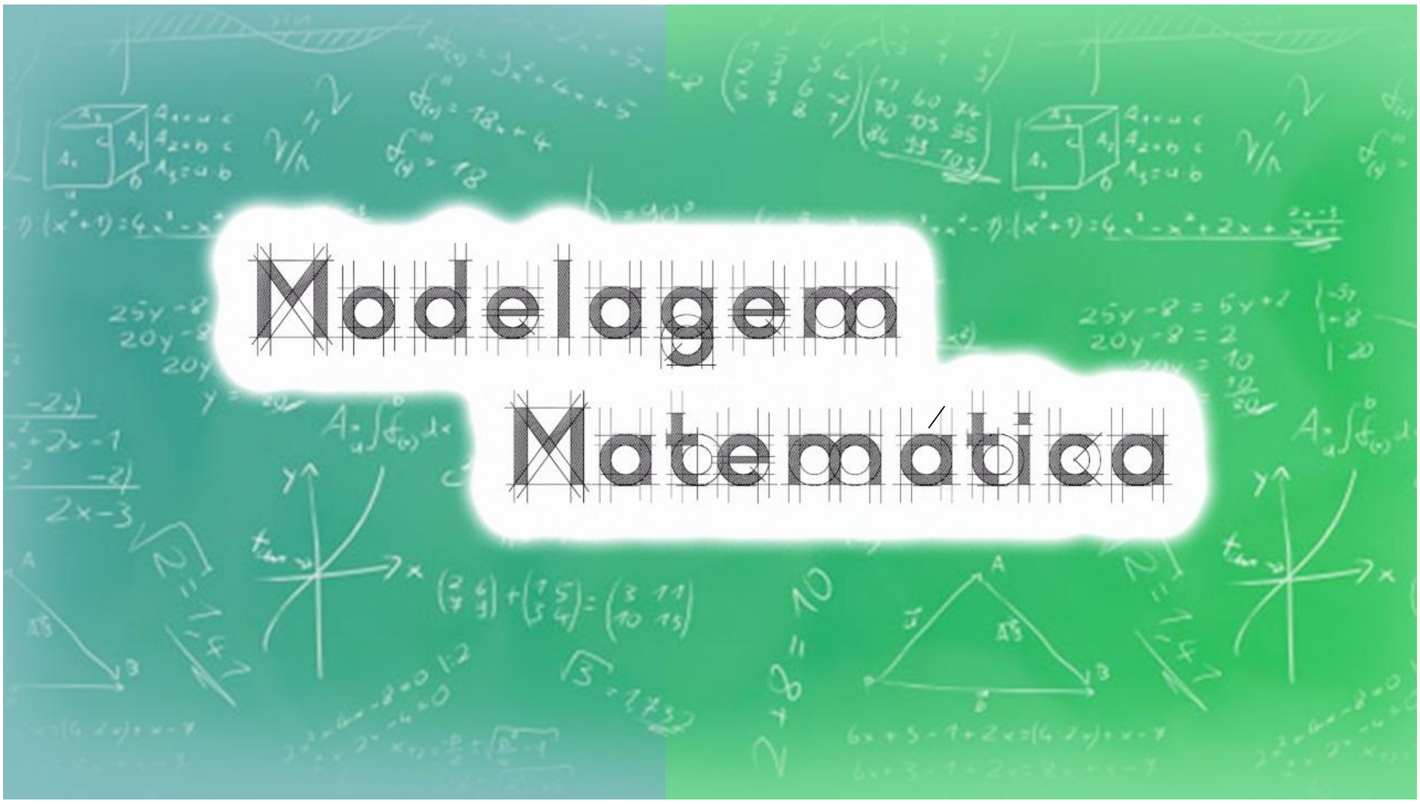
PRODUTO EDUCACIONAL – BLOG DE MODELAGEM



Elenice Josefa Kolancko Setti
Orientador: Dr Rodolfo Eduardo Vertuan

PRODUTO EDUCACIONAL

Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

UTFPR

2017

MODELAGEM MATEMÁTICA NO CURSO TÉCNICO DE INFORMÁTICA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO - UM TRABALHO INTERDISCIPLINAR

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PPGMAT

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

TERMO DE LICENCIAMENTO

APRESENTAÇÃO

Prezados Professores,

Este material foi produzido com o propósito de auxiliá-los no trabalho com Modelagem Matemática, visto que se trata de um modo de se trabalhar Matemática muito diferente do habitual.

Assim como tive dificuldades no início quando decidi trabalhar sob esta perspectiva, imagino que muitos professores devam ter. E muitas vezes, frente às primeiras dificuldades, costumamos desistir e achar que não obteremos êxito. No entanto, aos poucos vamos obtendo experiência e se apaixonando cada vez mais pela Modelagem.

Deste modo, o Site/Blog será um canal de comunicação entre nós, para trocarmos experiências, dúvidas, anseios e nos ajudar neste lindo trabalho.

Todo este material, produzido a partir da pesquisa de mestrado, está disponível no site que será “abastecido” à medida que eu for desenvolvendo outras atividades com meus alunos.

Trata-se de um breve referencial teórico sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática a partir das perspectivas de alguns autores. Uma reflexão sobre interdisciplinaridade e Modelagem Matemática. Um pequeno guia de iniciação para o trabalho com Modelagem. Três atividades de Modelagem, com relatos de desenvolvimento, dicas e links relacionados ao tema.

Espero que possamos realizar um ótimo trabalho com nossos alunos!

Um grande abraço!

Professora Elenice Josefa Kolancko Setti

Sumário

Modelagem Matemática na Educação Matemática

A pergunta "*Professora, onde vou usar isso na minha vida?* " é recorrente nas aulas de Matemática da Educação Básica. Alunos, e até mesmo professores, muitas vezes não conseguem relacionar a Matemática que é estudada na escola com situações da realidade[1], quando isso poderia contribuir na atribuição de sentido, pelo aluno, ao que se estuda. Então, por que não explorar a Matemática que pode "florescer" dessas situações da realidade?

Quando o professor inicia um conteúdo pelas explicações de seus conceitos e algoritmos ou por uma pseudo aplicação (como o crescimento de uma população de bactérias fictícia a uma taxa fictícia), o que se observa, geralmente, são práticas de aulas de Matemática divididas em duas partes, assim como observou Cotton (1998, apud Skovsmose, 2000): inicialmente, o professor expõe o conteúdo matemático e suas técnicas de resolução e logo em seguida os alunos trabalham com exercícios.

No entanto, há a possibilidade de o professor chegar à sala de aula e apresentar aos alunos uma situação real, com dados reais e com um problema que, de fato, pode interessar aos alunos, ou ainda, pode discutir com os alunos um problema que interesse a eles e, a partir de então, buscar os dados para investigá-lo.

Neste sentido, a partir de um único problema, os alunos têm a oportunidade de estudar não só um, mas vários conteúdos matemáticos, além de poderem desenvolver a criticidade e a conscientização em relação ao tema escolhido.

Neste caso, o aluno não perguntaria ao professor *"para que devo aprender esse conteúdo matemático? Onde vou usar isso?",* mas, sim, podem surgir questionamentos do tipo *"o que posso utilizar para resolver este problema?", "como se resolve isso professora?",* entre outros.

Este "jeito" de trabalhar a Matemática é o que diversos autores chamam de Modelagem Matemática (Almeida; Silva; Vertuan (2013), Burak (2004); Barbosa (2004); Caldeira (2009), Bassanezi (2013)). De modo geral, é não só o olhar matemático sobre as diversas situações da realidade, mas um olhar interdisciplinar, onde para além de ensinar Matemática, Física, Química ou Biologia, visa ensinar o aluno a pensar, a investigar, a resolver problemas, trabalhar em grupo, organizar ideias e matematizar. Neste contexto, Almeida e Dias (2004, p. 2) denotam que "a exploração, no ensino, de situações da vida real, em que a Matemática se aplica, torna-a mais dinâmica e interessante e proporciona maior eficiência no processo de ensino e aprendizagem".

Segundo Barbosa (2004, p.3), Modelagem "é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade". Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 17) veem na Modelagem Matemática "uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático". Burak (2004, p. 2) a entende como "alternativa metodológica para o Ensino de Matemática" e aponta o princípio de sua perspectiva como sendo o "interesse do grupo ou dos grupos".

A Modelagem Matemática, como ambiente de aprendizagem (BARBOSA, 2004), como alternativa pedagógica (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013) ou ainda como alternativa metodológica (BURAK, 2004), busca promover a aprendizagem ao interpretar matematicamente um fenômeno da realidade[3].

Para isso, Burak (2004) sugere cinco etapas de encaminhamento do trabalho com Modelagem em sala de aula: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema e, por fim, análise crítica da(s) solução(s). Para o autor, a escolha do tema deve ser incumbência dos alunos, deve partir do interesse deles. O desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema acontece no momento da resolução do problema, ou seja, ao tentar resolver o problema matematicamente, desenvolve-se uma Matemática, que não é definida *a priori*, mas surge dependendo do tema. O modelo matemático, para Burak, constitui-se como uma representação que permite uma tomada de decisão. Sua construção é oportunizada na 4ª etapa, resolução do problema e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema.

Na perspectiva de Almeida, Silva e Vertuan (2013) a

> Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 12).

Segundo os autores, a essa situação final desejada associa-se uma representação matemática chamada de modelo matemático. Assim conceituam modelo como sendo "uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p.13). Por exemplo: quando alunos do Ensino Médio decidem modelar a relação existente entre a quantidade de bicarbonato colocada como combustível em um foguete de garrafa pet e a distância atingida pelo foguete, simplificam o modelo considerando apenas duas variáveis – quantidade de bicarbonato e distância alcançada – mesmo tendo conhecimento de outras variáveis como direção e velocidade do vento, ponto de pressão e de gravidade, entre outras[5].

Almeida, Silva e Vertuan (2013), ainda afirmam que o modelo matemático pode ser representado de diferentes maneiras: uma equação, uma tabela, um gráfico, entre outros. No caso do foguete descrito acima o modelo encontrado pode ser representado das seguintes maneiras:

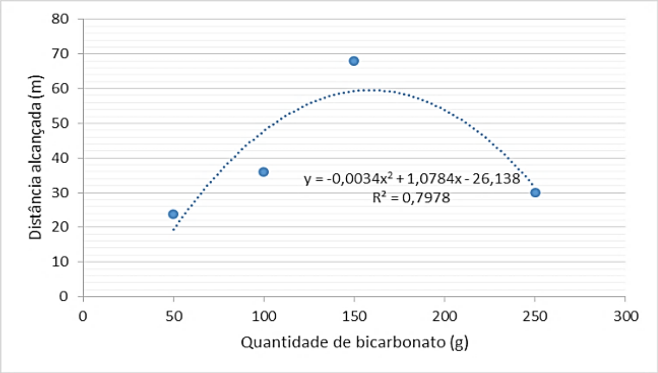
TABELA

Dados coletados na primeira fase do experimento

Dia de lançamento	Quantidade de Bicarbonato (gramas)	Pressão atingida (PSI[1])	Distância alcançada (metros)	Situação
1º	50	59	26,44	Não considerado
1º	100	72	48,1	Não considerado
2º	**50**	**70**	**23,7**	**Considerado**
2º	100	75	24,2	Não considerado
2º	**100**	**98**	**36,05**	**Considerado**
2º	**150**	**102**	**68,1**	**Considerado**
2º	120 (base) + 80 (tubo saída)	100	Não medido	Não considerado

Fonte: os autores.

GRÁFICO E EXPRESSÃO ALGÉBRICA



Quadro 1 - Exemplos de modelos matemáticos
Fonte: SETTI et al., 2016, p. 9 e 10.

Almeida, Silva e Vertuan (2013), apresentam cinco fases relativas aos procedimentos necessários para o desenvolvimento da atividade: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. A inteiração é o primeiro contanto com a situação-problema e consiste em conhecer os aspectos dessa situação inicial. A matematização consiste na transformação da linguagem natural para a linguagem matemática, dando significado matemático à situação inicial e permitindo a resolução. Após resolver o problema é necessário interpretar os resultados e validá-los comparando-os com os dados coletados.

Vertuan e Almeida (2016, p. 1072), todavia, consideram que “a ordem em que tais fases aparecem bem como o tempo dedicado a cada uma e os obstáculos presentes em cada uma delas dependem da dinâmica da atividade e do contexto em que a atividade é realizada”. E ainda que as fases devem ser revisitadas sempre que houver necessidade.

[1] Unidade de medida de pressão no Manômetro (instrumento que acoplado à base que mede a pressão). PSI – Libra-força por polegada quadrada.

Essas diferentes perspectivas de Modelagem se refletem na pesquisa em Modelagem e também na sua implementação em sala de aula.

Notas:

[1] Não é nossa intenção discutir o termo realidade. No entanto, temos ciência das discussões que são realizadas na área (VERONEZ; VELEDA, 2016; VILLA-OCHOA; LOPEZ, 2011; VELEDA, 2010; VELEDA; ALMEIDA, 2009; NEGRELLI, 2008). Neste trabalho, assumiremos as ideias de Negrelli (2008), que também foram abordadas em Veronez e Veleda (2016), sobre realidade. Deste modo, realidade pode ser dividida em realidade inicial (é a realidade dada ao aluno, considerada existente independente dele, composta por elementos da natureza social, física, econômica, etc.) e realidade intermediária (realidade construída pelo aluno, criada com base na relação estruturada dos elementos possíveis de serem captados por ele).

[2] Verifique esta atividade no menu Atividades de Modelagem – Qual é o público.

[3] Além das perspectivas apresentadas, há outras na comunidade de Modelagem, tais como: Bassanezi (2013); Biembengut (2011, 2016); Caldeira (2009).

[4] Os casos de Barbosa serão apresentados na próxima seção.

[5] SETTI, Elenice Josefa Kolancko, et al. Modelagem Matemática e Física: uma experiência com foguetes In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais XII Enem**. São Paulo: SBEM, 2016

[6] Unidade de medida de pressão no Manômetro (instrumento que acoplado à base que mede a pressão). PSI – Libra-força por polegada quadrada.

Implementação de atividades de Modelagem em sala de aula

Podemos nos questionar quando e como utilizar Modelagem Matemática na Educação Básica. Blum e Niss (1991), caracterizam diferentes possibilidades de inclusão da Modelagem na escola: **separação, combinação, alternativa da integração curricular e alternativa interdisciplinar integrada**. Na alternativa de separação, em vez de incluir a Modelagem nas aulas regulares, as atividades são desenvolvidas em cursos separados, em momentos extraclasse. Na combinação, aspectos da Modelagem Matemática são utilizados no decurso das aulas para introduzir ou para aplicar conceitos matemáticos. Quando se fala em alternativa da integração curricular, os problemas vêm em primeiro lugar e a matemática para lidar com eles é desenvolvida de acordo com a necessidade. De todo modo, como o próprio nome sugere, a alternativa trata de atividades cujos conteúdos utilizados são relevantes à série dos alunos que lidam com a situação. Por fim, na alternativa interdisciplinar integrada, há uma integração completa entre as atividades matemáticas e extra-matemáticas num quadro interdisciplinar onde a "matemática" não é um assunto separado. As duas primeiras trabalham de forma a utilizar atividades de Modelagem para desenvolver alguns conteúdos de Matemática. Já as duas últimas defendem a Modelagem como "orientadora" do programa de Matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p.21).

Almeida, Silva e Vertuan (2013) afirmam que a inclusão de atividades de Modelagem pode se dar no âmbito da própria aula de Matemática, em horários extraclasse (cursos ou oficinas) ou em uma combinação dessas duas circunstâncias (uma parte é desenvolvida em sala e a outra em encontros extraclasse).

Nesse sentido, entende-se que uma atividade de Modelagem pode ser adaptada de acordo com as especificidades da escola, turma e professor. No entanto, deve-se preservar sua característica fundamental: **a investigação, pelos alunos, de um problema da realidade, por meio da Matemática, atividade em que o professor tem a função de orientar, indicar caminhos, perguntar, sugerir procedimentos** (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013).

Ao trabalhar Modelagem em cursos regulares, Almeida e Dias (2004), sentiram a necessidade de introduzi-la de forma gradativa, para que os alunos pudessem ir se familiarizando com o "novo jeito" de estudar Matemática. As autoras, então, sugerem três momentos de implementação de atividades de Modelagem.

– Em um primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que ações como definição de variáveis e de hipóteses, a simplificação, a transição para linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para a análise da situação, são em certa medida, orientadas e avalizadas pelo professor.

– Posteriormente, em um segundo momento, uma situação-problema é sugerida pelo professor aos alunos, e estes, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação e realizam a definição de variáveis e a formulação de hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação. O que muda essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência do estudante no que se refere à definição de procedimentos extra matemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação.

– Finalmente, no terceiro momento, os alunos, distribuídos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema, a coleta e análise de dados, as transições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação, bem como a comunicação desta investigação para a comunidade escolar (ALMEIDA; DIAS, 2004, p.7)

Neste sentido, observa-se que o primeiro momento consiste em um papel mais ativo do professor, no segundo os alunos já assumem a responsabilidade de coleta de dados e no terceiro eles precisam identificar o problema, coletar os dados e chegar ao modelo matemático, neste momento o professor orienta a condução das atividades (ALMEIDA; DIAS, 2004). Isso porque no contexto em que desenvolveram a pesquisa, possivelmente identificaram esta necessidade de implementar as atividades de Modelagem de modo gradativo, principalmente frente ao enfrentamento da tradição escolar que muito difere da dinâmica de uma aula com Modelagem Matemática e ao estranhamento que a transição de um paradigma a outro pode suscitar. No entanto, dependendo da característica da turma em que a atividade será desenvolvida ou do objetivo do trabalho, acredita-se não haver necessidade de seguir fielmente estes momentos, de forma linear.

Na perspectiva de Barbosa (2004), as atividades de Modelagem Matemática não possuem sempre os mesmos encaminhamentos de resolução, tendo em vista a sua proposição e o nível de envolvimento do professor e dos alunos. Barbosa (2004, p.4) chama estes encaminhamentos diferenciados de “regiões de possibilidades” ou simplesmente de “casos”.

Uma atividade se aproxima do caso 1 de Barbosa (2004, p.4) quando “o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação”. O caso 2 se caracteriza quando “os alunos se deparam apenas com o problema para investigar, mas têm que sair da sala de aula para coletar dados. Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial” (BARBOSA, 2004, p.4). O caso 3, por sua vez, “trata de projetos desenvolvidos a partir de temas ‘não-matemáticos’, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos” (BARBOSA, 2004, p. 4).

Em cada caso há uma distribuição de responsabilidades sobre as tarefas que devem ser desenvolvidas nas atividades de Modelagem. O quadro I ilustra esta distribuição.

	CASO1	CASO2	CASO3
Formulação do Problema	Professor	Professor	Professor/aluno
Simplificação	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Coleta de dados	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Solução	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno

Quadro 2 - Tarefas no processo de Modelagem
Fonte: BARBOSA (2004, p. 5).

É importante destacar que os "momentos" de Almeida e Dias (2004) e os "casos" de Barbosa (2004) são coisas distintas. O primeiro se refere à familiarização gradativa dos alunos com a Modelagem Matemática e o segundo trata das possibilidades de atribuições de alunos e professor no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem (ALMEIDA; VERTUAN, 2011).

Apresentamos, a seguir, um quadro síntese das três perspectivas de Modelagem que mais estão alinhadas com nossa pesquisa.

