UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA - PPGMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ANDRÉ LUIS TREVISAN
MAYCON ODAILSON DOS SANTOS DA FONSECA

CADERNO DE TAREFAS: PROPOSTA DE TAREFAS PARA UM ESTUDO INICIAL DE DERIVADAS

PRODUTO EDUCACIONAL

LONDRINA
2017

ANDRÉ LUIS TREVISAN
MAYCON ODAILSON DOS SANTOS DA FONSECA

CADERNO DE TAREFAS: PROPOSTA DE TAREFAS PARA UM ESTUDO INICIAL DE DERIVADAS

Produto Educacional apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

LONDRINA
2017

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Conforme Lima (2014, p.3), o ensino de cálculo diferencial e integral (CDI), durante muito tempo, teve como foco a apresentação formal e rigorosa do conteúdo matemático, em uma abordagem centrada nela mesma, vinculada a uma estratégia tradicional de ensino, pautada no tripé definição-exemplo-exercício.

Outro ponto destacado por Lima (2014) é a questão da transição dos estudantes ao deixarem a Educação Básica. Ao ingressarem no Ensino Superior, muitos não estão acostumados a formular hipóteses, discutir estratégias, elaborar questões, interpretar os resultados obtidos nas tarefas matemáticas. Embora essas sejam ações importantes em qualquer nível de ensino, em âmbito do Ensino Superior são fundamentais para o desenvolvimento de habilidades inerentes às diferentes atividades profissionais.

Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014) destacam que as últimas décadas de pesquisa em CDI têm contribuído para uma melhor compreensão do modo como se organiza o pensamento matemático e a aprendizagem de conceitos como limite, derivada e integral. Tais resultados trazem elementos na direção de compreender as dificuldades e obstáculos apresentados pelos alunos na aprendizagem da disciplina e de como os alunos aprendem. Tais pesquisas têm demonstrado, no entanto, pouco impacto em sala de aula.

Palha (2013, p. 143, tradução nossa) aponta que "um tipo de ensino que envolva os estudantes como aprendizes ativos não são fáceis de ser implementado em salas de aulas regulares".

Torna-se imprescindível pensar propostas que vão de encontro àquilo que usualmente se observa nas salas de aula de CDI (aulas expositivas, seguidas da proposição de "listas de exercícios", elaboradas quase que exclusivamente a partir da réplica de modelos apresentados previamente ou exemplificados no livro didático). Palha (2013), Palha, Dekker, Gravemeijer e Van Hout-Wolters (2013) e Palha, Dekker, Gravemeijer (2015), à luz de pressupostos da RME, defendem a organização de cenários de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas (tradução que estamos adotando para *shift problem lessons*).

Tais episódios não substituem outros presentes no contexto de uma sala de aula regular, como aqueles envolvendo a exposição de conceitos pelo professor ou o trabalho com resolução de tarefas rotineiras. Entretanto, diferem significativamente de uma aula expositiva “usual”, tendo como pressupostos:

- O fato de que um novo conteúdo nem sempre precisa ser apresentado aos estudantes previamente. Ao invés disso, são propostas, aos estudantes, sequências de tarefas com elementos que estimulem sua reflexão e a elaboração de um raciocínio conceitual.
- O papel ativo do aluno, a partir da resolução da tarefa em pequenos grupos de forma colaborativa.
- O papel docente que, ao invés de fornecer explicações, torna-se um mediador das apresentações e explicações dos alunos na resolução.

O desenvolvimento do produto educacional (sequências de tarefas) se desenvolveu em um processo cíclico que adota pressupostos da pesquisa de desenvolvimento (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015), expressão utilizada como tradução para a língua portuguesa de *design research*. De modo geral, uma pesquisa desse tipo envolve o “delineamento, desenvolvimento e avaliação de artefatos para serem utilizados na abordagem de um determinado problema, à medida que se busca compreender/explicar suas características, usos e/ou repercussões” (BARBOSA, OLIVEIRA, 2015, p. 527).

Após a aplicação das tarefas e em função dos limites temporais para realização do produto educacional, foi possível a realização de dois ciclos (1º e 2º semestres de 2016), na qual delineamos três tarefas para compor este trabalho, baseado nas análises feitas das tarefas.

