
	<i>POSFÁCIO</i>	112
	REFERÊNCIAS	117
	ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL	121
	APÊNDICE A – ROTEIRO PARA A REFLEXÃO APÓS A AULA	126
	APÊNDICE B – ENCONTRO DE 06 DE JUNHO DE 2019	128
	APÊNDICE C – PRODUTO EDUCACIONAL	132

1. INTRODUÇÃO

Gigantes são os mestres nos ombros dos quais eu me elevei.

Isaac Newton

Ao iniciar este texto, não poderia deixar de mencionar os caminhos percorridos para chegar até aqui. Foi um caminho um pouco árduo, mas, ao pensar nos desafios que o ensino da Matemática impõe e a satisfação de vencer cada um desses desafios, vejo que o caminho foi se tornando mais leve e gratificante. Assim, relato, brevemente, esse caminho que considero importante para que o leitor compreenda que, enquanto pesquisadora e professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental, enfrentei, na trajetória acadêmica e profissional, os mesmos problemas que outros alunos e professores enfrentam diariamente.

Enquanto aluna, desde muito cedo, já sabia que queria ser professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental, descoberta que se deu quando ainda estava na 1ª série (atual 2º ano) do Ensino Fundamental. Para mim, entre todas as disciplinas escolares, a de Matemática era a mais desafiadora, sendo, em grande parte, de difícil compreensão. Os exercícios passados no quadro traziam basicamente este enunciado: “Olhe o exemplo e faça igual”. Para uma aluna ainda não alfabetizada, fazer igual significava reprodução desconectada da realidade. O período que aqui destaco era o fim dos anos 1970 e início dos anos 1980 – fim de um período de ditadura e reabertura democrática, quando se inicia no Brasil um intenso movimento de reformas curriculares para o ensino da Matemática e escassez de docentes preparados para a ação docente (GATTI; BARRETTO, 2009; NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2019).

Hoje, fazendo esse retrospecto, percebo que as dificuldades de aprendizagem e compreensão da Matemática, que tive nos primeiros anos de escolaridade, possivelmente são consequências da má formação dos professores, que não os preparava para o exercício docente, deixando uma lacuna, principalmente, em seu conhecimento matemático específico. Nesse aspecto, professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental têm sido formados, mesmo nos tempos mais recentes, em contextos da crença utilitarista da matemática, centrada em cálculos e procedimentos, que ainda prevalecem. Segundo Nacarato, Mengali e Passos (2019), os futuros professores “têm tido poucas oportunidades para uma formação matemática que possa fazer frente às atuais exigências da sociedade e quando ela ocorre na formação inicial, vem se pautando nos aspectos metodológicos” (p. 20).

A dificuldade com a disciplina de Matemática e a forma como era ensinada, baseada em regras, com ênfase em cálculos e algoritmos desprovidos de compreensão e de significados, acompanharam-me até os anos finais do Ensino Fundamental. O sonho de me tornar professora se fortaleceu quando terminei o Ensino Fundamental e decidi que faria o Magistério¹.

No Magistério, pouco estudei a Matemática de Ensino Médio. No 1º ano do curso, havia a disciplina Matemática e os conteúdos eram apresentados de forma superficial. No 2º e 3º anos, havia a disciplina Didática de Matemática, que apresentava os conteúdos específicos para o ensino dessa disciplina nos anos iniciais. Mesmo com o certificado de Magistério e habilitação para trabalhar na Educação Infantil e séries iniciais (atual anos iniciais) do Ensino Fundamental, não me sentia preparada para ensinar Matemática. Se, por um lado, o curso de Magistério tinha uma proposta interessante de formação de professores, por outro, não “[...] havia educadores matemáticos que trabalhassem com as disciplinas voltadas à metodologia de ensino de matemática – muitos eram pedagogos, sem formação específica” (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2019, p. 15).

Sendo assim, o curso de Magistério pouco contribuiu para minha formação, deixando muitas lacunas na área do conhecimento da Matemática, pois centrava-se na metodologia de ensino e desconsiderava os fundamentos da Matemática. Ao terminar o Magistério, prestei vestibular para o curso de Pedagogia, para dar sequência aos estudos e me aprofundar nos conhecimentos para exercer o trabalho docente.

Durante minha graduação, mais precisamente no início do 2º ano, comecei a ministrar aulas na Educação Infantil e Ensino Fundamental de uma escola privada. Mesmo ali, com os alunos de 4 e 5 anos (Educação Infantil) e do 2º ano do Ensino Fundamental, sentia que, se a habilitação em Magistério pouco contribuiu para minha formação matemática, o curso de Pedagogia estava se mostrando mais deficitário ainda.

Desde que me formei em Pedagogia, não foram poucos os momentos em que me deparei com situações nas quais os conceitos da Matemática da Educação Básica me fizeram muita falta. Por esse motivo, vi-me reproduzindo com meus alunos as mesmas ações dos meus professores quando estavam ensinando Matemática, corroborando o que Curi e Pires (2008)

¹ O curso de Magistério é uma formação de nível médio que prepara o aluno para ser professor de séries iniciais — da Educação Infantil ao 5º ano do Ensino Fundamental. Também conhecido como Curso Normal em Nível Médio, o curso de Magistério ainda é aceito em alguns concursos públicos e em escolas privadas como pré-requisito para atuar como professor. No Paraná, ainda há escolas que oferecem esse curso.

sugerem: a formação inicial de professores para ensinar Matemática nos anos iniciais não é suficiente.

No caso dos cursos de Pedagogia, o espaço destinado à formação dos professores para ensinar matemática às crianças é de 36 horas (ou 72 horas em alguns casos), tempo insuficiente, levando-se em conta o que outros estudos revelam: a falta de conhecimentos matemáticos dos professores que atuam nesta etapa inicial da escolaridade; no que se refere às discussões sobre questões de natureza didática e metodológica, a abordagem é bastante simplificada, sem o apoio de fundamentações teóricas nem de resultados de pesquisa na área de educação matemática (CURI; PIRES, 2008, p. 181).

Não vou me alongar descrevendo todos os caminhos que percorri, apenas quis trazer à discussão minha formação e fazer um breve resgate histórico dos conteúdos matemáticos trabalhados nos Cursos de Magistério e de Pedagogia, relacionando-os à formação dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Quanto às minhas vivências mencionadas anteriormente, elas me trouxeram inquietações que me levaram a alguns questionamentos sobre minha prática em sala de aula. Está claro que a formação inicial não foi (e nunca vai ser) suficiente para lidar com a complexidade do trabalho docente em sala de aula. Portanto, uma das formas que via para preencher as lacunas deixadas pela minha formação inicial seria buscar uma formação continuada que fizesse frente às exigências demandadas pela profissão.

Após o término do curso de Pedagogia e de uma Especialização em Educação Profissional Integrada à Educação Básica, na modalidade Educação para Jovens e Adultos, continuei motivada a ir em busca de novos conhecimentos matemáticos para o ensino. Frequentei Programas de Formação Continuada de Professores Alfabetizadores (PROFA), que traziam expectativas de aprendizagem para cada ano e orientações didáticas para o seu ensino. Todavia, esses programas mais se pareciam, conforme afirma Ponte (1998), com cursos que prometiam soluções simples e pouco acrescentavam, baseados em uma concepção de *reciclagem* dos professores e vagos demais para promover o desenvolvimento profissional. As ofertas de cursos de reciclagem, capacitações, seminários etc. vêm sempre acompanhadas do propósito de técnicas de ensino e geralmente apresentam-se fora do contexto e da história de vivência escolar dos alunos e dos professores.

Evidentemente esses cursos não surtem o efeito esperado porque não levam em consideração o conhecimento que os professores trazem da sua prática docente, ou seja, essas abordagens não atingem a real necessidade desses profissionais nem consideram suas experiências pessoais. Na formação continuada, o ponto de partida e de chegada precisa ser a

prática do professor, suas experiências pessoais em sala de aula e a troca de conhecimentos, articulando teoria e prática docente.

Além das referidas experiências pessoais, que indicam fragilidades na formação dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, diversas pesquisas mostram a necessidade de aprofundar e investigar o conhecimento matemático próprio para exercer o trabalho de ensinar Matemática nesse nível escolar (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2019; CURI, 2005).

Considerando todas essas limitações no que diz respeito à formação do professor dos anos iniciais e a necessidade de estar em constante formação em busca de promover meu desenvolvimento profissional (PONTE, 1998), ingressei no Mestrado Profissional em Ensino da Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina.

Ingressar no mestrado trouxe oportunidades para me aprofundar no Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) e me desenvolver enquanto pesquisadora, pois permitiu atrelar as pesquisas na área da Educação Matemática à prática profissional, favorecendo minha compreensão dos processos do ensino e da aprendizagem da Matemática. Como afirma Ponte (2003, p. 1), “Quem investiga está a procurar aprender e quem aprende pode ter muito interesse em investigar”.

No entanto, o mestrado proporcionou mais do que esperava, pois, além de desenvolver uma pesquisa científica e me formar pesquisadora, permitiu-me fazer parte, como professora participante, de uma proposta de formação continuada² que tinha como objetivo oportunizar, por meio da abordagem do Estudo de Aula³ (PONTE; BAPTISTA; VELEZ; COSTA, 2012; PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA; BAPTISTA, 2016), o desenvolvimento profissional das professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental que participaram dos encontros ocorridos na UTFPR – *campus* Londrina.

Por isso, a partir do interesse pessoal e da notada relevância do tema para a área da Educação Matemática, decidi realizar a pesquisa de mestrado no contexto desse processo formativo, no qual atuei como observadora participante (LUDKE; ANDRÉ, 1986).

A proposta do processo formativo foi realizar um trabalho colaborativo envolvendo os

² Os detalhes desse processo formativo, contexto da presente pesquisa, estão apresentados no Capítulo 3.

³ Nesta pesquisa, usaremos a expressão Estudo de Aula, uma tradução para Lesson Study. No Brasil, há quem utilize a expressão em inglês ou a expressão Pesquisa de Aula.

professores formadores, as professoras participantes (professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental) e duas estudantes do PPGMAT (também professoras que atuam, ou que já haviam atuado, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, incluindo a autora desta pesquisa). Considerando esse contexto e assumindo que o conhecimento profissional docente é parte integrante do desenvolvimento profissional (PONTE; OLIVEIRA, 2002), a presente pesquisa se dedica a *identificar e analisar os subdomínios⁴ do Conhecimento Matemático para o Ensino, mobilizados por uma professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental, durante um ciclo de Estudo de Aula.*

Para alcançar esse objetivo, analisamos, à luz do quadro teórico do Conhecimento Matemático para o Ensino⁵ de Ball, Thames e Phelps (2008), o ciclo completo de Estudo de Aula que envolveu: i) planejamento coletivo de uma aula com o tema matemático números racionais na forma fracionária; ii) desenvolvimento dessa aula por uma professora, aqui chamada de Maria, em sua turma de 5º ano do Ensino Fundamental; iii) análise individual da aula feita pela professora Maria e a análise coletiva feita no encontro do processo formativo. Os dados analisados nesta pesquisa foram produzidos nessas etapas, e nosso olhar esteve sempre voltado para a professora Maria. Em um primeiro momento, buscamos identificar os subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino manifestados pela professora. Em seguida, analisamos esses subdomínios no sentido de entender como essas manifestações se deram em cada momento do ciclo do Estudo de Aula, isto é, quais subdomínios foram manifestados em cada etapa do ciclo.

É preciso destacar que, como a pesquisa foi desenvolvida em um Mestrado Profissional, devemos apresentar um Produto Educacional como resultado da investigação. Para Rizzatti *et al.* (2020, p. 4), um Produto Educacional (PE) pode ser entendido como o “resultado tangível oriundo de um processo gerado a partir de uma atividade de pesquisa” e “deve ser elaborado com o intuito de responder a uma pergunta/problema oriunda do campo de prática profissional”. O PE resultante desta pesquisa de mestrado é um conjunto de Tarefas de Aprendizagem Profissionais (TAP) (SMITH, 2001; RIBEIRO; PONTE, 2019) para serem trabalhadas com

⁴ Subdomínio é a ramificação do domínio do Conhecimento Matemático para o Ensino dentro dos domínios propostos por Shulman (1986, 1987) que correspondem ao Conhecimento Específico do Conteúdo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo.

⁵ Ball, Thames e Phelps (2008) estruturam o modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino em seis subdomínios: (i) Conhecimento Comum do Conteúdo; (ii) Conhecimento Especializado do Conteúdo; (iii) Conhecimento de Conteúdo e dos Estudantes; (iv) Conhecimento do Conteúdo e do Ensino; (v) Conhecimento do Conteúdo e do Currículo; e (vi) Conhecimento do Conteúdo no Horizonte. No Capítulo 2, seção 2.2, detalhamos esses subdomínios.

professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental em formação continuada ou em formação inicial. No Capítulo 3, em que apresentamos os procedimentos metodológicos da pesquisa, descrevemos como essas TAP foram elaboradas, enfatizando que o objetivo do conjunto de TAP é promover discussões matemáticas e didático-pedagógicas com vistas a mobilizar subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino.

A dissertação está organizada em cinco capítulos, incluindo esta introdução. No segundo capítulo, apresentamos a fundamentação teórica, explicitando nossas perspectivas a respeito do desenvolvimento profissional e, em particular, do Conhecimento Matemático para o Ensino. Ainda nesse capítulo, damos mais detalhes da perspectiva adotada para o Estudo de Aula como um processo colaborativo de desenvolvimento profissional. O terceiro capítulo detalha os aspectos metodológicos da pesquisa, explicando o contexto da pesquisa e os procedimentos de produção e análise dos dados. No quarto capítulo, apresentamos as análises dos dados, tentando identificar manifestações dos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino por parte da professora Maria durante o ciclo do Estudo de Aula. No quinto e último capítulo, apresentamos nossas conclusões a respeito da investigação realizada, assim como as possibilidades futuras para outras pesquisas.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

É fundamental diminuir a distância entre o que se diz e o que se faz, de tal forma que, num dado momento, a tua fala seja a tua prática.

Paulo Freire

Nesta seção, tratamos da formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental em nosso país, no intuito de posteriormente identificar, na constituição e no caminhar de um grupo de formação continuada que buscou trabalhar colaborativamente na perspectiva do Estudo de Aula, aspectos do desenvolvimento profissional de professores.

A formação docente para a atuação nos anos iniciais do Ensino Fundamental ocorre nos cursos de Pedagogia, Normal Superior⁶ (em nível Superior) e em cursos de Magistério (em nível Médio). Assim, torna-se pertinente analisar como as instituições de ensino incorporam as orientações oficiais em relação a essa formação. A exemplo disso, autoras como Curi (2005) e Nacarato, Mengali e Passos (2019), que se dedicam às pesquisas com anos iniciais do Ensino Fundamental, preocuparam-se em conhecer como as ementas e ofertas das disciplinas metodológicas ocorrem nos cursos de Pedagogia e quais as prioridades dadas à formação matemática dos futuros professores. Curi (2005) concluiu que, apesar das orientações para ofertas desses cursos sugerirem priorizar as questões metodológicas como essenciais à formação desse profissional, a carga horária dessas disciplinas é bastante reduzida.

Não é possível avaliar a formação oferecida apenas pelas ementas dos cursos, principalmente sobre ensino e aprendizagem nos anos iniciais, pois, muitas vezes, assumem o papel apenas burocrático dentro das instituições. Ainda que cumprindo o papel burocrático, Curi (2005), em sua pesquisa, demonstrou que o conhecimento de e sobre Matemática sempre foi pouco enfatizado nos Cursos de Magistério, Normal Superior e Pedagogia.

Sendo assim, podemos considerar que, na formação inicial para atuarem nos anos Iniciais do Ensino Fundamental, professores têm tido poucas oportunidades de uma formação matemática que faça frente às exigências da sociedade. Quando isso ocorre, vem pautado nos aspectos metodológicos (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2019, p.20).

⁶ Normal Superior é um curso de graduação, na modalidade Licenciatura, que tem por finalidade formar professores aptos a lecionar na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para Ponte (1998), falar de formação de professores é um “terrível desafio”, porque há diversos fatores que influenciam diretamente esse campo, que envolve diferentes modelos, teorias, investigações empíricas sobre as formações, análises de legislação e práticas reais dos professores em instituições de ensino. Além disso, a formação é também um campo de luta política e ideológica, em que cada grupo defende seus interesses, tornando a formação “[...] um daqueles domínios em que todos se sentem à vontade para emitir opiniões, de onde resulta a estranha impressão que nunca se avança” (PONTE, 1998, p. 1).

Antes mesmo de entrarmos no assunto específico do desenvolvimento profissional do professor, não poderíamos deixar de mencionar que foi somente na segunda metade do século XX que, no Brasil, aconteceu, de fato, a expansão da escolarização básica da rede pública. Esse crescimento real vai se dar no final da década de 1970 e início de 1980, se considerarmos o número de alunos matriculados no Ensino Fundamental e o número de crianças e adolescentes da mesma faixa etária (GATTI; BARRETTO, 2009).

Isso ocorreu porque, durante séculos, a escolarização no país foi privilégio das elites. Não havia propostas educacionais em documentos e estudos, nem debates entre estudiosos acerca da educação. Sem uma política inclusiva da população como um todo, a grande massa populacional no Brasil era analfabeta ou semianalfabeta, com poucas oportunidades de participação na sociedade e no mundo do trabalho que emergia. Com a expansão industrial e do capital, os investimentos públicos na educação começaram a crescer, e a demanda por professores aumentou.

É a partir desse momento que surgiu a necessidade de ações para formar professores, dentre as quais podemos destacar a “[...] expansão das escolas normais em nível médio, cursos rápidos de suprimento formativo de docentes, complementação de formação de origens diversas, autorizações especiais para exercício do magistério a não licenciados, admissão de professores leigos etc.” (GATTI; BARRETTO, 2009, p. 11).

Os improvisos feitos para que as escolas das redes públicas e privadas funcionassem, devido ao rápido crescimento da educação, foram a principal causa deficitária das formações de professores. De acordo com Gatti e Barretto (2009, p. 12),

Esse crescimento do sistema escolar foi sem dúvida um mérito, provindo de grande esforço social, político e de administração, porém é chegado o momento de conseguir que esse sistema tenha melhor qualidade em seus processos de gestão, nas atuações dos profissionais e nas aprendizagens pelas quais responde. Um dos aspectos a se considerar nessa direção, entre outros, é a formação dos professores, sua carreira e perspectivas profissionais.

Não se pode dizer que esses aspectos (formação dos professores, sua carreira e perspectivas profissionais) estão sendo seriamente considerados nos tempos mais recentes. Gatti *et al.* (2019) destacam que, a despeito de haver uma tendência de as ações de formação continuada terem como foco a escola e suas necessidades,

[...] um olhar mais detido sobre o atual cenário não permite otimismo, pois, apesar de existirem boas iniciativas, elas não atingem a todos. E, mesmo considerando que houve, nas últimas décadas, um conjunto de medidas, ações e programas, que demandaram significativo investimento do poder público e esforços dos atores envolvidos nesses processos, o retorno verificado tem estado sempre aquém do esperado, pois os recursos investidos não são coerentes com a melhora dos resultados de aprendizagem dos estudantes. E, assim, o sentimento de insatisfação é crescente e tem se agravado com a falta de políticas que promovam a articulação entre a formação, a valorização e o desenvolvimento profissional (GATTI *et al.*, 2019, p. 178).

A retrospectiva acerca do rápido crescimento do sistema escolar nos possibilita compreender as lacunas existentes na formação dos professores em relação ao ensino da Matemática. Assim, os desafios que se colocam à formação dos professores têm implicações na melhoria da qualidade da Educação. Nesse sentido, pesquisadores e estudiosos têm se engajado em estudos buscando alternativas de aprendizagem que proporcionem ao professor ultrapassar os limites da formação docente para aprofundar-se em outras possibilidades que estejam acima de ampliar e construir novos conhecimentos, mas que sejam capazes de promover o desenvolvimento profissional. Essa será nossa discussão na próxima seção, em que trataremos propostas formativas que partam da real necessidade do professor e não a transmissão de um conjunto de conhecimentos.

2.1 DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES

As formações inicial e continuada podem ser consideradas etapas do caminho percorrido para o desenvolvimento profissional de professores. Dizemos *etapas do caminho* e não *o caminho em si*, pois o desenvolvimento profissional pode ser entendido

[...] como um processo contínuo que tem início antes de ingressar na licenciatura, estende-se ao longo de toda sua vida profissional e acontece nos múltiplos espaços e momentos da vida de cada um, envolvendo aspectos pessoais, familiares, institucionais e socioculturais (FIORENTINI, 2008, p. 45, *apud* FIORENTINI; CRECCI, 2013).

Considerando a importância das etapas no caminhar do professor, Ponte (1994) destaca que “[...] o desenvolvimento profissional é assim uma perspectiva em que se reconhece a necessidade de crescimento e de aquisições diversas, processo em que se atribui ao próprio professor o papel de sujeito fundamental” (PONTE, 1994, p. 10). A partir do entendimento, por

parte do professor, do seu protagonismo no desenvolvimento profissional, é importante compreender também que sua formação para desempenhar a atividade docente “[...] é um processo que envolve múltiplas etapas e que, em última análise, está sempre incompleto” (PONTE, 1998, p.2).

Nesse sentido, o desenvolvimento profissional docente não deve ser confundido com as formações (inicial e continuada), como tradicionalmente são concebidas. Essas formações (tradicionalmente concebidas), cuja perspectiva está baseada em ações de reciclagem ou de capacitação, são pautadas em técnicas supostamente capazes de oferecer ferramentas ao professor para o ensino, voltadas para sanar uma dificuldade emergencial e olhando o professor pela falta, pelo que, supostamente, ele não sabe. Por outro lado, há propostas formativas cuja perspectiva é partir da real necessidade do professor em refletir sobre sua própria prática, estudando e aprofundando temas para os quais se sinta motivado (PONTE, 1998).

Ponte (1998) busca estabelecer distinções entre essa formação tradicionalmente concebida e o que se entende por desenvolvimento profissional. Embora pareçam equivalentes, o autor destaca suas principais diferenças.

- A formação está muito ligada à ideia de “frequentar” cursos, enquanto, no desenvolvimento profissional, a ideia de frequentar cursos acontece também, mas vem acompanhada de outras atividades e trocas de experiências.
- Na formação, o movimento acontece de *fora* para *dentro* na assimilação dos conhecimentos que lhe são transmitidos, enquanto, no desenvolvimento profissional, o movimento é de *dentro* para *fora*, cabendo ao professor as decisões que deseja considerar, ou seja, o professor deixa de ser objeto e passa a ser sujeito da formação.
- A formação atende à carência, no caso das disciplinas, o que difere do desenvolvimento profissional, que direciona o olhar para as potencialidades do professor.
- A formação é compartimentada por assuntos ou disciplinas, enquanto, no desenvolvimento profissional, o professor é visto como um todo nos aspectos cognitivos, afetivos e relacionais.
- A formação parte da teoria e, geralmente, não chega à prática, já o desenvolvimento profissional considera a teoria e a prática de forma interligada (PONTE, 1998).

De fato, o que queremos ressaltar aqui é que a formação pode ser encarada de modo diferente do que habitualmente tem se apresentado, não somente subordinada a uma concepção baseada na transmissão de conhecimentos, em que se entende a formação do professor como

um movimento de “fora para dentro”, enxergando-o como sujeito passivo em sua formação e cuja função é transmitir conteúdos produzidos na academia.

No desenvolvimento profissional, não há interesse em normalizar a aprendizagem a todos os professores, mas em promover a individualidade de cada professor, valorizando não só os aspectos cognitivos e o conhecimento, mas também os afetivos e relacionais, passando o professor de objeto a protagonista da própria aprendizagem, que, segundo Fiorentini e Crecci (2013), é um movimento de “dentro para fora”.

Como afirmam Saraiva e Ponte (2003), o desenvolvimento profissional sempre envolve alguma aprendizagem e, conseqüentemente, alguma mudança. A aprendizagem ocorre quando o professor “[...] adquire a capacidade de ver, ouvir e fazer coisas que não fazia antes” (SARAIVA; PONTE, 2003, p. 4). No entanto, alertam os autores, a mudança só acontece se o professor estiver disposto a mudar.

Ninguém muda ninguém, ou seja, a mudança vem, em grande parte, de dentro de cada um. Para que ela ocorra, tem de ser desejada pelo próprio. Por outro lado, é necessário que o professor esteja disposto a correr os riscos inerentes às inovações educacionais e a enfrentar a insegurança das novas abordagens (SARAIVA; PONTE, 2003, p. 4).

Dessa maneira, identificar mudanças, aprendizagens e, portanto, desenvolvimento profissional docente envolve observar o professor em ação, seja planejando ou ministrando uma aula, dialogando com outros professores ou externalizando suas reflexões sobre sua prática.

Para investigarmos mais detalhadamente o desenvolvimento profissional do professor, conforme pretendido nesta pesquisa, precisamos conhecer algumas de suas dimensões. Ponte e Oliveira (2002) consideram que o desenvolvimento profissional do professor se dá em dois campos estreitamente relacionados: (i) crescimento do conhecimento e competências profissionais e (ii) formação e afirmação de sua identidade profissional. Nesta pesquisa, vamos nos dedicar ao primeiro deles, isto é, ao conhecimento profissional do professor. Para tanto, na próxima seção, detalhamos a perspectiva de conhecimento profissional docente que fundamentará as análises dos dados desta pesquisa.

2.2 CONHECIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE

O conhecimento profissional necessário ao professor para exercer a tarefa de ensinar Matemática vai muito além da ideia simplista de que basta ao professor ter domínio do conhecimento do conteúdo específico a ser ensinado. Essa visão ultrapassada é debatida por Shulman (1986, 1987), considerando que a prática docente na Educação Básica exige muito mais do que somente o conhecimento específico do conteúdo. De acordo com o mesmo autor,

[...] a base de conhecimento para o ensino está na interseção entre conteúdo e pedagogia, na capacidade do professor para transformar o conhecimento de conteúdo que possui em formas que são pedagogicamente poderosas e, mesmo assim, adaptáveis às variações em habilidade e histórico apresentadas pelos alunos (SHULMAN, 2014, p. 217).

Uma das grandes contribuições de Shulman (1986, 1987) foi a noção de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge* – PCK), uma categoria específica do conhecimento, que é própria do trabalho docente. De acordo com Shulman (2014), o PCK é um “[...] amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é o terreno exclusivo dos professores, seu meio especial de compreensão profissional” (p. 206). Para além do PCK, Shulman (1987) apresentou outros domínios do conhecimento profissional do professor: Conhecimento Específico do Conteúdo; Conhecimento Pedagógico Geral; Conhecimento do Currículo; Conhecimento dos Alunos e de suas Características; Conhecimento dos Contextos Educacionais; Conhecimento dos Fins, Propósitos e Valores da Educação.

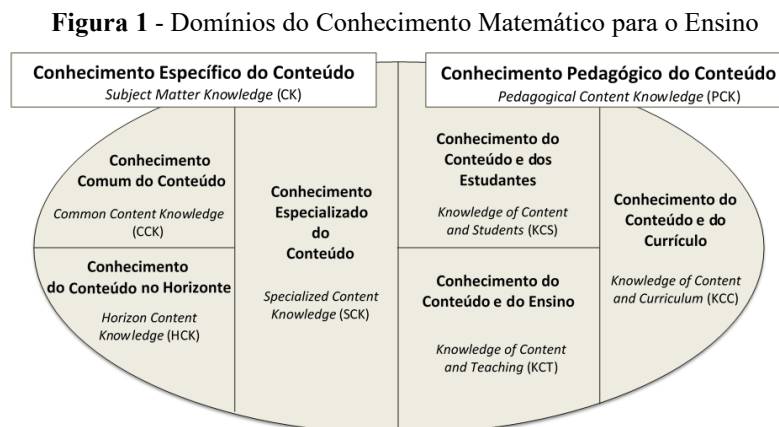
No entanto, Shulman (1986, 1987) não tratou especificamente do conhecimento do professor que ensina Matemática. Foi, porém, a partir desses trabalhos de Shulman e da conceitualização do PCK que Ball, Thames e Phelps (2008) propuseram o quadro teórico do Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching* - MKT), entendido como “[...] o conhecimento matemático necessário para levar adiante o trabalho de ensinar matemática” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 395, tradução nossa)⁷.

O MKT baseia-se, essencialmente, em dois dos domínios propostos por Shulman (1987) para aprofundar a discussão no âmbito da Matemática e propor os domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino. Com base no Conhecimento Específico do Conteúdo de Shulman (1987), Ball, Thames e Phelps (2008) propuseram os subdomínios do Conhecimento Comum do Conteúdo (*Common Content Knowledge*) e do Conhecimento Especializado do Conteúdo (*Specialized Content Knowledge*). A partir do PCK de Shulman (1987), Ball, Thames e Phelps (2008) propuseram o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (*Knowledge of Content and Teaching*) e o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (*Knowledge of Content and Students*). Além disso, dois outros subdomínios do MKT foram propostos por Ball, Thames e Phelps (2008), mas, naquele momento, os autores ainda não estavam convictos de onde aloca-los dentro das duas categorias de Shulman. São eles: o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (*Horizon Content Knowledge*) e o Conhecimento do Conteúdo e do Currículo

⁷No original: “[...] the mathematical knowledge needed to carry out the work of teaching mathematics.”

(*Knowledge of Content and Curriculum*), alocados, respectivamente, na categoria do Conhecimento Especializado do Conteúdo e do PCK.

A Figura 1 ilustra essa organização do MKT proposta por Ball, Thames e Phelps (2008).



Fonte: traduzido de Ball, Thames e Phelps (2008)

Para detalhar um pouco mais cada um desses domínios do MKT, usaremos exemplos que envolvem os números racionais na forma fracionária, pois esse tema matemático estará presente em nossas análises, uma vez que a aula planejada e desenvolvida pela professora Maria tratou das frações.

Começamos por apresentar os dois primeiros subdomínios incluídos no domínio do Conhecimento Específico do Conteúdo proposto por Shulman (1987).

O Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK)⁸ é aquele que engloba os conceitos aprendidos em cursos de ciências exatas, mas não é restrito ao ensino, podendo ser usado em outras situações. No caso da adição de frações, por exemplo, um engenheiro, assim como um professor, é capaz de reconhecer quando o resultado da adição $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ está incorreto.

O Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), por sua vez, não tem outro fim a não ser o ensino. O SCK é particularmente relevante para o professor, uma vez que, conforme apontam Ball, Thames e Phelps (2008), o trabalho docente envolve especificidades como

Apresentar ideias matemáticas, respondendo a estudantes os “porquês”; encontrar um exemplo para fazer um ponto matemático específico reconhecendo o que está envolvido no uso de uma representação; fazer representações de ideias ligando a outras representações; ligar um tema a ser ensinado a tópicos de anos anteriores e posteriores ao ensino; explicar objetivos e propósitos matemáticos ao país; avaliar e adaptar o conteúdo matemático de livros didáticos; modificar tarefas fáceis ou difíceis e avaliar as reivindicações dos alunos; dar ou avaliar explicações matemáticas; escolher e desenvolver as definições utilizáveis; usar notação matemática e linguagem matemática e criticar o seu uso; promover perguntas matemáticas produtivas;

⁸ Faremos uso das siglas de cada domínio na língua inglesa.

selecionar as representações para fins de estudo; inspecionar equivalências (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 400, tradução nossa)⁹.

É uma característica do SCK avaliar rapidamente a natureza de um erro, não apenas os erros mais comuns. Além disso, o SCK envolve conhecer e explorar diferentes significados e representações para um mesmo conceito. No caso das frações, é dominar os diferentes significados dos números racionais (parte-todo, medida, quociente, operador e razão) e transitar pelas diferentes representações (fracionária, decimal, gráfica, porcentagem).

Quanto ao PCK, outro domínio proposto por Shulman (1986), no modelo de Ball, Thames e Phelps (2008), temos o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS), que é o conhecimento que combina saber sobre os estudantes e saber sobre a Matemática. Um exemplo de KCS é quando o professor conhece e antecipa algumas maneiras (corretas e incorretas) de seus estudantes lidarem com a ideia de que existem números entre o zero e o um. Por exemplo, em um determinado momento da aprendizagem escolar, é comum que estudantes não considerem a existência de números entre zero e um, uma vez que os números naturais são os mais conhecidos por eles. Em um momento posterior, pode ser que um estudante reconheça alguns números racionais (por exemplo, as frações mais conhecidas, como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$), mas desconheça o fato de que entre dois números racionais sempre existe um número racional (a densidade do conjunto dos números racionais).

Ainda no domínio do PCK, o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT) é a combinação do conhecimento da Matemática e o conhecimento de como ensinar o conteúdo. Esse conhecimento permite ao professor planejar uma abordagem e uma sequência de ensino que seja eficiente para evitar ou superar determinadas dificuldades de aprendizagem que são recorrentes. No caso das frações, o KCT permite, por exemplo, que o professor perceba que o trabalho com frações por meio de seu significado parte-todo favorece o ensino de equivalência de frações.

⁹ Do original: “Presenting mathematical ideas; Responding to students’ “why” questions; Finding an example to make a specific mathematical point; Recognizing what is involved in using a particular representation; Linking representations to underlying ideas and to other representations; Connecting a topic being taught to topics from prior or future years; Explaining mathematical goals and purposes to parents; Appraising and adapting the mathematical content of textbooks; Modifying tasks to be either easier or harder; Evaluating the plausibility of students’ claims (often quickly); Giving or evaluating mathematical explanations; Choosing and developing useable definitions; Using mathematical notation and language and critiquing its use; Asking productive mathematical questions; Selecting representations for particular purposes; Inspecting equivalencies”.

Como já mencionamos, Ball, Thames e Phelps (2008) trazem à discussão outros dois subdomínios, e um deles é o Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC), que trata de como a Matemática está organizada ao longo do currículo. Assim, o KCC está relacionado a conhecer ordens usuais no tratamento dos temas matemáticos apresentados em livros didáticos e em documentos curriculares. Um exemplo do KCC seria o professor ter conhecimento de qual ano escolar é o indicado para introduzir as frações (e quais significados são indicados) ou em qual ano escolar os números racionais são definidos.

Já o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK), de acordo com os autores, está mais relacionado à maneira como um determinado conteúdo matemático está distribuído ao longo da grade curricular. Trata-se de um olhar longitudinal a respeito do conteúdo. Isso significa, por exemplo, um professor do quinto ano do Ensino Fundamental ter a compreensão de como as frações aparecem nos anos anteriores e nos anos posteriores ao que está ensinando naquele momento.

Esse modelo teórico de Ball, Thames e Phelps (2008) destaca a complexidade do conhecimento matemático necessário para o professor desempenhar sua tarefa de ensinar Matemática na escola. É importante reafirmar que o MKT é um modelo teórico baseado na prática docente e que as categorias apresentadas devem ser entendidas como parte de um todo que envolve a ação docente, não havendo fronteiras claras entre essas categorias. O objetivo desse modelo teórico não é simplesmente categorizar cada aspecto do conhecimento do professor para colocá-los em “caixinhas”, mas reconhecer que nenhuma dessas categorias é capaz de sustentar, isoladamente, o conhecimento necessário para o ensino.

Na próxima seção, detalhamos a perspectiva de Estudo de Aula considerada neste trabalho, assumindo-a como uma metodologia de trabalho colaborativo, estreitamente conectada à prática docente e com potencial para promover o desenvolvimento profissional de professores (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA; BAPTISTA, 2016).

2.3 ESTUDO DE AULA

Fiorentini e Crecci (2013), a partir de uma meta-análise de estudos brasileiros sobre desenvolvimento profissional realizada por Passos *et al.* (2006), destacam que é possível pensar em pelo menos três diferentes práticas consideradas catalisadoras de desenvolvimento profissional: as práticas reflexivas, as práticas colaborativas e as práticas investigativas. Dentre elas, destacamos as práticas colaborativas como uma estratégia potencial para lidar com a

complexidade da profissão docente, promovendo o trabalho em uma relação de ajuda mútua, visando a objetivos comuns. De acordo com Ponte (2004, p. 39),

[...] num trabalho de colaboração, a existência de objetivos comuns fortes não é incompatível com o prosseguimento de objetivos individuais próprios por cada um dos intervenientes. Conseguir a articulação entre esses dois tipos de objetivos não é fácil, mas é uma condição fundamental para o êxito do trabalho.

Um aspecto fundamental para o crescimento profissional está relacionado à capacidade de trabalhar em equipe. Segundo Ponte (2004), a colaboração entre os participantes, no entanto, não é um aspecto tão fácil de acontecer. É necessário que haja boa organização e um ambiente favorável para proporcionar um relacionamento de confiança entre os participantes, uma vez que o trabalho colaborativo demanda, muitas vezes, a exposição de quem o integra. Por isso, o diálogo aberto e franco deve tornar-se natural para que os participantes estejam abertos a críticas e diferentes pontos de vista. Entretanto, esse relacionamento de uns com os outros, dado como adquirido, nem sempre está presente no trabalho em equipe, daí a necessidade de desenvolvê-lo (PONTE, 2004).

O trabalho em grupos colaborativos contribui para a troca de experiências e as interações entre seus integrantes (BOAVIDA; PONTE, 2002). Durante todo o processo em grupos colaborativos, é possível que os participantes experimentem diversas aprendizagens, aprofundem seus conhecimentos e competências e desenvolvam-se profissionalmente em vários aspectos, destacando-se os aspectos conceituais relacionados à reflexão e à investigação-ação.

Segundo Ball e Cohen (1999), grupos colaborativos oferecem oportunidades aos professores que ensinam Matemática de avaliar suas práticas e refletir sobre outras, produzindo, assim, uma nova construção de aprendizagem dos conteúdos que ensinam e dos alunos para os quais ensinam.

Uma das estratégias para trabalhar em colaboração é por meio do Estudo de Aula, uma metodologia para a formação dos professores, buscando o seu aperfeiçoamento e o desenvolvimento do senso crítico e reflexivo sobre os conhecimentos e práticas docentes (PONTE; BAPTISTA; VELEZ; COSTA, 2012; PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA; BAPTISTA, 2016).

No Estudo de Aula, os

[...] professores trabalham em conjunto, procurando identificar dificuldades dos alunos, e preparam em detalhe uma aula que depois observam e analisam em profundidade. No fundo, realizam uma pequena investigação sobre a sua própria prática profissional, em contexto colaborativo, informada pelas orientações curriculares e pelos resultados da investigação relevante (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA; BAPTISTA, 2016, p. 869).

Sobre essa abordagem, fazemos um breve histórico de como alcançou outros países até chegar ao Brasil. Segundo Souza, Wrobel e Baldin (2018), o Estudo de Aula teve seu início no Japão há mais de um século. Sua denominação original *Jugyou Kenkyuu*, traduzido como “Pesquisa de Aula”, indica um processo de desenvolvimento de professores que contempla a formação inicial e a continuada visando atender às necessidades de aprendizagem dos alunos em Matemática e outras disciplinas. Percebendo as dificuldades dos alunos, principalmente na aprendizagem de Matemática, os profissionais da educação propuseram aos professores japoneses um trabalho de investigação para que pudessem refletir sobre essas dificuldades.

De caráter colaborativo e reflexivo, as ações de aprendizagem compreendiam “três etapas: planejamento e execução da aula planejada e reflexão pós-aula” (SOUZA; WROBEL BALDIN, 2018, p.116), ampliando o conhecimento do processo de aprendizagem dos alunos e promovendo o desenvolvimento da prática profissional do professor.

A proposta era melhorar a forma de ensinar os conteúdos matemáticos. Para isso utilizaram um processo em que os professores planejavam juntos uma aula, que seria observada por um grupo de professores pertencentes ao mesmo grupo, para discutirem coletivamente quais aspectos permitiram o bom desenvolvimento dessa aula e como ocorreram as aprendizagens dos alunos, observando o que não foi previsto no planejamento e indicando novos encaminhamentos para tornar a aula melhor.

Independente da estrutura escolar nos diferentes períodos da história do Japão, o espírito colaborativo e a consciência pelo coletivo parecem fazer parte da cultura japonesa. Antes, os saberes eram compartilhados entre alunos e entre alunos-professor. Depois, professores passaram a compartilhar salas de aulas de colegas, o que entendemos que motivou o Lesson Study (SOUZA; WROBEL; BALDIN, 2018, p. 118).

Ainda segundo Souza, Wrobel e Baldin (2018), o espírito colaborativo dos japoneses e o profundo respeito que têm pela educação vêm das antigas estruturas escolares, onde as escolas eram realizadas em templos religiosos, tornando a educação como algo “sagrado”, em que o saber dos livros e escritos e dos mestres estudados deviam ser compartilhados com toda comunidade. Assim, o “valor que a educação significa para o povo japonês como riqueza, e ao mesmo tempo poder, para competir no mundo é o que levou na virada do século XX para as atividades que foram embriões da Lesson Study” (SOUZA; WROBEL; BALDIN, 2018, p. 120).

De acordo com Utimura (2018), por despertar o interesse em tantos pesquisadores, o Estudo de Aula obteve grande divulgação em outros países, como Estados Unidos, Reino

Unido, Chile, Portugal e Brasil. Naturalmente, essa expansão gerou várias adaptações de acordo com as necessidades de cada país. Então,

[...] podemos observar que a Lesson Study (Pesquisa de Aula) não é um conceito a ser definido em poucas palavras e introduzido numa cultura diferente, como uma receita de passos de uma metodologia. Entretanto, seus princípios educacionais são tão inegavelmente sólidos e produtivos que atraem pesquisadores do mundo todo para incluí-los em suas investigações (SOUZA; WROBEL; BALDIN, 2018, p.121).

No Brasil, a “Pesquisa de Aula” ou o “Estudo de Aula” (BALDIN, 2009; CURI, 2014 p.20) parece estar conquistando espaço, especificamente no contexto do ensino da Matemática. Esse avanço dos adeptos do Estudo de Aula deve vir acompanhado das adaptações necessárias. Nessa direção, Bezerra e Morelatti (2020) enfatizam que por estarmos numa realidade diferente do Japão, as adaptações se tornam necessárias devido a cultura, condição social, econômica e política do país. “Na medida em que decidimos o quê e como adaptar, podemos aprender muito” (BEZERRA; MORELATTI, 2020, p.66). Para Souza, Wrobel, Baldin (2018), não se trata simplesmente de importar abordagens de ensino estrangeiras de sucesso. Como apontam as autoras,

A conquista por esses espaços deve nascer, crescer e gerar identidade nas próprias ações de professores, conquistando e atraindo adeptos para a melhoria da aprendizagem em Matemática Aspectos culturais interferem nos comportamentos e modos de pensar das comunidades e, por isso, pensamos que a simples importação (ou imposição) estaria fadada ao fracasso. Mas, é útil percebermos e refletirmos sobre alguns alicerces da educação matemática japonesa que podem nos inspirar pela busca de nossos próprios caminhos e concepções (SOUZA; WROBEL; BALDIN, 2018, p.127-128).

Na mesma direção, Baldin (2009) e Bezerra (2017) afirmam a importância de adaptar o Estudo de Aula ao contexto brasileiro, tornando-o eficiente quanto aos problemas de aprendizagem em Matemática e proporcionando mais segurança aos professores para ensinar, considerando a estrutura organizacional da educação no Brasil, e buscando romper com a cultura individualista do professor.

No entanto, para que as contribuições que o Estudo de Aula propõe aconteçam, o professor deve dispor-se a aceitar o desafio de participar de um processo formativo nessa perspectiva e abrir a sua sala de aula para investigação. A atividade de ser observado e filmado (quando for o caso) não é comum em nossa cultura, como parece ser o caso de outros países. No entanto, quando compreendida e aceita pelos professores, pode se tornar forte aliada, uma vez que o Estudo de Aula “[...] favorece os processos de reflexão (individual e coletiva) que culminam no desenvolvimento profissional do professor” (BEZERRA; MORELATTI, 2020, p.83).