AUTORES	DEFINIÇÃO DE MODELAGEM	DEFINIÇÃO DE MODELO	ENCAMINHAMENTO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM
ALMEIDA, DIAS (2004) **ALMEIDA, SILVA e VERTUAN (2013)**	Percebida como um estudo matemático acerca de um problema não essencialmente matemático, que envolve a formulação de hipóteses e simplificações adequadas na criação de modelos matemáticos para analisar o problema em estudo. Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final.	Uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam.	Sugerem 3 momentos de implementação da atividade de Modelagem, dando a ideia de implementação gradativa: o primeiro consiste em um papel mais ativo do professor; no segundo os alunos já assumem a responsabilidade de coleta de dados e no terceiro eles precisam identificar o problema, coletar os dados e chegar ao modelo matemático, neste momento o professor apenas orienta a condução das atividades. Apresentam cinco fases de desenvolvimento da atividade de modelagem: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.
BARBOSA (2001, 2003, 2004)	É um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade.	Não exige a obtenção de um modelo matemático.	Sugere três diferentes possibilidades de organização curricular, chamando-as de casos.
BURAK (2004)	Conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano,	Qualquer representação que permite uma tomada de decisão.	Sugere cinco etapas: - escolha do tema; - pesquisa exploratória; - levantamento dos problemas;

	ajudando-o a fazer predições e tomar decisões. Alternativa metodológica para o ensino de Matemática. Parte do princípio do interesse do grupo de alunos.		- resolução do problema e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema; - análise crítica das soluções.

Quadro 3 - Síntese das perspectivas de Modelagem de ALMEIDA e DIAS, BARBOSA e BURAK
Fonte: elaborado pela autora, baseado em ALMEIDA, DIAS (2004), ALMEIDA, SILVA e VERTUAN (2013), BARBOSA (2001, 2003, 2004) E BURAK (2004).

Quando os professores realizam atividades de Modelagem Matemática com seus alunos

Ao decidir trabalhar com Modelagem, o professor se depara com inúmeros desafios, conflitos e angústias, pois essa tendência em ensino de Matemática talvez seja a que mais se diferencie do que costumeiramente se desenvolve em sala de aula. Sem falar das resistências por parte dos alunos, de outros professores e até da gestão da instituição, uma vez que os conteúdos matemáticos não serão trabalhados linearmente, mas sim à medida que vão surgindo no desenvolvimento da atividade (OLIVEIRA; BARBOSA, 2011).

> Em um ambiente de Modelagem, o professor pode não ter muita clareza sobre o controle da comunicação em termos de seleção, sequência, ritmo e critérios da comunicação da prática pedagógica, pois não há previsibilidade do que ocorre na abordagem de situações-problema provenientes do dia a dia ou de outras disciplinas (OLIVEIRA; BARBOSA, 2011, p. 269).

Segundo Burak (2004, p. 3) “o papel do professor fica redefinido, pois ele passa a se constituir como mediador entre o conhecimento matemático elaborado e o conhecimento do aluno ou do grupo”. Com isso,

> O professor assume um papel diferenciado em um ambiente de Modelagem Matemática. Nesse contexto, o professor deve incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não as suas conjeturas. Durante a fase de discussão cabe ao professor estimular a comunicação entre os alunos. Ao organizar a fase de discussão coletiva o professor deve conhecer bem os trabalhos de todos os grupos de alunos de modo a valorizar tanto as descobertas mais interessantes como as mais modestas (ALMEIDA; DIAS, 2004, p. 6).

E o modo como o professor medeia uma atividade de Modelagem, ou o modo como realiza intervenções, interfere na atitude dos alunos frente a atividade, de ativa à acomodada (SANTANA; BARBOSA, 2012). Ou seja, a mediação do professor pode fazer com que o aluno participe mais ou menos ativamente na atividade.

Santana e Barbosa (2012) classificam essas intervenções em *discurso procedimental* e *discurso silenciador.* Segundo os autores,

> O discurso procedimental, refere-se ao discurso do professor, no qual ele deixa evidentes os procedimentos de abordagem do problema no ambiente de aprendizagem, como: onde as informações podem ser coletadas; quais informações são relevantes para o desenvolvimento das situações-problema; e como podem ser desenvolvidas as situações-problema. Já o discurso silenciador refere-se à invalidação de encaminhamentos propostos pelos alunos, como aqueles em termos de que dados devem ser utilizados, das informações relevantes etc (SANTANA; BARBOSA, 2012, p.1016).

"Tais discursos dão visibilidade sobre as regras para as produções discursivas dos alunos nesse ambiente de aprendizagem, seja no abandono de hipóteses [...] ou na escolha dos conteúdos matemáticos ou dados [...]" (SANTANA; BARBOSA, 2012, p. 1016). Neste contexto, entende-se que com "orientações demais" o professor acaba dizendo o que os alunos devem fazer, e que "orientações de menos" podem desestimular os alunos frente aos obstáculos das atividades. Neste sentido, a "medida" ideal, se é que existe uma, precisa ser sentida pelo professor com sua turma, dadas as especificidades do ambiente, da turma, do dia e da atividade, refletindo sempre sobre sua maneira de intervir, para que não descaracterize a atividade de Modelagem.

Neste sentido, o papel do professor é de grande importância, pois suas contribuições devem se dar no sentido de orientar os alunos sem violar a sua criatividade (ALMEIDA; DIAS, 2004).

Toda essa mudança no papel do professor na aula de Matemática com Modelagem gera situações de tensão (OLIVEIRA; BARBOSA, 2011), principalmente na primeira experiência do professor. Em uma pesquisa realizada com professores atuantes na educação básica que participavam de um curso de formação, Oliveira e Barbosa (2011) identificaram as situações de tensão apresentadas no Quadro 1.

SITUAÇÕES DE TENSÃO	TENSÕES NOS DISCURSOS	PERCEPÇÃO DOS AUTORES – OLIVEIRA e BARBOSA
O envolvimento dos alunos na discussão do tema.	Interação com os alunos.	O que pode ser perguntado aos alunos e como pode ser perguntado.
	Sequenciamento e ritmo na prática pedagógica.	Qual sequência utilizar, o seu ritmo e como implementá-las.
O planejamento do ambiente de Modelagem.	Escolha do tema.	Qual tema escolher e como escolher um tema que envolva os alunos.
	Interação com os alunos.	Quais perguntas fazer e como fazê-las.
A organização dos alunos para realizar as atividades.	Participação dos alunos.	Como propor atividades que envolvam os alunos para que participem ativamente.
A apresentação das respostas dos alunos.	Abordagem das respostas dos alunos.	Como intervir e discutir as respostas dos alunos.

Quadro 4 - Relação entre situações de tensão e tensões nos discursos
Fonte: OLIVEIRA; BARBOSA, 2011, p. 288. A terceira coluna, percepção dos autores, foi construída pela autora baseados em Oliveira e Barbosa (2011).

Apesar de os estudos acerca da Modelagem Matemática assinalarem inúmeros benefícios para o ensino de Matemática, em decorrência de todas as considerações anteriores, sua implantação nas escolas ainda é um desafio.

Aprendizagem dos alunos em (com) Modelagem Matemática

Nesta seção discorreremos sobre o que os alunos aprendem **em** Modelagem Matemática e sobre o que os alunos aprendem **com** Modelagem Matemática, a partir de pesquisas realizadas por diversos autores.

Em atividades de Modelagem Matemática a aprendizagem dos alunos parece acontecer de forma distinta àquela construída segundo o paradigma do exercício, isso porque os papéis dos alunos são diferentes (SANTANA; BARBOSA, 2012). O aluno deixa de ser apenas um receptor e reprodutor de informações e algoritmos e passa a ser um colaborador no processo de aprendizagem. Colaborador no sentido de contribuir na construção do conhecimento à medida que participa do desenvolvimento da atividade. Quem colabora, faz parte do processo.

Como enfatizam Almeida e Brito (2005, p. 495), "a Matemática em atividades de Modelagem assume para os alunos sentido e significado[1] que provavelmente diferem daqueles das aulas convencionais. [...] os alunos estabelecem algumas relações e elas podem ajudá-los a atribuir sentidos".

No entanto, Klüber e Burak (2008, p. 25), observaram que "algumas crianças se adaptam mais facilmente ao sistema de reprodução e, o fato de gostar de Matemática não implica diretamente em aprendizagem a partir do significado, mas sim da repetição". Isso implica em certa resistência por parte de alguns alunos em participar de atividades de Modelagem, pois a dinâmica é diferente e o objetivo não é só desenvolver técnicas de resolução e sim, também, outros conhecimentos inerentes à atividade de Modelagem.

Neste sentido, Silva, Borssoi e Almeida (2015), enfatizam que as atividades de Modelagem,

> ao mesmo tempo em que proporcionam ao aluno o envolvimento com uma situação-problema, também visam desenvolver no aluno o que Galbraith (2012) chama de 'infraestrutura intelectual', de modo que os alunos possam se tornar usuários dos conhecimentos matemáticos construídos e resolver problemas de forma independente em diferentes situações dentro e fora do ambiente escolar (SILVA; BORSSOI; ALMEIDA, 2015, p.163).

As autoras denotam que, ao desenvolver uma atividade de Modelagem, os alunos podem se deparar com uma situação em que não possuem conhecimentos suficientes para resolvê-la, emergindo assim a necessidade de desenvolvê-los. Neste sentido, no desenvolvimento de atividades de Modelagem, os alunos podem aprender novos conceitos matemáticos a partir da busca por uma solução para o problema. Essa aprendizagem dos alunos pode ser autônoma, quando buscam informações em livros ou sites, ou através do professor que está mediando a atividade, o que parece ser mais comum.

Neste contexto, Vertuan e Almeida (2016) afirmam que:

A familiarização dos alunos com atividade de Modelagem pode resultar, para além de uma compreensão acerca do que constitui uma atividade de Modelagem, em um aumento no repertório de estratégias de resolução e em certa autonomia frente à utilização dos conceitos matemáticos, suas propriedades e sua importância no contexto do problema (VERTUAN; ALMEIDA, 2016, p. 1074).

Os autores concluem que:

Quando um aluno toma consciência dos conceitos matemáticos que conhece, das estratégias que pode utilizar frente a um problema específico e dos modos como se dá sua aprendizagem, pode otimizar suas ações de modo a potencializar a apreensão de conhecimentos e o desenvolvimento cognitivo (VERTUAN; ALMEIDA, 2016, p. 1074).

Neste contexto, Almeida, Silva e Vertuan (2013) denotam que os alunos desenvolvem ações cognitivas, quando: partindo da situação inicial até a identificação do problema, realizam uma representação mental da situação, compreendendo-a e estruturando-a; constroem um modelo matemático, realizando a matematização da situação; ao caminhar para os resultados matemáticos realizam uma síntese; interpretam e validam os resultados e; por fim, comunicam seus resultados e argumentam acerca deles.

Para isso os alunos precisam trabalhar em grupo, pois uma atividade de Modelagem se caracteriza como uma atividade cooperativa (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013). No entanto, este modo de estudar apresenta-se como um desafio para os alunos, que estão acostumados a sentar em fileiras e "ouvir" a aula do professor. Assim, ao participar de atividades de Modelagem, os alunos podem aprender a trabalhar em grupos, a lidar com conflitos e justificar suas ideias.

Portanto, o trabalho com Modelagem Matemática parece ter potencialidades para desenvolver nos alunos aprendizagens conceituais, tanto de Matemática como de outras disciplinas ou áreas do conhecimento; aprendizagens procedimentais, como estratégias de resolução e algoritmos; aprendizagens de comunicação, ao lidar com conflitos, trabalhar em grupo e justificar suas ideias (VERTUAN; SILVA; BORSSOI, 2017); aprendizagens tecnológicas, ao lidarem com softwares de Modelagem, de simulação ou planilhas eletrônicas e; aprendizagens metacognitivas, quando o aluno sabe onde possui dificuldades, no que precisa se dedicar mais, ou desenvolve experiência em resoluções de atividades de Modelagem.

Notas:

[1] Os autores se apoiam nas noções de sentido e significado dadas por Leontiev (1978). "O significado refere-se ao sistema de relações objetivas que se forma no processo de desenvolvimento de uma expressão. Ele constitui um núcleo relativamente estável de compreensão que é compartilhado por todas as pessoas. O sentido, refere-se ao significado da palavra para cada indivíduo, e incorpora relações que dizem respeito ao contexto de uso da palavra e a vivência afetivas do indivíduo. Assim o sentido é produzido por relações (ALMEIDA; BRITO, 2005, p. 486)".

Interdisciplinaridade e Modelagem Matemática

As reformulações curriculares sempre apontam para o ensino de Matemática contextualizado e interdisciplinar. A interdisciplinaridade pode ser entendida como "diferentes propostas, com diferentes perspectivas, entre elas, aquelas que defendem um ensino aberto para inter-relações entre Matemática e outras áreas do saber científico ou tecnológico, bem como com as outras disciplinas escolares" (TOMAZ; DAVID, 2008, p.14).

Assim,

> A Matemática escolar passa a ser vista como um meio de levar o aluno à participação mais crítica na sociedade, [...] contribuindo com a formação integral do aluno, como cidadão da sociedade contemporânea, onde cada vez mais é obrigado a tomar decisões políticas complexas (TOMAZ; DAVID, 2008, p. 15).

Tomaz e David (2008), como exemplo, apresentam estratégias adotadas em escolas da Dinamarca e utilizadas por Skovsmose (1994, apud TOMAZ, DAVID, 2008) para construir o seu entendimento sobre interdisciplinaridade. Skovsmose (1994, apud TOMAZ; DAVID, 2008) apresenta a abordagem por tematização e a organização-em-projetos.

Tomaz e David (2008) acreditam, ainda, que

> a adoção de temas para organizar a abordagem dos conteúdos disciplinares é uma forma de promover a interdisciplinaridade e pode contribuir para o engajamento do aluno nas discussões dos conteúdos e desenvolver competência crítica (TOMAZ; DAVID, 2008, p. 20).

Em se tratando da escolha de temas como uma forma de promover a interdisciplinaridade, uma metodologia de ensino de Matemática que compartilha desse encaminhamento inicial no desenvolvimento de uma atividade, é a Modelagem Matemática.

É natural associar Modelagem Matemática à interdisciplinaridade, isto porque a atividade de Modelagem, na maioria das vezes, é sobre um tema não matemático, de outra área, podendo integrar, inclusive, diversas áreas.

Isso porque, em Modelagem, as relações entre a realidade e a Matemática servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não-matemáticos sejam acionados, produzidos e integrados. Neste sentido, a abordagem de questões reais pode motivar a compreensão de métodos e conteúdos da Matemática escolar, contribuindo para a construção de conhecimentos e mostrar aplicações da Matemática em outras áreas do conhecimento (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013).

De todo modo, observa-se diferenças nas características de interdisciplinaridade nos diversos trabalhos de Modelagem.

A partir de pesquisas realizadas em trabalhos de Modelagem publicados nos anais de eventos da área[2] , organizou-se o seguinte quadro:

CATEGORIA	CARACTERÍSTICAS
1	Interdisciplinaridade entendida como a contextualização de conceitos da Matemática que o professor pretende ensinar ou aplicar – o foco está na matemática.
2	Interdisciplinaridade entendida como o movimento entre diferentes disciplinas e seus respectivos docentes que buscam, a partir de seus referenciais, mediar a resolução de um problema de interesse comum – o foco está na resolução de um problema via diferentes olhares.
3	Interdisciplinaridade apontada como aspecto importante a ser considerado na formação docente inicial e continuada.
4	Interdisciplinaridade sendo suscitada em decorrência da necessidade advinda do desenvolvimento de uma atividade de Matemática.
5	Interdisciplinaridade sendo desenvolvida em uma disciplina que não seja Matemática, que utiliza a Matemática como ferramenta de resolução da situação-problema.
6	Interdisciplinaridade entendida como várias disciplinas desenvolvendo suas atividades a partir de um mesmo tema, sem que haja integração entre uma atividade e outra. (Multidisciplinaridade)

Quadro 5 - Categorias de Interdisciplinaridade em Modelagem Matemática
Fonte: SETTI; VERTUAN (2016b).

Concordamos com a afirmação de Japiassu (1976) de que não existe uma única definição, muito menos um único entendimento de interdisciplinaridade. Esta multiplicidade de características pode causar certa confusão de entendimento de um trabalho interdisciplinar, mas oportuniza diferentes possibilidades de encaminhamentos.

Esses encaminhamentos, ao qual chamamos de categorias (Quadro 5), apontam para uma integração entre diferentes disciplinas e para uma preocupação em tornar a interdisciplinaridade realidade em nossas escolas. No entanto, a condução dessa integração de disciplinas aponta, por vezes, que o foco está na Matemática e que para contextualizar utilizam-se conceitos de outras disciplinas sem a participação do professor dessas disciplinas, o que também é satisfatório. Assim, o professor, sozinho, dá conta de explorar conceitos de diferentes disciplinas, mesmo sem ter domínio em algumas delas. Nesse caso, o professor precisa mediar as ações dos estudantes de modo a fazer esses conceitos “conversarem” durante a atividade.

Em outras situações, a Matemática age como ferramenta para o desenvolvimento de atividades de Modelagem em outras disciplinas. Observa-se também, que há o caso de duas ou mais disciplinas trabalharem em torno de um único tema, mas independentemente uma da outra, caso que se aproxima da multidisciplinaridade.

Ainda se vislumbram situações que, no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, a investigação suscita o surgimento de conceitos de outras

[2] SETTI; VERTUAN (2016a, 2016b).

disciplinas. Finalmente, observa-se em algumas atividades de Modelagem um único foco, um único problema, onde as diferentes disciplinas contribuem de modo conjunto e integrado, com seus conhecimentos, para resolver este problema.

Em atividades de Modelagem Matemática os conhecimentos acabam sendo utilizados e reinventados, ressignificados à medida que são trabalhados de modo não isolado, mas de modo integrado. É nesse sentido que vislumbramos a interdisciplinaridade: quando uma disciplina não está a serviço da outra, mas trabalham e atuam juntas. Assim, cada professor contribui com a atividade de acordo com sua perspectiva, desde o planejamento até a execução, promovendo, deste modo, o desenvolvimento do conhecimento em todas disciplinas, sem aparente grau de importância.

Das leituras realizadas, concluímos que em todos os trabalhos de Modelagem consultados nos anais de eventos, o objetivo comum era promover a integração de duas ou mais disciplinas. Esta integração se diferencia de acordo com as características de interdisciplinaridade elencadas nas atividades, apresentando desde o uso de conceitos de outra disciplina até a efetiva participação de diversos professores de diferentes disciplinas em prol da resolução de um problema.

Nossa compreensão é de que para que o trabalho seja efetivamente interdisciplinar deve-se haver uma "interação entre duas ou mais disciplinas" (JAPIASSU, 1976) mas, em concordância com Tomaz e David (2008, p. 16), entendendo que "a interdisciplinaridade poderia ser alcançada quando os conhecimentos de várias disciplinas são utilizados para resolver um problema ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista".

Neste contexto, a atividade de Modelagem, ao partir de uma situação da realidade, necessariamente envolve mais de uma área do conhecimento (não necessariamente uma disciplina escolar, mas área do conhecimento), pois a realidade é interdisciplinar. Todavia, para este trabalho ser efetivamente interdisciplinar no que tange às disciplinas, as disciplinas envolvidas (e seus professores) devem contribuir cada qual com seus conhecimentos, promovendo, deste modo, a aprendizagem interdisciplinar.