2 OBJETIVO GERAL

Esta sequência de tarefas se destina a alunos do ensino superior em especial aos cursos de Engenharia. O objetivo da sequência de tarefas é que essas oportunizem aos estudantes explorar “ideias básicas” necessárias à compreensão do conceito de derivadas, com os seguintes propósitos:

- Analisar e compreender o estudo de funções particulares (sequências);

- Reconhecer o uso de sequências de diferenças em diferentes situações;
- Aplicar o conhecimento de taxa de variação média e instantânea;
- Identificar a derivada em um ponto.

3 SEQUÊNCIA DE TAREFAS

Em nossa proposta, selecionamos e adaptamos/reformulamos 3 tarefas que foram aplicadas em 2 ciclos. Na Figura 1 apresentamos ideias que circunscrevem o conceito de derivadas elencadas que compõem a sequências de tarefas, e que podem ser explorados intuitivamente antes de uma apresentação formal e construção de técnicas.

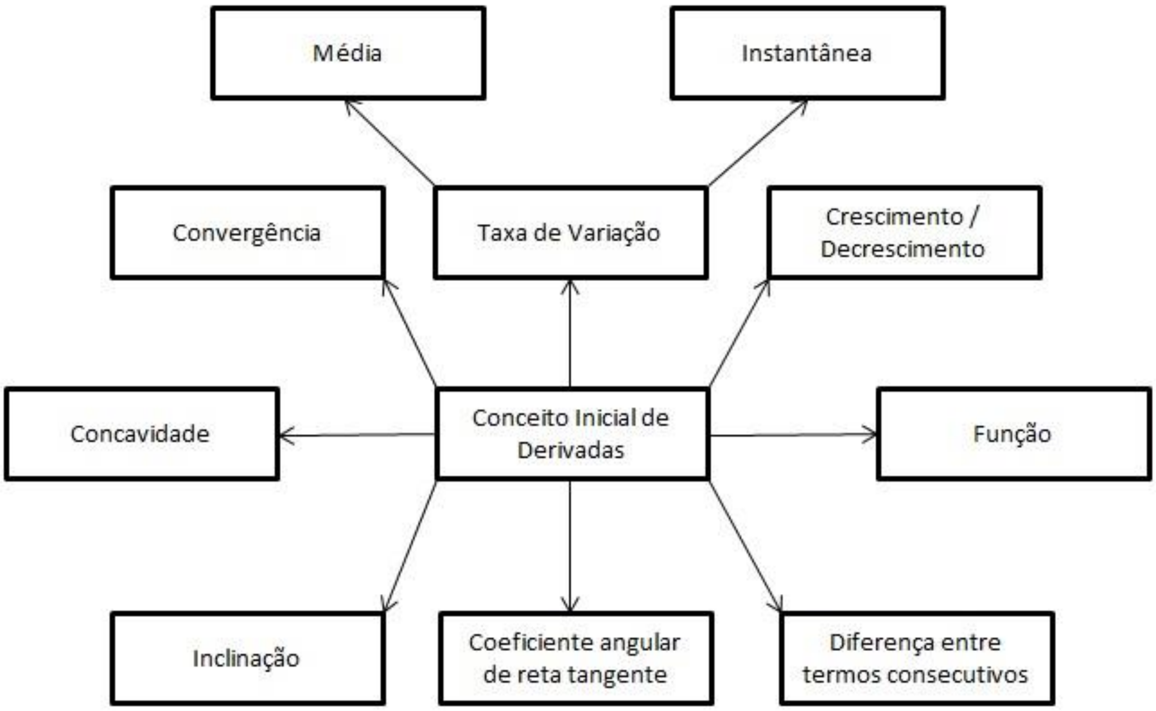


Figura 1 - Ideias que circunscrevem o conceito de derivada.
Fonte: autores.

A primeira tarefa (estabelecer comparação entre diferentes tipos de sequências) é baseada em Weigand (2001), e considera que há inúmeras situações práticas que podem ser descritas por funções ou sequências discretas, que, por serem bastante acessíveis, possibilitam que os grupos detectem “padrões” em fenômenos e em situações.

