UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANDRESSA PAOLA CORDEIRO

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA DE HOPF

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO
2018

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANDRESSA PAOLA CORDEIRO

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA DE HOPF

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Larissa Hagedorn Vieira
Coorientador: Wilian Francisco de Araujo

TOLEDO
2018

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado Introdução à Álgebra de Hopf foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº __ de __/__/____

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Orientadora: Ma. Larissa Hagedorn Vieira

Coorientador: Dr. Wilian Francisco de Araujo

Professor Me. Adriano Gomes de Santana

Professor Dr. Robson Willians Vinciguerra

TOLEDO
2018

RESUMO

O propósito deste trabalho é apresentar estudos realizados sobre álgebras, coálgebras e biálgebras, culminando na definição de álgebras de Hopf. São expostos exemplos de cada uma dessas estruturas algébricas, bem como contraexemplos quando convenientes. Homomorfismos de álgebras e de coálgebras também possuem papel fundamental nos estudos aqui apresentados.

Palavras-chave: Álgebra. Coálgebra. Biálgebra. Antípoda. Álgebra de Hopf.

ABSTRACT

The purpose of this work is to present the studies realized about algebras, coalgebras and bialgebras, culminating in the definition of Hopf algebras. Examples of each algebraic structures, as well as counterexamples when appropriate, are exposed. Algebras homomorphisms and coalgebras homomorfisms also play a fundamental role in the studies presented here.

Palavras-chave: Algebra. Coalgebra. Bialgebra. Antipoda. Hopf algebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo da álgebra de Hopf não está presente na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática, mas tópicos essenciais para seu entendimento são tratados em disciplinas do curso, tais como grupos e anéis. Este trabalho apresenta resultados de estudos realizados ao longo de seis semestres no campo da álgebra, utilizando conceitos de módulo e produto tensorial e apresentando definições e exemplos que culminam na construção de uma álgebra de Hopf.

O produto tensorial $A \otimes B$ dos módulos A e B possui papel fundamental, como expõe [5], no estudo da álgebra multilinear, e é essencial na definição de biálgebra usada neste trabalho, estrutura essa que necessita de uma compatibilidade entre uma álgebra e uma coálgebra, como será exposto adiante. Uma álgebra de Hopf corresponde a uma biálgebra juntamente com uma condição que pode ser expressa usando estruturas de álgebra e coálgebra, como colocado por [2].

Hopf, em 1941, observou o primeiro exemplo desse tipo de estrutura na topologia algébrica, uma homologia de um grupo de Lie conectado. O estudo das álgebras de Hopf iniciou-se na década de 1960 sob um ponto de vista estritamente algébrico, mas ao fim da década de 1980 as pesquisas nessa área, como aponta [2], tiveram forte impulso, motivadas por suas conexões com a mecânica quântica. Os autores ainda apontam a presença desse tipo de estrutura algébrica em diversos campos da matemática, como teoria dos números, geometria algébrica, teoria de Lie, teoria de Galois, dentre outros.

Este trabalho expõe, portanto, os tópicos de maior relevância para a definição de álgebra de Hopf, organizados em três capítulos: Pré-requisitos, Álgebras e Coálgebras e Álgebras de Hopf.

No primeiro capítulo estão presentes definições e proposições referentes a anéis e corpos, necessárias no decorrer dos demais capítulos. Entitulado Álgebras e Coálgebras, o segundo capítulo aborda a definição dessas duas estruturas algébricas e de seus respectivos homomorfismos. Ainda, são apresentados exemplos que serão retomados no capítulo seguinte. Por fim, Álgebras de Hopf, o terceiro e último capítulo deste trabalho, apresenta importantes relações entre uma álgebra e uma coálgebra, como a estrutura algébrica denominada biálgebra, com exemplos e contraexemplos, culminando na definição de antípoda e, finalmente, de álgebra de Hopf, sendo ainda apresentados exemplos e contraexemplo.

O leitor não familiarizado com estruturas de grupos, anéis, módulos e corpos pode tomar como leitura prévia os trabalhos de [4] e [5]. Para a construção do produto tensorial e do dual, bem como principais propriedades, recomendam-se [1] e [5]. Este texto continua os estudos trazidos por [1].

LISTA DE SÍMBOLOS

Nesse trabalho,

$\Bbbk$	denotará um corpo;
R	denotará um anel;
I_A	denotará a função identidade do conjunto A;
1_A	denotará o elemento neutro do conjunto$A$
$M_n(X)$	denotará as matrizes $n \times n$ com entradas em um conjunto X;
$\otimes$	denotará o produto tensorial sobre um corpo $\Bbbk$, podendo também ser reescrito como $\otimes_{\Bbbk}$. Sempre tem-se que $x \otimes 0 = 0$;
$\delta_{i,j}$	denotará o elemento de Kronecker, onde $\delta_{i,j} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{i,j} = 0$ se $i \neq j$;
ρ	é função $\rho : V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ tal que $\rho(f \otimes g) : V \otimes W \to \Bbbk$, onde $$\rho(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v)g(w);$$
$Hom_R(A, B)$	denotará o conjunto dos homomorfismos de R-módulo $f : A \to B$;
$\sim$	denotará os isomorfismos de $A \otimes \Bbbk \to A$ e $\Bbbk \otimes A \to A$.

1 PRÉ-REQUISITOS

Neste capítulo são apresentadas propriedades importantes referentes a anéis e corpos, relevantes no desenvolvimento dos próximos capítulos do trabalho. As definições e demonstrações aqui presentes foram elaboradas ou retiradas de [4] e [5].

Definição 1. *Um* ***anel*** *é um conjunto não vazio R munido com duas operações (denotadas como adição e multiplicação) e denotado por $(R, +, \cdot)$ tal que, $\forall a, b, c \in R$,*

i) $(R, +)$ *é um grupo abeliano;*

ii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$*;*

iii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *e* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$*.*

Se $a \cdot b = b \cdot a$, diz-se que R é um anel ***comutativo*** *e, ainda, se existir 1_R tam que $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$, R é anel* ***com unidade****.*

Definição 2. *Sejam $(R, +, \cdot)$ um anel e I um subconjunto não vazio de R. Dizemos que I é um* ***ideal*** *à esquerda de R se, para quaisquer $x, y \in I$ e $r \in R$,*

i) $x - y \in I$*;*

ii) $r \cdot x \in I$*.*

Se $I \neq R$ e $I \neq \{0\}$, então I é chamado de ***ideal próprio****. Se, ainda, $x \cdot r \in I$, dizemos que I é um* ***ideal bilateral****, ou simplesmente ideal.*

A operação de produto pode ser suprimida da escrita, como será feito a partir de agora, sem prejuízo de seu significado. A posteriori apresenta-se um resultado que garante que qualquer ideal do anel de matrizes de dimensão $n > 1$ com entradas em um anel R possui entradas em um ideal de R. Para que isso seja válido, é importante salientar que o conjunto de matrizes quadradas com entradas em um anel é um anel.

Proposição 1. *Se R é um anel com unidade e $n > 1$, então os ideais de $M_n(R)$ são da forma $M_n(I)$, onde I é ideal de R.*