Deste modo, tomando as categorizações que foram construídas e verificadas na literatura para a interdisciplinaridade, faz sentido pensar as atividades de Modelagem Matemática como atividades interdisciplinares. Isto porque, necessariamente, ao trabalhar com Modelagem Matemática, lidamos com outra área do conhecimento, independentemente dessa área do conhecimento ser disciplina ou não na escola.

Sugerimos a leitura dos artigos a seguir:

SETTI, Elenice Josefa Kolancko. VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Que interdisciplinaridade se verifica nos trabalhos de Modelagem Matemática? In: Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, 7, 2016. Londrina: **Anais...** Londrina: SBEM, 2016.

SETTI, Elenice Josefa Kolancko. VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Um olhar para a interdisciplinaridade presente nos trabalhos de Modelagem Matemática apresentados nas últimas seis edições da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM). In: Simpósio Nacional de Ensino e Aprendizagem, 3, 2016. Londrina: **Anais...**Londrina: UTFPR, 2016.

ORIENTAÇÕES DE DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

- **Oriente os alunos a sentarem em grupos**:
  - É importante que a atividade de Modelagem seja desenvolvida pelos alunos organizados em grupo. Deste modo, poderão trocar ideias e conhecimentos.
- **Há três possibilidades de iniciar uma atividade de Modelagem Matemática**:
  - Você pode apresentar aos alunos, o tema, informações sobre o tema juntamente com os dados necessários e o problema. Deste modo, os alunos se envolveriam somente na resolução do problema e obtenção do modelo matemático (BARBOSA, 2004);
  - Você pode apresentar o tema juntamente com o problema. Assim, os alunos deverão buscar as informações e os dados necessários (BARBOSA, 2004);
  - Você pode ainda apresentar somente o tema aos alunos, que por sua vez, deverão buscar as informações e formular o problema, para então resolvê-lo (BARBOSA, 2004).
  - E, por fim, há a possibilidade de os alunos escolherem um tema de interesse, buscarem informações e dados a respeito do tema escolhido, formular o problema e resolvê-lo obtendo o modelo matemático (BURAK, 2004).

- O modo como decidirá como irá iniciar uma atividade de Modelagem, dependerá das especificidades de sua turma e de sua escola, assim como do tempo disponível e dos objetivos que quer alcançar.
- É importante tomar alguns cuidados na mediação da atividade para não a descaracterizar como sendo de Modelagem Matemática:
  - Inicialmente, deixar que os alunos investiguem a situação.
  - Permitir que eles busquem caminhos, mesmo que você acredite que não seja o melhor, ou que seja diferente do que você tomaria. Talvez, a partir da abordagem de um grupo de alunos, surja discussões muito ricas.
  - Reservar um momento de socialização das resoluções dos grupos.

- Durante o desenvolvimento da atividade pode surgir dúvidas sobre conceitos matemáticos nos grupos. O professor pode, e deve, explicar o conceito no grupo ou no quadro.

SISTEMATIZAÇÃO DOS CONTEÚDOS:

- É muito importante sistematizar os conteúdos considerados novos para a turma que emergirem numa atividade de Modelagem. Pois é com a sistematização que o aluno terá condições de utilizar os conhecimentos desenvolvidos na atividade em outras situações. No entanto, em Modelagem, não é o professor falando para os alunos, mas sim o professor falando com os alunos.

- É importante também, a participação de outros professores no desenvolvimento de atividades de Modelagem. Pois quando o professor de outra disciplina estiver engajado na investigação, o conteúdo pode ser melhor abordado, pois todos os conhecimentos são igualmente importantes. Caracterizando assim a interdisciplinaridade vislumbrada na categoria 2.

- Quando sistematizamos os conteúdos, trabalhamos de modo diferenciado dos livros didáticos. Por exemplo: ao se trabalhar função a partir de uma demanda de uma atividade de Modelagem, trabalha-se diante das características das funções e da influência dos parâmetros numéricos das funções, diferente do modo como geralmente é apresentado aos alunos, pela atribuição de valores à expressão algébrica, construção de tabela e conversão da tabela em gráfico.

ATIVIDADES DE MODELAGEM

ATIVIDADE 1

O Homem que Calculava – Malba Tahan

[...] Contente com os lucros que obteve, o meu bondoso patrão, acaba de conceder-me quatro meses de repouso e vou, agora, a Bagdá, pois tenho desejo de visitar alguns parentes e admirar as belas mesquitas e os suntuosos palácios da cidade famosa. E para não perder tempo, exercito-me durante a viajem, contando as árvores que ensombram esta região, as flores que a perfumam, os pássaros que voam no céu entre nuvens.
E, apontando para uma velha grande figueira que se erguia à pequena distância, prosseguiu:
- Aquela árvore, por exemplo, tem duzentas e oitenta e quatro ramos.
Sabendo-se que cada ramo tem, em média, trezentas e quarenta e sete folhas, é fácil concluir que aquela árvore tem um total de noventa e oito mil, quinhentas e quarenta e oito folhas! Estará certo, meu amigo?
- Que maravilha! – exclamei atônito. – É inacreditável possa um homem contar, em rápido volver d'olhos, todos os galhos de uma árvore e as flores de um jardim! Tal habilidade pode proporcionar, a qualquer pessoa, seguro meio de ganhar riquezas invejáveis!
- Como assim? – estranhou Beremiz. – Jamais me passou pela ideia que se pudesse ganhar dinheiro, contando aos milhões folhas de árvores e enxames de abelhas! Quem poderá interessar-se pelo total de ramos de uma árvore ou pelo número do passaredo que cruza o céu durante o dia?
- A vossa admirável habilidade – expliquei – pode ser empregada em vinte mil casos diferentes. Numa grande capital, como Constantinopla, ou mesmo Bagdá, sereis auxiliar precioso para o governo. Podereis calcular populações, exércitos e rebanhos. Fácil vos será avaliar os recursos do país, o valor das colheitas, os impostos, as mercadorias e todos os recursos do Estado. Asseguro-vos – pelas relações que mantenho, pois sou bagdáli1 – que não vos será difícil obter lugar de destaque junto ao glorioso califa Al Motacém (nosso amo e senhor). Podeis talvez exercer o cargo de vizir-tesoureiro ou desempenhar as funções de secretário da Fazenda muçulmana. [...] (O Homem que Calculava – Malba Yahan, pg. 7)

VAMOS PENSAR UM POUQUINHO!!!

- Como será que Beremiz, o homem que calculava, conseguia descobrir a quantidade de galhos e folhas de uma árvore? Será que ele utilizava algum artifício matemático? Alguma regra? Escreva o que vocês pensam sobre isso?

- Será que é o mesmo método utilizado pelos organizadores de shows para ter ideia do público presente? Escreva o que vocês pensam sobre isso?

- Como podemos estimar a quantidade de pessoas presentes em um show ou manifestação?

RELATO DO DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE 1 COM OS ALUNOS DO CURSO TÉCNICO EM INFORMÁTICA

No decorrer de algumas semanas já vinha conversando com os alunos que desenvolveríamos algumas atividades diferenciadas, expliquei a dinâmica de uma aula com atividades de Modelagem, seus objetivos e importância.

No dia 14 de junho de 2016, cheguei em sala e solicitei que os alunos se sentassem em grupos de 5 integrantes. Como a turma era numerosa, 46 alunos, eles se atrapalharam um pouco, necessitando de ajuda. Depois que os alunos estavam em grupos, iniciei a conversa retomando o assunto do livro. A reação dos alunos não foi das melhores. Por se tratar de um livro de "Matemática" já iniciaram a leitura com receio. Disseram que não entenderam, que o livro era muito difícil. Um aluno chegou a dizer: *"Eu odeio Matemática, como que eu vou ler um livro de Matemática?*". Questionei-os sobre se tentassem uma segunda leitura, após as atividades alusivas ao Dia da Matemática com a apresentação do teatro, vídeos e paródias, se eles acreditavam que a compreensão seria melhor. Alguns alunos disseram acreditar que sim.

Continuamos então a fazer um *feedback* do contexto da história, especificamente dos trechos que tratavam de contagem de folhas, camelos, etc. Sempre questionando os alunos em como eles achavam que "o homem que calculava" conseguia determinar grandes quantidades com tanta rapidez.

Distribui entre os alunos a atividade 1 (disponível para impressão no site).

Passamos a discutir e a levantar hipóteses de como ele poderia realizar esses cálculos e como hoje poderíamos utilizar a mesma estratégia para determinar a quantidade de pessoas em um show, passeata, palestra ou manifestação.

Uma aluna sugeriu que Beremiz contava inicialmente a quantidade de folhas em um galho, depois contava a quantidade de galhos e multiplicava os valores. Deste modo, chegaram à conclusão que, para estimar a quantidade de pessoas em certo local, primeiramente devemos saber quantas pessoas estão presentes em uma região de área igual a $1m^2$, depois calcular a área do local e, por fim, multiplicar essa quantidade de pessoas pela área do local.

Questionei-os então, sobre quantas pessoas cabem em $1m^2$. Alguns disseram oito, outros seis. Em seguida, questionei-os se em qualquer situação a quantidade de pessoas por metro quadrado será sempre a mesma. Sugeri então que construíssem uma região quadrada cuja área é de $1m^2$ no chão da sala de aula e determinassem quantas pessoas caberiam nela.

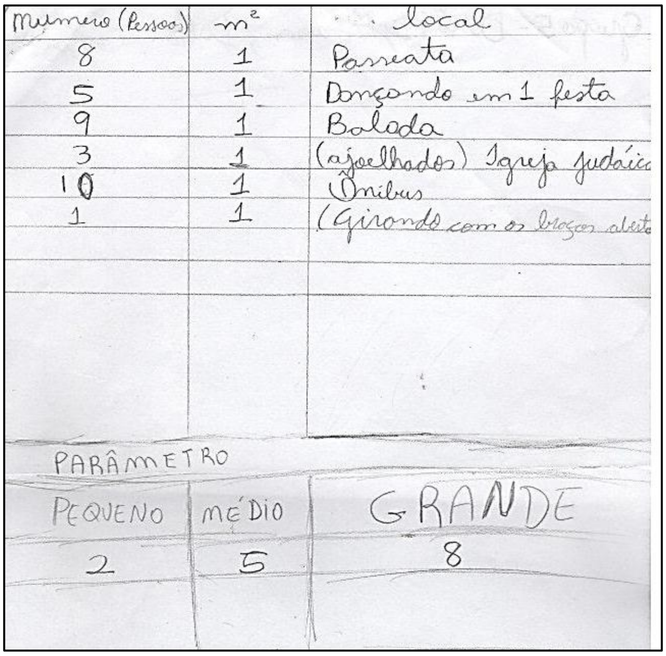
Deste modo, cada grupo de alunos construiu a sua região quadrada cuja área era de $1m^2$ utilizando fita métrica ou régua e fita crepe. Eles mesmos, por experimentação, determinaram quantas pessoas caberiam em uma área de $1m^2$ em várias situações, de pequenas, médias e grandes aglomerações conforme apresentado nas Fotografias 1, 2 e 3.

Fotografia 1 - Alunos medindo os segmentos para formar a região quadrada de 1 metro de lado
Fonte: arquivos da autora.

Fotografia 2 - Alunos medindo os segmentos para formar a região quadrada de 1 metro de lado
Fonte: arquivos da autora.

Fotografia 3 - Grupo de alunos determinando experimentalmente a quantidade de pessoas que cabem em 1 m^2
Fonte: arquivo da autora.

Após a experimentação, os alunos voltaram aos grupos e passaram a socializar os valores que os demais grupos definiram. Os alunos pensaram em quantidades de pessoas por metro quadrado em diferentes locais e em diferentes situações (Figura 1).



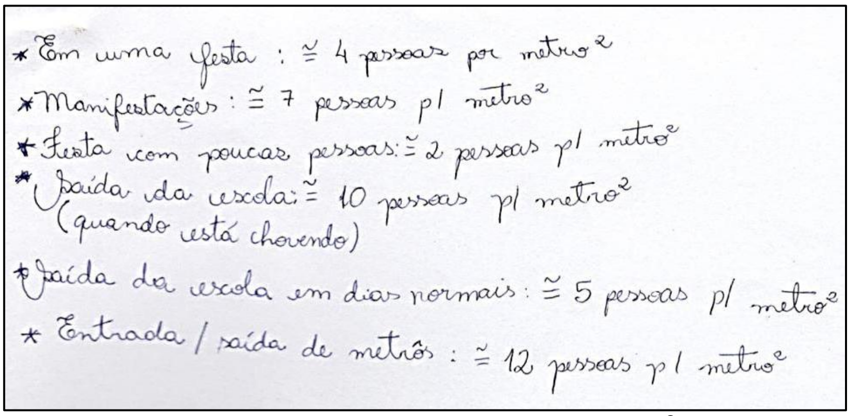
Número (Pessoas)	m²	Local
8	1	Passeata
5	1	Dançando em 1 festa
9	1	Balada
3	1	(ajoelhados) Igreja judáic
10	1	Ônibus
1	1	(Girando com os braços abert

PARÂMETRO

PEQUENO	MÉDIO	GRANDE
2	5	8

Figura 1 - Registro do grupo 1: Aglomeração de pessoas em 1m² em diferentes situações
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 1, o grupo 1 apresentou seis situações diferentes onde há aglomeração de pessoas: passeata, dançando em uma festa, balada, ajoelhados em uma igreja, no ônibus e girando com os braços abertos. A partir de experimentações no “metro quadrado construído” estimaram quantas pessoas caberiam em uma área de 1m² em cada situação. Em seguida, este grupo generalizou os parâmetros em pequeno com duas pessoas, médio com cinco pessoas e grande com oito pessoas.



* Em uma festa: ≅ 4 pessoas por metro²
* Manifestações: ≅ 7 pessoas p/ metro²
* Festa com poucas pessoas: ≅ 2 pessoas p/ metro²
* Saída da escola: ≅ 10 pessoas p/ metro²
(quando está chovendo)
* Saída da escola em dias normais: ≅ 5 pessoas p/ metro²
* Entrada / saída de metrôs: ≅ 12 pessoas p/ metro²

Figura 2 - Registro do grupo 4: Aglomeração de pessoas em 1m² em diferentes situações.
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 2, o grupo 4 apresentou situações diferentes das apresentadas pelo grupo 1. Observa-se que cada grupo pensou em locais que seus membros costumam frequentar ou até mesmo aproveitaram para expressar a dificuldade de algum familiar ou amigo que mora em outra cidade, como quando apresentam a situação do metrô, que não existe na cidade de Assis Chateaubriand.

Assim, após a socialização de todos os grupos, definiram, em consenso, um parâmetro para quantidade de pessoas por metro quadrado para pequenas, médias, grandes e muito grandes aglomerações (Quadro 11). Essa definição se deu levando em conta que quando há aglomeração de pessoas, esta, dificilmente, é homogênea. E ainda, há casos em que a aglomeração é grande e há casos que é pequena, ou seja, tem muitas pessoas no local ou tem poucas pessoas no local. Neste sentido, os alunos pensaram nestes quatro parâmetros: pequena concentração, média concentração, grande concentração e muito grande concentração, para poder pensar e modelar diferentes situações.

GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3
Festa: 4 pessoas Metrô: 12 pessoas Escola (chuva): 10 pessoas Escola (sem chuva): 5 pessoas Manifestação: 7 pessoas Festa (pouca): 2 pessoas	Palco: 12 Saída escola: 6 Manifestação: 8	Manifestação: 8 Festa: 6 Show (palco): 9
GRUPO 4	**GRUPO 5**	**GRUPO 6**
Dançando: 4 Palco: 10 Palco (longe): 5 Manifestação: 7 Parados: 10	Passeata: 8 Dançando: 5 Balada: 9 Ajoelhado na igreja: 3 Ônibus: 10 Girando com os braços abertos: 1	Perto palco: 6 Dançando: 2 Desfile a pé: 1
GRUPO 7	**GRUPO 8**	**GRUPO 9**
Show (frente): 7 Show (meio): 5 Show (fundo): 3 Festa: 5 Manifestação: 8 Desfile: 4	Perto do palco (dançando): 6 Longe: 3 Manifestação: 7 *Rave*: 6 a 8 Desfile: 2 a 3	Show frente: 7 Show meio: 6 Show fundo: 2 Ônibus: 6 Fila da "Break's"[3]: 5
PARÂMETRO PARA A ATIVIDADE (negociado entre todos os alunos)		
Para uma aglomeração: Pequena: 2 pessoas Média: 5 pessoas Grande: 8 pessoas Muito grande: 10 pessoas		

Quadro 5 - Parâmetros de todos os grupos referentes à aglomeração de pessoas em 1m^2
Fonte: elaborado pela autora.

[3] Lanchonete do Instituto que os alunos frequentam nos intervalos das aulas e no período da tarde.

A maioria dos grupos pensou em um parâmetro para festas ou shows. Neste sentido, a partir dos parâmetros determinados, os alunos passaram a investigar a seguinte questão:

Como determinar a quantidade de pessoas presentes em um show no Centro de Eventos Ângelo Micheletto de Assis Chateaubriand a partir de uma foto aérea do show?

Na semana seguinte tivemos “Semana de Cursos” e os alunos foram assistir a uma palestra no auditório durante a aula de Matemática. Deste modo, a continuação da atividade de Modelagem ocorreu somente na semana seguinte, no dia 28 de junho.

Assim, por haver se passado duas semanas, inicialmente realizamos um *feedback* da última aula para podermos nos situar. Em seguida, com os alunos já sentados em grupo, disse a eles que agora teríamos que determinar um modelo matemático para responder ao nosso problema que era estimar a quantidade de pessoas presentes em um determinado local.

Questionei-os quanto a que aspectos deveríamos levar em consideração. Um aluno disse que o espaço do show e outro disse que o tipo de show. Um terceiro aluno argumentou que bastaria contar os ingressos vendidos. Contra argumentei então no caso de o show ter entrada livre, que é o que aconteceu nas últimas edições da ExpoAssis[4].

Então um aluno disse que deveríamos levar em consideração o tamanho do lugar. Neste momento questionei: Quantos metros quadrados tem o espaço para shows no Parque de Exposições de Assis?

Solicitei que discutissem nos grupos como faríamos para determinar a área de um determinado local. Disponibilizei 15 minutos para que pudessem discutir e depois socializar o que fizeram.

Os alunos ficaram alguns minutos sem reação. Após alguns questionamentos e incentivos iniciaram as discussões nos grupos. Chamavam-me para esclarecer algumas dúvidas e voltavam a pensar. Projetei então uma foto (Fotografia 4) de um show que aconteceu no Centro de Eventos Ângelo Micheletto em Assis Chateaubriand, local onde ocorre a ExpoAssis.

[4] ExpoAssis – Festa e Exposição do município de Assis Chateaubriand-Paraná.

Fotografia 4 - Foto aérea de um show no Centro de Eventos Ângelo Micheletto (projetada pela professora)
Fonte: http://mapio.net/pic/p-20930388/ - acesso em 08/03/2017.

Solicitei que observassem e fizessem comentários sobre a imagem. Alguns alunos observaram que as pessoas se aglomeravam mais perto do palco e à medida que ficavam mais longe do palco a concentração era menor. Após o tempo se encerrar, iniciamos a socialização do que os alunos fizeram.