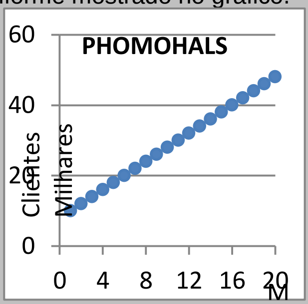
No estudo de sequências de diferença, o mesmo autor cita que, com o auxílio de tal técnica, é possível analisar a modificação geral do comportamento das sequências, sendo uma ferramenta importante para entender as taxas de variação, fato esse levado em conta na proposição da segunda tarefa da sequência.

No estudo de taxa de variação, Weigand (2001), enuncia que a taxa de variação, em especial a taxa de variação média pode ser utilizada para descrever e explicar muitas situações, nas quais as variáveis são interdependentes. Em especial, destacamos aqui o estudo da velocidade média e instantânea, tema explorado na terceira tarefa.

TAREFA 1 - ROTEIRO

A empresa COMPUNET fornece conexões de Internet para seus atuais 10.000 consumidores. A COMPUNET está interessada na contratação de uma agência de publicidade para desenvolver uma campanha, para aumentar o número de consumidores. A empresa tem três agências de publicidade diferentes para escolher: PROMOHALS, H & G publicidade e SCHLEICH & Co. Cada empresa garante um aumento do lucro para COMPUNET, mas em ritmos diferentes. Seu trabalho é investigar qual agência é melhor para COMPUNET.

A campanha desenvolvida pela PROMOHALS promete um crescimento nos negócios, conforme mostrado no gráfico.



H & G Adversiting
A campanha da Agência de publicidade H & G Adversiting promete um crescimento mensal a uma taxa 10%. Ou seja, o lucro de cada mês é 10% maior que do mês anterior.

Schleich & Co promete o crescimento mostrado na Tabela.

Tempo (meses)	Clientes (Milhares)
1	10
2	15
3	19
4	23
5	27
6	30
7	32
8	34
9	36
10	38
11	39
12	40
13	41
14	42
15	42
16	43
17	43
18	44
19	44

Quadro 1 - Tarefa 1: o caso Compunet
Fonte: Adaptado de Weigand (2014).

Tempo previsto: 3 aulas.

Conteúdo da aula: conceito sobre sequências e sequências particulares

Objetivo específico: Reconhecer os diferentes tipos de sequências e seus comportamentos.

Metodologia e Estratégia: Para exploração dos conceitos envolvidos da tarefa, é necessário inicialmente disponibilizar o arquivo em formato do software Excel, pois é um programa que os grupos sejam familiarizados, com algumas ferramentas e objetos de manipulação (construção de gráficos, criação de lei de formação, etc.).

Nesta tarefa ideias e conceitos podem surgir ou serem planejados, conforme o Quadro 3.

Ideias e Conceitos possíveis de serem explorados
Sequências como funções particulares
Crescimento/Decrescimento
Funções como relação variacional
Concavidade
Diferença entre termos consecutivos

Quadro 2 - Ideias e Conceitos da Tarefa 1
Fonte: autores.

Após, o professor pode lançar questões para que os alunos/grupos possam explorar itens da tarefa, como:

- Qual empresa é mais vantajosa?
- Em que períodos a empresa se torna mais vantajosa?
- Qual empresa é melhor em curto, médio e longo prazo?
- Em algum momento a empresa Promohals é vantajosa? Em quais períodos?

Neste momento o professor deve passar pelos grupos acompanhando as resoluções e explorações da tarefa nos grupos, indicando novos pontos a ser explorado e guiados caso os grupos "fujam" do que é esperado.

As sistematizações de conteúdos podem ser feitas durante e no final da aula, nesta tarefa apresenta-se definições de:

Sequências: Uma sequência é uma lista infinita de números S1, S2, S3,..., Sn,.... Denominamos S1 o primeiro termo, S2 o segundo termo e Sn o termo geral.

Sequências numéricas: são funções de domínio real e contradomínio um conjunto qualquer não vazio.

Progressões aritméticas: é um caso particular de sequência que possuem um valor constante de um número para outro, chamado razão, a partir do seu segundo termo.

Sequências Recursivas: podem ser definidas *recursivamente,* ou seja, relacionando o *n-ésimo* termo aos termos anteriores e a todos os termos iniciais que forem necessários para se iniciar a sequência.

Sequências como casos particulares de funções: Uma sequência é uma função cujo domínio são os números inteiros positivos, ou seja, o conjunto N (naturais), ou seja, $f:N \to R$. Pode-se, assim, entender uma sequência numérica como uma "seleção" de pontos de uma função de variável real.