Demonstração. Sejam e_{ij} elementos da base canônica de $M_n(R)$, com $1 \leq i, j \leq n$. Cada elemento de $M_n(R)$ é da forma

$$(a_{ij}) = \sum_{i,j} a_{ij} e_{ij}, \text{ com } a_{ij} \in R.$$

Seja A um ideal de $M_n(R)$ e considere $I = \left\{ a_{11} \in R; \sum_{i,j} a_{ij}e_{ij} \in A \right\}$. Mostremos que I é ideal de R.
De fato, dados $a_{11}, b_{11} \in I$ e $r \in R$, existem $x = \sum_{i,j} a_{ij}e_{ij}$ e $y = \sum_{i,j} b_{ij}e_{ij}$, onde $x, y \in A$. Então, $x - y = \sum_{i,j}(a_{ij} - b_{ij})e_{ij} \in A$, o que implica que $a_{11} - b_{11} \in I$. Mais ainda, $rx = \sum_{i,j} ra_{ij}e_{ij} \in A$ e $xr = \sum_{i,j}(a_{ij}e_{ij}r) = \sum_{i,j}(a_{ij}re_{ij}) \in A$, de onde $ra_{11}, a_{11}r \in I$. Logo, I é ideal de R.
Mostremos agora que $A = M_n(I)$. Precisamos primeiro verificar que $A \subset M_n(I)$.
Seja $x = \sum_{i,j} a_{ij}e_{ij} \in A$. Queremos mostrar que $a_{sk} \in I$, para todo $1 \leq s, k \leq n$. Observe que

$$\begin{aligned} e_{1s}xe_{k1} &= \sum_{i,j} e_{1s}a_{ij}e_{ij}e_{k1} \\ &= \sum_{i,j} a_{ij}e_{1s}e_{ij}e_{k1} \\ &= \sum_{j} a_{sj}e_{1j}e_{k1} \\ &= a_{sk}e_{11} \in A, \end{aligned}$$

o que implica que $a_{sk} \in I$, logo, $A \subset M_n(I)$.
Mostremos agora que $M_n(I) \subset A$. Seja $y = \sum_{i,j} b_{ij}e_{ij} \in M_n(I)$, então $b_{ij} \in I$, para todo $1 \leq i, j \leq n$. Assim, para cada i, j existe uma matriz $\alpha_{ij} = \sum_{s,k} a_{sk}e_{sk} \in A$ tal que $a_{11} = b_{ij}$. Então,

$$\begin{aligned} e_{i1}\alpha_{ij}e_{1j} &= \sum_{s,k} e_{i1}a_{sk}e_{sk}e_{1j} \\ &= \sum_{s,k} a_{sk}e_{i1}e_{sk}e_{1j} \\ &= a_{11}e_{ij} \in A. \end{aligned}$$

Consequentemente, $b_{ij}e_{ij} \in A$ para cada i, j variando de 1 a n, o que mostra que $y = \sum_{i,j} b_{ij}e_{ij} \in A$, isto é, $M_n(I) \subset A$.
Portanto, $A = M_n(I)$. □

Em seguida apresenta-se a definição de homomorfismo de anéis e um importante resultado que o relaciona com ideais.

Definição 3. *Sejam R e S anéis. Uma função $f : R \to S$ é um* ***homomorfismo de anéis*** *se, para todo $a, b \in R$,*

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \qquad e \qquad f(ab) = f(a)f(b).$$

Proposição 2. *Sejam R e S anéis e $f : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Então $ker(f) = \{a \in R; f(a) = e\}$ é ideal de R, onde e é o elemento neutro de R.*

Demonstração. Para provar que $ker(f)$ é um ideal de R, precisamos mostrar que, para todo $a \in R$ e $k, k' \in ker(f)$, tem-se $k + k' \in ker(f)$ e $ak, ka \in ker(f)$. De fato, como f é homomorfismo de anéis, valem as seguintes igualdades:

$$f(k+k') = f(k) + f(k') = 0 + 0 = 0 \Rightarrow k + k' \in ker(f),$$

$$f(ak) = f(a)f(k) = f(a)0 = 0 \Rightarrow ak \in ker(f),$$

$$f(ka) = f(k)f(a) = 0f(a) = 0 \Rightarrow ka \in ker(f).$$

Portanto, $ker(f)$ é ideal de R. □

Após analisar o resultado anterior, expõe-se a definição de corpo, assim como um resultado que garante que corpos não possuem ideais triviais, isto é, ideais próprios.

Definição 4. *Um anel $\mathbb{k}$ comutativo e com unidade é dito **corpo** se todo elemento diferente de zero possui inverso com relação à multiplicação, isto é, $\forall x \in \mathbb{k}$, $x \neq 0, \exists y \in \mathbb{k}$ tal que $xy = 1$.*

Proposição 3. *Um corpo $\mathbb{k}$ não possui ideal próprio.*

Demonstração. De fato, se I é ideal de $\mathbb{k}$, então $I \neq \{0\}$, então $\exists i \in I \subset \mathbb{k}$ com $i \neq 0$. Logo, $\exists i^{-1} \in \mathbb{k}$ tal que $ii^{-1} = 1_{\mathbb{k}} \in I$, o que implica que $I = \mathbb{k}$, visto que $1_{\mathbb{k}}a = a \in I, \forall a \in \mathbb{k}$. Logo, $\mathbb{k}$ não possui ideal próprio. □

Por fim, define-se dual de um espaço vetorial, importante para a construção do produto convolução que será feita adiante.

Definição 5. *Seja V um $\mathbb{k}$-espaço vetorial. O **dual** de V, denotado por V^*, é o conjunto $V^* = \{f : V \to \mathbb{k}, f$ é $\mathbb{k} - linear\}$.*

2 ÁLGEBRAS E COÁLGEBRAS

Este capítulo aborda $\Bbbk$-álgebras e $\Bbbk$-coálgebras com unidade e seus respectivos homomorfismos, bem como propriedades e exemplos de cada um desses conjuntos e suas funções. Para o desenvolvimento deste capítulo foram usados os trabalhos [1], [3] e [5].

Definição 6. *Uma* ***$\Bbbk$-álgebra com unidade*** *é uma tripla (A, m, u) onde A é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $m : A \otimes A \to A$ e $u : \Bbbk \to A$ são aplicações $\Bbbk$-lineares que satisfazem a comutatividade dos seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I_A \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes I_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Bbbk \otimes A \arrow[r, "u \otimes I_A"] \arrow[dr, "\sim"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \Bbbk \arrow[l, "I_A \otimes u"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Dizer que o primeiro diagrama comuta significa que $m \circ (I_A \otimes m) = m \circ (m \otimes I_A)$. Da mesma forma, o segundo diagrama comuta se $\sim = m \circ (u \otimes I_A)$ e $\sim = m \circ (I_A \otimes u)$, onde $\sim$ é isomorfismo.
Neste trabalho serão abordadas apenas $\Bbbk$-álgebras com unidade e, para simplificar a escrita, serão tratadas apenas como álgebras. As funções m e u são denominadas multiplicação e unidade, respectivamente. A partir do raciocínio colocado acima são apresentados exemplos de álgebras.

Exemplo 1. *Seja $\Bbbk[x]$ o conjunto dos polinômios na variável x. Então $(\Bbbk[x], m, u)$ é uma álgebra com m e u definidas como segue:*

$$\begin{array}{rcl} m : \Bbbk[x] \otimes \Bbbk[x] & \to & \Bbbk[x] \\ x^a \otimes x^b & \mapsto & x^a x^b = x^{a+b} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} u : \ \Bbbk & \to & \Bbbk[x] \\ \lambda & \mapsto & \lambda x^0 \end{array}$$

Demonstração. Seja $x \in \Bbbk[x]$, isto é, x é da forma $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \lambda x^i$, $\lambda \in \Bbbk$. Repare que o exemplo afirma que $(\Bbbk[x], m, u)$ é uma álgebra, logo, m e u são funções $\Bbbk$-lineares, por definição. Dessa forma, podemos verificar o comportamento das funções apenas em uma parcela x^i para mostrar que, de fato, a tripla dada satisfaz as condições para ser uma estrutura de álgebra, pois, para as demais somas de x, o resultado é análogo. Considere então x^a, x^b, x^c

parcelas de elementos de $\Bbbk[x]$, onde $\sim(x^a \otimes \lambda) = x^a\lambda$ e $\sim(\lambda \otimes x^a) = \lambda x^a$. Repare que

$$\begin{aligned} m \circ (I_{\Bbbk[x]} \otimes m)(x^a \otimes x^b \otimes x^c) &= m(x^a \otimes x^{b+c}) \\ &= x^{a+(b+c)} \\ &= x^{(a+b)+c} \\ &= m(x^{a+b} \otimes x^c) \\ &= m \circ (m \otimes I_{\Bbbk[x]})(x^a \otimes x^b \otimes x^c). \end{aligned}$$

Portanto, o primeiro diagrama da definição é comutativo. Ainda,

$$\begin{aligned} m \circ (I_{\Bbbk[x]} \otimes u)(x^a \otimes \lambda) &= m(x^a \otimes \lambda x^0) \\ &= x^a \lambda x^0 \\ &= x^{a+0}\lambda \\ &= x^a\lambda \\ &= \sim(x^a \otimes \lambda) \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $m(u \otimes I_{\Bbbk[x]}(\lambda \otimes x^a)) = \sim(\lambda \otimes x^a)$. Disso, temos a comutatividade do segundo diagrama da definição e tem-se mostrado que $(\Bbbk[x], m, u)$ é uma álgebra. $\square$