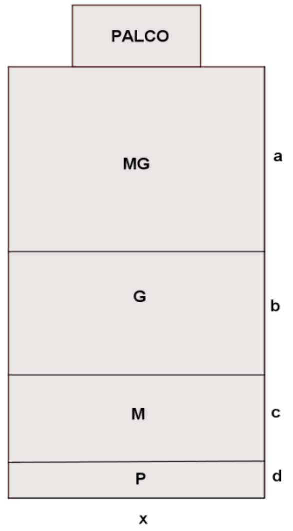
Cada grupo falou como pensou para calcular a quantidade de pessoas num determinado local. No entanto, os alunos pensaram somente em um local retangular, não se atentaram em observar a forma geométrica do espaço. Todos os grupos pensaram mais ou menos da mesma forma, calcular a área do local e multiplicar pela quantidade de pessoas por metro quadrado em cada região. Na exposição dos alunos, eles explicavam como procederiam para resolver o problema. No entanto, não apresentaram um modelo algébrico para representar a quantidade de pessoas em um determinado local. Desse modo, a partir das estratégias que os alunos apresentaram, passamos a construir o modelo algébrico juntos, pensando em variáveis para representar as dimensões do local retangular, como os alunos haviam investigado (Figura 3).

MG = Concentração muito grande = 10 pessoas por m^2

G = Concentração grande = 8 pessoas por m^2

M = Concentração média = 5 pessoas por m^2

P = Concentração pequena = 2 pessoas por m^2



$$A = ax + bx + cx + dx$$

Onde A é a área total da região retangular.

Figura 3 - Modelo matemático construído para determinar a área de um local retangular
Fonte: elaborado pela autora.

De acordo com os parâmetros que os alunos determinaram experimentalmente:

$$MG = 10\ pessoas; G = 8\ pessoas; M = 5\ pessoas\ e\ P = 2\ pessoas$$

Assim, o modelo matemático para estimar a quantidade de pessoas em um local retangular será:

$$Tp = 10ax + 8bx + 5cx + 2dx$$

Onde T_p é a quantidade total estimada de pessoas em um local retangular.

Colocando a variável x em evidência, temos:

$$Tp = x(10a + 8b + 5c + 2d)$$

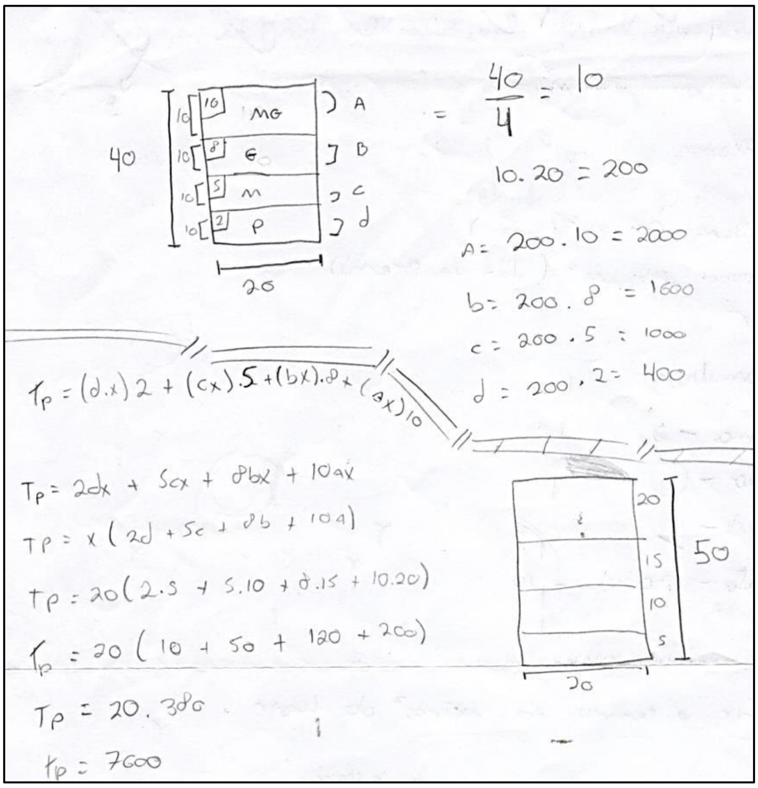


Figura 4 - Registro do grupo 9 - Modelo matemático encontrado para determinar a concentração de pessoas em um local retangular e uma possível solução para o problema Fonte: registro dos alunos.

Na figura 4, observamos o registro dos alunos do grupo 9. Inicialmente, eles dividem o local retangular em quatro faixas representando as diferentes aglomerações. No entanto, consideram as quatro regiões com tamanhos iguais e utilizam um valor estimado de 10 metros para cada faixa calculando a quantidade de pessoas em cada faixa. Em seguida, decidem considerar faixas de tamanhos diferentes com medidas estimadas, calculando a quantidade de pessoas presentes em um suposto show.

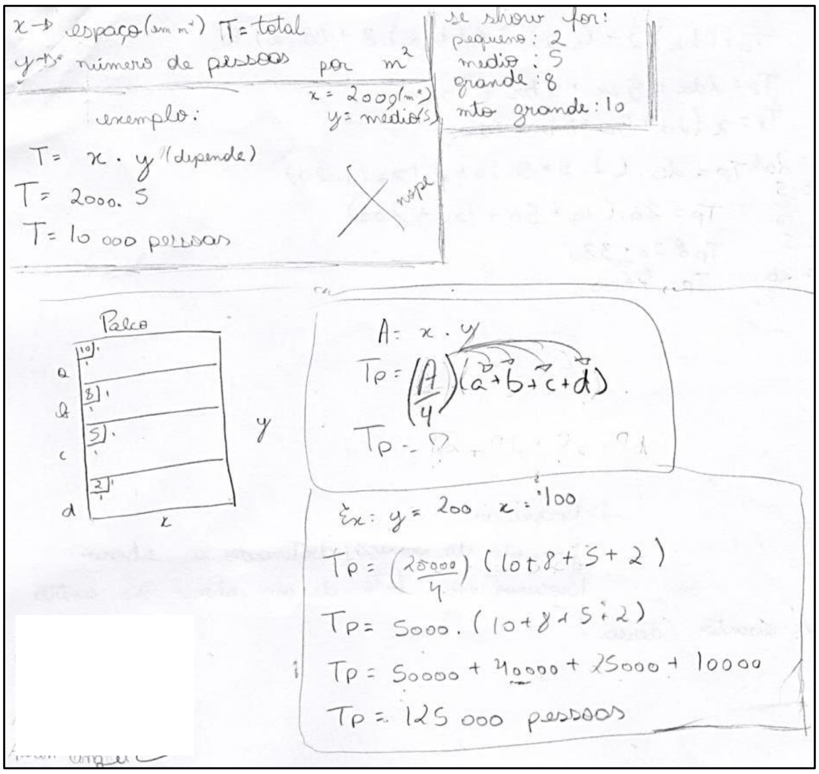
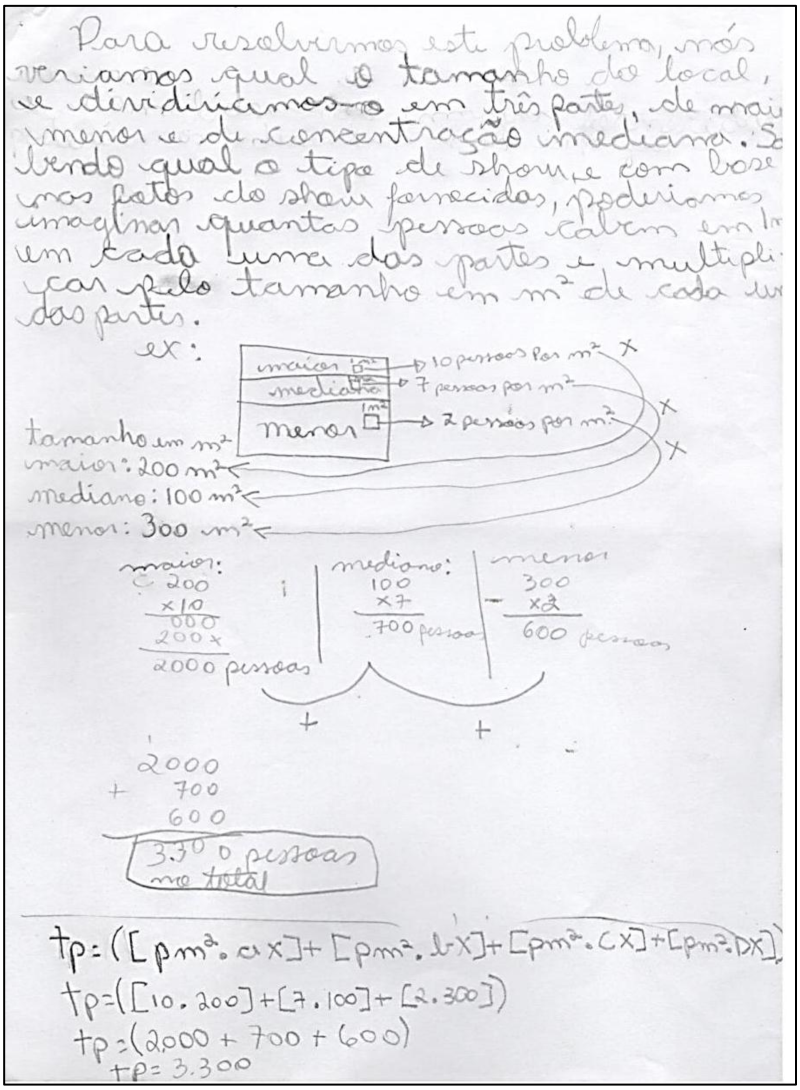


Figura 5 - Registro do grupo 2 - Modelo matemático encontrado para determinar a concentração de pessoas em um local retangular e uma possível solução para o problema Fonte: registro dos alunos.

Na figura 5 observamos o registro do grupo 2. A princípio eles consideram x como o espaço em m^2, y o número de pessoas por m^2 e T o total de pessoas no local. Preocupam-se em apresentar um exemplo supondo a área do local e aglomeração média, encontrando o total de pessoas nessas condições. Em seguida apresentam um modelo algébrico no qual consideram a área da região retangular ($A = xy$, onde agora x é a largura do local e y é o comprimento) dividida por quatro para multiplicar com as diferentes aglomerações. Novamente apresentam um exemplo fictício.



Para resolvermos este problema, nós veríamos qual o tamanho do local, e dividiríamos-o em três partes, de maior, menor e de concentração mediana. Sabendo qual o tipo de show, e com base nos fatos do show fornecidos, poderíamos imaginar quantas pessoas cabem em 1m² em cada uma das partes e multiplicar pelo tamanho em m² de cada uma das partes.

ex:

maior → 10 pessoas por m²
mediano → 7 pessoas por m²
menor → 2 pessoas por m²

tamanho em m²
maior: 200 m²
mediano: 100 m²
menor: 300 m²

maior: 200 × 10 = 2000 pessoas
mediano: 100 × 7 = 700 pessoas
menor: 300 × 2 = 600 pessoas

2000 + 700 + 600 = 3.300 pessoas no total

tp=([pm².aX]+[pm².bX]+[pm².cX]+[pm².DX])
tp=([10.200]+[7.100]+[2.300])
tp=(2000 + 700 + 600)
tp= 3.300

Figura 6 - Registro do grupo 5: Modelo matemático encontrado para determinar a concentração de pessoas em um local retangular e uma possível solução para o problema
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 6, o grupo 5 apresenta o plano de resolução de forma escrita apresentando um exemplo em seguida. Logo após, apresenta a formalização do que escreveu em forma algébrica e a resolução com dados fictícios.

No entanto, após a socialização dos grupos, os questionei se o local destinado ao público no Centro de Eventos Ângelo Micheletto era realmente retangular. Os alunos não souberam responder. Apesar de alguns conhecerem o local, não se lembravam do formato. Sugeri que pesquisassem. Um aluno sugeriu que olhassem no *Google Maps.* No entanto, a aula já estava terminando. Então, pedi que pesquisassem em casa o formato do local e procurassem uma foto de um show que tivesse ocorrido neste local.

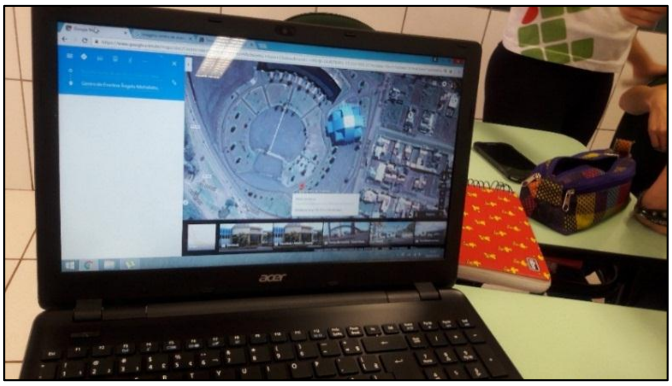
Nas próximas duas semanas, precisei realizar uma avaliação de um conteúdo que havíamos estudado anteriormente para poder fechar o conceito da disciplina, visto que o bimestre estava se encerrando. Deste modo, retomamos a atividade de Modelagem somente após as férias de julho.

Retomamos então a atividade de Modelagem no dia 2 de agosto. Entreguei aos grupos as folhas com as anotações dos dois últimos encontros de Modelagem, para que pudessem retomar a investigação e retomei o seguinte questionamento:

Como determinar a quantidade de pessoas presentes em um show no Parque de Exposições Ângelo Micheletto de Assis Chateaubriand a partir de uma foto aérea do show?

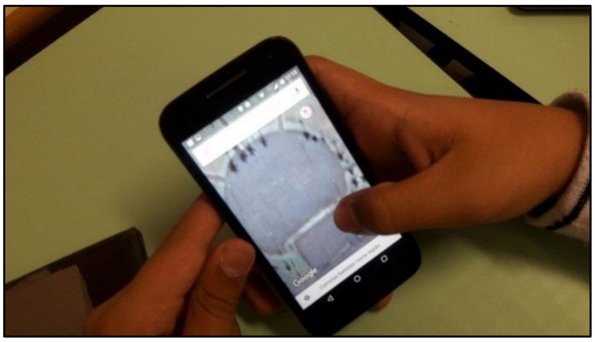
Para auxiliar os grupos, fiz duas perguntas auxiliares: *Qual é a capacidade de pessoas do local destinado ao público dos shows? A partir de uma foto aérea que os próprios alunos selecionaram, quantas pessoas possivelmente estavam presentes no show?*

Neste sentido, os grupos passaram a investigar no *Google Maps* o local destinado ao público nos shows da ExpoAssis (Fotografia 5).



Fotografia 5 - Pesquisa no Google Maps no notebook
Fonte: arquivos da autora.

Fotografia 6 - Momento do desenvolvimento da atividade nos grupos
Fonte: arquivos da autora.



Fotografia 7 - Pesquisa no Google Maps no celular
Fonte: arquivos da autora.

Após observarem que o local tinha um formato circular, passaram a investigar algumas características do círculo como: diâmetro, raio, corda e área.

Explorando o *Google Maps*, lembraram que na aula de Geografia estudaram o conceito de escala e usaram-no para determinar o raio da região circular, medindo aproximadamente o diâmetro do local na tela do notebook ou do celular com uma régua e comparando esta medida com a escala apresentada no Google Maps. Outros grupos descobriram a função medir distância no mapa online e a utilizaram para conseguir as medidas reais do local.

Após alguns momentos de discussões, sugestões, utilizaram a fórmula da área do círculo para determinar a área da região. Para determinar a capacidade de pessoas do local, alguns grupos decidiram calcular uma média de concentração, considerando os quatro parâmetros estabelecidos anteriormente. Para isso adicionaram os valores para pequena concentração (2), média (5), grande (8) e muito grande (10) e dividiram por quatro, encontrando uma concentração média de seis pessoas por m^2. Após determinarem a média, estes grupos multiplicaram pela área e determinaram aproximadamente o número de pessoas que poderiam assistir a um show no Centro de eventos. Outros grupos determinaram apenas a área do local.

Fotografia 8 – Alunos trabalhando na atividade
Fonte: arquivos da autora.

Figura 7 - Imagem do Google Maps
Fonte: adaptado pela autora a partir de print da página do Google Maps.

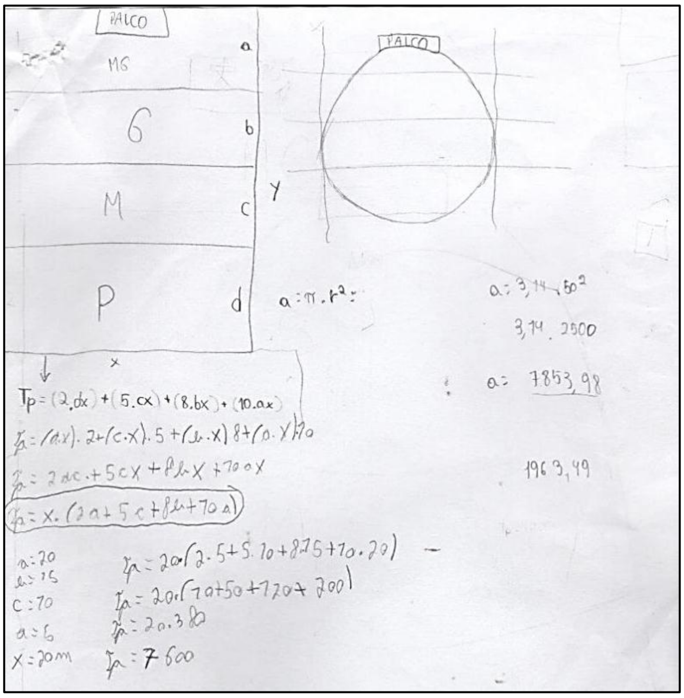


Figura 8 - Registro do grupo 4 – Modelo Matemático
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 8, observa-se no canto superior direito, a representação que os alunos fizeram do local circular. Tentaram transferir este modelo à ideia que utilizaram no modelo retangular, que consiste em dividir o local em faixas de concentração. Podemos observar logo abaixo que eles calculam a área da região circular através da fórmula matemática da área do círculo.

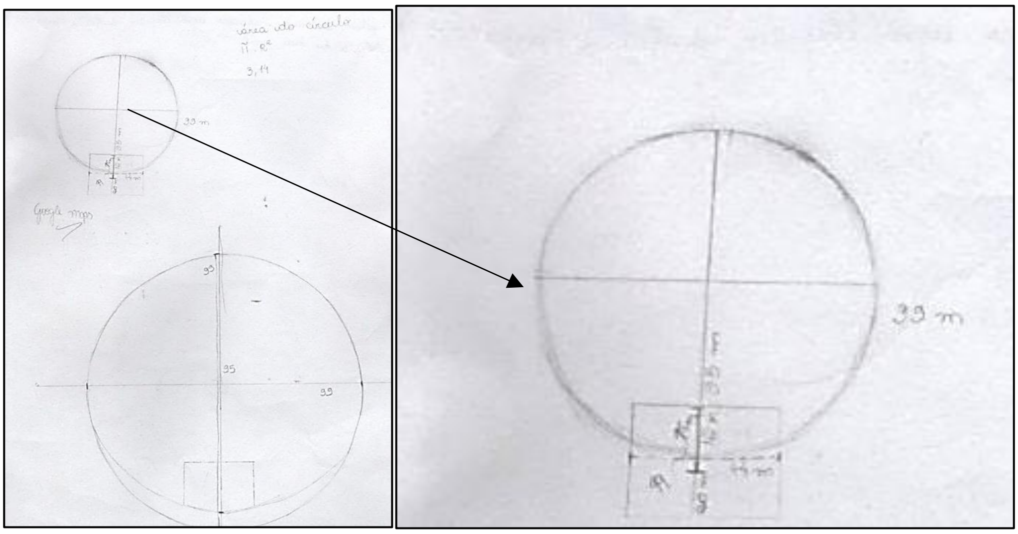


Figura 9 - Registro do grupo 1: Modelo Matemático
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 9, o grupo 1 representou o local através de um círculo e anotaram as medidas verificadas no Google Maps. Percebe-se que se preocuparam em determinar o diâmetro do local e as dimensões do retângulo destinado ao palco. No entanto, neste momento, ainda não apresentaram uma solução para o problema.