Recursos Didáticos: quadro-negro, giz, projetor multimídia, *notebook* com software Excel.

TAREFA 2 - ROTEIRO

"Nesta tarefa, vamos investigar a chamada ***sequência de diferenças****. Trata-se do tipo mais simples de variação de uma sequência* (a_n)*, a* ***variação simples (ou absoluta)*** *que indicaremos por* $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$*. Inicialmente, vamos explorar duas sequências em especial, de comportamento linear, exponencial e quadrática. O objetivo é notar a importância dos valores nos controles deslizantes e sua relação com a sequência de diferença. Dadas as sequências definidas por* $a_n = a + (n-1)\cdot b$*,* $a_n = a.b^{n-1}$ *e* $a_n = a.n^2 - b.n + c$*, analise, com auxílio do Geogebra, o papel dos parâmetros* a *e* b *no comportamento dessas sequências e de suas sequências de diferenças. Para facilitar, estude uma sequência por vez, anote tudo que achar pertinente e interessante durante a exploração.*

a) *Movimente o controle deslizante para* $a = 0$ *e* $b > 0$*, o que é possível notar?*
b) *Movimente o controle deslizante para* $a > 0$ *e* $b = 0$*, o que é possível notar?*
c) *Agora explore as seguintes situações:*
  i) $a > 0$ *e* $b > 0$
  i) $a < 0$ *e* $b > 0$
  ii) $a < 0$ *e* $b < 0$
  iii) $a > 0$ *e* $b < 0$

iv) $a = 0$ *e* $b = 0$*"*

Abaixo, evidenciamos modelos de construção das sequências originais e sequências de diferenças. Na coluna "A" da tabela consta o valor de "n" nas sequências originais, na coluna "B" está à sequência original e na coluna "C" a sequência de diferenças.

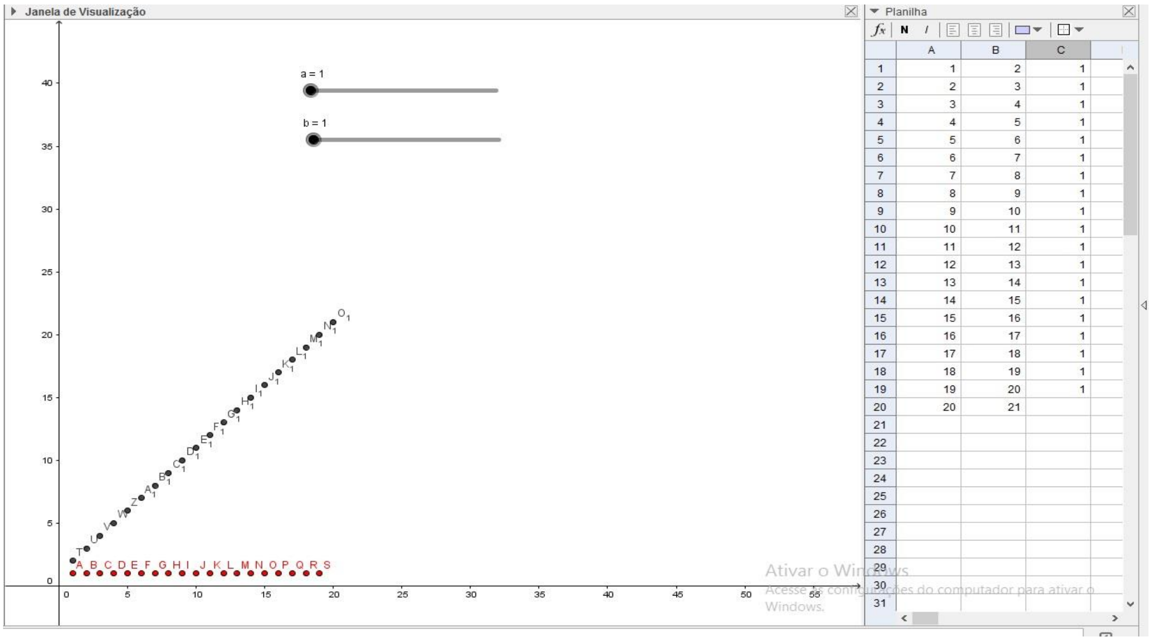


Figura 2 - Representação da sequência $a_n = a + (n-1) \cdot b$ **e a sequência de diferença** $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

Fonte: autores.