Exemplo 2. *O conjunto $M_n(\Bbbk)$ é uma álgebra com m sendo a multiplicação usual de matrizes e $u : \Bbbk \to M_n(\Bbbk)$ dada por $u(\lambda) = \lambda I$, onde I é a matriz identidade de $M_n(\Bbbk)$.*

Demonstração. Verifiquemos a comutatividade dos diagramas da definição. Assim, sejam $A, B, C \in M_n(\Bbbk)$. Repare que

$$\begin{aligned} m \circ (m \otimes I_{M_n(\Bbbk)})(A \otimes B \otimes C) &= m(m(A \otimes B) \otimes I_{M_n(\Bbbk)}(C)) \\ &= m(AB \otimes C) \\ &= (AB)C \\ &= A(BC) \\ &= m(A \otimes BC) \\ &= m(I_{M_n(\Bbbk)}(A) \otimes m(B \otimes C)) \\ &= m \circ (I_{M_n(\Bbbk)} \otimes m)(A \otimes B \otimes C) \end{aligned}$$

Disso, conclui-se que o primeiro diagrama da definição é comutativo. Ainda,

$$\begin{aligned} m \circ (I_{M_n(\Bbbk)} \otimes u)(A \otimes \lambda) &= m(I_{M_n(\Bbbk)}(A) \otimes u(\lambda)) \\ &= m(A \otimes \lambda I) \\ &= A\lambda I \\ &= AI\lambda \\ &= A\lambda \\ &= \sim(A \otimes \lambda). \end{aligned}$$

Analogamente, se mostra que $m \circ (u \otimes I_{M_n(\Bbbk)}) = \sim$. Logo, o segundo diagrama da definição também comuta. Portanto, $(M_n(\Bbbk), m, u)$, com m e u tais como definidas, é uma álgebra. $\square$

Exemplo 3. *Se A e B são álgebras, então $(A \otimes B, m_{A\otimes B}, u_{A\otimes B})$ é também uma álgebra, com $m_{A\otimes B}((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)) = a_1a_2 \otimes b_1b_2$ e $u(\lambda) = \lambda(1_A \otimes 1_B)$. Para a demonstração desse exemplo, ver [1].*

Exemplo 4. *Sejam $\Bbbk$ um corpo e G um grupo. O $\Bbbk$-espaço vetorial $\Bbbk G$, cuja base é G, é uma álgebra com $m_{\Bbbk G}((\sum k_i g_i) \otimes (\sum k_j g_j)) = \sum (k_i k_j)(g_i g_j)$ e $u_{\Bbbk[x]}(\lambda) = \lambda 1_{\Bbbk G} = \lambda 1_{\Bbbk} 1_G = \lambda 1_G$. Essa demonstrações também pode ser encontrada em [1].*

Será feita a seguir a definição de homomorfismo de álgebra.

Definição 7. *Sejam A e B álgebras e $f : A \to B$ $\Bbbk$-linear. Dizemos que f é um* ***homomorfismo de álgebra*** *se*

$$f(ab) = f(a)f(b) \qquad e \qquad f(1_A) = 1_B.$$

Se (A, m, u) é uma álgebra, m e u são homomorfismos de álgebra. Por meio dessa definição é possível concluir que, se f é um homomorfismo de álgebra,

$$f(m_A(a \otimes b)) = f(ab) = f(a)f(b) = m_B(f(a) \otimes f(b)) = m_B((f \otimes f)(a \otimes b))$$

e

$$f(u_A(1_{\Bbbk})) = f(1_A) = 1_B = u_B(1_{\Bbbk}).$$

Logo, os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \\
A \otimes A \arrow[u, "m_A"] \arrow[r, "f \otimes f"'] & B \otimes B \arrow[u, "m_B"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \\
\Bbbk \arrow[u, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 5. *A função $\iota : A \to B \otimes A$ dada por $\iota(a) = 1_B \otimes a$ é um homomorfismo de álgebras.*

Demonstração. Sejam $a_1, a_2 \in A$ e 1_A elemento neutro de A. Repare que

$$\iota(a_1)\iota(a_2) = (1_B \otimes a_1)(1_B \otimes a_2) = 1_B 1_B \otimes a_1 a_1 = 1_B \otimes a_1 a_2 = \iota(a_1 a_2)$$

e, ainda, $\iota(1_A) = 1_B \otimes 1_A$. Portanto, ι é de fato homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras. $\square$

Após definir álgebra e homomorfismo de álgebra, bem como verificar os exemplos dados, define-se na sequência a estrutura algébrica denominada coálgebra, que será importante no decorrer de todo o trabalho a partir deste ponto.

Definição 8. *Uma $\Bbbk$-**coálgebra com unidade** é uma tripla (C, Δ, ε) onde C é um $\Bbbk$-espaço vetorial, $\varepsilon : C \to \Bbbk$ e $\Delta : C \to C \otimes C$ são $\Bbbk$-lineares e satisfazem a comutatividade dos seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "I\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes I"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \otimes C & C \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes \Bbbk \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes I"] \arrow[ur, "I\otimes\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

As $\Bbbk$-coálgebras com unidade serão tratadas apenas como coálgebras. As operações Δ e ε são chamadas de comultiplicação e counidade, respectivamente. Ainda, a comutatividade dos diagramas da definição anterior implica nas seguintes relações para a função Δ:

$$\begin{aligned} (I_C \otimes \Delta)(\Delta(c)) &= (\Delta \otimes I_C)(\Delta(c)) \\ (I_C \otimes \Delta)\left(\sum_i c_{1i} \otimes c_{2i}\right) &= (\Delta \otimes I_C)\left(\sum_i c_{1i} \otimes c_{2i}\right) \\ \sum_{i,j} c_{1i} \otimes c_{2i1j} \otimes c_{2i2j} &= \sum_{i,j} c_{1i1j} \otimes c_{1i2j} \otimes c_{2i}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

E, para a função ε,

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes I_C) \circ \Delta(c) &= \sim (c) \\ (\varepsilon \otimes I_C)\left(\sum_i c_{1i} \otimes c_{2i}\right) &= 1_{\Bbbk} \otimes c \\ \sum_i \varepsilon(c_{1i}) \otimes c_{2i} &= 1_{\Bbbk} \otimes c \\ \sum_i 1_{\Bbbk} \otimes \varepsilon(c_{1i})(c_{2i}) &= 1_{\Bbbk} \otimes c, \end{aligned}$$

isto é, $c = \sum_i \varepsilon(c_{1i})c_{2i} = \sum_i c_{1i}\varepsilon(c_{2i})$. Ainda, $\Delta(1_C) = 1_C \otimes 1_C$.
Repare que, em (1.1), os índices podem ser escritos de mais de uma forma. Podemos então simplificar essa escrita por meio da Notação Sigma.

Definição 9. *(Notação Sigma) Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Para um elemento $c \in C$, com as convenções usuais definimos*

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{1i} \otimes c_{2i},$$

que pode ser reescrito ainda como

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2 = c_1 \otimes c_2.$$

A última igualdade se dá pelo fato de Δ ser uma função $\Bbbk$-linear e, portanto, o somatório pode ser suprimido, sem prejudicar o resultado final.

Seguindo os exemplos de álgebra abordados anteriormente, será feita a análise acerca da existência da estrutura de coálgebra dos espaços vetoriais correspondentes.