De acordo com Curi (2018), a partir de adaptações apresentadas em Lewis e Hurd (2011) e de Stepanek *et al.* (2007), podem ser consideradas várias etapas do Estudo de Aula, que serão especificadas a seguir.

Formular objetivos. Os objetivos a serem alcançados são formulados junto com os participantes do grupo de formação, de acordo com o interesse de aprendizagem que querem alcançar com seus estudantes, observando as orientações curriculares vigentes e formulando estratégias para a condução do ensino. Compreende também o desejo em aprimorar os conhecimentos específicos, promovendo aprendizagem por meio de uma aula planejada.

Planejar a Aula. A característica geral de todo planejamento compreende o detalhamento e o registro da trajetória de aprendizagem pretendido pelos alunos a respeito de determinado conceito matemático. Nesse momento, é importante discutir os conhecimentos prévios dos alunos, as reações e respostas esperadas, bem como identificar possíveis dificuldades ou dúvidas, pensando em estratégias de ensino que conduzam o pensamento dos alunos. Nessa etapa, é fundamental a participação de todo o grupo, formadores, pesquisadores e professores, na construção do planejamento da aula.

Conduzir, observar a aula e coletar dados. A aula é lecionada por um professor do grupo e conduzida com base no planejamento realizado coletivamente. Além disso, a aula é assistida por outros integrantes do grupo, que coletam os dados e registram ações e falas dos alunos. Às vezes, os professores observadores colaboram na coleta de dados escolhendo um ou alguns alunos para serem observados mais de perto, aqueles que estejam apresentando mais dificuldades, questionando-os sobre como estão pensando para compreender suas percepções da tarefa que está sendo desenvolvida. Não é intenção da observação avaliar o docente, mas, sim, reunir dados sobre a eficácia da aula. Os professores observadores ainda fazem o registro do trabalho dos alunos (em áudio, em vídeo e fotográfico), instrumentos que são recolhidos como protocolos de atividades resolvidas para posteriores análises e discussões em grupo.

Refletir sobre os dados coletados. A partir dos dados coletados, são feitas análises com o grupo de professores, formadores e pesquisadores buscando melhorar o planejamento para uma nova aula. Esse momento de reflexão é muito importante, mesmo que a aula não tenha saído como o esperado. Avaliar os pontos positivos e os negativos de uma aula e o impacto que ela teve nas aprendizagens dos alunos pode trazer novas oportunidades de discussões sobre o uso dos procedimentos no planejamento realizado.

Revisar e conduzir a aula novamente (opcional). Esse movimento é considerado muito importante no grupo de formação, pois, a partir dos resultados que não foram alcançados na aula, professores que atuam no mesmo ano de escolaridade podem aprimorar o planejamento e

aplicar a aula novamente, agora ministrada por um outro professor, em ciclos que podem ser repetidos várias vezes (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA; BAPTISTA, 2016).

Compartilhar os resultados. O processo do Estudo de Aula pode ser compartilhado com grupos de formação, com a escola e com professores interessados no assunto. O compartilhamento pode ser realizado em audiovisual, congressos, *workshops*, mídia impressa ou eletrônica e publicações.

Segundo Curi (2018),

[...] a Lesson Study envolve um trabalho de pesquisa sobre o aprendizado, a formação de professores, o contexto no qual o ensino e aprendizagem ocorrem, o conteúdo a ser ensinado, a didática e sobre o currículo proposto e praticado. Envolve ainda o princípio de formação de professores baseado na pesquisa, na reflexão, na colaboração e na participação efetiva, possibilitando a eles a apropriação de indicações curriculares e a construção de um repertório teórico-metodológico consistente, que contribui para o aprimoramento do ensino e aprendizagem da matemática (CURI, 2018, p.22).

O Estudo de Aula surge, assim, como uma oportunidade de participação em um processo formativo reflexivo, em que professores trabalham colaborativamente na promoção de seu desenvolvimento profissional, porém centrados nas aprendizagens dos alunos, diferentemente de outros processos formativos que também atuam em observações de aulas, mas que se centram na atuação dos professores.

Para Ponte, Quaresma, Mara-Pereira e Baptista (2016), ao participarem de estudos de aulas, professores

[...] aprendem questões importantes em relação aos conteúdos que ensinam, às orientações curriculares, aos processos de raciocínio e às dificuldades dos alunos e à própria dinâmica da sala de aula. Os estudos de aula são desenvolvidos em ambientes colaborativos, levando os participantes a criar um relacionamento próximo, partilhar ideias e apoiar-se mutuamente. Dessa forma, constituem um contexto não só para refletir, mas também para promover a autoconfiança, fundamental para o seu desenvolvimento profissional (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA; BAPTISTA, 2016, p. 870).

Temos como hipótese, com base em Ponte, Quaresma, Mata-Pereira e Baptista (2016), que o Estudo de Aula que propomos investigar em nossa pesquisa tem potencial para promover o desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Como vimos, justamente pelo fato de estar estreitamente relacionado com a prática docente, as etapas do Estudo de Aula de Curi (2018) possibilitam a mobilização e a manifestação, por parte dos envolvidos no processo, dos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), permitindo que investiguemos o desenvolvimento profissional da professora Maria.

No capítulo seguinte, apresentamos a metodologia da pesquisa, destacando o contexto formativo em que foi realizada, os procedimentos de produção e de análise dos dados.

3. METODOLOGIA DA PESQUISA

Nossa pesquisa tem por objetivo *identificar e analisar os subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino, mobilizados por uma professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental, durante um ciclo de Estudo de Aula*. Para tanto, foi desenvolvido um estudo de natureza qualitativa que, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), possui cinco características, as quais apresentamos e, ao mesmo tempo, indicamos de que maneira nossa pesquisa se aproxima, em maior ou menor grau, de cada uma delas.

1) *Na investigação qualitativa, a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal*. Nesta investigação, os dados foram produzidos no decorrer natural do processo formativo e a pesquisadora atuou diretamente como observadora participante do grupo investigado. Assim como sugerem Bogdan e Biklen (1994), os dados produzidos e registrados foram revistos e analisados em sua totalidade pela investigadora, sendo o entendimento que ela possui sobre eles o principal instrumento analítico.

2) *A investigação qualitativa é descritiva*. Os dados produzidos durante os encontros do processo formativo incluem transcrições de áudios e vídeos, bem como anotações feitas pela investigadora. As análises buscam manter e descrever com riqueza de detalhes o ocorrido durante o processo.

3) *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos*. A pesquisadora está interessada nos subdomínios do MKT manifestados por uma professora durante sua participação no processo formativo. Todavia, não é interesse da pesquisa, por exemplo, “medir” o quanto a professora aprendeu ao final da formação continuada.

4) *Os investigadores qualitativos tendem a analisar seus dados de forma indutiva*. Não há uma hipótese a ser confirmada ou refutada pela pesquisa. As análises e conclusões foram construídas a partir das interpretações dos dados produzidos.

5) *O significado é de importância vital na abordagem qualitativa*. De fato, a presente pesquisa está interessada em interpretar as percepções da professora participante, buscando entender os significados mobilizados por ela durante discussões realizadas nos encontros do grupo e em sua aula.

Como afirmam Bogdan e Biklen (1994), nem todo estudo qualitativo manifesta essas características na mesma intensidade. A questão não é se uma determinada pesquisa é ou não totalmente qualitativa, trata-se de uma questão de grau. Entendemos que nossa pesquisa se aproxima de cada uma dessas cinco características.

Destacamos que a pesquisadora também atuou como participante do processo formativo, uma vez que é professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Participou das discussões e das atividades, ao mesmo tempo que atuou como observadora, registrando impressões sobre o ambiente. Por isso, caracterizamos essa atuação da pesquisadora como “observação participante” (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p.29), em que o pesquisador, ao participar, revela sua identidade e seus objetivos de estudo ao grupo pesquisado desde o início.

3.1 CONTEXTO DA PESQUISA

Nossa pesquisa foi desenvolvida no contexto de um processo formativo ocorrido ao longo do ano de 2019, inserido no projeto de formação continuada em Matemática destinado a professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esse projeto de formação teve seu início no ano de 2018, configurando-se por características distintas tanto em sua constituição quanto no seu funcionamento em relação ao projeto do ano de 2019. Apesar de apresentarem a mesma configuração e de alguns aspectos se relacionarem, o processo formativo no qual nossa pesquisa se desenvolve é independente do processo anterior.

Apesar de serem dois processos formativos distintos (com grupos de professoras participantes completamente diferentes), a experiência que os dois professores formadores obtiveram no ano de 2018 influenciou as decisões e dinâmicas do processo formativo ocorrido em 2019. Por esse motivo, começamos a apresentação do contexto da pesquisa com um breve relato do que foi realizado no ano anterior ao investigado. Uma comparação mais detalhada entre os grupos de 2018 e de 2019 está apresentada em Elias e Trevisan (2020).

3.1.1 O grupo de 2018

No ano de 2018, três professores da UTFPR - *campus* Londrina, dentre os quais o orientador desta pesquisa, propuseram o projeto de extensão *Formação Continuada em Matemática para Docentes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental*, com duração de dois anos.

De acordo com o projeto homologado na UTFPR, os objetivos principais previstos para essa formação continuada eram: (i) promover o desenvolvimento dos professores dos anos iniciais, especificamente professores que ministram aula no 4º ano e no 5º ano, um desenvolvimento profissional baseado na prática com potencial para transformar seus conhecimentos, suas crenças e hábitos de ensino fazendo conexões diretas com a prática de

ensino (SMITH, 2001); (ii) buscar formas de promover essas transformações em contextos naturais (PONTE; CARVALHO; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2016).

Como fundamento para a formação continuada, os três professores formadores buscavam assumir características de um trabalho colaborativo (BOAVIDA; PONTE, 2002) a ser desenvolvido por meio da metodologia do Estudo de Aula (PONTE; BAPTISTA; VELEZ; COSTA, 2012; PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA; BAPTISTA, 2016).

Para dar início ao projeto de extensão, os professores formadores contaram com a parceria¹⁰ da Secretaria Municipal de Educação (SME) do município de Londrina. Essa parceria foi importante, entre outras coisas, para possibilitar a liberação das professoras em suas escolas nos dias dos encontros. Ao final de cada ano, as professoras deveriam enviar para a SME os certificados¹¹ emitidos pelo Departamento de Extensão da UTFPR. Foi fundamental o apoio da SME às professoras para a participação do processo formativo, porém, entendemos que o interesse deve partir do professor que deseja superar as dificuldades e desafios enfrentadas no processo de ensino-aprendizagem e acredita que o processo formativo pode proporcionar benefícios na reflexão sobre o ensino e melhorias da sua prática docente.

Em 2018, a SME foi bastante participativa em algumas decisões, sugerindo tanto o dia da semana em que os encontros presenciais aconteceram como indicando (indiretamente) as professoras dos anos iniciais que participaram do projeto. A escolha do dia da semana em que os encontros aconteceram se deu pelo fato de a SME tentar organizar, para toda a rede municipal, um dia da semana específico para a realização das horas-atividade dos professores de cada ano escolar. Por exemplo, os professores que atuavam no 4º ano do Ensino Fundamental desenvolveriam as horas-atividade na quarta-feira e os professores do 5º ano, na quinta-feira. Por esse motivo, o grupo de 2018 foi constituído apenas por professoras do 4º ano, logo, os encontros aconteceram às quartas-feiras. Quanto à indicação das professoras que participaram da formação, a SME escolheu as escolas do município e fez o convite aos diretores, que indicaram as professoras que participariam do processo formativo. Ou seja, não podemos dizer que a participação das professoras foi voluntária.

¹⁰ Essa parceria já vinha acontecendo em anos anteriores, desde 2017, envolvendo outros docentes da UTFPR (inclusive o professor André Luis Trevisan, um dos formadores do projeto investigado) e outros projetos.

¹¹ Como o projeto estava homologado como um projeto de extensão na UTFPR, havia emissão de certificados a cada módulo pela universidade. Foram 4 módulos ao longo de 2018 e 2019, sendo um módulo por semestre. O primeiro e o segundo módulos geravam certificados com carga horária de 26 horas cada (16 horas presenciais e 10 horas a distância) o terceiro e quarto módulos geravam certificados com carga horária de 30 horas cada (16 horas presenciais e 14 horas a distância).

A SME também ponderou que os encontros fossem mensais, e não a cada quinze dias, como pretendido pelos formadores, sob a alegação da dificuldade da liberação das professoras pelas suas escolas. Dessa maneira, conforme apontam Elias e Trevisan (2020), foram realizados oito encontros entre os meses de abril e de outubro de 2018, praticamente um encontro por mês. Esses encontros aconteceram às quartas-feiras, das 13h30 às 17h30, nas dependências da UTFPR – Londrina.

O grupo foi constituído pelos três professores formadores, seis¹² professoras do 4º ano do Ensino Fundamental e uma estudante do PPGMAT, também professora dos anos iniciais. Como relatam Elias e Trevisan (2020), apesar dos professores formadores não terem naquele momento muita experiência em trabalhar numa perspectiva colaborativa como a pretendida, tentaram conduzir o grupo da maneira como vinham estudando sobre grupos colaborativos, sempre procurando trabalhar em um ambiente mais horizontal entre todos os participantes, sem que os próprios formadores exercessem o papel de liderança e concentrassem neles as tomadas de decisões. Buscava-se, dessa maneira, que as professoras participassem das escolhas e as decisões fossem tomadas conjuntamente.

Em síntese, o cenário de 2018 foi um grupo de professoras que não conhecia previamente a proposta do processo formativo, que não haviam procurado a formação de forma voluntária, que nunca haviam trabalhado na perspectiva do Estudo de Aula e, como comentamos no Capítulo 2, nem sempre a proposta é bem recebida por professores. Pelo lado dos formadores, havia pouca experiência com o trabalho colaborativo e a busca de constituir um grupo colaborativo como visto na literatura, evitando ao máximo tomar “a posição de chefes do grupo” (ELIAS; TREVISAN, 2020, p. 194).

Esse conjunto de fatores, mais bem detalhado em Elias e Trevisan (2020), gerou consequências no desenrolar do processo formativo. O planejamento de uma aula para ser desenvolvida por uma das integrantes do grupo demorou a se consolidar. Inicialmente, o tema matemático a ser estudado foi, por uma escolha do grupo, divisão de números naturais. O primeiro semestre de 2018 (quatro encontros ao todo) foi dedicado a esse tema, mas o planejamento de uma aula não caminhou.

A expectativa dos professores formadores com o processo formativo era evitar que as professoras reproduzissem práticas conservadoras frequentemente utilizadas no ensino de

¹² O número de professoras a serem convidadas foi acordado entre a SME e os professores formadores.

divisão, como, por exemplo, centrar o foco apenas no algoritmo. No entanto, como ressaltam Elias e Trevisan (2020, p. 190),

As discussões no grupo, geralmente, caíam em situações que os formadores não sabiam conduzir para promover uma mudança na concepção sobre o ensino de Matemática. Os formadores não souberam lidar com a resistência da professora e, ao mesmo tempo, manter uma relação horizontal no grupo, sem serem impositivos.

Nos termos de Boavida e Ponte (2002), houve dificuldades, por parte dos formadores, em “gerir a diferença” (p. 11).

No segundo semestre, o grupo decidiu modificar o tema matemático para frações, pois as professoras indicaram que esse seria um conteúdo a ser trabalhado com seus alunos. Tal mudança exigiu novos estudos e culminou em novas discussões.

Um dos textos usados para embasar os estudos sobre frações foi o de Lins e Silva (2006), que inspirou o grupo na construção da *Tarefa dos Canudos*, uma tarefa que solicitava aos estudantes que medissem objetos da sala utilizando apenas um canudo. Dos diferentes significados para os números racionais presentes na literatura (parte-todo, medida, quociente, razão e operador), Elias e Trevisan (2020) relatam que as professoras estavam acostumadas a introduzir os números racionais na forma de fração somente pelo seu significado de parte-todo (por meio das tradicionais pizzas e barras de chocolate), deixando de aproveitar as potencialidades de apresentar esses números por meio do significado de medida. A *Tarefa dos Canudos* explorava essa última ideia.

Assim, o planejamento de uma aula pautada na *Tarefa dos Canudos* foi realizado. Feito o convite às professoras para saber quem estaria disposta a ministrar a aula em sua turma de 4º ano para posterior análise no grupo, “[...] houve pouca aceitação e desvios de olhares. Tânia¹³, uma professora com pouca experiência em sala de aula, prontificou-se a desenvolvê-la.” (ELIAS; TREVISAN, 2020, p. 191). O Quadro 1 apresenta o enunciado da *Tarefa dos Canudos* trabalhada pela professora Tânia em sua turma de 4º ano.

Quadro 1 – *Tarefa dos Canudos*

- 1) Utilizando apenas um pedaço de canudo, escolha um objeto da sala e escreva sua medida.
- 2) O “pedacinho” é maior ou menor do que a metade do canudo?
- 3) Quantas vezes, aproximadamente, o “pedacinho” cabe no canudo?
- 4) A partir das observações feitas nas atividades anteriores, de que forma você poderia melhorar a escrita da medida do objeto escolhido?

Fonte: dados da pesquisa

¹³ Tânia é o nome fictício da professora participante do grupo de formação continuada no ano de 2018.

A aula foi realizada no dia 08 de outubro de 2018, uma segunda-feira de manhã. Para observar e gravar em áudio e em vídeo, estavam presentes um dos formadores e a estudante do PPGMAT. As demais professoras não participaram alegando que não teriam liberação em suas escolas para acompanhar a aula (ELIAS; TREVISAN, 2020).

O último encontro de 2018 foi destinado à análise coletiva da aula desenvolvida, mas somente a professora Tânia compareceu. Isso exigiu uma adaptação da dinâmica prevista para a análise da aula, que se tornou uma discussão mais pessoal, com a professora relatando suas percepções a respeito do desenvolvimento de sua aula. Nesse encontro, foi feita uma reformulação da tarefa e o planejamento de uma nova aula a ser desenvolvida, o que não ocorreu, pois a professora Tânia ficou doente no final de 2018 e não havia mais tempo para novo desenvolvimento da aula naquele ano (ELIAS; TREVISAN, 2020).

O grupo de 2018 foi finalizado dessa maneira, com uma aula planejada coletivamente, desenvolvida pela professora Tânia e analisada somente pelos professores formadores e a própria Tânia. Os imprevistos ocorridos ao longo dos encontros, bem como o abandono das professoras participantes no último encontro levaram os professores formadores a repensarem algumas ações para o ano seguinte.

A próxima subseção descreve o curso que ocorreu em 2019, contexto na qual ocorreu, efetivamente, a coleta de dados desta pesquisa.

3.1.2 O grupo de 2019 – o contexto da pesquisa

No ano de 2019, a proposta de formação continuada foi semelhante, mas o grupo de professoras participantes foi totalmente modificado. Novamente, o projeto contou com a contribuição da SME do município de Londrina. Diferentemente de 2018, a parceria se deu, apenas, na divulgação e no convite, por meio de *e-mail* disparado a todos os professores de 4º e 5º ano do Ensino Fundamental da rede municipal. Isso significa que a SME não indicou as escolas nem restringiu o dia da semana para a realização dos encontros. Dada essa liberdade, os professores formadores ampliaram o convite a professores que atuavam no 5º ano, não apenas professores do 4º ano, como ocorreu em 2018.

Nesse convite via *e-mail*, os professores formadores descreveram como seria o processo formativo (explicitando a proposta de Estudo de Aula). Após receberem o *e-mail* com as informações sobre o processo formativo, as professoras interessadas entraram em contato com os formadores (dessa vez sem intermediação da SME) e negociaram diretamente com as

diretoras de suas escolas a liberação de sua hora-atividade. Com isso, os professores formadores esperavam uma participação voluntária e que os interessados tivessem um breve conhecimento prévio da proposta de formação que estava sendo oferecida. A seção 4.1 do Capítulo 4 analisa o interesse manifestado pelas professoras participantes pela formação oferecida durante o primeiro encontro do grupo.

Um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) foi enviado anexo ao *e-mail*, informando que os dados produzidos no grupo poderiam ser objeto de análise em pesquisas. Assinar o TCLE não era uma condição necessária para fazer parte do processo formativo, porém todas as professoras integrantes aceitaram participar de pesquisas futuras, desde que mantendo o anonimato. Por isso, os nomes das professoras, neste texto, são todos fictícios.

Esse novo grupo contou com dois professores formadores (que também estavam em 2018), duas estudantes do PPGMAT (diferentes da participante de 2018, sendo uma delas a autora desta pesquisa. Ambas com experiências nos anos iniciais do Ensino Fundamental) e, inicialmente, 14 professoras do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental. Embora o Estudo de Aula preconize grupos pequenos de professoras (máximo de sete professoras), os formadores consideraram não ser conveniente dispensar as professoras que enviaram *e-mail* e demonstraram interesse em participar do processo formativo. A experiência de 2018 mostrou aos formadores que, em um grupo muito pequeno, caso algumas professoras faltem a um encontro ou desistam da formação, o planejamento pode ser prejudicado. O último encontro de 2018 foi um exemplo.

Como havia um número relativamente grande de integrantes, em um primeiro momento, a estratégia usada pelos formadores durante os encontros foi de sempre trabalhar em pequenos grupos (máximo de cinco professoras) e, em seguida, levar as discussões para uma plenária¹⁴, em que todas as professoras dos pequenos grupos compartilhavam suas ideias. Isso tornava as discussões mais produtivas e envolvia a todos.

A formação continuada em 2019 teve início em abril e término em novembro. Foram oito encontros presenciais, um por mês, sempre às quintas-feiras, das 13h30 às 17h30 na UTFPR-Londrina. Entre um encontro presencial e outro, os professores formadores solicitavam atividades não presenciais, com o objetivo de antecipar estudos, leituras ou ações, que seriam

¹⁴ Escolhemos a palavra Plenária como definição de “grande grupo”, pelo seu objetivo em reunir seus membros durante um determinado tempo para estudar, discutir e resolver certas questões. No grupo de formação, a plenária era o momento em que após as discussões das tarefas nos pequenos grupos, as professoras se reuniam para a discussão no coletivo, estreitando seus relacionamentos na colaboração, na troca de experiências uma com as outras e enriquecendo seu aprendizado.

realizados no próximo encontro presencial. Como os encontros presenciais eram muito espaçados (uma vez por mês), as atividades não presenciais¹⁵ também tinham a função de manter as professoras participantes envolvidas com o processo formativo. Essas atividades eram assíncronas e, geralmente, enviadas por *e-mail* ou pelo grupo de *WhatsApp*, e a devolutiva por parte das professoras era pelo mesmo meio.

A devolutiva era uma condição para o cômputo da carga horária de 14 horas em atividades não presenciais. Destacamos que as atividades não presenciais foram uma alternativa que os professores formadores encontraram para a ponderação da SME de que a liberação das professoras para a participação do processo formativo ocorresse somente uma vez por mês e não a cada 15 dias como solicitado.

Como Elias e Trevisan (2020, p. 194) relatam, em 2019, os professores formadores “decidiram mudar algumas condutas, sendo mais diretivos nas ações e buscando envolver o trabalho com a sala de aula das professoras o quanto antes, uma vez que essa estratégia foi considerada importante para engajá-las na proposta”. Se, por um lado, os professores formadores buscavam manter as decisões tomadas coletivamente (como o tema matemático a ser estudado, as tarefas matemáticas, os objetivos da aula planejada), por outro, os formadores já levavam algumas opções, ideias e propostas para essa tomada de decisão conjunta. Dessa maneira, em comparação a 2018, os formadores reinterpretaram a ideia de igualdade entre os membros do grupo, compreendendo que não significava uma igualdade absoluta entre eles, mas sim, que cada um dos participantes “tem de assumir um mínimo de protagonismo, não se reduzindo, por exemplo, o seu papel ao de um mero fornecedor de dados a outros participantes” (BOAVIDA; PONTE, 2002, p. 6).

Essa atitude mais diretiva parece ter colaborado para a realização do Estudo de Aula. Além dos encontros presenciais e das atividades não presenciais, ao longo do ano, foram realizadas duas aulas, em turmas de 5º ano, por duas professoras participantes, sempre seguidas por suas reflexões individuais. Dessa maneira, tínhamos a análise coletiva da aula, realizada no encontro presencial com o grupo de professoras, e as reflexões individuais, feitas pelas professoras no mesmo dia em que ministraram essas aulas.

¹⁵ Essas atividades assíncronas foram importantes para o desenvolvimento do processo formativo, no entanto, naquele ano de 2019, ainda não eram comuns esse tipo de atividades auxiliando em processos de Estudo de Aula. Nos dias atuais (em 2021), por conta da pandemia de Covid-19, as atividades assíncronas se tornaram mais comuns, mas no momento do processo formativo aqui analisado ainda não era uma prática. A Covid-19 é uma infecção respiratória aguda causada pelo coronavírus SARS-CoV-2, potencialmente grave, de elevada transmissibilidade e de distribuição global. Disponível: <https://www.gov.br/saude/pt-br/coronavirus>.

Diante disso, consideramos que, em 2019, o grupo conseguiu manifestar aspectos do trabalho colaborativo previsto no Estudo de Aula, a saber: o diálogo entre os membros, a negociação das decisões, o compartilhamento de ideias, experiências e expectativas, objetivos comuns com o processo formativo.

Nesta pesquisa, não estamos interessados em todos os momentos do processo formativo. Delimitamos nossa investigação no estudo de um ciclo completo do Estudo de Aula realizado por uma das professoras, aqui chamada de professora Maria.

Maria é professora do 5º ano de uma escola do município de Londrina. É formada em Licenciatura em Pedagogia, concluído no ano de 2012, e mestre na área da Educação, finalizado em 2014. Possui experiência com o ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Por já ter realizado um curso de mestrado, a professora estava familiarizada com a pesquisa acadêmica e já havia participado de outro processo formativo que também trabalhava na perspectiva do Estudo de Aula.

Embora a professora Maria tenha participado de todos os oito encontros realizados em 2019, é importante justificar a delimitação da pesquisa aos três primeiros encontros e não ao processo formativo todo. A primeira justificativa é que, por se tratar de uma dissertação de mestrado, com pouco tempo para a execução, não seria viável transcrever e analisar todos os dados produzidos ao longo do ano. A segunda justificativa é que a nossa intenção é investigar a mobilização dos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino de uma professora durante um ciclo completo de Estudo de Aula, isto é, durante o planejamento, a execução e a análise de uma aula. Também ressaltamos que a presente pesquisa está inserida em um projeto maior, com trabalhos que investigam outros momentos do mesmo processo formativo (GONÇALVES; RODRIGUES; ELIAS; TREVISAN, 2019; ELIAS; TREVISAN, 2020; ELIAS; GONÇALVES; RODRIGUES, 2021; ELIAS; RODRIGUES; GONÇALVEZ, 2021).

No Quadro 2, detalhamos todas as ações desenvolvidas nos primeiros quatro encontros de 2019, destacando, em cinza, aquelas que são objeto de análise neste trabalho.

Quadro 2 – Ações desenvolvidas no processo formativo de abril a julho de 2019

	Ações	Objetivos
Não presencial	Primeiro contato com a abordagem do Estudo de Aula. Foram sugeridos materiais de consulta e levantadas algumas questões sobre a abordagem	Primeiro contato (caso não tivessem) com a abordagem do Estudo de Aula.

	do Estudo de Aula ¹⁶ para serem respondidas e levadas no primeiro encontro.	
Primeiro encontro presencial. Dia 04-04-2019	Apresentação dos integrantes.	Conhecer os integrantes, os nomes das escolas em que trabalham e as turmas em que atuavam.
	Estudo de uma aula planejada na formação continuada proposta pelos mesmos professores em 2018 e desenvolvida por uma professora participante naquele ano.	Experienciar a abordagem do Estudo de Aula a partir de trechos da aula desenvolvida em 2018.
		Discutir a tarefa matemática (<i>Tarefa dos Canudos</i>) desenvolvida na aula estudada, cujo objetivo foi introduzir a necessidade do uso do número racional na forma fracionária pelo seu significado de medida.
Não presencial	Estudos prévios a respeito do Estudo de Aula: vídeo ¹⁷ e trechos do artigo de Ponte, Quaresma, Mata-Pereira e Baptista (2016).	Aprofundar o conhecimento a respeito do Estudo de Aula.
	Tarefas matemáticas envolvendo diferentes significados de número racional na forma fracionária, retiradas de Campos, Magina e Nunes (2006).	Levantar reflexões sobre significados de número racional na forma fracionária para além de parte-todo, como as ideias de quociente, razão e medida.
Segundo encontro presencial. Dia 02-05-2019	A partir das tarefas matemáticas deixadas para o momento não presencial, apresentação e discussão dos diferentes significados de número racional na forma fracionária.	Discutir os diferentes significados, bem como as ideias de comparação e equivalência de frações. Antecipar resoluções de estudantes ao resolver as tarefas matemáticas e promover formas de abordar dificuldades que estudantes podem apresentar.
Desenvolvimento da aula. Dia 14-05-2019	Gravação da aula desenvolvida pela professora Maria.	Filmar a aula para posterior estudo com o grupo.
Não presencial	Reflexão após a aula, realizada pela professora regente.	Proporcionar à professora um momento de reflexão sobre a aula, revisitando seu planejamento, comparando-o com o desenvolvimento da aula e pensando nas aulas futuras. Reflexões gravadas em áudio.
	Tarefas matemáticas envolvendo o Ensino Exploratório para explorar	Levantar reflexões sobre o planejamento de aulas na perspectiva do Ensino Exploratório.

¹⁶ II Congresso Internacional Envolvimento dos Alunos na Escola - João Pedro da Ponte (versão compacta). Link para acesso: <https://www.youtube.com/watch?v=NcsXG0npRLc&t=3s>. Acessado em: 28 de dezembro de 2020. Junto a esse vídeo, foram enviadas as perguntas: “a) Em que medida essa metodologia aproxima-se ou se afasta de outras propostas de formação continuada que você tenha vivenciado? b) Que potencialidades essa metodologia oferece? c) Que desafios ocorrem em seu desenvolvimento?”

¹⁷ II Congresso Internacional Envolvimento dos Alunos na Escola - João Pedro da Ponte (versão compacta). Link para acesso: <https://www.youtube.com/watch?v=NcsXG0npRLc&t=3s>. Acessado em: 28 de dezembro de 2020.

	diferentes significados de frações	
Terceiro encontro presencial. Dia 06-06-2019	Análise da aula desenvolvida pela professora Maria.	Analisar a aula desenvolvida pela professora Maria, proporcionando reflexões sobre aprendizagem dos alunos quanto à introdução das frações por meio do significado de medida.
Não presencial	A partir de 5 enunciados envolvendo diferentes significados, antecipar diferentes formas de pensar de seus alunos.	Trabalhar, com as professoras, a prática de antecipar formas de pensar dos estudantes e, também, os diferentes significados dos números racionais na forma fracionária.
	Realizar a leitura de um texto e assistir a um vídeo sobre o Ensino Exploratório (CANAVARRO, 2011).	Familiarizar as professoras com as cinco práticas para conduzir discussões matemáticas produtivas em sala de aula (antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões).
	Selecionar tarefas matemáticas sobre frações que sejam usuais em suas práticas docentes.	Conhecer tarefas matemáticas sobre frações que as professoras frequentemente utilizam com suas turmas.
Quarto encontro presencial. Dia 04/07/2019	Tarefas matemáticas envolvendo o Ensino Exploratório para explorar diferentes significados de frações.	Discutir uma tarefa matemática, a “Tarefa do Basquete”, com o objetivo de introduzir o significado de fração equivalente.
	Planejamento de uma nova aula com outra professora.	Discutir e planejar nova aula de matemática.
Desenvolvimento da aula. Dia 31-07-2019	Gravação da aula desenvolvida por uma das integrantes.	Filmar a aula para posterior estudo com o grupo.
Não presencial	Reflexão após a aula, realizada pela professora regente.	Proporcionar à professora um momento de reflexão sobre a aula para revisar seu planejamento, compará-lo com o desenvolvimento da aula e pensar nas aulas futuras.

Fonte: autoria própria (2021)

Considerando o objetivo da pesquisa, descrevemos com mais detalhes as ações destacadas, em cinza, no Quadro 2, pois se referem ao contexto de produção dos dados analisados.

O primeiro encontro começou com a apresentação de todos os integrantes do grupo para conhecer um pouco de cada um e de seus locais de trabalho. Foi criado um grupo no aplicativo *WhatsApp* visando facilitar a comunicação nos intervalos entre um encontro presencial e outro,

que seria, também, um meio de troca de informações e de maior aproximação do grupo, visto que os encontros presenciais aconteceriam apenas uma vez por mês.

As professoras chegaram para o primeiro encontro presencial já sabendo que a proposta seria pautada no Estudo de Aula e, como informado no Quadro 2, já haviam desenvolvido uma atividade não presencial que antecipava um estudo sobre essa metodologia.

Reconhecendo que a atividade não presencial era apenas uma introdução ao Estudo de Aula como proposta formativa e com o objetivo de tornar mais clara a abordagem a ser adotada, já no primeiro encontro, os professores formadores propuseram às professoras a experiência de realizar a análise da aula desenvolvida, no ano anterior, pela professora Tânia. Os professores formadores levaram trechos por eles selecionados e perguntas para nortear a discussão. É importante lembrar que a aula da professora Tânia foi pautada na *Tarefa dos Canudos*, que buscava trabalhar a necessidade da criação de números entre 0 e 1, partindo de ideias fundamentais, como metade, metade da metade e terça parte, conduzindo-os às formas de representar frações usuais, tais que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Como já afirmamos anteriormente, com a *Tarefa dos Canudos*, a proposta era introduzir os números racionais na forma de fração por meio do seu significado de medida.

Após a análise de trechos da aula desenvolvida pela professora Tânia, ainda no primeiro encontro de 2019, as professoras participantes, junto com os professores formadores, decidiram que o tema frações e a *Tarefa dos Canudos* seriam, novamente, usados para planejamento, desenvolvimento e análise de uma nova aula, que seria, dessa vez, ministrada por uma daquelas professoras.

Tomadas essas decisões, o segundo encontro presencial procurou aprofundar as discussões já iniciadas no primeiro encontro, buscando refinar a tarefa a ser usada e o planejamento da aula como um todo. Para tanto, foram realizadas discussões dos diferentes significados dos números racionais na forma fracionária (parte-todo, quociente, medida, número e operador multiplicativo), fazendo uso das tarefas matemáticas apresentadas por Campos, Magina e Nunes (2006). As autoras apresentam as frações em situações em que é possível refletir sobre esses diferentes significados.

Na fração como significado parte-todo, a ideia presente está na partição do todo, podendo ser em quantidades contínuas ou discretas, em n partes iguais, onde cada parte pode ser representada por $\frac{1}{n}$. Na fração como quociente, a perspectiva presente está na estratégia da divisão, sendo duas variáveis em que uma correspondente ao numerador e outra ao denominador. Frações como medida assumem que algumas medidas envolvem frações porque

“se referem a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis” (CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006, p. 127). Na fração com significado de número, assim como números inteiros, não se referem a quantidades específicas. A fração como operador multiplicativo é vista como valor escalar aplicado a uma quantidade, ou seja, o número é um multiplicador da quantidade indicada (CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006).

Junto a isso, foram trabalhadas com as professoras as práticas para orquestrar discussões matemáticas produtivas (STEIN *et al.*, 2008): antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões.

Ainda nesse segundo encontro, foi perguntado às professoras participantes se alguma delas aceitaria desenvolver a *Tarefa dos Canudos* com sua turma para que um novo estudo de aula fosse realizado. Foi, então, que a professora Maria, foco desta pesquisa, prontificou-se a desenvolvê-la com sua turma de 5º ano.

Após se prontificar, a professora Maria propôs fazer ajustes no enunciado a partir das discussões feitas no grupo e de sua forma de pensar. O grupo referendou e colaborou com os ajustes apontados pela professora Maria. No entanto, a versão final da *Tarefa dos Canudos* foi elaborada pela própria professora Maria em seu planejamento de aula, o que faz, habitualmente, em seu trabalho. Em seguida, enviou, por *e-mail*, esse planejamento aos dois professores formadores, que validaram a versão. Os detalhes que levaram à alteração do enunciado estão descritos em nossas análises, no Capítulo 4. A aula desenvolvida por Maria aconteceu no dia 14 de maio de 2019, em uma terça-feira de manhã. Um dos professores formadores esteve presente para observar e gravar, em áudio e em vídeo, seu desenvolvimento. Ao todo, foram, aproximadamente, 140 minutos de aula envolvendo a *Tarefa dos Canudos*. Após a aula desenvolvida pela professora, os professores formadores enviaram a ela, por *e-mail*, um roteiro com oito perguntas para nortear sua reflexão pós-aula. Maria poderia falar da maneira como quisesse, não precisaria ficar presa às perguntas. A sugestão feita pelos formadores era que essa reflexão fosse enviada por áudio de *WhatsApp* a um deles. Na noite daquele mesmo dia, a professora Maria enviou a reflexão individual sobre a aula realizada.

No dia 06 de junho, no terceiro encontro, foi realizada reflexão, com todo o grupo de professoras, da aula da professora Maria. Assim como no primeiro encontro, os professores formadores levaram trechos da aula e algumas perguntas para orientar a discussão.

Com essa descrição dos momentos que foram nosso foco de análise, passamos agora a detalhar os procedimentos para a organização e a análise dos dados.

3.2 PROCEDIMENTOS PARA A ORGANIZAÇÃO E A ANÁLISE DOS DADOS

Como afirmamos, os dados analisados nesta pesquisa foram produzidos no primeiro, segundo e terceiro encontros, na aula desenvolvida pela professora Maria e na reflexão individual feita por essa mesma professora. Visando esclarecer o que foi apresentado na seção 3.1 e para tornar mais explícito o que, de fato, foi objeto de análise na pesquisa, apresentamos o Quadro 3, que sintetiza essas informações.

Quadro 3 – Síntese das ações que são foco de análise na pesquisa

Etapas do Estudo de Aula	Momento do processo formativo	Objetivo	Foco da análise
Planejamento coletivo de uma aula.	Primeiro encontro presencial.	Identificar indícios de engajamento das professoras participantes com a proposta do Estudo de Aula como contexto formativo.	Todas as professoras participantes, mas dando destaque à professora Maria.
		Identificar manifestações dos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino durante as discussões coletivas para o estudo e planejamento da aula.	Professora Maria, no contexto das discussões com os demais integrantes.
	Segundo encontro presencial.	Identificar manifestações dos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino durante as discussões coletivas para o estudo e planejamento da aula.	Professora Maria, no contexto das discussões com os demais integrantes.
Desenvolvimento da aula pela professora Maria em sua turma de 5º ano.	Desenvolvimento da aula na escola em que a professora trabalha.	Identificar manifestações dos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino durante o desenvolvimento da aula e na interação com os alunos do 5º ano.	Professora Maria, no contexto das discussões com os seus alunos.
Reflexão e análise após a aula desenvolvida pela professora Maria.	Atividade não presencial, realizada no mesmo dia da aula desenvolvida.	Identificar manifestações dos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino durante a reflexão individual sobre a aula.	Professora Maria.
	Terceiro encontro presencial.	Identificar manifestações dos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino durante a análise coletiva sobre a aula ministrada.	Professora Maria, no contexto das discussões com os demais integrantes.

Fonte: autoria própria (2021)

Nos encontros presenciais do grupo, a dinâmica era sempre muito parecida: um momento de discussão em pequenos grupos e, após, um momento de discussão em plenária. Esses momentos (nos pequenos grupos e na plenária) foram gravados em áudio e vídeo. No entanto, como nosso foco está nas manifestações dos subdomínios do Conhecimento

Matemático para o Ensino da professora Maria durante um ciclo de Estudo de Aula, transcrevemos e analisamos somente os áudios dos pequenos grupos que ela integrava em cada encontro. No caso das plenárias, demos atenção aos instantes em que a professora Maria participou mais ativamente das discussões.

No primeiro e segundo encontros, ainda não havíamos decidido que esta pesquisa investigaria, especificamente, essa professora, o que ocorreu somente quando ela se disponibilizou a desenvolver a aula planejada, coletivamente, com sua turma. Por isso, apenas no terceiro encontro a pesquisadora, autora desta dissertação, intencionalmente, passou a fazer parte do pequeno grupo de que a professora Maria fazia parte.

Dessa maneira, além das transcrições desses áudios e vídeos, há, também, dados oriundos das anotações feitas pela pesquisadora – observadora participante – durante os encontros e de produções escritas das professoras resultantes das atividades propostas pelos professores formadores.

Como já informamos, a aula e a reflexão individual da professora Maria foram gravadas (a aula, em vídeo e áudio; a reflexão individual, em áudio), e as respectivas transcrições submetidas a procedimentos analíticos.

A análise dos dados será de caráter descritivo e interpretativo, buscando identificar e analisar, com a maior riqueza de detalhes possível, os “eventos críticos” (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004). Segundo Powell, Francisco e Maher (2004), um “evento é crítico em sua relação a uma questão particular perseguida pela pesquisa” (p. 22), o que ocorre, por exemplo, quando no contexto de uma aula de Matemática alguns estudantes “apresentam uma explicação matemática ou argumento, pode ser significativa para uma questão de pesquisa preocupada com a construção de justificativa matemática ou demonstração pelos estudantes e, como tal, pode ser identificada com um evento crítico” (p. 22-23). Em nosso caso, no contexto de um processo formativo e considerando nosso foco de pesquisa, um evento foi considerado “crítico” na medida em que percebemos manifestações dos subdomínios do Conhecimento Matemático no Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) pela professora Maria, em cada um dos momentos aqui analisados (Quadro 4).

Ainda de acordo com Powell, Francisco e Maher (2004, p. 23),

Eventos críticos não são apenas identificados nas gravações de vídeo. Os pesquisadores podem encontrar eventos críticos fora do vídeo, em materiais como as anotações dos estudantes ou nas proposições escritas em um diário do estudante. Mais tarde, os pesquisadores podem revisar as gravações de vídeo para localizar eventos anteriores que explicam o evento crítico identificado.

Dessa maneira, as anotações feitas pela pesquisadora durante os encontros e as produções escritas das professoras resultantes das atividades propostas pelos professores formadores colaboraram para identificar os eventos críticos. A cada evento crítico identificado e submetido à análise, demos o nome de *Episódio*, seguido por uma numeração: *Episódio 1*, *Episódio 2* e assim por diante.

Esses *Episódios* trazem dados de uma etapa específica do Estudo de Aula (planejamento, desenvolvimento da aula ou análises individual e coletiva) ou mesclam dados dessas diferentes etapas, pois há eventos críticos que reverberaram em diferentes momentos. Por isso, para fins de organização e para dar mais clareza às nossas análises com base nas falas dos envolvidos, utilizamos códigos para cada fala de um diálogo.

Esses códigos são compostos por duas letras sucedidas por um número. A primeira letra indica se a fala foi pronunciada no primeiro (P), segundo (S) ou terceiro (T) encontro, se foi durante a aula (A) desenvolvida ou se foi na reflexão individual (R) da professora Maria. A segunda letra (A, B, C, D, ...) indica que o trecho¹⁸ faz parte de um mesmo diálogo e leva em conta a ordem cronológica dos fatos. O número indica a sequência dentro de um mesmo diálogo. Por exemplo, o código SB2 indica uma fala que ocorreu em um diálogo no segundo encontro, mas esse diálogo ocorreu depois da fala SA5, também no segundo encontro. Já as falas TA3 e TA7 aconteceram no mesmo dia (terceiro encontro), no mesmo diálogo (diálogo A), mas a fala TA3 foi feita antes de TA7.

O Quadro 4 apresenta como os códigos, letras e números foram utilizados em cada episódio para organizar os diálogos, indicando em que momento do ciclo de Estudo de Aula o Conhecimento Matemático para o Ensino foi manifestado pela professora Maria.