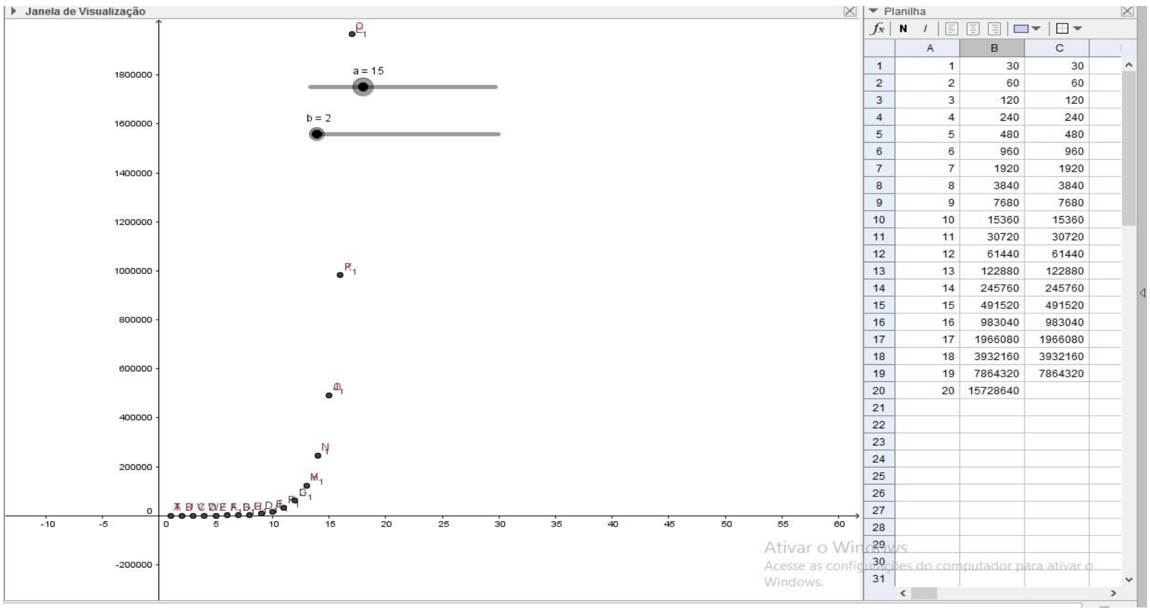


Figura 3 - Representação da sequência $a_n = a.b^{n-1}$ **e a sequência de diferença** $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

Fonte: autores.