Exemplo 6. *A tripla* $(\Bbbk[x], \Delta, \varepsilon)$ *é uma coálgebra, onde*

$$\begin{array}{rcl} \Delta : \Bbbk[x] & \to & \Bbbk[x] \otimes \Bbbk[x] \\ x^n & \mapsto & x^n \otimes x^n \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} \varepsilon : \Bbbk[x] & \to & \Bbbk \\ x^n & \mapsto & \delta_{n,0} \end{array}$$

e $\delta_{n,0}$ *representa o elemento de Kronecker,* $\sim(1) = 1 \otimes 1$ *e* $\sim(x^n) = 0$*, se* $n \neq 0$*.*

Demonstração. Seja $x^n \in \Bbbk[x]$. Então

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes I_{\Bbbk[x]}) \circ \Delta(x^n) &= (\Delta \otimes I_{\Bbbk[x]})(x^n \otimes x^n) \\ &= (x^n \otimes x^n) \otimes x^n \\ &= x^n \otimes (x^n \otimes x^n) \\ &= (I_{\Bbbk[x]} \otimes \Delta)(x^n \otimes x^n) \\ &= (I_{\Bbbk[x]} \otimes \Delta) \circ \Delta(x^n). \end{aligned}$$

Portanto, o primeiro diagrama da definição comuta. Repare ainda que, para $n = 0$,

$$(I_{\Bbbk[x]} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(x^0) = (I_{\Bbbk[x]} \otimes \varepsilon)(x^0 \otimes x^0) = x^0 \otimes 1_{\Bbbk} = \sim(x^0).$$

Agora, se $n \neq 0$,

$$(I_{\Bbbk[x]} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(x^n) = (I_{\Bbbk[x]} \otimes \varepsilon)(x^n \otimes x^n) = x^n \otimes 0 = 0 = \sim(x^n).$$

Analogamente, mostra-se que $(\varepsilon \otimes I_{\Bbbk[x]}) \circ \Delta(x^n) = \sim(x^n)$ para cada valor de n. Assim, o segundo diagrama da definição também é comutativo. Dessa forma, tem-se mostrado que $(\Bbbk[x], \Delta, \varepsilon)$, com Δ e ε como definidas, é uma coálgebra. □

Exemplo 7. *A tripla* $(M_n(\Bbbk), \Delta, \varepsilon)$*, com* $\Delta(e_{ij}) = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} e_{il} \otimes e_{lj}$ *e* $\varepsilon(e_{ij}) = \delta_{i,j}$*, onde* e_{ij} *elemento da base de* $M_n(\Bbbk)$ *e* $\delta_{i,j}$ *é elemento de Kronecker, é uma coálgebra.*

Demonstração. Repare que

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes I_{M_n(\Bbbk)}) \circ \Delta(e_{ij}) &= (\Delta \otimes I_{M_n(\Bbbk)}) \left(\sum_{l=1}^{n} e_{il} \otimes e_{lj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} e_{ik} \otimes e_{kl} \right) \otimes e_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \otimes e_{kl} \otimes e_{lj} \\ &= \sum_{l,k=1}^{n} e_{ik} \otimes e_{kl} \otimes e_{lj}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(I_{M_n(\Bbbk)} \otimes \Delta) \circ \Delta(e_{ij}) &= (I_{M_n(\Bbbk)} \otimes \Delta) \left(\sum_{k=1}^{n} e_{ik} \otimes e_{kj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \otimes \left(\sum_{l=1}^{n} e_{kl} \otimes e_{lj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} e_{ik} \otimes e_{kl} \otimes e_{lj} \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} e_{ik} \otimes e_{kl} \otimes e_{lj}.\end{aligned}$$

Disso, temos que o primeiro diagrama da definição comuta. Ainda,

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes I_{M_n(\Bbbk)}) \circ \Delta(e_{ij}) &= (\varepsilon \otimes I_{M_n(\Bbbk)}) \left(\sum_{l=1}^{n} e_{il} \otimes e_{lj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \varepsilon(e_{il}) \otimes I_{M_n(\Bbbk)}(e_{lj}) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \varepsilon(e_{il}) \otimes (e_{lj}) \\ &= \sum_{l=1}^{n} 1_{\Bbbk} \otimes \varepsilon(e_{il})(e_{lj}) \\ &= 1_{\Bbbk} \otimes e_{ij} \\ &= \sim (e_{ij}).\end{aligned}$$

De forma análoga mostra-se que $(I_{M_n(\Bbbk)} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(e_{ij}) =\sim (e_{ij})$. Portanto, o segundo diagrama da definição também comuta. Tem-se mostrado, assim, que $(M_n(\Bbbk), \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra. □

Exemplo 8. *Se A e B possuem funções tais que os fazem coálgebras, então $(A \otimes B, \Delta, \varepsilon)$ é coálgebra, onde $\Delta(a \otimes b) = (a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)$ e $\varepsilon(a \otimes b) = \varepsilon_A(a)\varepsilon_B(b)$.*

Demonstração. Seja $a \otimes b \in A \otimes B$. Pela notação sigma e por Δ tal como definida,

$$\begin{aligned}(I \otimes \Delta) \circ \Delta(a \otimes b) &= (I \otimes \Delta)((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)) \\ &= (a_1 \otimes b_1) \otimes ((a_{21} \otimes b_{21}) \otimes (a_{22} \otimes b_{22})) \\ &= (a_1 \otimes b_1) \otimes ((a_2 \otimes b_2) \otimes (a_3 \otimes b_3)) \\ &= ((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)) \otimes (a_3 \otimes a_3) \\ &= ((a_{11} \otimes b_{11}) \otimes (a_{12} \otimes b_{12})) \otimes (a_2 \otimes b_2) \\ &= (\Delta \otimes I)((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)) \\ &= (\Delta \otimes I) \circ \Delta(a \otimes b).\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes I) \circ \Delta(a \otimes b) &= (\varepsilon \otimes I)((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2))\\ &= \varepsilon_A(a_1)\varepsilon_B(b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)\\ &= 1_{\Bbbk} \otimes (\varepsilon_A(a_1)a_2 \otimes \varepsilon_B(b_2)b_2)\\ &= 1_{\Bbbk} \otimes (a \otimes b)\\ &= \sim (a \otimes b).\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que $(I \otimes \varepsilon) \circ \Delta(a \otimes b) =\sim (a \otimes b)$. Portanto, $(A \otimes B, \Delta, \varepsilon)$, com Δ e ε tais como definidas, é de fato uma coálgebra. □

Exemplo 9. *Com $\Delta_{\Bbbk G}(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon_{\Bbbk G}(g) = 1_{\Bbbk}$, $(\Bbbk G, \Delta_{\Bbbk G}, \varepsilon_{\Bbbk G})$ é coálgebra, como pode ser encontrado em [1].*

A próxima definição traz a denominação de um tipo específico de elemento que, ao ser aplicada a operação Δ, não gera diferentes índices.

Definição 10. *Um elemento g de uma coálgebra C é chamado* ***grouplike*** *se $g \neq 0$ e $\Delta(g) = g \otimes g$. O conjunto de elementos grouplike de uma coálgebra C é denotado por $G(C)$.*

Em seguida, apresenta-se a definição de homomorfismo de coálgebra, essencial no próximo capítulo deste trabalho.

Definição 11. *Sejam C e D coálgebras e $g : C \to D$ uma aplicação $\Bbbk$-linear. A função g é um* ***homomorfismo de coálgebra*** *se os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "g \otimes g"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ \Bbbk & \end{tikzcd}$$

Dos diagramas da definição anterior, temos

$$g(c)_1 \otimes g(c)_2 = \Delta_D \circ g(c) = (g \otimes g) \circ \Delta_C(c) = (g \otimes g)(c_1 \otimes c_2) = g(c_1) \otimes g(c_2).$$

Ainda, se (C, Δ, ε) é coálgebra, Δ e ε são homomorfismos de coálgebra.
O próximo exemplo mostra que a função projeção, tal como definida, é um homomorfismo de coálgebra.

Exemplo 10. *Sejam C e D coálgebras. Definimos, para todo $c \in C$ e $d \in D$,*

$$\begin{aligned}\pi_C : \ C \otimes D &\to C\\ c \otimes d &\mapsto c\, \varepsilon_D(d)\end{aligned}$$

A função π_C é homomorfismo de coálgebra.