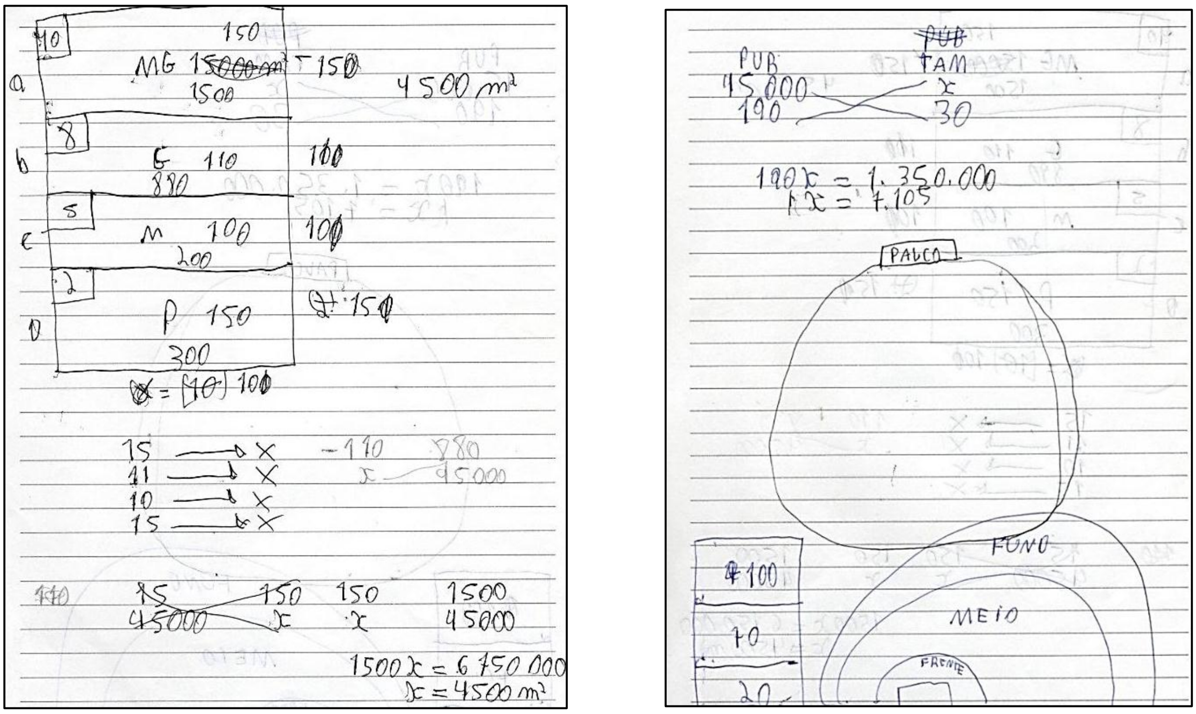


Figura 10 - Registro do grupo 7: Modelo Matemático
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 10, o grupo 7 tentou usar proporção, comparando a área retangular e a quantidade de pessoas no local. Esta última informação foi encontrada pelos alunos sobre um show da ExpoAssis em que esteve presente um público de quarenta e cinco mil pessoas. Deste modo, estimaram a área da região circular em sete mil, cento e cinco metros quadrados.

Depois, os grupos passaram a investigar as fotos dos shows que encontraram na internet para determinar o número de pessoas presentes naquela ocasião específica.

A foto escolhida pelo grupo 5 está apresentada na Fotografia 9 e sua resolução consta na Figura 11. Com o auxílio do Google Earth, os alunos determinaram o diâmetro do local e consequentemente o raio (d = 100 m e r = 50 m). A partir dessas informações, calcularam o comprimento aproximado e a área do círculo. Em seguida, utilizando os parâmetros de concentração muito grande (10 pessoas por m^2) e grande (8 pessoas por m^2), calcularam a quantidade de pessoas em cada caso, ou seja, considerando que houvesse 10 pessoas por m^2 em toda a área de show e depois considerando que houvesse 8 pessoas por m^2 em toda a área de show. Depois, calcularam a média dos dois valores encontrados, obtendo 70677 pessoas.

Fotografia 9 - Foto selecionada pelo grupo 5
Fonte: http://www.radiojornalam.com.br/not%C3%ADcias/geral/item/6648-jads-e-jadson-reuniram-grande-p%C3%BAblico-no-primeiro-dia-da-expo-assis-2015.html.

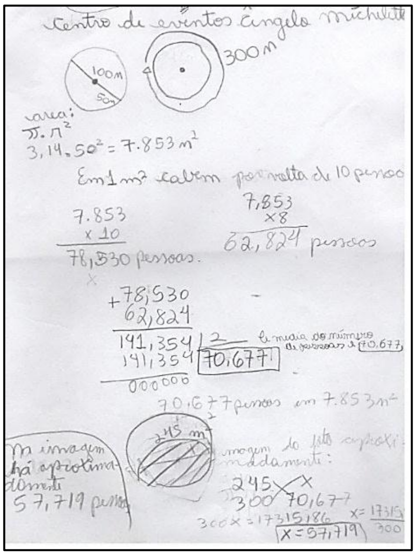


Figura 11 - Registro do grupo 5: Modelo Matemático
Fonte: registro dos alunos.

No entanto, o grupo não apresentou a informação real de quantas pessoas estavam presentes para poder realizar a validação do resultado. Neste sentido, procuramos em sites da imprensa local a imagem do grupo (Fotografia 9) e a encontramos juntamente com a estimativa de púbico (Figura 12).

Começou na quinta-feira (22) uma das maiores festas da região oeste do Paraná, a Expo Assis 2015. O evento que marca os 49 anos de Assis Chateaubriand foi aberto tendo como atração principal a dupla Jads e Jadson, que agitou o grande público com sucessos nacionais. Estima-se que pelo menos 30 mil pessoas tenham passado pelo Centro de Eventos Ângelo Micheletto no primeiro dia da festa, que tem entrada gratuita e segue até domingo (25).

Figura 12 - Recorte da notícia sobre o show de abertura da ExpoAssis 2015
Fonte: http://www.radiojornalam.com.br/not%C3%ADcias/geral/item/6648-jads-e-jadson-reuniram-grande-p%C3%BAblico-no-primeiro-dia-da-expo-assis-2015.html.

Tomando como pertinente a estimativa da notícia veiculada na Figura 12, de pelo menos 30 mil pessoas no show, tem-se um valor distante do encontrado pelo grupo. Possivelmente o problema tenha ocorrido devido à concentração considerada pelo grupo, de 9 pessoas por m^2.

Talvez, se o grupo tivesse considerado as diferentes aglomerações que definiu no início da investigação, também nessa situação, de modo que na faixa mais próxima do palco estivesse uma concentração mais alta e mais distante do palco, uma aglomeração menor, o resultado fosse mais próximo da estimativa noticiada.

Já o grupo 7 (fotografia 10), pensou em outra estratégia de resolução a partir das imagens que selecionou (fotografias 4 e 10). Os alunos calcularam uma média de ocupação e depois multiplicaram pela área do local. Em seguida, para validação, buscaram encontrar a quantidade real de pessoas presentes no show da imagem. No entanto, encontraram esta informação apenas de uma imagem. A informação encontrada foi de 50938 pessoas e a quantidade estimada pelos alunos foi de 48550 pessoas. O resultado foi considerado satisfatório pelos alunos.

Fotografia 10 - Foto aérea do Centro de eventos Ângelo Micheletto
Fonte: https://www.opresente.com.br/noticia/show-de-amado-batista-encerra-a-expo-assis-2014-com-recorde-de-publico. Acesso em 28/06/2016.

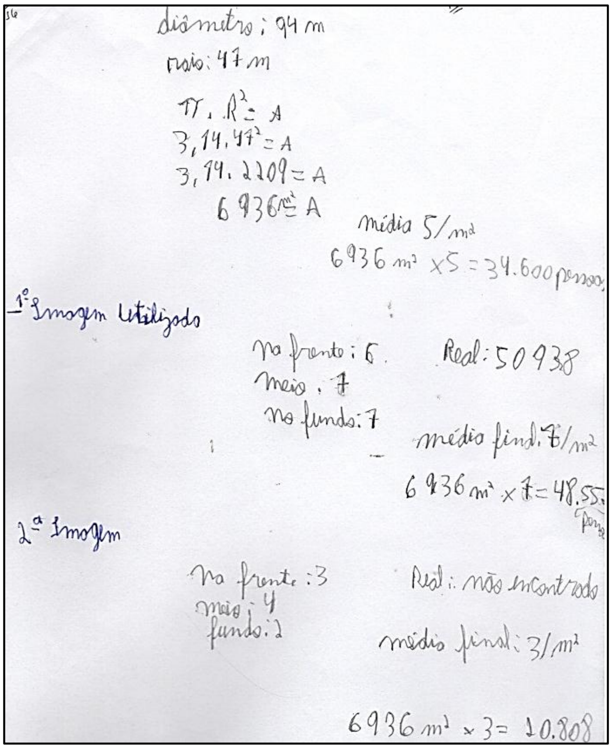
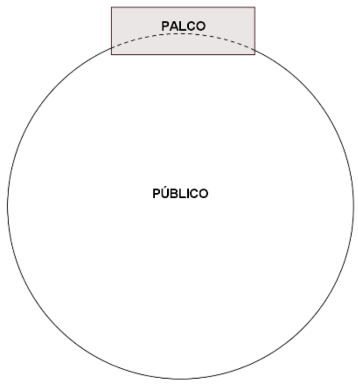


Figura 13 - Resolução do grupo 7
Fonte: registro dos alunos.

A seguir apresentamos a representação do modelo matemático para a área circular desenvolvido pela maioria dos grupos.



$$A_C = \pi \cdot r^2 \quad ; \; A_c = \textit{área do círculo}$$

$$T_p = \pi \cdot r^2 \cdot c \quad ; \; T_p = \textit{total de pessoas}; \; c = \textit{concentração média de pessoas}$$

Figura 14 - Modelo Matemático para concentração de pessoas em um local circular
Fonte: elaborado pela autora.

Podemos observar que os grupos (nove ao todo) determinaram quantidades diferentes para o público presente em um show na ExpoAssis. Contudo, estas quantidades se aproximam e ainda, estão condizentes com as informações relatadas pela imprensa da região, que estimou a quantidade de pessoas no show de abertura da ExpoAssis em 30 mil pessoas e no show de encerramento em mais de 40 mil pessoas.

> Foi encerrada ontem (23) a Expo Assis 2014 com a 31ª Festa das Nações e outras atrações. A maior festa de Assis Chateaubriand foi sucesso de público e superou os cerca de 70 mil de 2013. Com entrada gratuita em todos os cinco dias, a Expo Assis teve a participação aproximadamente 90 mil pessoas, que passaram pelo Centro de Eventos Ângelo Micheletto.
>
> Destaque para o dia de abertura e o sábado (22). Na quarta-feira (19), o público chegou a cerca de 30 mil com o show da dupla Munhoz e Mariano. Já no sábado, estima-se que Amado Batista levou mais de 40 mil para o evento.

Figura 15 - Recorte da notícia de O PRESENTE
Fonte: http://www.opresente.com.br/noticia/show-de-amado-batista-encerra-a-expo-assis-2014-com-recorde-de-publico. Acesso em 18/04/2017.

Entretanto, ainda existem outras possibilidades de encaminhamento desta atividade que foram suscitadas pelos alunos, mas acabaram sendo abandonadas por necessitarem de maiores investigações. Estas possibilidades poderiam desencadear outros modelos e envolver outros conteúdos matemáticos.

A figura 16 apresenta três possibilidades: o modelo I representa uma concentração maior perto do palco e nas “bordas” do local. Isso porque ao redor deste espaço circular concentram-se barracas de comida e os alunos disseram acreditar que as pessoas se concentram perto destas barracas. No modelo II, supõe-se que não existiriam as barracas de comida, logo a atenção do público seria apenas o palco. Deste modo, as pessoas vão se concentrando mais na frente e esta concentração vai diminuindo à medida que se vai distanciando do palco, formando "meias-luas" (como dito pelos alunos). No modelo III, a situação é semelhante ao II, mas ao invés de formar meias-luas, as concentrações vão formando faixas. Das três representações apresentadas, a II é a que mais se assemelha à situação real do Centro de Eventos, de acordo com as imagens aéreas.

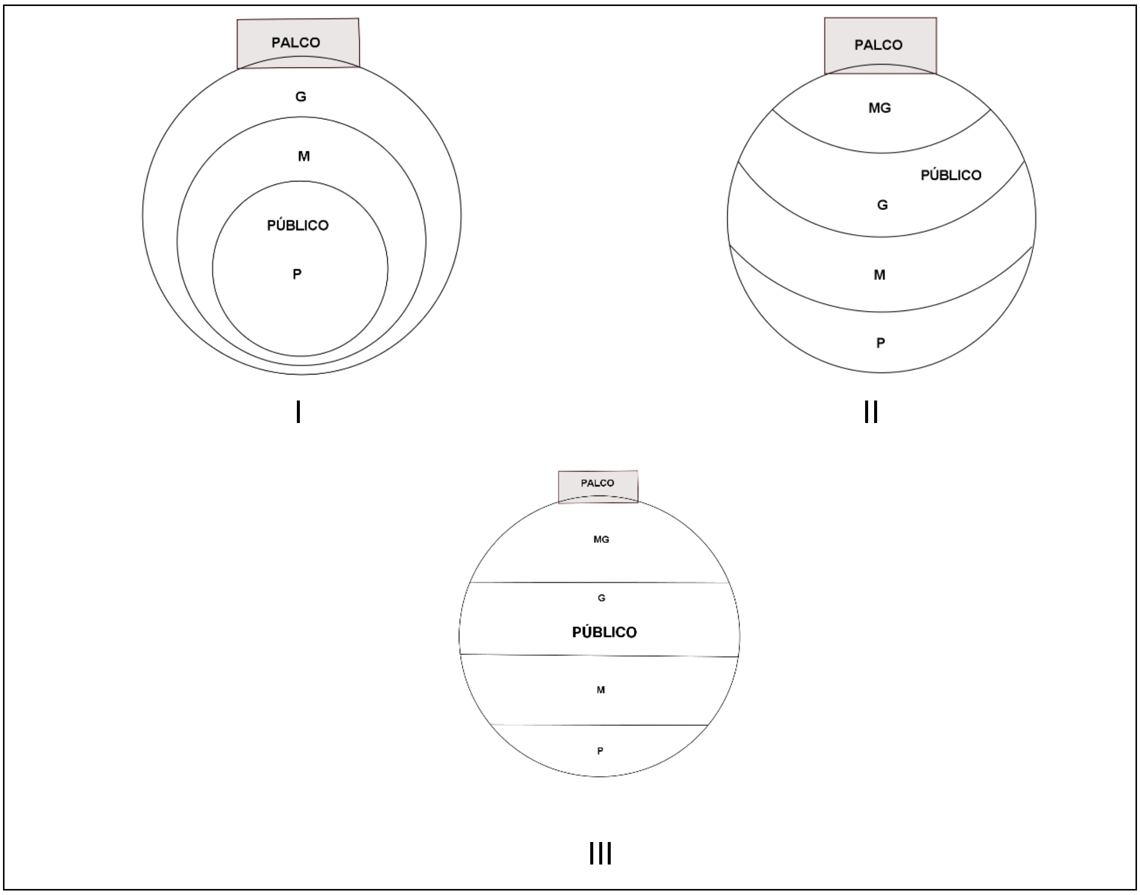
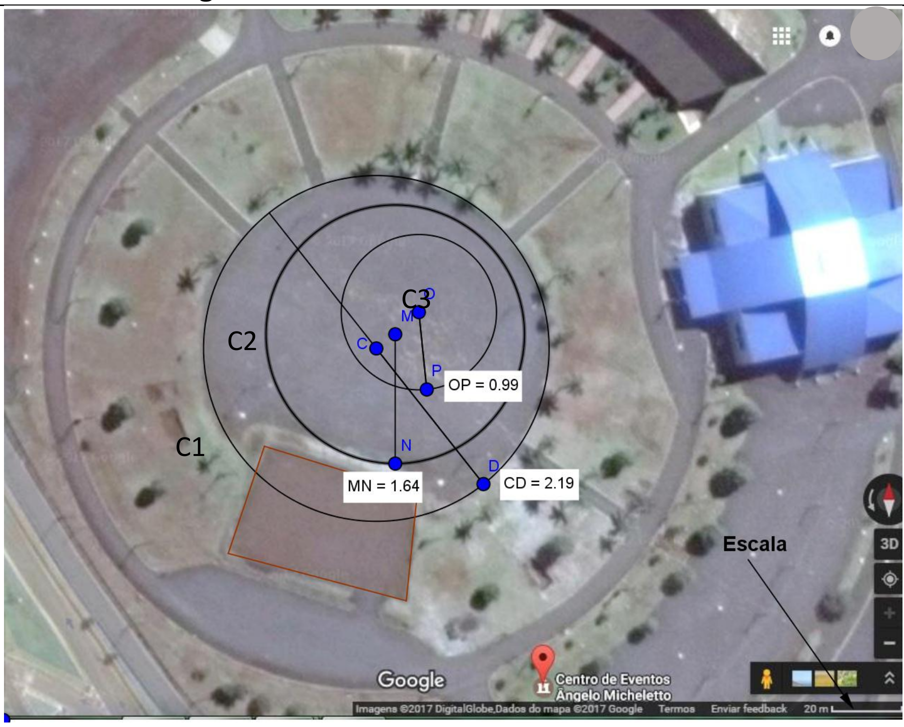


Figura 16 - Outras possibilidades de modelo para concentração de pessoas em um local circular
Fonte: elaborado pela autora.

Por vislumbrarmos que a primeira dessas situações (Modelo I) seria passível de investigação no âmbito da turma em que se deu a coleta de dados, é que nos propusemos a discutir uma possibilidade de resolução para essa configuração de aglomeração de pessoas em um show.

Outra reflexão suscitada após o desenvolvimento da atividade é que faltou voltarmos a falar de Malba Tahan no fechamento da atividade. Uma possibilidade, neste contexto, seria retomarmos a discussão acerca de como o homem que calculava possivelmente fazia para realizar suas estimativas e, de repente, a partir da atividade de Modelagem Matemática desenvolvida, buscar calcular a quantidade de folhas em uma árvore, por exemplo, um dos contextos apresentados no livro.