Quadro 4 – Síntese das manifestações do Conhecimento Matemático para o Ensino da professora Maria evidenciado nos diálogos

Manifestações do Conhecimento Matemático para o Ensino da professora Maria	Etapas do Estudo de Aula	Códigos, letras e números dos diálogos usados na transcrição
<i>Episódio 1</i>	Planejamento	(PA1); (PB1); (PR1-PR4); (SA1-SA8).
<i>Episódio 2</i>	Planejamento	(PC1-PC26); (AD23-AD36);
<i>Episódio 3</i>	Planejamento	(SB1-SB10); (SE1-SE16).
<i>Episódio 4</i>	Planejamento	(SC1-SC4);

¹⁸ Todos os trechos dos diálogos foram transcritos exatamente como os participantes falaram.

		(SD1-SD7); (SF1-SF14).
<i>Episódio 5</i>	Desenvolvimento da Aula	(AA1-AA10); (TA1-TA6).
<i>Episódio 6</i>	Desenvolvimento da Aula	(AB1-AB2); (AC1-AC16); (AD1-AD23); (RA1); (RC1); (TC1-TC12).
<i>Episódio 7</i>	Desenvolvimento da Aula	(AE1-AE21); (RD1); (TE1-TE12); (TF1-TF10).
<i>Episódio 8</i>	Desenvolvimento da Aula	(AF1-AF60); (PC1-PC10); (RE1); (TG1-TG14); (TH1-TH9).
<i>Episódio 9</i>	Reflexão e Análise da Aula coletiva e individual	(TD1-TD6); (RA2); (RB1- RB2); (RE1); (RF1); (RG1); (RH1).

Fonte: autoria própria (2021)

Após identificar os subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino mobilizados pela professora Maria durante o ciclo de Estudo de Aula, analisamos quais subdomínios se manifestam em cada etapa do ciclo. (i) Na etapa planejamento que envolveu os quatro primeiros episódios dos dois primeiros encontros, analisamos as discussões que aconteceram nos pequenos grupos e em plenária onde foi possível identificar a contribuição da professora Maria com as demais professoras. (ii) No desenvolvimento da aula entre o segundo e o terceiro encontros, analisamos o direcionamento dado pela professora aos alunos, nas questões que surgiram e na busca em superar suas dificuldades de aprendizagem. (iii) Na reflexão individual, identificamos nos fatos relatados pela professora após desenvolver a aula, as contribuições que o Estudo de Aula proporcionou na introdução do conteúdo e uma possível mudança da sua prática. Na análise coletiva da aula gravada em vídeo, analisamos as discussões que surgiram e as contribuições das demais professoras quanto as ações da professora Maria no desenvolvimento de sua aula.

Antes de finalizar o capítulo, consideramos importante destacar que há algumas ponderações a serem feitas sobre o processo formativo pautado no Estudo de Aula. Por exemplo, podemos ponderar a pouca quantidade de encontros destinados ao planejamento da aula desenvolvida pela professora Maria, o pouco tempo de trabalho com a *Tarefa dos Canudos*, o não envolvimento de mais professores no dia de desenvolvimento da aula da professora Maria etc. Essas questões dizem respeito ao contexto da pesquisa e às decisões tomadas pelos professores formadores. Como nos apresentam Elias e Trevisan (2020), a experiência de 2018 levou os professores formadores a buscarem envolver mais rapidamente a sala de aula das professoras em 2019, o que explica o pouco tempo destinado ao planejamento. Com relação ao não envolvimento das demais professoras no dia do desenvolvimento da aula da professora Maria, Elias e Trevisan (2020, p 192) justificam:

Embora o Estudo de Aula preconize a participação de mais observadores, havia a dificuldade de conciliar com os horários de trabalho das demais professoras e, além disso, havia o receio dos formadores em sugerir essa observação com mais de uma pessoa, fazendo com que a professora se sentisse constrangida e até mesmo desistisse de desenvolver a aula.

Cientes dessas ponderações, a presente pesquisa visa analisar o que aconteceu e de que maneira o que aconteceu, apesar dessas limitações, oportunizou a mobilização de diferentes subdomínios do conhecimento matemático para o ensino da professora Maria, considerando a forma como o processo do Estudo de Aula foi conduzido.

3.2.1 A elaboração das TAP (Produto Educacional)

Antes de passarmos para o Capítulo 4, referente às análises, vamos descrever os procedimentos metodológicos para a elaboração das TAP que compõem o produto educacional associado a essa pesquisa, lembrando que o objetivo do conjunto de TAP é promover discussões matemáticas e didático-pedagógicas com vistas a mobilizar subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino.

De acordo com Smith (2001), as TAP são elaboradas a partir de *amostras autênticas da prática*, isto é, materiais obtidos de situações reais que envolvem o trabalho docente, tais como: tarefas matemáticas utilizadas por professores, diálogos entre estudantes e professor em sala de aula, protocolos de resolução de estudantes, planejamentos de aula feito pelo professor. Esses materiais possuem potencial para auxiliar os professores a desenvolverem compreensões a respeito de um conteúdo específico, questões pedagógicas ou, ainda, conhecimentos sobre a aprendizagem dos estudantes (SMITH, 2001).

Smith (2001) comenta que essas *amostras autênticas da prática* não são auto-organizadas, mas fornecem a matéria-prima em torno da qual uma TAP pode ser concebida. Isso significa que as *amostras autênticas da prática* precisam ser organizadas de acordo com determinado objetivo a fim de se tornarem TAP e fazerem parte de um currículo para a formação de professores. Para a autora, uma maneira de delinear uma TAP é considerar o conjunto de ações que comumente envolve o trabalho docente. Em nosso caso, esse conjunto de ações envolve as etapas do ciclo de Estudo de Aulas: planejamento, desenvolvimento e análise de uma aula.

A autora exemplifica alguns tipos de TAP que poderiam ser utilizadas com um grupo de professores. Esses professores podem começar analisando as tarefas matemáticas que foram

usadas durante o ensino e responder a perguntas como: *Que oportunidades para aprender matemática são oferecidas pela tarefa? Que conhecimentos prévios os alunos precisam para participar da tarefa com sucesso? Como você esperaria que os alunos resolvessem a tarefa?* Em seguida, podem assistir ao vídeo da aula e analisar o ambiente de aprendizagem: *Que decisões tomou o professor durante o curso da aula? Que decisões foram tomadas pelos alunos? Quem fez as perguntas? Qual era a natureza das perguntas feitas pelos alunos? E pelo professor?* Os professores podem, ainda, analisar o que os alunos parecem estar aprendendo e como eles aprenderam: *Com quais ideias matemáticas os estudantes estavam lidando? Que fatores pareciam apoiar o envolvimento dos estudantes na atividade matemática? Que fator parece atrapalhar tal engajamento?* A discussão pode ser concluída com o planejamento da próxima aula: *Qual seria o objetivo matemático da instrução na próxima aula? Que conhecimentos os alunos demonstraram que servirá de base para a construção de novos conhecimentos? Que tarefa completaria o objetivo de aprendizagem?* (SMITH, 2001).

Com base no que foi proposto por Smith (2001) em seus exemplos de TAP e na análise dos dados que será detalhada no próximo capítulo, selecionamos e organizamos algumas *amostras autênticas da prática* produzidas ao longo dos *Episódios* aqui analisados e elaboramos perguntas para promover discussões e reflexões entre professores em formação que estejam fazendo uso das TAP propostas. Ressaltamos que as TAP organizadas por meio das *amostras autênticas*, emergem da reflexão da pesquisadora e seu orientador a partir da análise dos dados. Para as escolhas das *amostras autênticas da prática*, demos preferência àquelas que envolviam alguma das seguintes características: i) tarefas matemáticas de natureza exploratória, isto é, uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos (PONTE, 2014, p. 21); ii) diálogos (entre as professoras no grupo, entre as professoras e professores formadores no grupo, entre a professora e os estudantes durante a aula desenvolvida) que explicitassem a mobilização de aspectos do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) e iii) produções escritas de estudantes com potencial para gerar discussões matemáticas.

4. ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, com base nos dados produzidos ao longo dos encontros (Quadro 1), analisamos 9 *Episódios* relevantes que nos possibilitaram *identificar e analisar os subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino mobilizados por uma professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental durante um ciclo de Estudo de Aula*.

Esses *Episódios* trazem dados de uma etapa específica do Estudo de Aula (planejamento, desenvolvimento da aula ou análises individual e coletiva) ou mesclam dados dessas diferentes etapas, pois há eventos críticos que reverberaram em diferentes momentos. A nomeação do rótulo de cada *Episódio* se deu conforme os diálogos foram sendo apresentados com palavras-chave importantes para facilitar a reflexão.

Dividimos este capítulo em seções de modo que cada uma delas represente a análise de um episódio relevante das manifestações do Conhecimento Matemático para o Ensino, pela professora Maria.

4.1 *Episódio 1*: o início do processo formativo e engajamento da professora Maria

Já mencionamos que a condução do grupo em 2019 foi influenciada pela experiência vivenciada no ano anterior. Comentamos também a tentativa dos professores formadores de informarem, logo no convite feito às professoras, que a proposta do processo formativo seria pautada nos Estudos de Aula. Ao enviarem o *e-mail* às professoras convidando-as, os professores formadores fizeram uma breve descrição de como seria a dinâmica do processo formativo e indicaram um trecho de um vídeo sobre o Estudo de Aula, apresentado no II Congresso Internacional Envolvimento dos Alunos na Escola por João Pedro da Ponte.

Assim, esse primeiro episódio diz respeito à tentativa dos professores formadores de apresentar às professoras participantes a abordagem do Estudo de Aula, buscando engajá-las na proposta de formação. Em nossa análise desse episódio, utilizamos dados tanto do primeiro (P) quanto do segundo encontros (S).

No primeiro encontro do grupo formativo, os professores formadores se apresentaram e explicaram, rapidamente, a proposta da formação continuada. As professoras participantes também se apresentaram, informando em que escolas trabalhavam e as turmas em que atuavam.

Realizadas as apresentações, os professores formadores retomaram o *e-mail* que indicava o vídeo explicando, brevemente, a abordagem do Estudo de Aula. Foi reforçado, também, que os encontros seriam gravados em áudio e vídeo. Nesse dia, porém, não houve

gravação em vídeo, somente em áudio, para que as professoras fossem se acostumando aos poucos com a ideia de serem observadas e se sentissem mais à vontade para emitir opiniões no primeiro dia.

Feitas as apresentações e explicações, as professoras reuniram-se em pequenos grupos, para que pudessem trabalhar com a *Tarefa dos Canudos* (Quadro 5), adaptada do formato utilizado pela professora Tânia em sua turma de 4º ano, em 2018 (Quadro 1).

Quadro 5 – *Tarefa dos Canudos* apresentada às professoras em 2019

1. Utilizando apenas um pedaço de canudo, escolha um objeto da sala e escreva sua medida.
2. Se, no processo de medir o objeto, o canudo couber um número inteiro de vezes, então troque de objeto, de modo que precise utilizar um “pedacinho” do canudo no registro da medida.
 - a) O “pedacinho” que você utilizou é maior ou menor do que a metade do canudo?
 - b) O pedacinho é menor ou maior do que a terça parte do canudo? O que é terça parte do canudo?
3. Quantas vezes, aproximadamente, o “pedacinho” cabe no canudo?
4. A partir das observações feitas nas atividades anteriores, de que forma você poderia melhorar a escrita da medida do objeto escolhido?

Fonte: dados da pesquisa

Inicialmente, cada grupo recebeu um canudo, junto com a primeira questão da tarefa, e o Professor Formador 1 deu a seguinte orientação:

(PA1) Professor Formador 1: *Qual é a primeira tarefa de vocês? Vocês receberam um canudo. Eu quero que vocês pensem nessa primeira tarefa. Alguns minutinhos para vocês realizarem essa primeira tarefa, conforme vocês interpretarem ela.*

A partir desse momento, as professoras começaram as discussões nos pequenos grupos. A intenção dos professores formadores era que compreendessem a tarefa, vivenciando-a como se fossem os próprios alunos.

Reiteramos que o objetivo principal, nesse primeiro encontro, era que as professoras compreendessem a abordagem do Estudo de Aula. Por isso, após vivenciarem o desenvolvimento da *Tarefa dos Canudos*, os professores formadores passaram para a próxima etapa: analisar a aula desenvolvida pela professora Tânia. Foi então que o Professor Formador 1 interveio:

(PB1) Professor Formador 1: *Meninas, seguinte, essa tarefa que vocês trabalharam foi construída no projeto do ano passado. De algum modo, a gente começou, ano passado, levantando alguns conteúdos matemáticos que o grupo gostaria de aprofundar, pois percebia muitas dificuldades nos alunos ou gostaria de uma maneira diferente de trabalhar aquele conceito. Então, no primeiro semestre surgiu como foco olhar a questão da operação da divisão. Isso caminhou para o segundo semestre com a questão da fração, que era um outro tema que o grupo do ano passado demonstrou interesse. E aí a partir de vários encontros, a*

gente trouxe para estudar a proposta de elaborar uma aula que servisse como uma aula para introduzir fração. A aula foi planejada para um 4º ano e ela foi discutida pelo grupo com as professoras que estavam participando, ajudaram a elaborar essa tarefa e aí a gente fez o planejamento de uma aula e essa aula foi desenvolvida pela professora Tânia, numa turma de 4º ano. [...] Então a gente vai passar para vocês um trecho da tarefa desenvolvida nessa turma em que a professora conduz a tarefa com seus alunos, similar como fizemos com vocês, entregando pedaços da tarefa e deixando os alunos em equipe discutindo um pouquinho. Nesse momento, a gente gostaria que vocês observassem a introdução da tarefa. A gente vai colocar uma primeira vez para vocês perceberem o que está acontecendo e aí depois vou voltar duas questões e depois a gente volta o vídeo de novo para vocês terem um pouco mais de foco no que a gente quer que vocês observem.

As discussões continuaram nos pequenos grupos e, também, em plenária. Neste episódio, ainda não vamos entrar em análises mais consistentes envolvendo os subdomínios do MKT manifestados pela professora Maria. Pretendemos, apenas, explicitar como o grupo foi se constituindo, de que maneira os professores formadores introduziram a proposta para as professoras participantes e, principalmente, como elas reagiram. Para isso, consideramos ilustrativa a fala de uma das professoras, aqui chamada de Mariana, quando pede a palavra ao final do primeiro encontro. Na sequência, vêm as falas dos professores formadores e da professora Ana.

(PR1) Mariana: *Posso só levantar uma questão? Eu achei muito legal a proposta de vocês, enquanto universidade. Chamar a gente aqui para discutir o nosso trabalho. Porque assim, a gente percebe que muitas vezes quando a gente vai numa pós, que existe tanta crítica do que acontece na nossa sala de aula, e eu sempre falo assim: “mas esses professores que estão lá universidade, esquecem que quem está aqui, são alunos deles, que nós passamos por lá, né?”. Porque que existe um abismo, muitas vezes, entre o que tem na universidade, o sonho, e a realidade como a coisa acontece. Eu acho legal vocês falarem assim “vamos trazer esse pessoal aqui e vamos ver o que está próximo e o que está distante e vamos buscar aproximar isso”. Porque quem tá lá, na prática vivenciando, muitas vezes é tão criticado, tão apedrejado, né gente? [...] e cada vez que aparece uma pesquisa, a gente fala assim: “vamos mudar tudo, vamos mudar! Vamos fazer porque a gente quer mudar esse repertório também”. A gente quer aproximar cada vez mais as teorias, o que a gente lê, as discussões com a nossa prática. [...] Então assim, achei muito legal, eu falei “gente é uma oportunidade da gente ir pra dentro da faculdade e levar a nossa realidade, vamos, né?”. Eles precisam conhecer nossas dificuldades. [...] Então eu acho muito bacana essa proposta de vocês por trazer a gente, por querer nos ouvir, por querer saber o que acontece lá e por levar esse material como pesquisa [...].*

(PR2) Professor Formador 2: *[...] Então, a nossa proposta nessa formação continuada é realmente aproximar a universidade e a escola. Essa é nossa ideia, que bom que vocês entendem e concordam com essa dinâmica.*

(PR3) Professor Formador 1: *Se vocês já estão aqui, de alguma forma, esse movimento é de buscar alguma coisa diferente.*

(PR4) Ana: *É porque, na verdade, a mudança vem assim... ela vem imposta. Vocês estão oferecendo para a gente um caminho nessa mudança que tá junto. Aliás vocês já estão antes disto. Mas, pra nós que temos que estar mudando constantemente, vocês estão oferecendo pra gente um caminho que normalmente não tem, né? A gente tem que descobrir sozinha. A gente vai apoiar, apoiar, apoiar, infelizmente o aluno muitas vezes virou uma experiência, que você comete muitos erros até achar um acerto. Agora, aqui a gente está tendo uma oportunidade de vivenciar a proposta que se encaixa com o que está vindo agora [referindo-se à BNCC].*

É interessante trazer essas falas das professoras, porque, nesse primeiro contato com o grupo, elas perceberam que a formação que estava sendo proposta seria diferente de outras formações que, possivelmente, já haviam experimentado, demonstrando alguma motivação e interesse, como pode ser percebido em algumas de suas colocações.

Quando a professora Mariana manifesta, em PR1, ter gostado da proposta do processo formativo, percebemos o quanto valoriza o convite para estar na universidade e contribuir com sua prática docente com os demais professores envolvidos.

A motivação revelada pelas professoras Mariana e Ana, já no primeiro encontro, é um indicativo de que esse grupo teria um engajamento com a proposta de formação, manifestando certa valorização da colaboração profissional, “com consequências positivas para o desenvolvimento profissional dos professores envolvidos” (BAPTISTA; PONTE; VELEZ; COSTA, 2014, p. 85). Valorizar o que o profissional tem a contribuir, dar voz ao professor para ele emitir opiniões e não apresentar uma formação com receitas “prontas”, como podemos observar na fala complementada pela professora Ana, em PR4, é importante.

Ponte (1998, p. 1) disserta sobre a formação inicial e a “carência” que os professores têm por uma formação contínua, reconhecendo a necessidade do professor de “refletir sobre a sua própria experiência e estudar e aprofundar outras para as quais se sintam motivado”. Assim, como no primeiro encontro, o segundo encontro também contou com um momento para debater o Estudo de Aula (Quadro 1), tendo sido precedido por uma atividade não presencial que solicitava o estudo prévio de um texto e de um vídeo sobre essa temática. Aproveitando esse estudo prévio, o segundo encontro iniciou-se com uma discussão, em plenária, dos estudos realizados na atividade não presencial.

Apesar de terem pouco contato com a metodologia, as professoras demonstraram interesse em conhecê-la um pouco mais, e o debate transcorreu num ambiente agradável, com a exposição de suas primeiras impressões sobre a proposta. Para ilustrar, destacamos um diálogo em que há uma intervenção da professora Maria.

(SA1) Professor Formador 1: *Como é que vocês, de algum modo, encararam a ideia de colocar em prática esses textos? Porque o texto e o vídeo sugerem que, de algum modo, envolve a questão de se predispor a ser observado. Como é que vocês lidam com essa possibilidade?*

(SA2) Celina: *De certa forma, não é muito tranquilo não. Eu creio, assim, que é algo que você precisa trabalhar [...] de certa forma a gente tem uma barreira que tem que quebrar, não é fácil...*

(SA3) Professor Formador 1: *Sair da zona de conforto.*

(SA4) Celina: *Exatamente!*

(SA5) Sônia: *Mas aí eu já acho que essa metodologia que vocês estão mostrando pra gente, o Estudo de Aula, ela tira um pouco esse foco, porque, se realmente a gente planejar uma aula, fizer tudo junto, eu acho que tem que ser professores do mesmo ano, com as mesmas*

dificuldades [...] Se for com essa visão: olha, nós vamos preparar, vamos sentar, o que vamos fazer? É tarefa? O que vamos pedir disso? Uma coisa que foi feita pensando em conjunto.

(SA6) Maria: *Historicamente, o fazer docente é um trabalho bem individual, né? Então, chegar outro de fora causa incômodo. Mas, se esse professor que vai ser observado está no grupo, ele entende a proposta, [...] ele estaria muito mais aberto a receber, todo mundo vai dar conta no sentido de melhorar. Agora eu acho que a maior resistência é quando uma pessoa que não tem nada a ver com o grupo, vem um pesquisador de fora, entra na sua aula, coleta seus dados, vai embora e o professor nem sabe, né? E fica aquela: o que será que vão falar da minha aula?*

(SA7) Sônia: *Aqui o foco é: melhorou? Com essa aula meu aluno aprendeu? O que você acha daquela hora que eu falei isso? O que eu poderia ter falado? É que nem fala aqui [mostrando o texto lido], se não tiver colaboração aí também não tem o porquê né?*

(SA8) Professor Formador 2: *Uma fala que a Maria fez do historicamente essa produção é individual do professor, uma consequência que se espera, e quem trabalha com Estudo de Aula tem percebido, é essa passagem do planejamento individual para o coletivo dentro da própria escola. Aqui nós temos professoras que trabalham na mesma escola e às vezes você carrega isso pra dentro da sua escola, acaba sendo mais esse processo de fazer o planejamento no coletivo. E uma coisa que a gente tem visto é que quanto mais preparado a gente está, mais planejada nossa aula está, com mais segurança a gente vai pra sala de aula de modo a permitir que os alunos tenham liberdade de criar. [...] Porque a gente antecipou situações que possam acontecer, não tudo, não tem como prever tudo, mas tentar ao máximo antecipar as coisas que possam vir acontecer.*

O texto mencionado pelo *Professor Formador 1* é o trabalho de Ponte, Quaresma, Mata-Pereira e Baptista (2016). Na fala das professoras, fica evidente que elas valorizam o trabalho em conjunto, feito em colaboração. Em SA6, Maria reconhece que, historicamente, o trabalho do professor é individual. Esse aspecto é destacado por Bezerra (2017), quando a autora fala do “isolamento dos professores causado por uma cultura do individualismo em nossas escolas” (p.33). Isso acaba sendo um empecilho para o trabalho colaborativo por meio do Estudo de Aula.

Nesse sentido, para participar de um processo formativo que trabalha com Estudo de Aula, pressupõe-se que o professor supere essa cultura do fazer um trabalho “individual”, abrindo as portas da sua sala de aula, permitindo que a aula seja gravada e, posteriormente, estudada. Maria sugere que isso se torna mais fácil quando o observador da aula é um integrante de um grupo ao qual a professora pertence, não um pesquisador que “*coleta seus dados, vai embora e o professor nem sabe*” o que vão dizer.

Na discussão em plenária dos diálogos transcritos acima, as professoras pareceram reconhecer essa situação e, de algum modo, manifestaram a valorização da colaboração e o sentido de grupo, que, nesse momento, estava nascendo e sendo fortalecido, o que pode ser identificado na fala da professora Sônia, em SA5.

4.2 Episódio 2: o “pedacinho”

A *Tarefa dos Canudos* tinha a intenção de discutir com os alunos situações em que os números inteiros positivos já não são mais suficientes para responder a uma medida de um objeto qualquer da sala que tomava o canudo como unidade de medida e exigia o uso de expressões como “pedacinho” para representar partes do canudo que eram menores que o inteiro. Assim, ao ser explorada a *Tarefa dos Canudos* pelas professoras, percebeu-se que os dados obtidos no primeiro encontro (P), de certa forma, influenciaram a aula desenvolvida (A) pela professora.

Como mencionado no *Episódio 1*, essa tarefa foi objeto de discussão no primeiro encontro. Em determinado momento do debate, os professores formadores quiseram verificar se as professoras reconheciam o pedacinho como parte essencial para a apropriação da ideia de número racional na forma fracionária naquele contexto. Este episódio¹⁹ identifica os subdomínios do MKT revelados pela professora Maria nos diálogos que envolvem o uso do termo “pedacinho”.

As falas a seguir mostram como foi conduzido esse momento introdutório, durante a discussão na plenária.

(PC1) Professor Formador 1: *Pensando na tarefa matemática que foi a primeira que vocês desenvolveram. Ela foi apresentada para vocês praticamente como foi entregue para os alunos da turma da Tânia e que ela foi organizada aqui no grupo do ano passado [Leu a tarefa para as professoras]. Não tinha esse enunciado que dizia se o objeto couber um número inteiro de vezes era pra trocar, mas foi algo que nos ocorreu que poderia acontecer. Por que vocês acham que a gente pediu para trocar se coubesse um número inteiro de vezes o canudo?*

(PC2) Ana: *Foi depois da experiência ou antes?*

(PC3) Professor Formador 1: *Foi planejando para vocês.*

(PC4) Ana: *Assim como os alunos, nós fomos medir uma mesa e não dava aqui [referindo-se a um dos lados da mesa retangular]. *Aí, ali* [outro lado da mesa] era maior, *aí nós passamos aqui que cabem três vezes exatas, né. *Aí o nosso foco ficou ali no pedacinho trabalhando um tempão. Mas, o aluno vai fazer isso, ele vai tentar achar um lugar que dá* [referindo-se a um lugar e não a um pedacinho do canudo], *se não der certinho, ele vai procurar outro, até que encaixa. Encaixou, deu. Não vai ter pedacinho sobrando.***

(PC5) Professor Formador 1: *Então, de algum modo, ter o pedacinho era fundamental?*

(PC6) Ana: *Tanto para nós quanto para o aluno.*

Na sequência desse diálogo, a professora Ana menciona a importância de ter o “pedacinho” para conduzir a ideia da necessidade do conceito de fração partindo de seu significado como medida. Ana domina o diálogo, sempre colocando seu ponto de vista. Com uma voz alta, os comentários de Ana quase sempre se sobrepunham aos comentários das demais. Em dado momento, Maria faz um apontamento pertinente.

¹⁹ Esse episódio do “pedacinho” está analisado, de forma mais concisa, em Gonçalves, Rodrigues, Elias e Trevisan (2019).

(PC7) Professor Formador 1: *E por que vocês acham que o pedacinho era importante olhando a tarefa como ela foi organizada? [...] Vocês acham que o item 2 que perguntava se o pedacinho era maior ou menor que a metade, perguntava se era maior ou menor que a terça parte e depois perguntava quantas vezes ele cabia no canudo. Vocês acham que essas perguntas ajudaram a melhorar a escrita da medida do objeto?*

(PC8) Maria: *Eu acho que a palavra pedacinho teria que ser alterada para pedaço, porque nesse caso não foi um pedacinho, foi um pedaço. O resto é que era pedacinho. A gente utilizou três quartos por exemplo, um quarto que era o resto. Então o nosso pedaço não era um pedacinho, o nosso pedaço era maior que a metade.*

(PC9) Professor Formador 2: *De algum modo, essa foi uma questão que surgiu depois, a gente percebeu exatamente essa questão. Falar em pedacinho quando, na verdade, para algumas medidas, sobrava um pedaço. E acho que o grupo de vocês mesmo que falou: o que é esse pedacinho? É um pedaço usado na medida.*

(PC10) Algumas professoras: *A sobra. A gente usou a sobra.*

(PC11) Maria: *Não era a sobra, Era o que a gente usou para medir, para completar a medida.*

(PC12) Ana: *Mas eu não entendi, como vocês fizeram?*

(PC13) Maria: *Por exemplo: deu um canudo inteiro e, por exemplo, três quartos do outro. Aquele pedacinho que ficou pra fora da mesa, o que sobrou. A gente não considerou o pequenininho, a gente considerou o que usou para medir.*

(PC14) Professor Formador 1: *Então, espera aí, lá nos grupos teve um pedaço. Vocês conseguiram representar esse pedaço, usando o pedacinho que ficou para fora? Essa foi a ideia?*

(PC15) Maria: *Foi, porque, com o pedacinho que ficou para fora, a gente foi fracionando pelas partes dadas e quantas partes cabia no pedaço.*

Percebemos que, em PC8, Maria problematiza o uso do termo “pedacinho”. Para ela, é preciso evitar esse termo, uma vez que o pedaço do canudo utilizado na medida de um determinado objeto poderá ser maior do que a metade (em PC13, ela sugere $\frac{3}{4}$ do canudo) e, portanto, faria mais sentido chamar de “pedaço” o pedaço que sobra sem ser usado na medida. Porém, conforme apresentamos no Quadro 1, no enunciado da tarefa, o termo estava sendo usado para indicar qualquer parte (menor do que o canudo inteiro) utilizada na medida do objeto.

O comentário de Maria já havia sido previsto pelos professores formadores, como manifesta o Professor Formador 2 em PC9. No entanto, há uma divergência de ideias entre as professoras, principalmente entre Maria e Ana, quanto ao termo “pedacinho”.

(PC16) Ana: *No fim, eu não entendi...*

(PC17) Maria: *Com o pedacinho, vocês estavam querendo dizer... [muita conversa ao mesmo tempo, difícil de compreender]*

(PC18) Ana: *Eu acho, eu vou dar minha opinião, tá? Se, por exemplo, para os alunos, se ficar pedaço, ele pode quebrar muito mais a cabeça aqui e talvez não chegar no resultado. Porque quando se usa a palavra pedacinho, se ele medir esse ou esse [referindo-se às partes de um canudo dividido em duas partes], ele vai ter pelo menos de onde começar. Então, precisa da palavra pedacinho de certa forma. Porque é o menor. Seja sobra, sei lá, mas precisa do pedacinho.*

(PC19) Maria: *Mas, isso você precisaria de um objeto específico para medir, para poder sobrar um pedacinho.*

(PC20) Ana: Não! [...] Deixa eu explicar, eu vou dizer o que as crianças iriam fazer e nós fizemos. [...] A mesa dela era menor, a minha era maior. A frente deu 3 canudos inteiros, mas a lateral não deu. [...] Você escolhe o objeto, mede e tem que sobrar um pedacinho.

(PC21) Maria: Não, mas aí você está falando para usar a palavra pedacinho. Pra mim, pra usar a palavra pedacinho tem que ser menos da metade. Pra mim, mais da metade não é pedacinho. Aí vai confundir com a sobra.

(PC22) Ana: Mas, na verdade, a sobra, ela não é uma sobra. Ela é parte do inteiro.

(PC23) Maria: Mas, ela não vai ser usada nesse contexto.

Todo esse diálogo foi bastante caloroso para um primeiro dia de trabalho colaborativo em que as professoras ainda estavam se conhecendo. No entanto, Maria estava bastante segura de que a palavra “pedacinho” não era adequada. Mesmo que Ana a questionasse (PC12) e interrompesse suas falas (PC18 e PC20), Maria demonstrava confiança.

O diálogo só se acalmou quando o Professor Formador 2 chamou a atenção para o fato de que, pelo enunciado, o “pedacinho” era mesmo a parte do canudo usada para medir, como Maria argumentava. Quando o Professor Formador 2 disse: “*a gente estava querendo falar pedacinho, esse pedaço* [apontando para o pedaço do canudo utilizado na medição do objeto]”, Ana compreendeu.

(PC24) Ana: Esse é o pedacinho?

(PC25) Professor Formador 2: Esse daqui é o pedacinho, quando a gente cortou o canudinho. Esse daqui é o que a gente estava chamando de pedacinho.

(PC26) Ana: Ah, nós entendemos que era o resto. Agora eu entendi.

Esse episódio todo é relevante para a análise, pois percebemos que Maria contesta a formulação do enunciado da tarefa (PC8) e, quando pressionada, justifica sua posição (PC13, PC15 e PC21). Em todos esses instantes (PC8, PC13, PC15 e PC21), Maria manifesta um conhecimento matemático que é próprio do professor e de sua experiência na e com a sala de aula, na medida em que se preocupa com a linguagem utilizada no enunciado, uma linguagem que está atrelada às noções de maior do que a metade e menor do que a metade (PC21). Por isso, entendemos que Maria mobilizou o Conhecimento Especializado do Conteúdo, tanto para questionar o termo utilizado no enunciado como para dialogar com as professoras, em especial, a professora Ana.

No Quadro 6, apresentamos a *Tarefa dos Canudos*, no formato que a professora Maria desenvolveu em sua turma de 5º ano do Ensino Fundamental, o termo “pedacinho” não aparece no enunciado, foi resultado da discussão coletiva que ocorreu no primeiro encontro. A professora entendia que manter o termo poderia gerar dificuldades na resolução.

Quadro 6 – *Tarefa dos Canudos* reformulada pela professora Maria

- Utilizando apenas um canudo, escolha um objeto da sala e escreva sua medida.
--

- O canudo coube sempre inteiro no objeto escolhido ou vocês utilizaram uma parte também?
- Se o canudo coube sempre inteiro, escolha outro objeto e dê a sua medida.
- Essa parte que você utilizou na medida é metade do canudo? É maior que a metade? Ou é menor que a metade?
- Quantas vezes essa parte cabe no canudo?
- Como vocês representariam essa parte?

Fonte: dados da pesquisa

Durante o desenvolvimento da aula com sua turma, Maria pôde confirmar que sua percepção estava correta: os alunos poderiam chamar de “pedacinho” o pedaço do canudo não utilizado na medida do objeto. Em um determinado momento de sua aula, a professora discutia com os alunos se uma parte do canudo obtida por um dos grupos enquanto mediam um objeto era maior, menor ou igual à metade do canudo. O canudo coube inteiro, quatro vezes, e uma vez, em parte; quase inteiro. Uma integrante do grupo, porém, dizia que tinha dado “*cinco e pouco*”. A professora tenta explicar a maneira correta ao grupo e, ao final, pergunta:

(AD23) Maria: *Grupo, perceberam? Por que não é cinco e pouco? São quatro inteiros [a professora é interrompida por uma aluna]. Exato! Ia chegar no cinco, mas não chegou.*

(AD24) Karina: *É, tipo... sobrou.*

(AD25) Maria: *Então, só coube inteiros quantos mesmo, grupo?*

(AD26) Karina: *Tirou esse pedacinho.*

(AD27) Maria: *Oi?*

(AD28) Karina: *Quando tirou esse pedacinho.*

A aluna Karina não era do mesmo grupo que estava com dificuldades. Ela estava apenas contribuindo para a discussão coletiva. Em AD26 e AD28, Karina estava dizendo que, se a gente tirasse (cortasse) o pedaço pequeno, não utilizado na medição do objeto, o canudo caberia “inteiro” na medida. A aluna, por conta própria, chama o pedaço não utilizado de “pedacinho”.

A professora Maria não deu sequência ao comentário da Karina, pois voltou a falar com o grupo que estava com dificuldades. Logo na sequência, a aluna Karina volta a comentar uma pergunta feita por Maria.

(AD29) Maria: *Isso aqui representa um pouco? [apontando para a parte do canudo que é maior do que a metade, mas menor do que o canudo inteiro]*

(AD30) Turma: *Não!*

(AD31) Karina: *Não, porque ele é grande.*

(AD32) Maria: *Porque ele é grande!?*

(AD33) Thiago: *Maior.*

(AD34) Maria: *Maior do que o quê?*

(AD35) Karina: *Maior do que esse pedacinho. [enquanto Karina falava, o Thiago, que estava próximo à professora, aponta para o “pedacinho” do canudo que a professora segurava].*

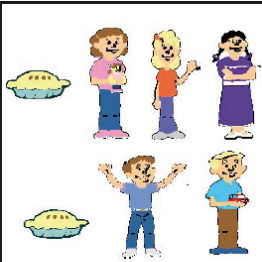
(AD36) Maria: *Maior do que o pedacinho? Pode ser.*

Esse diálogo da professora com seus alunos corrobora o que a professora Maria antecipou no dia do planejamento, revelando o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes da professora, uma vez que ela mostrou conhecer como seus alunos poderiam lidar com a discussão matemática. Segundo Gonçalves, Rodrigues, Elias e Trevisan (2019, p. 13), o fato de a professora Maria “ter antecipado uma possível confusão que os estudantes fariam com o termo ‘pedacinho’ e, por iniciativa própria, ter alterado, em seu planejamento, o enunciado da tarefa fez com que a discussão matemática com a turma ocorresse de uma forma produtiva”.

4.3 Episódio 3: o problema das tortas

No segundo encontro presencial, foram discutidas quatro situações-problema apresentadas por Campos, Magina e Nunes (2006), que envolviam diferentes significados de fração. Fazendo uso de dados do segundo episódio (S), os professores formadores buscavam abordar outros significados, além do significado parte-todo, predominante no ensino de fração nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A Figura 2 apresenta uma dessas situações-problema, que, segundo Campos, Magina e Nunes (2006, p. 130), “explora uma situação com significado quociente”.

Figura 2 - Situação-problema 1



As meninas dividem uma torta e os meninos também dividem uma torta, igual à das meninas.

1. Cada menina vai comer o mesmo tanto que cada menino? Por quê?
2. Que fração da torta as meninas vão comer? E os meninos?
3. Qual a maior fração?

Uma criança deu as seguintes respostas:

1. Cada menino vai comer o mesmo tanto que cada menina vai comer porque as tortas são do mesmo tamanho
2. Os meninos comem $1/2$ e as meninas comem $1/3$.
3. $1/3$

Como você acha que essa criança raciocinou? (Escreva sua explicação no retângulo abaixo)

O que você faria para promover a compreensão dessa criança?

Fonte: Campos, Magina e Nunes (2006)

Foi proposto às professoras participantes que analisassem as respostas dadas por uma criança (Figura 2) e indicassem como fariam para ajudá-los a desenvolver seu entendimento do

conceito de fração. A partir dessa situação-problema (e das demais), seria possível esperar que as professoras mobilizassem alguns subdomínios do MKT, em especial, o Conhecimento Especializado do Conteúdo (ao lidar com os diferentes significados dos números racionais), o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (ao discutir possíveis formas de pensar dos estudantes) e o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (ao indicar possíveis abordagens para promover a compreensão dos estudantes).

Nas discussões no pequeno grupo de que Maria participava, a professora Sônia prontificou-se a ler as situações-problema aos demais. Após a leitura, todas as professoras emitiram suas opiniões acerca de como interpretavam a resolução do problema realizado pela criança e apontaram suas estratégias de ensino.

(SB1) Sônia: *Como você acha que essa criança raciocinou? [...]*

(SB2) Maria: *Eu acho, assim, o enunciado, ele tinha que ser melhorado. A criança compreendeu o enunciado, mas ela entendeu que as partes poderiam ser iguais e, na verdade, o igual eram as tortas. Por isso que ele responde que vão comer igual, mas, na hora de responder a fração, ele acerta, ele sabe o que é um meio e um terço.*

(SB3) Celina: *Eu acho que é aí que está a questão. Ele entendeu aquilo que foi trabalhado ali isoladamente. [...] mas ele não entendeu ainda, não conseguiu visualizar o que é esse $\frac{1}{3}$, que tamanho que tem isso. Tanto que, para ele, 3 é maior que 2, então $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{2}$. Então, ele não conseguiu ainda visualizar, ter essa noção, o que é esse um terço. [...] Essa parte técnica, algorítmica, ele entendeu bem, mas a questão da compreensão ele não compreendeu o que é esse $\frac{1}{3}$ e o que é esse $\frac{1}{2}$.*

(SB4) Sônia: *[...] Eu coloquei isso, que eu acho que as crianças, ao observar o algarismo 3, sendo maior que o 2, ele representava que a fração $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{2}$ e sabemos que não é. O $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, é o contrário.*

(SB5) Maria: *Mas, eu acho, em relação a intervir para melhorar a aprendizagem, eu mudaria o enunciado. Eu colocaria assim: “tortas do mesmo tamanho”. Porque, no final, quando ele termina falando [...] “torta igual à das meninas”. Eu entendi, só que isso também pode levar o aluno a pensar que foi dividido igual, que as meninas e os meninos comeram igual. Eu sei que não é isso que está escrito, só que poderia deixar mais claro, porque eu sinto que essa resposta número um foi baseada nessa parte. Ele não analisou o $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. Ele deu a resposta aqui [mostrando no enunciado que a torta dos meninos é igual à das meninas], mas no primeiro ele bateu o olho aqui ó, [mostrando a palavra igual] “ah, foi comido igual”, “é igual”, para mim foi uma resposta superficial.*

(SB6) Celina: *Só com a mudança do enunciado, ele iria dar uma resposta coerente?*

(SB7) Maria: *Pode ser que sim. Porque [...] se o aluno olhar a imagem, ele consegue dar uma resposta certa. Ele consegue ver que três pessoas comendo uma torta vai comer menos do que duas, só que, se ele atentar ao enunciado, isso aqui tá fácil de errar a hora que fala que as meninas... “igual à das meninas”. Então, para mim, eles patinaram nisso.*

(SB8) Celina: *Assim como já teve na avaliação [áudio incompreensível], por exemplo, em que o desenho não correspondia ao que estava escrito e que levou as crianças.*

(SB9) Maria: *Isso, se ele olhar a imagem, ele vai pra um lado, se ele olhar a informação, ele vai para o outro.*

(SB10) Celina: *Pode ser uma questão.*

O argumento das professoras Celina e Sônia, em SB3 e SB4, vai na direção de que a resposta do aluno é baseada no conhecimento que se tem sobre o conjunto dos números naturais, tratando o 3 como maior que o 2 e, então, para ele, $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{2}$. O foco das professoras parece estar relacionado com a resposta do aluno à terceira pergunta (Figura 2): “*Qual a maior fração?*”.

No entanto, Maria parece analisar de outro modo. Em SB2 e SB5, Maria considera que o motivo do erro do aluno na primeira questão tem a ver com a interpretação da frase final, “*igual à das meninas*”, do enunciado da situação-problema. Em seu entendimento, para o aluno, a palavra “*igual*” sugere que os meninos comeram a mesma quantidade que as meninas. Para Maria, os alunos sabem o que são as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ (SB2), mas o enunciado pode ter sido o causador da resposta errada.

Junto às demais professoras, Maria faz sua leitura das respostas da criança, buscando compreender a maneira como pensou e resolveu o problema proposto. Nesse caso, a professora mobiliza o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes. No entanto, Maria vai além disso. Em SB5, ao questionar o enunciado, a professora propõe uma alternativa que, para ela, poderia evitar o erro da criança: substituir a frase “*igual à das meninas*” por “*tortas do mesmo tamanho*”. Nesse caso, entendemos que está buscando contornar possíveis erros dos estudantes, mobilizando o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino.

Também é interessante notar que, em SB6, Celina parece contestar a leitura que Maria fez da situação. No entanto, em SB8, Celina muda um pouco o tom e parece concordar com Maria, pois se lembrou de uma experiência em que, em uma determinada prova aplicada aos seus alunos, a figura e o enunciado estavam conflitantes, mesmo argumento usado por Maria em SB7. Já em SB10, Celina passa a considerar a perspectiva de Maria como uma possibilidade de leitura da situação. Essa conversa entre Celina e Maria evidencia o trabalho colaborativo ocorrido no grupo, na medida em que as professoras participantes dialogam, divergem, se justificam, ponderam e reveem seus conhecimentos.

Na discussão em plenária, Maria foi solicitada a se manifestar. Quando os professores formadores pediram para os pequenos grupos externalizarem o que foi discutido entre os integrantes, Celina se vira para Maria e pede que ela comente sua interpretação do enunciado.

(SE1) Maria: *Pra mim, ele, na hora de responder essa questão, ele se atentou mais ao final do enunciado. Está claro pra mim, mas, ao mesmo tempo, pode gerar uma dúvida porque ele pode ter entendido ali que eles comeram igual. Está escrito no final: igual das meninas, [...] se ele observasse só o desenho..., se a criança vê a imagem, ela dá uma resposta, se ela olha o enunciado, ela pode dar outra. Então, pra mim, ele se atentou só ao enunciado. [...] A torta era igual, não os pedaços.*

(SE2) Professor Formador 1: *Você acha que essa informação é importante no enunciado ou poderia sair daí pra evitar essa suposta dúvida?*

(SE3) Maria: *Está colocado na minha intervenção que teria que alterar esse enunciado.*

(SE4) Professor Formador 1: *Mas, alterar o enunciado tirando esse final de frase, igual das meninas, ou reescrevê-lo?*

(SE5) Silvia: *Eu acho que se tem a imagem e o intuito é fazer a leitura da imagem, é dispensável “igual à das meninas”.*

(SE6) Professor Formador 2: *E a imagem é importante?*

(SE7) Mariana: *Para eles, é importantíssimo.*

(SE8) Professor Formador 2: *E nesse caso, ela nem diz quantas meninas e quantos meninos. Só na imagem.*

[...]