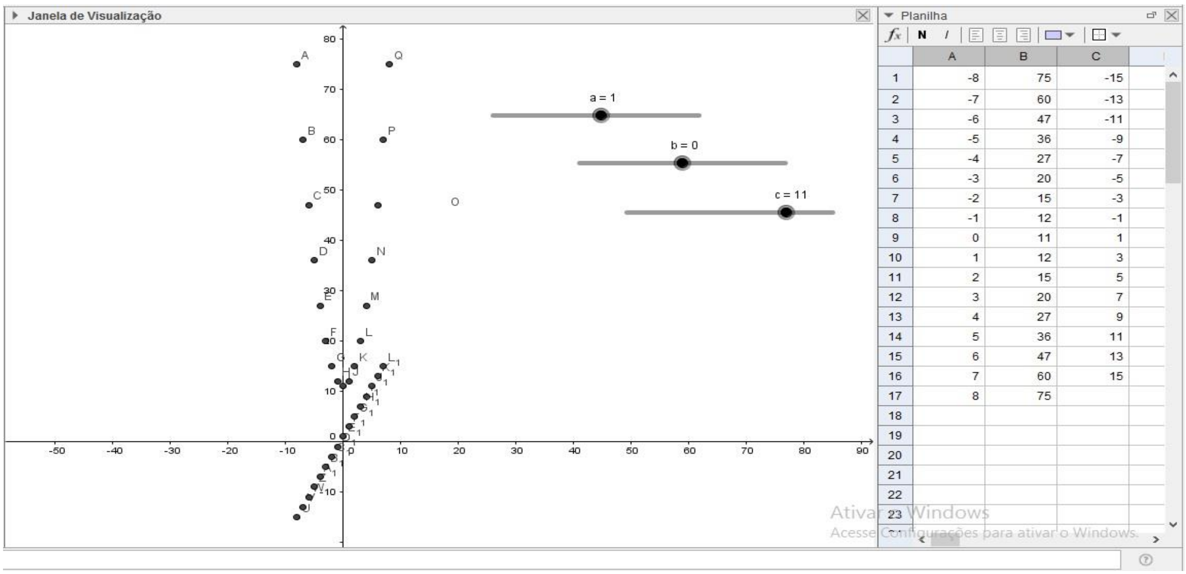


Figura 4 - Representação da função $a_n = a.n^2 - b.n + c$ e na função de diferença $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

Fonte: autores.

Tempo previsto: 3 aulas.

Conteúdo da aula: sequências e sequências de diferenças.

Objetivo específico: Identificar o comportamento das sequências de diferenças comparando com a sequência original.

Metodologia e Estratégia: Essa tarefa exige o uso do *software* Geogebra, pois na execução da tarefa pode-se explorar os diversos recursos desse *software*, em especial o controle deslizante, o uso das Planilhas e da Lista de Pontos. Quando se vincula os controles deslizantes a e b, pode-se gerar os elementos da sequência com auxílio da Planilha ($a_1 = a$), juntamente com sua sequência de diferenças, construída na coluna ao lado. O recurso Lista de Pontos possibilita a representação gráfica de ambas (sequência original e de diferenças).

Na sequência linear $a_n = a + (n-1) \cdot b$, espera-se que os alunos/grupos explorem o comportamento crescente/decrescente, a relação do coeficiente a com o "modo" como a sequência (de)cresce, a (in)dependência de b na constituição da sequência de diferenças (pois a sequência de diferenças será sempre uma sequência constante).

Para a sequência $a_{n+1} = a_n.b^n$, dita de comportamento exponencial, o elemento central da investigação é a percepção dos diferentes comportamentos possíveis para sua sequência de diferenças, dependendo do valor escolhido para b.

No caso em que $b \geq 2$, a sequência de diferenças, assim como a sequência original, terá também um comportamento exponencial crescente. Para $b = 1$, teremos uma sequência de diferenças nula; para $0 < b < 1$, $\{\Delta a_n\}$ é decrescente; se $b = 0$, a sequência de diferenças é nula a partir do segundo termo; para $b < 0$ temos $\{\Delta a_n\}$ alternada (convergente se $-1 < b < 0$; divergente caso contrário).

Já na sequência dita quadrática, é possível explorar os intervalos em que a sequência de diferenças é crescente, decrescente ou nula, quando $\Delta a_n > 0, \Delta a_n < 0$ e $\Delta a_n = 0$, na qual a sequência de diferenças quando existente será uma sequência linear.

Nesta tarefa ideias e conceitos podem surgir ou serem planejados, conforme o Quadro 4.

Ideias e Conceitos possíveis de serem explorados
Crescimento/Decrescimento
Funções como relação variacional
Concavidade
Diferença entre termos consecutivos entre a sequência original e de diferenças
Coeficiente angular da reta
Inclinação

Quadro 3 - Ideias e Conceitos da Tarefa 2
Fonte: autores.

Durante a condução da tarefa em sala, o professor pode questionar os alunos/grupos, em questões para reforçar a exploração da sequência original em relação com a sequência de diferenças, através dos controles deslizantes, como:

- O que é possível notar com o movimento do controle deslizante a na sequência original e de diferenças? Existe alguma relação?
- E com o controle deslizante b na sequência original e de diferenças? O quê acontece?
- Qual o comportamento que podemos notar na sequência original movimentando o controle deslizante? E na sequência de diferenças?
- Em quais intervalos as sequências se tornam crescentes? E decrescentes?

Como os alunos não estão habituados com o *software* Geogebra, cabe o professor acompanhar na construção e resolução da tarefa, para que não haja equívocos eventuais nas elaborações das respostas.