Sugestão de encaminhamentos – Modelo 1



Na tela do Google Maps, o diâmetro da circunferência maior é de 6 cm, como a escala (no zoom fixado) era de 20 m para um segmento de 1,2 cm (na tela), temos que o diâmetro real é de 100 metros. Capturamos a imagem da tela e a abrimos no GeoGebra. No software, construímos três circunferências que representam as delimitações das diferentes aglomerações e medimos os seus respectivos raios:

OP = 0,99 cm

MN = 1,64 cm

CD = 2,19 cm

Como CD = 2,19 cm representa o raio de 50 metros, por proporção determinados os outros dois raios:

$2{,}19 \rightarrow 50\ m$ $\qquad$ $2{,}19 \rightarrow 50\ m$

$1{,}64 \rightarrow x$ $\qquad$ $0{,}99 \rightarrow x$

$x = 37{,}4\ m$ $\qquad$ $x = 22{,}6\ m$

Área da Região G:

$$A_G = A_{C1} - A_{C2}$$

$$A_G = \pi . r1^2 - \pi . r2^2$$

$$A_G = (3{,}14 .\ 50^2) - (3{,}14 . 37{,}4^2)$$

$$A_G = 7850 - 4392$$

$$A_G = 3458\ m^2$$

Procedendo do mesmo modo para as regiões M e P, encontramos as seguintes áreas:

$$A_M = A_{C2} - A_{C3} \qquad A_P = A_{C3}$$

$$A_M = 4392 - 1604 \qquad A_P = 1604\ m^2$$

$$A_M = 2788\ m^2$$

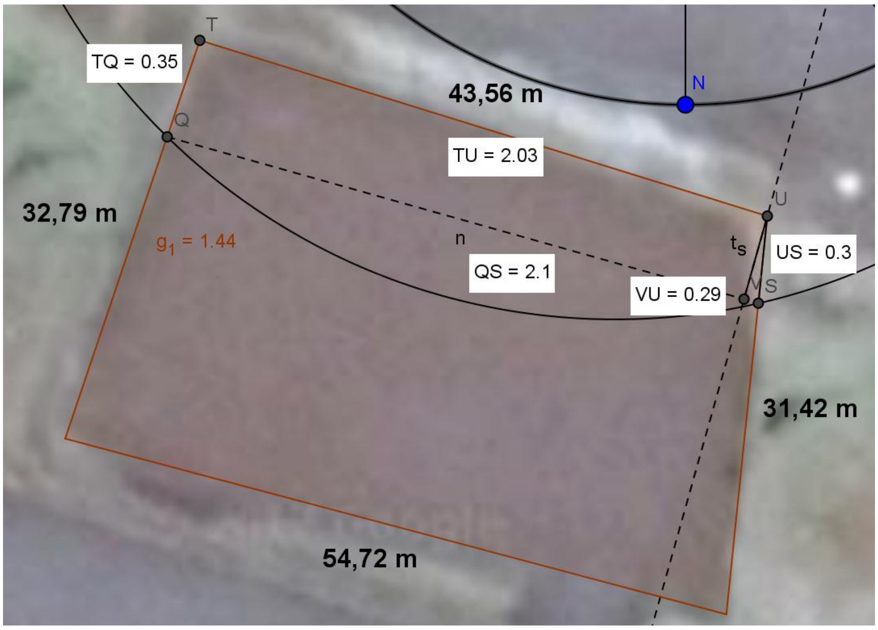
Deste modo, a concentração estimada de pessoas no local com estas características de aglomeração será de:

$$Q_P = A_G . 8 + A_M . 5 + A_P . 2$$

$$Q_P = 3458 . 8 + 2788 . 5 + 1604 . 2$$

$$Q_P = 44812\ pessoas$$

*Observa-se que uma parte do palco ocupa uma pequena área da região G. Esta parte não é ocupada pelo público e sim pela equipe do show (banda, equipe técnica). O ideal seria desconsiderar esta área.



Cálculo da área do trapézio TUSQ:

➔ Obtenção das medidas reais desconhecidas por proporção das medidas reais conhecidas:

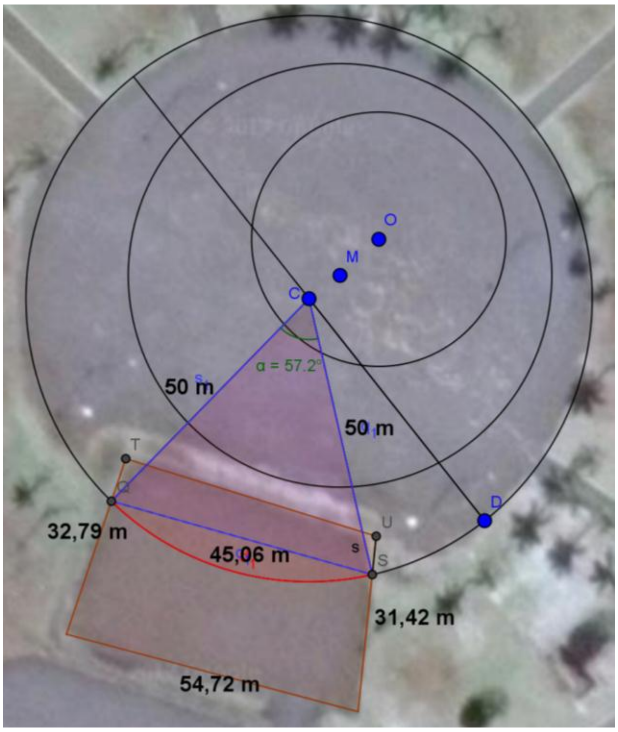
TQ = 0,35 cm → TQ = 7,51 m

US = 0,3 cm → US= 6,44 m

QS = 2,1 cm → QS = 45,06 m

UV = 0,29 cm → UV= 6,22 m

$$A_T = \frac{(B+b).h}{2} \rightarrow A_{T=}\frac{(45,06+43,56).6,22}{2} = 275,6\, m^2$$



Para obter a área da "borda" circular, calcularemos a área do setor circular QCS e dele subtrairemos a área do triângulo QCS.

$$A_B = A_{Se} - A_{Tr}$$

$$A_B = \frac{\alpha.\pi.r^2}{360} - \frac{b.h}{2}$$

$$A_B = \frac{57,2\,.\,3,14\,.\,50^2}{360} - \frac{45,06\,.\,44,6}{2}$$

$$A_B = 1247,3 - 1004,8$$

$$A_B = 242,5\, m^2$$

Deste modo, a concentração estimada de pessoas no local passaria a ser de:

$Q_P = (A_G - A_T - A_B)\,.8 + A_M.5 + A_P.2$

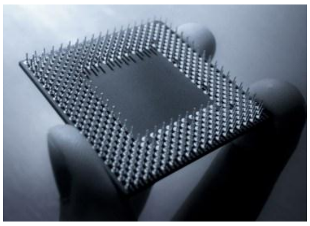
$Q_P = (3458 - 275,6 - 242,5).8 + 2788\,.5 + 1604\,.2$

$Q_P = 40667\; pessoas$

ATIVIDADE 2

DE QUE TAMANHO VAI FICAR?

Transistor ou transístor é um componente eletrônico semicondutor responsável pelo controle do fluxo de energia (elétrons) nos processadores eletrônicos. Foi inventado na década de 1950 devido a necessidade de substituir a válvula eletrônica e que fosse mais barato, mais pequeno e consumisse menos energia que as válvulas. Existem hoje diferentes tipos de transístores que estão presentes em um grande número de diferentes processadores.



A velocidade de um processador depende em grande parte da quantidade de transístores que ele possui. Para conseguir chegar a uma velocidade cada vez maior, as indústrias estão em busca de transístores cada vez menores conforme exposto no quadro a seguir:

Processador	Ano	Tamanho do transmissor (em μm)
Intel 4004	1971	15
Intel 8088	1979	3
Intel 80486	1989	1
Pentium 60 MHz	1993	0,8
Pentium 100 MHz	1994	0,6
Pentium 166 MHz	1995	0,4
Pentium 166 MHx	1997	0,35
Pentium III 350	1998	0,25
Intel Celeron 366	1999	0,22
Cyrix 3	2000	0,15
Pentium III Tualatin	2001	0,13
Pentium IV	2005	0,07
Core	2010	0,03
Core i x	2016	0,022

Quadro1: Relação entre modelo de processador, ano de lançamento e tamanho do transistor. Fonte: adaptado de VERTUAN (2013)

AS PESQUISAS CONTINUAM...

Segundo artigo da revista Exame publicado em julho de 2015, um grupo de cientistas desenvolveu um transístor tão pequeno que pode ser não apenas o menor modelo já criado, mas o menor modelo possível composto por uma única molécula. Pesquisadores dos Estados Unidos, Alemanha e Japão, utilizaram uma molécula de ftalocianina de cobre com uma dúzia de átomos de índio e um material de suporte de arsenieto de índio. Mas, antes de comemorar a conquista, e imaginar que ela dará origem a uma série de eletrônicos minúsculos, é preciso lembrar que o experimento foi realizado em laboratório, no vácuo quase total e a uma temperatura pouco acima do zero absoluto. Ou seja, a tecnologia ainda levará um bom tempo para chegar às linhas de produção, isso se ela se demonstrar viável em outras condições.

Tendo em vista a diminuição do tamanho dos transístores observada no decorrer dos anos, qual pode ser o tamanho do transístor no ano de 2020 se considerarmos o quadro 1 como referência de progressão?

RELATO DO DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE 2 COM OS ALUNOS DO CURSO TÉCNICO EM INFORMÁTICA

No dia 18 de agosto, na aula de Matemática, entreguei aos alunos a atividade impressa (Quadro 20) com uma breve descrição do transístor e a tabela com dados de 1971 até 2016, com o seguinte problema:

Tendo em vista a diminuição do tamanho dos transístores observada no decorrer dos anos, qual pode ser o tamanho do transístor no ano de 2020 se considerarmos o quadro 1 como referência de progressão?

Sugeri que os alunos "brincassem com os dados", que observassem se existia algum padrão. Sugeri também que construíssem gráficos com os dados e observassem o seu comportamento.

Os alunos, em grupo, começaram a analisar o comportamento dos dados da tabela 1. Alguns grupos recorreram ao GeoGebra[5] (Gráfico 2) e outros à planilha eletrônica Calc[6] (Gráfico 1) para construir o gráfico correspondente aos pares formados pelos anos e pelos tamanhos do transístor, e outros tentaram esboçar o gráfico no papel (Figura 18).

Tabela 1 - Progressão do tamanho dos transístores

Ano	*T*	*Tamanho*
1971	1	15
1979	9	3
1989	19	1
1993	23	0,8
1994	24	0,6
1995	25	0,4
1997	27	0,35
1998	28	0,25
1999	29	0,22
2000	30	0,15
2001	31	0,13
2005	35	0,07
2010	40	0,03
2016	46	0,022

Fonte: elaborado pela autora.

[5] Software livre de Geometria dinâmica.
[6] Planilha eletrônica do LibreOffice.

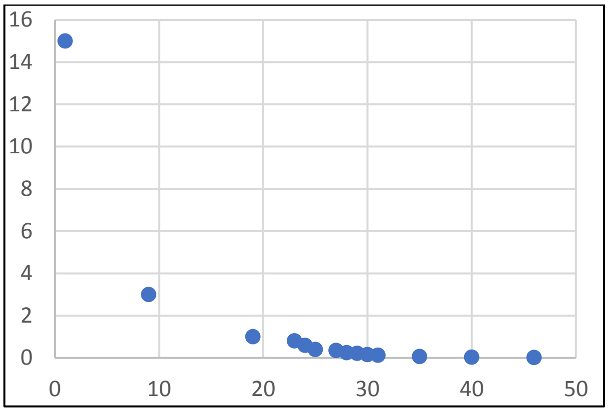


Gráfico 1 - Tamanho do transístor em μm no decorrer dos anos (1971 – 2016): gráfico construído na planilha eletrônica
Fonte: elaborado pela autora.

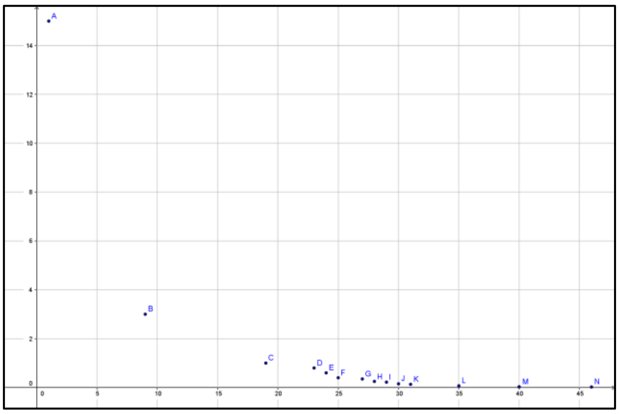


Gráfico 2 - Tamanho do transístor em μm no decorrer dos anos (1971 – 2016): gráfico construído no GeoGebra
Fonte: elaborado pela autora.

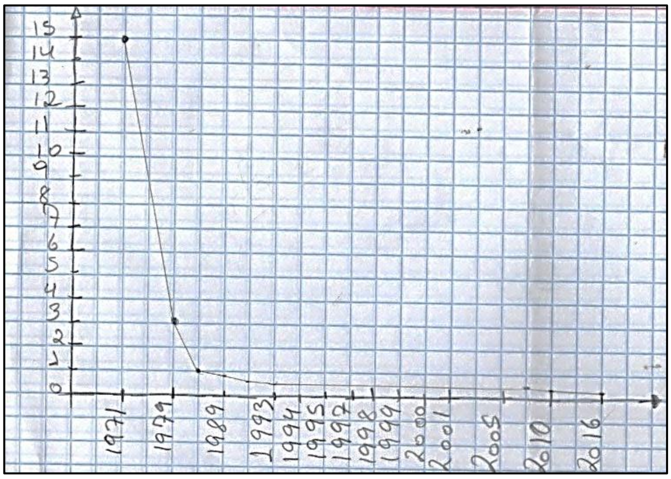


Figura 17 - Registro dos alunos: dados plotados no plano cartesiano
Fonte: registro dos alunos.

Depois que plotaram os pontos no gráfico, questionei-os sobre o comportamento dos dados. Os alunos sugeriram que, de acordo com os pontos no gráfico, o tamanho do transístor vem diminuindo muito no decorrer dos anos. Questionei-os então em como faríamos para determinar o tamanho do transístor (Figura 19) no ano de 2020. Eles começaram a analisar a variação do tamanho do transístor e observaram que ela não era constante e nem se aproximava de uma constante, por isso não poderia ser expressa por uma função afim. Assim, voltando à representação gráfica, concluíram que se a variação fosse constante, os pontos se comportariam linearmente, o que não era o caso.

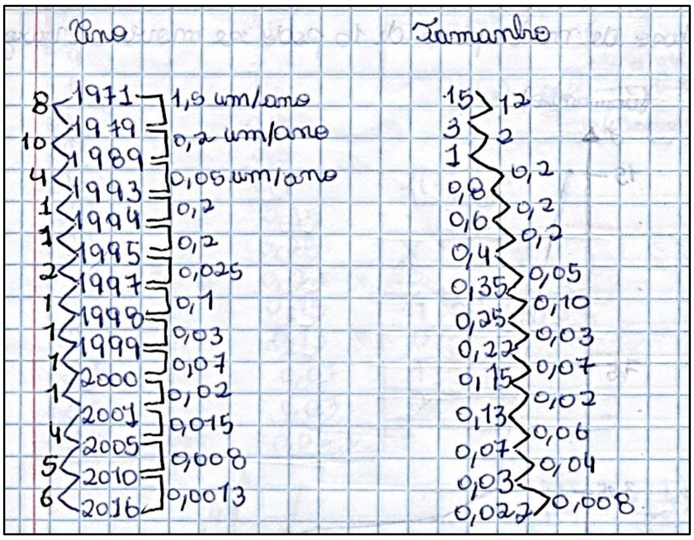


Figura 18 - Registro dos alunos: estudo da variação
Fonte: registro dos alunos.

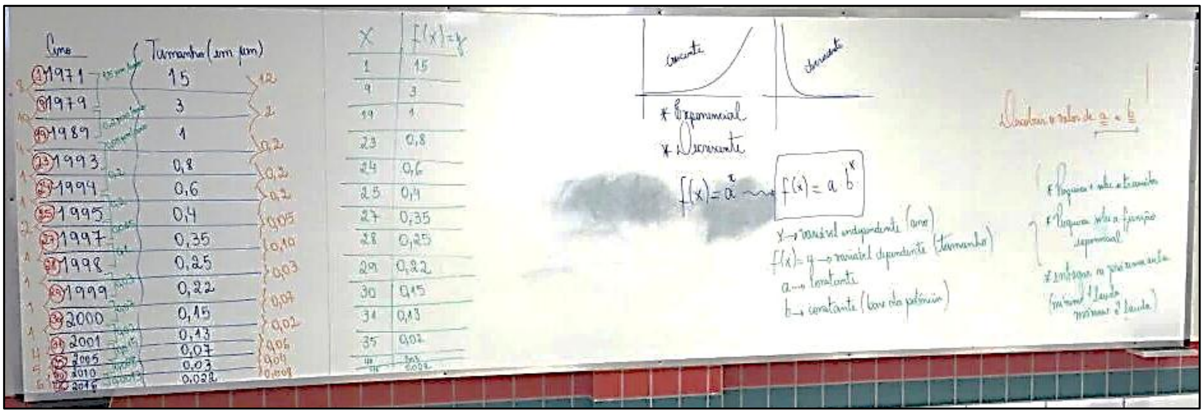
Deste modo, depois que eles tentaram associar o comportamento dos dados a uma função afim e observaram que não era possível, ou seja, que a variação não era constante, bem como depois que observaram os pontos no plano cartesiano e descartaram a hipótese de associar a curva a uma parábola, eles não tinham conhecimento de qual outra curva poderia se adequar à situação.

Neste momento, começaram a requerer minha ajuda, porque não possuíam instrumentos suficientes para dar conta da situação. Como professora, aproveitei o momento para revisar as funções que já conheciam do ano anterior (9º ano) - afim e quadrática - e ainda para abordar outro tipo de curva da qual eles não tinham conhecimento até o momento, a exponencial.

Assim, fui caracterizando cada função, explicitando as diferenças entre elas no que tange à variação, comportamento gráfico, domínio, imagem, deslocamentos nos eixos, representação algébrica, entre outras características.

Em relação às funções afim e quadrática, somente revisei suas características. No entanto, como a situação se configurou como um caso exponencial, debruçamo-nos em estudar este tipo de função, contrariando a sequência de conceitos que geralmente é trabalhada no primeiro ano do Ensino Médio – Função Afim, Função Quadrática, Função Exponencial, Logaritmo. Os conceitos de Função Afim e Quadrática foram trabalhados após o estudo de Função Exponencial e Logaritmos.

Depois de discutirmos as características das referidas funções, os alunos concordaram que os pontos se comportavam exponencialmente. Neste contexto, fui para o quadro para juntos socializarmos o que os grupos haviam discutido e, como nos aproximávamos do final da aula, solicitei que pesquisassem mais sobre função exponencial para a próxima aula.



Fotografia 11 - Registro no quadro da socialização do estudo de variação
Fonte: arquivos da autora.

Na semana seguinte, os alunos trouxeram algumas informações sobre função exponencial. Uma delas era de que o gráfico da função exponencial sempre interceptava o eixo y em 1, o que não estava acontecendo com a representação da situação. Neste sentido, expliquei que nós estávamos lidando com um caso de função do tipo exponencial ($f(x) = k.a^x$), ou seja, ela sofreu algumas modificações e se deslocou no plano cartesiano em comparação com a função exponencial ($f(x) = a^x$). A partir daí, expliquei o conteúdo de função exponencial, enfatizando suas características e as relacionando com a situação que estávamos investigando (Fotografia 11). Em seguida, sugeri que tentássemos encontrar a forma algébrica que melhor se aproximava dos dados.