(SE9) Maria: *Se colocasse que as tortas são do mesmo tamanho, são iguais e depois blá, blá, blá.... Mas o duro que no final aquele “igual” ficou longe da torta, entendeu? Daí dá brecha pra ele entender que os pedaços são iguais. [...] Poderia para ser suprimida [a informação de que é igual à das meninas], porque dá para ver que as tortas são iguais, dá para ver a quantidade de crianças.*

[...]

(SE10) Professor Formador 2: *Só pra entender uma coisa, então, a primeira resposta, vocês estão associando que o problema é o enunciado. Que é interpretação do enunciado. [...] E a segunda resposta?*

(SE11) Maria: *Está certa.*

(SE12) Professor Formador 2: *E essa segunda resposta, em termos de interpretação de enunciado, como é que a gente pode conectar a primeira resposta, né? Ele acertou a fração.*

(SE13) Sônia: *Como pode ser igual se a fração é diferente, né? Por que desse erro, né? Aí que entrou a questão do enunciado. Porque se ele acertou a dois [referindo-se à segunda pergunta]!*

(SE14) Maria: *Talvez, falta de atenção porque são duas respostas antagônicas. Ele também não se atentou. Respondeu a primeira, respondeu a segunda, mas não percebeu que era o mesmo número de torta.*

(SE15) Silvia: *A Fabiana está falando aqui que ele também pode ter colocado 1 de 3, porque é uma torta para três, e 1 de 2, porque é uma torta para dois.*

(SE16) Fabiana: *Só na visualização do desenho.*

No diálogo acima, percebemos que Maria permanece com sua compreensão de que o problema está no enunciado (SE1, SE3 e SE9). Em SE5, a professora Silvia menciona que a frase problemática (“igual à das meninas”) seria dispensável e, em SE8, o Professor Formador 2 comenta que a quantidade de meninos e de meninas nem é mencionada no enunciado, somente nas imagens é que se observam essas quantidades, evidenciando a centralidade das imagens para a situação-problema. Após esse diálogo, é possível perceber que, em SE9, Maria também passa a considerar a possibilidade de suprimir a frase “igual à das meninas”. Nesse sentido, entendemos que o diálogo e o compartilhamento de ideias permitiram que a professora Maria refinasse seu argumento inicial (substituir a frase “igual à das meninas” por “tortas do mesmo tamanho”).

Ainda nessa discussão, em SE12, o Professor Formador 2 questiona de que modo o possível erro gerado pelo enunciado pode ter conexão com o acerto da criança na resposta dada para a segunda pergunta. A professora Sônia manifesta a mesma inquietação em SE13. Se errou

a primeira resposta, por que acertou a segunda? Para Maria, foi uma falta de atenção da criança (SE14).

Se, por um lado, Maria não renunciava a suas interpretações (enunciado problemático e falta de atenção da criança), por outro, o ambiente colaborativo ofereceu oportunidades para ela e para as demais professoras refletirem sobre outras formas de pensar. Em SE15 e SE16, Silvia e Fabiana fazem uma leitura da resposta dada pela criança que vai ao encontro do argumento de Maria: a imagem pode ter influenciado a resposta da criança. A ideia de uma torta para dois meninos e uma torta para três meninas trazida por Silvia e Fabiana sugere o significado de fração como quociente, isto é, uma divisão indicada. Como bem disse Celina em um determinado momento da plenária: *“Como, geralmente, nos anos iniciais [do Ensino Fundamental] você apresenta fração? Só parte-todo”*. No caso do problema das tortas, o significado parte-todo poderia aparecer, por exemplo, se modificássemos a pergunta, como o Professor Formador 1 provocou: *“quanto de torta cada menina recebeu? Quanto de torta cada menino recebeu”*. Esse trabalho, reformulando a pergunta para estimular diferentes significados da fração, pode favorecer o Conhecimento Matemático para o Ensino das professoras.

Não é nossa pretensão julgar se as respostas dadas pelas professoras participantes estão adequadas/corretas ou não, mas, sim, observar de que maneira o contexto permitiu um momento de diálogo e trocas de ideias, favorecendo o desenvolvimento do Conhecimento Matemático para Ensino da professora Maria. No caso particular desse episódio, entendemos que o momento foi favorável para a manifestação do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes e do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino.

A cada situação-problema resolvida, percebia-se que a troca de experiência entre as professoras e os formadores estava cada vez mais estreita e que as discussões seguiam num ambiente de confiança, proporcionando momentos de aprendizagem e construindo o processo de colaboração preconizado pelo Estudo de Aula (BOAVIDA; PONTE, 2002; FIORENTINI; CRECCI, 2013).

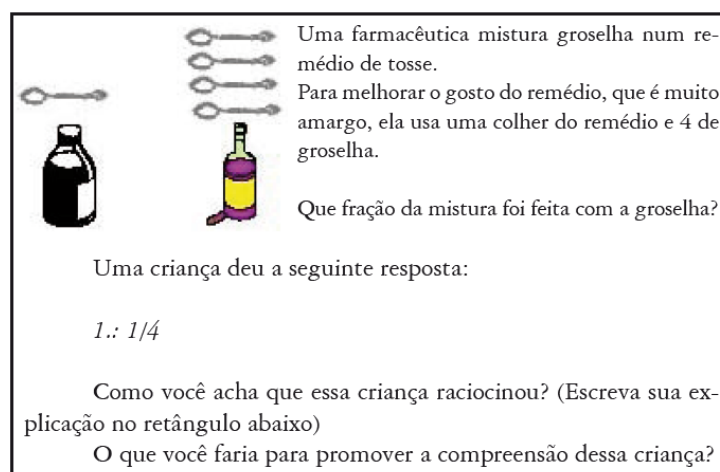
4.4 Episódio 4: a groselha e o remédio

A outra situação-problema²⁰ que analisamos tinha estrutura semelhante à da situação-problema 1 do episódio anterior (um problema matemático, a resposta de um aluno e perguntas

²⁰ Uma análise sobre esse episódio também foi feita em Elias, Gonçalves e Rodrigues (2021).

para as professoras), e os dados seguem os do segundo episódio (S). No entanto, essa situação-problema envolve o significado de fração como parte-todo (MAGINA; CAMPOS; NUNES, 2006). A situação-problema 2 está ilustrada na Figura 3.

Figura 3 - Situação-problema 2



Uma farmacêutica mistura groselha num remédio de tosse.
Para melhorar o gosto do remédio, que é muito amargo, ela usa uma colher do remédio e 4 de groselha.

Que fração da mistura foi feita com a groselha?

Uma criança deu a seguinte resposta:

1.: $1/4$

Como você acha que essa criança raciocinou? (Escreva sua explicação no retângulo abaixo)

O que você faria para promover a compreensão dessa criança?

Fonte: Campos, Magina e Nunes (2006)

A professora Sônia iniciou a leitura da situação-problema com o pequeno grupo de professoras e as compreensões e argumentos foram acontecendo conforme mostram os diálogos a seguir.

(SC1) Sônia: *Uma criança deu a seguinte resposta: $\frac{1}{4}$. Como essa criança raciocinou? Ela pensou apenas a colher separada. Ela não pensou na colher remédio e groselha. Uma colher de remédio e quatro de groselha: $\frac{1}{4}$. Ou seja, ela ainda não compreende que o denominador da fração representa o total de colheres e o numerador a parte da groselha, que é isso que ele está perguntando.*

(SC2) Maria: *Eu coloquei que ele não compreende a noção do todo. E o todo é o 5.*

(SC3) Sônia: *O que ajudaria a promover isso? De novo, a experimentação [...]*

(SC4) Celina: *Aqui tem uma outra questão que além dessa do todo que ele não desenvolveu. [...] Na escola, a gente apresenta como parte-todo. Mas uma outra questão que ser a questão da razão, da fração enquanto razão. Quatro colheres de groselha para cada colher de remédio. Então, quantas de groselha teria que colocar se eu quisesse dar duas ter remédio? Então é razão, proporcionalidade. Geralmente, você só vai apresentar essa ideia quando vai trabalhar proporcionalidade. Você não apresenta a fração com essa ideia, com essa construção de ideia de razão. Um quarto, por exemplo, que ele enxergou aqui, ele poderia estar pensando no 4 para 1.*

Dado o início da leitura, as professoras tentam compreender a forma como o aluno pensou. Trata-se de um exercício essencial para o trabalho docente, interpretar a maneira de pensar de seus alunos. É possível ver, por meio dos diálogos, a manifestação de alguns domínios do MKT se consolidando. Em SC1, Sônia acredita que o estudante “*não pensou na colher remédio e groselha*”, mas pensou separadamente, o que resultou na fração $\frac{1}{4}$. Sônia parecia

estar no caminho de pensar a fração como uma comparação entre as grandezas (razão). Na sequência de sua fala, porém, elimina essa possibilidade de estar pensando na comparação de grandezas, ao considerar que “*ela ainda não compreende que o denominador da fração representa o total de colheres*”. Portanto, Sônia está mesmo pensando no significado de parte-todo e não em razão.

Maria argumenta em SC2 que “*ela não compreende a noção do todo. E o todo é o 5*”. É importante destacar que se trata de um todo discreto²¹, diferente de quando se trabalha com a ideia de parte-todo com barras de chocolate ou pizza. Maria está convicta de que a criança não compreende o todo, e o problema trata de parte-todo. A leitura feita por Sônia e por Maria é pertinente, pois as professoras conseguem identificar que o aluno teve dificuldade em descobrir o todo. Nesse momento, a professora Maria manifesta o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, quando faz uma leitura do conteúdo abordado e interpreta a forma como o estudante está pensando.

Celina, por sua vez, trouxe uma forma de pensar que também gerou uma discussão bastante enriquecedora. Em SC4, ela indicou a possibilidade de enxergar a situação-problema a partir de uma ideia de fração como uma razão comparativa entre grandezas: quantidade de groselha e quantidade de remédio. Compreender essa possibilidade permite ao professor outra leitura possível para a resposta (incorreta) $\frac{1}{4}$. Nesse caso, o aluno poderia estar pensando na relação uma colher de remédio para quatro colheres de groselha.

Celina demonstra, também, conhecer o momento em que o significado de fração como razão parece mais apropriado para ser abordado. Quando afirma: “*Geralmente, você só vai apresentar essa ideia quando vai trabalhar proporcionalidade*”, Celina manifesta uma compreensão longitudinal das frações (razão e proporcionalidade).

No entanto, o enunciado é bem explícito ao trazer a pergunta: Que fração da mistura foi feita com a groselha? Durante a discussão na plenária, o Professor Formador 2 enfatizou o

²¹ O todo (ou o inteiro) é entendido como discreto quando for formado por um conjunto de objetos com uma determinada característica comum. Por exemplo, podemos pensar em um todo formado por 5 bolas de gude, sendo duas delas laranja. A fração $\frac{2}{5}$ representa as duas partes tomadas (bolas de gude laranja) de um todo discreto formado por 5 bolas de gude. O todo (ou o inteiro) é contínuo quando não for discreto, isto é, quando não for formado por um conjunto de objetos, mas, sim, por um objeto único que pode ser dividido em partes iguais. Muitas vezes, esse objeto único pode ser representado por uma figura (um retângulo, um círculo etc.) e dividido em partes iguais. Por exemplo, um retângulo dividido em 3 partes iguais, sendo uma delas pintada de laranja. A fração $\frac{1}{3}$ representa a parte tomada (parte pintada de laranja) de um todo contínuo formado pela figura retangular.

trecho do enunciado “que fração da mistura” para reforçar que o todo seria dado por 5 colheres e que a fração que se buscava era a parte desse todo, que correspondia à groselha.

Em um momento posterior do diálogo no pequeno (grande??) grupo, Maria comenta uma forma que poderia abordar o problema da groselha.

(SD1) Maria: [...] *Na atividade da groselha, pediria para o aluno fazer um círculo no quadro. Então, falar para ele representar no círculo a quantidade de colheres utilizadas. Depois eu perguntaria a quantidade de colheres utilizadas.*

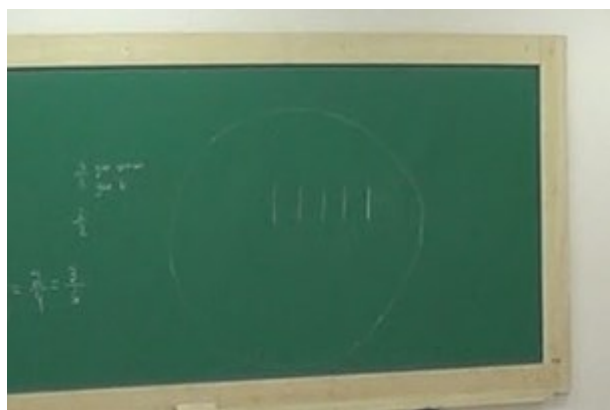
(SD2) Sônia: *Daí, ele vai ter que saber o todo.*

(SD3) Maria: *Daí como a quantidade de colheres são 5, ele teria que dividir em 5. Pinte a quantidade na figura representativa de remédio. Aí pintaria uma parte. Que fração ela representa? Que fração podemos representar a parte de groselha, que é a parte não pintada?*

Maria manifesta seu Conhecimento do Conteúdo e do Ensino ao propor a maneira como poderia abordar o erro da criança. A sugestão de Maria em SD1 é de transformar uma situação de parte-todo em que o todo é discreto (colheres) em um todo contínuo (um círculo) ao sugerir o desenho de um círculo e dividi-lo em 5 partes. Nesse caso, Maria está buscando se aproximar das representações de pizzas ou barras de chocolates usuais no ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Na plenária, Maria sugere sua ideia aos demais e solicita que o professor formador desenhe um círculo na lousa. Assim que o Professor Formador 1 faz o círculo na lousa, Maria solicita que ele represente a quantidade de colheres utilizadas. Nesse momento, Maria espera o professor faça divisão do círculo em 5 partes. No entanto, o Professor Formador 1 reage de uma forma inesperada pela professora e, ao invés de dividir o círculo em 5 partes, desenha cinco traços, conforme a Figura 4.

Figura 4 - Representação feita na lousa pelo professor formador 1



Fonte: dados da pesquisa

As professoras caíram na gargalhada, pois todas esperavam a mesma coisa: um círculo dividido em cinco partes iguais. O Professor Formador 1 também ri, volta a se sentar e afirma:

(SF9) Professor Formador 1: *O que essa provocação está tentando... a gente está tentando tornar contínuo algo que é discreto. Poderia gerar essa confusão, pois aqui o nosso inteiro não é um inteiro contínuo.*

(SF10) Maria: *A ideia é tentar ver se... dividiria em 5 partes por conta das cinco colheres, depois eu pediria pra ela pintar a parte do remédio, que ela pintaria só uma das partes e representar essa fração. E representar a fração da groselha, e ela chegaria nos quatro quintos.*

(SF11) Ana: *É que na verdade ele vira, né? A mistura, depois de tudo junto, ela vira um inteiro.*

(SF12) Maria: *Exato. A mistura é um inteiro.*

(SF13) Ana: *Ela deixa de ser as colheres e vira uma mistura.*

(SF14) Professor Formador 1: *Mas, mesmo que não virasse, se eu tivesse um conjunto de cinco pessoas em que quatro tivessem uma característica e uma não, eu não teria uma mistura, não surgiria esse contínuo. A ideia é que eu tenho que ajudar a criança a perceber também que esse processo de dividir em tantas partes e pegar tantas pode ser feito com objetos discretos.*

Nessa situação, entendemos que as professoras, em particular, a professora Maria, tiveram a oportunidade de refletir sobre seus conhecimentos matemáticos acerca da ideia de parte-todo tanto para casos em que o todo é contínuo como para casos em que o todo é discreto. Se pensarmos como a professora Maria sugeriu, faz todo sentido considerarmos a mistura (enquanto um líquido que resulta da combinação entre remédio e groselha) como um todo contínuo em SF12. No entanto, pelas informações dadas no enunciado, só conseguimos pensar sobre as partes dessa mistura a partir das colheres (discreto), assim como indicam Campos, Magina e Nunes (2006). Se buscarmos, porém, a *fração da mistura que foi feita com a groselha* (Figura 3), é possível também a compreensão a partir do significado de parte-todo com quantidades contínuas. Isso fica mais evidente quando, em SF14, o professor formador 1, para argumentar em favor da necessidade de se trabalhar com tarefas com quantidades discretas com os alunos, modifica o exemplo, considerando um conjunto de pessoas, de modo a inviabilizar a ideia de uma mistura.

Por isso, acreditamos que esse foi um momento em que a professora Maria teve a oportunidade de refinar seu Conhecimento Especializado do Conteúdo de frações, especialmente do todo discreto e do todo contínuo. Do mesmo modo, o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino também foi acionado, uma vez que o professor formador tenta indicar que, mesmo que a abordagem de pensar em um todo contínuo (como Maria estava sugerindo) funcione, espera-se que o professor trabalhe com seus alunos, também, o caso em que o todo é discreto. A interação entre as professoras e os professores formadores, compartilhando seus conhecimentos e formas de pensar, viabilizou esse ambiente propício para a constituição/refinamento dos conhecimentos profissionais.

Voltando ao momento dos pequenos grupos, resgatando o diálogo já apresentado e dando sequência a ele, destacamos outros subdomínios do MKT mobilizados pela professora Maria que consideramos bastante pertinentes.

(SD3) Maria: *Daí como a quantidade de colheres são 5, ele teria que dividir em 5. Pinte a quantidade na figura representativa de remédio. Ai pintaria uma parte. Que fração ela representa? Que fração podemos representar a parte de groselha, que é a parte não pintada?*

(SD4) Sônia: *Daí pinta de vermelho fica mais interessante. [risos]*

(SD5) Maria: *Mas, é muito importante também que ele saiba que a parte não pintada também representa fração. Porque eles estão muito acostumados a olhar, 1 de 5, 1 de 5. Porque a parte pintada é 1 e nas avaliações cai assim: a parte não utilizada. Então, assim, eles precisam aprender que a parte não utilizada também é uma fração, né?*

(SD6) Celina: *Daí, se eles enroscassem, eu deixaria pintar de vermelho.*

(SD7) Sônia: *Eu já ia meter o vermelho e deixar o remédio branco.*

Após a explicação de Maria, Sônia sugere, em SD4, que a parte de groselha seja pintada de vermelho. Sônia acredita ser mais interessante, talvez, para a aprendizagem dos estudantes demonstrar a cor que representa a groselha. No entanto, em SD5, para Maria, “*eles precisam aprender que a parte não utilizada também é uma fração*”, pois os alunos estão muito acostumados a considerar a fração somente a parte utilizada (pintada). Nesse trecho, Maria manifesta seu Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, na medida em que percebe uma maneira como os alunos costumam lidar com as frações e propõe uma forma de lidar com esse suposto pensamento equivocado, manifestando o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, pois reconhece perguntas que podem levar os alunos a se aprofundarem no conteúdo.

A colocação da professora Maria vai ao encontro do que apresentam Nunes e Bryant (1997), quando afirmam que

(no processo de dividir e pintar) as crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então, o número de partes pintadas é o numerador. Com algumas poucas regras para calcular, permitem que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre frações. Pesquisas demonstraram que a impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre frações poderia ser falsa. (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191).

Ainda no contexto dessa situação-problema, destacamos mais um trecho que ocorreu na plenária. Esse trecho evidencia a maneira como a professora Maria mostra estar à vontade para colaborar com as demais integrantes do grupo, sentindo-se segura para compartilhar suas ideias. Quando chegou o momento de discutir a situação-problema 2 com o grande grupo, o Professor Formador 2 leu o enunciado para todos e, no início da discussão, o Professor Formador 1 perguntou para todas: “*O que é o todo nesse contexto?*”.

Foi nesse momento que a professora Roberta, que não era do grupo da professora Maria, comentou:

(SF1) Roberta: *Pra falar a verdade, aqui [no nosso grupo] a gente não conseguiu discutir direito, porque a gente não sabia responder a essa sua pergunta, então a gente começou a chutar. [risos]*

(SF2) Professor Formador 2: *Qual é a sua pergunta, a sua dúvida?*

(SF3) Roberta: *Na verdade eu não consegui representar como fração. Se $\frac{1}{4}$ não está certo, qual seria a fração?*

(SF4) Outras professoras: $\frac{4}{5}$.

(SF5) Roberta: *Seria $\frac{4}{5}$, mas eu não entendo por quê.*

Nesse momento, enquanto Roberta assumia a dificuldade do seu grupo, em SF1, e do seu próprio entendimento, em SF3, a professora Maria assumiu a discussão e tentou dirimir a dúvida de Roberta.

(SF6) Maria: *Eu entendo que, se você imaginar que ela está misturando uma colher de remédio com quatro de groselha, ela está misturando em algum lugar. Imagina um copo. Então, tem 5 colheres...*

(SF7) Roberta: *então tem 5 colheres.*

(SF8) Maria: *Essas cinco colheres formam o todo.*

(SF9) Roberta: *Eu não tinha entendido ainda que era tudo dentro do mesmo... Agora eu entendi!*

Ao tentar explicar, Maria revela, em SF6, um repertório diferente do que vinha apresentando até então mostrando que seu Conhecimento do Conteúdo e do Ensino de frações lhe permitia várias estratégias de ensino. Para tentar explicar o que é o todo, nesse caso, Maria mistura todas as colheres em um copo. Novamente, ela tenta pensar em um todo contínuo (a mistura de groselha e remédio) para explicar o todo discreto (as 5 colheres).

Aparentemente, a partir das gravações que temos, Roberta, que estava com dúvidas, compreendeu de onde veio a fração $\frac{4}{5}$ que representa a fração da mistura que foi feita com a groselha. O fato de que as colheres seriam colocadas num mesmo recipiente, como mencionado em SF9, parece ter feito Roberta enxergar o todo como sendo o total de colheres. No final dessa discussão, o Professor Formador 1 concluiu:

(SF10) Professor Formador 1: *“É [preciso] ter muita consciência do que é o todo que estou considerando em certas situações”.*

Durante essa fase de planejamento, como o trecho descrito acima, identificamos indícios de envolvimento da professora Maria com a metodologia Estudo de Aula e de aceitação, uma vez que manifestava confiança no grupo em que estava inserida, trabalhando colaborativamente com as demais, trazendo para a reflexão do grupo suas experiências de ensino em busca de melhorar a compreensão do aprendizado dos alunos.

4.5 Episódio 5: repartindo em equipes

Foi na terça-feira de manhã, dia 14 de maio de 2019, como mencionado anteriormente, que a professora Maria abriu as portas da sua sala de aula para que acontecesse o desenvolvimento da aula, planejada com base na *Tarefa dos Canudos*, com sua turma de 5º ano. Diferentemente do que propõe o Estudo de Aula, em função da indisponibilidade de dispensa do trabalho dos demais integrantes do grupo, a observação e a gravação, em áudio e vídeo, da aula foram feitas apenas pelo professor formador e orientador desta pesquisa.

O foco deste episódio está em como a professora usa o algoritmo da divisão em situações práticas da sala aula. Para tanto, os dados analisados são da aula desenvolvida (A) e do terceiro encontro (T).

A *Tarefa dos Canudos*, discutida e referendada pelo grupo, foi reformulada pela professora Maria em seu planejamento e validada pelos professores formadores após receberem o e-mail da professora com a tarefa.

A professora preparou toda a equipe da escola, os pais e os alunos para o desenvolvimento da tarefa, informando que teria a presença do professor formador durante a aula para observação e gravação em áudio e vídeo. Para que isso ocorresse, houve a liberação, por parte da equipe pedagógica da escola, para a presença do professor formador.

No dia da aula, o professor formador cuidou de todos os detalhes, como a posição da câmera para o registro da aula da professora. A professora, por sua vez, recebeu seus alunos em sala. Como de costume, conforme iam chegando, os alunos sentaram-se em seus lugares em fila. Ela já havia preparado os alunos um dia antes, explicando que, naquele dia, aconteceria uma aula diferente e que viria um professor do grupo de Matemática de que ela participava. Os alunos não estranharam a presença do professor formador e das câmeras. A professora Maria deu início à aula, como costuma fazer, propondo a organização em grupos.

Como era o início da aula, nem todos os alunos estavam presentes. Havia 17 alunos na sala, e a professora queria formar grupos com quatro alunos. Para saber quantos grupos poderiam ser formados, a professora se dirigiu ao quadro e propôs fazer a divisão $17 \div 4$ perguntando aos alunos: “*Vamos ver quantos grupos com quatro alunos dá para formar?*” Os alunos guiados pela professora respondem às perguntas para resolver a divisão.

(AA1) Maria: *Uma dezena dá pode ser dividido por quatro?*

(AA2) Karina: *Não dá, coloca o zero* [a aluna quis dizer que, colocando o zero no quociente permite que o algarismo 1 (dezena) do dividendo una-se a outro algarismo do dividendo, nesse caso o 7 (unidades), tornando-se um número (17) que é maior que o divisor (4), sendo possível realizar a operação].

(AA3) Maria: *E o dezessete pode ser dividido por quatro? Dá?*

(AA4) Marcos: 4×3 .

(AA5) Karina: 4×4 *que dá dezesseis.*

(AA6) Maria: 4×4 *que dá dezesseis? Marcos você concorda?*

(AA7) Marcos: *Concordo.*

(AA8) Maria: *Então quatro* [coloca o quatro no quociente e ao resolver a conta com os alunos, resta 1]. *O que significa isso?* [pergunta para a classe, referindo-se aos valores obtidos: quatro no quociente e um no resto].

(AA9) Karina: *Um grupo vai ter que ficar com cinco.*

(AA10) Maria: *Exatamente!*

Logo nesse primeiro diálogo da professora com a turma, percebe-se que há envolvimento de alguns alunos na resolução da divisão para a formação dos grupos, pois foram falando a tabuada para a professora e indicando qual número deveria ocupar o quociente. Em AA8, verificamos que a professora chama a atenção dos alunos perguntando o que significava aquele 1 do resto da conta. Prontamente, em AA9, a aluna dá um significado para ele, algo que foi destacado e comentado pelas professoras Mariana e Fabiana no pequeno grupo do terceiro encontro do grupo, destinado à análise da aula desenvolvida por Maria.

(TA1) Mariana: *Eu acho sempre útil a gente usar situações da sala de aula pra gente fazer cálculo né?*

(TA2) Fabiana: *Partir da situação real.*

(TA3) Mariana: *Porque a gente faz automático e eles nem percebem que ali aconteceu uma divisão.*

(TA4) Fabiana: *E foi tão bem-vista pelos alunos que, no entanto, teve uma criança que falou...*

(TA5) Mariana e Fabiana: *Um vai ficar com 5!*

(TA6) Maria: *Sabe aquela aluna que todo professor tem? Então aquela lá. Ela já sabia que um grupo ia ficar com 5.*

A estratégia usada pela professora Maria para a formação do grupo foi recebida positivamente pelas professoras do grupo. Percebemos, pelo diálogo entre as professoras, que é algo que acontece usualmente em suas aulas. Em TA1, a professora Mariana comenta que usar o cálculo para resolver situações diárias da sala de aula ajuda a promover a aprendizagem dos alunos de forma natural, como mencionado em TA3. Tanto isso é verdadeiro que as professoras destacaram a fala da aluna Karina ao dar significado para o resto da conta, como podemos verificar em TA5.

Para todos do grupo, ficou claro que a aluna Karina compreendeu que esse resto representava uma pessoa, afirmando, em AA9, que um grupo teria 5 integrantes.

Em nossa análise, a professora Maria mostrou conhecer seus alunos ao fazer seu comentário em TA6. Percebemos que a professora, enquanto fazia a divisão com sua turma, tinha certeza de que Karina [participou ativamente em vários momentos da aula contribuindo com suas respostas] saberia o que o resto representava nesse caso. Diante desse acontecimento e pelo comentário de Maria, foi possível identificar o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, sendo manifestado logo nos momentos iniciais da aula.

Entendemos também que a professora Maria, ao auxiliar os alunos a conhecerem as estratégias e modos de representação da operação de divisão em AA1, AA3, AA6 e AA8, chegando progressivamente ao emprego do recurso mais elaborado que é o algoritmo convencional, pratica o subdomínio do Conhecimento Especializado do Conteúdo usando uma situação real, da vivência do aluno, para ensinar.

Com o resultado obtido na divisão, a professora Maria organizou na lousa um desenho para representar a quantidade de integrantes de cada grupo, como vemos na Figura 5, e comenta: *“Vou deixar vocês à vontade para se organizarem, mas se precisar vou intervir”*.

Figura 5 - Representação feita no quadro pela professora Maria



Fonte: Dados da pesquisa

Consideramos importante a estratégia usada pela professora para a formação dos grupos, por isso a trouxemos para nossa análise, por acreditar que a aula não começa quando está se desenvolvendo o conteúdo planejado. A aula começa a partir do momento em que alunos e professores entram em sala de aula, e a professora Maria parece reconhecer isso muito bem. Ela aproveita até mesmo uma situação simples, que seria formar grupos com os alunos, para ensinar-lhes um conteúdo.

Após a organização dos grupos, os alunos que chegaram atrasados foram reorganizados sob a orientação da professora. Ao todo, foram formados cinco grupos, em vez de quatro, os quais denominamos A, B, C, D e E.

4.6 Episódio 6: *“você quer levar o aluno a perceber sozinho”*

Neste episódio, vamos analisar um acontecimento ocorrido durante o desenvolvimento da *Tarefa dos Canudos* pela professora Maria com sua turma de 5º ano. Trata-se de uma situação desafiadora em que uma estudante, aqui chamada de Yara, apresentava uma forma de pensar diferente da esperada pela professora, que resistia em corrigir ou impor uma outra forma

de pensar. Maria queria que a discussão coletiva entre ela e os demais estudantes conduzissem Yara a uma possível mudança de compreensão. O foco deste episódio está na abordagem de ensino da professora e faz uso de dados da aula desenvolvida (A), do terceiro encontro (T) e da reflexão individual (R) feita pela professora.

Com os grupos formados, a professora distribuiu um canudo de plástico e uma folha de almaço por grupo para os registros escritos em uma só folha com a orientação de que todos do grupo ajudassem na medição do objeto e que ninguém ficasse sem fazer nada. Na sequência, escreveu no quadro o cabeçalho e o item a) do enunciado da tarefa para que os alunos copiassem na folha de almaço. Depois, leu em voz alta o que escreveu no quadro e pediu que os alunos pensassem e escolhessem um objeto dentro da sala de aula que gostariam de medir.

Os alunos começaram a medir os diferentes objetos da sala enquanto a professora circulava pelos grupos observando o que estavam medindo e como registravam, orientando-os em caso de dificuldades. Para os outros itens da tarefa, a professora usou o mesmo procedimento, passando um por vez no quadro, lendo para os alunos, dando o tempo necessário para resolverem a tarefa. Todos os integrantes dos grupos se envolveram na proposta e eles próprios cobravam uns dos outros para que ninguém ficasse de fora.

Os grupos escolheram objetos distintos e suas medidas foram bem particulares: o grupo (A) escolheu um cabo de vassoura, medindo *“quatro inteiros e meio”*; o grupo (B), um tubo de cola, medindo *“um pouco mais alto que a metade”*; o grupo (C), um dos armários da sala, medindo *“cinco canudos inteiros e quase um inteiro”*; o grupo (D), a carteira escolar, medindo *“um e meio”* e, por último, o grupo (E), que mediu o mural da sala com duas respostas para a medida, *“cinco e quase a metade de um e meio”* e *“cinco e pouco”*.

Ao acompanhar os grupos medindo os objetos escolhidos, a professora percebeu que não precisaria passar o item c) da tarefa, que dizia: *“Se o canudo coube sempre inteiro, escolha outro objeto e dê sua medida”*, porque, em todos os grupos, nenhum objeto deu um canudo inteiro. Aconteceu, porém, de aparecerem vários canudos e uma parte dele, ou, no caso do tubo de cola, a medida não deu um canudo inteiro.

Em nossa análise, iremos nos dedicar à medição realizada pelo grupo E. Escolhemos esse grupo pelo fato de ter proporcionado discussões produtivas, colocando a professora em uma situação desafiadora, que exigiu dela a tomada de decisões importantes, como incentivar os alunos a emitirem suas opiniões, promover o respeito pelo pensamento do colega e estimular a colaboração entre os estudantes, no sentido de gerar reflexões sobre a forma de pensar do outro.

Enquanto os alunos mediam os diferentes objetos da sala, Maria observava-os atentamente. Num determinado momento, a professora percebeu que o grupo E, que havia escolhido o mural da sala para medir, estava encontrando dificuldade para completar a medida, pois era um pouco alto para eles. A professora se aproximou do grupo para observar enquanto mediam e ofereceu ajuda aos alunos. Ao terminar a medida, que deu quatro canudos e mais da metade de um quinto canudo, a professora dobra este último canudo, marcando a parte usada na medição para que os alunos visualizassem e questiona quanto havia dado a medida.

(AB1) Yara: *Quatro e meio.*

A professora fica um pouco decepcionada com a resposta (equivocada) da aluna, ao dizer “meio” quando, na verdade, era maior que a metade. Maria, porém, não a contesta, mas pede que os alunos voltem para seus lugares e orienta o grupo.

(AB2) Maria: *O que vocês têm que fazer? Pensar em como colocar isso no papel, se tiverem ideias diferentes podem colocar as ideias diferentes.*

A atitude da professora Maria em não contestar a resposta da aluna nos mostra que sua intenção era que os alunos, ao discutirem no grupo, refletissem sobre suas respostas e, em conjunto, chegassem a uma resposta mais próxima do esperado, nomeando a medida inteira e a parte usada. Podemos constatar essa atitude da professora quando, no terceiro encontro, ela comenta com as professoras que, ao ajudar os alunos a medir o mural, dobrou o canudo na parte que usou e perguntou a eles quanto havia dado, e a resposta da aluna Yara (AB1) a surpreendeu.

(TC1) Maria: *Eu vi que estava errado, mas eu não intervim naquele momento. Eu só pedi para eles marcarem, leva lá para o grupo, oh, segura, marca e vê. e lá no grupo vocês vão [...] dar de resposta. Mas eu não falei que estava certo ou errado [...]*

Todavia, ao instigar os alunos, em AB2, a professora deu abertura para que registrassem mais de uma resposta. Foi o que aconteceu nesse grupo, como veremos no diálogo entre a professora Maria e o grupo E.

Alguns minutos após a professora pedir para os alunos voltarem aos seus lugares e anotarem as ideias que tiveram sobre a medida do mural, aproximou-se do grupo para verificar quais as hipóteses que surgiram e se haviam chegado a um consenso a respeito da “parte” usada na medida do mural.

Ao perceber que os integrantes do grupo estavam com ideias divergentes entre eles, tendo registrado no papel a medida do mural diferente do que Yara havia dito em AB1, a professora Maria percebeu que precisava intervir junto aos alunos para refletirem sobre a resposta “cinco e pouco” que o grupo registrou.

(AC1) Maria: *Vamos lá! Vocês mediram a lateral do mural.*

(AC2) Grupo E: *Sim.*

(AC3) Maria: *Quanto deu a medida? [a professora pega a folha que os alunos anotaram e lê as respostas] “cinco inteiros e quase a metade de um e meio”, “cinco e pouco”, ok. Sabe esse pouco que vocês utilizaram para fazer medida, vocês chamam de meio e de pouco. Pensa só nessa parte [A professora pega o canudo do grupo, em que já está dobrada a parte utilizada na medida, e mostra para o grupo]. A parte que não coube inteira é igual à metade do canudo?*

(AC4) Yara: *Não, ela é menor que a metade.*

(AC5) Maria: *É menor? Tem certeza?*

(AC6) Yara: *Sim.* [a aluna balança a cabeça dizendo que sim].

(AC7) Maria: *Tá! E você Marcelo?*

(AC8) Marcelo: *É menor.*

(AC9) Maria: *É menor que a metade? E você Paulo?*

(AC10) Paulo: *É menor.*

(AC11) Maria: *E você, Ítalo?*

(AC12) Ítalo: *É maior* [falando baixo].

(AC13) Maria: *Você acha que é maior!* [com entonação, a professora reforça em voz alta o que o aluno Ítalo falou baixinho]. *Temos um integrante que acha que é maior. Vamos pensar, o Ítalo acha que esse pedaço [apontando para a parte do canudo usada na medida] é maior do que a metade. Explica para os colegas por que você acha que essa parte é maior do que a metade?*

O aluno Ítalo respondeu muito baixo e não foi possível captar o som. A professora Maria novamente repetiu a fala do aluno.

(AC14) Maria: *O Ítalo falou que é porque a metade está aqui [apontando para o meio do canudo] e a medida deu mais que a metade [apontando e dobrando o canudo do tamanho da parte utilizada na medição do mural], sobrou mais. O que vocês acham da ideia do Ítalo?*

(AC15) Yara: *Eu acho que a ideia é boa, mas eu ainda acho que é menor do que a metade.*

(AC16) Maria: *Paulo, continua achando que é menor que a metade? E Marcelo também diz que é menor. Então vocês vão registrar que é menor do que a metade e o Ítalo vai registrar que é maior do que a metade.*

Percebemos a atitude da professora de buscar ouvir a todos os integrantes, como pode ser observado em AC5, AC7, AC9 e AC11. Quando um dos estudantes dá uma resposta na direção do que a professora esperava (AC13), Maria enfatiza essa resposta, convidando o aluno a explicar seu pensamento. Em AC14, Maria faz uso da fala do aluno Ítalo para tentar colocar os demais a refletirem sobre suas respostas. É possível notar que Maria evita expor sua forma de pensar, deixando que o debate gire em torno das visões dos próprios alunos. Yara acha a ideia de Ítalo boa, mas mantém sua forma de pensar. Assim como em AB2, em AC16, a professora Maria não corrige Yara, respeita sua resposta e pede para registrá-la, mesmo que incorreta.

A atitude da professora foi comentada no pequeno grupo do terceiro encontro, enquanto as professoras analisavam a forma como Maria conduziu essas divergências de ideias e o fato de Maria ter dado abertura para que os alunos registrassem mais de uma resposta para a mesma medida.

(TC2) Mariana: *É porque, quando chegasse no grupo, eles iam descobrir, né? Eles iam discutir.*

(TC3) Maria: *Eu percebi que teve um grupo de meninos que não falou que era quatro e meio, falou que era outra coisa, mas agora não lembro. Mas ele falou outra coisa, falou um pouco, eu acho.*

(TC4) Sônia: *Mesmo que estivesse errado, vai acolher não é? Eu gostei que você dobrou o canudo que sobrou naquela parte, porque aí deu pra visualizar. A menina falou metade, aí o menino falou, mas não é metade. A metade seria aqui [mostrando o canudo]. Eles vão, como se diz, testar as hipóteses.*

(TC5) Fabiana: *Na verdade ela colocou eles para pensar naquele momento né? E o propósito dela era esse mesmo. Colocar eles para chegar a uma conclusão das medidas.*

(TC6) Mariana: *É o propósito da atividade exploratória, porque se fosse pra ela dar a resposta, ela dava uma aula oral lá e não precisava medir nada. Ela queria que eles construíssem.*

(TC7) Maria: *Mas é difícil, dá vontade de falar que não é isso. Mas tem que se conter e falar quanto que deu? Então vai lá no grupo, pensa certinho...*

Em TC7, na discussão com o grupo de professoras no terceiro encontro, Maria comenta a dificuldade em não dar a resposta ao aluno e fazê-lo pensar como propõe a atividade exploratória, já que lembra que um dos meninos não estava concordando com a resposta da aluna (TC3), por isso a professora Maria tomou a decisão de deixar que eles colocassem as ideias diferentes que surgissem, como aparece em AB2.

A professora Maria exercita, por meio de algumas práticas do ensino exploratório, o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, pois usa uma abordagem diferente para que os alunos superem a dificuldade que encontraram na medida do mural da sala. O ensino exploratório, prática adotada pelos professores no processo formativo, “defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas [...] e têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado” (CANAVARRO, 2011).

O diálogo também mostra que abordagem de ensino foi bem aceita pelas demais professoras, quando elogiam a forma como Maria dobrou o canudo e apresentou a parte usada na medida do mural para o grupo (TC4). ou quando valorizam a atitude de permitir que os alunos construíssem suas próprias conclusões (TC5 e TC6).

A discussão na plenária continuou e Maria, assim como outras professoras, valorizaram a abordagem de ensino adotada naquela aula.

(TC8) Celina: *Se a professora tivesse falado assim: isso é meio? Não é só metade? Ia morrer a discussão e acabar a aula né?*

(TC9) Professor Formador 2: *Exato!*

(TC10) Celina: *Ela devolveu e ela instigou né? Agora vocês têm que pensar em como passar isso para o papel. Ela forçou eles ao retornarem ao grupo parar para pensar.*

(TC11) Professor Formador 2: *Isso que vocês falaram ela não acabou com a discussão ali. Ela falou registrem isso.[...] Então quer dizer que ela nem diz que aluna está certa, e nem que não tá. Mas ela instiga, ao fato da possibilidade de haver respostas diferentes. [...] E a*

professora teve que se entender como tratar isso depois né? Talvez foi um ponto importante da aula como fazer...[o professor é interrompido pela professora Maria].

(TC12) Maria: *Conduzir o aluno a pensar conforme ao que você gostaria que ele chegasse [...]. Quando você vê que é uma resposta equivocada, você não quer simplesmente falar: “não! Está errado!”, você quer levar o aluno a perceber sozinho. Que aquilo que ela está afirmando, que acha que é certeza, não é bem assim.*

Ficou claro o engajamento da professora na proposta da formação continuada pela forma com que orientou o grupo de alunos (TC12), suas ações foram bem aceitas pela professora Celina, como vemos em TC8 e TC10.

Entendemos que dois dos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino foram mobilizados pela professora Maria, o Conhecimento Comum do Conteúdo, ao identificar apenas uma resposta certa e três erradas dentro do grupo e o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, na medida em que valoriza as discussões coletivas no ensino exploratório das frações.

Situações como essa nos levam a perceber o quanto é importante que o professor planeje bem a sua aula, antecipando ideias diferentes que possam surgir, pois quanto mais preparado o professor estiver, maior será as chances de prever algumas coisas e evitar problemas na aprendizagem dos alunos. Isso não quer dizer que o professor conseguirá prever tudo, mas, pelo menos, em algumas situações encontrará a melhor maneira de conduzir a aula. O trecho RA1 foi retirado da reflexão individual, enviada no formato de áudio pelo *WhatsApp* aos professores formadores, na noite do mesmo dia em que ocorreu a aula.

Em seu momento de reflexão individual após a aula, Maria admite considerar que alcançou o objetivo que havia planejado para o desenvolvimento da aula, mesmo que nem tudo tenha saído exatamente como idealizou, mas considera que se aproximou do elaborado.

(RA1) Maria: *Foi muito interessante ver as hipóteses das crianças que foram surgindo nos grupos e eu não esperava algumas coisas, outras eu já esperava e ter que lidar com minha ansiedade de conduzir o aluno a pensar, porque para mim não é fácil. [...] Então, quando aquela minha aluna também insistiu que aquela parte maior do canudo era menor do que a metade né? E aí um colega do grupo falou que não, que era maior do que a metade e tal, e mesmo assim [ela] não se convenciu. E aí foi bom que eu consegui aguentar ali, e depois levar para o grupo maior, fazer ela pensar de modo diferente.*

O fato de Maria fazer referência à situação vivenciada com a aluna Yara mostra como essa situação foi, de fato, desafiadora para ela. Como esse trecho mostra, Maria considera que conseguiu fazer Yara pensar de modo diferente quando levou a discussão para a plenária em sala de aula, isto é, quando a professora abriu a discussão e cada grupo leu suas conclusões.

