

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

ELENICE JOSEFA KOLANCKO SETTI

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO CURSO TÉCNICO DE
INFORMÁTICA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO - UM TRABALHO
INTERDISCIPLINAR**

DISSERTAÇÃO

LONDRINA

2017

ELENICE JOSEFA KOLANCKO SETTI

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO CURSO TÉCNICO DE
INFORMÁTICA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO - UM TRABALHO
INTERDISCIPLINAR**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do Programa de Pós-Graduação, Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan.

LONDRINA

2017

TERMO DE LICENCIAMENTO

Esta Dissertação e o seu respectivo Produto Educacional estão licenciados sob uma Licença Creative Commons *atribuição uso não-comercial/compartilhamento sob a mesma licença 4.0 Brasil*. Para ver uma cópia desta licença, visite o endereço <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, Califórnia 94105, USA.



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

S495m Setti, Elenice Josefa Kolancko
Modelagem matemática no curso Técnico de Informática Integrado ao Ensino
Médio: um trabalho interdisciplinar / Elenice Josefa Kolancko Setti. Londrina :
[s.n.], 2017.
194 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Londrina, 2017.
Bibliografia: f. 178-185.

1. Modelos matemáticos. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Abordagem
interdisciplinar do conhecimento. I. Vertuan, Rodolfo Eduardo, orient.
II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação
em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7



TERMO DE APROVAÇÃO

MODELAGEM MATEMÁTICA NO CURSO TÉCNICO DE INFORMÁTICA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO – UM TRABALHO INTERDISCIPLINAR

por

ELENICE JOSEFA KOLANCKO SETTI

Esta dissertação foi apresentada em 03 de agosto de 2017 como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan
Prof.(a) Orientador(a)

Prof^a. Dr^a. Lourdes M. Werle de Almeida
Membro titular

Prof^a. Dr^a Karina Alessandra Pessoa da Silva
Membro titular

Prof. Dr Tiago Emanuel Klüber
Membro titular

Prof^a. Dr^a Adriana Helena Borssoi
Membro titular

- O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Programa -

Aos meus pais, Eduardo e Emilia, pelos ensinamentos, conselhos e incentivo, ao meu esposo, Sérgio, pelo apoio e parceria e aos meus amados filhos, Bruno e Davi, pela compreensão nos momentos de ausência e pela motivação.

AGRADECIMENTOS

Nenhum trabalho é construído na individualidade e para a construção deste trabalho muitas pessoas contribuíram direta ou indiretamente e é o momento de agradecê-las.

Primeiramente, agradeço à Deus, pelo dom da vida e por sempre me conduzir em minhas escolhas. À Nossa Senhora, por me dar colo nos momentos de fraqueza e por me fortalecer.

Ao meu orientador Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan, pela paciência, dedicação e carinho dedicados ao trabalho e a mim. Agradeço por ser mais que um orientador, por ser um inspirador e um ser humano incrível.

Aos professores, membros da banca, Dr^a Lourdes Maria Werle de Almeida, Dr^a Karina Alessandra Pessoa da Silva, Dr. Tiago Emanuel Klüber e a Dr^a Adriana Helena Borssoi, pelas ricas e relevantes contribuições ao trabalho.

À minha família, meus pais Eduardo e Emília, minhas irmãs Edna e Elaine, meus cunhados, Walter e Derek e minhas sobrinhas, Bianca e Valéria, amo muito vocês. Um agradecimento especial à minha mãe e minha irmã Elaine que, na minha ausência, cuidaram dos meus pequenos com amor e paciência. Ao meu amado esposo Sérgio, que soube compreender minha nova rotina, me motivando e apoiando e a meus amados filhos Bruno e Davi, que entenderam minha ausência, que me motivaram e por quem eu luto para me tornar um ser humano melhor a cada dia. À minha sogra Marli e meu sogro José Roberto, pelas orações e conselhos. À minha cunhada/irmã Ana Luiza que amo de todo coração e que sempre está ao meu lado, mesmo distante fisicamente.

À minha prima Márcia, seu esposo Rogério e minha afilhadinha Sofia, que me acolheram em sua casa, nos meses em que estava cursando as disciplinas em Londrina.

À minha prima/irmã/amiga/ajudante/parceira Andrieli, que cuida da minha casa como se fosse sua, com quem compartilhei, diariamente, anseios, desafios e conquistas.

À minha amiga Carla Melli Tambarussi, pela parceria, por ler meus trabalhos com tanto carinho, por me motivar sempre e por me inspirar.

Ao professor Eduardo Alberto Felippsen, por aceitar o desafio de ser meu parceiro no desenvolvimento das atividades de Modelagem para a coleta de dados da pesquisa.

Aos professores Polyanna, Renato, Felipe, Deisinara, Michelli, Andrea e Eione por contribuir com o desenvolvimento das atividades, pela amizade e companheirismo vividos diariamente no ambiente de trabalho.

Aos alunos do primeiro ano do curso técnico de Informática integrado ao Ensino Médio (IIN_2016) do Instituto Federal do Paraná, campus Assis Chateaubriand, que participaram deste trabalho.

Ao aluno Guilherme Tizon que contribuiu com a edição dos vídeos para o Blog (produto educacional).

Aos meus colegas de mestrado, Dayani, Lucas, Daiane, Danielli, Elaine, Airan e Maycon, pelas experiências compartilhadas, pelas discussões empreendidas, pelos conhecimentos construídos, pela amizade constituída e pelas caronas oferecidas.

Aos professores do programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT), principalmente os quais tive o prazer de cursar suas disciplinas, prof. Dr. André Luis Trevisan, prof^a. Dr^a. Marcele Tavares, prof^a. Dr^a. Zenaide Correa da Rocha, prof^a. Dr^a. Elaine Cristina Ferruzzi, prof. Dr. Marcelo Souza Motta, prof. Dr. Jader Otávio Dalto e prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan, pelos conhecimentos compartilhados e pela oportunidade em aprender sempre mais.

Ao professor Emerson Tortola e aos alunos das disciplinas de Modelagem Matemática I e Modelagem Matemática II do campus Toledo, pelas ricas discussões em torno da Modelagem Matemática.

Aos membros do GEPEEM, linha de pesquisa Modelagem Matemática, pelas discussões e pela amizade.

“Eu vos dou um novo mandamento: amai-vos uns aos outros. Como eu vos ameí, assim também vós deveis amar-vos uns aos outros” (Jo 13, 34).

SETTI, Elenice Josefa Kolancko. **Modelagem Matemática no Curso Técnico de Informática Integrado ao Ensino Médio**: um trabalho interdisciplinar. 2017. 261 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2017.

RESUMO

Nesta pesquisa, apresentamos um estudo sobre o trabalho interdisciplinar no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática em um primeiro ano do curso técnico de Informática integrado ao Ensino Médio. Tendo como objetivo investigar a existência de contribuições de um trabalho interdisciplinar em Modelagem Matemática no que diz respeito à ressignificação de conceitos matemáticos e à aprendizagem de novos conceitos, buscamos analisar as ações dos alunos ao lidarem com os conceitos que emergiram no desenvolvimento das atividades e inferir acerca das influências das intervenções dos professores ao mediar essas ações no decorrer do trabalho interdisciplinar. Para isso, foram desenvolvidas três atividades de Modelagem Matemática planejadas juntamente com outros professores da turma, principalmente o professor da área específica do curso, de Informática. Os momentos de aula de Matemática foram gravados em vídeo, assim como os áudios das conversas dos grupos de alunos. Posteriormente estas gravações foram transcritas e selecionamos episódios de análise. Em cada episódio buscou-se apresentar reflexões para as questões auxiliares de investigação advindas do objetivo de pesquisa. Inferimos, dentre outras coisas, que o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática contribuiu para a ressignificação de conceitos matemáticos e para a aprendizagem de novos conceitos, visto que à medida que os alunos desenvolviam as atividades, conceitos estudados em anos anteriores e conceitos novos emergiram, de modo que eles puderam construir relações entre eles e relacioná-los com um contexto extra matemático. Como produto educacional, fruto desta pesquisa, construímos um material que pode servir de apoio ao professor da Educação Básica que decidir trabalhar com Modelagem Matemática. Este material está disponibilizado na forma de um Site/Blog de Modelagem Matemática, que pode ser acessado pelo endereço <https://modelagemmatematica.wordpress.com>.

Palavras-chave: Educação Matemática. Interdisciplinaridade. Modelagem Matemática. Produto Educacional. Ensino Médio.

SETTI, Elenice Josefa Kolancko. **Mathematical Modeling in the Technical Course of Informatics Integrated to High School**: an interdisciplinary work. 2017. 261 p. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics Teaching) - Federal Technology University - Parana. Londrina, 2017.

ABSTRACT

In this research, we present a study on an interdisciplinary approach in activities of Mathematical Modeling in a first year of the Informatics technical course integrated to High School. The objective is to investigate the existence of contributions of an interdisciplinary approach in Mathematical Modeling about the re-signification of mathematical concepts and the learning of new concepts, efforts have been made to analyze the students' actions in dealing with the contents that emerged in the development of the activities and to infer about the influences of teachers' interventions in mediating these actions during interdisciplinary work. For that purpose, three activities of Mathematical Modeling were developed together with other teachers of the class, mainly the teacher of the specific area of the course, of Computer science. The Mathematics' classes moments were recorded in video, as well as the audios of the conversations of the students' groups. Subsequently these recordings were transcribed and episodes of analysis were selected. In each episode, we tried to present reflections on the auxiliary questions of investigation coming from the research objective. We infer, among other things, that the development of Mathematical Modeling activities contributed to the re-signification of mathematical concepts and to learning new concepts, since as the students developed the activities, concepts studied in previous years and new concepts emerged, so they could build relationships between them and relate them to an extra math context. As an educational product, the result of this research, we have built a material that can support the Basic Education teacher who decides to work with Mathematical Modeling. This material is available in the form of a Mathematical Modeling Website / Blog, which can be accessed at <https://modelagemmatematica.wordpress.com>.

Keywords: Mathematics Education. Interdisciplinarity. Mathematical Modeling. Educational Product. High School.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Registro do grupo 1: Aglomeração de pessoas em $1m^2$ em diferentes situações	75
Figura 2 - Registro do grupo 4: Aglomeração de pessoas em $1m^2$ em diferentes situações.	76
Figura 3 - Modelo matemático construído para determinar a área de um local retangular ...	79
Figura 4 - Registro do grupo 9 - Modelo matemático encontrado para determinar a concentração de pessoas em um local retangular e uma possível solução para o problema	80
Figura 5 - Registro do grupo 2 - Modelo matemático encontrado para determinar a concentração de pessoas em um local retangular e uma possível solução para o problema	81
Figura 6 - Registro do grupo 5: Modelo matemático encontrado para determinar a concentração de pessoas em um local retangular e uma possível solução para o problema	82
Figura 7 - Imagem do Google Maps.....	85
Figura 8 - Registro do grupo 4 – Modelo Matemático.....	86
Figura 9 - Registro do grupo 1: Modelo Matemático	86
Figura 10 - Registro do grupo 7: Modelo Matemático.....	87
Figura 11 - Registro do grupo 5: Modelo Matemático.....	88
Figura 12 - Recorte da notícia sobre o show de abertura da ExpoAssis 2015	89
Figura 13 - Resolução do grupo 7	90
Figura 14 - Modelo Matemático para concentração de pessoas em um local circular	91
Figura 15 - Recorte da notícia de O PRESENTE	91
Figura 16 - Outras possibilidades de modelo para concentração de pessoas em um local circular	92
Figura 17 - Modelo desenvolvido pelo grupo do aluno Cleber.....	104
Figura 18 - Registro dos alunos: dados plotados no plano cartesiano	122
Figura 19 - Registro dos alunos: estudo da variação	122
Figura 20 - Registro dos alunos: Obtenção do modelo algébrico	124
Figura 21 - Registro dos alunos: validação	125
Figura 22 - Registro dos alunos: Resposta do problema.....	126
Figura 23 - Registro dos alunos: representação gráfica dos dados.....	128
Figura 24 - Resultado na calculadora com notação científica	130
Figura 25 - Registro dos alunos: ressignificação do conteúdo de notação científica	130
Figura 26 - Registro dos alunos: coleta de informações sobre quantidade de celulares	141
Figura 27 - Página inicial do site de uma dupla de alunos	142
Figura 28 - Representações gráficas de supostos comportamentos do descarte de lixo eletrônico	147
Figura 29 - Print da página do site de uma dupla de alunos.....	149
Figura 30 - Print da página do site de outra dupla de alunos	149
Figura 31 - Print da primeira página do site de uma dupla de alunos.....	159
Figura 32 - Print da primeira página do site de uma dupla de alunos.....	160
Figura 33 - Página inicial do Site/blog de Modelagem (Produto Educacional).....	175
Fotografia 1 - Alunos medindo os segmentos para formar a região quadrada de 1 metro de lado.....	74
Fotografia 2 - Alunos medindo os segmentos para formar a região quadrada de 1 metro de lado.....	74
Fotografia 3 - Grupo de alunos determinando experimentalmente a quantidade de pessoas que cabem em $1 m^2$	75

Fotografia 4 - Foto aérea de um show no Centro de Eventos Ângelo Micheletto (projetada pela professora).....	78
Fotografia 5 - Pesquisa no Google Maps no notebook.....	83
Fotografia 6 - Momento do desenvolvimento da atividade nos grupos.....	83
Fotografia 7 - Pesquisa no Google Maps no celular.....	84
Fotografia 8 – Alunos trabalhando na atividade	85
Fotografia 9 - Foto selecionada pelo grupo 5.....	88
Fotografia 10 - Foto aérea do Centro de eventos Ângelo Micheletto.....	90
Fotografia 11 - Registro no quadro da socialização do estudo de variação.....	123
Fotografia 12 - Análise dos comportamentos gráficos das funções de acordo com a situação apresentada.....	146
Gráfico 1 - Tamanho do transistor em μm no decorrer dos anos (1971 – 2016): gráfico construído na planilha eletrônica	121
Gráfico 2 - Tamanho do transistor em μm no decorrer dos anos (1971 – 2016): gráfico construído no GeoGebra	121
Gráfico 3 - Regressão dos dados realizada no GeoGebra.....	126
Gráfico 4 - Representações gráficas de supostos comportamentos do descarte de lixo eletrônico.....	147
Quadro 1 - Exemplos de modelos matemáticos.....	34
Quadro 2 - Tarefas no processo de Modelagem	37
Quadro 3 - Síntese das perspectivas de Modelagem de ALMEIDA e DIAS, ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, BARBOSA e BURAK	38
Quadro 4 - Relação entre situações de tensão e tensões nos discursos	40
Quadro 5 - Movimento da interdisciplinaridade	46
Quadro 6 - Artigos selecionados para primeira análise	53
Quadro 7 - Artigos selecionados nas edições IV a IX da CNMEM para a segunda análise..	54
Quadro 8 - Características de Interdisciplinaridade e trabalhos associados.....	61
Quadro 9 - Categorias de Interdisciplinaridade em Modelagem Matemática e trabalhos associados.....	62
Quadro 10 - Atividade de Modelagem 1: Qual é o público?	73
Quadro 11 - Parâmetros de todos os grupos referentes à aglomeração de pessoas em 1m^2	77
Quadro 12 - Síntese da análise do Episódio 1	96
Quadro 13 - Síntese da análise do Episódio 2	99
Quadro 14 - Síntese da análise do Episódio 3	101
Quadro 15 - Síntese da análise do Episódio 4	105
Quadro 16 - Síntese da análise do Episódio 5	108
Quadro 17 - Síntese da análise do Episódio 6	111
Quadro 18 - Síntese da análise do Episódio 7	114
Quadro 19 - Síntese da análise do Episódio 8	117
Quadro 20 - Atividade de Modelagem 2: De que tamanho vai ficar?.....	120
Quadro 21 - Resolução do problema	125
Quadro 22 - Síntese da análise do Episódio 9	129
Quadro 23 - Síntese da análise do Episódio 10	130
Quadro 24 - Síntese da análise do Episódio 11	134
Quadro 25 - Síntese da análise do Episódio 12	136
Quadro 26 - Atividade de Modelagem 3: Lixo Eletrônico.....	139
Quadro 27 - Informações coletadas pelos alunos	140
Quadro 28 - Informações coletadas pelos alunos	144

Quadro 29 - Resolução das questões propostas	148
Quadro 30 - Síntese da análise específica do Episódio 13	154
Quadro 31 - Síntese da análise do Episódio 14	156
Quadro 32 - Síntese da análise específica do Episódio 15	158
Quadro 33 - Transcrição da página do site da figura 30.....	160
Quadro 34 - Transcrição da página do site da figura 31.....	161
Quadro 35 - Síntese da análise específica do Episódio 16	162
Quadro 36 - Categorias de Interdisciplinaridade em Modelagem Matemática.....	170
Quadro 37 - Transcrição da página do site da figura 34.....	189

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Progressão do tamanho dos transístores.....	121
Tabela 2 - Validação do modelo	125
Tabela 3 - Tabulação das informações coletadas	143
Tabela 4 - Recorrência da quantidade de celures descartados.....	145

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 CONTEXTO E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA	20
2.1 A QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO	20
2.2 SOBRE PESQUISA QUALITATIVA.....	21
2.3 A CARACTERIZAÇÃO DO AMBIENTE FONTE DE DADOS DA PESQUISA – ACERCA DOS ALUNOS E DO INSTITUTO FEDERAL DO PARANÁ.....	23
2.4 SOBRE O PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES DE (EM) MODELAGEM	25
2.5 A CARACTERIZAÇÃO DOS INSTRUMENTOS DE COLETA DE INFORMAÇÕES ...	26
2.6 CONFLITOS ENTRE O “EU PROFESSORA” E O “EU PESQUISADORA”	27
2.7 PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DOS DADOS	28
3 MODELAGEM MATEMÁTICA	30
3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	30
3.2 A IMPLEMENTAÇÃO DE ATIVIDADES DE MODELAGEM EM SALA DE AULA	35
3.3 SOBRE OS PROFESSORES QUANDO REALIZAM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM SEUS ALUNOS	39
3.4 APRENDIZAGEM DOS ALUNOS EM (COM) MODELAGEM MATEMÁTICA.....	41
4 INTERDISCIPLINARIDADE EM MODELAGEM MATEMÁTICA	44
4.1 INTERDISCIPLINARIDADE	44
4.2 INTERDISCIPLINARIDADE NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	50
4.3 INTERDISCIPLINARIDADE NO CONTEXTO DA MODELAGEM MATEMÁTICA.....	51
4.3.1 Interdisciplinaridade nos Trabalhos de Modelagem Matemática das últimas edições do EPMEM, CNMEM e ICTMA	54
4.3.2 Interdisciplinaridade nos trabalhos da IV, V, VI, VII, VIII e IX edição da CNMEM.	62
4.3.3 Interdisciplinaridade e Modelagem Matemática	67
5 CONTEXTO, DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM	70
5.1 CONTEXTO EM QUE SE DESENVOLVEU A ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA 1 - QUAL É O PÚBLICO?	70
5.1.1 A Atividade.....	72
5.1.2 Análise Específica da Situação “Qual é o Público?”	93
5.1.3 Interdisciplinaridade na Atividade.....	117
5.2 CONTEXTO EM QUE SE DESENVOLVEU A ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA 2 – DE QUE TAMANHO VAI FICAR?	118
5.2.1 A Atividade.....	119
5.2.2 Análise Específica da Situação “De que tamanho vai ficar?”	127
5.2.2.1 Episódio 9	127
5.2.3 Interdisciplinaridade na Atividade.....	136

5.3 CONTEXTO EM QUE SE DESENVOLVEU A ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA 3 – LIXO ELETRÔNICO.....	137
5.3.1 A Atividade.....	138
5.3.2 Análise Específica da Situação “Lixo Eletrônico”.....	150
5.3.3 Interdisciplinaridade Na Atividade	162
6 O TRABALHO INTERDISCIPLINAR EM MODELAGEM MATEMÁTICA NO QUE DIZ RESPEITO À RESSIGNIFICAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS E À APRENDIZAGEM DE NOVOS CONCEITOS	164
6.1 SOBRE OS CONCEITOS MATEMÁTICOS QUE EMERGIRAM NO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA	164
6.2 SOBRE AS AÇÕES QUE EMPREENDERAM OS ALUNOS AO LIDAREM COM OS CONCEITOS.....	166
6.3 SOBRE AS INTERVENÇÕES DOS PROFESSORES, SE HOVERAM, AO MEDIAR AS AÇÕES DOS ALUNOS NO DECORRER DO TRABALHO INTERDISCIPLINAR	168
6.4 SOBRE A INTERDISCIPLINARIDADE QUE SE VERIFICOU NAS ATIVIDADES	170
6.5 CONSIDERAÇÕES IMPORTANTES	172
6.6 PRODUTO EDUCACIONAL.....	175
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	178
8 ANEXOS	186
8.1 REPRESENTAÇÃO E POSSÍVEL RESOLUÇÃO DO MODELO I (REFINAMENTO PARA O PRODUTO EDUCACIONAL)	186
8.2 PÁGINA INICIAL DE SITE PRODUZIDO PELOS ALUNOS	189
8.3 TERMO DE ASSENTIMENTO	190
8.4 TERMO DE CONSENTIMENTO	192
8.5 PRODUTO EDUCACIONAL.....	194

1 INTRODUÇÃO

Historicamente, a efetivação dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática apresenta alguns obstáculos. Dentre eles, está o fato de que, frequentemente, o rol de conteúdos apresentado nas matrizes curriculares da Educação Básica é ensinado sem aplicação ou sem contextualização e é mecanicamente reproduzido pelos estudantes, na maioria das vezes, sem qualquer sentido e sem integração com as outras áreas do conhecimento. De acordo com nossas percepções, podemos afirmar que grande parte dos alunos que concluem o Ensino Fundamental inicia o Ensino Médio sem saber conceitos matemáticos considerados básicos ao seu nível de escolaridade. E ainda, mesmo sabendo alguns algoritmos, não possuem ideia de onde são utilizados e qual a lógica de seus funcionamentos.