Demonstração. Por ε_D ser homomorfismo de coálgebra,

$$\begin{array}{rcl} (\Delta_C \circ \pi_C)(c \otimes d) & = & \Delta_C(c\varepsilon_D(d)) \\ & = & (c\varepsilon_D(d))_1 \otimes (c\varepsilon_D(d)_2 \\ & = & c_1\varepsilon_D(d)_1 \otimes c_2\varepsilon_D(d)_2 \\ & = & c_1\varepsilon_D(d_1) \otimes c_2\varepsilon_D(d_2) \\ & = & (\pi_C \otimes \pi_C)((c_1 \otimes d_1) \otimes (c_2 \otimes d_2)) \\ & = & (\pi_C \otimes \pi_C) \circ \Delta_{C\otimes D}(c \otimes d). \end{array}$$

Ainda,

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon_C(\pi_C(c \otimes d)) & = & \varepsilon_C(c\varepsilon_D(d)) \\ & = & \varepsilon_D(d)\varepsilon_C(c) \\ & = & \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d) \\ & = & \varepsilon_{C\otimes D}(c \otimes d). \end{array}$$

Portanto, ambos os diagramas de homomorfismo de coálgebra comutam, e π_C assim como definida é homomorfismo de álgebra. De forma análoga, mostramos que também é homomorfismo de coálgebra a função

$$\begin{array}{rcl} \pi_D : C \otimes D & \to & D \\ c \otimes d & \mapsto & \varepsilon_C(d)d. \end{array}$$

□

3 ÁLGEBRAS DE HOPF

Neste capítulo, veremos importantes relações entre álgebras e coálgebras e seus respectivos homomorfismos. Ainda, serão definidas biálgebra, antípoda e álgebra de Hopf e demonstradas importantes propriedades a elas relacionadas. São ainda dados exemplos e contraexemplos de biálgebra e álgebra de Hopf, e para tal foram usados os trabalhos de [2] e [3].
A proposição a seguir apresenta uma importante relação entre homomorfismos de álgebras e de coálgebras, dado um espaço vetorial com estruturas de álgebra e coálgebra.

Proposição 4. *Sejam H um $\Bbbk$-espaço vetorial e as funções $\Bbbk$-lineares $m_H : H \otimes H \to H$, $u_H : \Bbbk \to H$, $\Delta_H : H \to H \otimes H$ e $\varepsilon_H : H \to \Bbbk$ tais que*

$$(H, m_H, u_H) \text{ é álgebra} \quad \text{e} \quad (H, \Delta_H, \varepsilon_H) \text{ é coálgebra.}$$

Então as seguintes afirmações são equivalentes:

i) Δ_H *e* ε_H *são homomorfismos de álgebras;*

ii) m_H *e* u_H *são homomorfismos de coálgebras.*

Demonstração. Suponha Δ_H homomorfismo de álgebra, isto é, $\Delta_H(hg) = \Delta_H(h)\Delta_H(g)$ e $\Delta_H(1_H) = 1_H \otimes 1_H$. Mas repare que

$$\Delta_H(m_H(h \otimes g)) = \Delta_H(hg) = \Delta_H(h)\Delta_H(g) = m_{H\otimes H}(\Delta_H \otimes \Delta_H)(h \otimes g),$$

logo, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "m_H"] \arrow[d, "\Delta_H\otimes\Delta_H"'] & H \arrow[d, "\Delta_H"] \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "m_{H\otimes H}"'] & H \otimes H
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Ainda, como $1_H = u_H(1_\Bbbk)$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_H(u_H(1_k)) &= \Delta_H(1_H) \\
&= 1_H \otimes 1_H \\
&= u_H(1_\Bbbk) \otimes u_H(1_\Bbbk) \\
&= (u_H \otimes u_H)(1_\Bbbk \otimes 1_\Bbbk) \\
&= (u_H \otimes u_H) \circ \Delta_\Bbbk(1_\Bbbk),
\end{aligned}$$

assim, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{k} \arrow[r, "u_H"] \arrow[d, "\Delta_{\mathbb{k}}"'] & H \arrow[d, "\Delta_H"] \\ \mathbb{k}\otimes\mathbb{k} \arrow[r, "u_H\otimes u_H"'] & H\otimes H \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Portanto, se Δ_H é homomorfismo de álgebra, os diagramas (3.1) e (3.2) comutam. Agora, seja ε_H homomorfismo de álgebra, então $\varepsilon_H(hg) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_H(g)$ e $\varepsilon_H(1_H) = 1_{\mathbb{k}}$. Mais ainda, temos

$$\varepsilon_H(m_H(h\otimes g)) = \varepsilon_H(hg) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_H(g) = m_{\mathbb{k}}(\varepsilon_H\otimes\varepsilon_H)(h\otimes g) = \varepsilon_{H\otimes H}(h\otimes g),$$

logo, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} H\otimes H \arrow[r, "m_H"] \arrow[d, "\varepsilon_H\otimes\varepsilon_H"'] \arrow[dr, "\varepsilon_{H\otimes H}"] & H \arrow[d, "\varepsilon_H"] \\ \mathbb{k}\otimes\mathbb{k} \arrow[r, "m_{\mathbb{k}}"'] & \mathbb{k} \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Por fim, $\varepsilon_H(u_{\mathbb{k}}(1_{\mathbb{k}})) = \varepsilon_H(1_H) = 1_{\mathbb{k}} = \varepsilon_{\mathbb{k}}(1_{\mathbb{k}})$, o que implica na comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{k} \arrow[r, "u_{\mathbb{k}}"] \arrow[d, "\varepsilon_{\mathbb{k}}"'] & H \arrow[dl, "\varepsilon_H"] \\ \mathbb{k} & \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Portanto, se ε_H é homomorfismo de álgebra, então os diagramas (3.3) e (3.4) comutam. Assim, dados (H, m_H, u_H) álgebra e $(H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ coálgebra, Δ_H e ε_H são homomorfismos de álgebra. Para mostrarmos a recíproca dessa proposição, temos as seguintes relações:

- m_H é homomorfismo de coálgebra se, e somente se, os diagramas (3.1) e (3.3) são comutativos;
- u_H é homomorfismo de coálgebra se, e somente se, os diagramas (3.2) e (3.4) são comutativos.

$\square$

A proposição anterior será muito utilizada ao se verificar se um espaço vetorial, juntamente com determinadas operações, é uma biálgebra, estrutura algébrica que associa as estruturas de álgebra e coálgebra de um espaço vetorial, como definido a seguir.

Definição 12. *Uma* ***biálgebra*** *é uma quíntupla* $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ *onde* (H, m, u) *é álgebra,* (H, Δ, ε) *é coálgebra e as funções* Δ *e* ε *são homomorfismos de álgebra.*

Os próximos exemplos retomam as estruturas de álgebra e coálgebra de espaços vetoriais abordadas no capítulo anterior, verificando a correspondência existente entre elas.

Exemplo 11. *O conjunto $\Bbbk[x]$ é uma biálgebra com as operações de álgebra e coálgebra definidas anteriormente.*

Demonstração. Já mostramos, nos exemplos 1 e 6, que $\Bbbk[x]$ possui estruturas de álgebra e coálgebra. Resta mostrar, então, que as funções Δ e ε já definidas são homomorfismos de álgebra. Repare que

$$\Delta(x^m)\Delta(x^n) = (x^m \otimes x^m)(x^n \otimes x^n) = (x^m x^n) \otimes (x^m x^n) = \Delta(x^m x^n).$$

Ainda,

$$\Delta(1_{\Bbbk[x]}) = 1_{\Bbbk[x]} \otimes 1_{\Bbbk[x]} = 1_{\Bbbk[x]\otimes\Bbbk[x]}.$$

Assim, Δ é homomorfismo de $\Bbbk$-álgebra. Além disso, temos que

$$\varepsilon(x^m)\varepsilon(x^n) = 1_\Bbbk 1_\Bbbk = 1_\Bbbk = \varepsilon(x^m x^n)$$

e $\varepsilon(1_{\Bbbk[x]}) = 1_\Bbbk$. Dessa forma, ε também é homomorfismo de $\Bbbk$-álgebra. Portanto, $\Bbbk[x]$ com as operações de álgebra e coálgebra já definidas é biálgebra. □

Exemplo 12. *O conjunto $\Bbbk G$, com as operações de álgebra e coálgebras já definidas, é biálgebra.*

Demonstração. Mostremos que Δ e ε são homomorfismos de álgebra, visto que $\Bbbk G$ possui estruturas de álgebra e coálgebra, apresentadas nos exemplos 4 e 9, respectivamente. Repare que

$$\Delta(g)\Delta(h) = (g \otimes g)(h \otimes h) = gh \otimes gh = \Delta(gh).$$

Ainda,

$$\Delta(1_{\Bbbk G}) = 1_{\Bbbk G} \otimes 1_{\Bbbk G} = 1_{\Bbbk G\otimes\Bbbk G}.$$

Portanto, Δ é homomorfismo de biálgebra. Repare ainda que

$$\varepsilon(gh) = 1_\Bbbk = 1_\Bbbk 1_\Bbbk = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$$

e $\varepsilon(1_{\Bbbk G}) = 1_\Bbbk$, logo, ε também é homomorfismo de $\Bbbk$-álgebra. Tem-se provado então que $\Bbbk G$ com as operações já definidas é biálgebra. □