Maria percebeu que deveria aproveitar a plenária com os alunos da sua turma para corrigir a medida incorreta que o grupo E apresentou. Nesse momento, a professora foi até o mural na tentativa de mostrar para o grupo novamente a medida que haviam realizado e

convidou toda a turma a ajudá-la enquanto colocava um canudo após o outro, como mostra a Figura 6.

(AD1) Maria: *Me ajudem, contem comigo.*

(AD2) Todos os grupos: *1, 2, 3, 4. Quase 5. Quatro e meio!*

Figura 6 - Professora Maria medindo o mural da sala de aula.



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos percebem, então, que não houve uma quinta vez para a contagem do canudo, mas, ainda usavam a palavra meio. A professora guia a discussão, procurando reelaborar a resposta da quantidade de inteiros informada pelo grupo E.

(AD3) Gabriel: *Quatro e meio. Quatro e meio.*

(AD4) Maria: *Quanto que o grupo anotou que deu a medida?*

(AD5) Todos do grupo E: *Cinco.*

(AD6) Maria: *Cinco e mais da metade de um! Pergunto para vocês, quantas vezes a gente falou o canudo aqui? Quantas vezes o inteiro?*

(AD7) Gabriel: *Quase cinco.*

(AD8) Maria: *Quase cinco, chegou no cinco?*

(AD9) Todos os grupos: *Não.*

(AD10) Maria: *Cinco e mais um pouco, é depois que passa de cinco. A gente contou quatro vezes. Quatro canudos inteiros e a hora que ia dar o cinco, faltou isso daqui [a professora aponta para o canudo dobrado] para dar o cinco, não foi?*

Para ajudar o grupo a entender a medida inteira do canudo, a professora usou a estratégia de convidar toda a turma (AD1) para que, junto com ela, contassem quantos canudos foram necessários para a medida (AD3). Após a contagem, os alunos perceberam o erro e conseguiram entender que uma parte do canudo não fora usada, por isso não chegou a cinco. Identificamos na estratégia da professora que o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino foi manifestado na maneira que ela encontrou para mostrar aos seus alunos que estavam contando errado.

A correção, porém, não havia sido completada, ainda era preciso corrigir a parte usada (não inteira) que os alunos estavam chamando de meio. Após a correção de “cinco canudos por

quatro canudos”, a professora Maria continuou a discussão com a turma, pois queria que os alunos entendessem a parte utilizada na medida.

(AD11) Maria: *Como que eu falo então essa medida corretamente? Quem pode colaborar?*

(AD12) Karina: *Quatro inteiro?*

(AD13) Maria: *Quantas vezes deu o canudo aqui?*

(AD14) Karina: *Quatro.*

(AD15) Maria: *Quatro inteiros e... quase um inteiro. Tem outras formas de falar? Os meninos [apontando para o grupo E] falaram “e um pouco”. Será que isso é um pouco? [mostrando a parte usada do canudo para medir o mural].*

(AD16) Gabriel: *Não, essa pontinha pequenininha é um pouco.*

(AD17) Maria: *Ah, o Gabriel falou que se fosse esse pedacinho [apontando para o que sobrou do canudo na medida do mural] a gente poderia falar em quatro e pouco. Mas como é a parte maior, como a gente poderia dizer?*

(AD18) Gabriel: *Quatro inteiros.*

(AD19) Maria: *Quatro inteiros e acabou? Quatro inteiros e quase...?*

(AD20) Rafael: *E quase um inteiro.*

(AD21) Maria: *Quatro inteiros e quase um inteiro! Pode ser! Tem outra forma de dizer isso?*

(AD22) Rafael: *Quatro inteiros e maior do que a metade!*

(AD23) Maria: *Quatro inteiros e maior do que a metade? Isso daqui é maior do que a metade? [apontando para o pedaço do canudo]. Grupo, perceberam? Por que não é cinco e pouco? São quatro inteiros [a professora é interrompida por uma aluna]. Exato! Ia chegar no cinco, mas não chegou.*

Nessa discussão, vemos que, ao convidar os alunos (AD11) para corrigir a resposta do grupo E, a professora tinha a intenção de ajudar a turma a pensar em outras maneiras de nomear a “parte” usada na medida do mural (AD15). Em sua fala, percebemos que, ao apontar e comentar: “*Será que isso é um pouco?*”, a professora não considerava adequada a expressão usada pelo grupo já que a parte usada era maior que a metade.

Em AD16, o aluno Gabriel respondeu confirmando que “um pouco” seria mais adequado se fosse usado para representar a parte não usada na medida, ou seja, a parte que sobrou. A professora aproveitou a colocação do aluno e incentivou a turma, novamente, (AD17 e AD19) a pensar outras formas de dizer essa parte. A discussão foi ficando cada vez mais calorosa e os alunos cada vez mais envolvidos até que Rafael fala, em AD22, o que a professora esperava ouvir (foi possível perceber, pelas imagens do vídeo, a expressão de satisfação da professora ao ver o aluno chegar à resposta que ela considerava certa).

Maria concluiu com a turma, em AD23, em tom interrogativo, aquilo que queria afirmar desde o início da discussão: “*Isso daqui é maior do que a metade?* [apontando para o pedaço do canudo] *Grupo, perceberam?*”. Resolvido que a parte usada na medida do mural era maior do que a metade, a professora finaliza comentando a quantidade de canudos inteiros usados na medida do mural: “*São quatro inteiros [...], ia chegar no cinco, mas não chegou*”. Assim, entre

os canudos inteiros e a parte usada na medida do mural, foram “*quatro inteiros e maior do que a metade!*”

Quando Maria levou a discussão para a plenária na sala de aula, queria que a aluna Yara percebesse que o pedaço do canudo usado para medir o mural era maior do que a metade do canudo e, assim, pensasse de forma diferente da que estava pensando até aquele momento. Em sua ação, abordar a expressão usada pela aluna e buscar uma resposta por meio das perguntas feitas para a turma toda, a professora mostrou o quanto estava segura para desenvolver a tarefa. Isso indica os subdomínios do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino – manifestado em uma abordagem de ensino que não praticava usualmente em suas aulas, mas que vivenciou no grupo de formação – e do Conhecimento Especializado do Conteúdo – manifestado na ação de introduzir as frações por meio do seu significado de medida e na atitude de não focar, de forma excessiva, a representação fracionária, mas, sim, a ideia de fração. Podemos dizer que esses subdomínios do MKT mobilizados pela professora foram favorecidos pelo processo formativo de que ela estava participando. É o que entendemos em RB1, quando a professora, em seu momento de reflexão pós-aula, comenta as estratégias usadas no desenvolvimento da *Tarefa dos canudos*.

(RC1) Maria: *primeiro que eu nem teria dado essa aula se não fosse o curso que vocês estão ministrando com a gente, né. E assim, é o que a gente aprendeu com vocês me deu muita base para eu conseguir resolver o que aparecesse.*

No próximo episódio, Maria conduz a discussão em plenária buscando explorar matematicamente as respostas dos alunos e, em particular, esperando que a aluna Yara avançasse na compreensão da tarefa e mudasse sua forma de pensar.

4.7 Episódio 7: “*mas, o que é a metade? e meio?*”

Este episódio se entrelaça com o episódio anterior. Neste, estamos interessados na discussão que girou em torno da “metade e meio”. Fizemos uso de dados da aula desenvolvida (A), do terceiro encontro (T) e da reflexão individual (R) da professora.

Na discussão em plenária (na sala de aula), os alunos seguiam participando ativamente conforme a professora fazia as perguntas. Apesar de Rafael dizer, em AD22, que a medida do mural era “*quatro inteiros e maior do que a metade!*”, Maria ainda não estava segura se os alunos do grupo E, especialmente Yara, que era a mais envolvida do seu grupo, realmente haviam compreendido que a parte usada era “*maior do que a metade*”. Então, a professora, no intuito de confirmar se realmente Yara havia entendido ou se apenas aceitou a explicação de Rafael, continuou a discussão:

(AE1) **Maria:** *Agora há pouco, a Yara me falou que essa parte aqui seria... maior ou menor do que a metade, Yara?*

(AE2) **Yara:** *Maior.*

(AE3) **Maria:** *Você tinha me dito que era menor, lembra?*

(AE4) **Yara:** *Ah é, professora.*

Apontando para o canudo, a professora pergunta.

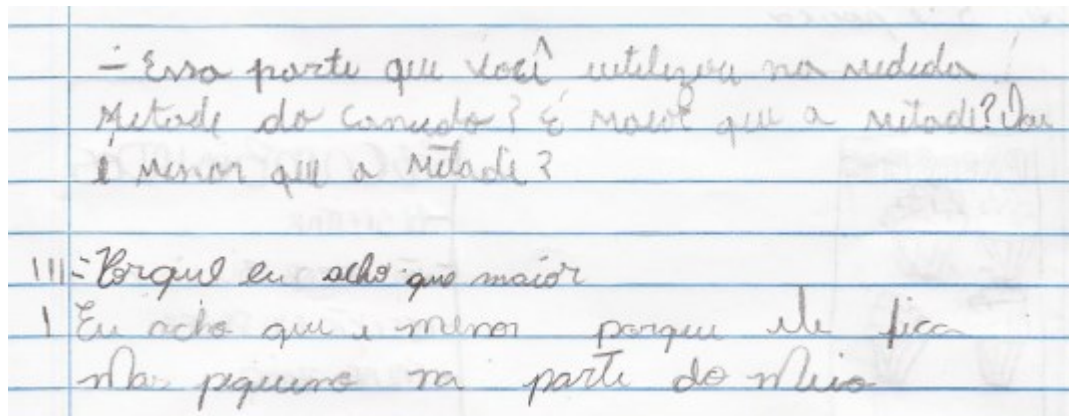
(AE5) **Maria:** *O que faz essa parte ser maior ou menor do que a metade?*

(AE6) **Karina:** *A metade é dividida iguais e aí está maior. Se fosse metade, estariam os dois iguais.*

No diálogo, foi possível perceber que a aluna Yara ainda não tinha convicção de que a “parte” do canudo era maior ou menor que a metade. Ao dizer, em AE2, que a parte usada era maior do que a metade, Yara surpreendeu a professora, pois contrariou todas as vezes que afirmava ser menor que a metade, como mencionamos em AC4, AC6 e AC15, no episódio anterior.

A produção escrita do grupo de Yara, representada pela Figura 7 e transcrita no Quadro 6, confirma que a estudante considerava que a parte utilizada na medida era menor que a metade.

Figura 7 - Produção escrita do grupo E



Fonte: dados da pesquisa

Quadro 7 – Transcrição da Figura 7

Essa parte que você utilizou na medida é metade do canudo? É maior que a metade? Ou menor que a metade?

Porque eu acho que maior.

Eu acho que é menor porque ele fica mas pequeno na parte do meio.

Fonte: dados da pesquisa

Na Figura 7 e no Quadro 7, é possível ver o registro de duas respostas diferentes. A primeira é do aluno Ítalo (AC12 e AC14) e a segunda é de Yara.

Apesar de a professora ainda não compreender o porquê dessa afirmação de Yara, as contribuições no terceiro encontro trouxeram hipóteses que podem ser relevantes nas nossas análises e, também, para o Conhecimento Matemático para o Ensino das professoras.

Após a leitura da produção escrita do grupo E, os professores formadores propuseram duas perguntas para as professoras refletirem: 1) O que vocês acreditam que essa aluna estava pensando?; 2) Como vocês agiriam nessa situação, na tentativa de levar a aluna a compreender a situação? Em um determinado momento da discussão, no pequeno grupo, Maria explica alguns aspectos ocorridos durante a aula.

(TE1) Maria: *Eu também não entendi. Eu falei: me explica o que você quis dizer? Aí, ela falava [risos] aí ela pegava o canudo e me mostrava e ela falava que tava [...] Ela afirmava que aquela parte era menor que a metade. E pra fazer essa menina entender que não era menor que a metade? Aí, o menino que falou que achava que era maior...*

(TE2) Mariana: *Não era só dobrar o canudo no meio e mostrar o que era metade?*

(TE3) Maria: *Aí, o menino fez na frente dela. Aí eu falei: Por que você acha que é maior?*

(TE4) Mariana: *E tinha mais canudos? Porque poderia pegar outro canudo e dobrar no meio.*

(TE5) Maria: *Tinha mais, só que eu não peguei.*

(TE6) Mariana: *Então, deixa eu ver o que é metade, mostra aqui a metade.*

(TE7) Maria: *Aí eu deixei ela explicar, ela explicou. Eu perguntei vocês concordam? Aí outro menino falou assim: “Acho que é maior”. Aí eu perguntei: Porque você acha que é maior? “Porque o meio tá aqui, [dobrou o canudo], e se a medida tá aqui, tá mais que o meio”. O que você achou do que ele falou? “É verdade...”. Então você acha que é menor ou maior que a metade? “Eu acho que é menor”. Gente, aí subiu um negócio...*

(TE9) Sônia: *Mas sabe o que é legal, vê se eu entendi pela escrita dela, menor que a metade, quando você fala, ele é menor que a metade. Ele é menor que a metade [referindo-se a parte da sobra e não usada na medida].*

(TE10) Mariana: *Não. É porque ela tá falando do pedacinho.*

(TE11) Maria: *A parte que sobrou? Não! Mas daí eu achei, eu pensei nessa possibilidade. Mas eu mostrava, eu pegava, dobrava o canudo e falei assim, mas a gente tá falando dessa parte, olha Yara, olha essa parte. Passava o dedo, essa parte que a gente utilizou na medida. Você acha que ela é maior ou menor que a metade? Ela: “Menor”.*

(TE12) Fabiana: *E se você tivesse feito assim: essa é a parte que sobrou e essa é a parte que você utilizou. Essa parte é maior ou menor que a metade? [...] Talvez essa visualização. Porque você escondeu [a parte que sobrou do canudo]. Você escondeu no momento que você dobrou e mostrou.*

No decorrer da conversa, a professora Mariana afirma que o problema de Yara era o conceito de metade, já as professoras Sônia e Fabiana foram em direções contrárias, afirmando que a aluna poderia estar pensando na sobra do canudo, que “é menor que a metade” (TE9), e pelo fato de Maria ter escondido a parte menor quando dobrou o canudo: “Porque você escondeu. Você escondeu no momento que você dobrou e mostrou” (TE12). Maria, porém, permanece convicta de que não era esse o problema da aluna Yara e contesta todas as hipóteses levantadas: “[...]o menino fez na frente dela” [dobrou o canudo e mostrou a metade], em TE3, e “eu mostrava, [...] olha Yara, olha essa parte” [mostrando a parte utilizada e não a dobrada]

em TE11. É possível notar, em TE7, que a professora estava incomodada com a forma como Yara insistia que era menor.

Nesse momento caloroso em que Maria tentava explicar para as demais professoras do grupo a qual estava inserida, sobre as tentativas em ajudar Yara em sua compreensão, a atenção dos demais grupos se voltaram para o que Maria estava falando. Percebendo o interesse dos demais grupos pela sua explicação, Maria sugere ao professor formador leve a discussão para a plenária para que ela pudesse explicar a todas as professoras as hipóteses levantadas.

(TF1) Maria: *Não, gente! Foi nessa hora que deu aquele comichão [...] eu mostrava pra ela de qual parte estávamos falando, eu mostrava com o dedo: “estamos falando dessa parte! Dessa parte!” porque ela podia achar que era a parte que sobrou. Aí eu falava, me explica. Porque vocês viram ali [referindo-se ao trecho do vídeo apresentado] que não dá pra entender né? E ela explicava o que ela tinha escrito. E eu não entendi, aí eu perguntei para o grupo e vocês concordam com ela? Dois meninos... [a professora balança a cabeça demonstrando que dois meninos concordavam com a aluna]... risos... ah concordam, então. Aí eu falei para outro menino e você, concorda então? “Não eu acho que é maior”. Oi?? [professora enfatiza em com entonação] Você acha que é maior!!! Porque você acha que é maior?? “Ah porque aqui é o meio, se tá aqui é porque é maior que o meio”. O que vocês acharam do que ele falou? Daí ela... “Hummm... é verdade!” Daí você acha que é maior ou menor que o meio então? “Menor”. [risos] Ela não mudou!!!*

(TF2) Paula: *Nós levamos a partir do pressuposto que ela estava considerando que era a parte que sobrou. Se é a parte que sobrou, a gente pensou em cortar, comparar, ou até mesmo mostrar pra ela. Daí por outro lado, até falei pras meninas: mas e se ela não sabe como medir o meio? Aí teria que lançar isso e como a gente faz pra descobrir o meio, a metade?*

(TF3) Maria: *Então, mas aí um menino do grupo fez, até as meninas [referindo-se ao pequeno grupo de formação] falaram assim talvez se eu tivesse pego outro canudo e tivesse cortado no meio e pedisse pra ela comparar os dois, talvez para visualizar teria sido melhor. Mas, o menino fez, ele dobrou o mesmo canudo então como estava meio dobrado em cima, deu pra ver o meio e onde tava a marca e aí ele falou assim, ah passou do meio, então é maior. E ela continuou achando que era menor e ela tentava me explicar e eu não entendia o que ela queria dizer com aquilo. Não, a gente voltou umas 3 vezes no mural, então vamos medir de novo.*

(TF4) Paula: *Maria, depois que dobrou o canudo ao meio ela continuou dizendo que era menor que a metade?*

(TF5) Maria: *Ela continuou achando que era menor. E aí quando eu vi, eu não queria falar que era sim ou não, eu queria que eles [falassem]. Ele já tinha dado a explicação dele, ela deu a dela, não chegaram num consenso, então registra as duas respostas e a gente só foi resolver esse conflito quando eu levei para o grupo maior. Eu não resolvi ali, ah você tá certo e você está errado. Eu deixei eles registrarem as duas ideias e depois no grupo grande só que a gente levou pra turma, às vezes se outras pessoas da turma falarem pode ser que ela entenda o que eu não estou conseguindo.*

O diálogo anterior mostra como a professora Maria estava incomodada com a situação. A professora Paula (TF2 e TF4) tentava contribuir para uma compreensão do que se passava, mas Maria não concordava que poderia ser o que Paula sugeria, pois, um estudante do grupo já dava a explicação esperada e, mesmo assim, Yara insistia que era menor. O trecho TF5 é muito ilustrativo, pois mostra como Maria não queria usar sua autoridade de professora para dizer “sim ou não”, pois queria que eles próprios, em particular a aluna Yara, chegassem à conclusão

adequada. No entanto, Maria considera que as tentativas no pequeno grupo já estavam esgotadas e o conflito só poderia ser resolvido no grupo maior.

Foi uma situação realmente desafiadora, que exigiu muito da professora. Ainda assim, é possível notar que, em nenhum momento, Maria ignorou Yara e sua forma de pensar tão distante do que fora previsto nos encontros de planejamento. Por diversas vezes, Maria mobilizou aspectos do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, por exemplo, quando fez uso do canudo e apontou com o dedo para mostrar (TE11 e TF1), acreditando que, assim, as ideias de metade, de maior ou menor do que a metade seriam mais bem compreendidas pela estudante. Em TF3, a partir da colaboração de Paula, Maria até percebe uma alternativa que poderia ter sido utilizada, caso tivesse pegado outro canudo e tivesse cortado no meio e pedido para a estudante comparar os dois, permitindo uma melhor visualização. Aqui, Maria reflete sobre as estratégias utilizadas por ela e tem a oportunidade de ampliar seu Conhecimento do Conteúdo e do Ensino.

Após a explicação de Maria (TF1, TF3 e TF5), as professoras perceberam que, na afirmação de Yara, havia algo que ainda não estava claro até aquele momento, mas que não era o conceito de metade e também não era a confusão com a sobra, como haviam pensando. As professoras compartilhavam do incômodo de Maria, pois não estava fácil compreender o pensamento de Yara.

Voltemos à sala de aula, para avançar na análise da condução da professora Maria e tentar entender como foi o final dessa situação desafiadora. Após a aluna Karina se manifestar e contribuir para a discussão em AE6, Maria percebe na aluna uma possibilidade de ajudar Yara em seu entendimento. Por isso convida a aluna Karina para explicar para todos o que estava falando.

(AE7) Maria: *Vem aqui, por favor. O que faz isso ser maior ou menor do que a metade? Por que não é metade?*

(AE8) Karina: *Porque se fosse metade, ele estaria dividido ao meio assim [a aluna dobra o canudo ao meio, abre e mostra a metade] e ela não está, está maior [...].*

(AE9) Maria: *Vocês entenderam a explicação dela? Quem concorda? [todos levantaram a mão]. Quem gostaria de explicar de outra forma? Para a gente ter a metade a gente precisa dividir...*

(AE10) Letícia: *Em duas [partes] iguais, iguaizinhas.*

(AE11) Maria: *Para a gente ter metade de alguma coisa, lembra que a gente conversou que precisa dividir ela em quantas partes?*

(AE12) Karina: *Duas.*

(AE13) Maria: *Quando a gente quer dividir a laranja como o irmão... [a professora é interrompida pela Karina]*

(AE14) Karina: *Dividir ao meio.*

(AE15) Maria: *O que a gente tem que fazer? Cortar em quantas partes?*

(AE16) Todos: *Duas.*

(AE17) Maria: *Se a gente quer fazer uma continha e fala assim: ah, você ganhou 22 balas e tem que dividir com seu irmão. Ao meio! Metade! Tem que ser igual! A gente faz divisão por quanto?*

(AE18) Todos: *Por dois.*

(AE19) Leticia: *Porque vai ser você e seu irmão.*

(AE20) Maria: *Então a gente vai ter que dividir ao meio.*

A professora Maria pega o canudo, dobra-o ao meio, dirige-se à aluna Yara e complementa:

(AE21) Maria: *E aí Yara, como deu mais que o meio, a gente considerou que essa parte [mostrando no canudo] é maior que a metade. Tudo bem? Entendeu?*

A Figura 8 mostra o momento em que Karina mostra onde é a metade do canudo (AE8).

Figura 8 - Karina demonstrando o meio do canudo.



Fonte: Dados da pesquisa

A professora percebeu que, durante as outras discussões, mesmo mostrando o canudo, dobrando-o na metade e mostrando a parte usada na medida, Yara continuava afirmando que aquela parte do canudo era menor do que a metade e Maria não compreendia o porquê dessa afirmação. Maria, então, convida outra estudante para ir à frente. Não era uma estudante qualquer, era uma estudante que respondia corretamente às perguntas da professora. Foi uma escolha intencional. Maria acreditava que essa estudante poderia contribuir com Yara. Além disso, em AE11, Maria faz menção a um conceito matemático que os estudantes já conheciam: a ideia de divisão. Para tratar da divisão, em A13 e A17, a professora recorre à divisão de um todo contínuo (uma laranja a ser dividida ao meio) e de um todo discreto (22 balas a serem divididas entre dois irmãos). O foco da professora está em associar a noção de metade à ideia de dividir por 2 (AE17), conectando uma ideia que ela já trabalhou com seus estudantes (divisão) com uma que está querendo trabalhar (metade, meio) e avançar nas ideias de maior e

menor do que a metade. Nesse sentido, enxergamos que a professora manifesta o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte. Maria finaliza a discussão entregando um canudo dobrado ao meio para a aluna e complementa: “E aí Yara, como deu mais que o meio, a gente considerou que essa parte é maior que a metade. [...] Entendeu?”

Após toda a discussão (em plenária) com os alunos e no terceiro encontro com as professoras, Maria ainda não havia compreendido por que a aluna considerava a parte do canudo “menor que a metade” do canudo, sendo nítido que era maior. O Professor Formador 2, que estava presente no dia do desenvolvimento da aula, observava as discussões e o esforço da professora em ajudar a aluna. Não compreendendo também a forma de Yara pensar, espera a professora se afastar do grupo e resolve conversar com a aluna para saber o motivo de considerar a parte menor que o canudo. No terceiro encontro, o Professor Formador 2 relata essa parte para as professoras do grupo, inclusive para Maria.

(TF8) Professor formador 2: *Eu estava lá no fundo e vendo a treta lá, aí a Maria foi pra outro lugar, eu pensei “eu não vou aguentar, vou ter que ir lá falar com ela”. Aí eu falei: me fala uma coisa, por que você acha que é menor? Aí ela me explicou, o que eu entendi foi: o canudo assim [o canudo está dobrado], tirou esse pedaço [pedaço não utilizado na medição, um pedaço menor do que a metade]. É menor que a metade? É maior que a metade? Aí, pensando assim, dividiu na metade, esse pedaço da metade até onde foi cortado é menor do que a metade. Ela pegou essa parte do pedaço da metade [as professoras manifestam compreender e, por conta dos comentários de “Ah, entendi”, o som da gravação fica difícil de entender].*

(TF9) Mariana: *Ah entendi, é a parte do meio! Então, ela pegou a metade e daí ela tava olhando para outra parte da metade.*

(TF10) Maria: *Antes de chegar na dobradura é isso?*

A revelação que o Professor Formador 2 trouxe (TF8) parecia ser a peça que estava faltando nesse quebra-cabeça. Todas as tentativas em ajudar a aluna Yara na compreensão de suas ideias não foram em vão, elas apenas não estavam tomando o sentido daquilo que a aluna afirmava com a pergunta que lhe era feita.

Para tornar mais clara a forma de pensar de Yara relatada pelo Professor Formador 2, descrevemos da seguinte maneira: Dado o canudo inteiro, marquemos com uma caneta onde fica sua metade. Se, com uma tesoura, recortamos um pequeno pedaço do canudo (por exemplo, o pedaço não usado para medir o mural), podemos considerar que da marcação na metade do canudo até a parte em que cortamos com a tesoura, temos um pedaço que é menor do que a metade do canudo. Ressaltamos que essa é a descrição feita pelo Professor Formador 2 do que ele compreendeu do que a estudante Yara externalizou. Nada garante que essa foi, de fato, a maneira como Yara estava pensando. Esse episódio ilustra como é complexo o trabalho docente quando ele se importa e dá ouvidos às formas de seus alunos pensarem. Entendemos que o quadro teórico do Conhecimento Matemático para o Ensino seja insuficiente para analisar essas

questões importantes sobre a comunicação em sala de aula. No entanto, dentro do que nos propusemos a analisar neste trabalho, percebemos que a professora precisou mobilizar diferentes subdomínios do MKT, como foi mencionado ao longo deste *Episódio 7* e do *Episódio 6*.

Este episódio da aula foi muito representativo, pois nele foi possível perceber as várias tentativas da professora Maria em orientar os alunos do grupo E para que avançassem nas compreensões das ideias matemáticas propostas, em particular, a aluna Yara. É o que Maria confirma em sua reflexão pós-aula enviada aos professores formadores.

(RD1) Maria: *Às vezes eu quero, espero que eles pensem matematicamente. É isso, sabe? Eu quero que eles pensem matematicamente! É por isso que eu estou muito empolgada com esse momento que a gente tá tendo juntos uma vez no mês. Porque eu saio de lá fascinada com a proposta de vocês que é pensar matematicamente. Isso me enche os olhos! E eu quero. Nós vamos também conseguir fazer [com] que eles consigam fazer as pontes, as ligações e dizer que: ah, isso é isso, mas, isso também pode ser isso. E eu espero conseguir saber fazer algo a mais [porque] eu não quero ficar assim nesse padrão que a gente tá acostumado.*

Esse episódio parece ter impressionado a professora Maria, mas foi um desafio produtivo, porque ela conseguiu promover discussões matemáticas, tal como foi sugerido e discutido no processo formativo.

4.8 *Episódio 8*: existe número entre 0 e 1?

Para realizar a análise do *Episódio 8*²², fizemos uso de áudios do primeiro encontro presencial (P), da aula desenvolvida (A), do terceiro encontro presencial (T) e da reflexão individual (R) da professora.

As situações apresentadas nos dois *Episódios* anteriores tiveram extrema relevância para o desenvolvimento deste episódio. Para chegar ao último item apresentado em sala, a professora direcionou as discussões com os grupos para o que havia planejado atingir no desenvolvimento da sua aula: formas de promover a aprendizagem sobre a existência de números entre zero e um e maneiras possíveis de representar alguns deles.

A professora começou trazendo elementos de uma aula que havia sido ministrada por ela, dias antes de se dispor em desenvolver a aula analisada. Para Maria esses elementos que tinham uma relação muito parecida, poderiam ajudar no entendimento dos alunos. Para isso, convidou os alunos a recordarem o que acontecera.

²² Este episódio sobre o “pedacinho” está analisado, de forma mais concisa, em Gonçalves, Rodrigues, Elias e Trevisan (2019).

(AF1) Maria: *Atenção! O grupo C pegou a mesma medida que a gente usou na aula passada, a gente pegou a lateral da carteira, lembra? E a medida deles deu um inteiro e meio. Quem consegue me ajudar a representar esse meio?*

(AF2) Karina: *Um inteiro e a metade de um.*

(AF3) Maria: *A gente já conversou sobre meio e metade. Metade são as partes, ou seja, quantas metades tenho aqui? [mostrando uma parte do canudo dobrado].*

(AF4) Turma toda: *Uma.*

(AF5) Maria: *Se a gente tivesse que escrever um e meio ou um e metade, como a gente poderia escrever isso com números? Esse canudinho aqui, vocês me disseram que ele representa um inteiro [a professora desenhou no quadro um segmento de reta]. A gente sai de onde? Qual o primeiro número?*

(AF6) Fábio: *Zero.*

(AF7) Maria: *Qual o próximo número depois do zero?*

(AF8) Turma toda: *Um.*

(AF9) Maria: *Olha só! Esse canudinho, se eu fosse expressar numericamente, quanto ele vale? Vale zero ou um?*

(AF10) Turma toda: *Um.*

(AF11) Maria: *Se esse canudo aqui é um, e vocês percebem que a metade é assim [dobrou o canudo], onde que eu represento nessa reta o meio?*

(AF12) Turma toda: *No meio.*

Enquanto falava, a professora desenhava na lousa um segmento de reta, que começava no zero e ia até o um (AF5), convidando os alunos a ajudá-la a representar o meio ($\frac{1}{2}$), fazendo um risco na metade do segmento de reta. Esse momento foi importante, pois houve toda uma preparação para chegar até ali. A professora percorreria todos os itens da tarefa com os alunos, sanando as dúvidas e buscando corrigir os erros. Todavia, o desafio que a professora Maria enfrentaria seria maior, pois chegara o momento de levar os alunos ao registro do que representava o meio (AF11) e outras frações usuais (como o $\frac{1}{4}$).

A professora desejava comparar o canudo com o segmento de reta desenhado na lousa e, com isso, fazê-los perceber a existência de números entre zero e um. Como era de esperar, os estudantes consideraram que o próximo número depois do zero (AF7) seria o um (AF8). É exatamente essa compreensão que a professora desejava ampliar, indicando a existência de números entre o zero e o um.

As discussões estavam ficando cada vez mais calorosas e era possível ver que Maria estava segura a cada pergunta que fazia. Faltavam apenas 15 minutos para o intervalo da aula e os alunos estavam cansados e ansiosos para sair da sala. A professora precisava negociar com eles, indicando que estava quase finalizando a aula. Com isso, ela conseguiu continuar.

(AF13) Maria: *Vocês me disseram que se eu tivesse que representar a metade teria que fazer um risco bem no meio. Porque um canudo inteiro é um, e metade ficaria no meio, certo? Bom, se aqui é zero e se aqui é um, como que eu posso colocar nesse risco aqui no meio? Será que existe algum número que dá para colocar aqui? [a professora está apontando para o risco no meio do segmento de reta que tem, em uma extremidade, o zero e, na outra, o um].*

(AF14) Aline: *Não.*

[...]

(AF15) Karina: *Ou dava pra colocar: o um ali, o três lá e colocava o dois no meio.*

(AF16) César: *Zero, um, dois.*

As respostas dos alunos Karina e César indicam que estavam pensando com base no conjunto dos números naturais, como era de esperar. Quando Aline responde que não há como colocar um número entre o zero e o um, também parece estar considerando os números naturais, que provavelmente já conhece. Em AF15, Karina sugere que, em vez de colocar o zero e o um nas extremidades do segmento de reta, daria para colocar o um e o três nas extremidades, pois, assim, seria possível admitir um número entre eles, o número dois. Maria não deu continuidade aos comentários de Karina e César, mas convidou os alunos a pensarem na possibilidade de existir ou não números entre zero e um.

(AF17) Maria: *Pessoal quem acha que existem números entre o zero e um? [Silêncio]. A pergunta é: Existem números entre zero e um? [...] Atenção, levanta a mão quem acha que não existem números entre o zero e o um. Pode levantar! Tem que escolher uma das duas opções. [Alguns alunos levantam a mão.] Abaixa. Quem acha que tem números entre o zero e o um?*

(AF18) Gustavo: *É de moeda? É de reais? Se for de reais...*

(AF19) Karina: *Tem.*

(AF20) Gustavo: *Tem.*

(AF21) Maria: *Se for de reais tem?*

(AF22) Gustavo: *Tem.*

(AF23) Maria: *Então, o Gustavo está dando um exemplo que se for em reais tem. Dá um exemplo, Gustavo. O que você quer dizer com isso?*

(AF24) Gustavo: *Porque tia, olha ali, a metade de um real [...] é cinquenta centavos.*

(AF25) Maria: *Hummm e agora? E se fosse...*

(AF26) Turma toda: [Nesse momento, muitos falam ao mesmo tempo.]

(AF27) Maria: *Olha! O Luiz falou que a metade de cinquenta centavos é vinte e cinco.*

(AF28) Karina: *É.*

(AF29) Maria: *E agora? [A professora faz sinal para que Gustavo se levante e vá até ao quadro pra registrar o número.] Se esse um fosse um real, o que é que seria aqui, Gustavo? [A professora mostrou o intervalo entre zero e um.] Quer anotar? Como é que a gente anota cinquenta centavos?*

(AF30) Gustavo: *Zero vírgula cinquenta [Gustavo registra no quadro.]*

(AF31) Maria: *Zero vírgula cinquenta. Esse todo mundo conhece, né? Ok, Gustavo, pode sentar. [Nesse momento, Gustavo aponta para o intervalo da reta entre 0 e 0,50 e diz baixinho: “Aqui é vinte e cinco centavos”. E volta para o seu lugar]*

(AF32) Maria: *Pessoal, vocês concordam com isso aqui?*

(AF33) Turma toda: *Sim.*

O uso do sistema monetário não surgiu do nada. A professora já havia trabalhado o sistema monetário com a turma, e, durante a aula, alguns alunos já haviam trazido essa discussão para definir o que seria a metade. Por exemplo, foi falado que a metade de 5 reais era R\$ 2,50 e que a metade de 3 reais era R\$ 1,50. No entanto, no contexto do diálogo transcrito, a

professora queria abordar a representação do meio²³ $\left(\frac{1}{2}\right)$ e sua localização entre o zero e o um. Ao questionar os alunos sobre qual seria um registro possível para o meio, a professora Maria conduziu a discussão, dando abertura às ideias deles próprios. Quando faz a pergunta para a turma (AF17), de certa forma, a professora permite que o aluno traga questões mais próximas da realidade para dentro da sala (AF18). Gustavo conhece o contexto do sistema monetário, provavelmente usa o dinheiro, sabe que existem valores menores que um real, talvez, por isso, tenha feito o registro (AF30).

Percebemos que, ao permitir que o aluno use o exemplo da representação monetária para explicar que existem números entre zero e um, a professora Maria mobiliza o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, pois valoriza as diferentes formas de abordar o conceito de número decimal, como podemos confirmar na sequência dos diálogos, em AF23 e AF24. Ficou claro também que, ao localizar o número (AF31), Gustavo saberia localizar o 0,25 centavos se a professora tivesse perguntado, pois, antes de voltar a se sentar, ele aponta para o intervalo entre 0 e 0,50 e diz baixinho: “Aqui é vinte e cinco centavos”. É possível ver essa ação de Gustavo na Figura 9.

Figura 9 - O aluno Gustavo, após localizar 0,50 na reta numérica, aponta a posição do 0,25.



Fonte: Dados da pesquisa

²³ Para mais detalhes sobre esse tema, ver Muniz, Batista e Silva (2008).

Retomamos um recorte do primeiro encontro presencial da formação continuada, quando as professoras discutiam em plenária com os professores formadores algumas maneiras de promover a representação do meio $\left(\frac{1}{2}\right)$, último item da *Tarefa dos Canudos*. Esse recorte é significativo, pois a professora Maria antecipou que seus alunos poderiam fazer referência ao sistema monetário.

(PC1) Professor Formador 1: *Qual é o registro que você, enquanto professora, esperaria?*

(PC2) Ana: *Acho que por desenho, a priori, e não com número...*

(PC3) Professor Formador 1: *Por que não com número?*

(PC4) Ana: *Apesar de que no ano passado, no 4º ano, eu já tinha aluno que já sabia a representação de $\frac{1}{2}$, a fração.*

(PC5) Sônia: *Por isso que eu gosto de fazer um levantamento do conhecimento prévio do que eles trazem de casa, porque eles têm a vivência deles.*

(PC6) Professor Formador 1: *Então espera aí, se aquele aluno eventualmente vem e fala “ah, é assim que escreve”, é porque alguém já apresentou isso pra eles antes.*

(PC7) Ana: *Isso. Ele já viu, talvez, por uma receita da mãe, ele ajudou a mãe a fazer uma receita e sabe que isso é meio.*

(PC8) Maria: *É! Ou, se não, o sistema monetário pode contribuir, porque entre 0 e 1, que é onde ela quer chegar, eu posso pensar nos cinquenta centavos que é o 0,5.*

(PC9) Ana: *Mas eles têm dificuldades com o sistema monetário! Eles têm mais dificuldades com o sistema monetário do que com fração.*

(PC10) Mariana: *É, eles não pensam isso!*

Para um primeiro encontro, em que os grupos ainda estavam se consolidando, as discussões em plenária trouxeram importantes reflexões. Em PC1, o Professor Formador 1, ao lançar a pergunta às professoras sobre o que esperar dos alunos como um registro de “meio”, a intenção estava em identificar maneiras que acreditavam ser suficientes para a promoção do registro, favorecendo a compreensão da existência de números entre zero e um. As professoras comentaram (PC5, PC7 e PC8) que a vivência dos alunos poderia ajudar na promoção desse conhecimento, cada uma fazendo suas respectivas colocações. Duas das professoras participantes (PC9 e PC10), porém, discordaram da colocação da professora Maria, feita em PC8, por acreditarem que dificilmente um aluno faria analogia com o sistema monetário.

Como Maria previu em PC8, Gustavo confirmou (AF18) ao sugerir que, se fosse em moeda ou em reais, existia, sim, número entre o zero e o um. Nesse sentido, entendemos que a professora manifestou o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, ao perceber que o sistema monetário poderia ser um recurso utilizado pelos estudantes para aprender que existem números entre zero e um.

No terceiro encontro, quando foi apresentado o episódio em que o aluno anota, no segmento de reta, os cinquenta centavos e, antes de se sentar, aponta onde ficariam os vinte e cinco centavos (AF31), foi possível perceber a surpresa da professora Maria ao assistir ao vídeo.

- (TG1) **Sônia:** *E essa parte que ele fala?*
- (TG2) **Professor Formador 2:** *Ele fala e sai.*
- (TG3) **Cirlene:** *E aqui é o 25.*
- (TG4) **Professor Formador 2:** *Aqui é o vinte e cinco.*
- (TG5) **Maria:** *Gente! Eu nem vi.*
- (TG6) **Paula:** *Ele falou?*
- (TG7) **Professor Formador 2:** *Ele aponta aqui. É interessante porque, assim, uma coisa é pensar que 25 centavos é metade de 50 outra coisa é localizar na reta.*
- (TG8) **Sônia:** *Foi um outro menino que falou 25 centavos?*
- (TG9) **Professor Formador 2:** *Isso, um outro menino que falou que é 25, e aí você falou: olha, fulano falou 25. Mas, esse aí, esse daí eu achei interessante porque ele apontou na reta.*
- (TG10) **Maria:** *É! E o outro lá, a metade de 50 centavos é 25 centavos, ele falou.*
- (TG11) **Professor Formador 2:** *Essa é uma ideia interessante, mas, pra mim, matematicamente, mais interessante é ele saber localizar na reta.*
- (TG12) **Sônia:** *Aí é que faz toda diferença a vivência com o dinheiro.*
- (TG13) **Professor formador:** *Exato!*
- (TG14) **Maria:** *Gente se não fosse o dinheiro, eles iam achar que não tem número mesmo. Graças ao dinheiro que eles levam essa ideia, né? [...] Lá na hora eu tava eufórica pra terminar porque [inaudível] tinha o recreio do 3º ano, do 4º ano e em seguida era o nosso, já tava no recreio do 4º ano, aí eu falei “gente, agora que o negócio tá bombando, vou ter que parar”. [...] Não escutei, não vi ele mostrando. Se eu tivesse visto eu teria... passou a oportunidade! Tá vendo, quando a gente vai se ver, vê algo que a gente vê o que perdeu? Eu não tinha visto isso, senão eu teria falado: então, me mostra, cadê?*

Após assistir ao vídeo e ver Gustavo apontando onde estaria o 0,25 (que ele enxergava como vinte e cinco centavos), Maria lamenta (TG5) não ter visto a ação do aluno e ter perdido a oportunidade. Comenta que estava preocupada com o horário avançado (TG14), pois temia não conseguir promover as discussões. As professoras Sônia e Maria acreditam que o sistema monetário contribuiu para o registro de 0,50 feito pelo aluno (TG12 e TG14), algo já mencionado sobre a maneira como a professora antecipou a forma de pensar de seus alunos, ainda no primeiro encontro de formação (PC8). Nessa discussão, o Professor Formador 2 faz outro apontamento, considerando que, matematicamente, mais interessante do que o aluno Gustavo dizer que cinquenta centavos é a metade de um real é o fato de localizar, na reta numérica, os cinquenta centavos, assim como apontar onde os vinte e cinco centavos ficariam (TG7, TG9 e TG11).

A *Tarefa dos Canudos* tinha como proposta introduzir os números racionais na forma fracionária por meio do significado de medida. A sequência natural da tarefa seria problematizar o canudo e como ele permitiria pensar em um número para o meio. Maria buscava permanecer nessa direção, fazendo conexões entre o canudo e o segmento de reta na lousa, entre a marcação do canudo dobrado no meio, reconhecido pelos alunos como metade, e o risco no meio do segmento de reta. Assim, Maria mobilizava o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, acreditando que estabelecer essas conexões favoreceria a localização do meio entre os números

zero e um. No entanto, os alunos foram na direção do sistema monetário, possivelmente porque é mais próximo deles, e a professora lidou bem com a situação, mostrando seu repertório para abordar o tema.

Em TG14, Maria lamenta ter perdido a oportunidade de explorar o fato de que Gustavo também havia localizado, no segmento de reta, os 25 centavos ou o número 0,25. Ficou, porém, a noção de que a tarefa e a condução da aula permitiriam explorar a localização do número 0,25 no segmento de reta, caso fosse a intenção.

Na sequência, apresentamos a continuação da discussão, na plenária da aula, depois que Gustavo aponta, no quadro, no segmento de reta, os cinquenta centavos e registra o número 0,5. Vemos que Maria retoma o segmento de reta e busca trabalhar a ideia da metade, já conhecida dos alunos, para chegar à representação do meio.