Nossa experiência sugere que esta situação também tem sido vivenciada no âmbito dos Cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio. Neste contexto, subentende-se que os estudantes devem utilizar a Matemática para resolver problemas de sua área de formação técnica, já que ao concluírem o curso estarão aptos a exercer a profissão. Deste modo, não necessitarão apenas saber técnicas de Matemática, mas, além disso, deverão pensar matematicamente em um contexto, muitas vezes, não matemático. Para isso, a proposta destes cursos é de que o ensino de todas as disciplinas se dê de modo integrado, visando que o egresso não seja apenas um técnico, mas que tenha a possibilidade de atuar ativamente na sociedade intervindo em situações que demandem solução. Neste contexto, alguns dos princípios da Educação Profissional Técnica de Nível Médio elencados nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio são:

[...] IV - Articulação da Educação Básica com a Educação Profissional e Tecnológica, na perspectiva da integração entre saberes específicos para a produção do conhecimento e a intervenção social, assumindo a pesquisa como princípio pedagógico; [...]

VI - indissociabilidade entre teoria e prática no processo de ensino-aprendizagem;

VII - interdisciplinaridade assegurada no currículo e na prática pedagógica, visando à superação da fragmentação de conhecimentos e de segmentação da organização curricular;

VIII - contextualização, flexibilidade e interdisciplinaridade na utilização de estratégias educacionais favoráveis à compreensão de significados e à integração entre a teoria e a vivência da prática profissional, envolvendo as múltiplas dimensões do eixo tecnológico do curso e das ciências e tecnologias a ele vinculadas [...] (BRASIL, 2012, p. 2).

Podemos observar que, assim como nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000) e nas Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (2008), as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio (2012) atentam para um ensino integrado, contextualizado e interdisciplinar.

No entanto, ainda observa-se nos cursos técnicos integrados de nível médio certa dificuldade em realizar o trabalho segundo estes princípios. Neste contexto, vislumbramos na Modelagem Matemática potencialidades de contribuir para um ensino de Matemática dinâmico, em que os conceitos são desenvolvidos à medida que são necessários no desenvolvimento de investigações de situações problemáticas, que geralmente são de outras áreas do conhecimento, que não a Matemática, possibilitando um trabalho integrado, contextualizado e interdisciplinar.

Deste modo, entendemos que a Modelagem Matemática “constitui uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente Matemática” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 17). Por este motivo há um entendimento que toda atividade de Modelagem Matemática é interdisciplinar. No entanto, a partir de pesquisa realizada em trabalhos de Modelagem Matemática na Educação Matemática publicados em eventos da área¹, observa-se que há diferentes entendimentos do trabalho interdisciplinar em Modelagem, desde a utilização, pelo professor de Matemática, do contexto de outra disciplina, ou área, para desenvolver uma atividade de Modelagem, até o movimento de diferentes disciplinas e seus respectivos professores para o desenvolvimento da atividade de Modelagem em que o foco é a resolução de um problema².

Neste sentido, reconhecemos o entendimento da interdisciplinaridade como característica inerente à Modelagem Matemática, mas vislumbramos e defendemos àquele entendimento que extrapola a mera ideia de usar conceitos de duas áreas ou disciplinas diferentes, que envolve diferentes professores, planejamento compartilhado, o uso de diferentes conceitos, de tal modo que os alunos possam, em diferentes disciplinas de sua grade curricular, vivenciar a resolução de um problema que “interessa resolver”. Para os alunos, nesse caso, o mais importante reside em

¹ Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática (EPMEM); Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática (CNMEM); *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA). Estudo apresentado em Setti e Vertuan (2016a; 2016b). No capítulo 3, o leitor terá a oportunidade de conhecer tal estudo.

² Resultados publicados em Setti e Vertuan (2016a; 2016b).

resolver o problema e não nos conceitos das disciplinas utilizados para isso. Os conceitos das disciplinas são meios para resolver o problema.

Neste contexto é que, nesta pesquisa, desenvolvemos três atividades de Modelagem Matemática, planejadas e realizadas de modo interdisciplinar, em uma turma do primeiro ano do Curso Técnico de Informática Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal do Paraná, campus Assis Chateaubriand. Nosso objetivo de pesquisa consiste em investigar a existência de contribuições de um trabalho interdisciplinar em Modelagem Matemática no que diz respeito à ressignificação de conceitos matemáticos e à aprendizagem de novos conceitos, analisando as ações dos alunos ao lidarem com os conceitos que emergirem na resolução e inferir acerca das influências das intervenções dos professores ao mediar essas ações no decorrer do trabalho interdisciplinar. A questão de pesquisa sobre a qual lançamos olhares, portanto, é:

Quais são as possíveis contribuições de um trabalho interdisciplinar em Modelagem Matemática no que diz respeito à ressignificação de conceitos matemáticos e à aprendizagem de novos conceitos?

Para a realização das análises, nos apoiamos nas seguintes questões auxiliares:

- Quais conceitos matemáticos emergem no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática no contexto de um trabalho interdisciplinar específico realizado por professores que atuam no primeiro ano do Curso Técnico de Informática Integrado ao Ensino Médio?
- Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos?
- Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar?
- Considerando nosso entendimento de interdisciplinaridade, de que modo ela se expressa nas atividades de Modelagem desenvolvidas?

Os objetivos da pesquisa corroboram com a “natureza” da dissertação (mestrado profissional), que, possui dois focos principais. O primeiro refere-se à elaboração de um produto educacional relacionado à Modelagem Matemática e seu refinamento para fins de divulgação; e o segundo, refere-se à investigação de possíveis contribuições de um trabalho interdisciplinar com Modelagem Matemática

no que diz respeito à ressignificação de conceitos matemáticos e à aprendizagem de novos conceitos. De todo modo, estes dois focos são interdependentes, uma vez que é a partir da investigação expressa no segundo, que se pretende refinar o produto educacional, para o qual convergem as ações deste trabalho.

Neste sentido, a partir da discussão das atividades em torno das aprendizagens dos sujeitos, a nossa intenção é refinar as atividades de Modelagem (desenvolvidas com esses alunos) e apresentá-las na forma de um site/blog de Modelagem, com o objetivo de auxiliar o professor da Educação Básica, que atue em um curso técnico ou não, no trabalho com Modelagem, promovendo a interdisciplinaridade no contexto de cursos técnicos integrados ao Ensino Médio.

No entanto, desenvolver um trabalho interdisciplinar em Modelagem Matemática não é simples, pois envolve, além do professor de Matemática, a predisposição de outros professores, de outras áreas. Portanto, embora não seja o nosso foco, o que se mostrou relevante na pesquisa foi o interesse e a forma como os professores de outras disciplinas lidaram com a possibilidade de um trabalho interdisciplinar como o que foi desenvolvido para a coleta de dados. No decorrer das análises discorreremos sobre esse movimento com outros professores. Neste trabalho, contudo, embora a participação dos professores tenha acontecido “com o tempo” e, embora outros professores tenham atuado em parceria no desenvolvimento das atividades, a coleta de informações se deu nas aulas de Matemática e é sobre as atividades e diálogos que aconteceram nesse espaço que se dão as análises.

É importante esclarecer, ainda, que no decorrer do texto aparecerão os termos “pesquisadora”, “professora” e “professora-pesquisadora”. Utilizaremos o termo pesquisadora quando a intenção é nos remetermos à autora do trabalho, que tem o objetivo de verificar as potencialidades da Modelagem em sala de aula num contexto interdisciplinar e de um curso técnico. Já quando a intenção é nos referirmos à docente da Instituição, professora da turma na qual a pesquisa foi realizada, utilizaremos o termo “professora”. No entanto, a professora e a pesquisadora, sendo a mesma pessoa e cumprindo esses dois papéis, desenvolve preocupações e enfrenta dificuldades e conflitos. Para esta última situação, utilizaremos o termo “professora-pesquisadora”. Essa distinção dos termos fez-se necessária porque nem sempre as intenções da pesquisadora e da professora convergiam.

Em relação à estrutura deste trabalho de dissertação, este consistirá em cinco capítulos. Após a introdução, o capítulo 2 apresenta os aspectos metodológicos da

pesquisa. Em seguida, o capítulo 3 é dedicado à fundamentação teórica de Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática, mais especificamente na perspectiva de Barbosa (2003, 2004); Almeida e Dias (2004) e Almeida, Silva e Vertuan (2013). O capítulo 4 discorre sobre Interdisciplinaridade e Interdisciplinaridade em Modelagem Matemática, apresentando diferentes entendimentos em relação ao tema. Em seguida, no capítulo 5, passaremos às análises dos dados da pesquisa à luz do referencial teórico apresentado. E finalmente, no capítulo 6, trataremos das considerações finais, em que inferências para a questão de pesquisa serão realizadas e o refinamento do produto educacional será apresentado.

2 CONTEXTO E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Neste capítulo tratamos do contexto e dos procedimentos da pesquisa. Inicialmente, apresentamos a questão de investigação e, em seguida, caracterizamos a pesquisa qualitativa relacionando-a com o nosso trabalho. Apresentamos as características do ambiente-fonte de dados e dos sujeitos envolvidos na pesquisa, assim como dos instrumentos utilizados para a coleta de informações. Reservamos uma seção para apresentar os conflitos entre o “eu pesquisadora” e o “eu professora” que emergiram no decorrer da coleta de dados e, por fim, explicitamos os procedimentos para a análise dos dados coletados.

2.1 A QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO

No trabalho com alunos ingressantes ao Ensino Médio espera-se que estes tenham aprendido o essencial dos conteúdos ensinados no Ensino Fundamental. No entanto, o que se percebe é que muitos apresentam certa defasagem em Matemática, o que contribui para que eles tenham dificuldades em resolver problemas e atividades tidas como elementares, influenciando assim, negativamente a aprendizagem de novos conteúdos.

Neste sentido, para tentar sanar essas dificuldades, bem como contribuir para a aprendizagem dos alunos, buscam-se metodologias que possibilitem desenvolver um ensino de Matemática significativo e envolvente. Nesse contexto, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000) chamam a atenção para a necessidade de adequação da disciplina para o desenvolvimento e promoção dos alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo de mudanças. Além disso, o documento afirma que a Matemática deve ser vista também em suas possíveis relações com outras áreas do conhecimento e em atividades profissionais.

Entendemos, assim, que para o estudante aprender Matemática ele deve vivenciar os conteúdos que lhe são ensinados por meio do seu envolvimento em determinada situação que demande solução.

Tendo em vista estas considerações, a Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica que contribui com a tentativa de retomar os conteúdos

matemáticos de forma significativa para o aluno, proporcionando ainda subsídios para apropriação de novos conteúdos (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013). Por envolver situações reais que, na maioria das vezes, emergem de áreas distintas do conhecimento, integrando-as, é natural associar a Modelagem Matemática à interdisciplinaridade (TOMAZ; DAVID, 2008).

Neste trabalho, portanto, temos como questão de pesquisa: *Quais são as possíveis contribuições de um trabalho interdisciplinar em Modelagem Matemática no que diz respeito à ressignificação de conceitos matemáticos e à aprendizagem de novos conceitos?*

Desse modo, o objetivo da pesquisa é investigar a existência de contribuições de um trabalho interdisciplinar em Modelagem Matemática no que diz respeito à ressignificação de conceitos matemáticos e à aprendizagem de novos conceitos em uma turma do Curso Técnico de Informática Integrado ao Ensino Médio de um Instituto Federal do Paraná, analisando as ações dos alunos ao lidarem com os conceitos que emergirem na resolução e inferir acerca das influências das intervenções dos professores ao mediar essas ações no decorrer do trabalho interdisciplinar. A partir dos resultados advindos das reflexões acerca da questão de pesquisa, iniciamos a proposição de um material específico interdisciplinar em Modelagem Matemática e construímos um blog como produto educacional que servirá de apoio ao professor que deseja iniciar o trabalho com esta alternativa pedagógica.

Como a pesquisa é qualitativa, no próximo tópico discorreremos sobre pesquisa qualitativa e suas características.

2.2 SOBRE PESQUISA QUALITATIVA

A pesquisa é de caráter qualitativo já que, dentre outras características, “o ambiente natural é sua fonte direta de dados e o pesquisador é seu principal instrumento” (LÜDKE; ANDRÉ, 2013, p.12). Segundo Lüdke e André (2013), na pesquisa qualitativa o “pesquisador tem contato direto e prolongado com o ambiente e a situação que está sendo investigada” (LÜDKE; ANDRÉ, 2013, p.12).

Neste caso, para alcançar o objetivo da pesquisa, a professora-pesquisadora teve que estar em contato direto com o ambiente, a situação e os sujeitos.

A pesquisa qualitativa não procura enumerar e/ou medir os eventos estudados, nem emprega instrumental estatístico na análise dos dados. Parte de questões ou focos de interesses amplos, que vão se definindo à medida que o estudo se desenvolve. Envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo as perspectivas dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo (GODOY, 1995, p. 58).

Neste contexto, Garnica (2004, p. 86, apud Borba 2004, p. 1) apresenta algumas das características de uma pesquisa qualitativa.

a) A transitoriedade de seus resultados; b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, apud BORBA, 2004, p. 1).

No entanto, Borba (2004, p. 2), afirma que “estas características não devem ser vistas como regra”, visto que o “próprio entendimento de pesquisa qualitativa está em movimento”. O autor entende a pesquisa qualitativa como “uma forma de conhecer o mundo que se materializa fundamentalmente através dos procedimentos conhecidos como qualitativos” (BORBA, 2004, p. 3).

Neste contexto, Bogdan e Biklen (1994), apontam outras características relevantes da pesquisa qualitativa.

1. A fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. [...] Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto.
2. A investigação qualitativa é descritiva. [...] Ao recolher dados descritivos, os investigadores qualitativos abordam o mundo de forma minuciosa.
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. [...] As técnicas quantitativas conseguiram demonstrar, recorrendo a pré e pós-testes, que as mudanças se verificam. As estratégias qualitativas patentearam o modo como as expectativas se traduzem nas atividades, procedimentos e interações diários.
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. [...] Não recolhem os dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando.
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. [...] Os investigadores [...] estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 47-50).

No contexto dessa pesquisa, como a coleta de dados se deu no ambiente natural da sala de aula, com a professora regente, com uma turma de 46 alunos e os dados foram advindos da relação entre a professora e os alunos no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, a pesquisa qualitativa torna-se relevante pois,

É um modo de proceder que permite colocar em relevo o sujeito do processo, não olhado de modo isolado, mas contextualizado social e culturalmente; mais do que isso e principalmente, de trabalhar concebendo-o como já sendo sempre junto ao mundo e, portanto, aos outros e aos respectivos utensílios dispostos na circunvizinhança existencial, constituindo-se, ao outro a ao mundo em sua historicidade (BICUDO, 2012, p. 17).

Bicudo (2012, p.19) afirma que “não se obtém verdades lógicas sobre o investigado, mas indicações de seus modos de ser e de se mostrar. Obtêm-se, portanto, generalidades expressas pelas convergências articuladas”. Assim, “o trabalho de investigação qualitativa é entender globalmente as categorias que mobilizam os atores para compreender a realidade e para atuar sobre a realidade” (ZANTEN, 2004, p. 31).

2.3 A CARACTERIZAÇÃO DO AMBIENTE FONTE DE DADOS DA PESQUISA – ACERCA DOS ALUNOS E DO INSTITUTO FEDERAL DO PARANÁ³

Para cumprir nosso objetivo de pesquisa, decidimos desenvolver as atividades de Modelagem em uma turma regular de Matemática. A turma escolhida foi um primeiro ano do Curso Técnico de Informática Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal do Paraná, campus Assis Chateaubriand, isso porque a pesquisadora era também professora da referida turma. A turma era composta por 46 alunos, sendo 26 meninos e 20 meninas, com idades entre 14 e 16 anos. Destes, 6 cursavam a disciplina pela segunda vez. Todos os demais eram calouros no Instituto. Alguns alunos da turma eram de Assis Chateaubriand e outros adivinham de quatro cidades

³ Sugerimos a leitura do artigo: SETTI, Elenice Josefa Kolancko; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Práticas de Ensino de Matemática no contexto de cursos técnicos integrados ao Ensino Médio. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14, 2017, Cascavel. **Anais...** Cascavel: SBEM, 2017, no prelo.

da região - Formosa do Oeste, Jesuítas, Bragantina e Iracema do Oeste - de escolas públicas e privadas.

Os alunos da turma, até a realização da pesquisa, não haviam tido contato com Modelagem. Pelos comentários dos alunos, percebe-se que chegaram ao Instituto com a expectativa de que teriam aula de Matemática nos moldes de cursos pré-vestibulares, ou seja, que o professor explicaria o conteúdo, ensinaria a técnica de resolução, resolveria alguns exemplos e solicitaria que eles resolvessem listas de exercícios. Alguns alunos da turma eram mais isolados, tímidos, outros, muito desinibidos.

O Instituto possui uma estrutura física, organizacional e pedagógica muito diferente do que eles estão acostumados, por isso precisam de um tempo de adaptação, que costuma levar um semestre na opinião dos professores do instituto.

O Instituto Federal do Paraná (IFPR) é uma instituição pública federal de ensino vinculada ao Ministério da Educação (MEC) por meio da Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica (SETEC). É voltada à educação superior, básica e profissional, especializada na oferta gratuita de educação profissional e tecnológica nas diferentes modalidades e níveis de ensino.

A instituição foi criada em dezembro de 2008 através da Lei 11.892, que instituiu a Rede Federal de Educação Profissional e Tecnológica e os 38 institutos federais hoje existentes no país. Com a Lei em vigor, a Escola Técnica da Universidade Federal do Paraná (ET-UFPR) foi transformada no IFPR, que hoje possui autonomia administrativa e pedagógica.

Dentre os objetivos do IFPR está o de ministrar educação profissional técnica de nível médio, prioritariamente na forma de cursos integrados, para os concluintes do Ensino Fundamental e para o público da Educação de Jovens e Adultos. Este curso é planejado de modo que o aluno conclua o Ensino Médio juntamente com uma habilitação profissional técnica de nível médio.

Dentre os princípios da Educação Profissional Técnica de Nível Médio elencados nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio (BRASIL, 2012), destacamos quatro, devido a acreditarmos que estes princípios relacionam-se de algum modo com a pesquisa realizada, seja porque tratam explicitamente de interdisciplinaridade como no item VII ou porque, de certo modo, tangenciam a Modelagem Matemática como nos itens I, IV e VIII, quando falam da preparação para o exercício de profissões ou da relação com a sociedade.