Como se tratava de uma turma de primeiro ano que estava tendo o primeiro contato com função exponencial e função do tipo exponencial, assim como ainda estava se adaptando às atividades de Modelagem, optei em intervir na determinação do modelo, sugerindo que escolhessem dois pontos e os substituíssem na função $f(x) = k \, . \, a^x$. Deste modo, surgiu um sistema de equações exponenciais. No entanto, os alunos não tinham reação, não lembravam como se resolvia um sistema. Então acabei intervindo de modo a revisar também o método de resolução de sistema de equações.

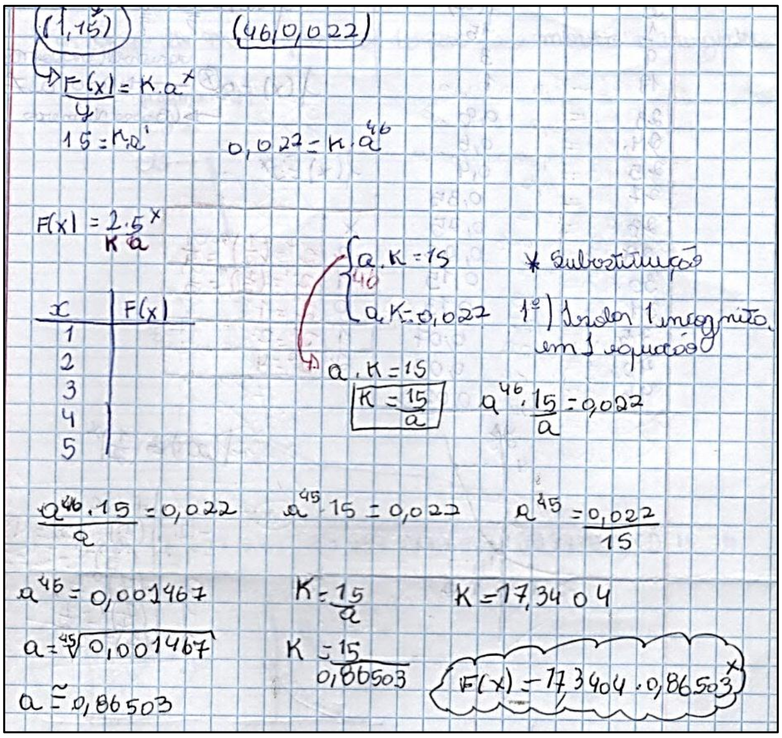


Figura 19 - Registro dos alunos: Obtenção do modelo algébrico
Fonte: registro dos alunos.

Após a obtenção do modelo, solicitei que os alunos o validassem substituindo os dados da tabela 1, conforme consta na tabela 2 e Figura 21. Como os valores encontrados eram muito próximos, consideraram o modelo válido.

Tabela 2 - Validação do modelo

x	*Tamanho do transístor*	$f(x)$
1	15	14,9999
9	3	4,7026
19	1	1,1031
23	0,8	0,6176
24	0,6	0,5343
25	0,4	0,4522
27	0,35	0,3458
28	0,25	0,2991
29	0,22	0,2587
30	0,15	0,2238
31	0,13	0,1936
35	0,07	0,1084
40	0,03	0,0525
46	0,022	0,022

Fonte: elaborado pela autora.

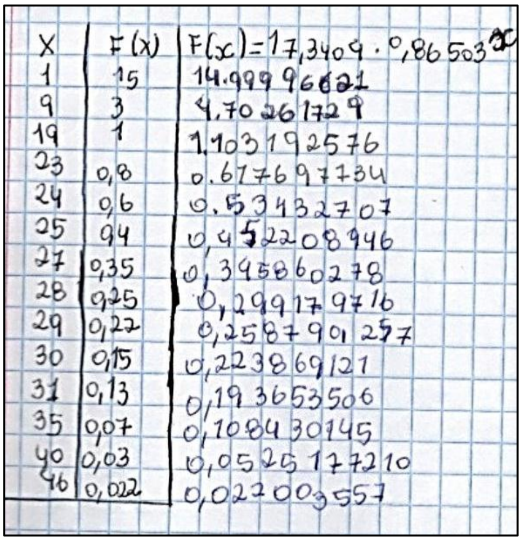


Figura 20 - Registro dos alunos: validação
Fonte: registro dos alunos.

Feito isso, agora os alunos tinham condições de responder ao problema apresentado: *Tendo em vista a diminuição do tamanho dos transístores observada no decorrer dos anos, qual pode ser o tamanho do transístor no ano de 2020 se considerarmos o quadro 1 como referência de progressão?*

Então, como o ano de 2016 correspondia ao tempo 46, consideraram o ano de 2020 como tempo 50. Substituíram no modelo desenvolvido e obtiveram a solução apresentada no Quadro 21.

$$f(50) = 17{,}34\,(0{,}865)^{50} \rightarrow f(50) = 17{,}34\,.\,0{,}00070926 \rightarrow \boldsymbol{f(50) = 0{,}0123}$$

Quadro 6 - Resolução do problema
Fonte: elaborado pela autora.

Portanto, no ano de 2020, provavelmente o transístor terá aproximadamente $0{,}0123\ \mu m$ (Figura 22).

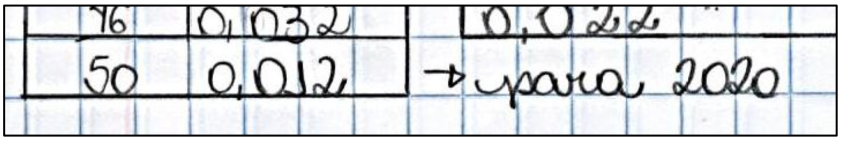


Figura 21 - Registro dos alunos: Resposta do problema
Fonte: registro dos alunos.

Para melhor validar o modelo desenvolvido, construímos no GeoGebra, a função de domínio $D = \{x \in \mathbb{N} | x > 1\}$, $f(x) = 17{,}34\,(0{,}865)^x$ (em azul), plotamos os pontos e construímos a regressão exponencial (em vermelho). Podemos observar, no Gráfico 3, a proximidade das duas curvas e delas com os pontos que representam os dados.

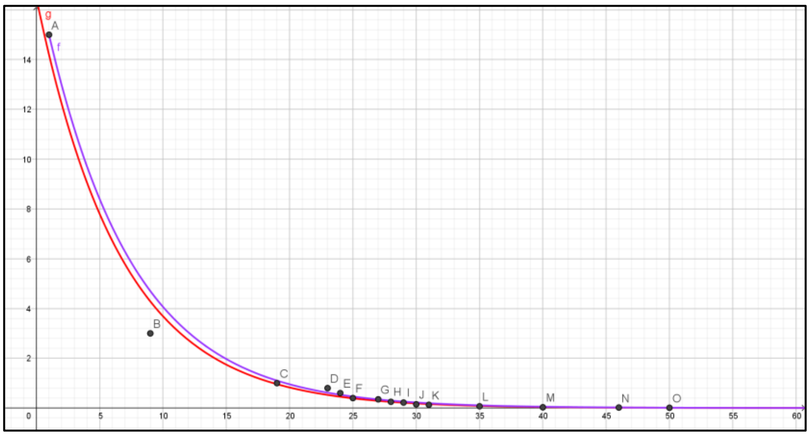


Gráfico 3 - Regressão dos dados realizada no GeoGebra
Fonte: elaborado pela autora.

Embora no momento do desenvolvimento da atividade só tenhamos discutido a abordagem da função exponencial, no momento das análises atentamos para o fato de existirem outras abordagens, como a consideração de uma progressão geométrica. Levando em consideração que não houve avanços em relação ao tamanho dos transístores entre os anos mencionados, o domínio desta função seria discreto, portanto não teria sentido o traçado da curva. No entanto, esta discussão não foi empreendida em aula. Consideramos o domínio da função como sendo $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$. A discussão empreendida com os alunos foi de considerarmos o ano de 1971 como sendo $x = 1$ e, a partir daí, ir relacionando os demais anos com os valores de x correspondentes. Deste modo, discutimos o conceito de domínio e imagem, relacionando os possíveis valores para a variável x e para a variável $f(x)$.

Paralelamente ao desenvolvimento da atividade de Modelagem nas aulas de Matemática, os alunos sanavam possíveis dúvidas com o professor de Informática nas aulas de Fundamentos de Informática e Algoritmos e Linguagem de Programação. O professor relatou que quando trabalhou sobre o tema no início do ano, os alunos não demonstraram tanto interesse como no momento da atividade de Modelagem. Relatou que os alunos estavam motivados e faziam perguntas pontuais sobre o tema se mostrando curiosos.

ATIVIDADE 3

Quantos celulares e notebooks você já teve ???
O que você faz com os aparelhos eletrônicos que você não utiliza mais ???

JORNAL NACIONAL - Edição do dia 09/11/2015
09/11/2015 20h55 - Atualizado em 11/11/2015 21h41

Brasil descarta por ano 1,2 milhão de toneladas de lixo eletroeletrônico

Lixo eletrônico vai chegar a 48 milhões de toneladas em 2017 no mundo.
Toneladas de material são descartadas com as novidades da tecnologia.

De acordo com uma notícia publicada no site do Jornal Nacional do dia 10 de novembro de 2015, das mais de 5500 cidades brasileiras apenas 724 possuem algum tipo de coleta de lixo eletrônico. E para onde vão os celulares, computadores e outros aparelhos eletrônicos que não são mais utilizados nas outras cidades?

Será que o descarte incorreto desse lixo prejudica o meio ambiente? De que forma?

O site E-lixo destaca que os lixos eletrônicos, quando descartados de modo incorreto, podem gerar sérios riscos ao meio ambiente, devido a presença de metais pesados e tóxicos em sua composição.

E há uma agravante em tudo isso!!!

Os produtos eletroeletrônicos são descartados em pouco tempo devido à inovação tecnológica. Gerando assim um grande acúmulo de objetos eletrônicos em desuso.

Algumas pessoas descobriram que podem ganhar seu sustento ao reciclar o lixo eletrônico. Mas esta reciclagem é perigosa, portanto deve ser feita com algumas regras de segurança.

Tendo em vista esta situação, questiona-se:

Qual é o impacto ambiental e econômico ocasionado pelo lixo eletrônico?

http://www.sermelhor.com.br/ecologia/lixo-eletronico-problema-e-solucoes.html
http://www.elixo.org.br/reciclagem-lixo-eletronico/
http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/destino-do-lixo-eletronico-vira-um-desafio-planetario.html

RELATO DO DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE 3 COM OS ALUNOS DO CURSO TÉCNICO EM INFORMÁTICA

Após três semanas, onde trabalhamos atividades relacionadas aos conceitos[7] que emergiram da atividade dos transístores e realizamos uma prova, no dia 23 de setembro, demos início às primeiras discussões sobre o lixo eletrônico. Anteriormente, no final da aula do dia 9 de setembro, entreguei a atividade (Quadro 26) e solicitei aos alunos que pesquisassem sobre o tema e que anotassem informações relevantes.

Para iniciar as discussões, no dia da aula de Matemática passei para os alunos quatro vídeos[8] curtos de uma série do Jornal Nacional sobre Lixo Eletrônico, disponibilizada no site do jornal em novembro de 2015. Os vídeos apresentam o contexto do lixo eletrônico no Brasil, os procedimentos corretos de reciclagem, os perigos da reciclagem sem as devidas precauções, o impacto do lixo eletrônico na natureza, entre outras coisas. Deste modo, entre um vídeo e outro íamos conversando e refletindo sobre o tema, além de anotar informações consideradas importantes. Nesta ocasião os alunos não estavam organizados em grupos. Os alunos se mostraram muito interessados no tema e anotaram algumas informações que consideraram importantes (Quadro 27).

40 milhões de toneladas de lixo eletrônico são gerados por ano no mundo.
Brasil: 97 mil toneladas por ano de computadores 2,2 mil toneladas por ano de celulares 17,2 mil toneladas por ano de impressoras
Em 2005, apenas 724 cidades no Brasil possuíam coleta de lixo eletrônico.
Brasil: 1,2 milhão de toneladas por ano de lixo eletroeletrônico.
Substâncias químicas presentes no lixo eletrônico: chumbo, cádmio, mercúrio, berílio, etc.
No lixo eletrônico há componentes de ouro, prata, cobre.

Quadro 7 - Informações coletadas pelos alunos
Fonte: elaborado pelo autor a partir das anotações dos alunos com referência nos vídeos de 2015.

[7] Potenciação, Função Exponencial, Equação Exponencial.
[8] Vídeo 1: http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/brasil-descarta-por-ano-12-milhao-de-toneladas-de-lixo-eletroeletronico.html
Vídeo 2: http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/destino-do-lixo-eletronico-vira-um-desafio-planetario.html
Vídeo 3: http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/lixo-eletronico-pode-ser-altamente-perigoso-com-manuseio-inadequado.html
Vídeo 4: http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/paises-exportam-lixo-eletronico-para-outros-em-vez-de-reciclar.html

Iniciamos uma reflexão sobre o consumo de tecnologia, de como as pessoas são levadas a trocar de aparelhos eletrônicos com frequência pela “Obsulência Programada[9]”. Surgiu então a ideia de levantar dados sobre o consumo de celulares na sala de aula. Solicitei então que os alunos anotassem em uma folha de papel quantos celulares já tiveram e, destes, quantos foram para o lixo (reciclável ou rejeito) (Figura 26).

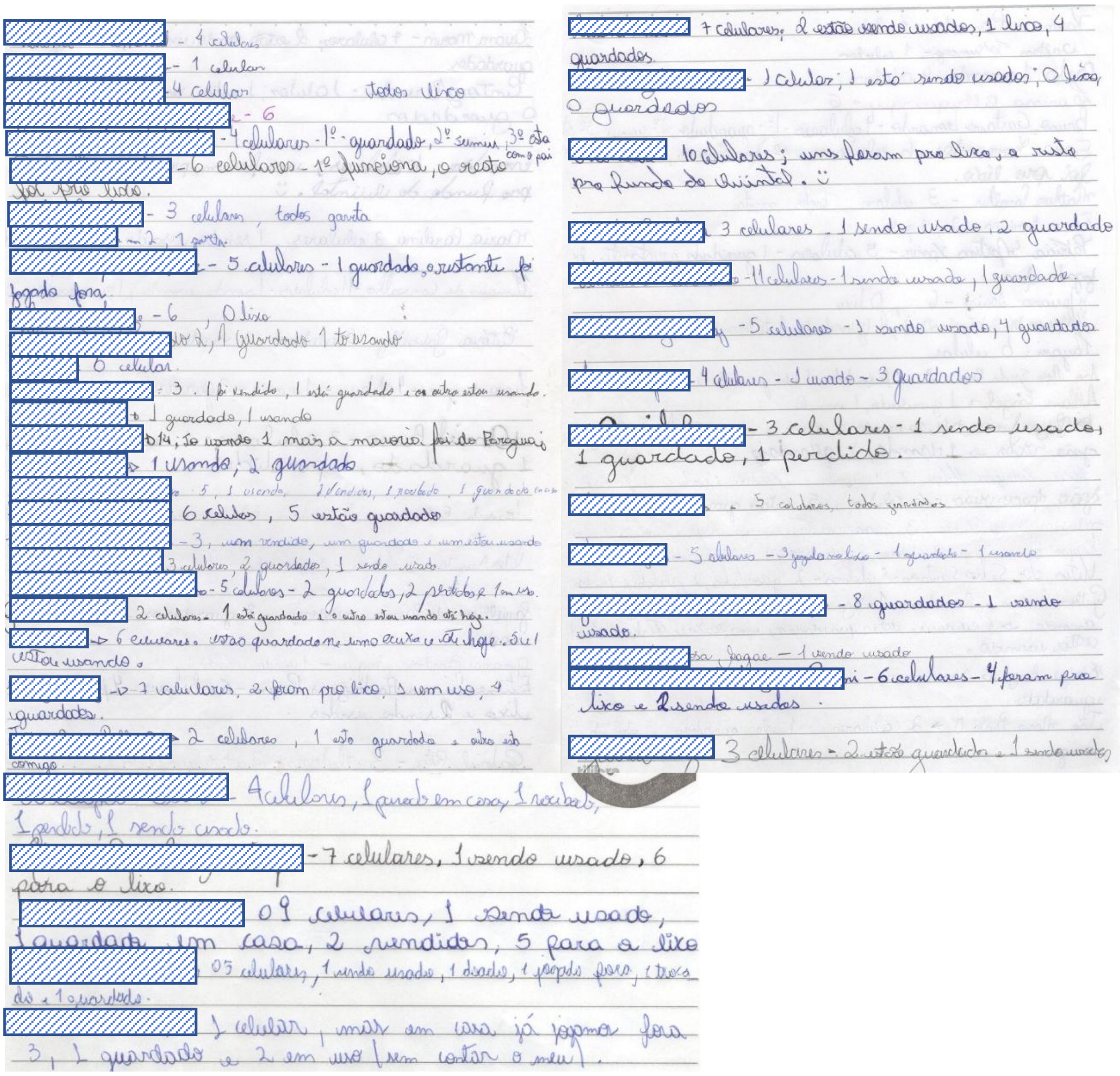


Figura 22 - Registro dos alunos: coleta de informações sobre quantidade de celulares
Fonte: registro dos alunos.

Durante o mês de outubro, os alunos ficaram de pesquisar mais sobre o tema, levantando informações e pensando em possíveis problemas. Sempre conversávamos sobre o tema no final da aula. Nestas conversas falamos sobre os elementos químicos presentes

[9] Quando um produto é lançado no mercado e se torna propositalmente inutilizável em um curto período de tempo.

no lixo eletrônico, comentamos sobre a meia-vida destes elementos, sobre a quantidade de lixo eletrônico acumulada no Brasil (e no mundo) e sobre reciclagem.

No decorrer do desenvolvimento da atividade, o professor de informática, em conversa na sala dos professores, sugeriu que, como iria solicitar que os alunos desenvolvessem um site, que o tema poderia ser lixo eletrônico. A ideia inicial era de que o site apresentasse todo o desenvolvimento da atividade de Modelagem sobre o lixo eletrônico com as contribuições de todas as disciplinas envolvidas. Concordamos com a ideia e continuamos com os trabalhos.

No período de desenvolvimento da atividade, sempre buscava perguntar aos professores como estava sendo a contribuição de suas disciplinas. No entanto, as respostas sempre eram: “não tive tempo de contribuir ainda”, “estava terminando o conteúdo”, “os alunos não perguntaram nada”, “pode deixar que ainda vou contribuir”, “tive que aplicar prova”. Ao contrário do professor de Informática que buscava, em suas aulas, sempre trazer o assunto à tona e contribuir.

No final de uma aula de Matemática sobre funções, conversei com os alunos sobre o site que eles desenvolveriam com o professor de Informática. Deste modo, concordamos em utilizar o site como um meio de conscientização em relação ao lixo eletrônico. Isso porque estavam preocupados com a quantidade de lixo e com os elementos químicos que compõem este lixo. Neste contexto, conversamos sobre a meia-vida de um elemento químico e então sugeri que conversassem mais sobre o assunto com o professor de Química.

Os alunos concluíram a primeira parte do blog (Figura 27) e apresentaram para mim e para o professor de Informática, os outros professores não puderam estar presentes. Neste primeiro momento, eles colocaram o que haviam coletado de informações sobre o lixo eletrônico. Então, ao final das apresentações, solicitei que acrescentassem ao site as próximas etapas da atividade de Modelagem que seriam desenvolvidas.

Figura 23 - Página inicial do site de uma dupla de alunos
Fonte: site construído pelos alunos.