(AF32) Maria: *Pessoal, vocês concordam com isso aqui?*

(AF33) Turma toda: *Sim.*

(AF34) Maria: *Sim? Olha só...Agora pouco a Aline me falou que a metade de 10 é 5. O que isso tem a ver?*

(AF35) Karina: *Porque é metade. Se você tem 10 reais e sua mãe pede pra dar metade para o seu irmão, você vai ficar com 5 reais.*

(AF36) Maria: *Agora, ouçam o que eu vou falar, eu tenho aqui uma medida e aqui tenho outra. [A professora aponta para o zero e, depois, para um no segmento de reta]. Aqui eu tenho quantos inteiros?*

(AF37) Turma toda: *Um!*

(AF38) Maria: *Um inteiro. Zero para o um, tenho um só. Quando eu faço uma marcação no meio e quero saber a metade, eu divido esse 1 em quantas partes?*

(AF39) Luiz e André: *Duas.*

(AF40) Maria: *Não é? Vocês não me disseram que quando eu quero uma parte eu divido ao meio? Em quantas partes? O que acontece se eu pegar 1 e dividir em 2 partes? [nesse momento a professora escreveu no quadro o algoritmo da divisão 1 por 2].*

(AF41) Priscila: *Vai ficar com 50 centavos se for em reais.*

(AF42) Maria: *Ah, vai ficar 0,50. É possível dividir 1 para 2?*

(AF43) Karina: *Se for dinheiro.*

(AF44) Maria: *Se não for dinheiro não tem jeito?*

(AF45) Priscila: *Se for comida também dá.*

(AF46) Maria: *Esses dias eu perguntei pra vocês quando sobra a última bolacha do pacote e você tem que dividir com seu irmão, você fala que não dá? O que você faz? Pessoal olha só, é possível dividir 1 para 2?*

(AF47) Turma toda: *Não!*

(AF48) Maria: *Olha só! Um dá pra dividir pra dois? A resposta é: não inteiro! Mas, se eu cortar, dividir... Olha só o que acontece, nós vamos aprender daqui uns dias a dividir esse um por dois. Quando a gente divide um por dois, significa que alguém vai ganhar um inteiro? [Nesse momento, a professora foi até a lousa e colocou um zero no quociente e uma vírgula, porque um não vai dar um inteiro].*

(AF49) Karina: *Não, sempre a metade.*

Em AF38 e AF40, Maria associa a ideia de meio à divisão de 1 por 2. Nesse momento, entendemos que a professora mobiliza o Conhecimento Especializado do Conteúdo, pois está

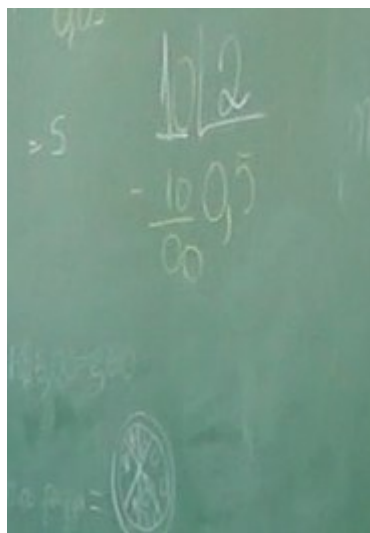
transitando entre o número $\frac{1}{2}$ e o processo de divisão de 1 por 2 para tentar levar os alunos a compreenderem.

Em AF42, Maria levanta uma questão fundamental: *É possível dividir um para dois? É comum alguns estudantes responderem que não (como ocorreu em AF47), uma vez que ainda não aprenderam a realizar divisões com resto diferente de zero. No entanto, esse era o desafio de Maria, trabalhar o fato de que é possível usar uma representação para um número cujo significado é uma divisão indicada, isto é, Maria estava focando o significado de fração como quociente. Novamente, a professora mobiliza o Conhecimento Especializado do Conteúdo, pois está transitando entre o significado de $\frac{1}{2}$ como uma medida (o canudo e a localização do número no segmento de reta) e como uma divisão indicada. Em AF48, a professora avança e conecta a discussão a outro tema de difícil compreensão: o algoritmo da divisão entre números naturais com o quociente decimal. Não era o objetivo da *Tarefa dos Canudo* trabalhar essa divisão, mas a professora optou por realizá-la na lousa (Figura 9), algo que iriam aprender somente dali alguns dias (AF48). Por não ser o foco da aula, Maria não se aprofunda na explicação, coloca o “zero vírgula” enquanto pergunta: “[...]alguém vai ganhar um inteiro?”, acrescenta o zero no dividendo, transforma o 1 em 10 décimos, conforme diálogo a seguir, e divide o 10 por 2, obtendo o resultando final 0,5.*

(AF50) Maria: *E se transformar esse um inteiro em dez partes, [nesse momento a professora acrescenta um zero ao lado do um no dividendo para resolver a conta]. *Aí dá pra dividir?**

(AF51) Karina: *Sim. *Aí coloca o 10 lá e vai ficar 5.* [é possível ver a conta resolvida com alunos na figura 10]*

Figura 10 - Algoritmo da divisão 1 por 2, feito pela professora



Fonte: Dados da pesquisa

A professora queria relacionar o 0,5 com o 1 dividido por 2, ou seja, ela queria conectar o tão comentado meio com o resultado da divisão de 1 por 2. A explicação da professora para o algoritmo da divisão foi rápida e superficial. Ela não tinha tempo para isso e não era o objetivo central da aula, mas foi a saída que encontrou para conectar as ideias de meio, metade e 1 dividido por 2 com as representações 0,5 e $\frac{1}{2}$.

Após a professora escrever na lousa o 0,5 como resultado da divisão de 1 por 2, outra questão central surgiu e a personagem principal foi, novamente, a aluna Yara. Vejamos o diálogo.

(AF52) Maria: *Pessoal, como é que a gente chama esse 0,5, alguém sabe?*

(AF53) Priscila: *Cinco centavos.*

(AF54) Maria: *Cinco centavos?*

(AF55) Yara: *Dá para falar zero vírgula cinco, porque se fosse centavos, ia ter outro zero na frente do cinco, então não é centavos.*

(AF56) Maria: *Olha! A Yara falou que se fosse cinco centavos, ia ser assim ó ia ter outro zero diante do 5 [e escreveu no quadro 0,05]. Se só tem esse 5 depois da vírgula, ele se parece com quanto?*

(AF57) Karina: *Com 50.*

(AF58) Maria: *Pressupõe outro zero aqui, né? Ok. [mostrando um zero depois cinco].*

Não tem a ver com que a Aline falou? Ela tinha falado que a metade de 10 é 5. Será que de alguma forma ela acertou?

(AF59) Toda turma: *Sim!*

(AF60) Maria: *O Gustavo, quando colocou 0,50, se eu apagar esse zero vai mudar alguma coisa? [A professora apagou o zero que o aluno Gustavo havia colocado para localizar o 50 centavos no segmento de reta, conforme Figura 9.] Parece que sim, mas não. Olha o zero vírgula cinco aqui.*

A discussão levantada por Yara é de extrema importância. Há um salto entre falar em 50 centavos ou R\$ 0,50 e o número 0,50 ou 0,5. Esse salto pode gerar dúvidas entre os alunos. Quando, em TG9 e TG11, o Professor Formador 2 considera que o mais interessante, matematicamente, é que o aluno Gustavo tenha localizado o número no segmento de reta, talvez ele estivesse se referindo ao fato de que 50 é um número maior do que 1, mas, no contexto em que estavam trabalhando, tratava-se de 50 centavos (e não o número abstrato 50) que pode também ser representado por 0,50 real. Essa passagem não é simples de ser compreendida, logo, é importante problematizar. Os professores formadores, por meio das questões 5 e 6 (Apêndice B), tentaram levar isso para o terceiro encontro.

(TH1) Professor Formador 2: *Essa questão do 0,5 pra mim ela tem um ponto. A maneira como ela falou bem rápida, 0,50 se eu tirar esse zero, parece que muda, mas não, é a mesma coisa. Não é tão simples, pensar só o número 0,5, 0,50 que é a mesma coisa. Ai eu pergunto como seus alunos ficaram nessa relação? Mas para mim o mais importante do que isso, se os alunos fizerem uma relação. Mas para mim, mais importante do que isso é se os alunos forem fazer uma relação com os 50 centavos eu não sei se muda pra eles isso, o fato de tirar o zero.*

(TH2) Professoras: *Com certeza muda.*

(TH3) Professor Formador 2: *Tem um momento que a aluna fala: “é cinco centavos”, na hora que você faz a divisão lá do 1 por 2 e deu 0,5, uma aluna falou é cinco centavos. Aí você fala é cinco centavos? Aí alguém fala: é cinquenta centavos.*

(TH4) Maria: *Ela [Yara] fala que tinha que ter um zero a mais na frente do cinco pra ser cinco.*

(TH5) Professor Formador 2: *Chega um momento que a aluna fala assim: não é centavos porque tinha que ter um zero na frente do cinco. Aí a Maria foi lá escreveu isso: 0,05 [para ser centavos]. Eu interpretei diferente a fala da menina, quando ela fala que tem que ter um zero na frente do cinco, eu não sei na frente do que ela está falando. Se o zero que ela está falando fosse aqui ó [foi no quadro e apontou o dedo esquerdo para a vírgula e com o direito fez um zero depois do 5] aí ela estaria entendendo que aquela divisão de 1 por 2 daria 50 centavos. Só que como ela não colocou o zero eu tenho a impressão que ela não associou esse 0,5 com 50 centavos. Porque 0,5 pra ela é uma coisa e 0,50 centavos é outra.*

(TH6) Fabiana: *0,5 seria metade e 0,50 seria 50 centavos.*

(TH7) Professor Formador 2: *Então pra mim ali, mora uma dificuldade da relação entre 50 centavos com 0,5 ou o 0,50. A dificuldade da relação do sistema monetário com o número abstrato. Eu não estou dizendo que não serve o sistema monetário, muito pelo contrário, ele serve muito bem. Só que cuidado para não achar que a compreensão está bem feita, e às vezes ela não está. Depois você vê, a reação da menina não é clara se é aquilo lá que você escreveu na lousa.*

(TH8) Maria: *É eu tinha que ter pedido pra ela escrever na lousa. Na minha cabeça tá tão claro, você ouve o aluno, às vezes ele quis dizer isso e não é.*

(TH9) Professor Formador 2: *Exato! [...] uma ideia é claro, apareceu lá a ideia de um número entre zero e um, apareceu o 0,25, ou os vinte e cinco centavos. A existência apareceu, e aí a partir disso pensar que eles [compreenderam], mas o processo de abstração é demorado, faz sentido trabalhar nesse concreto aí com o sistema monetário. Talvez a abstração vai vir mais pra frente mesmo, talvez nos anos finais do ensino fundamental quando ela for discutir mais a reta quando ela for aparecer com mais naturalidade. Mas é interessante olhar com mais cuidado para isso daí. Essa discussão pra mim foi importante.*

Em AF55, a aluna Yara parece externalizar essa complexidade. Para ela, o número é zero vírgula cinco, mas, se fosse no contexto do sistema monetário (centavos), teria que ter outro zero na frente do cinco. Não é possível ter certeza do que Yara estava querendo dizer, mas temos duas hipóteses: a primeira é a mesma que Maria apresentou em AF56, quando considera que o “*outro zero na frente do cinco*” seria entre o cinco e a vírgula, ficando 0,05 real; a segunda é que o “*outro zero na frente do cinco*” seria do lado direito do cinco, ficando 0,50. Acreditamos que essa segunda seja a mais provável e, nesse caso, Yara está buscando estabelecer uma relação entre o número 0,50 e o 50 centavos, como mencionado pelo professor formador (TH5). Para uma criança que está começando a aprender, não é simples compreender que 0,5 é o mesmo que 0,50, é preciso tomar “*cuidado para não achar que a compreensão está bem feita*” como mencionado em TH7 pelo professor formador 2. Em AF60, Maria tenta explicar que não há diferença entre 0,50 e 0,5: “*Parece que sim, mas não*”. Entendemos que uma explicação desse tipo merece mais tempo, que a professora não tinha naquele momento. Pois “*o processo de abstração é demorado [...] é interessante olhar com mais cuidado para isso*”, afirma o professor em TH9.

Por fim, após a explicação de que o 0,5 (meio) é o resultado da divisão de 1 por 2, a representação na forma fracionária foi feita por uma aluna no quadro, sem grandes dificuldades, pois, provavelmente, já tinha visto aquela escrita antes.

Figura 11 - A representação fracionária do meio feita por uma aluna



Fonte: dados da pesquisa

A professora atingiu seu objetivo, mas ficaram algumas lacunas, que podem ser retomadas em aulas futuras. Maria comenta isso em sua reflexão individual e valoriza as diversas possibilidades que a *Tarefa dos Canudos* permitiu. Aceitar o desafio de introduzir o conteúdo fração de uma forma diferente da que estava acostumada, como os livros didáticos apresentam e como inicialmente iria apresentar, foi mais um desafio que a professora se propôs a aceitar.

(RE1) Maria: *A aula de hoje, fez um registro na memória deles, causou algo né? Foi uma atividade diferenciada. [...] Uma coisa que eu sempre procuro fazer é sempre retomar os conteúdos e então isso daí vai dar gancho para eu poder dar continuidade e assim em muitas situações né, e a reta numérica, essa questão dos números que existem entre o 0 e 1, é a fração, os decimais, até medida de comprimento, tudo isso depois dá para voltar e fazer uma ponte com a aula de hoje. Então, eu tô assim bem realizada de ter feito e eu espero que as nossas colegas também se envolvam e apliquem porque é um ganho, é um dia que você faz uma atividade dessa, mas que tem retorno e eu acredito que os meus alunos vão conseguir pensar um pouco mais além.*

4.9 Episódio 9: o fim!

Nossa intenção neste último episódio é trazer momentos e fatos acontecidos durante os encontros de nossa pesquisa e que não fazem uma conexão direta com os *Episódios* anteriores, mas que são relevantes para nossa análise. Para realizar a análise do *Episódio 9*, fizemos uso de áudios (T) do terceiro encontro e da reflexão individual (R) da professora.

A forma como a professora conduziu os questionamentos, nos grupos e na plenária com sua turma, chamou a atenção do Professor Formador 2 e foi algo comentado por ele no terceiro encontro do grupo de formação. Por considerar que Maria soube conduzir os grupos nas discussões e depois em plenária – prática bastante difundida no Estudo de Aula - o professor perguntou à Maria como ela procede diariamente ao abordar um assunto em suas aulas.

(TD1) Professor Formador 2: *Maria, uma coisa que queria te perguntar: a gente discutiu essa tarefa por meio da aula da Tânia que foi uma aula que a gente já tinha desenvolvido. A gente não chegou a planejar de como seria a dinâmica. A dinâmica, foi você quem pensou. Então você pensou em como apresentar, você pensou em dividir em grupos e você pensou numa plenária. Foram opções suas que você faz normalmente, você faz às vezes ou você fez por conta da tarefa que a gente ia lá desenvolver?*

(TD2) Maria: *Não! Eu me inspirei totalmente no que vocês fizeram com a gente.*

(TD3) Professor formador 2: *Tá, então não é uma prática constante?*

(TD4) Maria: *Olha, na verdade eu não tenho esse costume de resolver tudo em grupinhos e só no final trazer pra sala. Eu sempre levo ideias que surgem para o grupo maior, mas eu levo na hora. [...] Então... Mas assim, essa técnica que a gente leu no texto [a professora se refere à prática do ensino exploratório, do texto Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios, Canavarro, 2011] que eu apliquei a atividade é o que estou propondo para minha sala a partir de agora. Não é uma prática que eu fazia antes.*

(TD5) Professor formador 2: *Minha pergunta foi no sentido assim, você desenvolveu a aula numa abordagem como a gente espera que seja.*

(TD6) Maria: *Foi inspiração no modelo que vocês apresentaram aqui. Não surgiu da minha cabeça não, foi inspiração do que vocês fizeram com a gente.*

O diálogo entre o Professor Formador 2 e Maria nos prova o quanto a professora estava engajada na proposta da formação e o quanto valorizou o trabalho colaborativo. Como ela mesma disse, se não fosse a formação oferecida às professoras, inspirada na metodologia do Estudo de Aula, certamente não desenvolveria a aula como aconteceu, buscando promover a interação entre os alunos na compreensão das ideias matemáticas (BOAVIDA; PONTE, 2002).

A inspiração que Maria menciona em TD2, TD4 e TD6, ao desenvolver a *Tarefa dos Canudos* com seus alunos da forma como aconteceu, foi algo que a própria professora comentou na sua reflexão após a aula (RB1, Episódio 6), ao responder o questionário feito pelos professores: “*se considerava que estava preparada para explorar matematicamente as respostas dadas pelos alunos*”.

(RB1) Maria: *Primeiro que eu nem teria dado essa aula. Se não fosse o curso que vocês estão ministrando com a gente, né? E assim é o que a gente aprendeu como vocês me deu muita base para eu conseguir resolver o que aparecesse.*

Para entendermos melhor essa valorização da professora Maria à formação continuada e a inspiração que ela menciona ter vindo do grupo de formação, é importante trazer para o leitor algumas partes da reflexão da professora após a aula.

Com seus alunos, a professora Maria seguiu a mesma abordagem da *Tarefa dos Canudos* que vivenciou no grupo de formação, mas trouxe uma importante questão a ser

considerada em relação ao que os professores formadores perguntaram no roteiro enviado para nortear sua reflexão individual: “Os estudantes desenvolveram a tarefa proposta da maneira como você previu? Algo não saiu como o esperado?”

(RB2) Maria: *Então assim, o que eu percebia que da forma como a gente fez no nosso grupo que foi entregue as atividades a gente leu, entendeu e fez. Com eles ainda não é possível, porque eu precisei medir bastante, tinha um grupo que não entendia a pergunta, a tarefa... Então eu tinha que ir lá ler com eles com calma, retomar, mas qual que é a parte que eu tô falando, a parte que vocês usaram? Pega lá no canudo mede de novo, então é essa parte, sobre essa parte, olha para ela, se concentra nessa parte, então pergunta é essa parte é tal coisa? Então tinha que conduzir porque às vezes só lendo eu via que eles tentavam dar resposta e a resposta fugia... não era, não era no sentido diferente eles estavam indo por outros caminhos. Então não deu só para entregar a tarefa e deixar eles se virarem, eu precisei explicar individualmente nos grupos né? Um ou outro que respondeu assim algumas perguntas assim mais sozinhos, mas a maioria tive que passar explicando.*

Na reflexão da professora, ficou evidente que ela não “reproduziu” a apresentação da *Tarefa dos Canudos* com seus alunos da mesma forma que foi apresentada no grupo de formação para as professoras. Uma coisa muito importante e que a professora levou em consideração foi a faixa etária dos alunos. Ela compreende que estão em formação na aprendizagem, que cada aluno tem sua individualidade e aprende em tempo e de forma diferente uns dos outros. Portanto, não interpretariam a tarefa da mesma maneira que um adulto.

Evidenciamos que a professora conhece muito bem seus alunos e manifesta o subdomínio do Conhecimento Especializado do Conteúdo ao “*ler com eles com calma, retomar, [...] conduzir [...] a resposta*”, pois entende que não tem como “*entregar a tarefa e deixar eles se virarem*”. A professora Maria precisou intervir várias vezes, mas, mesmo assim, o que planejara acabou acontecendo, como relata em sua reflexão:

(RB1) Maria: *Eu posso dizer que foi...tranquilo. Porque assim, a maioria escolheu objetos grandes, só teve um grupo que escolheu a cola que é menor que um canudo. Eu tinha um pouco de preocupação deles escolherem objetos muito pequenininhos, ou que a medida desse exato. Tanto que uma das perguntas era: “Esse canudo coube sempre inteiro? Escolha outro objeto. Então não precisou dessa pergunta porque todos deram alguns canudos inteiros e uma parte. Fora esse da cola que deu menos um inteiro, mas deu para trabalhar com todos os objetos que eles escolheram.*

A professora tinha um pouco de preocupação quanto às escolhas dos objetos, mas estava preparada para isso, pois, em seu planejamento, havia uma pergunta que não precisou utilizar, porque os objetos escolhidos sempre deram mais que a metade. Maria manifesta o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes ao “ter uma carta na manga”, caso o objeto escolhido tivesse a exata medida de um inteiro. Ao antecipar a “possível escolha dos alunos”,

Maria demonstra ter muito cuidado com seu planejamento e tem claramente delimitado seu objetivo.

(RA2) Maria: *O objetivo era fazer com que as crianças percebessem a necessidade de representar partes de um inteiro e sim elas conseguiram pensar sobre isso. Todos os grupos trabalharam com partes de um canudo, né no caso foram partes maiores do que a metade, então a questão de quantas vezes essa parte cabe dentro do canudo, de todos só deu uma vez. Mas surgiu depois da ideia aí se fosse uma parte pequenininha dela caberia mais vezes? Então assim deu para representar. Claro que em forma de palavras, na maioria das vezes um inteiro e um pedaço, um pouco mais do que a metade, o meio. E numericamente a gente começou adentrar quando a gente foi para discussão no final, ele [aluno Gustavo] chegou no 0,5. Então comecei a instigar eles: “Como que a gente poderia apresentar isso numericamente, sem palavras?” Eles já estavam se acostumando com essas ideias: de que não é um inteiro, também não é metade, então, já foi interessante ouvir eles.*

O foco da professora era levar os alunos ao registro de um número entre 0 e 1, logo era importante ter “as partes” de um canudo para esse registro. Em princípio, a representação saiu como a professora disse: “*em forma de palavras, [...] um inteiro e um pedaço, um pouco mais do que a metade, o meio*”. Em sua reflexão, identificamos que Maria desenvolve o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, pois deixa claro que ouve seus alunos, valoriza seus pensamentos e, a partir daí, os conduz para aquilo que era seu objetivo, isto é, para só depois entrar na representação numérica, “*sem palavras*”.

Olhando para o desenvolvimento da tarefa conduzido pela professora Maria e para as inúmeras manifestações dos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino identificados, talvez pudéssemos pensar que se tratava de uma professora com anos de experiência de sala de aula. Isso seria um engano! Em sua reflexão, a professora faz uma importante revelação quanto a seu trabalho com a *Tarefa dos Canudos*.

(RE1) Maria: *Sobre eu trabalhar a fração dessa forma com a que eu trabalhava antes. Bom assim, a minha experiência de quinto ano é muito pouca, eu não tenho uma bagagem para falar: Olha eu sempre trabalhei assim! É a primeira vez que eu tô ensinando fração, entende? Mas eu já tava assim pronta para dar o conceito e aquelas atividades de sabe dos desenhos com partes pintadas, partes não pintadas, denominador, numerador, coisas assim que eu vou trabalhar, [...] eu até queria saber opinião de vocês sobre isso, porque na verdade acho que não tem como fugir desses conceitos básicos né? Mas eu entendo que a gente tem a questão de levar o aluno de sentir a necessidade daquilo antes da gente chegar dizendo: Olha é isso! Então primeiro eles sentem a necessidade de explorar e depois a gente nomeia. Então acredito que seja esse o caminho... Eu [me] segurei, não trabalhei fração ainda [...] Mas eu não teria iniciado uma atividade como essa. Então o curso fez toda diferença. O aprendizado que a gente teve com vocês, fez toda a diferença pra fazer uma atividade como essa, hoje.*

A professora Maria revela que era a primeira vez que trabalhava o conteúdo fração. Para uma professora principiante, surpreendeu-nos a forma como Maria conduziu a aula, sempre demonstrando segurança e autonomia a cada abordagem que fazia com seus alunos. Maria

valorizou a experiência que vivenciou, como já fez em outros momentos, sempre enfatizando que a formação continuada, da qual participava, tinha sido a principal responsável pelas experiências que tinha vivenciado no grupo e em sua prática.

Ao ser questionada se as discussões feitas nos dois primeiros encontros da formação continuada contribuíram (e foram suficientes) para o desenvolvimento do seu planejamento, Maria responde:

(RF1) Maria: *Olha sobre as discussões no encontro, com certeza...Nossa! Com certeza colaboraram! Na verdade, eu me apoiei totalmente naquilo, eu ainda não sinto muito autonomia, [...] na hora de fazer as perguntas eu dei o meu jeitinho de escrever por exemplo, eu estava muito incomodada com o pedacinho que vocês se referiram. Então eu não usei essa palavra, eu usei parte, na pergunta. [...] E eu acho que deu para entenderem e algumas coisas eu já esperava por conta da discussão que a gente teve né? Porque acho que isso é o principal professor gente tem que fazer aquilo que ele quer propor para o aluno, para ele sentir o nível de dificuldade, daí a gente vai pensando e vai imaginando os caminhos possíveis, que os alunos poderiam pensar. E isso é excelente, isso contribuiu e acabou dando certo.*

Desde o primeiro encontro, a professora Maria demonstrou seu comprometimento com o grupo e sua aceitação da proposta. Não foi somente por palavras que identificamos isso, mas em suas ações, nas contribuições para o grupo, no desenvolvimento da sua aula e na reflexão individual. Isso nos dá um retorno de que a formação continuada da forma como foi proposta, com a metodologia do Estudo de Aula, atingiu seu objetivo.

(RG1) Maria: *A aula de hoje, ela, fez um registro na memória deles causou algo né? Foi uma atividade diferenciada. Então eu sempre retomo, eu sempre volto, [...] se o professor dá uma atividade, fecha a caixinha, abre a próxima e deixa para lá, se perde né? Então uma coisa que eu sempre procuro fazer é sempre retomar os conteúdos e então isso daí vai dar gancho para eu poder dar continuidade e em muitas situações, a reta numérica, essa questão dos números que existem entre o 0 e 1, a fração, os decimais, até medida de comprimento tudo isso depois dá para voltar e fazer uma ponte com a aula de hoje. Então eu tô assim bem realizada de ter feito e eu espero que as nossas colegas também se envolvam e apliquem, porque é um ganho! É um dia que você faz uma atividade dessa e tem retorno. E eu acredito que os meus alunos vão conseguir pensar um pouco mais além, quando a gente começar a entrar com os conceitos, caso eu vou entrar com a fração agora, já entrei né, eu falo assim, entrar na parte que a gente vai nomear, dar nome aos bois. Porque ele já tem algumas ideias, saiu lá um sobre dois. Então eles também precisam saber nomear, como a gente lê aquelas frações. Então esse também é importante. É o que eu imagino que eu vou acabar entrando de agora para frente.*

Maria finalizou sua reflexão fazendo importantes considerações sobre sua aula e externalizou seus sentimentos a partir de tarefa desenvolvida. Mencionou também a importância do apoio que recebeu da comunidade escolar, dando o suporte necessário para que ela frequentasse a formação continuada e, em agradecimento, disse como pretendia retribuir à escola e aos colegas.

(RH1) Maria: *Eu agradeço a oportunidade. Fiquei muito feliz! Você viu que a minha diretora, minhas coordenadoras, elas vieram colocaram uma auxiliar a minha disposição se eu precisasse? Então porque a gente sabe que é uma atividade que tem um retorno, né? Que a*

gente tá aprendendo, tá estudando, tá contribuindo com a gente, com os outros. E até eu queria muito depois ter acesso ao vídeo que você recortar algumas partes, se for possível tá? Até para socializar com as minhas colegas de quinto ano, que lá na escola nós somos em quatro, quatro turmas de 5º anos. E até nos quartos anos na verdade, [...] nós temos mais quatro turmas de 4º anos, então dá pra socializar com a escola, é uma forma também de retribuir. Eu gostaria de ter oportunidade tá bom? Obrigada pelo seu tempo também. Boa noite!

A reflexão da professora nos permitiu identificar fortes indícios de que as oportunidades de desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino, promovidas pelo processo formativo inspirado na metodologia do Estudo de Aula, foram promissoras. Nessa última reflexão (RH1) a professora Maria externaliza um desejo de contribuir com as demais professoras de sua comunidade escolar, as aprendizagens vivenciadas no processo formativo que permitiram o desenvolvimento de uma aula diferente das que estava habituada a trabalhar.

Entendemos que a professora Maria manifesta o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e do Currículo quando sugere uma nova maneira de introduzir as frações no 4º e 5º ano, “*Então porque a gente sabe que é uma atividade que tem um retorno, né? Que a gente tá aprendendo, tá estudando, tá contribuindo com a gente, com os outros. E até eu queria muito depois ter acesso ao vídeo que você recortar algumas partes, se for possível tá? Até para socializar com as minhas colegas de quinto ano, que lá na escola nós somos em quatro, quatro turmas de 5º anos. E até nos quartos anos na verdade*”.

Nesse sentido, o processo formativo foi desafiador. Tal como esperavam os professores formadores ao proporem uma formação onde as professoras pudessem se sentir à vontade para compartilhar seus conhecimentos matemáticos e as dificuldades que enfrentam nas salas de aula ao introduzir um conteúdo.

Em todos os *Episódios* apresentados, identificamos os diferentes olhares das professoras sobre as formas em abordar o ensino e as manifestações do Conhecimento Matemático sobre cada um deles. Isso se deve à relação de confiança que o grupo estabeleceu desde o primeiro encontro da formação, valorizando o trabalho em colaboração e superando a cultura individual do trabalho tão presente no nosso país, por meio do Estudo de Aula.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, tivemos como objetivo identificar e analisar os subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino mobilizados por uma professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental, durante um ciclo de Estudo de Aula (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA; BAPTISTA, 2016). Para tanto, consideramos os três primeiros encontros do processo formativo para identificar, à luz do quadro teórico do MKT de Ball, Thames e Phelps (2008), os subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino, buscando analisá-los no contexto da metodologia, um ciclo completo do Estudo de Aula que envolve preparar com detalhes uma aula, para, depois, observá-la e analisá-la em profundidade.

Para realizar a investigação, o Estudo de Aula realizado nesta pesquisa teve como tema central os números racionais na forma fracionária a partir de seu significado de medida. As ações desenvolvidas no processo formativo, e que são objeto de análise, foram detalhadas no Quadro 2 deste texto.

Em nossos estudos e com base na literatura revisada, constatamos que o processo formativo, na metodologia no Estudo de Aula, atribui ao professor o papel de sujeito fundamental de sua formação, ampliando e construindo novos caminhos, por meio da troca de experiência e no diálogo com outros professores. Ainda no processo formativo, o aspecto “colaboração” (BOAVIDA; PONTE, 2002) propicia um ambiente favorável para as professoras externalizarem suas reflexões sobre a prática, emitirem suas opiniões, em uma ajuda mútua na qual a aprendizagem com o outro acontece em um movimento de “dentro para fora”. Nesse sentido, o Estudo de Aula mostrou-se bastante promissor para a superação dos desafios e a promoção do desenvolvimento profissional.

Diante disso, compreendemos que o processo formativo, na metodologia do Estudo de Aula, permitiu investigar o Conhecimento Matemático para o Ensino, de uma professora em colaboração com a prática de outros professores, promovendo seu desenvolvimento profissional.

Não foi objetivo desta investigação avaliar o que as professoras, em especial a professora Maria, sabem ou não sabem. A intenção era detectar e analisar que conhecimentos matemáticos para o ensino foram manifestados no desenvolvimento da metodologia Estudo de Aula.

Com relação aos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino mobilizados pela professora Maria durante um ciclo de Estudo de Aula, identificamos que o subdomínio do Conhecimento Especializado do Conteúdo foi o mais frequente, tendo sido manifestado pela

professora em 5 dos 9 *Episódios* analisados. Quanto aos subdomínios do Conhecimento Comum do Conteúdo e do Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, a professora os manifestou em 2 *Episódios* diferentes, um subdomínio em cada episódio.

Os subdomínios do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes e do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino foram manifestados em 6 *Episódios*, sendo os que mais apareceram durante todo o ciclo de Estudo de Aula. O subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e Currículo não foi manifestado pela professora em nenhum dos *Episódios* apresentados.

O Quadro 8 apresenta uma síntese dos subdomínios identificados em cada episódio, com exceção do primeiro, que não envolveu análises com base no MKT, uma vez que esse episódio visou identificar o engajamento das professoras com a proposta do Estudo de Aula como contexto formativo. Tal episódio, inserido na fase do planejamento, trouxe as primeiras impressões das professoras participantes sobre formação continuada e possibilitou identificar a valorização que elas deram à proposta de formação, que priorizava o trabalho em colaboração.

Quadro 8 – Subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino manifestados nos Episódios

	Conhecimento Específico do Conteúdo			Conhecimento Pedagógico do Conteúdo		
	Conhecimento Comum do Conteúdo	Conhecimento Especializado do Conteúdo	Conhecimento do Conteúdo no Horizonte	Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes	Conhecimento do Conteúdo e do Ensino	Conhecimento do Conteúdo e do Currículo
<i>Episódio 2</i>		1		1		
<i>Episódio 3</i>				1	1	
<i>Episódio 4</i>		1		1	4	
<i>Episódio 5</i>		1		1		
<i>Episódio 6</i>	1	1			5	
<i>Episódio 7</i>			1		1	
<i>Episódio 8</i>		2		1	2	
<i>Episódio 9</i>				1	2	1

Fonte: autoria própria (2021)

Com relação ao nosso objetivo de analisar os subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino mobilizados pela professora Maria durante um ciclo de Estudo de Aula, percebemos que cada etapa do ciclo do Estudo de Aula favoreceu a manifestação de determinados subdomínios nos *Episódios*, alguns em maior quantidade, outros em menor. Na

sequência, descrevemos, para cada etapa do Estudo de Aula (planejamento, desenvolvimento e análise da aula), como cada subdomínio parece ter sido favorecido por essa abordagem de formação continuada.

O *Planejamento coletivo de uma aula* foi a fase que envolveu o primeiro e o segundo encontros, que corresponderam aos quatro primeiros *Episódios*. Reafirmamos que, no primeiro episódio, não realizamos análises segundo o MKT. Do segundo ao quarto *Episódios*, alguns conhecimentos matemáticos emergiram e foi possível identificá-los quanto aos objetivos que estavam sendo propostos para a formação. Temos como hipótese que, na fase planejamento, os conhecimentos matemáticos mobilizados podem ter sido potencializados pelos objetivos e estratégias apresentados pelos professores formadores, tais como: as tarefas matemáticas propostas; a abordagem de ensino pautada no ensino exploratório; o trabalho com um significado dos números racionais na forma fracionária (significado de medida) diferente do que estavam acostumadas a utilizar para introduzir o conceito de fração; o trabalho colaborativo, que proporcionou um ambiente de confiança entre as participantes.

Como o planejamento é uma preparação para o desenvolvimento da aula, era necessário que nele fosse observado se alguns conhecimentos estavam bem consolidados e entendidos, ou que pudessem ser formados na troca de experiências. Por isso, acreditamos que a intenção de trazer tarefas que lidavam com os diferentes significados dos números racionais possibilitou a mobilização do subdomínio do Conhecimento Especializado do Conteúdo. Outra característica que a formação visava trabalhar com as professoras era a capacidade de analisar tarefas matemáticas, antecipando formas de pensar certas/erradas dos estudantes, favorecendo a manifestação do subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes pela professora Maria.

A intenção de trabalhar na perspectiva do ensino exploratório para a promoção da compreensão dos estudantes quanto ao ensino da fração pode ter favorecido a manifestação do subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, subdomínio que mais apareceu na fase do planejamento.

Na fase planejamento, foi possível identificar indícios de envolvimento e aceitação com a metodologia Estudo de Aula, pelas oportunidades de aprendizagem em colaboração, de reflexão sobre os conhecimentos matemáticos adquiridos e de repensar as práticas de ensino.

A fase *Desenvolvimento de uma aula* aconteceu na própria escola em que a professora Maria trabalha. Essa etapa é determinada pela ação de um professor do grupo e conduzida com base no planejamento realizado coletivamente. O objetivo era perceber o que o planejamento provocou nas atitudes e ações da professora enquanto desenvolvia a aula e quais momentos

vivenciados no planejamento foram fatores determinantes para que a manifestação de subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino ocorresse.

Os *Episódios* que fazem uso de dados produzidos durante o desenvolvimento da aula da professora Maria são os *Episódios 5, 6, 7 e 8*. Com base no que foi planejado pelo grupo, a professora desenvolveu uma aula diferente da que estava acostumada. Nesse sentido, foi possível identificar a abordagem de ensino para superar a divergência de ideias na prática do ensino exploratório. Acreditamos, por isso, que o subdomínio do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino foi o mais manifestado nessa etapa, pois exigiu da professora diferentes formas de conduzir seus estudantes a fim de que atingissem o objetivo proposto para a aula.

Como era esperado, algumas antecipações realizadas na etapa do planejamento puderam ser percebidas durante o desenvolvimento da aula, conectando o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes mobilizado anteriormente com o que estava acontecendo durante a aula.

Outros subdomínios apareceram com menor intensidade, mas somam-se ao conhecimento matemático manifestado pela professora. Durante a aula, a professora Maria mobilizou o subdomínio Conhecimento Comum do Conteúdo, ao reconhecer erros e acertos expostos pelos estudantes, e o subdomínio Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, ao conectar as ideias (noção de metade) para a aprendizagem de novos significados matemáticos (divisão de 1 por 2).

Todos os subdomínios apresentados na fase do desenvolvimento foram destaque no que consideramos como estruturação das ideias, de novos conhecimentos e ações do ato de dar voz às formas de os alunos pensarem. Nesse sentido, outro subdomínio manifestado, que tem sido muito potencializado, é a capacidade de adaptação do conteúdo matemático para o que o planejamento e o desenvolvimento propuseram. Por isso, consideramos que a *Tarefa dos Canudos*, tal qual foi proposta no planejamento, potencializou a introdução da fração por meio do significado de medida, tendo sido manifestado o subdomínio Conhecimento Especializado do Conteúdo ao permitir que a aprendizagem fosse vivenciada pela experimentação.

Queremos destacar que de todos os diálogos apresentados, evidenciamos o subdomínio Conhecimento do Conteúdo e do Currículo somente no *Episódio 9*. Acreditamos que mesmo que o processo formativo, durante o ciclo do Estudo de Aula aqui analisado, não tenha explorado documentos curriculares e discutido com as professoras as questões que envolvem as frações em diferentes etapas da Educação Básica, Maria mobiliza em sua reflexão individual um conhecimento curricular na temática frações. Ao mencionar que gostaria de levar o vídeo [gravação da sua aula] para passar para as professoras do 4º ano e 5º da sua escola.

A análise da aula ocorreu em dois momentos. No primeiro, a professora fez a análise individual no mesmo dia em que desenvolveu a aula. Tal análise aparece com mais ênfase no *Episódio 9*. O segundo momento corresponde à análise coletiva realizada no encontro da formação, que foi contemplada nos *Episódios 6, 7 e 8*.

A respeito dos subdomínios mobilizados pela professora Maria no momento da análise individual, entendemos que tanto o roteiro de perguntas (Apêndice A), que estimulou essas mobilizações, quanto o próprio processo formativo, que envolveu a prática da docente e o trabalho colaborativo realizado durante os encontros, foram fundamentais para a manifestação desses subdomínios pela professora ao refletir sobre sua aula.

Com relação à análise coletiva, acreditamos que os trechos da gravação da aula intencionalmente selecionados pelos professores formadores e as perguntas que eles elaboraram para cada trecho (Apêndice B) foram fundamentais para promover a discussão e mobilizar os subdomínios. Esses trechos da gravação, juntamente com as perguntas, funcionaram como Tarefas de Aprendizagem Profissionais (TAP) para o terceiro encontro do grupo e serviram como inspiração para as TAP que elaboramos como Produto Educacional desta dissertação.

As TAP produzidas neste trabalho (Apêndice C) têm como objetivo promover reflexões e mobilizar/desenvolver subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino de professores em formação inicial ou continuada. Da mesma maneira que tais TAP foram produzidas em um contexto formativo, como o que analisamos, que possibilitou a mobilização desses subdomínios, entendemos que, quando colocadas em outro contexto formativo, terão potencial para promover o desenvolvimento profissional docente.

Em relação aos referenciais teóricos que fundamentam as TAP, entendemos que o Produto Educacional aqui produzido vai um pouco além do que a literatura indica, na medida em que não utilizamos apenas os dados gerados no planejamento e no desenvolvimento da aula, mas, também, utilizamos gravações e discussões do momento de reflexão coletiva entre as professoras. Consideramos essa uma característica inovadora do Produto Educacional, na medida em que incluímos esses momentos de discussões coletivas uma parte importante da prática docente, caracterizando-se, inclusive, como uma *amostra autêntica da prática docente*.

Ressaltamos que, durante toda a formação, nosso foco estava na professora Maria, portanto, outros momentos que aconteceram e não foram objeto de nossa análise, possivelmente as reflexões, contribuiriam para que novos subdomínios do conhecimento matemático para o ensino fossem evidenciados. No entanto, para fins de nossa análise nos atentamos aos mencionados até aqui.

Assim, identificamos que a proposta do processo formativo alcançou seus objetivos no desenvolvimento de um ciclo de Estudo de Aula em busca de aperfeiçoar e desenvolver o senso crítico e reflexivo sobre a própria prática da professora envolvida.

Mesmo tendo atingido o objetivo, entendemos que nem tudo é definitivo. Há outras possibilidades que podem ser vivenciadas, pois cada aula é uma aula diferente, e as lacunas evidenciadas podem ser retomadas em aulas futuras.

POSFÁCIO

Continuo buscando, re-procurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar e anunciar a novidade.
Paulo Freire

Na introdução desta pesquisa, relatou-se uma necessidade pessoal que fez, muitas vezes, ir em busca de mais conhecimentos que pudessem ajudar na construção de uma professora melhor. Logo, não se poderia terminar este texto sem comentar as aprendizagens vivenciadas no grupo de formação, que foi o berço desta dissertação. A escolha pelo Mestrado constituiu o início de uma caminhada na pesquisa, em que se buscou, nas questões pessoais, o aprendizado tão procurado e encontrado!

Em concordância com Freire, muitos professores, assim como eu, seguem buscando o conhecimento necessário para o ensino, isso porque a aprendizagem não tem um ponto final na formação inicial do professor, e nunca terá! Mas tem seu início, e começa com a disposição daquele que deseja e busca incessantemente uma mudança.

Assim, o olhar esteve sobre o processo formativo que procurou realizar um trabalho colaborativo com professoras dos anos iniciais, buscando, juntamente com os professores formadores, “o caminho” que a formação inicial não deu conta de realizar: uma formação continuada que tivesse uma proposta de promover o desenvolvimento dos professores por meio da metodologia Estudo de Aula.

Inicialmente, os professores formadores permitiram que as professoras vivenciassem a metodologia Estudo de Aula como se fossem alunas, realizando uma tarefa como se fossem os próprios alunos, ganhando a confiança do grupo, que já demonstrava a aceitação da proposta.

Essa estratégia foi fundamental para que as professoras se engajassem logo no primeiro dia. A experiência anterior dos professores como formadores e o cuidado que tiveram ao apresentar a metodologia, antes mesmo do início do grupo, foram o ponto chave para que o ciclo de Estudo de Aula obtivesse êxito.

Os professores formadores também tiveram todo o cuidado quanto ao número de professoras participantes, pois, como foi iniciativa delas participar da formação, limitar o número de professoras não seria uma boa opção. Por isso a estratégia de trazer as discussões para os pequenos grupos, depois, para a plenária foi uma alternativa para o desenvolvimento de

um ciclo de Estudo de Aula, que promoveu a reflexão, a colaboração e a troca de conhecimentos para o crescimento do grupo.

Porém, minha participação no grupo como investigadora não foi tão ativa quanto eu queria. Como ainda não estava definido que esta pesquisa se desenvolveria nesse grupo de formação, somente no terceiro encontro passei a ser uma observadora participante, fazendo poucas intervenções como pesquisadora. Entretanto, isso não comprometeu o desenvolvimento da pesquisa, pois os professores formadores, ao conduzirem o grupo, tinham tudo muito bem planejado, e as gravações em áudio e vídeo, assim como minhas anotações de bordo, foram suficientes para a produção dos dados.

O zelo dos professores formadores, não interferindo diretamente nas discussões das professoras, mas levando-as à reflexão por meio dos questionamentos, foi fundamental para a compreensão do Estudo de Aula, também para o entendimento da postura de um professor ao desenvolver a aula com base na abordagem que estava sendo proposta (Ensino Exploratório), como a forma da promoção das discussões matemáticas visando à aprendizagem do aluno.