I - relação e articulação entre a formação desenvolvida no Ensino Médio e a preparação para o exercício das profissões técnicas, visando à formação integral do estudante;

IV - articulação da Educação Básica com a Educação Profissional e Tecnológica, na perspectiva da integração entre saberes específicos para a produção do conhecimento e a intervenção social, assumindo a pesquisa como princípio pedagógico;

VII - interdisciplinaridade assegurada no currículo e na prática pedagógica, visando à superação da fragmentação de conhecimentos e de segmentação da organização curricular;

VIII - contextualização, flexibilidade e interdisciplinaridade na utilização de estratégias educacionais favoráveis à compreensão de significados e à integração entre a teoria e a vivência da prática profissional, envolvendo as múltiplas dimensões do eixo tecnológico do curso e das ciências e tecnologias a ele vinculadas (BRASIL, 2012, p.2).

De acordo com a proposta curricular do Curso Técnico de Informática Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal do Paraná, campus Assis Chateaubriand, o curso procura construir uma organização curricular pautada nos princípios básicos do currículo integrado, tendo como principais eixos estruturantes a ciência, a cultura, o trabalho e a tecnologia, visando a integração de dimensões fundamentais da vida que estruturam a prática social do egresso. Desse modo, a proposta curricular prevê um ensino onde os conteúdos da base comum devem ser trabalhados de forma interdisciplinar com as disciplinas específicas do curso.

Com isso, o documento propõe que a formação geral e a formação técnica do estudante sejam interligadas e inseparáveis, com o intuito de que ele não resulte somente em um técnico ou somente um sujeito a mais que possui um Ensino Médio concluído, mas que se desenvolva plenamente em todas as dimensões de sua vida.

Na próxima seção apresentaremos como se deu o planejamento das atividades, as especificidades do curso e dos professores parceiros.

2.4 SOBRE O PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES DE (EM) MODELAGEM

Inicialmente, a ideia era desenvolver atividades de Modelagem nas aulas regulares de Matemática (com 2 horas/aulas semanais), interdisciplinarmente com as disciplinas técnicas do curso de informática – Fundamentos de Informática (com 2 horas/aula semanais) e Algoritmos e Linguagem de Programação (com 4 aulas semanais), que eram ministradas pelo mesmo professor, graduado em Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas. No entanto, durante o planejamento das

atividades e do projeto como um todo, optamos por convidar outros professores de diferentes disciplinas para participar do projeto. Deste modo, participaram também os professores de Português e Arte (na primeira atividade), Química, Biologia, Física e Geografia (na terceira atividade). Em média, estes professores possuem menos de dez anos de profissão e dois anos de trabalho no Instituto. Destes professores, cinco são efetivos do IFPR e dois temporários.

Durante o desenvolvimento das atividades, a professora-pesquisadora esteve em constante diálogo e planejamento com o professor de Informática, que participou das três atividades de Modelagem. No entanto, poucos diálogos aconteceram com os outros professores, devido às suas outras atividades e por começarem a participar da pesquisa quando a mesma já estava em andamento. Aconteceu apenas uma reunião formal com os professores de Informática, Química, Física, Biologia e Geografia juntos, além de conversas esporádicas nos intervalos das aulas e trocas de alguns e-mails. Esta reunião aconteceu no período de planejamento da terceira atividade.

A intenção de desenvolver as atividades nas aulas regulares é de observar como se daria o desenvolvimento de atividades de Modelagem neste contexto, tendo em vista o número de alunos e a carga horária da disciplina.

A seguir, na próxima seção, apresentaremos a caracterização dos instrumentos de coleta de informações.

2.5 A CARACTERIZAÇÃO DOS INSTRUMENTOS DE COLETA DE INFORMAÇÕES

Para a realização da coleta de informações solicitamos o assentimento dos alunos (Anexo 8.3) e o consentimento dos seus responsáveis (Anexo 8.4), devidamente documentados. Além disso, recebemos autorização da direção geral do Instituto Federal do campus Assis Chateaubriand.

Para a coleta de informações desenvolvemos três atividades de Modelagem Matemática no período de agosto a dezembro de 2016, pensadas de forma interdisciplinar pelos professores da área técnica e do núcleo comum do Curso de Informática.

Araújo e Borba (2004, apud Borba, 2004) afirmam que a pesquisa qualitativa deve ter uma visão de conhecimento que esteja em sintonia com procedimentos como entrevistas, análises de vídeos e interpretações. Nesse sentido, para a coleta de

dados, utilizamos gravações em vídeo das aulas, algumas gravações de áudio dos grupos e das reuniões com os professores, fotos de anotações feitas no quadro e nos cadernos dos alunos, anotações dos alunos feitas no papel e sites produzidos pelos alunos. Todas as gravações de áudio e vídeo foram transcritas na íntegra com o objetivo de selecionar episódios de análise. Para realizar a transcrição a professora-pesquisadora assistiu às gravações de vídeo e transcreveu-as. Em seguida, ouviu as gravações de áudio de cada grupo e inseriu as falas dos alunos, destacadas com cores diferentes para cada grupo, na transcrição do vídeo.

2.6 CONFLITOS ENTRE O “EU PROFESSORA” E O “EU PESQUISADORA”

No desenvolvimento da pesquisa foi inevitável a professora-pesquisadora se envolver emocionalmente e racionalmente com a pesquisa, com os sujeitos, no caso, os alunos, e com o rumo que tomaram. São três “personalidades” em uma mesma pessoa; a professora da instituição, que precisa “dar conta” da ementa do curso, do calendário, das avaliações, das demais atividades da turma e das atividades burocráticas da instituição; a pesquisadora, preocupada com o andamento da pesquisa, com a coleta de dados e com a posterior análise destes dados e; a professora-pesquisadora, preocupada com a aprendizagem dos alunos. Neste sentido, Borba (2004) afirma que em pesquisa qualitativa entende-se que “o conhecimento não é isento de valores, de intensão e da história de vida do pesquisador, e muito menos das condições sócio-políticas do momento” (BORBA, 2004, p. 3).

Desse modo, alguns encaminhamentos da pesquisa acabaram se modificando de modo a atender as especificidades da Instituição, dos alunos e da própria professora-pesquisadora. Por exemplo: observamos certa incoerência no discurso dos alunos. Em certos momentos, reclamam do ensino tradicional da Matemática, onde não sabem por que precisam aprender determinados conteúdos. No entanto, quando são desafiados a mudar o paradigma a que estão submetidos, demonstram certa resistência. Acredita-se que essa resistência se justifica pelo fato de a Modelagem não seguir um roteiro de procedimentos, e por demandar por mais atividades cognitivas dos alunos, os quais não estão acostumados, ou ainda, não sabem como proceder. Observa-se esta insegurança por parte dos professores

também, tanto de Matemática, quanto das demais disciplinas; é o “medo” frente ao novo, que só cessará a partir do momento que essa prática se tornar comum na Instituição.

2.7 PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DOS DADOS

Para análise dos dados, selecionamos episódios potencialmente significativos diante dos objetivos dessa pesquisa e analisamos esses episódios à luz da fundamentação teórica pertinente. Consideramos episódios potencialmente significativos àqueles que denotam indícios de manifestações de aprendizagem dos alunos. Por episódios, por sua vez, entendemos tanto os excertos das falas dos alunos no desenvolvimento das atividades, quanto os trechos das resoluções escritas dos alunos, do diálogo com outros professores e as imagens do desenvolvimento da atividade.

Após a seleção dos episódios, buscamos realizar uma contextualização da atividade de Modelagem, que consiste em apresentar os procedimentos e acontecimentos que levaram à realização da atividade. Em seguida, trazemos uma descrição da atividade, buscando, neste momento, apresentar o que os alunos desenvolveram tanto do ponto de vista matemático quanto das outras áreas.

Cabe salientar que em um trabalho interdisciplinar a Matemática não tem nem maior nem menor importância que as demais áreas do saber que se fazem necessárias na resolução do problema, uma vez que tais conhecimentos são necessários e complementares entre si. No entanto, em se tratando de um trabalho que versa sobre a Modelagem Matemática na Educação Matemática, é que lançaremos um olhar especial e específico para aquilo que de Matemática emergiu nas atividades interdisciplinares.

Para as análises, buscamos inferir acerca das questões auxiliares da pesquisa em cada episódio selecionado:

- Quais conceitos matemáticos emergiram no episódio?
- Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?

- Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?

Em seguida, tecemos comentários sobre fatos acontecidos nos episódios que embora tenham sido considerados relevantes, não haviam sido contemplados nas questões auxiliares. Finalmente, elencamos aspectos advindos destas análises que, entendemos, precisam ser consideradas no desenvolvimento do produto educacional, fruto dessa pesquisa. E, por fim, considerando nosso entendimento de interdisciplinaridade, verificaremos de que modo ela se expressa nas atividades de Modelagem desenvolvidas.

Findada a análise de cada uma das três situações de Modelagem via episódios considerados potencialmente significativos para o interesse da pesquisa, realizamos inferências acerca da questão de investigação – *Quais são as possíveis contribuições de um trabalho interdisciplinar em Modelagem Matemática no que diz respeito à ressignificação de conceitos matemáticos e à aprendizagem de novos conceitos?* – Essas inferências tomarão como fundamentação as convergências e os agrupamentos construídos a partir das análises específicas de cada episódio e figurarão nas considerações finais do trabalho.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo tratamos da Modelagem Matemática na Educação Matemática, mais especificamente na perspectiva de Barbosa (2004), Almeida e Dias (2004) e Almeida, Silva e Vertuan (2013). Discorreremos sobre a implementação de atividades de Modelagem na sala de aula, sobre os professores quando realizam atividades de Modelagem Matemática com seus alunos e a aprendizagem dos alunos com (em) Modelagem Matemática.

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A pergunta “*Professora, onde vou usar isso na minha vida?*” é recorrente nas aulas de Matemática da Educação Básica. Alunos, e até mesmo professores, muitas vezes não conseguem relacionar a Matemática que é estudada na escola com situações da realidade⁴, quando isso poderia contribuir na atribuição de sentido, pelo aluno, ao que se estuda. Então, por que não explorar a Matemática que pode “florescer” dessas situações da realidade?

Em muitos casos, ao ensinar função exponencial, o professor inicia a aula escrevendo no quadro a expressão $f(x) = a^x$, explicando o que significa a base a e o expoente x , bem como as devidas restrições ($a > 0$ e $a \neq 1$), segue com alguns exemplos e uma lista de exercícios do tipo “faça como no modelo”. Em alguns casos, o professor inicia o conteúdo com uma aplicação, tal como, o caso de crescimento da população de bactérias representado pela função $f(x) = 2^x$.

De todo modo, seja iniciando o conteúdo pelas explicações de seus conceitos e algoritmos ou por uma pseudo aplicação (como o crescimento de uma população de bactérias fictícia a uma taxa fictícia), o que se observa, geralmente, são práticas de aulas de Matemática divididas em duas partes, assim como observou Cotton (1998, apud Skovsmose, 2000): inicialmente, o professor expõe o conteúdo matemático e

⁴ Não é nossa intenção discutir o termo realidade. No entanto, temos ciência das discussões que são realizadas na área (VERONEZ; VELEDA, 2016; VILLA-OCHOA; LOPEZ, 2011; VELEDA, 2010; VELEDA; ALMEIDA, 2009; NEGRELLI, 2008). Neste trabalho, assumiremos as ideias de Negrelli (2008), que também foram abordadas em Veronez e Velela (2016), sobre realidade. Deste modo, realidade pode ser dividida em realidade inicial (é a realidade dada ao aluno, considerada existente independente dele, composta por elementos da natureza social, física, econômica, etc.) e realidade intermediária (realidade construída pelo aluno, criada com base na relação estruturada dos elementos possíveis de serem captados por ele).

suas técnicas de resolução e logo em seguida os alunos trabalham com exercícios. Estes exercícios, retirados, na maioria das vezes, de livros didáticos, geralmente são formulados por pessoas externas àquela sala de aula e, logo, eles podem não ter relevância para a aula em si, ou ainda, muito embora possam ser interessantes do ponto de vista dos conceitos e estratégias matemáticos, podem não interessar os alunos a ponto de eles se dedicarem a pensar nos mesmos. Em sendo exercícios, podem possuir a característica de apresentar somente uma única resposta correta, não dando a possibilidade de o aluno investigar diferentes possibilidades de resolução, não dando espaço ao diálogo entre os alunos e desmotivando-os quando sabem que o professor já tem a resposta correta e ele só terá sucesso se chegar àquela resposta.

No entanto, há a possibilidade de o professor chegar à sala de aula e apresentar aos alunos uma situação real, com dados reais e com um problema que, de fato, pode interessar aos alunos, ou ainda, pode discutir com os alunos um problema que interesse a eles e, a partir de então, buscar os dados para investigá-lo. A partir da análise e do tratamento dos dados desta situação, com ou sem o auxílio de softwares, pode ser que a matemática utilizada na resolução do problema seja também a função exponencial. Um possível problema poderia ter relação com o tema lixo eletrônico e originar a questão: *Quantos celulares a população de Assis Chateaubriand descartará no lixo no ano de 2020?*⁵

Este tema pode ser relevante para a investigação, visto que a maioria dos alunos troca de celular com frequência e, em alguns casos, acaba jogando o antigo no lixo. Para responder ao problema, uma possibilidade seria os alunos pesquisarem quantos celulares são descartados em média por habitante, por ano, no município de Assis Chateaubriand e o número de habitantes, na faixa etária, que costumeiramente possui celular. Tendo esses dados em mãos poderiam pesquisar a projeção de crescimento populacional da cidade e construir uma possível solução para o problema.

Neste exemplo, a partir de um único problema, os alunos têm a oportunidade de estudar função exponencial, estatística, porcentagem, logaritmo, dentre outros conceitos matemáticos, além de poderem desenvolver a criticidade e a

⁵ Esta atividade será mais detalhada no capítulo de Análise dos Dados.

conscientização em relação ao lixo eletrônico que descartam e até mesmo sobre o consumismo tecnológico.

Este “jeito” de trabalhar a Matemática é o que diversos autores chamam de Modelagem Matemática (Almeida; Silva; Vertuan, 2013, Burak, 2004, Barbosa, 2004, Caldeira, 2009, Bassanezi, 2013). De modo geral, é não só o olhar matemático sobre as diversas situações da realidade, mas um olhar interdisciplinar, onde para além de ensinar Matemática, Física, Química ou Biologia, visa ensinar o aluno a pensar, a investigar, a resolver problemas, trabalhar em grupo, organizar ideias e matematizar. Neste contexto, Almeida e Dias (2004, p. 2) denotam que “a exploração, no ensino, de situações da vida real, em que a Matemática se aplica, torna-a mais dinâmica e interessante e proporciona maior eficiência no processo de ensino e aprendizagem”.

A Modelagem Matemática vem conquistando espaço nas pesquisas e práticas em Educação Matemática nos últimos anos. Essas pesquisas em Modelagem contribuíram para que emergissem diferentes maneiras de se pensar a Modelagem Matemática na Educação Matemática, embora, de modo geral, essas maneiras apresentem o entendimento de que em Modelagem Matemática aspectos matemáticos emergem de situações da realidade com vistas a resolver um problema que, por algum motivo, interessa aos alunos.

Essas diferentes maneiras de se pensar a Modelagem expressam também as concepções de ensino e de Matemática de seus pesquisadores (KLÜBER; BURAK, 2008).

Segundo Barbosa (2004, p.3), Modelagem “é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade”. Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 17) vêem na Modelagem Matemática “uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático”. Burak (2004, p. 2) a entende como “alternativa metodológica para o Ensino de Matemática” e aponta o princípio de sua perspectiva como sendo o “interesse do grupo ou dos grupos”.

A Modelagem Matemática, como ambiente de aprendizagem (BARBOSA, 2004), como alternativa pedagógica (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013) ou ainda

como alternativa metodológica (BURAK, 2004), busca promover a aprendizagem ao interpretar matematicamente um fenômeno da realidade⁶.

Para isso, Burak (2004) sugere cinco etapas de encaminhamento do trabalho com Modelagem em sala de aula: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento do(s) problema(s); resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema e, por fim, análise crítica da(s) solução(ões). Para o autor, a escolha do tema deve ser incumbência dos alunos, deve partir do interesse deles. O desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema acontece no momento da resolução do problema, ou seja, ao tentar resolver o problema matematicamente, desenvolve-se uma Matemática, que não é definida *a priori*, mas surge dependendo do tema. O modelo matemático, para Burak (2004), constitui-se como uma representação que permite uma tomada de decisão. Sua construção é oportunizada na etapa resolução do problema e desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema.

Barbosa (2004), afirma que em uma atividade de Modelagem “os alunos, por certo, terão que formular questões, buscar dados, organizá-los, abordá-los matematicamente, avaliar os resultados, traçar novas estratégias, etc”. O autor apresenta três possibilidades de encaminhamento de uma atividade de Modelagem que denomina de casos⁷.

Na perspectiva de Almeida, Silva e Vertuan (2013) a

Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 12).

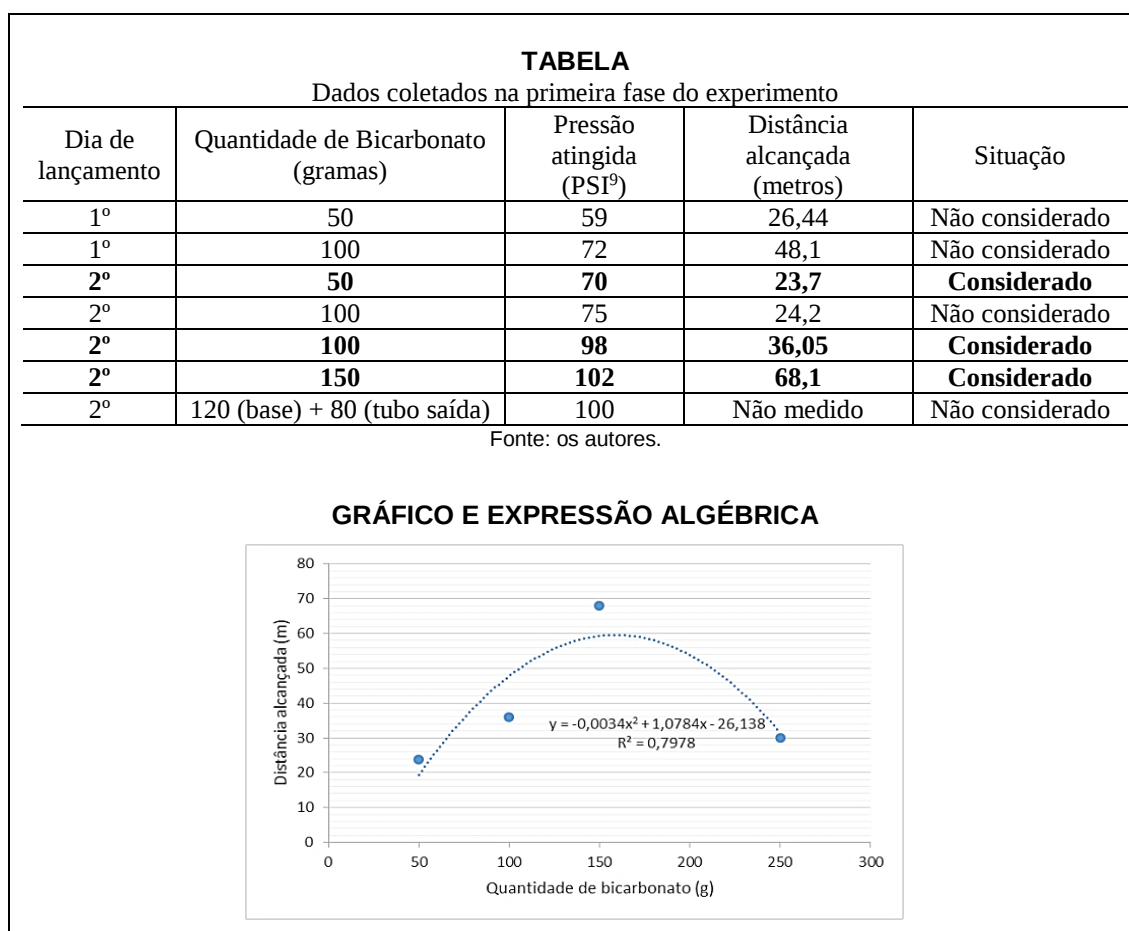
Segundo os autores, a essa situação final desejada associa-se uma representação matemática chamada de modelo matemático. Assim conceituam modelo como sendo “uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p.13). Por exemplo: quando alunos do Ensino Médio decidem modelar a relação existente entre a quantidade de bicarbonato colocada como combustível em um foguete de garrafa PET e a distância atingida pelo foguete, simplificam o modelo considerando apenas duas

⁶ Além das perspectivas apresentadas, há outras na comunidade de Modelagem, tais como: Bassanezi (2013), Biembengut (2011, 2016), Caldeira (2009).