Exemplo 13. *O conjunto $A \otimes B$ com as operações m, u, Δ e ε já definidas para álgebra e coálgebra é uma biálgebra.*

Demonstração. As estruturas de álgebra e coálgebra de $A \otimes B$ foram apresentadas nos exemplos 3 e 8. Verifiquemos então que Δ e ε são homomorfismos de álgebra. Repare primeiro que

$$\begin{aligned}
\Delta(a_1 \otimes b_1)\Delta(a_2 \otimes b_2) &= ((a_{11} \otimes b_{11}) \otimes (a_{12} \otimes b_{12}))((a_{21} \otimes b_{21}) \otimes (a_{22} \otimes b_{22})) \\
&= (a_{11}a_{21} \otimes b_{11}b_{21}) \otimes (a_{12}a_{22} \otimes b_{12}b_{22}) \\
&= (a_1a_2 \otimes b_1b_2)_1 \otimes (a_1a_2 \otimes b_1b_2)_2 \\
&= \Delta(a_1a_2 \otimes b_1b_2) \\
&= \Delta((a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2))
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\Delta \circ u(\lambda) &= \Delta(\lambda(1_A \otimes 1_B)) \\
&= \lambda\Delta(1_A \otimes 1_B) \\
&= \lambda((1_A \otimes 1_B) \otimes (1_A \otimes 1_B)) \\
&= u(\lambda).
\end{aligned}$$

Portanto, Δ é de fato homomorfismo de álgebra. Agora, note que

$$\begin{aligned}
m \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)(a \otimes b \otimes a' \otimes b') &= m(\varepsilon_A(a)\varepsilon_B(b) \otimes \varepsilon_A(a')\varepsilon_B(b')) \\
&= (\varepsilon_A(a)\varepsilon_B(b))(\varepsilon_A(a')\varepsilon_B(b')) \\
&= \varepsilon((ab)(a'b')) \\
&= (\varepsilon \circ m)((a \otimes b) \otimes (a' \otimes b')).
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \circ u)(\lambda) &= \varepsilon(\lambda(1_A \otimes 1_B)) \\
&= \lambda\varepsilon_A(1_A)\varepsilon_B(1_B) \\
&= \lambda \\
&= u(\lambda).
\end{aligned}$$

Assim, Δ e ε são homomorfismos de álgebra e $A \otimes B$, com as operações dadas, é biálgebra. $\square$

A posteriori apresenta-se um exemplo de estrutura algébrica que, mesmo possuido as propriedades de álgebra e coálgebra, não é uma biálgebra. Para isso é necessário relembrar que, dada uma função $f : A \to B$ injetora, tem-se que $dim(A) \leq dim(B)$.

Exemplo 14. *O conjunto $M_n(\Bbbk)$ não é biálgebra, pois não existe estrutura de coálgebra para $M_n(\Bbbk)$ compatível com sua estrutura de álgebra apresentada no exemplo* 2.

Demonstração. Suponha a existência de uma estrutura de biálgebra para $M_n(\Bbbk)$, ou seja, a counidade $\varepsilon : M_n(\Bbbk) \to \Bbbk$ é um homomorfismo de álgebra, pela definição de biálgebra. Além disso, $ker(\varepsilon)$ é ideal de $M_n(\Bbbk)$, pela Proprosição 2.

Agora, pela Proposição 1, $ker(\varepsilon)$ é da forma $M_n(I)$, com I sendo ideal de $\Bbbk$. Mas, por $\Bbbk$ não possuir ideal não trivial, de acordo com a Proposição 3, $ker(\varepsilon) = M_n(\Bbbk)$ ou $ker(\varepsilon) = M_n(0)$.

Contudo, como $\varepsilon(1) = 1$, então $ker(\varepsilon) \neq M_n(\Bbbk)$. Assim, $\ker(\varepsilon) = \{0\}$, o que implica que

ε é função injetora, ou seja, $dim(M_n(\Bbbk)) \leq dim(\Bbbk)$, um absurdo. Portanto, não existe estrutura de coálgebra para $M_n(\Bbbk)$ compatível com a estrutura de álgebra desse espaço vetorial já apresentada, o que implica que, de fato, $M_n(\Bbbk)$ com as operações m, u, Δ e ε consideradas não é biálgebra. □

A proposição seguinte ilustra a construção do produto convolução, função importante para a definição de antípoda, que será definda formalmente na sequência.

Proposição 5. *Se (C, Δ, ε) é coálgebra, então existe uma função $*$ tal que $(C^*, *, \varepsilon)$ é álgebra, onde C^* é o dual de C.*

Demonstração. Se (C, Δ, ε) é coálgebra, temos $\Delta : C \to C \otimes C$. Repare que $*$ deve ser a operação de multiplicação da álgebra, isto é,

$$C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*.$$

Disso, temos que, dados $m, n \in C^*$,

$$*(m \otimes n) = \Delta^*(\rho(m \otimes n)) = \rho(m \otimes n) \circ \Delta.$$

Aplicando isto a um elemento $v \in C$, temos

$$\begin{aligned} *(m \otimes n)(v) &= \rho(m \otimes n) \circ \Delta(v) \\ &= \rho(m \otimes n)(v_1 \otimes v_2) \\ &= \rho(m(v_1) \otimes n(v_2)) \\ &= \sum m(v_1)n(v_2) \end{aligned}$$

Mostremos agora que vale a associatividade para a operação $*$, garantindo a comutatividade do primeiro diagrama da definição de álgebra se $(f * g) * h = f * (g * h)$. De fato,

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(c) &= \rho((f * g) \otimes h) \circ \Delta(c) \\ &= \rho((f * g) \otimes h)(c_1 \otimes c_2) \\ &= \sum (f * g)(c_1)h(c_2) \\ &= \sum (\rho(f \otimes g) \circ \Delta(c_1))h(c_2) \\ &= \sum (\rho(f \otimes g)(c_{11} \otimes c_{12}))h(c_2) \\ &= \sum f(c_{11})g(c_{12})h(c_2) \\ &= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3) \\ &= \sum f(c_1)g(c_{21})h(c_{22}) \\ &= \sum f(c_1)(\rho(g \otimes h)(c_{21} \otimes c_{22})) \\ &= \sum f(c_1)(\rho(g \otimes h) \circ \Delta(c_2)) \\ &= \sum f(c_1)(g * h)(c_2) \\ &= \rho(f \otimes (g * h))(c_1 \otimes c_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(c) &= \rho(f\otimes(g*h))\circ\Delta(c)\\ &= (f*(g*h))(c).\end{aligned}$$

Portanto, a operação $*$ comuta o primeiro diagrama de álgebra. Analisemos agora a operação ε da unidade. Repare primeiro que a unidade u de uma álgebra satisfaz $u(\lambda)=a$, onde λ é elemento do corpo e a pertence ao dual de C. Note ainda que, para a álgebra C^*, temos

$$\Bbbk \xrightarrow{\sim} \Bbbk^* \xrightarrow{\varepsilon^*} C^*,$$

o que implica em $u_{C^*}(1_{\Bbbk})=\varepsilon^*(\sim(1_{\Bbbk}))=\sim(1_{\Bbbk})\circ\varepsilon$. Aplicando isto a um elemento $c\in C$ qualquer,

$$u_{C^*}(1_{\Bbbk})(c)=\sim(1_{\Bbbk})(\varepsilon(c))=\varepsilon(c).$$

Disso, ε pode ser, de fato, função unidade. Mostremos então que $\varepsilon*f=f*\varepsilon=f$, garantindo a comutatividade do segundo diagrama de álgebra. Observe que

$$\begin{aligned}(\varepsilon*f)(c) &= \rho(\varepsilon\otimes f)\circ\Delta(c)\\ &= \sum\varepsilon(c_1)f(c_2)\\ &= f\left(\sum\varepsilon(c_1)c_2\right)\\ &= f(c).\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}(f*\varepsilon)(c) &= \rho(f\otimes\varepsilon)\circ\Delta(c)\\ &= \sum f(c_1)\varepsilon(c_2)\\ &= f\left(\sum c_1\varepsilon(c_2)\right)\\ &= f(c).\end{aligned}$$

conclui-se então que ε é função unidade de C^*, pois esta satisfaz a comutatividade do diagrama correspondente, e $(C^*,*,\varepsilon)$ é uma álgebra. □

A partir desse raciocínio e percebendo que a função $*$ possui papel essencial nesse estudo, esta recebe uma denominação, como colocado na definição a seguir.