Assim, pouco a pouco, o grupo de formação avançava no conhecimento da teoria, demonstrando autonomia para a tomada de decisões, fortalecendo-se enquanto grupo e rompendo com a barreira da cultura individualista do professor, contribuindo para a troca de experiências das suas práticas.

A fase do planejamento, com as leituras propostas, trouxe grandes aprendizagens. Atrair a teoria com a prática provocou atitudes que puderam ser vivenciadas nas discussões nos pequenos grupos e em plenária e depois na prática da professora.

A formação tinha essa intenção mesmo, partir da necessidade prática, buscar na teoria a compreensão da prática, de tal modo que a teoria passasse a ser prática. Por esse motivo, tínhamos o Estudo de Aula, como apontam Ponte, Quaresma, Mata-Pereira e Baptista (2016), com potencial para promover o desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), que, por estar estreitamente ligado à prática docente, permitiu-nos identificar essas manifestações dos subdomínios na prática da professora Maria.

Levamos em consideração que muitos fatores contribuíram para que esta pesquisa se desenvolvesse: (i) a iniciativa dos professores formadores em propor uma formação baseada na prática letiva, diferente das formações que muito prometiam e pouco contribuíam para o desenvolvimento do professor; (ii) um grupo de professores comprometidos e envolvidos com o processo formativo, que permitiram os vários olhares para uma mesma tarefa, as possibilidades do seu desenvolvimento, tendo sempre como foco os alunos; (iii) a oportunidade de o desenvolvimento desta pesquisa ser no ambiente da própria universidade onde o mestrado

é ofertado, com a participação das mestrandas; (iv) o engajamento da professora Maria à proposta, dispondo-se a desenvolver a aula com seus alunos, a participação da professora com suas contribuições em todos os encontros do processo formativo produzindo um material rico em detalhes e consistente em informações. Esses são alguns dos fatores considerados os produtores dos dados e que sustentaram nossa pesquisa.

Durante o processo formativo, pelo relato das professoras, em especial da Maria, foi possível identificar uma mudança de postura à medida que compartilhavam suas experiências com o ensino de matemática. Sabe-se que o Estudo de Aula é um forte aliado para isso, e o que se observa da aula desenvolvida pela professora Maria (também em seus relatos no terceiro encontro e em sua reflexão pós-aula) foi uma autonomia no desenvolvimento da aula planejada, ao abordar os assuntos sempre centrados na aprendizagem dos alunos. Não se pode afirmar, porém, se essa prática realmente se efetivará em suas aulas, apesar de todos os indícios de que sim, conforme apontado durante toda a formação.

Conclui-se que o resultado desta pesquisa evidenciou que a formação continuada na metodologia do Estudo de Aula teve potencial para desenvolver o Conhecimento Matemático da professora no Ensino da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Considera-se que uma pequena semente foi lançada na formação continuada por meio da metodologia Estudo de Aula e espera-se que sua germinação na vida dos professores dos anos iniciais aconteça como neste poema:

"Para Sara, Raquel, Lia e para todas as crianças"

(Maria Teresa Del Prete Panciera, atribuído a Carlos Drummond de Andrade)

Eu queria uma escola que cultivasse
a **curiosidade de aprender**
que é em vocês natural.

Eu queria uma escola que educasse
seu corpo e seus movimentos:
que possibilitasse seu crescimento
físico e sadio. Normal.

Eu queria uma escola que lhes
ensinasse tudo sobre a natureza,
o ar, a matéria, as plantas, os animais,
seu próprio corpo. Deus.

Mas que ensinasse primeiro pela
observação, pela **descoberta**,
pela **experimentação**.

E que dessas coisas lhes ensinasse
 não só o conhecer, como também
 a aceitar, a amar e preservar.

Eu queria uma escola que lhes
 ensinasse tudo sobre a nossa história
 e a nossa terra de uma maneira
 viva e atraente.

Eu queria uma escola que lhes
 ensinasse a usarem bem a nossa língua,
 a pensarem e a se expressarem
 com clareza.

Eu queria uma escola que lhes
 ensinassem a **pensar**, a **raciocinar**,
 a **procurar soluções**.

Eu queria uma escola que desde cedo
 usasse materiais concretos para que vocês pudessem **ir formando
 corretamente os conceitos matemáticos, os conceitos de números,**
 as operações... pedrinhas... só porcariinhas!... fazendo vocês
 aprenderem brincando...

Oh! meu Deus!

Deus que livre vocês de uma escola
 em que tenham que copiar pontos.

Deus que livre vocês de decorar
 sem entender, nomes, datas, fatos...

Deus que livre vocês de aceitarem
 conhecimentos "prontos",
 mediocrementemente embalados
 nos livros didáticos descartáveis.

Deus que livre vocês de ficarem passivos,
 ouvindo e repetindo,
 repetindo, repetindo...

Eu também queria uma escola
 que ensinasse a conviver, a
 cooperar,
 a respeitar, a esperar, a saber viver
 em comunidade, em união.

Que vocês aprendessem
 a **transformar e criar**.

Que lhes desse múltiplos meios de
você expressarem cada
sentimento,
cada drama, cada emoção.
Ah! E antes que eu me esqueça:

**Deus que livre vocês
de um professor incompetente.**

O poema desperta o desejo de mudança, o desejo por uma educação diferente dos moldes engessados ainda tão presente. Não é de se admirar que vivenciamos a passividade de uma educação, onde ouvíamos e repetíamos por diversas vezes os mesmos pontos, tabuadas, datas... E por quantas vezes reproduzíamos esses mesmos ensinamentos em nossas aulas. Em meio a tantos desafios que enfrentamos, esse poema nos faz repensar nossa prática pedagógica.

As inquietações que apresentei no início deste trabalho e o interesse de ir em busca por um conhecimento que a formação inicial não proporcionou, me fez voltar aos bancos da escola, no caso, do mestrado, e vivenciar no projeto de formação continuada, um trabalho colaborativo em que o professor é o sujeito ativo da sua formação na troca de saberes e conhecimentos matemáticos com os demais professores. Essa experiência foi muito significativa, pois permitiu compreender que as fragilidades da formação docente que tantos professores como eu sentem, podem ser superadas principalmente se o professor estiver disposto a essa mudança.

Assim, como professora dos anos iniciais, com as leituras que fiz e a prática vivenciada na formação, posso dizer que houve uma mudança na forma como ensino aos meus alunos. Era isso que buscava, uma formação capaz de me impulsionar na busca pelo conhecimento.

Enquanto pesquisadora, fica a satisfação de ter contribuído no desenvolvimento desta pesquisa, que apesar ser uma pequena semente lançada pela formação continuada, sabemos que ela germinou na vida das professoras, assim como na minha. Essa é a sensação, de que esta pesquisa não vai terminar aqui, pois o desenvolvimento profissional é contínuo e quem o busca são os professores comprometidos com a educação, que reconhecem que sua contribuição pode ir além do que já se fez, do que se conhece e se deu a conhecer.

REFERÊNCIAS

- BALDIN, Y. Y. O significado da introdução da metodologia japonesa de Lesson Study nos cursos de capacitação de professores de matemática no Brasil. In: 09 Simpósio Brasil-Japão **Anais...** São Paulo, 2009.
- BALL, D. L.; COHEN, D. Developing practice, developing practitioners: toward a practice – based theory of professional education. In: G. SYKES, DARLING – HAMMOND (Eds.). **Theaching as the learning profession: handbook of policy and practice**. San Francisco: Jossey Bass, p.3-32, 1999.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, n.59, p. 389-407, 2008.
- BAPTISTA, M; PONTE, J. P; VELEZ, I.; COSTA, E. Aprendizagens profissionais de professores dos primeiros anos participantes num estudo de aula. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, v. 30, n. 4, p. 85, 2014.
- BEZERRA, R. C. **Aprendizagens e Desenvolvimento Profissional de Professores que Ensinam Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no Contexto da Lesson Study**. 2017.210f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” UNESP, Presidente Prudente/SP, 2017.
- BEZERRA, R. C.; MORELATTI, M. R. M. Aprendizagens de Professores que Ensinam Matemática no contexto da *Lesson Study*. **Hipátia**. v.5, n.1, p. 72-85, jun.2020.
- BEZERRA, R. C.; MORELATTI, M. R. M. **Um contexto de e para aprendizagem docente**. 1ª ed. Curitiba: Appris, 2020.
- BOAVIDA, M.; PONTE, J. P. **Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas**. In: GTI (Org), Refletir e investigar sobre a prática profissional. Lisboa: APM, 2002.p.43-55.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação – Uma Introdução à Teoria e aos Métodos**. Porto/PT: Porto Editora LDA, 1994.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: 4 mai. 2021.
- CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; NUNES, T. **O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.8, n.1, p. 125-136, 2006.
- CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, 115, 11-17, nov/dez 2011.
- CURI, E. **A Matemática e os Professores dos anos iniciais**. São Paulo/SP: Musa Editora, 2005.

CURI, E.; PIRES, C. M. C. Pesquisas sobre a formação do professor que ensina matemática por grupos de pesquisa de instituições paulistanas. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo/SP, v. 10, n.1, 2008. p. 151-189.

CURI, E. Educação Matemática na transição do 5º para o 6º ano de ensino fundamental: uma experiência compartilhada. *In*: EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática, 12. **Anais...** Campo Mourão, 2014.

CURI, E. Reflexões sobre um projeto de pesquisa que envolve grupos colaborativos e a metodologia *Lesson Study*. *In*: NASCIMENTO, J. C. O.; VECE, J. P. (Org.). **Grupos Colaborativos e Lesson Study: contribuições para a melhoria do ensino de matemática e desenvolvimento profissional de professores**. São Paulo: Alexa Cultural, 2018, p.21-22.

ELIAS, H. R.; TREVISAN, A. L. Desafios à constituição de grupos colaborativos com professoras de anos iniciais para a realização de estudos de aula. **Vidya** (Santa Maria – online), v. 40, p. 183-202, 2020.

ELIAS, H. R.; GONÇALVES, F. G.; RODRIGUES, S. R. Desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino favorecido pelo trabalho colaborativo. **ACERVO** – Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP, São Paulo, v. 3, 2021.

ELIAS, H. R.; RODRIGUES, S. R.; GONÇALVES, F. G. Tarefas de aprendizagem profissional: propostas para o desenvolvimento profissional baseado na prática docente. *In*: MENDES, M. T.; JUSTULIN, A. M. **Produtos educacionais e resultados de pesquisas em educação matemática organização**. São Paulo: Livraria da Física, 2021 (No Prelo).

FIorentini, D.; CRECCI, V. Desenvolvimento Profissional Docente: Um Termo Guarda-Chuva ou um novo sentido à formação? **Formação Docente**, Belo Horizonte, v. 05, n. 08, p. 11-23, 2013.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 2003, p. 61.

GONÇALVES, F. M.; RODRIGUES, S. R.; ELIAS, H. R.; TREVISAN, A. L. Conhecimento do conteúdo e dos estudantes mobilizado por uma professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental. *In*: EPREM - Encontro Paranaense de Educação Matemática, 15. 2019, Londrina. **Anais...** Londrina, 2019.

GATTI, B. A.; BARRETTO, E. S. S. **Professores do Brasil: Impasses e desafios**. Brasília: Unesco, 2009.

GATTI, B. A. *et al.* Professores do Brasil: novos cenários de formação. Edições Unesco, **UNESCO**, Brasília, 2019.

LEWIS, C. C.; HURD, J. **Lesson study step by step: How teacher learning communities improve instruction**. Heinemann, 2011.

LINS, R. C., SILVA, H. da. **Frações**. Brasília: MEC, SEB, SEED, UNESP, 2006. 39 p. (Coleção PRÓ-LETRAMENTO, Fascículo 04)

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. 6ª. Edição. São Paulo: EPU, 1986).

MUNIZ, C. A.; BATISTA, C. O.; SILVA, E. B. **Módulo IV: Matemática e Cultura: Decimais, Medidas e Sistema Monetário**. Brasília: Universidade de Brasília, 2008. 109 p.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A Matemática nos anos Iniciais do Ensino Fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender**. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Ed., 2019.

NUNES, T.; BRYANT, P. Crianças fazendo matemática. Porto Alegre: **Artes Médicas**, 1997.

PASSOS, C. L. B. *et al.* Desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática: uma meta-análise de estudos brasileiros. **Quadrante**, Lisboa, Portugal, v.15, n.1-2, p.193-219, 2006.

RIZZATTI *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020.

PONTE, J. P. O Desenvolvimento Profissional do Professor de Matemática. **Revista Educação e Matemática**, Nº 31,1994, pp. 9 -12 e 20.

PONTE, J. P. Da formação ao desenvolvimento profissional. **In: Actas do ProfMat 98**. Lisboa: APM, 1998. p. 27-44.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H. Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. **Revista de Educação**, v.11, n.2, p.145-163, 2002.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. **Atas...ProfMat**, Lisboa, 2003.

PONTE, J. P. Pesquisar para compreender e transformar a própria prática. **Educar em Revista**, n. 24, p.37-66, 2004.

PONTE, J. P.; BAPTISTA, M.; VELEZ, I.; COSTA, E. Aprendizagens profissionais dos professores através dos estudos de aula. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, n. 5, p. 7-24, 2012.

PONTE, J. P.; Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.) **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p.13-27.

PONTE, J. P.; CARVALHO, R.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, vol. 25, n. 2, 2016.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 868 - 891, dez. 2016.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento das Idéias Matemáticas e do Raciocínio de Estudantes. **Bolema**, Rio Claro, v. 17, n. 21, maio 2004.

RIBEIRO, A. J.; AGUIAR, M.; TREVISAN, A. L. Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores ao discutir coletivamente uma aula sobre padrões e regularidades. **Quadrante**, v. 29, n. 1, 2020.

RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. **Acta Scientiae – ULBRA**, Canoas, v. 21, p. 49-74, 2019.

SARAIVA, M.; PONTE, J. P. O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. **Quadrante**, 12(2), p. 25-52, 2003.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v.15, n.2, p.4-14, Feb. 1986.

SHULMAN, L.S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Harvard, v.57, n.1, p.1-22, 1987.

SHULMAN, L. S. (1987) Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. Tradução de Leda Beck. **Cadernos Cenpec**. São Paulo, v.4, n.2, p.196-229, dez. 2014.

SMITH, M.S. **Practice-Based Professional Development for Teachers of Mathematics**. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

SOUZA, M. A. V. F.; WROBEL, J. S.; BALDIN, Y. Y. Lesson Study como Meio para a Formação Inicial e Continuada de Professores de Matemática – Entrevista com Yuriko Yamamoto Baldin. **Boletim Gepem**, n.73, p. 115-130, 2018.

STEIN, M. K. *et al.* Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v.10, n.4, p.313-340, 2008.

STEPANEK, J. *et al.* **Leading lesson study: A practical guide for teachers and facilitators**. Thousand Oaks: Corwin Press, 2007.

TREVISAN, A. L.; ELIAS, H. R. Constitution of a Collaborative Working Group Conducting Lesson Studies. In: BORKO, H.; POTARI, D. (ed.) ICMI Study 25: Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups. **Proceedings...**, Lisbon, Portugal, 2020, p. 435-442.

UTIMURA, G. Z. Um panorama teórico sobre Lesson Study (Estudo de Aula). In: CURI, E.; NASCIMENTO, J. C. O.; VECE, J. P. (Org.). **Grupos Colaborativos e Lesson Study: contribuições para a melhoria do ensino de matemática e desenvolvimento profissional de professores**. São Paulo: Alexa Cultural, 2018, p.49-50.

ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. et al. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. *ACTIO*, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná	
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)	
Título da Dissertação	Conhecimento Matemático para o Ensino mobilizado por uma professora no contexto do Estudo De Aula	
Título do Produto/Processo Educacional	Desenvolvendo o Conhecimento Matemático para o Ensino de Frações por meio de Tarefas de Aprendizagem Profissional	
Autores do Produto/Processo Educacional	Discente: Silmara Ribeiro Rodrigues	
	Orientador: Henrique Rizek Elias	
	Outros (se houver):	
Data da Defesa	10/06/2021	
FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)		
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.		
<p>Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p> <p>Linhas de Pesquisa do PPGMAT:</p> <p><i>L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático</i> (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);</p> <p><i>L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem</p>	<p>() Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.</p> <p>(X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.</p>	

<p>matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).</p>	
<p>Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p> <p>A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. <p>Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.</p>	<p>() PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa.</p> <p>() PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade.</p> <p>(X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p> <p>() PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p>
<p>Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u></p>	<p>() Local</p> <p>() Regional</p> <p>() Nacional</p> <p>(X) Internacional</p> <p>Justificativa (<i>obrigatória</i>): O tema matemático abordado (frações) é próprio do currículo escolar em todo o Brasil e no exterior. Por isso, a proposta de trabalho com as Tarefas de Aprendizagem Profissional pode ser utilizada por professores dentro e fora do Brasil. A língua pode ser um aspecto restritivo, pois está escrito em língua portuguesa, mas há países que podem utilizar mesmo assim.</p>
<p>Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa</p>	<p>() PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou</p>

<p>ser, necessariamente, em seu local de trabalho).</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p>aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto).</p> <p>(X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.</p>
<p>Área impactada</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p>() Econômica;</p> <p>() Saúde;</p> <p>(X) Ensino;</p> <p>() Cultural;</p> <p>() Ambiental;</p> <p>() Científica;</p> <p>() Aprendizagem.</p>
<p>Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE.</p> <p><u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u></p>	<p>(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação.</p> <p>(X) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE.</p> <p>(X) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação.</p> <p>(X) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.</p>
<p>Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.</p>	<p>() PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito).</p> <p>(X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos).</p> <p>() PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).</p>
Membros da banca examinadora de defesa	
Nome	Instituição

Henrique Rizek Elias	Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR (Londrina)
André Luis Trevisan	Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR (Londrina)
Renata Camacho Bezerra	Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE (Foz do Iguaçu)

APÊNDICE A – ROTEIRO PARA A REFLEXÃO APÓS A AULA

Roteiro para a reflexão após a aula

- 1) Como você avalia o desenvolvimento da aula?
- 2) Você considera que conseguiu alcançar os objetivos pretendidos em seu planejamento?
- 3) Os estudantes desenvolveram a tarefa proposta da maneira como você previu? Algo não saiu como o esperado?
- 4) Você considera que estava preparada para explorar matematicamente as respostas dadas pelos alunos, visando desenvolver as ideias matemáticas pretendidas?
- 5) A tarefa desenvolvida se diferencia das tarefas que você costuma propor aos seus alunos para trabalhar frações? Se sim, de que modo você acha que ela se diferencia.
- 6) Após o desenvolvimento da aula, você faria alterações no planejamento de sua aula?
- 7) Você acredita que as discussões feitas nos dois primeiros encontros da formação continuada contribuíram (e foram suficientes) para seu planejamento desta aula?
- 8) Como você imagina a sequência de suas aulas no que se refere ao trabalho com frações? De que modo essa tarefa lhe ajuda nessa sequência?

As perguntas acima têm a função de direcionar a reflexão após a aula. Não precisa ficar presa a elas, reflita a respeito do planejamento, do desenvolvimento e da sequência (próximas aulas) da aula que utilizou a tarefa dos canudos e grave suas reflexões em uma mensagem (ou várias mensagens) de áudio via WhatsApp.

APÊNDICE B – ENCONTRO DE 06 DE JUNHO DE 2019

Estudo da aula desenvolvida pela professora Maria

Parte 1 – Apresentação da tarefa aos alunos

Tarefa (conforme planejamento da professora)

- Utilizando apenas um canudo, escolha um objeto da sala e escreva sua medida.
- O canudo coube sempre inteiro no objeto escolhido ou vocês utilizaram uma parte também?
- Se o canudo coube sempre inteiro, escolha outro objeto e dê a sua medida.
- Essa parte que você utilizou na medida é metade do canudo? É maior que a metade? Ou é menor que a metade?
- Quantas vezes essa parte cabe no canudo?
- Como vocês representariam essa parte?

1. Sobre a dinâmica, a formação de grupos e a apresentação da tarefa para a turma, assista aos seguintes trechos:
 - (i) **Vídeo 1:** do início vídeo até o 1 minuto e 30 segundos.
 - (ii) **Vídeo 1:** entre 8:06 até 9:30 e depois de 12:39 até 14:26.
 - a) Pouco antes do início do trecho (i), a professora havia contado, junto com os alunos, 17 alunos presentes até aquele momento. Discuta a estratégia da professora para saber quantos integrantes cada grupo teria.
 - b) Sobre a primeira parte do trecho (ii), como vocês avaliam a abordagem da professora para que todos os integrantes do grupo se envolvam com a tarefa proposta?
 - c) Sobre a segunda parte do trecho (iii), qual parece ter sido a abordagem da professora para apresentar cada um dos itens da tarefa? Vocês consideram que a professora explicitou as orientações necessárias e suficientes para que os alunos se envolvessem na aula?

Parte 2 – Desenvolvimento da tarefa

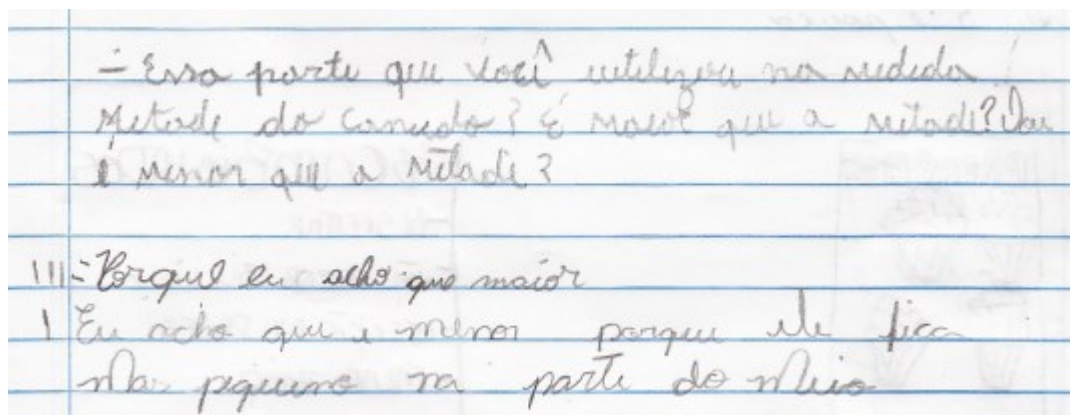
2. No **vídeo 1**, entre 22:30 e 23:20, um grupo está medindo o mural.
 - a) A professora pergunta quantos canudos foram utilizados. Qual foi a resposta da estudante (repetida em voz alta pela professora)?
 - b) Nesse trecho, a professora parece não contestar a resposta da aluna. Contudo, ao pedir para os alunos voltarem para seus lugares, qual foi a orientação (no tempo 23:12 até 23:20) que a professora passou a eles?
 - c) Como vocês avaliam essa orientação da professora? Qual deve ter sido o propósito dela?

Parte 2 – Desenvolvimento da tarefa

3. Este item 3 se refere ao mesmo grupo de alunos do item 2.
A professora caminha pelos grupos, monitorando o desenvolvimento da tarefa. Ao questionar se a “parte que você utilizou na medida é metade do canudo? É maior que a metade? Ou é

menor que a metade?”, a aluna (a mesma que deu a resposta no trecho do item 2) afirma que a parte utilizada na medida é menor do que a metade. Como pode ser observado no item 2, a parte utilizada é, claramente, maior do que a metade, mas a aluna insiste que é menor.

Ao questionar o grupo todo, apenas um dos integrantes diz que a parte utilizada é maior, os outros três (incluindo a aluna) diziam que era menor do que a metade. Vejam a produção escrita desse grupo:



Essa parte que você utilizou na medida é metade do canudo? É maior que a metade? Ou menor que a metade?

Porque eu acho que é maior.

Eu acho que é menor porque ele fica mais pequeno na parte do meio.

- Na resolução do grupo, temos duas respostas, sendo que a segunda resposta é a da aluna. O que vocês acreditam que esta aluna estava pensando?
- Como vocês agiriam nessa situação, na tentativa de levar a aluna a compreender a situação.

Parte 3 – Plenária

- Assista ao **vídeo 8** do início até 4:50.
 - Qual a compreensão dos alunos que responderam à pergunta da professora sobre o fato de existir número entre zero e um?
 - Como vocês avaliam a estratégia da professora de solicitar aos alunos que levantem a mão aqueles que acham que não existe um número entre zero e um?
 - Qual é o argumento utilizado pelo aluno (tempo 3:43) para levantar a mão e dizer que tem número entre zero e um?
 - Como vocês avaliam a percepção do aluno ao associar 50 centavos com o número 0,50 no segmento de reta de 0 a 1?
 - O que o aluno diz (tempo 4:50) logo após a professor solicitar que ele se sente? O que se pode dizer a respeito dessa fala do aluno?
- Assista ao **vídeo 8** de 4:50 até 8:42.
 - Qual a compreensão dos alunos a respeito da possibilidade de dividir 1 por 2?
 - Discuta a abordagem da professora para trabalhar essa divisão.
 - Por que será que alguns estudantes, no tempo 7:34, disseram que aquele 0,5 é 5 centavos?

d) No tempo 7:52, como vocês interpretam a fala da aluna?

Parte 3 – Plenária

6. No **vídeo 7**, do tempo 00:19 até 3:00, a professora retoma a dúvida discutida por vocês nos itens 2 e 3.

A partir desse trecho do **vídeo 7**, a abordagem da professora para retomar a dúvida da aluna, o envolvimento dos alunos na discussão e a resposta dada pela professora à aluna com dúvidas.

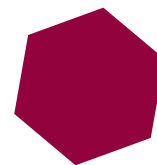
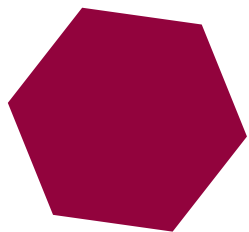
APÊNDICE C – PRODUTO EDUCACIONAL

DESENVOLVENDO O CONHECIMENTO
MATEMÁTICO PARA O ENSINO DE

ARTE SANTOS

AUTORES: SILMARA RIBEIRO RODRIGUES
HENRIQUE RIZEK ELIAS

POR MEIO DE TAREFAS
DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL



UTFPR

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ppgmat

PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENSINO
DE MATEMÁTICA

2021



Desenvolvendo o Conhecimento Matemático para o Ensino de Frações por meio de Tarefas de Aprendizagem Profissional

Developing Mathematical Knowledge for Teaching of Fractions through Professional Learning Tasks



Autores:

Silmara Ribeiro Rodrigues
Henrique Rizek Elias



4.0 internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina



SILMARA RIBEIRO RODRIGUES

**CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO MOBILIZADO POR UMA PROFESSORA NO
CONTEXTO DO ESTUDO DE AULA**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 10 de Junho de 2021

Prof Henrique Rizek Elias, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Renata Camacho Bezerra, Doutorado - Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 13/07/2021.

SUMÁRIO

06 - Apresentação

07 - Sobre o Produto Educacional

09 - As Tarefas de Aprendizagem Profissional

10 - Primeira tarefa de aprendizagem profissional

11 - Segunda tarefa de aprendizagem profissional

13 - Terceira tarefa de aprendizagem profissional

15 - Quarta tarefa de aprendizagem profissional

17 - Quinta tarefa de aprendizagem profissional

19 - Comentários Finais

20 - Referências

APRESENTAÇÃO

Este material foi produzido a partir de uma pesquisa de mestrado desenvolvida no contexto de um processo de formação continuada que envolveu professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, professores formadores da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) e estudantes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da UTFPR *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina.

Apresentamos aqui um conjunto de Tarefas de Aprendizagem Profissional elaboradas a partir das amostras autênticas da prática e produzidas a partir de um trabalho colaborativo desenvolvido por meio de um ciclo de Estudo de Aula. O ciclo de Estudo de Aula envolve o planejamento coletivo de uma aula, o desenvolvimento da aula por uma professora integrante do grupo e a análise conjunta da aula pelo grupo de professores envolvidos no processo formativo. No caso deste Produto Educacional, o tema matemático que permeou o Estudo de Aula foi frações.

Essas Tarefas de Aprendizagem Profissional são destinadas a quem deseja oferecer uma formação (inicial ou continuada) para professores que ensinam Matemática nos anos iniciais, ou seja, a professores formadores que atuam com formação continuada de professores, a professores formadores que atuam com formação inicial de professores, a Secretarias de Educação que desejam oferecer formação continuada aos professores da rede ou a equipes pedagógicas de escolas.

Na próxima seção, denominada Sobre o Produto Educacional, detalhamos os fundamentos teóricos que embasaram a elaboração das Tarefas de Aprendizagem Profissional. Em seguida, temos a seção As Tarefas de Aprendizagem Profissional, em que apresentamos as cinco tarefas produzidas, explicitando os objetivos de cada uma delas. Por fim, tecemos alguns Comentários Finais, chamando a atenção, entre outras coisas, para a importância do papel do professor formador.

Esperamos com as TAP aqui apresentadas oportunizar momentos favoráveis ao desenvolvimento profissional e ao aperfeiçoamento do senso crítico e reflexivo sobre a prática docente.



SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

Este Produto Educacional (PE) é parte de uma pesquisa de mestrado profissional desenvolvida no Programa de Pós-graduação em Ensino da Matemática (PPGMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina. A pesquisa foi desenvolvida no contexto de um projeto de extensão intitulado “Formação Continuada em Matemática para Docentes dos anos iniciais do Ensino Fundamental”, realizado durante o ano de 2019 e que contou com a participação de professores formadores da UTFPR, professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais e estudantes do PPGMAT. O objetivo da pesquisa foi identificar e analisar os subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino, mobilizados por uma professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental, durante um ciclo de Estudo de Aula.

Consideramos que o conhecimento profissional necessário ao professor para exercer a tarefa de ensinar Matemática vai muito além da ideia simplista de que basta ao professor ter domínio do conhecimento do conteúdo específico a ser ensinado. Diversos autores (SHULMAN, 1986, 1987; BALL; THAMES; PHELPS, 2008) debatem algumas características do conhecimento profissional docente, evidenciando que o conhecimento do conteúdo específico é apenas uma de suas componentes.

No caso particular dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, como apontam Nacarato, Mengali e Passos (2019), os professores em formação inicial “têm tido poucas oportunidades para uma formação matemática que faça frente às exigências da sociedade” (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2019, p.20). Por isso, é importante considerar o papel relevante de processos de formação continuada capazes de promover o desenvolvimento profissional docente. Consideramos as formações inicial e continuada como etapas de um caminho a ser percorrido, porém o desenvolvimento profissional acontece quando é oferecido ao professor oportunidades de refletir sobre sua própria prática, estudando e aprofundando temas para os quais se sintam motivados (PONTE, 1998). Isso significa assumir o protagonismo do professor como sujeito da sua formação.

Como já informamos, este PE foi desenvolvido a partir de um processo de formação continuada que ocorreu de abril a novembro de 2019. Neste período, foram realizados oito encontros presenciais, um por mês, sempre às quintas-feiras, com duração de 4 horas cada encontro. Entre um encontro presencial e outro, eram solicitadas atividades não presenciais com objetivo de antecipar estudos, totalizando uma carga horária de 60 horas de formação.

A proposta desse processo formativo era trabalhar em colaboração por meio do Estudo de Aula, uma metodologia para a formação de professores que busca o aperfeiçoamento e o desenvolvimento do senso crítico e reflexivo sobre os conhecimentos e práticas docentes (PONTE; BAPTISTA; VELEZ; COSTA, 2012; PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA; BAPTISTA, 2016). Foi adotada a perspectiva de desenvolvimento profissional apresentada por Ponte (1998), que busca estabelecer distinções entre

a formação tradicionalmente concebida e o que se entende por desenvolvimento profissional. Mesmo parecendo equivalentes, Ponte (1998) apresenta suas principais diferenças.

- A formação está muito ligada à ideia de “frequentar” cursos, enquanto, no desenvolvimento profissional, a ideia de frequentar cursos acontece também, mas vem acompanhada de outras atividades e trocas de experiências;

- Na formação, o movimento acontece de fora para dentro na assimilação dos conhecimentos que lhe são transmitidos, enquanto, no desenvolvimento profissional, o movimento é de dentro para fora, cabendo ao professor as decisões que deseja considerar, ou seja, o professor deixa de ser objeto e passa a ser sujeito da formação;

- A formação atende a suposta carência de conhecimentos, o que difere do desenvolvimento profissional, que direciona o olhar para as potencialidades do professor;

- A formação é compartimentada por assuntos ou disciplinas, enquanto, no desenvolvimento profissional, o professor é visto como um todo nos aspectos cognitivos, afetivos e relacionais;

- A formação parte da teoria e, geralmente, não chega à prática, já o desenvolvimento profissional considera a teoria e a prática de forma interligada (PONTE, 1998).

Como Fiorentini e Crecci (2013) apontam, algumas práticas podem ser catalisadoras de desenvolvimento profissional e uma delas é o Estudo de Aula, onde o trabalho acontece em conjunto, numa relação de ajuda mútua, investigando a própria prática profissional, num contexto colaborativo. Em colaboração no Estudo de Aula, professores planejam em detalhes uma aula sobre uma temática escolhida, procurando identificar dificuldades dos alunos e, depois, um dos integrantes do grupo desenvolve a aula em sua turma enquanto outros membros do grupo observam a aula e fazem os registros. Após a aula ser desenvolvida, o grupo se reúne e a aula é analisada em profundidade, podendo o planejamento sofrer alguns ajustes. O processo pode ser repetido por outro professor e em outra turma.

O crescimento profissional está relacionado à capacidade de trabalhar em equipe. Segundo Ponte (2004), para que haja a colaboração entre os participantes, é necessário que haja um ambiente de confiança entre eles, onde o diálogo aberto e franco aconteça naturalmente permitindo a aceitação de diferentes pontos de vista dando abertura às críticas. Neste sentido, Boavida e Ponte (2002) destacam que para atingir os objetivos e beneficiar a todos os envolvidos, é necessário que no trabalho em conjunto, a base de igualdade prevaleça entre os integrantes, sem hierarquias, principalmente se atuam em diferentes contextos e realidades. O que, segundo Saraiva e Ponte (2003), pode anular a separação existente entre professores e pesquisadores, prática profissional do professor e investigação educacional, escolas e universidades e em última análise, teoria e prática.

Além das perspectivas apresentadas no processo formativo, o foco no desenvolvimento profissional estava em investigar a mobilização dos conhecimentos profissionais de uma professora durante um ciclo completo do Es-

tudo de Aula (um ciclo completo envolve o planejamento, desenvolvimento e análise de uma aula). Para isso, nossa referência foi o modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), quadro teórico que envolve os conhecimentos matemáticos necessários para a prática docente, a partir das demandas matemáticas para o ensino.

Durante o processo formativo todo, o grupo realizou dois ciclos completos de Estudo de Aula. Como já indicamos, o PE aqui apresentado envolveu dados produzidos durante apenas um ciclo completo do Estudo de Aula, realizado durante o período que envolveu os três primeiros encontros do processo formativo e o desenvolvimento de uma aula na turma de uma das professoras participantes. O Quadro 1 detalha esse ciclo.

Quadro 1: ações desenvolvidas ao longo dos três primeiros encontros do processo formativo

	Etapas do ciclo do Estudo de Aula
Primeiro encontro presencial 04/04/2019	Planejamento coletivo de uma aula. Tema matemático: frações.
Segundo encontro presencial 02/05/2019	Planejamento coletivo de uma aula. Tema matemático: frações.
Desenvolvimento da aula na escola 14/05/2019	Desenvolvimento da aula planejada, ministrada por uma das participantes do grupo em sua turma de 5º ano
Terceiro encontro presencial 06/06/2019	Análise coletiva da aula desenvolvida pela professora.

Fonte: elaborado pelos autores

Esse primeiro ciclo, apresentado no Quadro 1, contou com a participação de 14 professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, duas professoras e estudantes do PPGMAT (sendo uma delas autora desse PE) e dois professores formadores (sendo um deles autor desse PE). Todos esses encontros presenciais e a aula desenvolvida foram gravadas (em áudio e/ou vídeo) e as gravações foram transcritas. Além dos dados oriundos das gravações, foram produzidos dados a partir das produções escritas dos estudantes da professora que ministrou a aula planejada coletivamente.

O tema matemático abordado no ciclo completo do Estudo de Aula foi frações. Campos, Magina e Nunes (2006) apresentam as frações em situações em que é possível refletir sobre seus diferentes significados (parte-todo, quociente, medida, número e operador multiplicativo). Na fração como significado parte-todo, a ideia presente está na partição do todo, podendo ser em quantidades contínuas ou discretas, em n partes iguais, onde cada parte pode ser representada por $1/n$. Na fração como quociente, a perspectiva presente está na estratégia da divisão, sendo duas variáveis em que uma correspondente ao numerador e outra ao denominador. Frações como medida assume que algumas medidas envolvem frações porque "se referem a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis" (CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006, p. 127). Na fração com significado de número, assim como números inteiros, não se referem a quantidades específicas. A fração como operador multiplicativo é vista como valor escalar aplicado a uma quantidade, ou seja, o número é um multiplicador da quantidade indicada (CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006).

Como resultado de nossa investigação, apresentamos este PE constituído por um conjunto de Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP). Segundo Ribeiro e Pon-

te (2019), as TAP são tarefas elaboradas com a finalidade de promover discussões matemáticas e didático-pedagógicas propiciando aprendizagens em situações específicas. Para Ribeiro, Aguiar e Trevisan (2020), as TAP

são tarefas elaboradas com a finalidade de propiciar aprendizagens aos professores em uma situação específica (Ball & Cohen, 1999) e são caracterizadas, dentre outros aspectos, pelo uso de registros de prática (Ball, Ben-Peretz & Cohen, 2014), tais como, protocolos de resoluções de estudantes, recortes de propostas curriculares, e planos de ensino. Ao combinar tais recursos na elaboração das TAP, diferentes autores destacam a importância de se levar em conta que tais tarefas se constituem em ferramentas poderosas para que se leve, para o contexto da formação de professores, aspectos da prática da sala de aula como integrantes destas TAP (Smith, 2001). (RIBEIRO; AGUIAR; TREVISAN, 2020, p. 55).

De acordo com Smith (2001), as TAP são elaboradas a partir de amostras autênticas da prática, isto é, materiais obtidos de situações reais que envolvem o trabalho docente, tais como: tarefas matemáticas utilizadas por professores, diálogos entre estudantes e professor em sala de aula, protocolos de resolução de estudantes, planejamentos de aula feito pelo professor. Esses materiais possuem potencial para auxiliar os professores a desenvolverem compreensões a respeito de um conteúdo específico, questões pedagógicas ou, ainda, conhecimentos sobre a aprendizagem dos estudantes (SMITH, 2001).

Smith (2001) comenta que essas amostras autênticas da prática não são auto-organizadas, mas fornecem a matéria-prima em torno da qual uma TAP pode ser concebida. Isso significa que as amostras autênticas da prática precisam ser organizadas de acordo com determinado objetivo a fim de se tornarem TAP e fazerem parte de um currículo para a formação de professores (SMITH, 2001). Para Smith (2001), uma maneira de delinear uma TAP é considerar o conjunto de ações que comumente envolve o trabalho docente. Em nosso caso, esse conjunto de ações envolve as etapas do ciclo de Estudo de Aula: planejamento, desenvolvimento e análise de uma aula.

A autora exemplifica alguns tipos de TAP que poderiam ser utilizadas com um grupo de professores. Esses professores podem começar analisando as tarefas matemáticas que foram usadas durante o ensino e responder a perguntas como: Que oportunidades para aprender matemática são oferecidas pela tarefa? Que conhecimentos prévios os alunos precisam para participar da tarefa com sucesso? Como você esperaria que os alunos resolvessem a tarefa? Em seguida, podem assistir ao vídeo da aula e analisar o ambiente de aprendizagem: Que decisões tomou o professor durante o curso da aula? Que decisões foram tomadas pelos alunos? Quem fez as perguntas? Qual era a natureza das perguntas feitas pelos alunos? E pelo professor? Os professores podem, ainda, analisar o que os alunos parecem estar aprendendo e como eles aprenderam: Com quais ideias matemáticas os estudantes estavam lidando? Que fatores pareciam apoiar o envolvimento dos estudantes na atividade matemática? Que fator parece atrapalhar tal engajamento? A discussão pode ser concluída com o planejamento da próxima aula: Qual seria o objetivo matemático da instrução na próxima aula? Que conhecimentos os alunos demonstraram que servirá de base para a construção de novos conhecimentos? Que tarefa completaria o objetivo de aprendizagem? (SMITH, 2001).

e em seus exemplos de TAP, selecionamos e organizamos algumas amostras autênticas da prática produzidas ao longo dos três encontros do processo formativo e do desenvolvimento da aula por uma das professoras. Junto a isso, elaboramos perguntas para promover discussões e reflexões entre professores em formação que estejam fazendo uso das TAP propostas.

Para as escolhas das amostras autênticas da prática, demos preferência àquelas que envolviam alguma das seguintes características: i) tarefas matemáticas de natureza exploratória (PONTE, 2014, p. 21); ii) diálogos (entre as professoras no grupo, entre as professoras e professores formadores no grupo, entre a professora e os estudantes durante a aula desenvolvida) que explicitassem a mobilização de aspectos do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) e iii) produções escritas de estudantes com potencial para gerar discussões matemáticas.

Como afirmam Saraiva e Ponte (2003), o desenvolvimento profissional sempre envolve alguma aprendizagem e, conseqüentemente alguma mudança. Assim como o processo formativo mencionado ofereceu oportunidades de aprendizagens profissionais às professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental, nosso objetivo é que esse conjunto de TAP possa oferecer ao professor possibilidades de promover novas discussões matemáticas com base em situações reais do trabalho docente.

AS TAREFAS DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL

Apresentamos cinco TAP, criadas e organizadas para serem utilizadas em um contexto de trabalho colaborativo com um grupo de professores e/ou de futuros professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Cada TAP possui objetivos específicos. Tais objetivos estão descritos em quadros apresentados em cada TAP e foram pensados a partir de nossas análises sobre as amostras autênticas da prática com base nos referenciais teóricos mencionados. Isso significa que as perguntas que formulamos nas TAP possuem intenções, principalmente, de mobilizar aspectos do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Entretanto, cabe ao professor formador, de acordo com suas intenções, manter ou alterar alguma pergunta.

Propomos as TAP em uma sequência pensada de tal modo que, trabalhá-las na ordem apresentada aqui, pode favorecer a discussão. No entanto, novamente, cabe ao professor formador analisar e utilizar de acordo com suas intenções.

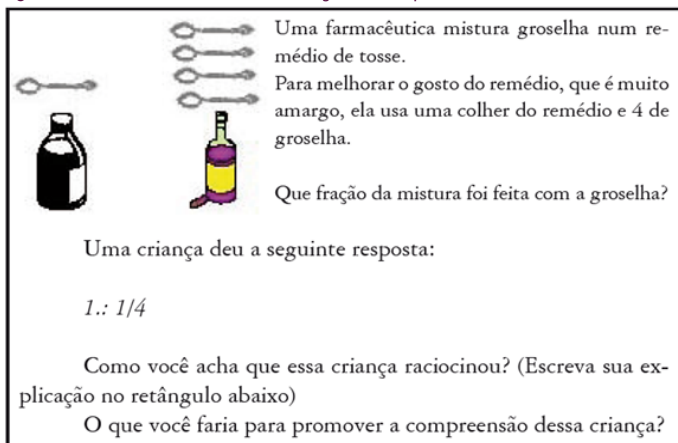


PRIMEIRA TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL

A primeira TAP foi construída a partir de uma tarefa matemática (Figura 1) retirada de Campos, Magina e Nunes (2006), que já era destinada a professores, uma vez que visava conhecer as percepções desses acerca da resposta de um suposto estudante e discutir possíveis abordagens de ensino. Junto a essa tarefa matemática, trazemos alguns trechos das discussões entre professoras que debatiam sobre a tarefa durante o processo formativo. A TAP tem como objetivo trabalhar diferentes significados dos números racionais na forma fracionária (CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006), em particular os significados de parte-todo e de razão. Para tanto, propomos aos professores em formação trabalharem as práticas de compreender maneiras de pensar dos alunos, sugerir encaminhamentos para formas inadequadas de resolver a tarefa e analisar possíveis intervenções realizadas por outros professores.