⁷ Os casos de Barbosa (2004) serão apresentados na próxima seção.

variáveis - quantidade de bicarbonato e distância alcançada - mesmo tendo conhecimento de outras variáveis como direção e velocidade do vento, ponto de pressão e de gravidade, entre outras⁸.

Almeida, Silva e Vertuan (2013), ainda afirmam que o modelo matemático pode ser representado de diferentes maneiras: uma equação, uma tabela, um gráfico, entre outros. No caso do foguete descrito acima o modelo encontrado pode ser representado das maneiras apresentadas no Quadro 1:



Quadro 1 - Exemplos de modelos matemáticos

Fonte: SETTI et al., 2016, p. 9 - 10.

Almeida, Silva e Vertuan (2013), apresentam cinco fases relativas aos procedimentos necessários para o desenvolvimento da atividade: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. A inteiração é o

⁸ SETTI, Elenice Josefa Kolancko, et al. Modelagem Matemática e Física: uma experiência com foguetes In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais XII Enem**. São Paulo: SBEM, 2016

⁹ Unidade de medida de pressão no Manômetro (instrumento que acoplado à base que mede a pressão). PSI – Libra-força por polegada quadrada.

primeiro contato com a situação-problema e consiste em conhecer os aspectos dessa situação inicial. A matematização consiste na transformação da linguagem natural para a linguagem matemática, dando significado matemático à situação inicial e permitindo a resolução. Após resolver o problema é necessário interpretar os resultados e validá-los comparando-os com os dados coletados.

Vertuan e Almeida (2016, p. 1072), todavia, consideram que “a ordem em que tais fases aparecem bem como o tempo dedicado a cada uma e os obstáculos presentes em cada uma delas dependem da dinâmica da atividade e do contexto em que a atividade é realizada”. E ainda que as fases devem ser revisitadas sempre que houver necessidade.

Essas diferentes perspectivas de Modelagem se refletem na pesquisa em Modelagem e também na sua implementação em sala de aula. Aspecto que será detalhado na próxima seção.

3.2 A IMPLEMENTAÇÃO DE ATIVIDADES DE MODELAGEM EM SALA DE AULA

Nesta seção nos dedicamos a discorrer sobre a implementação de atividades de Modelagem nas perspectivas de Almeida e Dias (2004), posteriormente apresentadas por Almeida, Silva e Vertuan (2013) e de Barbosa (2004).

Neste aspecto, podemos nos questionar quando e como utilizar Modelagem Matemática na Educação Básica. Blum e Niss (1991) caracterizam diferentes possibilidades de inclusão da Modelagem na escola: separação, combinação, alternativa da integração curricular e alternativa interdisciplinar integrada. Na alternativa de separação, em vez de incluir a Modelagem nas aulas regulares, as atividades são desenvolvidas em cursos separados, em momentos extraclasse. Na combinação, aspectos da Modelagem Matemática são utilizados no decurso das aulas para introduzir ou para aplicar conceitos matemáticos. Quando se fala em alternativa da integração curricular, os problemas vêm em primeiro lugar e a matemática para lidar com eles é desenvolvida de acordo com a necessidade. De todo modo, como o próprio nome sugere, a alternativa trata de atividades cujos conteúdos utilizados são relevantes à série dos alunos que lidam com a situação. Por fim, na alternativa interdisciplinar integrada, há uma integração completa entre as atividades matemáticas e extra-matemáticas num quadro interdisciplinar onde a “matemática”

não é um assunto separado. As duas primeiras trabalham de forma a utilizar atividades de Modelagem para desenvolver alguns conteúdos de Matemática. Já as duas últimas defendem a Modelagem como “orientadora” do programa de Matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p.21).

Almeida, Silva e Vertuan (2013) afirmam que a inclusão de atividades de Modelagem pode se dar no âmbito da própria aula de Matemática, em horários extraclasse (cursos ou oficinas) ou em uma combinação dessas duas circunstâncias (uma parte é desenvolvida em sala e a outra em encontros extraclasse).

Nesse sentido, entende-se que uma atividade de Modelagem pode ser adaptada de acordo com as especificidades da escola, turma e professor. No entanto, deve-se preservar sua característica fundamental: a investigação, pelos alunos, de um problema da realidade, por meio da Matemática, atividade em que o professor tem a função de orientar, indicar caminhos, perguntar, sugerir procedimentos (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013).

Ao trabalhar Modelagem em cursos regulares, Almeida e Dias (2004), sentiram a necessidade de introduzi-la de forma gradativa, para que os alunos pudessem ir se familiarizando com o “novo jeito” de estudar Matemática. As autoras, então, sugerem três momentos de implementação de atividades de Modelagem.

- Em um primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que ações como definição de variáveis e de hipóteses, a simplificação, a transição para linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para a análise da situação, são em certa medida, orientadas e avaliadas pelo professor.
- Posteriormente, em um segundo momento, uma situação-problema é sugerida pelo professor aos alunos, e estes, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação e realizam a definição de variáveis e a formulação de hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação. O que muda essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência do estudante no que se refere à definição de procedimentos extra matemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação.
- Finalmente, no terceiro momento, os alunos, distribuídos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema, a coleta e análise de dados, as transições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação, bem como a comunicação desta investigação para a comunidade escolar (ALMEIDA; DIAS, 2004, p.7)

Neste sentido, observa-se que o primeiro momento consiste em um papel mais ativo do professor, no segundo os alunos já assumem a responsabilidade de coleta de dados e no terceiro eles precisam identificar o problema, coletar os dados e chegar ao modelo matemático, neste momento o professor orienta a condução das atividades (ALMEIDA; DIAS, 2004). Isso porque no contexto em que as autoras desenvolveram a pesquisa, possivelmente identificaram esta necessidade de implementar as atividades de Modelagem de modo gradativo, principalmente frente ao enfrentamento da tradição escolar que muito difere da dinâmica de uma aula com Modelagem Matemática e ao estranhamento que a transição de um paradigma a outro pode suscitar. No entanto, dependendo da característica da turma em que a atividade será desenvolvida ou do objetivo do trabalho, acredita-se não haver necessidade de seguir fielmente estes momentos, de forma linear.

Na perspectiva de Barbosa (2004), as atividades de Modelagem Matemática não possuem sempre os mesmos encaminhamentos de resolução, tendo em vista a sua proposição e o nível de envolvimento do professor e dos alunos. Barbosa (2004, p.4) chama estes encaminhamentos diferenciados de “regiões de possibilidades” ou simplesmente de “casos”.

Uma atividade se aproxima do caso 1 de Barbosa (2004, p.4) quando “o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação”. O caso 2 se caracteriza quando “os alunos se deparam apenas com o problema para investigar, mas têm que sair da sala de aula para coletar dados. Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial” (BARBOSA, 2004, p.4). O caso 3, por sua vez, “trata de projetos desenvolvidos a partir de temas ‘não-matemáticos’, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos” (BARBOSA, 2004, p. 4).

Em cada caso há uma distribuição de responsabilidades sobre as tarefas que devem ser desenvolvidas nas atividades de Modelagem. O quadro 2 ilustra esta distribuição.

	CASO1	CASO2	CASO3
Formulação do Problema	Professor	Professor	Professor/aluno
Simplificação	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Coleta de dados	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Solução	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno

Quadro 2 - Tarefas no processo de Modelagem

Fonte: BARBOSA (2004, p. 5).

É importante destacar que os “momentos” de Almeida e Dias (2004) e os “casos” de Barbosa (2004) são coisas distintas. O primeiro se refere à familiarização gradativa dos alunos com a Modelagem Matemática e o segundo trata das possibilidades de atribuições de alunos e professor no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem (ALMEIDA; VERTUAN, 2011).

Apresentamos, a seguir, um quadro síntese (Quadro 3) das três perspectivas de Modelagem que mais estão alinhadas com nossa pesquisa.

AUTORES	DEFINIÇÃO DE MODELAGEM	DEFINIÇÃO DE MODELO	ENCAMINHAMENTO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM
ALMEIDA, DIAS (2004)	Percebida como um estudo matemático acerca de um problema não essencialmente matemático, que envolve a formulação de hipóteses e simplificações adequadas na criação de modelos matemáticos para analisar o problema em estudo.	Uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam.	Sugerem 3 momentos de implementação da atividade de Modelagem, dando a ideia de implementação gradativa: o primeiro consiste em um papel mais ativo do professor; no segundo os alunos já assumem a responsabilidade de coleta de dados e no terceiro eles precisam identificar o problema, coletar os dados e chegar ao modelo matemático, neste momento o professor apenas orienta a condução das atividades.
ALMEIDA, SILVA e VERTUAN (2013)	Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final.		Apresentam cinco fases de desenvolvimento da atividade de modelagem: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.
BARBOSA (2001, 2003, 2004)	É um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade.	Não exige a obtenção de um modelo matemático.	Sugere três diferentes possibilidades de organização curricular, chamando-as de casos.
BURAK (2004)	Conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e tomar decisões. Alternativa metodológica para o ensino de Matemática. Parte do princípio do interesse do grupo de alunos.	Qualquer representação que permite uma tomada de decisão.	Sugere cinco etapas: - escolha do tema; - pesquisa exploratória; - levantamento dos problemas; - resolução do problema e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema; - análise crítica das soluções.

Quadro 3 - Síntese das perspectivas de Modelagem de ALMEIDA e DIAS, ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, BARBOSA e BURAK

Fonte: elaborado pela autora, baseado em ALMEIDA, DIAS (2004), ALMEIDA, SILVA e VERTUAN (2013), BARBOSA (2001, 2003, 2004) E BURAK (2004).

3.3 SOBRE OS PROFESSORES QUANDO REALIZAM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM SEUS ALUNOS

Ao decidir trabalhar com Modelagem, o professor se depara com inúmeros desafios, conflitos e angústias, pois essa tendência em ensino de Matemática talvez seja a que mais se diferencie do que costumeiramente se desenvolve em sala de aula. Sem falar das resistências por parte dos alunos, de outros professores e até da gestão da instituição, uma vez que os conteúdos matemáticos não serão trabalhados linearmente, mas sim à medida que vão surgindo no desenvolvimento da atividade (OLIVEIRA; BARBOSA, 2011).

Em um ambiente de Modelagem, o professor pode não ter muita clareza sobre o controle da comunicação em termos de seleção, sequência, ritmo e critérios da comunicação da prática pedagógica, pois não há previsibilidade do que ocorre na abordagem de situações-problema provenientes do dia a dia ou de outras disciplinas (OLIVEIRA; BARBOSA, 2011, p. 269).

Segundo Burak (2004, p. 3) “o papel do professor fica redefinido, pois ele passa a se constituir como mediador entre o conhecimento matemático elaborado e o conhecimento do aluno ou do grupo”. Com isso,

O professor assume um papel diferenciado em um ambiente de Modelagem Matemática. Nesse contexto, o professor deve incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não as suas conjecturas. Durante a fase de discussão cabe ao professor estimular a comunicação entre os alunos. Ao organizar a fase de discussão coletiva o professor deve conhecer bem os trabalhos de todos os grupos de alunos de modo a valorizar tanto as descobertas mais interessantes como as mais modestas (ALMEIDA; DIAS, 2004, p. 6).

E o modo como o professor medeia uma atividade de Modelagem, ou o modo como realiza intervenções, interfere na atitude dos alunos frente a atividade, de ativa à acomodada (SANTANA; BARBOSA, 2012). Ou seja, a mediação do professor pode fazer com que o aluno participe mais ou menos ativamente na atividade.

Santana e Barbosa (2012) classificam essas intervenções em *discurso procedimental* e *discurso silenciador*. Segundo os autores,

O discurso procedimental, refere-se ao discurso do professor, no qual ele deixa evidentes os procedimentos de abordagem do problema no ambiente de aprendizagem, como: onde as informações podem ser coletadas; quais informações são relevantes para o desenvolvimento das situações-problema; e como podem ser desenvolvidas as situações-problema. Já o discurso silenciador refere-se à invalidação de encaminhamentos propostos pelos

alunos, como aqueles em termos de que dados devem ser utilizados, das informações relevantes etc (SANTANA; BARBOSA, 2012, p.1016).

“Tais discursos dão visibilidade sobre as regras para as produções discursivas dos alunos nesse ambiente de aprendizagem, seja no abandono de hipóteses [...] ou na escolha dos conteúdos matemáticos ou dados [...]” (SANTANA; BARBOSA, 2012, p. 1016). Neste contexto, entende-se que com “orientações demais” o professor acaba dizendo o que os alunos devem fazer, e que “orientações de menos” podem desestimular os alunos frente aos obstáculos das atividades. Neste sentido, a “medida” ideal, se é que existe uma, precisa ser sentida pelo professor com sua turma, dadas as especificidades do ambiente, da turma, do dia e da atividade, refletindo sobre sua maneira de intervir, para que não descaracterize a atividade de Modelagem.

Neste sentido, o papel do professor é de grande importância, pois suas contribuições devem se dar no sentido de orientar os alunos sem violar a sua criatividade (ALMEIDA; DIAS, 2004).

Toda essa mudança no papel do professor na aula de Matemática com Modelagem gera situações de tensão (OLIVEIRA; BARBOSA, 2011), principalmente na primeira experiência do professor. Em uma pesquisa realizada com professores atuantes na educação básica que participavam de um curso de formação, Oliveira e Barbosa (2011) identificaram as situações de tensão apresentadas no Quadro 4.

SITUAÇÕES DE TENSÃO	TENSÕES NOS DISCURSOS	PERCEPÇÃO DOS AUTORES – OLIVEIRA e BARBOSA
O envolvimento dos alunos na discussão do tema.	Interação com os alunos.	O que pode ser perguntado aos alunos e como pode ser perguntado.
	Sequenciamento e ritmo na prática pedagógica.	Qual sequência utilizar, o seu ritmo e como implementá-las.
O planejamento do ambiente de Modelagem.	Escolha do tema.	Qual tema escolher e como escolher um tema que envolva os alunos.
	Interação com os alunos.	Quais perguntas fazer e como fazê-las.
A organização dos alunos para realizar as atividades.	Participação dos alunos.	Como propor atividades que envolvam os alunos para que participem ativamente.
A apresentação das respostas dos alunos.	Abordagem das respostas dos alunos.	Como intervir e discutir as respostas dos alunos.

Quadro 4 - Relação entre situações de tensão e tensões nos discursos

Fonte: OLIVEIRA; BARBOSA, 2011, p. 288. A terceira coluna, percepção dos autores, foi construída pela autora baseados em Oliveira e Barbosa (2011).

Apesar de os estudos acerca da Modelagem Matemática assinalarem inúmeros benefícios para o ensino de Matemática, em decorrência de todas as considerações anteriores, sua implementação nas escolas ainda é um desafio. Na

próxima seção, discorreremos sobre a relação entre Modelagem Matemática e a aprendizagem dos alunos.

3.4 APRENDIZAGEM DOS ALUNOS EM (COM) MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesta seção discorreremos sobre o que os alunos aprendem **em** Modelagem Matemática e sobre o que os alunos aprendem **com** Modelagem Matemática, a partir de pesquisas realizadas por diversos autores.

Em atividades de Modelagem Matemática a aprendizagem dos alunos parece acontecer de forma distinta àquela construída segundo o paradigma do exercício, isso porque os papéis dos alunos são diferentes (SANTANA; BARBOSA, 2012). O aluno deixa de ser apenas um receptor e reproduzidor de informações e algoritmos e passa a ser um colaborador no processo de aprendizagem. Colaborador no sentido de contribuir na construção do conhecimento à medida que participa do desenvolvimento da atividade. Quem colabora, faz parte do processo.

Como enfatizam Almeida e Brito (2005, p. 495), “a Matemática em atividades de Modelagem assume para os alunos sentido e significado¹⁰ que provavelmente diferem daqueles das aulas convencionais. [...] os alunos estabelecem algumas relações e elas podem ajudá-los a atribuir sentidos”.

No entanto, Klüber e Burak (2008, p. 25), observaram que “algumas crianças se adaptam mais facilmente ao sistema de reprodução e, o fato de gostar de Matemática não implica diretamente em aprendizagem a partir do significado, mas sim da repetição”. Isso implica em certa resistência por parte de alguns alunos em participar de atividades de Modelagem, pois a dinâmica é diferente e o objetivo não é só desenvolver técnicas de resolução e sim, também, outros conhecimentos inerentes à atividade de Modelagem.

Neste sentido, Silva, Borssoi e Almeida (2015), enfatizam que as atividades de Modelagem,

¹⁰ Os autores se apoiam nas noções de sentido e significado dadas por Leontiev (1978). “O significado refere-se ao sistema de relações objetivas que se forma no processo de desenvolvimento de uma expressão. Ele constitui um núcleo relativamente estável de compreensão que é compartilhado por todas as pessoas. O sentido, refere-se ao significado da palavra para cada indivíduo, e incorpora relações que dizem respeito ao contexto de uso da palavra e a vivência afetivas do indivíduo. Assim o sentido é produzido por relações” (ALMEIDA; BRITO, 2005, p. 486).

ao mesmo tempo em que proporcionam ao aluno o envolvimento com uma situação-problema, também visam desenvolver no aluno o que Galbraith (2012) chama de 'infraestrutura intelectual', de modo que os alunos possam se tornar usuários dos conhecimentos matemáticos construídos e resolver problemas de forma independente em diferentes situações dentro e fora do ambiente escolar (SILVA; BORSSOI; ALMEIDA, 2015, p.163).

As autoras denotam que, ao desenvolver uma atividade de Modelagem, os alunos podem se deparar com uma situação em que não possuem conhecimentos suficientes para resolvê-la, emergindo assim a necessidade de desenvolvê-los. Neste sentido, no desenvolvimento de atividades de Modelagem, os alunos podem aprender novos conceitos matemáticos a partir da busca por uma solução para o problema. Essa aprendizagem dos alunos pode ser autônoma, quando buscam informações em livros ou sites, ou através do professor que está mediando a atividade, o que parece ser mais comum.

Neste contexto, Vertuan e Almeida (2016) afirmam que:

A familiarização dos alunos com atividade de Modelagem pode resultar, para além de uma compreensão acerca do que constitui uma atividade de Modelagem, em um aumento no repertório de estratégias de resolução e em certa autonomia frente à utilização dos conceitos matemáticos, suas propriedades e sua importância no contexto do problema (VERTUAN; ALMEIDA, 2016, p. 1074).

Os autores concluem que:

Quando um aluno toma consciência dos conceitos matemáticos que conhece, das estratégias que pode utilizar frente a um problema específico e dos modos como se dá sua aprendizagem, pode otimizar suas ações de modo a potencializar a apreensão de conhecimentos e o desenvolvimento cognitivo (VERTUAN; ALMEIDA, 2016, p. 1074).

Neste contexto, Almeida, Silva e Vertuan (2013) denotam que os alunos desenvolvem ações cognitivas, quando: partindo da situação inicial até a identificação do problema, realizam uma representação mental da situação, compreendendo-a e estruturando-a; constroem um modelo matemático, realizando a matematização da situação; ao caminhar para os resultados matemáticos realizam uma síntese; interpretam e validam os resultados e; por fim, comunicam seus resultados e argumentam acerca deles.

Para isso os alunos precisam trabalhar em grupo, pois uma atividade de Modelagem se caracteriza como uma atividade cooperativa (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013). No entanto, este modo de estudar apresenta-se como um desafio

para os alunos, que estão acostumados a sentar em fileiras e “ouvir” a aula do professor. Assim, ao participar de atividades de Modelagem, os alunos podem aprender a trabalhar em grupos, a lidar com conflitos e justificar suas ideias.