Definição 13. *A função $*$ construída na proposição anterior é chamada de* ***produto convolução****. Podemos concluir que*

$$(f*g)(c)=f(c_1)g(c_2).$$

Tendo-se construído e definido o produto convolução é possível definir antípoda.

Definição 14. *Uma aplicação $\Bbbk$-linear $S:H\to H$ é chamada* ***antípoda*** *de uma biálgebra H se S é inversa de I_H com relação ao produto convolução, ou seja,*

$$S*I_H=u_H\circ\varepsilon_H=I_H*S.$$

Como a inversa de uma função é única, a antípoda S, quando existe, também é, pois é a função inversa de I_H.
Da definição, temos

$$(S * I_H)(h) = S(h_1)I_H(h_2) = S(h_1)h_2,$$

$$(I_H * S)(h) = I_H(h_1)S(h_2) = h_1S(h_2),$$

$$(u_H \circ \varepsilon_H)(h) = u_H(\varepsilon_H(h)) = \varepsilon_H(h)u_H(1_{\Bbbk}) = \varepsilon_H(h)1_H.$$

Logo,

$$S(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H = h_1S(h_2), \ \ \forall h \in H.$$

Utilizando as estruturas algébricas e os homomorfismos vistos até o momento, bem como a antípoda, define-se uma álgebra de Hopf.

Definição 15. *Uma **álgebra de Hopf** H é uma biálgebra com antípoda. Escrevemos $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$.*

São apresentados na sequência dois exemplos de álgebra de Hopf, retomando as estruturas de biálgebra vistas anteriormente.

Exemplo 15. *A sextupla $(\Bbbk G, m, u, \Delta, \varepsilon)$, com as operações já definidas, é uma álgebra de Hopf.*

Demonstração. Vimos no exemplo 12 que $\Bbbk G$ é uma biálgebra, com suas repectivas operações de álgebra e coálgebra. Precisamos então mostrar que sua antípoda existe. Assumimos então que, dado $g \in \Bbbk G$ qualquer, $S(g) = g^{-1}$. Vamos mostrar que, definida desta forma, S é antípoda de $\Bbbk G$. De fato,

$$\begin{aligned}
(S * I_{\Bbbk G})(g) &= S(g)g \\
&= g^{-1}g \\
&= 1_G \\
&= 1_{\Bbbk}1_G \\
&= \varepsilon_{\Bbbk G}(g)u_{\Bbbk G}(1_{\Bbbk}) \\
&= u_{\Bbbk G}(\varepsilon_{\Bbbk G}(g)1_{\Bbbk}) \\
&= (u_{\Bbbk G} \circ \varepsilon_{\Bbbk G})(g).
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$(I_{\Bbbk G} * S)(g) = gS(g) = gg^{-1} = (u_{\Bbbk G} \circ \varepsilon_{\Bbbk G})(g).$$

Portanto, como $S * I_{\Bbbk G} = u_{\Bbbk G} \circ \varepsilon_{\Bbbk G} = I_{\Bbbk G} * S$, tem-se provado que S é antípoda de $\Bbbk G$, e $(\Bbbk G, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$, com as operações tais como definidas, é álgebra de Hopf. □

Exemplo 16. *Se A e B são álgebras de Hopf, então $A \otimes B$ com as operações já definidas é álgebra de Hopf.*

Demonstração. No exemplo 13, vimos que $A \otimes B$ possui estrutura de biálgebra, basta então mostrar que possui antípoda. Assumimos então que $S_{A\otimes B} = S_A \otimes S_B$. Mostremos que de fato, assim definida, S é antípoda de $A \otimes B$:

$$\begin{aligned}(S * I_{A\otimes B})(a \otimes b) &= (S_A(a_1) \otimes S_B(b_1))(a_2 \otimes b_2)\\ &= S_A(a_1)a_2 \otimes S_B(b_1)b_2\\ &= \varepsilon_A(a)1_A \otimes \varepsilon_B(b)1_B\\ &= \varepsilon_A(a)\varepsilon_B(b)(1_A \otimes 1_B)\\ &= \varepsilon_A(a)\varepsilon_B(b)1_{\Bbbk}(1_A \otimes 1_B)\\ &= \varepsilon_A(a)\varepsilon_B(b)u_{A\otimes B}(1_{\Bbbk})\\ &= u_{A\otimes B}(\varepsilon_A(a)\varepsilon_B(b))\\ &= u_{A\otimes B} \circ \varepsilon_{A\otimes B}(a \otimes b)\end{aligned}$$

Portanto, de fato $S_{A\otimes B} = S_A \otimes S_B$ é antípoda de $A \otimes B$ e o tensor de duas álgebras de Hopf é uma álgebra de Hopf. □

A proposição a seguir apresenta importantes propriedades da antípoda.

Proposição 6. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então, para todo $h, g \in H$,*

i) $S(gh) = S(h)S(g)$;

ii) $S(1_H) = 1_H$;

iii) $\Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1)$;

iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

Os itens i) e ii) mostram que S é anti-homomorfismo de álgebras e iii) e iv) provam que S é anti-homomorfismo de coálgebras.

Demonstração. *i)* Por H ser álgebra de Hopf, considere $H \otimes H$ com estrutura de coálgebra e H com estrutura de álgebra. Portanto, $Hom(H \otimes H, H)$ é uma álgebra com unidade $u_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}$. Sejam então $F, G, M : H \otimes H \to H$ tais que $F(g \otimes h) = S(h)S(g)$, $G(g \otimes h) = S(gh)$ e $M(g \otimes h) = gh$.
Mostremos que F é inversa à esquerda de M.

$$\begin{aligned}(F * M)(g \otimes h) &= F(g \otimes h)_1 M(g \otimes h)_2\\ &= F(g_1 \otimes h_1)M(g_2 \otimes h_2)\\ &= S(h_1)S(g_1)g_2h_2\\ &= S(h_1)\varepsilon(g)1_H h_2\\ &= \varepsilon(g)S(h_1)h_2 1_H\\ &= \varepsilon(g)\varepsilon(h)1_H\\ &= 1_H\varepsilon(g)\varepsilon(h)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(F * M)(g \otimes h) &= u_H(1_{\Bbbk})\varepsilon_{H\otimes H}(g \otimes h)\\ &= u_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}(1_{\Bbbk} g \otimes h)\\ &= u_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}(g \otimes h).\end{aligned}$$

Portanto, F é função inversa à esquerda de M. Verifiquemos agora que G é inversa à direita de M.

$$\begin{aligned}(M * G)(g \otimes h) &= M((g \otimes h)_1)G((g \otimes h)_2)\\ &= M(g_1 \otimes h_1)G(g_2 \otimes h_2)\\ &= g_1h_1S(g_2h_2)\\ &= (gh)_1S((gh)_2)\\ &= \varepsilon(gh)1_H\\ &= 1_H\varepsilon(gh)\\ &= u_H(1_{\Bbbk})\varepsilon_{H\otimes H}(g \otimes h)\\ &= u_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}(g \otimes h).\end{aligned}$$

Portanto, G é inversa à direita de M. Contudo, dada uma função qualquer, se sua inversa existe, esta é única. conclui-se então que $F = G$, isto é, $S(h)S(g) = S(gh)$.
$ii)$ Aplicando a definição de antípoda para o elemento $1 \in H$,

$$S(1_H) = S(1_H)1_H = \varepsilon(1_H)1_H = 1_{\Bbbk}1_H = 1_H.$$

Portanto, $S(1_H) = 1_H$.
$iii)$ Considere agora as funções $F, G, \Delta : H \to H \otimes H$ definidas por $F(h) = \Delta(S(h))$, $G(h) = S(h_2) \otimes S(h_1)$ e $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$. Mostremos que G é inversa à esquerda e F é inversa à direita de Δ com relação ao produto convolução.
Operando G à esquerda de Δ, temos

$$\begin{aligned}(G * \Delta)(h) &= G(h_1)\Delta(h_2)\\ &= (S(h_{12}) \otimes S(h_{11}))(h_{21} \otimes h_{22})\\ &= (S(h_2) \otimes S(h_1))(h_3 \otimes h_4)\\ &= (S(h_2)h_3) \otimes (S(h_1)h_4)\\ &= \varepsilon(h_2)1_H \otimes (S(h_1)h_3)\\ &= 1_H \otimes (S(h_1)\varepsilon(h_2)h_3)\\ &= 1_H \otimes (S(h_1)h_2)\\ &= 1_H \otimes (\varepsilon(h)1_H)\\ &= 1_H \otimes 1_H\varepsilon(h)\\ &= (u_{H\otimes H} \circ \varepsilon)(h)\end{aligned}$$