O conceito principal da atividade a ser sistematizado é de sequências de diferenças, que vem evidenciado no início da atividade, o professor deve retomar o conceito quando for conveniente, sendo:

Sequência de diferenças: Quando temos um termo a_n de uma sequência dependendo quantitativamente de n podemos, muitas vezes, construir o modelo matemático ou analisar esta dependência através das características variacionais destas variáveis, ou seja, o modelo é formulado através das variações destas grandezas. Entretanto, o termo variação pode ter diferentes formulações em matemática e para cada situação podemos escolher o tipo mais apropriado para o modelo. Nos exemplos acima, trabalhamos com o tipo mais simples de variação de uma sequência a_n, a variação simples (ou absoluta), que indicaremos por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Esses valores formam uma nova sequência ou função, que indicaremos por Δa_n e denominaremos sequência de diferenças.

Recursos Didáticos: quadro-negro, giz, projetor multimídia, *notebook* com software Geogebra.

TAREFA 3 - ROTEIRO

Um dos temas importantes do Cálculo é o estudo do movimento. Para descrever completamente o movimento de um objeto é necessário especificar sua velocidade, a direção e o sentido em que está se movendo. Neste curso, consideraremos apenas o movimento ao longo de uma reta (retilíneo). Alguns exemplos são um pistão movendo-se em um cilindro, um carro de corrida em uma pista reta, um objeto largado diretamente do alto para baixo, etc. Uma descrição gráfica do movimento retilíneo de uma partícula pode ser obtido com a posição s da partícula em função do tempo decorrido t desde o instante inicial $t = 0$.

1. A cada intervalo de 5 segundos observa-se a posição de um carro numa rodovia, com a finalidade de observar se em algum momento sua velocidade superou a máxima permitida de 72 km/h. Com os dados obtidos construiu-se a seguinte tabela:

t (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
s (m)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

Em algum momento a velocidade máxima permitida foi superada? Justifique.

2. Considere um objeto em movimento retilíneo cuja posição, em metros, é descrita em função do tempo (em segundos), por meio da equação $s(t) = t^2$. Estamos interessados em obter a velocidade da partícula no instante $t = 1$.

a) Calcule a velocidade média do objeto considerando $0 \le t \le 1$ e $1 \le t \le 2$.

b) Calcule a velocidade média considerando o ***primeiro*** dos subintervalos obtidos da divisão de $1 \le t \le 2$ em:

i) 2 partes ii) 3 partes iii) 4 partes iv) n partes.

c) Calcule a velocidade média considerando o ***último*** dos subintervalos obtidos da divisão de $0 \le t \le 1$ em:

i) 2 partes ii) 3 partes iii) 4 partes iv) n partes.

d) Os resultados obtidos anteriormente formam sequências.

i) O que elas representam?
ii) Elas parecem convergir? Se sim, para qual valor?

Tempo previsto: 3 aulas.

Conteúdo da aula: taxa de variação média e instantânea.

Objetivo específico: Refinar o conceito de taxa de variação média para instantânea.

Metodologia e Estratégia: Nesta tarefa o item 1 é adaptada a partir da proposta de D'Avoglio (2002); já o item 2 foi construído baseando-se nas ideias de Weigand (2004, 2014).

Para realizar essa tarefa é necessário anteceder o estudo do conceito de convergência de uma sequencia e introdução da noção de limite de uma sequência.

No item 1 da tarefa toma-se como ponto de partida um conceito da Física (velocidade média), na qual visa problematizar o conceito de velocidade partindo do conceito de velocidade média $Vm = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (um quociente de diferenças). Um recurso possível a ser utilizado neste item é a de representações gráficas e numéricas no intuito de levar os alunos/grupos a concluírem que não é possível determinar o momento exato que a velocidade foi superada, apenas é possível determinar o intervalo de tempo que ela superou.

Já segundo item da tarefa, a proposta é de "refinar" o conceito de velocidade média tomando intervalos de tempo cada vez menores; considera-se dois intervalos iniciais de tempo $1 \leq t \leq 2$ e $0 \leq t \leq 1$, na qual por meio de suas subdivisões é possível estimar a velocidade no instante $t = 1$ (por meio do conceito de limite de uma sequência de quocientes de diferenças).

Neste ultimo item é possível explorar e sistematizar o conceito de derivada no ponto (a derivada de $s(t) = t^2$ em $t = 1$). Nesta tarefa ideias e conceitos podem surgir ou serem planejados, conforme o Quadro 5.

Ideias e Conceitos possíveis de serem explorados
Taxa de Variação Média
Taxa de Variação Instantânea
Convergência

Quadro 4 - Ideias e Conceitos da Tarefa 3
Fonte: autores.