Portanto, o trabalho com Modelagem Matemática parece ter potencialidades para desenvolver nos alunos aprendizagens conceituais, tanto de Matemática como de outras disciplinas ou áreas do conhecimento; aprendizagens procedimentais, como estratégias de resolução e algoritmos; aprendizagens de comunicação, ao lidar com conflitos, trabalhar em grupo e justificar suas ideias (VERTUAN; SILVA; BORSSOI, 2017); aprendizagens tecnológicas, ao lidarem com softwares de Modelagem, de simulação ou planilhas eletrônicas e; aprendizagens metacognitivas, quando o aluno sabe onde possui dificuldades, no que precisa se dedicar mais, ou desenvolve experiência em resoluções de atividades de Modelagem.

No que tange às aprendizagens referentes a outras áreas do conhecimento, bem como a conceitos específicos de outras disciplinas, podemos abarcar a questão da interdisciplinaridade com Modelagem Matemática, assunto a que nos dedicamos no próximo capítulo.

4 INTERDISCIPLINARIDADE EM MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo tratamos sobre interdisciplinaridade, seu contexto histórico e objetivos. A seguir, discutimos sobre interdisciplinaridade no contexto da Educação Matemática e por fim sobre interdisciplinaridade no contexto da Modelagem Matemática, apresentando um estudo sobre as características de interdisciplinaridade presente em trabalhos apresentados em eventos de área.

4.1 INTERDISCIPLINARIDADE

Tendo em vista que a presente pesquisa tem a intenção de promover atividades interdisciplinares em Modelagem Matemática, convém dedicar um capítulo à interdisciplinaridade. Deste modo, antes de discorrer sobre a interdisciplinaridade é importante entender o que levou ao modelo de ensino que vem ao longo desses anos promovendo uma aprendizagem fragmentada e sem conexão com a realidade.

Segundo Garruti e Santos (2004), a escola, aos poucos, foi sendo influenciada pelo processo de industrialização, onde cada indivíduo passou a exercer uma função específica do processo e produção material.

Essa influência taylorista¹¹ na educação, no início do século XX, segundo Santomé (1998), fez com que nem professores e nem alunos participassem dos processos de reflexão crítica sobre a realidade, causando assim um distanciamento entre essa realidade e as instituições escolares. Os conteúdos que formavam o currículo escolar eram descontextualizados e as disciplinas eram trabalhadas de forma isolada, não propiciando a construção e a compreensão de conexões com a realidade. Ainda segundo o autor, os conteúdos ensinados nas instituições escolares eram “demasiado abstratos, desconexos e, portanto, incompreensíveis” (SANTOMÉ, 1998, p. 14).

Segundo Frigotto (1995, p. 174, apud Pires, 1998), “a organização curricular fragmentada e desarticulada, disciplinar, reflete a cisão histórica das atividades humanas imposta pelo modelo industrial à maioria das populações”.

¹¹ Sistema de organização de trabalho desenvolvido por Frederick Winslow Taylor, marcado pelo barateamento da mão-de-obra, superprodução e rendimentos.

No contexto educacional e pedagógico, herdamos um sistema fragmentado em disciplinas, que na maioria das vezes não se comunicam. Esse sistema de disciplinas não está dando conta de explicar o mundo ao qual estamos inseridos, o qual possui uma dinâmica complexa.

Dowbor (1994, apud Pires, 1998) enfatiza que com as modificações no mundo do trabalho, atualmente, a qualificação dos trabalhadores é alterada, pois os meios de produção querem pessoas qualificadas, flexíveis, com base técnica e científica, ou seja, trabalhadores multifuncionais.

Pires (1998) aponta que apesar de ser necessário que as disciplinas sejam integradas, ainda há no Brasil uma organização de ensino fragmentada e desarticulada, que produz uma formação insuficiente para as necessidades sociais que exigem do cidadão criticidade e competência.

Desta forma, de acordo com Garruti e Santos (2004), “o ensino tem pouco contribuído para que os alunos construam conhecimentos globais, já que são instruídos a compreenderem partes de um todo distanciadas umas das outras” (GARRUTI; SANTOS, 2004, p. 187). Santomé (1998) afirma que a instituição escolar não está cumprindo com sua razão de ser, que é a de preparar cidadãos para intervir na sociedade de forma responsável e democrática, se distanciando assim da realidade. Para ele, os conteúdos não passam de “pílulas” que devem ser memorizadas sem qualquer significação.

Assim, para tentar romper com a fragmentação das disciplinas, das ciências e do conhecimento, surgiu a interdisciplinaridade (THIESEN, 2008).

Segundo Fazenda (2005), o movimento de interdisciplinaridade surgiu na Europa (década de 1960), a partir dos movimentos estudantis que reivindicavam um novo modelo de escola e universidade. No Brasil, a interdisciplinaridade começou a ter espaço de discussão na década de 1970, com Hilton Japiassu em 1976 e com Ivani C. Arantes Fazenda em 1978.

Para compreendermos melhor como a ideia de interdisciplinaridade desenvolveu-se no Brasil nas décadas de 1970, 1980 e 1990, organizamos, baseados em Fazenda (2005), um quadro (Quadro 5) que apresenta o movimento de interdisciplinaridade de cada década, sua organização teórica e o perfil da ótica das influências.

Década	Movimento	Organização Teórica	Perfil da ótica das influências
1970	Construção epistemológica	Busca por uma definição	Busca de uma explicitação filosófica
1980	Explicitação das contradições epistemológicas	Busca por um método	Busca de uma diretriz sociológica
1990	Tentativa de construir uma nova epistemologia, própria da interdisciplinaridade	Construção da teoria	Busca de um projeto antropológico

Quadro 5 - Movimento da interdisciplinaridade

Fonte: elaborado pela autora, baseada em FAZENDA (2005).

A autora atenta que na década de 1970 não se chegava a um acordo nem da tradução da palavra interdisciplinaridade e nem do seu significado. Nos dias atuais, segundo Gonçalves (2014), ainda observa-se na revisão de literatura que não há uma definição unívoca do conceito de interdisciplinaridade, nem mesmo um único entendimento (THIESEN, 2008; JAPIASSU, 1976; PIRES, 1998; FAZENDA, 2005; dentre outros).

A interdisciplinaridade e suas variações - a multidisciplinaridade, a pluridisciplinaridade e a transdisciplinaridade (GONÇALVES, 2014) - estão sendo mencionadas em diversos documentos educacionais brasileiros, mas ainda, há entre os profissionais da educação certa insegurança quanto a como realizar um trabalho com essas características, bem como certa confusão no que tange ao entendimento dos distintos termos.

A reflexão epistemológica para diferenciar a interdisciplinaridade, a multidisciplinaridade, a pluridisciplinaridade e a transdisciplinaridade iniciou em 1969 com GuyMichaud (GONÇALVES, 2014).

Japiassu (1976), uns dos pioneiros a tratar sobre interdisciplinaridade no Brasil, diferencia as variações baseado nos trabalhos de Jantsch¹², evidenciando os graus de cooperação e de coordenação entre as disciplinas:

- 1) Multidisciplinaridade: Gama de disciplinas que são propostas simultaneamente, mas sem fazer aparecer as relações que podem existir entre elas. É um sistema de um único nível, com objetivos múltiplos e sem nenhuma cooperação.
- 2) Pluridisciplinaridade: Justaposição de diversas disciplinas situadas geralmente no mesmo nível hierárquico e agrupadas de modo a fazer aparecer as relações existentes entre elas. É um sistema de um único nível e de objetivos múltiplos, onde há cooperação, mas sem coordenação.
- 3) Interdisciplinaridade: Axiomática comum e um grupo de disciplinas conexas e definida no nível hierárquico imediatamente superior o que introduz

¹² Erich Jantsch, "*Vers l'interdisciplinarité et la transdisciplinarité dans l'enseignement et l'innovation*", in OCDE, *L'interdisciplinarité*, 1972, p. 108-109.

a noção de finalidade. É um sistema de dois níveis e com objetivos múltiplos e com coordenação precedendo do nível superior.

4) Transdisciplinaridade: Coordenação de todas as disciplinas e interdisciplinas do sistema de ensino inovado, sobre a base de uma axiomática geral. É um sistema de níveis e objetivos múltiplos e com coordenação com vistas a uma finalidade comum dos sistemas (JAPIASSU, 1976, p. 73 - 74).

Neste sentido, por exemplo, a multidisciplinaridade pode acontecer quando diferentes disciplinas desenvolvem diferentes atividades. No entanto, não há diálogo entre as disciplinas, nem entre os professores. Cada disciplina possui seus objetivos individuais e não cooperam com outra disciplina. A Pluridisciplinaridade, acontece quando cada disciplina desenvolve suas atividades a partir do mesmo tema, denotando as relações que elas possuem, ocorrendo desta forma a cooperação entre elas, mesmo que isso não seja feito de modo organizado e coordenado. A interdisciplinaridade, por sua vez, acontece quando as diversas disciplinas envolvidas possuem um objetivo comum, além de outros objetivos. As disciplinas estão num nível e trabalham para resolver o problema que está no nível superior, coordenando a atividade que desenvolvem com vistas a cumprir um objetivo comum. Já a transdisciplinaridade ocorre quando todas as disciplinas coordenam a atividade, a finalidade é comum e transcende as disciplinas, de modo que nem sempre é possível identificar o quê do trabalho desenvolvido cabe a uma disciplina ou outra.

Japiassu (1976) ainda entende a interdisciplina como sendo a “interação entre duas ou mais disciplinas”.

Essa interação pode ir da simples comunicação de ideias à integração mútua dos conceitos diretores da epistemologia, da terminologia, da metodologia, dos procedimentos, dos dados e da organização referentes ao ensino e à pesquisa (JAPIASSU, 1976, p. 74).

O autor apresenta os objetivos principais da interdisciplinaridade apontados pelo Dr. Clark C. Abt¹³ num documento¹⁴ preparado para o *Seminário sobre a Pluridisciplinaridade e a Interdisciplinaridade nas Universidades*¹⁵ em 1970, na França.

¹³ Pesquisador e educador americano.

¹⁴ ABT, C. C., *Analyse de l'étude sur les activités interdisciplinaires d'enseignement et de recherche dans les universités américaines*, documento CERI/HE/CP/70.20.

¹⁵ Conhecido como Congresso de Nice – organizado pelo Centro para Pesquisa e Inovação do Ensino (CERI) e pelo Ministério da Educação Francês. Esse evento visava esclarecer os conceitos de multidisciplinaridade, pluridisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade a partir de uma reflexão epistemológica (GONÇALVES, 2012, p. 131).

- Despertar entre os estudantes e os professores um interesse pessoal pela aplicação de sua própria disciplina a uma outra;
- Estabelecer um vínculo sempre mais estreito entre as matérias estudadas;
- Abolir o trabalho maçante e por vezes “bitolante” que constitui a especialização em determinada disciplina;
- Reorganizar o saber;
- Estabelecer comunicação entre os especialistas;
- Criar disciplinas e domínios novos de conhecimento, mais bem adaptados à realidade social;
- Aperfeiçoar e reciclar os professores, reorientando-os, de sua formação especializada, a um estudo que vise a solução de um problema;
- Reconhecer o caráter comum de certos problemas estruturais, etc (JAPIASSU, 1976, p. 56).

Para Santomé (1998), a interdisciplinaridade pode ser compreendida como uma proposta progressista e desafiadora na tentativa de corrigir os erros e as infecundidades geradas pela ciência excessivamente compartimentada.

Neste contexto, Thiesen (2008, p. 548), explica que

a interdisciplinaridade visa à recuperação da unidade humana pela passagem de uma subjetividade para uma intersubjetividade e, assim sendo, recupera a ideia primeira de cultura (formação do homem total), o papel da escola (formação do homem inserido em sua realidade) e o papel do homem (agente das mudanças do mundo).

Fazenda (2011) vê na interdisciplinaridade “[...] uma atitude de abertura [...] onde todo conhecimento é igualmente importante. [...] somente na intersubjetividade, num regime de copropriedade, de interação, é possível o diálogo, única condição de possibilidade da interdisciplinaridade” (FAZENDA, 2011, p.11). Deste modo, nenhuma área é mais importante do que as outras áreas do conhecimento, mas as áreas são complementares e juntas constituem o ser humano em sua plenitude.

Diversos documentos educacionais brasileiros orientam o ensino via um trabalho interdisciplinar: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000); Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE) (BRASIL, 2008); Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio (BRASIL, 2012).

Na proposta de reforma curricular do Ensino Médio, a interdisciplinaridade deve ser compreendida a partir de uma abordagem relacional, em que se propõe que, por meio da prática escolar, sejam estabelecidas interconexões e passagens entre os conhecimentos através de relações de complementaridade, convergência ou divergência (BRASIL, 2000, p. 21).

Neste sentido os PCN orientam que a interdisciplinaridade deve ir além da simples justaposição de disciplinas, ela está na possibilidade de relacionar as disciplinas em atividades ou projetos de estudo, pesquisa e ação.

Neste contexto, para que isso ocorra, uma das fases mais importantes do trabalho interdisciplinar é o planejamento. A interdisciplinaridade deve se dar desde o planejamento das atividades e este planejamento deve ser feito em conjunto com os professores das outras disciplinas.

De acordo com Tomaz e David (2008), os professores das diversas disciplinas deveriam conversar para que pudessem levantar aspectos comuns de sua prática com as de outro professor que trabalha com os mesmos alunos para que assim encontrem alternativas para potencializar as oportunidades de interdisciplinaridade em sala de aula, tornando esta prática mais usual.

Para isso, Gonçalves (2014) acredita que a atividade interdisciplinar deve, “a partir de uma atitude do sujeito de humildade e ousadia no desejo de inovar, criar e ir além, [...] constituir uma ação pedagógica interdisciplinar, mediante uma filosofia do sujeito” (GONÇALVES, 2014, p. 241). “A interioridade nos conduz a um profundo exercício de humildade, fundamento maior e primeiro da interdisciplinaridade (FAZENDA, 2005, p. 15)”. A ideia de humildade é no sentido de compreender que todas as disciplinas são importantes e formam o mundo real, no qual estamos inseridos.

Neste contexto, como afirmam Tomaz e David (2008), “para que uma atividade se configure como interdisciplinar, é necessário que algumas restrições e possibilidades de ações inerentes aos ambientes nela envolvidos sejam percebidas como invariantes e relevantes pelos alunos” (TOMAZ; DAVID, 2008, p. 125).

As autoras ainda sugerem que “os planejamentos das disciplinas, articulados por um tema ou no desenvolvimento de um projeto, já trazem *a priori* determinados significados em torno do objeto de estudo que os tornam interdisciplinares” (TOMAZ; DAVID, 2008, p. 25).

A interdisciplinaridade ainda parece ser algo visto como “diferente” pelos alunos, quando, de acordo com os documentos educacionais e o tempo de vigência desses documentos, deveria ser algo já incorporado na prática escolar.

Tomaz e David (2008) entendem que dada a organização do trabalho escolar e a falta de clareza sobre como concretizar uma prática pedagógica interdisciplinar, torna-se um desafio para cada unidade escolar organizar seu currículo numa

perspectiva interdisciplinar. Um caminho para alcançar a interdisciplinaridade, segundo os autores, seria utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver algum problema ou compreender um fenômeno considerando diferentes pontos de vista.

Thiesen (2008, p. 553) entende que “a interdisciplinaridade é um movimento importante de articulação entre o ensinar e o aprender”.

A interdisciplinaridade [...] retoma, aos poucos, o caráter de interdependência e interatividade existente entre as coisas e as ideias, resgata a visão de contexto da realidade, demonstra que vivemos numa grande rede ou teia de interações complexas e recupera a tese de que todos os conceitos e teorias estão conectados entre si (THIESEN, 2008, p. 552).

O autor entende que a escola deve ser uma instituição interdisciplinar, por sua natureza e função, pois desta forma será maior a possibilidade de apreensão do mundo pelos sujeitos envolvidos. De acordo com Garruti e Santos (2004, p. 189), deve haver um “[...] esforço por aproximar, relacionar e integrar os conhecimentos” [...] de modo que os conteúdos das disciplinas sejam trabalhados para servir de aporte às outras, formando assim uma teia de conhecimentos.

Neste contexto, o planejamento interdisciplinar torna-se o alicerce do trabalho interdisciplinar. Pois é neste momento que os professores têm a oportunidade de buscar romper com as fronteiras que separam as disciplinas ao pensar numa atividade em conjunto, em parceria.

O professor precisa tornar-se um profissional com visão integrada da realidade, compreender que um entendimento mais profundo de sua área de formação não é suficiente para dar conta de todo o processo de ensino. Ele precisa apropriar-se também das múltiplas relações conceituais que sua área de formação estabelece com as outras ciências (THIESEN, 2008, p. 551).

A seguir, discorreremos sobre algumas questões acerca da interdisciplinaridade no contexto da Educação Matemática.

4.2 INTERDISCIPLINARIDADE NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

As reformulações curriculares sempre apontam para o ensino de Matemática contextualizado e interdisciplinar. A interdisciplinaridade pode ser entendida como “diferentes propostas, com diferentes perspectivas, entre elas, aquelas que defendem um ensino aberto para inter-relações entre Matemática e outras áreas do saber

científico ou tecnológico, bem como com as outras disciplinas escolares” (TOMAZ; DAVID, 2008, p.14).

Assim,

A Matemática escolar passa a ser vista como um meio de levar o aluno à participação mais crítica na sociedade, [...] contribuindo com a formação integral do aluno, como cidadão da sociedade contemporânea, onde cada vez mais é obrigado a tomar decisões políticas complexas (TOMAZ; DAVID, 2008, p. 15).

Tomaz e David (2008), como exemplo, apresentam estratégias adotadas em escolas da Dinamarca e utilizadas por Skovsmose (1994, apud TOMAZ; DAVID, 2008) para construir o seu entendimento sobre interdisciplinaridade. Skovsmose (1994, apud TOMAZ; DAVID, 2008) apresenta a abordagem por tematização e a organização-em-projetos.

Tomaz e David (2008) acreditam, ainda, que

a adoção de temas para organizar a abordagem dos conteúdos disciplinares é uma forma de promover a interdisciplinaridade e pode contribuir para o engajamento do aluno nas discussões dos conteúdos e desenvolver competência crítica (TOMAZ; DAVID, 2008, p. 20).

Em se tratando da escolha de temas como uma forma de promover a interdisciplinaridade, uma metodologia de ensino de Matemática que compartilhe desse encaminhamento inicial no desenvolvimento de uma atividade, é a Modelagem Matemática.

4.3 INTERDISCIPLINARIDADE NO CONTEXTO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

É natural associar Modelagem Matemática à interdisciplinaridade, isto porque a atividade de Modelagem, na maioria das vezes, é sobre um tema não matemático, de outra área, podendo integrar, inclusive, diversas áreas. Em Modelagem, as relações entre a realidade e a Matemática servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não-matemáticos sejam acionados, produzidos e integrados. Neste sentido, a abordagem de questões reais pode motivar a compreensão de métodos e conteúdos da Matemática escolar, contribuindo para a construção de conhecimentos e mostrar aplicações da Matemática em outras áreas do conhecimento (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013).

Como a Modelagem e a interdisciplinaridade são foco desta dissertação, decidimos, inicialmente, fazer uma análise de como essa parceria vem sendo entendida nos trabalhos apresentados nos principais eventos de Modelagem Matemática: VI Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (EPMEM), IX Conferência Nacional sobre Modelagem em Educação Matemática (CNMEM) e a *XVII International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA). Posteriormente nos debruçamos nos anais das últimas seis edições (2005, 2007, 2009, 2011, 2013 e 2015) da Conferência Nacional sobre Modelagem em Educação Matemática (CNMEM).¹⁶

Como dito anteriormente, parece recorrente a ideia de que os trabalhos de Modelagem Matemática na Educação Matemática possuem um caráter interdisciplinar. Neste contexto, observa-se que o termo interdisciplinaridade tem sido utilizado de forma muito usual, comum, muitas vezes sem compreensão teórica e epistemológica do que significa. Tem-se a impressão, portanto, que basta utilizar um conceito de outra disciplina numa aula de Matemática, por exemplo, que já está ocorrendo uma atividade interdisciplinar. É evidente, todavia, que o entendimento acerca da interdisciplinaridade se difere entre os profissionais da educação. Ao realizar o trabalho de análise dos anais dos eventos, confirmamos isso. Revelou-se, inclusive, que mesmo entre autores que utilizam os mesmos referenciais teóricos, diferentes efetivações de práticas e entendimentos acerca da interdisciplinaridade são revelados.