Agora, operando F à direita de Δ, obtem-se

$$\begin{aligned}(\Delta * F)(h) &= \Delta(h_1)F(h_2)\\ &= (h_{11} \otimes h_{12})\Delta(S(h_2))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta * F)(h) &= (h_{11} \otimes h_{12})(S(h_2)_1 \otimes S(h_2)_2) \\
&= (h_{11} \otimes h_{12})(S(h_{21}) \otimes S(h_{22})) \\
&= (h_{11}S(h_{21})) \otimes (h_{12}S(h_{22})) \\
&= (h_1S(h_2))_1 \otimes (h_1S(h_2))_2 \\
&= (\varepsilon_H(h)1_H)_1 \otimes (\varepsilon_H(h)1_H)_2 \\
&= \Delta(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon_H(h)\Delta(1_H) \\
&= \varepsilon_H(h)1_H \otimes 1_H \\
&= \varepsilon_H(h)u_{h\otimes H}(1_{\Bbbk}) \\
&= u_{H\otimes H}(\varepsilon(h)1_{\Bbbk}) \\
&= (u_{H\otimes H} \circ \varepsilon)(h)
\end{aligned}$$

Assim, pela unicidade da função inversa de Δ, conclui-se que $G = F$, o que implica em $S(h_1) \otimes S(h_2) = \Delta(S(h))$, como desejado.
iv) Pela definição de antípoda, temos $h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$. Aplicando ε a ambos os lados da igualdade,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h_1S(h_2)) &= \varepsilon(\varepsilon(h)1_H), \\
\varepsilon(h_1)\varepsilon(S(h_2)) &= \varepsilon(h)\varepsilon(1_H), \\
\varepsilon(\varepsilon(h_1)S(h_2)) &= \varepsilon(h), \\
\varepsilon(S(\varepsilon(h_1)h_2)) &= \varepsilon(h), \\
\varepsilon(S(h)) &= \varepsilon(h),
\end{aligned}$$

como desejado. □

Observação. Os elementos do conjunto $G(H)$ de grouplikes de uma álgebra de Hopf H possuem interessantes propriedades, destacadas a seguir, onde $g, h \in G(H)$:

i) $gh \in G(H)$;

ii) $S(g)$ é também grouplike;

iii) g inversível e o inverso de g é $g^{-1} = S(g)$.

Demonstração. i) Dados $g, h \in G(H)$, sabemos que $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\Delta(h) = h \otimes h$. Disso e por Δ ser homomorfismo de álgebra,

$$\Delta(gh) = (gh)_1 \otimes (gh)_2 = g_1h_1 \otimes g_2h_2 = gh \otimes gh.$$

Assim, $gh \in G(H)$, como queríamos demonstrar.
ii) Dados $g \in G(H)$ e S antimorfismo de coálgebra,

$$\Delta(S(g)) = S(g_2) \otimes S(g_1) = S(g) \otimes S(g).$$

Portanto, $S(g) \in G(H)$.
$iii)$ Repare que

$$S(g)g = (S * I)(g) = u \circ \varepsilon(g) = u(1_{\mathbb{k}}) = 1_H,$$

isto é, $S(g)g = 1_H$, o que implica que $S(g) = g^{-1}$. □

Foram apresentados anteriormente exemplos de álgebra de Hopf a partir da verificação da existência da antípoda de uma biálgebra. Contudo, sua existência não é garantida para toda biálgebra, como é exposto no exemplo abaixo.

Exemplo 17. *O conjunto* $\mathbb{k}[x]$ *com as operações tais como definidas anteriormente não é álgebra de Hopf.*

Demonstração. Foi provado que $(\mathbb{k}[x], m, u, \Delta, \varepsilon)$ é biálgebra. Para que não seja também álgebra de Hopf, $\mathbb{k}[x]$ não deve possuir antípoda S. De fato, se existir $S : \mathbb{k}[x] \to \mathbb{k}[x]$, por x^n ser grouplike, visto que $\Delta(x^n) = x^n \otimes x^n$, teríamos

$$S(x^n)x^n = (S * I)(x^n) = (u \circ \varepsilon)(x^n) = u(1_{\mathbb{k}[x]}) = 1_{\mathbb{k}[x]},$$

isto é, $S(x^n)x^n = 1_{\mathbb{k}[x]}$, logo, x^n possui inverso, um absurdo. Portanto, não existe antípoda S para $\mathbb{k}[x]$. Conclui-se então que $\mathbb{k}[x]$, com Δ e ε tais como definidas, não é álgebra de Hopf. □

Apesar de ter sido mostrado que $\mathbb{k}[x]$ juntamente com as operações já definidas de álgebra e coálgebra não é uma álgebra de Hopf, é possível construir uma nova estrutura de coálgebra, mantendo sua estrutura de álgebra. Para isso, define-se $\Delta(x^n) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ e $\varepsilon(x^n) = \delta_{n,0}$. Nessas condições, $S(x) = -x$ é tal que a sextupla $(\mathbb{k}[x], m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ é uma álgebra de Hopf.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Álgebras e coálgebras são estruturas algébricas construídas não só a partir de um conjunto dado, mas também de suas operações. Os diagramas de cada uma dessas estruturas ajudam na compreensão de quais são as propriedades e equivalências que cada função deve safisfazer.

A abordagem dos exemplos de álgebra e coálgebra foi importante no desenvolvimento do trabalho, sendo estes retomados mais tarde como exemplos ou contraexemplos de biálgebra e álgebra de Hopf. Verificou-se ainda que homomorfismos de álgebra e coálgebra são necessários na definição e verificação de biálgebras e que a Notação Sigma simplifica a reescrita dos índices dos elementos do tensor, tornando-se muito útil em algumas demonstrações realizadas ao longo do trabalho.

Optou-se pela construção do produto convolução no lugar de sua simples definição pelo fato de ser importante compreender que novas funções e estruturas algébricas são elaboradas e desenvolvidas a partir do que já se sabe. Nessa perspectiva, a matemática mostra-se menos "inventada" e mais construída. A partir do produto convolução tem-se, então, a antípoda, função necessária para que uma biálgebra possa ser considerada álgebra de Hopf. Tal função possui importantes propriedades, salientadas na Proposição 6 deste trabalho.

A seleção dos contraexemplos apresentados encorporaram esse trabalho. O primeiro mostra que $M_n(\Bbbk)$ não possui estrutura de coálgebra compatível com qualquer estrutura de álgebra, logo, não é biálgebra. Para tal demonstração foram necessários resultados de anéis e corpos, trazidos no primeiro capítulo desse trabalho. Conclui-se que as estruturas de álgebra e coálgebra de um conjunto precisam satisfazer certa compatibilidade entre si para que esta seja também uma biálgebra, não sendo suficientes de forma isolada. O segundo contraexemplo expõe que a forma como são construídas as operações para um conjunto são essenciais para que se haja ou não uma determinada estrutura algébrica. Assim, existem diferentes construções para $\Delta_{\Bbbk[x]}$ que torna $\Bbbk[x]$, juntamente a outras operações, uma biálgebra, mas, das duas abordadas, apenas uma torna-o de fato álgebra de Hopf.

As estruturas algébricas aqui abordadas referem-se a um conjunto juntamente a algumas operações, não podendo-se considerar, por exemplo, $\Bbbk[x]$ uma álgebra, sem que se deixe claro quais são as operações a ela correspondentes.

REFERÊNCIAS

[1] CARVALHO, M. W. S. **Álgebras e Coálgebras.** Toledo: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016. 39 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática.

[2] DASCALESCU, S. et al. **Hopf Algebras: An introduction.** Bucharest: CRC Press, 2000.

[3] FLORES, D. A. **Notas de aula.** Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, 2012.

[4] GONÇALVES, A, **Introdução à álgebra.** Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[5] HUNGERFORD, T. W.. **Graduate Texts in Mathematics: Algebra. 8 ed.** New York: Springer-Verlarg, 1974.