Alguns encaminhamentos e questionamentos podem ser tomados durante a execução da tarefa, tais como:

- E se passássemos a equação para $s(t) = t^3$ em um intervalo de $t = 1$? Qual será a velocidade instantânea?
- E se agora a equação for $s(t) = t^n$ no intervalo $n \leq t \leq 1$? Qual será a sua velocidade instantânea?
- Qual regularidade é possível notar?
- Como podemos generalizar essa resposta de regularidade para um n qualquer?

Um recurso possível no item 2 da tarefa, é a criação da lista de pontos no Geogebra, evidenciando para qual valor as equações iram convergir (no caso quando é a equação $s(t) = t^2$ em $t = 1$, terá a convergência em $2m/s$.

Dentro da sistematização da tarefa, é possível discutir e elencar as seguintes definições:

Quociente de diferenças: Para cada valor de n, obtemos uma estimativa da velocidade média para um intervalo de tempo $\frac{1}{n}$. Temos então duas sequências que recebem o nome de sequência de quocientes de diferenças, pois são originadas a partir da divisão entre a diferença de posição do objeto pela diferença de tempo entre cada posição.

Velocidade média: é a razão entre o deslocamento de uma partícula e o intervalo de tempo para que o deslocamento aconteça. A velocidade média mede a variação da posição do móvel no tempo, e nos fornece um valor que expressa o quanto o móvel está rápido ou devagar ao realizar um percurso.

Velocidade instantânea: A velocidade instantânea é a velocidade medida em um determinado momento. Diferente da velocidade média, que mede a velocidade média durante um percurso em uma variação de tempo, a velocidade instantânea mede a velocidade em um instante específico. Dizemos que a função velocidade é a derivada de $S(t)$, em relação a variável t.

Recursos Didáticos: quadro-negro, giz, projetor multimídia, *notebook* com software Geogebra.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa sequência de tarefas apresenta subsídios para a compreensão do conceito inicial sobre derivadas. O papel ativo do aluno nas resoluções e o papel de mediação do professor durante a execução da tarefa contribuem para o processo de ensino, na qual a compreensão de derivadas não é previamente apresentado para os alunos/grupos, mas sim sistematizado durante a aula.

Por fim, vale salientar que essa proposta de tarefas é uma sugestão para o professor, na qual este tem autonomia para analisar, selecionar e adequar as tarefas conforme suas reais situações de sala de aula. Espera-se que esta sequência de tarefas contribua com o trabalho docente e na construção de conceitos inicias sobre o tema derivadas no ensino de CDI.

5 REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. Porque a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática?. **Revista do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato grosso do Sul**, v. 8, p. 527-546, 2015.

D'AVOGLIO, A. R. **Derivada de uma função num ponto:** Uma forma significativa de introduzir o conceito. 2002. 63 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

LIMA, G. L. Contextualizando momentos da trajetória de ensino de cálculo na graduação em matemática da USP. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 1, p. 125-149, 2014.

PALHA, S. A. G. Shift-Problem Lessons: Fostering Mathematical Reasoning in Regular Classrooms. **Research Institute of Child Development and Education**, University of Amsterdam, The Netherlands, v. 32, p. 142-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K.; VAN HOUT-WOLTERS, B. Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding. **The Journal of Mathematical Behavior**. Springer, v. 32, p. 141-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K. The effect of shift-problem lessons in the mathematics classroom. **Internacional Journal os Science and Mathematics Education**. Ministry of Science and Technology, Taiwan, v. 13, p. 1589-1623, 2015.

RASMUSSEN, C; MARRONGELE, K.; BORBA, M. C. **Research on calculus:** what do we know and where do we need to go? ZDM, v. 46, p. 507-515, 2014.

WEIGAND, H.-G.. Tabellenkalkulation - ein schrittweise erweiterbares didaktisches Werkzeug. **Der Mathematikunterricht**, v. 47, n. 3, p. 16-27, 2001.

WEIGAND, H.-G. (2004). Sequences—basic elements for discrete mathematics. ZDM **- Zentralblatt fu¨r Didaktik der Mathematik**, 36(3), p. 91-97, 2004.

WEIGAND, Hans-Georg. A discrete approach to the concept of derivative. **ZDM Mathematics Education**, 46, p. 603-619, 2014.