Os trabalhos selecionados nas duas investigações (SETTI; VERTUAN, 2016a, SETTI; VERTUAN, 2016b) foram os que possuíam em seus títulos, resumos e/ou palavras-chave, a palavra “interdisciplinaridade” ou a palavra “interdisciplinar”. Na primeira análise, esta busca resultou em 9 trabalhos, conforme apresentados no Quadro 6. E na segunda análise, 24 trabalhos, conforme Quadro 7.

¹⁶ SETTI, E. J. K.; VERTUAN, R. E. Que interdisciplinaridade se verifica nos trabalhos de Modelagem Matemática? In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2016. Londrina: **Anais...** Londrina: SBEM, 2016a.

SETTI, E. J. K.; VERTUAN, R. E. Um olhar para a interdisciplinaridade presente nos trabalhos de Modelagem Matemática apresentados nas últimas seis edições da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM). In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO E APRENDIZAGEM, 3, 2016a. Londrina: **Anais...** Londrina: UTFPR, 2016b.

Título do Artigo	Evento/Ano	Modalidade
O desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática como APCC: uma experiência	EPMEM/2014	Relato de Experiência – RE1
A interdisciplinaridade na Educação em Ciências e em Matemática	EPMEM/2014	Mesa Temática – MT1
Modelagem nas Ciências e Matemática: percepção de professores em formação continuada	CNMEM/2015	Comunicação Científica – CC1
O uso da Modelagem Matemática na formação inicial de professores de Química	CNMEM/2015	Relato de Experiência – RE2
A Matemática no Basquetebol	CNMEM/2015	Relato de Experiência – RE3
Contribuições da Modelagem Matemática na construção do conceito de função a partir da geração de renda em uma Associação de catadores de resíduos sólidos	CNMEM/2015	Relato de Experiência – RE4
Exploring Interconnections Between Real-World and Application Tasks: Case Study from Singapore	ICTMA/2015	Comunicação Científica – CC2
The Possibility of Interdisciplinary Integration Through Mathematical Modelling of Optical Phenomena	ICTMA/2015	Comunicação Científica – CC3
Mathematical Texts in a Mathematical Modelling Learning Environment in Primary School	ICTMA/2015	Comunicação Científica – CC4

Quadro 6 - Artigos selecionados para primeira análise

Fonte: SETTI; VERTUAN (2016a).

Edição	Título do Trabalho	Modalidade
IV	Modelagem Matemática e interdisciplinaridade: qual é a relação?	Comunicação Científica - CC1
V	Modelagem Matemática e a formação da consciência crítica frente aos problemas ecológicos	Comunicação Científica – CC2
V	Trabalho colaborativo entre Matemática e Física: a interdisciplinaridade como fator relevante para a Modelagem Matemática aplicada ao contexto do ensino de Física	Comunicação Científica – CC3
V	Biologia e Matemática e Modelagem Matemática: Redes de Saberes	Comunicação Científica – CC4
V	Modelo Matemático de orbitais atômicos: o uso do aplicativo Maple para obter resultados	Pôster – PO1
VI	Modelagem Matemática: um instrumento para a formulação de problemas	Comunicação Científica – CC5
VI	Modelos Matemáticos para o estudo de dinâmicas populacionais: uma proposta para o Ensino Médio	Minicurso – MC1
VI	Modelagem Matemática na formação continuada: um olhar de professores sobre a questão do câncer de mama	Relato de Experiência – RE1
VI	Um relato de experiência sobre a prática da modelagem matemática aplicada ao ensino de física	Relato de Experiência – RE2
VI	A Modelagem Matemática e a informática educativa: uma experiência interdisciplinar no âmbito da iniciação científica	Relato de Experiência – RE3
VII	Modelagem Matemática: da Interdisciplinaridade à Transdisciplinaridade	Comunicação Científica – CC6
VII	A Modelagem Matemática e as leis Física dos Gases: construção do conceito de proporcionalidade	Comunicação Científica – CC7

VII	Modelagem e Modelação nas Ciências da Natureza e Matemática: algumas propostas pedagógicas	Comunicação Científica – CC8
VII	Modelagem nas Ciências da Natureza e na Matemática do Ensino Médio	Debate – DB1
VII	Modelagem Matemática aplicada a utilização de sensores de temperatura	Relato de Experiência – RE4
VIII	Modelagem Matemática de Fenômenos ópticos: Relato de Experiência interdisciplinar entre Matemática e Física	Relato de Experiência – RE5
VIII	Modelagem Matemática e sensores de temperatura na escola técnica	Relato de Experiência – RE6
VIII	A Modelagem Matemática no Ensino de Funções como possibilidade de reflexão para o consumo consciente	Relato de Experiência – RE7
VIII	Modelando uma propriedade agropecuária sustentável	Relato de Experiência – RE8
VIII	Modelagem, criticidade e interdisciplinaridade: o caso do peso das mochilas	Relato de Experiência – RE9
IX	Modelagem nas ciências e matemática: percepção de professores em formação continuada	Comunicação Científica – CC9
IX	O uso da modelagem matemática na formação inicial de professores de química	Relato de Experiência – RE10
IX	A Matemática no Basquetebol	Relato de Experiência – RE11
IX	Contribuições da modelagem matemática na construção do conceito de função a partir da geração de renda em uma associação de catadores de resíduos sólidos	Relato de Experiência – RE12

Quadro 7 - Artigos selecionados nas edições IV a IX da CNMEM para a segunda análise
Fonte: SETTI e VERTUAN, 2016b.

Após a seleção dos trabalhos, os mesmos foram lidos na íntegra, buscando identificar as características de interdisciplinaridade presentes nos artigos.

4.3.1 Interdisciplinaridade nos Trabalhos de Modelagem Matemática das últimas edições do EPMEM, CNMEM e ICTMA

O artigo (RE1), “O Desenvolvimento de uma Atividade de Modelagem Matemática como APCC: uma experiência”, é um relato de experiência apresentado no VI EPMEM. O trabalho apresenta o termo interdisciplinaridade no resumo. Destaca que a APCC¹⁷ é um “*espaço que visa promover a articulação de diferentes práticas pedagógicas numa perspectiva interdisciplinar*” (SILVA; SILVA, 2014, p. 4). A atividade de Modelagem Matemática foi desenvolvida por um grupo de alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I sob orientação da professora da disciplina. O texto não faz menção sobre a participação de professores de outras disciplinas.

¹⁷ Atividade Prática como Componente Curricular.

Neste contexto, aborda a interdisciplinaridade quando explica como foi a escolha do tema da atividade: “[...] os alunos reunidos em grupos tinham como foco escolher uma situação-problema que de certo modo se relaciona com a área de atuação em que estão inseridos e desenvolver uma atividade de modelagem que, posteriormente, seria utilizada como meio para a elaboração de uma aula” (SILVA; SILVA, 2014, p. 4 e 5). Esta escolha resultou no tema: “*Determinação da quantidade de gordura saturada em batata palha*” (SILVA; SILVA, 2014, p. 5). No desenvolvimento da atividade, os alunos e a professora iniciaram uma “*revisão bibliográfica sobre gordura saturada, valores nutricionais dos alimentos, processos industriais e características estruturais da batata palha*” (SILVA; SILVA, 2014, p. 5), denotando assim que a professora da disciplina de Cálculo, para conduzir a atividade, precisou se apropriar de um conhecimento que ela não tinha.

Observa-se uma interdisciplinaridade “interessada”, no sentido de que o principal objetivo da atividade parece ser o “ensinar Matemática” por meio da contextualização de conceitos da disciplina – “*Com esse problema procuramos trabalhar os dados matematicamente*” (SILVA; SILVA, 2014, p. 7). O artigo não apresenta fundamentação teórica sobre o tema interdisciplinaridade. Na conclusão, as autoras relatam que a atividade de Modelagem desenvolvida “*abrange outros assuntos interdisciplinares, como a composição dos alimentos, o metabolismo de biomoléculas consumidas, os efeitos negativos do excesso de substâncias, como foi visto no trabalho*” (SILVA; SILVA, 2014, p. 8).

Observa-se que o artigo se refere a uma atividade interdisciplinar realizada por um único professor envolvendo a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (Matemática) e conceitos da Química, pois os alunos eram estudantes do curso de Licenciatura em Química. Como aponta Japiassu (1976, p. 74) é uma interdisciplinaridade denotada pela “interação de duas disciplinas”, onde, para dar sentido aos conceitos aprendidos em Cálculo, a atividade de Modelagem utilizou os conceitos de Química.

O trabalho (MT1), “A interdisciplinaridade na Educação em Ciências e em Matemática”, é título de uma mesa temática do EPMEM de 2014. Embora não houvesse relacionado a esse título um artigo escrito que pudesse ser estudado, o título denota uma preocupação da área em tratar o tema interdisciplinaridade em um evento.

O artigo (CC1), “Modelagem nas Ciências e Matemática: Percepção de professores em formação continuada” é uma comunicação científica apresentada na 9ª CNMEM. O contexto da pesquisa se deu num curso de formação de professores de diversas disciplinas. A atividade de Modelagem desenvolvida foi sobre a cultura dos Girassóis¹⁸. Após a realização da atividade de Modelagem iniciou-se uma discussão sobre a ideia da desfragmentação do ensino proposta nas DCNEM através da interdisciplinaridade e contextualização.

As autoras apresentam a Modelagem como o fio condutor para a realização de um trabalho interdisciplinar e contextualizado, em consonância com as DCNEM. Afirmam, de acordo com Leis (2011), que a *“interdisciplinaridade não possui um sentido único e estável, ou seja, é polissêmico”* (BONOTTO; SCHELLER; BIEMBENGUT, 2015, p. 7), e destacam a maneira como elas estão a concebendo: *como forma de estabelecer relações entre as diferentes áreas do conhecimento pressupondo integração entre elas, com a possibilidade de serem reinventadas ou transformadas* (BONOTTO; SCHELLER; BIEMBENGUT, 2015, p. 7). Utilizam o referencial de Fazenda (2013) que aponta que a interdisciplinaridade tenta o *“diálogo entre outras formas de conhecimento”* (FAZENDA, 2013, p.20 apud BONOTTO; SCHELLER; BIEMBENGUT, 2015, p. 7) e de Leis (2011) que defende que ela *“reside na capacidade de integrar modos de pensar de várias disciplinas para produzir um avanço ou salto do conhecimento a um patamar que seria impossível de ascender por meios disciplinares”* (LEIS, 2011, p. 107 apud BONOTTO; SCHELLER; BIEMBENGUT, 2015, p. 7). Trazem também o entendimento de Tavares (2013) que denota a *“importância da intencionalidade numa prática interdisciplinar”* (TAVARES, 2013, p. 41 apud BONOTTO; SCHELLER; BIEMBENGUT, 2015, p. 7).

O artigo apresenta uma preocupação de incluir o termo interdisciplinaridade na formação continuada de professores da Educação Básica e ainda, buscar alternativas para um trabalho interdisciplinar efetivo, em que professores de diferentes disciplinas trabalham juntos no desenvolvimento de uma única atividade. Deste modo, cada professor tem a oportunidade de contribuir com o conhecimento de sua disciplina.

¹⁸ Atividade apresentada como relato de experiência do VI Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática com o título: “A pulverização do Girassol: o processo de modelagem e modelação” (Não faz parte da análise porque não apresentou o termo interdisciplinar (-idade) no título, no resumo e nem nas palavras-chave).

O artigo (RE2), “O uso da Modelagem Matemática na formação inicial de professores de Química”, é um relato de experiência apresentado na 9ª CNMEM. O artigo apresenta uma APCC desenvolvida numa turma de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de licenciatura em Química. Já no resumo, as autoras afirmam que a atividade de Modelagem desenvolvida surgiu da necessidade de *“promover aos graduandos os primeiros contatos com lecionar aulas, o conhecimento de práticas pedagógicas e a interdisciplinaridade”* (SILVA; SILVA, 2015, p. 1). Afirmam que a *“Matemática não é a única disciplina que compõe a atividade de Modelagem, tendo por algumas vezes, problemas que são oriundos de outras áreas de conhecimento como a Economia, Engenharia, Logística, Física, Biologia e a Química”* (SILVA; SILVA, 2015, p. 1). Apresentam ainda que a Modelagem pode ser um *“estímulo aos professores ao ingresso na interdisciplinaridade”* (SILVA; SILVA, 2015, p. 3). Na instituição onde a atividade foi desenvolvida a *“APCC (Atividade Prática como Componente Curricular) tem como foco principal vincular diversificados ambientes de estudos, proporcionando um contato interdisciplinar entre alunos”* (SILVA; SILVA, 2015, p. 4). Não há menção no artigo sobre a participação de professores de outras disciplinas na atividade, assim como não há também referencial teórico sobre interdisciplinaridade.

Neste artigo, observa-se que a atividade de Modelagem foi trabalhada de modo a relacionar conceitos de várias disciplinas, mas sem a participação de outros professores. A professora e os alunos de Cálculo utilizaram os conceitos de Química para desenvolver a atividade. Observa-se que o objetivo era utilizar uma situação real (de Química) para denotar a presença da Matemática, ou seja, o objetivo era ensinar Cálculo (Matemática).

O artigo (RE3), “A Matemática no Basquetebol”, é um relato de experiência apresentado na 9ª CNMEM. No resumo os autores apresentam a *“Modelagem como aporte pedagógico envolvendo as disciplinas de Matemática, Educação Física e Física (VIEIRA; THIEL, 2015, p. 1)”*. Apresentam dentre os resultados *“a aquisição de conceitos matemáticos envolvendo a interdisciplinaridade (VIEIRA; THIEL, 2015, p. 1)”*. Os autores justificam a opção pela interdisciplinaridade devido a sua característica de aproximar currículos, valorizando disciplinas dentro de um mesmo contexto. O texto denota o envolvimento dos professores das três disciplinas, propiciando assim o trabalho em equipe. Os autores dizem que houve a interdisciplinaridade porque os alunos trabalharam três disciplinas ligadas ao mesmo tema, o que pode ser verificado

nos excertos: *“Num primeiro momento, em sala de aula após a escolha do esporte [...] com os professores perguntando-lhes onde estava a matemática num jogo de basquetebol” e “[...] os alunos foram levados à quadra de basquetebol. A intenção era aprender as regras do jogo e analisar tudo o que acontecia para saber se havia mais algum ponto em que a matemática e a física estavam presentes. Neste momento o professor da disciplina de Física entrou em ação, mostrando em cada movimento o conteúdo e os conceitos presentes num jogo”* (VIEIRA; THIEL, 2015, p. 3-4). Neste artigo percebe-se que a atividade de Modelagem se deu de forma interdisciplinar, no entendimento de Tomaz e David (2008), segundo os quais há o envolvimento de diferentes professores, onde cada um contribui com os conceitos de sua disciplina.

O artigo (RE4), *“Contribuições da Modelagem Matemática na Construção do Conceito de Função a partir da geração de renda em uma associação de catadores de resíduos sólidos”*, é um relato de experiência apresentado na 9ª CNMEM. No resumo, os autores dizem que para explorar a atividade de modelagem foi desenvolvido um *“trabalho interdisciplinar”* (PAGUNG; REZENDE; LORENZONI, 2015, p. 1). No texto, quando os autores vão apresentar a atividade de modelagem, afirmam que ela foi desenvolvida em parceria com a professora de Ciências: *“Diante de uma série de debates com estes estudantes e em parceria com a professora de Ciências, concebeu-se uma sequência didática construída em caráter interdisciplinar, partindo de uma reflexão sobre a ideologia do consumo e a importância da reciclagem como alternativa para minimizar os impactos da geração de lixo, para em seguida, identificar a sua relação com a aferição de renda da associação de catadores de resíduos do município de Guarapari, no Estado do Espírito Santo”* (ASSCAMARG) (PAGUNG; REZENDE; LORENZONI, 2015, p. 3).

O texto não apresenta referencial teórico sobre interdisciplinaridade e não relata como foi a parceria com a professora de Ciências. Relata, todavia, que os alunos assistiram a documentários, realizaram pesquisas na internet e na biblioteca; refletiram sobre os valores sociais, consumo e coleta seletiva como geração de renda; construíram um roteiro de entrevista, visitaram a associação e construíram modelos para a geração de renda, os quais não são apresentados no artigo.

Após a atividade de Modelagem os autores elaboraram um questionário que foi aplicado aos alunos a fim de aferir o envolvimento, a participação ativa e a aprendizagem do tema pelos alunos. Na conclusão, relatam que os alunos perceberam a presença e a importância da Matemática em outras áreas do

conhecimento. Houve a interação com a professora de Ciências, denotando a preocupação no envolvimento de outros sujeitos neste processo.

O artigo (CC2), *“Exploring Interconnections Between Real-World and Application Tasks: Case Study from Singapore”* (Explorando interconexões entre mundo-real e aplicação de tarefas: Estudo de caso de Singapura) é um trabalho apresentado no XVII ICTMA. O artigo discute um Projeto de Trabalho Interdisciplinar (*Project work - PW*) desenvolvido em escolas secundárias de Singapura. Na pesquisa, os alunos de 7º e 8º anos de uma escola participaram de um projeto que envolvia as disciplinas de Matemática, Ciências e Geografia.

Os alunos responderam um pré e um pós questionário intitulado: “Atitudes Matemáticas em Aprendizagem Interdisciplinar”, no qual estavam representados três domínios atitudinais de percepção dos estudantes: a) confiança matemática; b) valor da matemática e c) interconectividade de matemática, foco da pesquisa, que incluía duas escalas: a percepção de matemática e aprendizagem interdisciplinar e crenças e esforços para fazer as conexões.

Os autores realizaram uma análise quantitativa com a aplicação de ANOVA para comparar os resultados do pré e do pós questionário. Utilizaram gravações em vídeo e áudio de três grupos para a análise qualitativa, assim como anotações de campo. O problema do mundo real, da atividade dos alunos, consistia em desenhar o projeto de um prédio.

A pesquisa buscou encontrar interconexões¹⁹ na percepção do aluno entre disciplinas escolares, entre elas e a Matemática, e entre a Matemática da escola básica e solução de problemas do mundo real²⁰. O entendimento de interdisciplinaridade das autoras é de *“interconexões entre as disciplinas numa mesma tarefa”* (NG; STILLMAN, 2015). Utilizam como referencial teórico para a interdisciplinaridade: Jacobs (1989 e 1991) e Wineburg e Grossman (2000), além de outros trabalhos das próprias autoras.

O artigo (CC3), *“The Possibility of Interdisciplinary Integration Through Mathematical Modelling of Optical Phenomena”* (A Possibilidade de integração interdisciplinar por meio da Modelagem Matemática do Fenômeno Óptico), é um trabalho que foi apresentado no XVII ICTMA de 2015. O artigo fala sobre a possibilidade de trabalhar interdisciplinarmente em experiências que envolviam

¹⁹ Interconnections - conectados entre si.

²⁰ Associa-se a expressão problemas do mundo real à Modelagem Matemática.

associação de espelhos planos. A atividade foi desenvolvida com futuros professores, acadêmicos de licenciatura em Física, e professores que já trabalham em escolas públicas. Também foi implementado em uma semana acadêmica com acadêmicos de licenciatura em Matemática e Física e proposto na forma de um minicurso no Congresso Internacional de Educação Matemática (VI CIEM – outubro de 2013).

O objetivo era que os professores que participaram desses encontros desenvolvessem a atividade com seus estudantes. A atividade de Modelagem consistia em montar experimentos de associações de espelhos planos e investigar a matemática envolvida para determinar a quantidade de imagens formadas nos espelhos. As autoras afirmam, embasadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais brasileiros, que *“quando se trata de interdisciplinaridade, a individualidade das disciplinas é mantida, mas elas são reunidas, demonstrando a multiplicidade de fatores que influenciam a realidade e a linguagem necessária em certos domínios de conhecimento necessários”* (BARBOZA et al., 2015, p. 2). De acordo com as autoras, *“o conhecimento é produzido pela união das disciplinas e áreas do conhecimento, e o processo de aprendizagem forma um sistema educacional de qualidade, aproximando assim o aprendizado das disciplinas com o cotidiano do aluno, ignorando a educação fragmentada”* (BARBOZA et al., 2015, p. 3).