No dia 9 de novembro reservamos todo o tempo das duas aulas de Matemática para o desenvolvimento da atividade de Modelagem. Solicitei aos alunos que expusessem todas as informações que haviam encontrado até o momento para, assim, podermos iniciar a matematização da situação. Estas informações deveriam ter sido encontradas em sites e com os professores das outras disciplinas. No entanto, os alunos apresentaram poucos dados. Realmente, não há muitos dados numéricos precisos sobre o lixo eletrônico. Deste modo tentamos trabalhar com o que conseguimos.

Discutimos, então, todas as informações no grande grupo, toda a turma. Decidimos, portanto, trabalhar com as informações coletadas em sala de aula, a respeito da quantidade de celulares que os alunos já tiveram. Deste modo, projetei as informações coletadas já organizadas em uma tabela (Tabela 3).

Tabela 3 - Tabulação das informações coletadas

Qtde celulares	Qtd de alunos	Total de celulares
1	4	4
2	5	10
3	8	24
4	5	20
5	7	35
6	7	42
7	3	21
8	0	0
9	2	18
10	1	10
11	1	11
12	0	0
13	0	0
14	1	14
Total	44	**209**

Fonte: elaborado pela autora.

Os alunos, então, calcularam a média de celulares por aluno da turma ($209 \div 44 = 4{,}75 \cong 5\ celulares\ por\ aluno$). Aproveitei para explicar as ideias iniciais de Estatística (coleta e organização dos dados) e sobre as Medidas de Tendência Central – Média, Moda e Mediana. Para complementar os dados, fizemos uma pesquisa rápida em sala, para saber o período em que eles tiveram esses celulares. A moda da coleta de dados foi o período de 5 anos. Então os alunos sugeriram utilizar este período para todos. Assim, perguntei a eles então, em média, a cada quanto tempo eles costumavam trocar de celular, ao que responderam que, em média, eles trocam de celular a cada ano. Com esta suposição de que, em média, as pessoas trocam de celulares todo ano, passamos a pensar como isso impactaria no caso da cidade de Assis Chateaubriand.

Neste contexto, formulamos a seguinte questão de investigação: *Considerando a média encontrada em sala de que as pessoas trocam de celular a cada ano, quantos celulares são descartados na cidade de Assis a cada ano?*

Os alunos tiveram que pensar na população da cidade, em que faixa etária costuma-se ter celular e na taxa de crescimento populacional. Pesquisaram então, no site do IBGE[10] e do IPARDS[11], as informações necessárias (Quadro 28).

População de Assis Chateaubriand (2010) = 33 028.

População economicamente ativa (2010) = 17 340.

Taxa de crescimento populacional da cidade = não encontrada

Taxa de crescimento populacional do Brasil (2010) = 0,9%

Quantidade de pessoas na cidade de acordo com a faixa etária em 2007:

CONTAGEM DA POPULAÇÃO SEGUNDO FAIXA ETÁRIA E SEXO - 2007

FAIXA ETÁRIA (anos)	MASCULINA	FEMININA	TOTAL
Menores de 1 ano	177	170	347
De 1 a 4	813	765	1.578
De 5 a 9	1.190	1.151	2.341
De 10 a 14	1.510	1.394	2.904
De 15 a 19	1.419	1.368	2.787
De 20 a 24	1.121	1.223	2.344
De 25 a 29	1.126	1.187	2.313
De 30 a 34	1.178	1.241	2.419
De 35 a 39	1.235	1.358	2.593
De 40 a 44	1.215	1.309	2.524
De 45 a 49	950	1.118	2.068
De 50 a 54	893	998	1.891
De 55 a 59	745	839	1.584
De 60 a 64	689	751	1.440
De 65 a 69	641	560	1.201
De 70 a 74	410	392	802
De 75 a 79	265	265	530
De 80 anos e mais	251	280	531
Idade ignorada	5	5	10
TOTAL	15.833	16.374	32.226

FONTE: IBGE
NOTA: A soma das parcelas não corresponde ao total porque está incluído no mesmo, a população estimada nos domicílios fechados. Incluído a estimativa do IPARDES para os que não tiveram contagem (Cascavel, Colombo, Curitiba, Foz do Iguaçu, Londrina, Maringá, Ponta Grossa e São José dos Pinhais).

Quadro 8 - Informações coletadas pelos alunos
Fonte: elaborado pela autora a partir das informações coletadas pelos alunos.

Os alunos decidiram considerar as pessoas com a faixa etária de 10 a 74 anos, totalizando 26 870 pessoas. Neste momento, iniciamos a resolução do problema com a construção do modelo matemático.

[10] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.
[11] Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social.

Para isso, coloquei a quantidade de pessoas consideradas em 2007 no quadro e considerando a taxa de crescimento populacional do Brasil (0,9%), solicitei que calculassem a quantidade de pessoas nessa faixa etária em 2008, e assim por diante.

Tabela 4 - Recorrência da quantidade de celulares descartados

Ano	T	Celulares descartados
2007	0	26870
2008	1	26870 . 1,009 = 27112
2009	2	26870 . 1,009 . 1,009 = 27356
2010	3	26870 . 1,009 . 1,009 . 1,009 = 27602
⋮	⋮	⋮
2007 + t	t	$26870 . 1{,}009^t$

Fonte: elaborado pela autora a partir das discussões empreendidas em sala com os alunos.

Deste modo, por recorrência, chegamos ao modelo algébrico:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, onde\ f(t) = 26870\ (1{,}009)^t.$$

Onde $t = 0$ representa o ano de 2007. Assim:

$$Q: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, onde\ Q(a) = 26870\ (1{,}009)^{a-2007}, a \in \mathrm{N}, a \geq 2007.$$

Onde $Q(a)$→ quantidade de celulares descartados no ano a.

Questionei os alunos quanto ao tipo de função que encontramos. Alguns ainda não conseguiram reconhecê-la como função exponencial. Uma aluna sugeriu que a função fosse afim, justificando-se pela “variação” constante de 0,9%. Deste modo, podemos observar que ainda havia dúvidas quanto ao conceito de variação.

Retomamos estas questões e deste modo, concluíram que a função era exponencial. Evidenciei a diferença no processo de obtenção do modelo nas duas atividades de Modelagem - a do transístor e a dos celulares -, na primeira, após esboçar o gráfico com conjunto de dados, sugerimos que fosse exponencial e encontramos o modelo algébrico por substituição das variáveis e, na segunda, foi por recorrência.

Solicitei então que, em casa, os alunos pensassem e tentassem responder as duas questões que seguem:

1) *Considerando o modelo encontrado, quantos celulares serão descartados no ano de 2020?*
2) *Em que ano a população de Assis descartará aproximadamente 100 000 celulares? Considerando a taxa de 0,9% e as condições consideradas.*

Na semana seguinte, retomamos o modelo encontrado e exploramos a função exponencial novamente, retomando suas características e especificidades. Ao investigar o gráfico da função exponencial, questionei os alunos quanto ao seu comportamento, ou seja, o que estaria acontecendo com a quantidade de celulares descartados pela população de Assis Chateaubriand no decorrer dos anos. Quando se trabalha com Modelagem, a todo o momento os conceitos são revisitados, caracterizando a abordagem de conteúdos em espiral.

Os alunos responderam que no decorrer dos anos a quantidade de celulares descartados vai aumentando e que a cada ano que passa aumenta mais. Neste contexto, reforcei a ideia de variação. Esbocei num mesmo plano cartesiano o gráfico da função exponencial, da função afim, da função quadrática com concavidade voltada para baixo e da função logarítmica (Fotografia 12).

Fotografia 12 - Análise dos comportamentos gráficos das funções de acordo com a situação apresentada
Fonte: arquivos da autora.

Solicitei aos alunos que descrevessem o comportamento da quantidade de celulares descartados de acordo com a curva que supostamente o descreveria. Deste modo, conseguiram associar o comportamento da função (Figura 28) com determinadas situações.

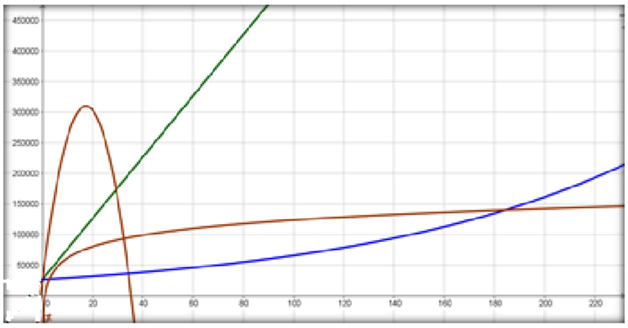


Figura 24 - Representações gráficas de supostos comportamentos do descarte de lixo eletrônico[12]
Fonte: elaborado pela autora.

[12] Estas curvas não se referem ao ajuste (regressão) dos pontos dados. É apenas uma representação do esboço feito pela professora no quadro a partir dos comentários dos alunos.

- ✓ Para a função afim: sugeriram que a quantidade de celulares descartada anualmente era sempre a mesma, ou seja, não houve mudança na variação.
- ✓ Para a função quadrática: a quantidade de celulares descartada estava aumentando até chegar num valor máximo, a partir daí as pessoas tomaram consciência do que estavam fazendo e passaram a trocar de celulares com menor frequência ou passaram a reciclar seus celulares, até chegar o ponto de nenhum celular ir para o lixo. Que, segundo os alunos, seria o ideal.
- ✓ Para a função logarítmica: sugeriram que a quantidade de celulares vai aumentando a cada ano. No entanto, esta variação vai diminuindo no decorrer do tempo até quase se estabilizar.
- ✓ Para a função exponencial: sugeriram que a quantidade de celulares descartados vai aumentando a cada ano, assim como sua variação.

Em seguida, pedi que alguns alunos fossem ao quadro para responder as duas questões da aula passada: 1) *Considerando o modelo encontrado, quantos celulares serão descartados no ano de 2020? 2) Em que ano a população de Assis descartará aproximadamente 100 000 celulares? Considerando a taxa de 0,9% e as condições consideradas.*

Para resolver a primeira questão os alunos substituíram o ano 2020 no modelo exponencial encontrado e resolveram sem dificuldades (Quadro 29). No entanto, para responder a segunda questão, embora os alunos tenham substituído a quantidade de celulares em $Q(a)$, não conseguiram resolver a equação exponencial sozinhos, pois desconheciam logaritmos ou outro modo de solucionar o problema.

Um aluno me procurou no dia anterior, no horário de atendimento, para que eu o explicasse como se resolvia. Como eu o havia ajudado, solicitei que ele explicasse aos colegas, e assim o fez. Neste contexto, expliquei o conceito de logaritmo, suas propriedades e aplicabilidades.

Em Modelagem, quando os alunos se deparam com um problema com o qual não conseguem lidar e esse problema se refere a um conteúdo matemático que desconhecem, é o momento de o professor apresentar o conteúdo para a turma, sem que configure uma aula tradicional, até porque os motivos da exposição são outros, o interesse dos alunos é outro, e o objetivo em se aprender o conceito reside na aplicação do mesmo para resolver o problema.

Questão 1:

$$Q(a) = 26870\ (1{,}009)^{a-2007}$$
$$Q(2020) = 26870\ (1{,}009)^{2020-2007}$$
$$Q(2020) = 26870\ (1{,}009)^{13}$$

$$Q(2020) = 26870\,.\,1{,}12353$$
$$Q(2020) = 30\ 189\ celulares.$$

Questão 2:

$$Q(a) = 26870\ (1{,}009)^{a-2007}$$
$$100\ 000 = 26870(1{,}009)^{a-2007}$$
$$3{,}7216 = (1{,}009)^{a-2007}$$
$$\log 3{,}7216 = \log(1{,}009)^{a-2007}$$
$$0{,}5707 = (a - 2007)0{,}00389$$
$$146{,}66 = a - 2007$$
$$a = 2154$$

Quadro 9 - Resolução das questões propostas
Fonte: elaborado pela autora a partir dos registros dos alunos no quadro.

Por fim, solicitei que os alunos concluíssem o site acrescentando todo o encaminhamento da atividade de Modelagem. Nas figuras 28 e 29, apresentamos duas imagens de uma das páginas de dois sites construídos.

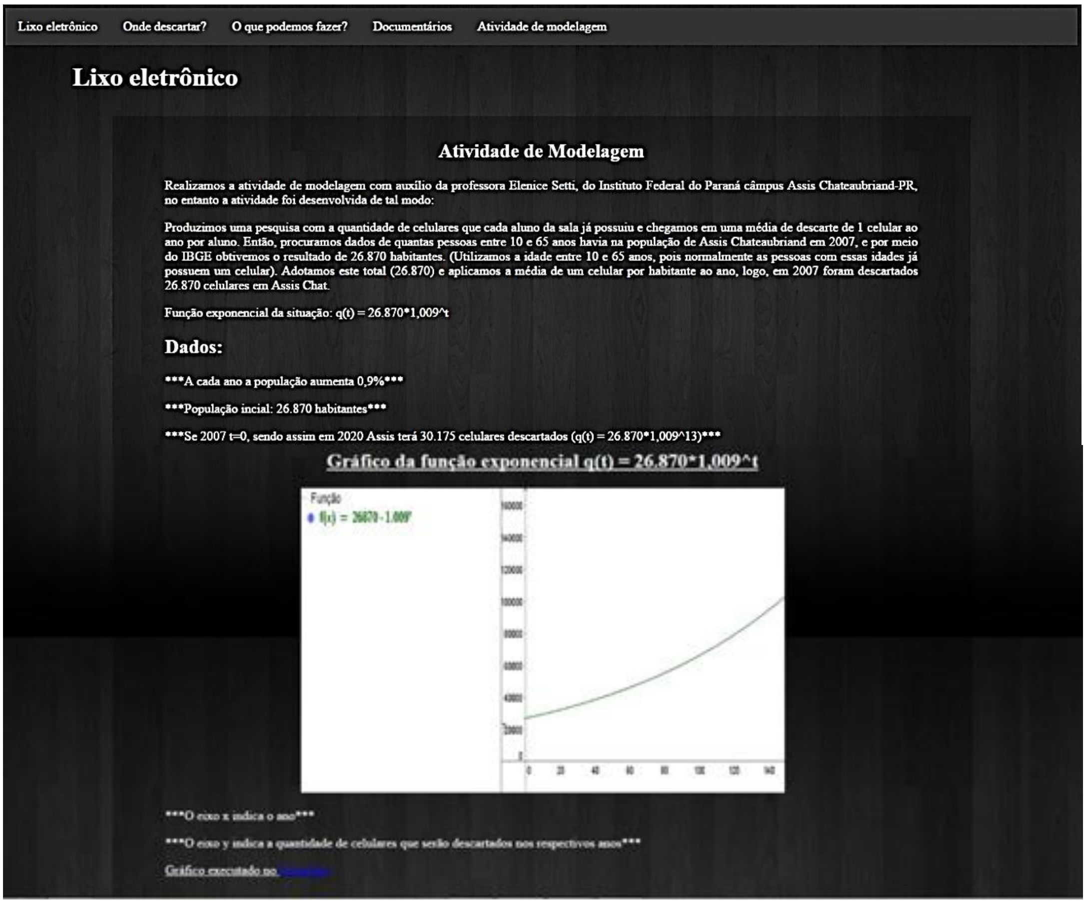


Figura 25 - Print da página do site de uma dupla de alunos
Fonte: site construído pelos alunos.

Figura 26 - Print da página do site de outra dupla de alunos
Fonte: site construído pelos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; DIAS, Michele Regiane. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

__________; BRITO, Dirceu dos Santos. Atividades de Modelagem Matemática: Que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência e Educação**, Bauru, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

__________; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Discussões sobre “como fazer” Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. ARAÚJO, Jussara de Loiola. BISOGNIN, Eleni (Orgs). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática.** 1.ed. Londrina: Eduel, 2011. p. 19 – 43.

__________; SILVA, Karina Pessôa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica.** 1 ed. 1 reimpressão. São Paulo: Contexto, 2013.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001a, Caxambu. **Anais...** Rio de Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

__________. Modelagem Matemática na Sala de Aula**. Perspectiva**, Erechim, v. 27, n. 98, p. 65-74, jun. 2003.

__________. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, Lisboa, n.4, p. 73-80, 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BIEMBENGUT, Maria Salett. .Modelagem nas Ciências da Natureza e na Matemática do Ensino Médio. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2011. Belém. **Anais...** Belém: SBEM, 2011.

__________. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BLUM, Werner. NISS, Mogens. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2004. Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2004.

CALDEIRA, Ademir Donizeti. Modelagem Matemática: um outro olhar. **ALEXANDRIA: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v.2, n.2, p.33-54, jul. 2009.

JAPIASSU, Hilton. **Interdisciplinaridade e patologia do saber.** Rio de Janeiro: Imago, 1976.

KLÜBER, Tiago Emanuel. BURAK, Dionísio. Concepções de Modelagem Matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34, 2008.

NEGRELLI, Leônia Gabardo. **Uma Reconstrução Epistemológica do Processo de Modelagem Matemática para a Educação (em) Matemática.** Curitiba, 2008. 103 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Gradução em Educação, Setor Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

OLIVEIRA, Andreia Maria Pereira de; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática e Situações de Tensão na Prática Pedagógica dos Professores. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 265-296, abr. 2011.

SANTANA, Thaine Souza. BARBOSA, Jonei Cerqueira. A Intervenção do Professor em um Ambiente de Modelagem Matemática e a Regulação da Produção Discursiva dos Alunos. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n.43, p. 991-1020, ago. 2012.

SETTI, Elenice Josefa Kolancko. et al. Modelagem Matemática e Física: uma experiência com foguetes In: Encontro Nacional de Educação Matemática,12, 2016. São Paulo: **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016.

___________; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Que interdisciplinaridade se verifica nos trabalhos de Modelagem Matemática? In: Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, 7, 2016. Londrina: **Anais...** Londrina: SBEM, 2016a.

___________; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Um olhar para a interdisciplinaridade presente nos trabalhos de Modelagem Matemática apresentados nas últimas seis edições da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM). In: Simpósio Nacional de Ensino e Aprendizagem, 3, 2016. Londrina: **Anais...**Londrina: UTFPR, 2016b.

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da; BORSSOI, Adriana Helena; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Uma análise semiótica de atividades de modelagem matemática mediadas pela tecnologia. **R.B.E.C.T**, Curitiba, v. 8, n.1, jan-abr. 2015.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação. **Bolema**, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

TAHAN, Malba (Júlio César de Mello e Souza). **O homem que calculava**. 84.ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2013.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela M. S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula.** 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

VELEDA, Gabriele Granada; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. O que constitui 'realidade' em uma atividade de Modelagem Matemática. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1, 2009. Ponta Grossa. **Anais...** Ponta Grossa: UTFPR, 2009.

VELEDA, Gabriele Granada. **Sobre a Realidade em atividades de Modelagem Matemática**. 2010. 88 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

VERONEZ, Michele Regiane Dias; VELEDA, Gabriele Granada. Reflexões sobre a Realidade em uma Atividade de Modelagem Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática – INMA/UFMS**, Campo Grande, v.9, n.21, p. 1237-1252, 2016.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v.30, n. 56, p. 1070-1071, dez. 2016.

___________; SILVA, Karina Pessôa da; BORSSOI, Adriana Helena. Modelagem Matemática em disciplinas no Ensino Superior: o que manifestam os estudantes? **Educere et Educare, Revista de Educação**, Cascavel, v.12, n.24, já./abr.2017.

VILLA-OCHOA, Jhony Alexander; LÓPEZ, Carlos Mario Jaramillo. Sense of Reality Through Mathematical Modelling. In: G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. New York: Springer, 2011, p. 701–711.