A Figura 1 apresenta uma situação retirada de Campos, Magina e Nunes (2006). Segundo as autoras, dentre os diferentes significados de números racionais, essa tarefa matemática explora o significado de parte-todo com quantidades discretas. Com base nessa tarefa, responda aos itens apresentados na sequência.

Figura 1: Tarefa matemática envolvendo o significado de parte-todo



Uma farmacêutica mistura groselha num remédio de tosse.
Para melhorar o gosto do remédio, que é muito amargo, ela usa uma colher do remédio e 4 de groselha.

Que fração da mistura foi feita com a groselha?

Uma criança deu a seguinte resposta:

1.: 1/4

Como você acha que essa criança raciocinou? (Escreva sua explicação no retângulo abaixo)

O que você faria para promover a compreensão dessa criança?

Fonte: Campos, Magina e Nunes (2006)

a) Como vocês acham que a criança que deu como resposta $1/4$ raciocinou?

b) Como vocês fariam para promover a compreensão dessa criança?

c) Ao responder como essa criança raciocinou, uma professora afirmou: “Eu coloquei que ela não compreende a noção do todo. E o todo é o cinco.”. Vocês concordam com essa afirmação? Expliquem suas respostas.

d) A mesma professora, ao responder como faria para promover a compreensão dessa criança, afirmou: “Pediria para o aluno fazer um círculo no quadro. Então, falar para ele representar no círculo a quantidade de colheres utilizadas. Depois eu perguntaria a quantidade de colheres utilizadas. Daí, como a quantidade de colheres

são 5, ele teria que dividir em 5. Pinte a quantidade na figura representativa de remédio. Aí pintaria uma parte. Que fração ela representa? Que fração podemos representar a parte de groselha, que é a parte não pintada?”

Como vocês avaliam essa intervenção que a professora sugere fazer?

e) Como a intervenção proposta pela professora no item d) se relaciona com a discussão sobre o todo discreto e o todo contínuo em uma situação de parte-todo? Como vocês trabalham com exemplos de todo contínuo e de todo discreto em suas aulas?

f) Outra professora apresentou o seguinte comentário: “Aqui tem uma outra questão, além dessa do todo que ele [aluno] não desenvolveu. Na escola, a gente apresenta como parte-todo, mas, tem uma outra questão que é a da razão, da fração enquanto razão. Quatro colheres de groselha para cada colher de remédio. Então, quantas de groselha teria que colocar se eu quisesse dar duas de remédio? Então é razão, proporcionalidade. Geralmente, você só vai apresentar essa ideia quando vai trabalhar proporcionalidade. Você não apresenta a fração com essa construção de ideia de razão. O $1/4$, por exemplo, que ele enxergou aqui, ele poderia estar pensando no 4 para 1.”.

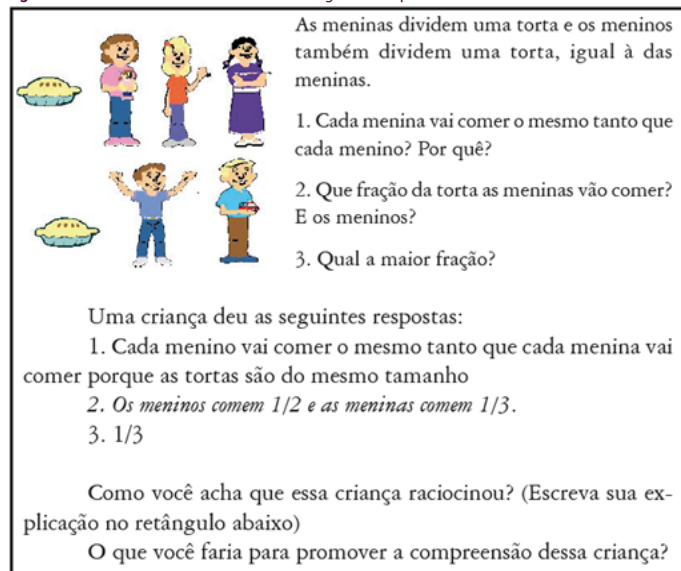
Como vocês avaliam esse comentário feito pela professora? A ideia de razão pode estar relacionada com

SEGUNDA TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL

A segunda TAP foi construída a partir de uma tarefa matemática (Figura 2) retirada de Campos, Magina e Nunes (2006), que já era destinada a professores, uma vez que visava conhecer as percepções desses acerca da resposta de um suposto estudante e discutir possíveis abordagens de ensino. Junto a essa tarefa matemática, trazemos alguns trechos das discussões entre professoras que debatiam sobre a tarefa durante o processo formativo. A TAP tem como objetivo trabalhar diferentes significados dos números racionais na forma fracionária (CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006), em particular o significado de quociente. Além disso, a TAP também busca discutir o papel da imagem/desenho em tarefas matemáticas. Para tanto, propomos aos professores em formação trabalharem as práticas de compreender maneiras de pensar dos alunos, sugerir encaminhamentos para formas inadequadas de resolver a tarefa e analisar possíveis intervenções realizadas por outros professores.

A Figura 2 apresenta uma situação retirada de Campos, Magina e Nunes (2006). Segundo as autoras, dentre os diferentes significados de números racionais, essa tarefa matemática explora o significado de quociente. Com base nessa tarefa, responda aos itens apresentados na sequência.

Figura 2: Tarefa matemática envolvendo o significado quociente



As meninas dividem uma torta e os meninos também dividem uma torta, igual à das meninas.

1. Cada menina vai comer o mesmo tanto que cada menino? Por quê?
2. Que fração da torta as meninas vão comer? E os meninos?
3. Qual a maior fração?

Uma criança deu as seguintes respostas:

1. Cada menino vai comer o mesmo tanto que cada menina vai comer porque as tortas são do mesmo tamanho
2. Os meninos comem $1/2$ e as meninas comem $1/3$.
3. $1/3$

Como você acha que essa criança raciocinou? (Escreva sua explicação no retângulo abaixo)

O que você faria para promover a compreensão dessa criança?

Fonte: Campos, Magina e Nunes (2006)

Com base na tarefa apresentada na Figura 2, responda individualmente:

- a) Por que essa tarefa explora o significado quociente dos números racionais?
- b) Como você acha que essa criança raciocinou?
- c) O que você faria para promover a compreensão dessa criança?

Foi proposto às professoras participantes que analisassem as respostas dadas pela criança (Figura 2) e

indicassem como fariam para ajudá-los a desenvolver seu entendimento do conceito de fração. Nas discussões entre as professoras participantes, a professora Sônia se encarregou de ler a situação-problema. Após a leitura, todas as professoras emitiram suas opiniões acerca de como enxergavam a resolução da tarefa realizada pela criança e apontaram suas estratégias de ensino.

Sônia: Como você acha que essa criança raciocinou? [...]

Maria: Eu acho, assim, o enunciado, ele tinha que ser melhorado. A criança compreendeu o enunciado, mas ela entendeu que as partes poderiam ser iguais e, na verdade, o igual eram as tortas. Por isso que ele responde que vão comer igual, mas, na hora de responder a fração, ele acerta, ele sabe o que é um meio e um terço.

Celina: Eu acho que é aí que está a questão. Ele entendeu aquilo que foi trabalhado ali isoladamente. [...] mas ele não entendeu ainda, não conseguiu visualizar o que é esse $1/3$, que tamanho que tem isso. Tanto que, para ele, 3 é maior que 2, então $1/3$ é maior que $1/2$. Então, ele não conseguiu ainda visualizar, ter essa noção, o que é esse um terço. [...] Essa parte técnica, algorítmica, ele entendeu bem, mas a questão da compreensão ele não compreendeu o que é esse $1/3$ e o que é esse $1/2$.

Sônia: [...] Eu coloquei isso, que eu acho que as crianças, ao observar o algarismo 3, sendo maior que o 2, ele representava que a fração $1/3$ é maior que $1/2$ e sabemos que não é. O $1/2$ é maior do que $1/3$, é o contrário.

Maria: Mas, eu acho, em relação a intervir para melhorar a aprendizagem, eu mudaria o enunciado. Eu colocaria assim: "tortas do mesmo tamanho". Porque, no final, quando ele termina falando [...] "torta igual à das meninas". Eu entendi, só que isso também pode levar o aluno a pensar que foi dividido igual, que as meninas e os meninos comeram igual. Eu sei que não é isso que está escrito, só que poderia deixar mais claro, porque eu sinto que essa resposta número um foi baseada nessa parte. Ele não analisou o $1/2$, $1/3$. Ele deu a resposta aqui [mostrando no enunciado que a torta dos meninos é igual à das meninas], mas no primeiro ele bateu o olho aqui ó, [mostrando a palavra igual] "ah, foi comido igual", "é igual", para mim foi uma resposta superficial.

Celina: Só com a mudança do enunciado, ele iria dar uma resposta coerente?

Maria: Pode ser que sim. Porque [...] se o aluno olhar a imagem, ele consegue dar uma resposta certa. Ele consegue ver que três pessoas comendo uma torta vai comer menos do que duas, só que, se ele atentar ao enunciado, isso aqui tá fácil de errar a hora que fala que as meninas... "igual à das meninas". Então, para mim, eles patinaram nisso.

Celina: Assim como já teve na avaliação [áudio incompreensível], por exemplo, em que o desenho não correspondia ao que estava escrito e que levou as crianças.

Maria: Isso, se ele olhar a imagem, ele vai pra um lado, se ele olhar a informação, ele vai para o outro.

Celina: Pode ser uma questão.

Com base no diálogo, discuta com seu grupo os seguintes itens:

d) Como vocês avaliam a leitura que Maria fez da situação apresentada na Figura 2?

e) Como vocês avaliam a leitura que Celina e Sônia fizeram da situação apresentada na Figura 2?

f) As professoras Maria, Celina e Sônia estavam abordando o mesmo aspecto da situação apresentada na Figura 2?

Em um momento posterior, professora Maria reafirma sua interpretação para a situação envolvendo a criança.

Maria: *Pra mim, na hora de responder essa questão, ele se atentou mais ao final do enunciado. Está claro pra mim, mas, ao mesmo tempo, pode gerar uma dúvida porque ele pode ter entendido ali que eles comeram igual. Está escrito no final: igual das meninas, [...] se ele observasse só o desenho..., se a criança vê a imagem, ela dá uma resposta, se ela olha o enunciado, ela pode dar outra. Então, pra mim, ele se atentou só ao enunciado. [...] A torta era igual, não os pedaços.*

Professor Formador 1: *Você acha que essa informação é importante no enunciado ou poderia sair daí pra evitar essa suposta dúvida?*

Maria: *Está colocado na minha intervenção que teria que alterar esse enunciado.*

Professor Formador 1: *Mas, alterar o enunciado tirando esse final de frase, igual das meninas, ou reescrevê-lo?*

Sílvia: *Eu acho que se tem a imagem e o intuito é fazer a leitura da imagem, é dispensável "igual à das meninas".*

Professor Formador 2: *E a imagem é importante?*

Mariana: *Para eles, é importantíssimo.*

Professor Formador 2: *E nesse caso, ela nem diz quantas meninas e quantos meninos. Só na imagem.*

[...]

Maria: *Se colocasse que as tortas são do mesmo tamanho, são iguais e depois blá, blá, blá... Mas o duro que no final aquele "igual" ficou longe da torta, entendeu? Daí dá brecha pra ele entender que os pedaços são iguais. [...] Poderia para ser suprimida [a informação de que é igual à das meninas], porque dá para ver que as tortas são iguais, dá para ver a quantidade de crianças.*

[...]

Professor Formador 2: *Só pra entender uma coisa, então, a primeira resposta, vocês estão associando que o problema é o enunciado. Que é interpretação do enunciado. [...] E a segunda resposta?*

Maria: *Está certa.*

Professor Formador 2: *E essa segunda resposta, em termos de interpretação de enunciado, como é que a gente pode conectar a primeira resposta, né? Ele acertou a fração.*

Sônia: *Como pode ser igual se a fração é diferente,*

né? Por que desse erro, né? Aí que entrou a questão do enunciado. Porque se ele acertou a dois! [referindo-se à segunda pergunta]

Maria: *Talvez, falta de atenção porque são duas respostas antagônicas. Ele também não se atentou. Respondeu a primeira, respondeu a segunda, mas não percebeu que era o mesmo número de torta.*

Sílvia: *A Fabiana está falando aqui que ele também pode ter colocado 1 de 3, porque é uma torta para três, e 1 de 2, porque é uma torta para dois.*

Fabiana: *Só na visualização do desenho.*

Com base no diálogo acima e na Figura 2, discuta com seu grupo:

g) Vocês concordam com a interpretação de Maria e com sua proposta de reformulação do enunciado apresentada? Por quê?

h) Qual o papel da imagem nessa discussão? Vocês acreditam que a imagem influenciou a resposta dada pela criança na Figura 2?

i) Vocês concordam com a professora Sílvia quando diz: "Eu acho que se tem a imagem e o intuito é fazer a leitura da imagem, é dispensável "igual à das meninas"?"

j) Como vocês avaliam os comentários finais de Sílvia e Fabiana?

k) Vocês utilizam imagens/desenhos em tarefas matemáticas em suas aulas?



TERCEIRA TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL

A terceira TAP apresenta a tarefa matemática chamada de Tarefa dos Canudos (apresentada no Quadro 2). Tal tarefa foi elaborada no contexto da formação continuada no ano de 2018 com base no trabalho de Lins e Silva (2006) e desenvolvida em uma turma de 4º ano de uma das professoras participantes do grupo naquele ano. O objetivo principal dessa tarefa matemática era trabalhar com os alunos a necessidade dos números racionais positivos por meio do significado de medida. Para tanto, a Tarefa dos Canudos solicitava aos estudantes que medissem objetos da sala utilizando apenas um canudo.

No ano de 2019, a Tarefa dos Canudos foi utilizada durante o ciclo completo do Estudo de Aula, sendo reformulada pela professora Maria em seu planejamento, desenvolvida com sua turma de 5º ano e analisada no grupo de formação em colaboração com outras professoras. Além da Tarefa dos Canudos em suas duas versões, a TAP traz trechos construído a partir de diálogo autêntico entre as professoras durante a formação continuada e trechos das discussões entre a professora e seus alunos durante o desenvolvimento da aula.

O Quadro 2 apresenta a Tarefa dos Canudos, uma tarefa que foi elaborada em 2018 por um grupo de professores para ser trabalhada com uma turma do 4ª ano do Ensino Fundamental e que, após ser desenvolvida por uma professora em sua turma, foi reelaborada e levada para discussão no processo formativo de 2019.

Quadro 2: Tarefa dos Canudos

- 1) Utilizando apenas um pedaço de canudo, escolha um objeto da sala e escreva sua medida.
- 2) Se no processo de medir o objeto, o canudo couber um número inteiro de vezes, então troque de objeto, de modo que precise utilizar um "pedacinho" do canudo no registro da medida.
 - a) O "pedacinho" que você utilizou é maior ou menor do que a metade do canudo?
 - b) O pedacinho é menor ou maior do que a terça parte do canudo? O que é terça parte do canudo?
- 3) Quantas vezes, aproximadamente, o "pedacinho" cabe no canudo?
- 4) A partir das observações feitas nas atividades anteriores, de que forma você poderia melhorar a escrita da medida do objeto escolhido?

Fonte: Dados da pesquisa

Com base na tarefa apresentada, discuta com seu grupo:

a) Que ideias matemáticas presentes no currículo do ano de escolaridade em que você atua essa tarefa permite desenvolver?

b) Em que medida a tarefa se assemelha e em que medida se difere, daquelas que usualmente você propõe aos seus alunos?

Esta tarefa foi objeto de discussão no primeiro encontro com as professoras participantes da formação continuada em 2019. Em determinado momento do debate, os professores formadores quiseram perceber se as professoras reconheciam o pedacinho como parte essencial para a apropriação da ideia de número racional na forma fracionária naquele contexto. A intenção era que, ao perceber a necessidade de se utilizar um pedacinho para realizar a medida, os alunos fossem refinando essa ideia (com a mediação do professor) até pensar em noções como metade, a metade da metade e a terça parte, conduzindo-os às formas de representar frações usuais, como $1/2$, $1/4$ e $1/3$.

As falas a seguir mostram um determinado momento do diálogo entre as professoras participantes e professores formadores que problematizam o uso do termo pedacinho no enunciado da Tarefa dos Canudos.

Professor Formador 1: *E por que vocês acham que o pedacinho era importante olhando a tarefa como ela foi organizada? [...] Vocês acham que o item 2 que perguntava se o pedacinho era maior ou menor que a metade, perguntava se era maior ou menor que a terça parte e depois perguntava quantas vezes ele cabia no canudo. Vocês acham que essas perguntas ajudaram a melhorar a escrita da medida do objeto?*

Maria: *Eu acho que a palavra pedacinho teria que ser alterada para pedaço, porque nesse caso não foi um pedacinho, foi um pedaço. O resto é que era pedacinho. A gente utilizou três quartos por exemplo, um quarto que era o resto. Então o nosso pedaço não era um pedacinho, o nosso pedaço era maior que a metade.*

Professor Formador 2: *De algum modo, essa foi uma questão que surgiu depois, a gente percebeu exatamente essa questão. Falar em pedacinho quando, na verdade, para algumas medidas, sobrava um pedaço. E acho que o grupo de vocês mesmo que falou: o que é esse pedacinho? É um pedaço usado na medida.*

Algumas professoras: *A sobra. A gente usou a sobra.*

Maria: *Não era a sobra, era o que a gente usou para medir, para completar a medida.*

Ana: *Mas eu não entendi, como vocês fizeram?*

Maria: *Por exemplo: deu um canudo inteiro e, por exemplo, três quartos do outro. Aquele pedacinho que ficou pra fora da mesa, o que sobrou. A gente não considerou o pequenininho, a gente considerou o que usou para medir.*

Professor Formador 1: *Então, espera aí, lá nos grupos teve um pedaço. Vocês conseguiram representar esse pedaço, usando o pedacinho que ficou para fora? Essa foi a ideia?*

Maria: *Foi, porque, com o pedacinho que ficou para fora, a gente foi fracionando pelas partes dadas e quantas partes cabia no pedaço.*

Com base nos diálogos acima, discutam com seu grupo os seguintes questionamentos:

c) A professora Maria contesta o enunciado da

tarefa, o uso do termo pedacinho. Vocês concordam com a professora? O termo usado poderia gerar alguma confusão no entendimento do aluno? De que forma?

d) Algumas professoras, dentre elas a professora Ana, parecem estar pensando de forma um pouco diferente de Maria, conforme o diálogo apresentado. Como você avalia o posicionamento da professora Maria em relação à divergência de ideia? Justifique sua resposta.

No Quadro 3 apresentamos a Tarefa dos Canudos reformulada, da mesma maneira que a professora Maria desenvolveu em sua turma de 5º ano do Ensino Fundamental. Nessa reformulação, é possível perceber que o termo pedacinho não aparece no enunciado, fruto da discussão coletiva que ocorreu no primeiro encontro. A professora entendeu que manter o termo poderia gerar

Quadro 3: Tarefa dos Canudos reformulada pela professora Maria (2019)

Utilizando apenas um canudo, escolha um objeto da sala e escreva sua medida.

- O canudo coube sempre inteiro no objeto escolhido ou vocês utilizaram uma parte também?
- Se o canudo coube sempre inteiro, escolha outro objeto e dê a sua medida.
- Essa parte que você utilizou na medida é metade do canudo? É maior que a metade? Ou é menor que a metade?
- Quantas vezes essa parte cabe no canudo?
- Como vocês representariam essa parte?

Fonte: Dados da pesquisa

e) Comparem os dois enunciados da Tarefa dos Canudos. Vocês identificam diferenças importantes nesses enunciados?

f) Como vocês avaliam a alteração feita pela professora Maria? Vocês teriam feito algo semelhante?

O diálogo abaixo aconteceu durante o desenvolvimento da aula da professora Maria com sua turma de 5º ano. Em um determinado momento da aula, a professora discutia com os alunos se uma parte do canudo obtida por um dos grupos enquanto mediam um objeto era maior, menor ou igual à metade do canudo. O canudo coube quatro vezes inteiras e uma parte quase inteira do canudo, mas uma integrante do grupo dizia que tinha dado "cinco e pouco". A professora tenta explicar a maneira correta ao grupo e, ao final, pergunta:

Maria: Grupo, perceberam? Por que não é cinco e pouco? São quatro inteiros [a professora é interrompida por uma aluna]. Exato! Ia chegar no cinco, mas não chegou.

Karina: É, tipo... sobrou.

Maria: Então, só coube inteiros quantos mesmo, grupo?

Karina: Tirou esse pedacinho.

Maria: Oi?

Karina: Quando tirou esse pedacinho.

Maria: Isso aqui representa um pouco? [apontando para a parte do canudo que é maior do que a metade, mas menor do que o canudo inteiro]

Turma: Não!

Karina: Não, porque ele é grande.

Maria: Porque ele é grande!?

Thiago: Maior.

Maria: Maior do que o quê?

Karina: Maior do que esse pedacinho. [enquanto

Karina falava, o Thiago, que estava próximo à professora, aponta para o "pedacinho" do canudo que a professora segurava].

Maria: Maior do que o pedacinho? Pode ser.

Com base no diálogo entre a professora e os alunos, discuta com seu grupo:

g) O diálogo entre professora e seus alunos corrobora com o que a professora Maria havia antecipado no dia do planejamento? Em sua opinião, você acredita que a mudança do enunciado da tarefa pode ter favorecido a discussão matemática com a turma? Comente.

h) A Tarefa dos Canudos era uma tarefa com características exploratória, que permitia aos alunos realizarem as medições que quisessem e utilizarem quaisquer termos para comunicar as informações obtidas. Por isso, uma tarefa como essa exige que a professora esteja bem-preparada e segura de seus propósitos, permitindo que os alunos criem e cheguem a algumas respostas. Com base nos trechos de diálogos apresentados, como vocês avaliam o papel do planejamento coletivo no que de fato ocorreu em sala de aula?



QUARTA TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL

A quarta TAP foi construída com um diálogo autêntico da sala de aula, ocorrido durante o desenvolvimento da Tarefa dos Canudos pela professora Maria com sua turma de 5º ano. Trata-se de uma situação desafiadora em que uma estudante, aqui chamada de Yara, apresentava uma forma de pensar diferente da esperada pela professora e esta resistia em corrigir ou impor uma outra forma de pensar. O trecho utilizado para construir essa TAP aconteceu no início do desenvolvimento da tarefa, quando a professora distribuiu um canudo de plástico e uma folha de almaço por grupo para os registros com a orientação de que todos os grupos ajudassem na medida do objeto. Assim, fazendo uso de uma tarefa matemática e de diálogos de sala de aula, a TAP visa gerar reflexões sobre as ações da professora em não dar a resposta de imediato aos alunos, mas levá-los a perceber sozinho quando seus pensamentos são equivocados.

Para o desenvolvimento da Tarefa dos Canudos (Quadro 4) com sua turma de 5º ano, a professora Maria escreveu no quadro uma pergunta por vez, dando tempo entre a escrita de um enunciado e outro, para que os alunos pudessem resolvê-las em grupo.

Quadro 4: Tarefa dos Canudos reformulada pela professora Maria (2019)

Utilizando apenas um canudo, escolha um objeto da sala e escreva sua medida.

- O canudo coube sempre inteiro no objeto escolhido ou vocês utilizaram uma parte também?
- Se o canudo coube sempre inteiro, escolha outro objeto e dê a sua medida.
- Essa parte que você utilizou na medida é metade do canudo? É maior que a metade? Ou é menor que a metade?
- Quantas vezes essa parte cabe no canudo?
- Como vocês representariam essa parte?

Fonte: Dados da pesquisa

Enquanto os alunos mediam os diferentes objetos da sala, Maria observava-os atentamente e percebeu que o grupo E, que havia escolhido o mural da sala para medir, estava encontrando dificuldades para completar a medida. A professora ofereceu ajuda aos alunos e ao terminar a medida, que deu quatro canudos e mais da metade, a professora dobra o canudo, marcando a parte usada na medição para que os alunos visualizassem e questiona quanto havia dado a medida.

Yara: Quatro e meio.

Maria: O que vocês têm que fazer? Pensar em como colocar isso no papel, se tiverem ideias diferentes podem colocar as ideias diferentes.

Ao voltarem para seus lugares e registrarem suas ideias a respeito da medida do mural, como a professora havia sugerido, Maria se aproxima para verificar as hipóteses que surgiram e se haviam chegado a um consenso a respeito da "parte" usada na medida do mural. Viu que os alunos haviam dado duas respostas para a medida, "cinco e quase a metade de um e meio" e "cinco e pouco".

Maria: Vamos lá! Vocês mediram a lateral do mural.

Grupo E: Sim.

Maria: Quanto deu a medida? [a professora pega a folha que os alunos anotaram e lê as respostas] "cinco inteiros e quase a metade de um e meio", "cinco e pouco", ok. Sabe esse pouco que vocês utilizaram para fazer medida, vocês chamam de meio e de pouco. Pensa só nessa parte [A professora pega o canudo do grupo, em que já está dobrada a parte utilizada na medida, e mostra para o grupo]. A parte que não coube inteira é igual à metade do canudo?

Yara: Não, ela é menor que a metade.

Maria: É menor? Tem certeza?

Yara: Sim. [a aluna balança a cabeça dizendo que sim].

Maria: Tá! E você Marcelo?

Marcelo: É menor.

Maria: É menor que a metade? E você Paulo?

Paulo: É menor.

Maria: E você, Ítalo?

Ítalo: É maior [falando baixo].

Maria: Você acha que é maior! [com entonação, a professora reforça em voz alta o que o aluno Ítalo falou baixinho]. Temos um integrante que acha que é maior. Vamos pensar, o Ítalo acha que esse pedaço [apontando para a parte do canudo usada na medida] é maior do que a metade. Explica para os colegas por que você acha que essa parte é maior do que a metade?

O aluno Ítalo respondeu muito baixo e não foi possível captar o som. A professora Maria repetiu a fala do aluno.

Maria: O Ítalo falou que é porque a metade está aqui [apontando para o meio do canudo] e a medida deu mais que a metade [apontando e dobrando o canudo do tamanho da parte utilizada na medição do mural], sobrou mais. O que vocês acham da ideia do Ítalo?

Yara: Eu acho que a ideia é boa, mas eu ainda acho que é menor do que a metade.

Maria: Paulo, continua achando que é menor que a metade? E Marcelo também diz que é menor. Então vocês vão registrar que é menor do que a metade e o Ítalo vai registrar que é maior do que a metade.

Ao ler o diálogo acima, debata com seu grupo os itens abaixo.

a) No primeiro trecho do diálogo, talvez pelo fato de ter dobrado o canudo e marcando a parte usada na medição (quatro canudos e mais do que a metade), a professora Maria se mostrou um pouco surpresa quando a aluna Yara respondeu quatro e meio. Como vocês avaliam a ação da professora após essa resposta, pedindo que registrem no papel inclusive as ideias diferentes? Qual a intenção da professora em não contestar a resposta da aluna, naquele momento?

b) Na sequência do diálogo, a professora quer

saber como o grupo registrou a medida na folha, com a intenção de refinar o termo “meio” e “pouco” que os estudantes estavam usando, discutindo as ideias de maior do que a metade ou menor do que a metade. Nesse momento, uma nova surpresa. O que parecia ser evidente que era maior do que a metade, os alunos Yara, Marcelo e Paulo diziam que era menor do que a metade. Somente Ítalo responde que é maior do que a metade. Como vocês avaliam a intervenção da professora nesse trecho? Como vocês avaliam a forma como Maria conclui dizendo “Então vocês vão registrar que é menor do que a metade e o Ítalo vai registrar que é maior do que a metade”?

No próximo diálogo, a professora Maria percebeu que deveria aproveitar o momento (plenária) para corrigir a medida incorreta que o grupo E apresentou e convida a

Figura 3: Professora Maria medindo o mural da sala de aula.



Fonte: Dados da pesquisa

Maria: *Me ajudem, contem comigo.*

Todos os grupos: *1, 2, 3, 4. Quase 5. Quatro e meio!*

Gabriel: *Quatro e meio. Quatro e meio.*

Maria: *Quanto que o grupo anotou que deu a medida?*

Todos do grupo E: *Cinco.*

Maria: *Cinco e mais da metade de um! Pergunto para vocês, quantas vezes a gente falou o canudo aqui? Quantas vezes o inteiro?*

Gabriel: *Quase cinco.*

Maria: *Quase cinco, chegou no cinco?*

Todos os grupos: *Não.*

Maria: *Cinco e mais um pouco, é depois que passa de cinco. A gente contou quatro vezes. Quatro canudos inteiros e a hora que ia dar o cinco, faltou isso daqui [a professora aponta para o canudo dobrado] para dar o cinco, não foi?*

Maria: *Como que eu falo então essa medida corretamente? Quem pode colaborar?*

Karina: *Quatro inteiro?*

Maria: *Quantas vezes deu o canudo aqui?*

Karina: *Quatro.*

Maria: *Quatro inteiros e... quase um inteiro. Tem outras formas de falar? Os meninos [apontando para o grupo E] falaram “e um pouco”. Será que isso é um pouco? [mostrando a parte usada do canudo para medir o mural].*

Gabriel: *Não, essa pontinha pequenininha é um pouco.*

Maria: *Ah, o Gabriel falou que se fosse esse pedacinho [apontando para o que sobrou do canudo na*

medida do mural] a gente poderia falar em quatro e pouco. Mas como é a parte maior, como a gente poderia dizer?

Gabriel: *Quatro inteiros.*

Maria: *Quatro inteiros e acabou? Quatro inteiros e quase...?*

Rafael: *E quase um inteiro.*

Maria: *Quatro inteiros e quase um inteiro! Pode ser! Tem outra forma de dizer isso?*

Rafael: *Quatro inteiros e maior do que a metade!*

Maria: *Quatro inteiros e maior do que a metade? Isso daqui é maior do que a metade? [apontando para o pedaço do canudo]. Grupo, perceberam? Por que não é cinco e pouco? São quatro inteiros [a professora é interrompida por uma aluna]. Exato! Ia chegar no cinco, mas não chegou.*

Com base no diálogo apresentado, discuta com seu grupo os seguintes itens:

c) Como vocês avaliam a ação da professora em convidar a turma para ajudar na medida o mural? Vocês acreditam que isso pode ter contribuído para a compreensão do Grupo E, que estava apresentando medidas diferentes? De que forma pode ter contribuído?

d) Quando a professora comenta: “será que isso é um pouco”?, vocês consideram que essa pergunta ajudou a promover as discussões matemáticas na condução dos pensamentos dos alunos? Justifique.

e) A forma como a professora conduziu a discussão, introduzindo a fração pelo seu significado de medida, não focalizando a representação fracionária, mas sim, o significado de fração como medida, foram ações favorecidas pelo processo formativo que estava participando. Como vocês avaliam essa forma de apresentar a fração em uma turma de 5º ano? E se fosse 4º ano? Discuta com seu grupo.

f) Na prática de vocês, como costumam introduzir as frações?

QUINTA TAREFA DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL

A quinta TAP foi construída com um diálogo autêntico de sala de aula, ocorrido no dia 14/05/2019 (conforme Quadro 1), durante o desenvolvimento da aula planejada coletivamente. A professora buscava, em sua turma do 5º ano do Ensino Fundamental, introduzir a necessidade das frações e sua representação por meio do significado de medida (KIEREN, 1976), solicitando aos alunos usarem um canudo para medirem objetos da sala de aula. O trecho de diálogo utilizado para construir essa segunda TAP aconteceu já no final da aula, quando a professora tentava sintetizar as discussões feitas pelos alunos em pequenos grupos e apresentar a notação usual de frações. Assim, fazendo uso somente dos diálogos de sala de aula, a TAP visa gerar reflexões a respeito do uso de situações do cotidiano (o uso do sistema monetário) no ensino da Matemática e, em particular, no ensino dos números racionais. Para tanto, são utilizadas as formas de pensar dos próprios alunos para refletir sobre possíveis problemas na aprendizagem da matemática gerados por essa associação com o sistema monetário.

Em sua turma de 5º ano do Ensino Fundamental, a professora, aqui chamada de Maria, queria trabalhar com seus alunos a necessidade da criação de números entre 0 e 1 partindo de ideias fundamentais como metade, a metade da metade e a terça parte, conduzindo-os às formas de representar frações usuais, como $1/2$, $1/4$ e $1/3$. Em um determinado momento da aula, a professora Maria indaga seus alunos, que parecem aceitar a ideia da existência de números entre 0 e 1, mas isso estaria atrelado ao sistema monetário. Vejamos o diálogo ocorrido em sala de aula:

Maria: Quem acha que existem números entre o 0 e o 1? Pensem um pouquinho. A pergunta é: Existem números entre 0 e o 1? Atenção: levante a mão quem acha que não existem números entre 0 e 1. [Alguns alunos levantam a mão]. Abaixem as mãos. Quem acha que têm números entre o 0 e o 1?

Gustavo: É de reais? É de reais? Porque se for de reais... [o aluno levanta a mão, indicando que, se for "de reais", concorda que existem números entre 0 e 1].

Maria: Se for em reais tem? Então, o Gustavo está dando um exemplo, se for de reais tem. Dá um exemplo, Gustavo.

Gustavo: Porque, olha... a metade de um real é cinquenta centavos.

Maria: e agora? [questionando o restante da turma] [Muitos alunos falam ao mesmo]

Maria: Olha! O Luiz está falando que a metade de 50 centavos é 25.

Nesse momento, Gustavo balança a cabeça na vertical e diz "Acertou", concordando com a resposta de

Luiz. A professora chama Gustavo para ir à lousa. Apondo para um segmento de reta que fez na lousa, com o número 0 em uma ponta e o número 1 na outra, a professora pergunta:

Maria: Se esse 1 fosse 1 real, o que seria aqui, Gustavo?

Gustavo: Cinquenta centavos.

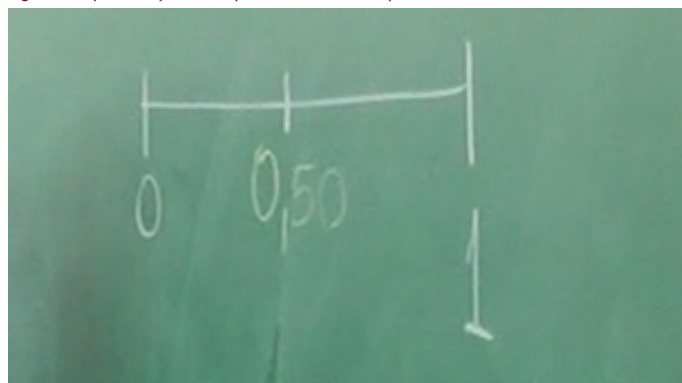
Maria: Quer anotar? Como a gente anota cinquenta centavos?

Gustavo: zero vírgula cinquenta.

Maria: zero vírgula cinquenta.

Gustavo registra na lousa o número 0,50 entre o 0 e o 1, como mostra a Figura 4.

Figura 4: Representação de cinquenta centavos feita pelo aluno Gustavo



Fonte: Dados da pesquisa

Após Gustavo sentar-se em seu lugar, a professora continua.

Maria: Vocês concordam com isso?

Alunos: Sim.

[...]

Maria: Quando eu faço uma marcação aqui no meio [a professora reforça o traço do 0,50 na Figura 4], quando eu quero saber a metade, eu divido em quantas partes?

Alunos: É... em duas?

Maria: Não é? Vocês não me disseram que quando eu quero a metade eu divido ao meio? O que acontece se eu pegar 1 e dividir em duas partes? [Na lousa, a professora monta a divisão de 1 por 2 na chave].

Priscila: Vai ficar cinquenta centavos, se for em reais.

Maria: Vai ficar cinquenta centavos! É possível dividir 1 para 2?

Priscila e outros alunos: Não!

Letícia: Sim!

Karina: [Sim] se for em dinheiro! Se for em dinheiro.

Maria: Se não for em dinheiro, não tem jeito?

Priscila: Se for comida também dá.

Maria: Ah, se for comida também dá! [...] Então, olha só, 1 dá para dividir por 2? A resposta é: não inteiro, mas se eu cortar, dividir...

Maria não se aprofunda na explicação, coloca o "zero vírgula" enquanto pergunta: "[...]alguém vai ganhar um inteiro?", acrescenta o zero no dividendo, transforma o 1 em 10 décimos, e divide o 10 por 2, obtendo o resultado final 0,5.

Maria: *E se transformar esse um inteiro em dez partes, [nesse momento a professora acrescenta um zero ao lado do um no dividendo para resolver a conta]. Aí dá pra dividir?*

Karina: *Sim. Aí coloca o 10 lá e vai ficar 5.*

Maria: *Pessoal, como é que a gente chama esse 0,5, alguém sabe?*

Priscila: *Cinco centavos.*

Maria: *Cinco centavos?*

Yara: *Dá para falar zero vírgula cinco, porque se fosse centavos, ia ter outro zero na frente do cinco, então não é centavos.*

Maria: *Olha! A Yara falou que se fosse cinco centavos, ia ser assim ó, ia ter outro zero diante do 5 [e escreveu no quadro 0,05]. Se só tem esse 5 depois da vírgula, ele se parece com quanto?*

Karina: *Com 50.*

Com base no diálogo apresentado acima, discuta com seu grupo as seguintes questões:

a) Como vocês avaliam a resposta do aluno Gustavo, que reconhece a existência de números entre 0 e 1, mas essa existência faz sentido se estivermos falando de dinheiro?

b) Vocês acreditam que a fala "a metade de um real é cinquenta centavos" feita por Gustavo é adequada para as ideias matemáticas que a professora Maria quer ensinar? Comentem.

c) Vocês acreditam que a forma de registrar os cinquenta centavos fazendo "zero vírgula cinquenta", como mostra a Figura 4, é apropriada para a aprendizagem dos alunos? Essa compreensão pode acarretar erros futuros? De que tipo?

d) Na sequência da aula, a professora Maria escreve na lousa o número 0,5 e pergunta: "Como a gente chama esse 'zero vírgula cinco', alguém sabe?". Na expectativa de algum aluno responder "meio", a professora se surpreende com a resposta de uma aluna: "cinco centavos". Ao que outra aluna comenta: "É 'zero vírgula cinco', porque se fosse centavos, ia ter outro zero na frente do cinco, então não é centavos". Interpretem esses comentários, tentando compreender a forma como essas duas alunas estavam pensando.

e) Diante das respostas dos alunos, associando a existência de números entre zero e um a situações envolvendo dinheiro ou comida, discuta com seu grupo o uso dessas contextualizações no ensino da Matemática.



COMENTÁRIOS FINAIS

As cinco TAP que apresentamos foram desenvolvidas a partir das amostras autênticas da prática obtidas de dados produzidos no desenvolvimento de uma aula por uma professora em sua turma de 5º ano do Ensino Fundamental e por dados produzidos nos três primeiros encontros de um processo formativo que teve por objetivo promover reflexões e mobilizar/desenvolver subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino.

Nossa expectativa ao apresentar essas TAP é proporcionar à comunidade de professores formadores, professores em formação inicial e aos professores em exercício nos anos iniciais do Ensino Fundamental algumas possibilidades de se trabalhar em processos formativos com situações da prática. Ribeiro, Aguiar e Trevisan (2020), em seus estudos sobre o tema padrões e regularidades, concluíram que

o uso das tarefas de aprendizagem profissional, articulado ao papel e ações dos formadores, permitiu aos professores participantes saírem do isolamento que vivem nas suas escolas e vivenciarem oportunidades de aprenderem uns com os outros (Ball, Ben-Peretz, & Cohen, 2014), favorecendo a mobilização e o aprofundamento de seus conhecimentos matemáticos para o ensino de padrões e regularidades na escola básica (RIBEIRO; AGUIAR; TREVISAN, 2020, p. 71).

Esperamos que essas TAP aqui apresentadas possam, do mesmo modo, favorecer a mobilização e o aprofundamento dos conhecimentos matemáticos para o ensino das frações de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. No entanto, como apontam Ribeiro, Aguiar e Trevisan (2020), as TAP por si só não asseguram um ambiente favorável para a aprendizagem profissional dos professores. As ações e mediações dos professores formadores envolvidos são fundamentais para a construção desse contexto que favorece a mobilização e aprofundamento dos subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Da mesma maneira que as TAP foram produzidas em um contexto formativo que, como analisamos, possibilitaram a mobilização desses subdomínios, entendemos que, quando colocadas em outro contexto formativo, terão potencial para promover o desenvolvimento profissional docente.

Concordamos com Smith (2001) quando aponta que o trabalho de analisar registros da prática tem como objetivo ajudar os professores a desenvolverem uma base de conhecimento matemático para o ensino, para melhorar sua tomada de decisão em sala de aula. Isso significa que o trabalho de analisar as TAP ou registros de prática não deve ser pensado como algo que ajuda os professores a se tornarem hábeis em realizar análises por si mesmas. Evitar essa armadilha, finaliza Smith (2001), requer manter o trabalho de ensino como um foco e fazer conexões entre a TAP em mãos e o trabalho real que os professores desenvolvem em sala de aula.



REFERÊNCIAS

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, n. 59, p. 389-407, 2008.

BOAVIDA, A. M.; PONTE, J. P. Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In: GTI (Org.). **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, 2002. p. 43-55.

CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; NUNES, T. **O professor polivalente e a fração**: conceitos e estratégias de ensino. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.8, n.1, p. 125-136, 2006.

FIORENTINI, D.; CRECCI, V. Desenvolvimento profissional docente: um termo guarda-chuva ou um novo sentido à formação?. **Formação Docente – Revista Brasileira de Pesquisa sobre Formação de Professores**, v. 5, n. 8, p. 11-23, 30 jun. 2013.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Ed.) **Number and measurement**: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, 1976, p.101-144.

LINS, R. C., SILVA, H. da. **Frações**. Brasília: MEC, SEB, SEED, UNESP, 2006. 39 p. (Coleção PRÓ-LETRAMENTO, Fascículo 04).

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A Matemática nos anos Iniciais do Ensino Fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Ed., 2019.

PONTE, J. P. Da formação ao desenvolvimento profissional. In: Actas do ProfMat 98. Lisboa: APM, 1998. p. 27-44.

PONTE, J. P. Pesquisar para compreender e transformar a própria prática. **Educar em Revista**, n. 24, p.37-66, 2004.

PONTE, J. P.; Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.) **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p.13-27.

PONTE, J. P.; BAPTISTA, M.; VELEZ, I.; COSTA, E. Aprendizagens profissionais dos professores através dos estudos de aula. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, n. 5, p. 7-24, 2012.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 868 - 891, dez. 2016.

RIBEIRO, A. J.; AGUIAR, M.; TREVISAN, A. L. Oportunidades

de aprendizagem vivenciadas por professores ao discutir coletivamente uma aula sobre padrões e regularidades. **Quadrante**, v. 29, n. 1, 2020.

RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. **Acta Scientiae – ULBRA**, Canoas, v. 21, p. 49-74, 2019.

SARAIVA, M.; PONTE, J. P. O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. **Quadrante**, v. 12, n. 2, p. 25-52, 2003.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v.15, n.2, p.4-14, Feb. 1986.

SHULMAN, L.S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Harvard, v.57, n.1, p.1-22, 1987.

SMITH, M. S. **Practice-Based Professional Development for Teachers of Mathematics**. Reston, Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics, 2001.