Pode-se observar que na atividade descrita no artigo a intenção era averiguar a presença de conceitos matemáticos num experimento de Física. Desta forma, a interdisciplinaridade se manifestou como integração de conceitos de duas disciplinas (JAPIASSU, 1976).

Finalmente, o artigo (CC4), *“Mathematical Texts in a Mathematical Modelling Learning Environment in Primary School”* (Textos Matemáticos em um ambiente de aprendizagem de Modelagem Matemática na escola primária), é um trabalho que foi apresentado também no ICTMA. O artigo teve por objetivo analisar a produção de textos (diálogos) dos alunos e da professora num ambiente de desenvolvimento de uma atividade de Modelagem numa escola primária privada. Teve como embasamento teórico a teoria de Bernstein sobre os princípios de práticas pedagógicas.

Dentre os textos (diálogos) gravados, as autoras selecionaram 3 episódios: texto de Matemática contextualizada, texto de Matemática crítica e texto de

Matemática interdisciplinar. A atividade de Modelagem foi sobre a Água Virtual²¹ e no artigo apresentou-se somente a análise dos três momentos do diálogo e não o desenvolvimento da atividade.

As autoras identificaram o texto de Matemática interdisciplinar num esquema feito pelos alunos sobre o gasto de água na produção de manteiga, o ciclo da comida, pois envolveu o discurso instrucional de Ciências: *“pode-se identificar que os estudantes procurando apresentar a quantidade total de água necessária para a produção de manteiga, calcularam a quantidade de água consumida para manter o pasto, alimentar as vacas e produzir o leite. Os alunos desenharam um ciclo da cadeia alimentar e contabilizaram o consumo de água envolvido em toda a produção de manteiga, relacionando assim com o texto instrucional de ciências estudado na escola”* (LUNA; SOUZA; LIMA, 2015, p. 7).

No artigo observamos que a interdisciplinaridade surgiu em decorrência da necessidade no desenvolvimento da atividade. Os conceitos da disciplina de Ciências contribuíram com a solução do problema. Foi uma interdisciplinaridade realizada por apenas um professor que ministra várias disciplinas na escola primária.

Neste contexto, organizamos as características que apareceram nos artigos no Quadro 8.

CATEGORIA	CARACTERÍSTICAS	TRABALHOS ASSOCIADOS
1	Interdisciplinaridade entendida como a contextualização de conceitos da Matemática que o professor pretende ensinar ou aplicar – o foco está na matemática.	RE1, RE4
2	Interdisciplinaridade entendida como o movimento entre diferentes disciplinas e seus respectivos docentes que buscam, a partir de seus referenciais, mediar a resolução de um problema de interesse comum – o foco está na resolução de um problema via diferentes olhares.	RE2, CC1, CC2, CC3
3	Interdisciplinaridade apontada como aspecto importante a ser considerado na formação docente inicial e continuada.	RE1, RE2, CC1
4	Interdisciplinaridade sendo suscitada em decorrência da necessidade advinda do desenvolvimento de uma atividade de Matemática.	RE3, CC4

Quadro 8 - Características de Interdisciplinaridade e trabalhos associados

Fonte: SETTI e VERTUAN (2016a).

²¹ Água utilizada na produção de alimentos e objetos.

4.3.2 Interdisciplinaridade nos trabalhos da IV, V, VI, VII, VIII e IX edição da CNMEM

Ao analisar a literatura sobre interdisciplinaridade e os trabalhos de Modelagem apresentados nas edições IV, V, VI, VII, VIII e IX da CNMEM, complementamos o quadro de características apresentado anteriormente completando seis categorias que abarcam as características de interdisciplinaridade presentes nestes trabalhos.

CATEGORIA	CARACTERÍSTICAS	TRABALHOS ASSOCIADOS
1	Interdisciplinaridade entendida como a contextualização de conceitos da Matemática que o professor pretende ensinar ou aplicar – o foco está na matemática.	RE10
2	Interdisciplinaridade entendida como o movimento entre diferentes disciplinas e seus respectivos docentes que buscam, a partir de seus referenciais, mediar a resolução de um problema de interesse comum – o foco está na resolução de um problema via diferentes olhares.	CC1, PO1, RE3, DB1, RE11
3	Interdisciplinaridade apontada como aspecto importante a ser considerado na formação docente inicial e continuada. ²²	CC2, RE1, RE2, CC6, CC7, DB1, RE4, RE5, CC8, RE10
4	Interdisciplinaridade sendo suscitada em decorrência da necessidade advinda do desenvolvimento de uma atividade de Matemática.	CC2, RE8, RE9
5	Interdisciplinaridade sendo desenvolvida em uma disciplina que não seja Matemática, que utiliza a Matemática como ferramenta de resolução da situação-problema.	CC3, CC4, MC1, RE1, RE2, RE4, RE5, RE6
6	Interdisciplinaridade entendida como várias disciplinas desenvolvendo suas atividades a partir de um mesmo tema, sem que haja integração entre uma atividade e outra (Pluridisciplinaridade). ²³	RE7

Quadro 9 - Categorias de Interdisciplinaridade em Modelagem Matemática e trabalhos associados

Fonte: SETTI e VERTUAN (2016b), inspirados em JAPIASSU (1976).

A seguir, discorreremos sobre cada uma delas, exemplificando-as com excertos dos artigos apresentados nas edições citadas anteriormente da CNMEM.

1. Interdisciplinaridade entendida como a contextualização de conceitos da Matemática que o professor pretende ensinar ou aplicar – o foco está na matemática: nesta categoria, a característica de interdisciplinaridade é a contextualização de conteúdos matemáticos, ou seja, o professor de

²² Categoria observada na pesquisa, mas que não se caracteriza como característica de interdisciplinaridade. Esta categoria demonstra uma preocupação com a formação dos professores sobre interdisciplinaridade.

²³ De acordo com o referencial teórico de interdisciplinaridade, esta categoria não é considerada como interdisciplinaridade, mas sim como pluridisciplinar (JAPIASSU, 1976).

Matemática busca conceitos de outras disciplinas de modo a contextualizar os conteúdos de sua disciplina. Muitas vezes, o professor precisa se apropriar de um conhecimento que ainda não possui para ter condições de integrar esses conhecimentos. Desta forma, há a participação efetiva apenas do professor de Matemática e talvez uma participação tímida de um professor de outra disciplina.

RE10: “Com o intuito de contextualizar os assuntos abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, foi proposto para os discentes do curso de licenciatura em Química, desenvolver modelos matemáticos, de forma a obter dados e informações reais dentro do cotidiano” (SILVA; SILVA, 2015, p.4).

O trecho do artigo RE10 denota características da categoria 1, uma vez que evidencia o objetivo de contextualizar os conteúdos de Matemática que os docentes almejam ensinar.

2. Interdisciplinaridade entendida como o movimento entre diferentes disciplinas e seus respectivos docentes que buscam, a partir de seus referenciais, mediar a resolução de um problema de interesse comum – o foco está na resolução de um problema via diferentes olhares: nesta categoria, há a participação de professores de diferentes disciplinas. A partir de um único e determinado problema, cada disciplina contribui com suas especificidades. Nesta categoria de interdisciplinaridade, o planejamento da atividade em conjunto entre os professores envolvidos é primordial. E planejamento não significa partir de uma situação fechada, nem mesmo que tudo é determinado no processo de ensino.

CC1: “[...] a abordagem interdisciplinar não é a aplicação de conceitos de um determinado conteúdo desenvolvido por cada professor num trabalho temático. O olhar específico de cada disciplina não leva o aluno a perceber a necessidade de diálogo entre as disciplinas” (p. 6).

“Nas atividades de Modelagem [...] não existe uma preocupação com o conteúdo a ser desenvolvido. Assim como na interdisciplinaridade, numa atividade de Modelagem os conhecimentos (ou conteúdos) surgem à medida que vão sendo necessários para desvendar a realidade, levando à tomadas de decisões” (TOPÁZIO, 2005, p. 9).

PO1: “[...] pode estar no diálogo com profissionais das outras áreas relacionadas com o tema modelado a melhor fonte para a modelagem” (p.1180).

“As dificuldades nesse diálogo interdisciplinar existem. A primeira vem da disposição de tempo e de interesse de mais de um profissional no processo de modelagem” (p. 1180).

“Neste projeto, estão envolvidos três agentes de áreas diferentes: uma professora de matemática, um professor de química e um acadêmico de licenciatura em física. A contribuição e o papel de cada um desses agentes foram fundamentais para a estruturação do projeto” (p. 1181).

“[...] a notável integração entre os profissionais nele envolvidos, que para nós, foi o ponto forte deste trabalho” (MAGNANO; MARTINS; MENDES, 2007, p. 1188).

RE3: “A utilização da modelagem no ensino é uma forma de produção de conhecimento em potencial, pois origina problemas interdisciplinares bastante interessantes levando inevitavelmente o aluno a investigar e pesquisar” (p. 2).

“Foram realizados encontros semanais para que, não apenas ocorresse o acompanhamento dos estudos como também para propiciar a integração dos trabalhos entre as alunas” (SILVA; SOUSA; LEITE, 2009, p. 4).

DB1: “[...] material didático digital, composto por modelos de questões científicas por meio da Modelagem Matemática nas Ciências da Natureza, para os professores ensinarem os conteúdos programáticos da área e os estudantes aprenderem esses conteúdos de forma interdisciplinar, pode ser um caminho para atender os propósitos da Educação e, por conseguinte, das questões sociais e ambientais vigentes” (BIEMBIENGUT, 2011, p.1).

RE11: “Foram mostrados, ainda, cálculos, fórmulas e gráficos realizados, tanto na disciplina de Matemática quanto na disciplina de Física, desenvolvendo o raciocínio lógico-matemático, junto à capacidade de resolução de problemas relacionados a este esporte, praticando, concomitante a isso, suas técnicas e regras juntamente com a disciplina Educação Física” (VIEIRA; THIEL, 2015, p. 1).

Os excertos dos artigos CC1, PO1, RE3, R11 e do resumo do DB1, explicitam o envolvimento de mais de um professor no desenvolvimento da atividade e o objetivo maior que é a solução do problema, via diferentes olhares. É importante atentar que em todas as categorias faz-se uma análise do texto e não da prática efetiva em sala de aula, visto que não é possível verificar se a perspectiva evidenciada na fundamentação teórica do trabalho se verificou na prática, pois nem sempre as atividades vivenciadas são descritas.

3. Interdisciplinaridade apontada como aspecto importante a ser considerado na formação docente inicial e continuada: esta categoria aponta para uma preocupação em tratar a interdisciplinaridade nas formações iniciais e continuadas de professores de Matemática e de outras áreas.

CC2: “Este trabalho pretende contribuir para uma discussão sobre a modelagem matemática, no contexto da formação do cidadão crítico frente aos problemas de ordem ambiental, abordando algumas considerações acerca do trabalho com modelagem desenvolvido por um grupo de estudantes do curso de especialização em Ensino de Matemática” (KATO, 2007, p.725).

RE1: “[...] torna-se necessária a inclusão na formação inicial e continuada de professores, cujo currículo vigente ainda se mostra revestido de um tradicionalismo que dificulta a efetiva apropriação de um novo ‘modo de ver e conceber o ensino de Matemática’ (Fiorentini, 1995) e distanciado do contexto real de sala de aula” (GOMES et al, 2009, p. 2).

CC7: “Com essa perspectiva nossa questão de pesquisa é: como promover essa formação aos professores de Educação Básica que perpassaram por uma escola sob o enfoque disciplinar?” (LARA; BIEMBIENGUT, 2011, p. 3).

RE10: “[...] a modelagem também pode ser utilizada para a preparação de professores, inclusive na estimulação ao ingresso na interdisciplinaridade, espaço que fortifica e amplia seus entendimentos” (SILVA; SILVA, 2015, p. 3).

Os trechos acima apontam para a importância de tratar o tema interdisciplinaridade na formação inicial e/ou continuada do professor, visto que em sua formação escolar e acadêmica é possível que tenham se deparado, fortemente, com um ensino disciplinar. Deste modo, ao vivenciarem a interdisciplinaridade podem entendê-la de fato e, assim, empreenderem-na, sendo a Modelagem Matemática um possível canal para isso.

4. Interdisciplinaridade sendo suscitada em decorrência da necessidade advinda do desenvolvimento de uma atividade de Matemática: neste grupo, os trabalhos analisados têm como característica o recorrer a conceitos de outras disciplinas ou a conceitos extra disciplinares, a partir da necessidade sentida pelos discentes/docentes no processo de investigação de um problema.

RE8: “Notemos que um dos recursos disponíveis no software é a escala mostrada no canto inferior esquerdo da imagem. Aproveitamos esta ferramenta para integrar nossas atividades com conhecimentos das aulas de Geografia, as quais abordavam esse assunto na época” (MELENDEZ; SANT’ANA, 2013, p. 4).

RE9: “[...] ao desenvolver uma atividade de modelagem, desenvolvemos também uma atividade interdisciplinar ao passo que, ao abordar conhecimentos matemáticos, estejamos contribuindo também para a formação e construção de conhecimento no âmbito da educação ambiental” (NUNES DA CRUZ et al, 2013, p. 6).

Os trechos citados denotam que a interdisciplinaridade surgiu no decorrer de uma atividade de Matemática, pois conceitos de outras disciplinas emergiram a partir da investigação do problema. Nos dois trechos podemos observar que conhecimentos de outras disciplinas surgiram a partir do desenvolvimento da atividade de Modelagem.

5. Interdisciplinaridade sendo desenvolvida em uma disciplina que não seja Matemática, que utiliza a Matemática como ferramenta de resolução da situação-problema: nesta categoria a atividade está sendo realizada em outra disciplina e utiliza conceitos de matemática como ferramenta. Há apenas o envolvimento do professor da disciplina na qual a atividade de Modelagem está sendo desenvolvida.

RE4: “O modelo utilizado foi desenvolvido no decorrer da disciplina de Matemática Aplicada no curso de Mestrado em Ensino de Matemática [...]. Esse modelo foi apresentado aos alunos que não tiveram grandes dificuldades em utilizá-lo, já que conheciam as funções exponenciais e logarítmicas” (p. 7).

“Esta situação de aprendizagem foi realizada com alunos do primeiro módulo do curso de Automação Industrial [...] Este módulo tem duração de 30 horas/aula e engloba as unidades curriculares de: Cálculo I, Física I e Eletricidade Básica” (p.10).

“Este trabalho teve como principais objetivos, no âmbito técnico, oferecer condições para que o aluno identifique a simbologia padrão em circuitos eletrônicos, utilize adequadamente o multímetro, empregar de forma consciente as principais leis da eletricidade [...] queríamos que os alunos fossem capazes de construir e interpretar gráficos, detectar taxas de variação, analisar crescimentos e decrescimentos, interpretar funções logarítmicas e exponenciais com base nas suas propriedades e construir modelos matemáticos que descrevem o funcionamento dos sensores de temperatura e permitam a obtenção de seus parâmetros” (p. 11).

“[...] por meio de uma atividade experimental que envolveu conhecimentos de eletricidade adquiridos nas aulas de Física” (MATTE; ROCHA; SANT’ANA, 2011, p.18).

RE2: “[...] trabalhos que enfatizam a importância da Matemática como ferramenta da Física” (p.2).

“O objetivo central da pesquisa foi investigar a utilidade da Modelagem Matemática como ferramenta para o professor de Física no Ensino Médio” (LOZADA; MAGALHÃES, 2009, p. 8).

CC4: “Ao participar de trabalhos concebidos de forma interdisciplinar, a Matemática pode contribuir com seus modos de elaboração do conhecimento, conteúdos específicos, sua linguagem e formas de raciocínio, se integrando em diálogos com os demais campos” (JUNIOR, 2007, p. 975).

CC3: “Embora o contexto em que se insere a Física seja outro, a Matemática é uma constante ferramenta de auxílio, sobretudo na resolução que culminam em modelos matemáticos” (LOZADA, 2007, p. 278).

Os trechos denotam o desenvolvimento de atividades de Modelagem em outras disciplinas, mais especificamente em Física. Neste contexto, o papel da Matemática é de ferramenta para contribuir no desenvolvimento, principalmente, do modelo matemático. Consequentemente, a aprendizagem dos conceitos matemáticos também pode ocorrer.

6. Interdisciplinaridade sendo desenvolvida em um projeto onde duas ou mais disciplinas desenvolvem suas atividades a partir de um mesmo tema, sem que haja integração entre uma atividade e outra: esta categoria denota o desenvolvimento de várias atividades em diferentes disciplinas a partir de um único tema. Entretanto, cada professor desenvolve em sua disciplina uma atividade e não há interação entre as atividades, apenas uma socialização dos resultados.

RE7: “[...] ficou decidido que cada professor deveria elaborar e desenvolver com seus alunos uma proposta de atividade que envolvesse o tema Consumo Consciente” (p. 1).

“Além dos cálculos realizados nas aulas de Matemática relacionando o custo de cada combustível, o professor de Química, por exemplo, explorou questões relacionadas à composição, eficiência e índice de poluição de cada combustível [...]. A professora de Física explorou as fontes de energia renováveis [...], a professora de Biologia explorou o impacto da poluição atmosférica do planeta” (MELLO, 2013, p. 7).

Nos excertos selecionados do artigo RE7 observa-se que cada professor desenvolveu uma atividade diferente em sua disciplina, mas todos com o mesmo tema. Esta categoria de interdisciplinaridade, de acordo com Japiassu (1976), se aproxima de outra vertente, a pluridisciplinaridade.

4.3.3 Interdisciplinaridade e Modelagem Matemática

Concordamos com a afirmação de Japiassu (1976) de que não existe uma única definição, muito menos um único entendimento de interdisciplinaridade. Esta multiplicidade de características pode causar certa confusão de entendimento de um trabalho interdisciplinar, mas oportuniza diferentes possibilidades de encaminhamentos.

Esses encaminhamentos, ao qual chamamos de categorias, apontam para uma integração entre diferentes disciplinas e para uma preocupação em tornar a interdisciplinaridade realidade em nossas escolas. No entanto, a condução dessa integração de disciplinas aponta, por vezes, que o foco está na Matemática e que para contextualizar utilizam-se conceitos de outras disciplinas sem a participação do professor dessas disciplinas, o que também é satisfatório. Assim, o professor, sozinho, dá conta de explorar conceitos de diferentes disciplinas, mesmo sem ter domínio em

algumas delas. Nesse caso, o professor precisa mediar as ações dos estudantes de modo a fazer esses conceitos “conversarem” durante a atividade.

Em outras situações, a Matemática age como ferramenta para o desenvolvimento de atividades de Modelagem em outras disciplinas. Observa-se também, que há o caso de duas ou mais disciplinas trabalharem em torno de um único tema, mas independentemente uma da outra, caso que se aproxima da multidisciplinaridade.

Ainda se vislumbram situações que, no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, a investigação suscita o surgimento de conceitos de outras disciplinas. Finalmente, observa-se em algumas atividades de Modelagem um único foco, um único problema, onde as diferentes disciplinas contribuem de modo conjunto e integrado, com seus conhecimentos, para resolver este problema.

Em atividades de Modelagem Matemática os conhecimentos acabam sendo utilizados e reinventados, ressignificados à medida que são trabalhados de modo não isolado, mas de modo integrado. É nesse sentido que vislumbramos a interdisciplinaridade: quando uma disciplina não está a serviço da outra, mas trabalham e atuam juntas. Assim, cada professor contribui com a atividade de acordo com sua perspectiva, desde o planejamento até a execução, promovendo, deste modo, o desenvolvimento do conhecimento em todas disciplinas, sem aparente grau de importância.

Das leituras realizadas, concluímos que em todos os trabalhos de Modelagem consultados nos anais de eventos, o objetivo comum era promover a integração de duas ou mais disciplinas. Esta integração se diferencia de acordo com as características de interdisciplinaridade elencadas nas atividades, apresentando desde o uso de conceitos de outra disciplina até a efetiva participação de diversos professores de diferentes disciplinas em prol da resolução de um problema.

Nossa compreensão é de que para que o trabalho seja efetivamente interdisciplinar deve-se haver uma “interação entre duas ou mais disciplinas” (JAPIASSU, 1976) mas, em concordância com Tomaz e David (2008, p. 16), entendendo que “a interdisciplinaridade poderia ser alcançada quando os conhecimentos de várias disciplinas são utilizados para resolver um problema ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista”.

Neste contexto, a atividade de Modelagem, ao partir de uma situação da realidade, necessariamente envolve mais de uma área do conhecimento (não

necessariamente uma disciplina escolar, mas área do conhecimento), pois a realidade é interdisciplinar. Todavia, para este trabalho ser efetivamente interdisciplinar no que tange às disciplinas, as disciplinas envolvidas (e seus professores) devem contribuir cada qual com seus conhecimentos, promovendo, deste modo, a aprendizagem interdisciplinar.

Deste modo, tomando as categorizações que foram construídas e verificadas na literatura para a interdisciplinaridade, faz sentido pensar as atividades de Modelagem Matemática como atividades interdisciplinares. Isto porque, necessariamente, ao trabalhar com Modelagem Matemática, lidamos com outra área do conhecimento, independentemente dessa área do conhecimento ser disciplina ou não na escola.

5 CONTEXTO, DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM

Neste capítulo, apresentamos as três atividades desenvolvidas para a coleta de informações: **1) Qual é o Público?; 2) De que tamanho vai ficar? e 3) Lixo Eletrônico**. Elucidamos o contexto em que cada atividade emergiu e em seguida, discorremos sobre o desenvolvimento do trabalho. Por fim, realizamos as análises dos episódios selecionados à luz do referencial teórico.

5.1 CONTEXTO EM QUE SE DESENVOLVEU A ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA 1 - QUAL É O PÚBLICO?

No início do ano letivo de 2016, solicitei²⁴ que as turmas, nas quais lecionava, lessem o livro “O homem que calculava” de Malba Tahan²⁵, inclusive a turma em que se daria a coleta de informações para a realização desta pesquisa. No entanto, à princípio não tinha a intenção de desenvolver uma atividade de Modelagem a partir do livro. O livro foi disponibilizado em formato PDF para os alunos, pois na biblioteca havia apenas um exemplar. Alguns alunos compraram o livro impresso e emprestei o meu exemplar.

O objetivo da leitura do livro era mostrar aos alunos que podemos falar de Matemática e aprender Matemática de outras formas, além das aulas convencionais. Neste sentido, além de ler o livro, os alunos deveriam desenvolver alguma atividade a partir do livro para apresentar no Dia Nacional da Matemática, que em 2004 foi instituído pelo Congresso como sendo o dia 6 de maio em homenagem ao professor Júlio César de Mello e Souza, o Malba Tahan.

Neste contexto, conversei com as duas professoras de Português e com a professora de Arte que tinham aulas nas mesmas turmas que eu, para realizarmos um trabalho interdisciplinar.

Assim, a turma do primeiro ano do curso técnico em Eletromecânica integrado ao Ensino Médio, desenvolveu com a professora de Português paródias que tratavam da história do livro de Malba Tahan. A turma do segundo ano de Eletromecânica

²⁴ Em alguns momentos do texto, utilizaremos a primeira pessoa do singular, devido à experiência da coleta de informações ter sido realizada apenas pela pesquisadora.

²⁵ TAHAN, Malba (Júlio César de Mello e Souza). **O homem que calculava**. Rio de Janeiro: Editora Record, 84^a ed, 2013.

ensaiou comigo, a professora de Matemática, e com a professora de Arte uma peça de teatro com trechos do livro. A turma do segundo ano do curso de Informática integrado ao Ensino Médio desenvolveu nas aulas de Matemática vídeos com trechos do livro, esses vídeos eram de teatro de sombras, animações e filmagens dos próprios alunos interpretando trechos do livro. Por fim, a turma do primeiro ano do curso de Informática confeccionou cartazes com alguns desafios que apareciam no livro, com suas respectivas soluções.

No dia primeiro de junho de 2016, todos os alunos do período da manhã do Instituto – sete turmas, totalizando aproximadamente 180 alunos – alguns professores e equipe pedagógica se reuniram no auditório do campus para a apresentação dos trabalhos. Os cartazes confeccionados foram fixados pelos corredores. As apresentações foram avaliadas pelos envolvidos como muito positivas e importantes.

Infelizmente, percebemos que nem todos os alunos levaram a sério a leitura do livro, lendo apenas alguns trechos. No entanto, ao assistirem as apresentações dos colegas, gostaram da história e alguns disseram que iriam ler o livro.

A professora de Português que lecionava no primeiro ano do Curso Técnico de Informática Integrado ao Ensino Médio tinha acordado com a professora de Matemática que o livro “O homem que calculava” seria o livro de leitura do bimestre da disciplina de Português. No entanto, alguns alunos reclamaram que não entenderam o livro e que era injusto “cobrar” um livro de Matemática na disciplina de Português. Desta forma, ela acabou solicitando que lessem outro livro, à escolha dos alunos.

Neste contexto, ao iniciarmos o planejamento das atividades de Modelagem paralelamente ao desenvolvimento das atividades do livro, pensamos em aproveitar o ensejo de “Malba Tahan”, que visivelmente havia despertado o interesse de muitos alunos, para começar a atividade de Modelagem com a turma escolhida para a pesquisa²⁶.

A intenção era desenvolver essa atividade de Modelagem envolvendo outras disciplinas e seus respectivos professores. No entanto, no seu desenvolvimento, a interdisciplinaridade foi emergindo diante do suscitar de situações para as quais os conhecimentos de outras áreas se faziam necessários.

²⁶ As outras turmas também desenvolveram atividades de Modelagem, mas como não fazem parte da presente pesquisa, não tiveram as informações coletadas.

5.1.1 A Atividade

No decorrer de algumas semanas já vinha conversando com os alunos que desenvolveríamos algumas atividades diferenciadas, expliquei a dinâmica de uma aula com atividades de Modelagem, seus objetivos e importância, inclusive devido às aulas serem gravadas em áudio e vídeo para a coleta de informações. Os alunos pareceram ficar um pouco apreensivos em saber que participariam de uma pesquisa e que desenvolveriam algo, até então, novo para eles. No entanto, aceitaram participar das atividades e assinaram os termos de assentimento (Anexo 8.3) e, seus responsáveis, o de consentimento (Anexo 8.4).

No dia 14 de junho de 2016, cheguei em sala e solicitei que os alunos se sentassem em grupos de 5 integrantes. Como a turma era numerosa, 46 alunos, eles se atrapalharam um pouco, necessitando de ajuda. Depois que os alunos estavam em grupos, iniciei a conversa retomando o assunto do livro. A reação dos alunos não foi das melhores. Por se tratar de um livro de “Matemática” já iniciaram a leitura com receio. Disseram que não entenderam, que o livro era muito difícil. Um aluno chegou a dizer: *“Eu odeio Matemática, como que eu vou ler um livro de Matemática?”*. Questionei-os sobre se tentassem uma segunda leitura, após as atividades alusivas ao Dia da Matemática com a apresentação do teatro, vídeos e paródias, se eles acreditavam que a compreensão seria melhor. Alguns alunos disseram acreditar que sim.

Continuamos então a fazer um *feedback* do contexto da história, especificamente dos trechos que tratavam de contagem de folhas, camelos, etc. Sempre questionando os alunos em como eles achavam que “o homem que calculava” conseguia determinar grandes quantidades com tanta rapidez.

Distribui entre os alunos o seguinte trecho do livro (Quadro 10) com os questionamentos:

O Homem que Calculava – Malba Tahan

[...] Contente com os lucros que obteve, o meu bondoso patrão, acaba de conceder-me quatro meses de repouso e vou, agora, a Bagdá, pois tenho desejo de visitar alguns parentes e admirar as belas mesquitas e os suntuosos palácios da cidade famosa. E para não perder tempo, exercito-me durante a viagem, contando as árvores que ensombram esta região, as flores que a perfumam, os pássaros que voam no céu entre nuvens.



E, apontando para uma velha grande figueira que se erguia à pequena distância, prosseguiu:

- Aquela árvore, por exemplo, tem duzentos e oitenta e quatro ramos.

Sabendo-se que cada ramo tem, em média, trezentas e quarenta e sete folhas, é fácil concluir que aquela árvore tem um total de noventa e oito mil, quinhentas e quarenta e oito folhas! Estará certo, meu amigo?

- Que maravilha! – exclamei atônito. – É inacreditável possa um homem contar, em rápido volver d'olhos, todos os galhos de uma árvore e as flores de um jardim! Tal habilidade pode proporcionar, a qualquer pessoa, seguro meio de ganhar riquezas invejáveis!

- Como assim? – estranhou Beremiz. – Jamais me passou pela ideia que se pudesse ganhar dinheiro, contando aos milhões folhas de árvores e enxames de abelhas! Quem poderá interessar-se pelo total de ramos de uma árvore ou pelo número do passaredo que cruza o céu durante o dia?

- A vossa admirável habilidade – expliquei – pode ser empregada em vinte mil casos diferentes. Numa grande capital, como Constantinopla, ou mesmo Bagdá, sereis auxiliar precioso para o governo. Podereis calcular populações, exércitos e rebanhos. Fácil vos será avaliar os recursos do país, o valor das colheitas, os impostos, as mercadorias e todos os recursos do Estado. Asseguro-vos – pelas relações que mantenho, pois sou bagdáli – que não vos será difícil obter lugar de destaque junto ao glorioso califa Al Motacém (nosso amo e senhor). Podeis talvez exercer o cargo de vizir-tesoureiro ou desempenhar as funções de secretário da Fazenda muçulmana. [...] (O Homem que Calculava – Malba Tahan, 2013, 84ª ed, p.18).

- ✓ Como será que Beremiz, o homem que calculava, conseguia descobrir a quantidade de galhos e folhas de uma árvore? Será que ele utilizava algum artifício matemático? Alguma regra? Escreva o que vocês pensam sobre isso.
- ✓ Será que é o mesmo método utilizado pelos organizadores de shows para ter ideia do público presente? Escreva o que vocês pensam sobre isso.
- ✓ Como podemos estimar a quantidade de pessoas presentes em um show ou manifestação?



Quadro 10 - Atividade de Modelagem 1: Qual é o público?

Fonte: elaborado pela autora.

Passamos a discutir e a levantar hipóteses de como ele poderia realizar esses cálculos e como hoje poderíamos utilizar a mesma estratégia para determinar a quantidade de pessoas em um show, passeata, palestra ou manifestação.

Uma aluna sugeriu que Beremiz contava inicialmente a quantidade de folhas em um galho, depois contava a quantidade de galhos e multiplicava os valores. Deste modo, chegaram à conclusão que, para estimar a quantidade de pessoas em certo local, primeiramente devemos saber quantas pessoas estão presentes em uma região de área igual a $1m^2$, depois calcular a área do local e, por fim, multiplicar essa quantidade de pessoas pela área do local.

Questionei-os então, sobre quantas pessoas cabem em $1m^2$. Alguns disseram oito, outros seis. Em seguida, questionei-os se em qualquer situação a quantidade de pessoas por metro quadrado será sempre a mesma. Sugerir então que construíssem uma região quadrada cuja área é de $1m^2$ no chão da sala de aula e determinassem quantas pessoas caberiam nela.

Deste modo, cada grupo de alunos construiu a sua região quadrada cuja área era de $1m^2$ utilizando fita métrica ou régua e fita crepe. Eles mesmos, por experimentação, determinaram quantas pessoas caberiam em uma área de $1m^2$ em várias situações, de pequenas, médias e grandes aglomerações conforme apresentado nas Fotografias 1, 2 e 3.



Fotografia 1 - Alunos medindo os segmentos para formar a região quadrada de 1 metro de lado

Fonte: arquivos da autora.



Fotografia 2 - Alunos medindo os segmentos para formar a região quadrada de 1 metro de lado

Fonte: arquivos da autora.



Fotografia 3 - Grupo de alunos determinando experimentalmente a quantidade de pessoas que cabem em 1 m²
 Fonte: arquivo da autora.

Após a experimentação, os alunos voltaram aos grupos e passaram a socializar os valores que os demais grupos definiram. Os alunos pensaram em quantidades de pessoas por metro quadrado em diferentes locais e em diferentes situações (Figura 1).

Numero (pessoas)	m ²	local
8	1	Passeata
5	1	Danzando em 1 festa
9	1	Balada
3	1	(ajoelhados) Igreja judaica
10	1	Ônibus
1	1	(Girando com os braços abertos)
PARÂMETRO		
PEQUENO	MÉDIO	GRANDE
2	5	8

Figura 1 - Registro do grupo 1: Aglomeração de pessoas em 1m² em diferentes situações
 Fonte: registro dos alunos.

Na figura 1, o grupo 1 apresentou seis situações diferentes onde há aglomeração de pessoas: passeata, dançando em uma festa, balada, ajoelhados em

uma igreja, no ônibus e girando com os braços abertos. A partir de experimentações no “metro quadrado construído” estimaram quantas pessoas caberiam em uma área de 1m^2 em cada situação. Em seguida, este grupo generalizou os parâmetros em pequeno com duas pessoas, médio com cinco pessoas e grande com oito pessoas.

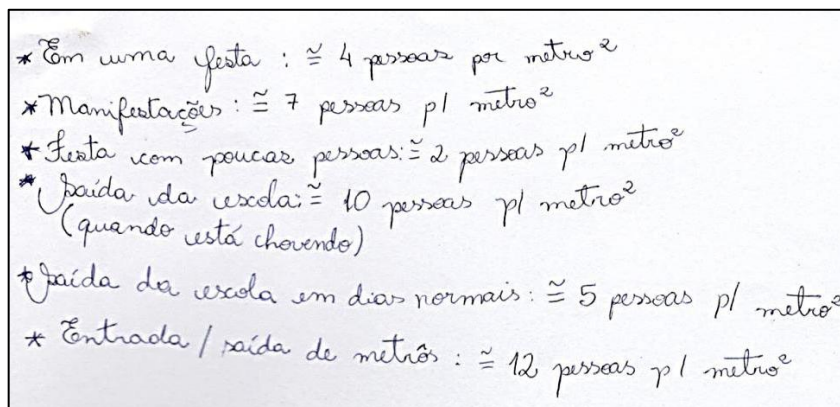


Figura 2 - Registro do grupo 4: Aglomeração de pessoas em 1m^2 em diferentes situações.
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 2, o grupo 4 apresentou situações diferentes das apresentadas pelo grupo 1. Observa-se que cada grupo pensou em locais que seus membros costumam frequentar ou até mesmo aproveitaram para expressar a dificuldade de algum familiar ou amigo que mora em outra cidade, como quando apresentam a situação do metrô, que não existe na cidade de Assis Chateaubriand.

Assim, após a socialização de todos os grupos, definiram, em consenso, um parâmetro para quantidade de pessoas por metro quadrado para pequenas, médias, grandes e muito grandes aglomerações (Quadro 11). Essa definição se deu levando em conta que quando há aglomeração de pessoas, esta, dificilmente, é homogênea. E ainda, há casos em que a aglomeração é grande e há casos que é pequena, ou seja, tem muitas pessoas no local ou tem poucas pessoas no local. Neste sentido, os alunos pensaram nestes quatro parâmetros: pequena concentração, média concentração, grande concentração e muito grande concentração, para poder pensar e modelar diferentes situações.

GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3
Festa: 4 pessoas Metrô: 12 pessoas Escola (chuva): 10 pessoas Escola (sem chuva): 5 pessoas Manifestação: 7 pessoas Festa (pouca): 2 pessoas	Palco: 12 Saída escola: 6 Manifestação: 8	Manifestação: 8 Festa: 6 Show (palco): 9
GRUPO 4	GRUPO 5	GRUPO 6
Dançando: 4 Palco: 10 Palco (longe): 5 Manifestação: 7 Parados: 10	Passeata: 8 Dançando: 5 Balada: 9 Ajoelhado na igreja: 3 Ônibus: 10 Girando com os braços abertos: 1	Perto palco: 6 Dançando: 2 Desfile a pé: 1
GRUPO 7	GRUPO 8	GRUPO 9
Show (frente): 7 Show (meio): 5 Show (fundo): 3 Festa: 5 Manifestação: 8 Desfile: 4	Perto do palco (dançando): 6 Longe: 3 Manifestação: 7 Rave: 6 a 8 Desfile: 2 a 3	Show frente: 7 Show meio: 6 Show fundo: 2 Ônibus: 6 Fila da "Break's" ²⁷ : 5
PARÂMETRO PARA A ATIVIDADE (negociado entre todos os alunos)		
Para uma aglomeração: Pequena: 2 pessoas Média: 5 pessoas Grande: 8 pessoas Muito grande: 10 pessoas		

Quadro 11 - Parâmetros de todos os grupos referentes à aglomeração de pessoas em 1m²
Fonte: elaborado pela autora.

A maioria dos grupos pensou em um parâmetro para festas ou shows. Neste sentido, a partir dos parâmetros determinados, os alunos passaram a investigar a seguinte questão:

Como determinar a quantidade de pessoas presentes em um show no Centro de Eventos Ângelo Micheletto de Assis Chateaubriand a partir de uma foto aérea do show?

Na semana seguinte tivemos “Semana de Cursos” e os alunos foram assistir a uma palestra no auditório durante a aula de Matemática. Deste modo, a continuação da atividade de Modelagem ocorreu somente na semana seguinte, no dia 28 de junho.

Assim, por haver se passado duas semanas, inicialmente realizamos um *feedback* da última aula para podermos nos situar. Em seguida, com os alunos já sentados em grupo, disse a eles que agora teríamos que determinar um modelo matemático para responder ao nosso problema que era estimar a quantidade de pessoas presentes em um determinado local.

²⁷ Lanchonete do Instituto que os alunos frequentam nos intervalos das aulas e no período da tarde.

Questionei-os quanto a que aspectos deveríamos levar em consideração. Um aluno disse que o espaço do show e outro disse que o tipo de show. Um terceiro aluno argumentou que bastaria contar os ingressos vendidos. Contra argumentei então no caso de o show ter entrada livre, que é o que aconteceu nas últimas edições da ExpoAssis²⁸.

Então um aluno disse que deveríamos levar em consideração o tamanho do lugar. Neste momento questionei: Quantos metros quadrados tem o espaço para shows no Parque de Exposições de Assis?

Solicitei que discutissem nos grupos como faríamos para determinar a área de um determinado local. Disponibilizei 15 minutos para que pudessem discutir e depois socializar o que fizeram.

Os alunos ficaram alguns minutos sem reação. Após alguns questionamentos e incentivos iniciaram as discussões nos grupos. Chamavam-me para esclarecer algumas dúvidas e voltavam a pensar. Projetei então uma foto (Fotografia 4) de um show que aconteceu no Centro de Eventos Ângelo Micheletto em Assis Chateaubriand, local onde ocorre a ExpoAssis.



Fotografia 4 - Foto aérea de um show no Centro de Eventos Ângelo Micheletto (projetada pela professora)

Fonte: <http://mapio.net/pic/p-20930388/> - acesso em 08/03/2017.

Solicitei que observassem e fizessem comentários sobre a imagem. Alguns alunos observaram que as pessoas se aglomeravam mais perto do palco e à medida

²⁸ ExpoAssis – Festa e Exposição do município de Assis Chateaubriand-Paraná.

que ficavam mais longe do palco a concentração era menor. Após o tempo se encerrar, iniciamos a socialização do que os alunos fizeram.

Cada grupo falou como pensou para calcular a quantidade de pessoas num determinado local. No entanto, os alunos pensaram somente em um local retangular, não se atentaram em observar a forma geométrica do espaço. Todos os grupos pensaram mais ou menos da mesma forma, calcular a área do local e multiplicar pela quantidade de pessoas por metro quadrado em cada região. Na exposição dos alunos, eles explicavam como procederiam para resolver o problema. No entanto, não apresentaram um modelo algébrico para representar a quantidade de pessoas em um determinado local. Desse modo, a partir das estratégias que os alunos apresentaram, passamos a construir o modelo algébrico juntos, pensando em variáveis para representar as dimensões do local retangular, como os alunos haviam investigado (Figura 3).

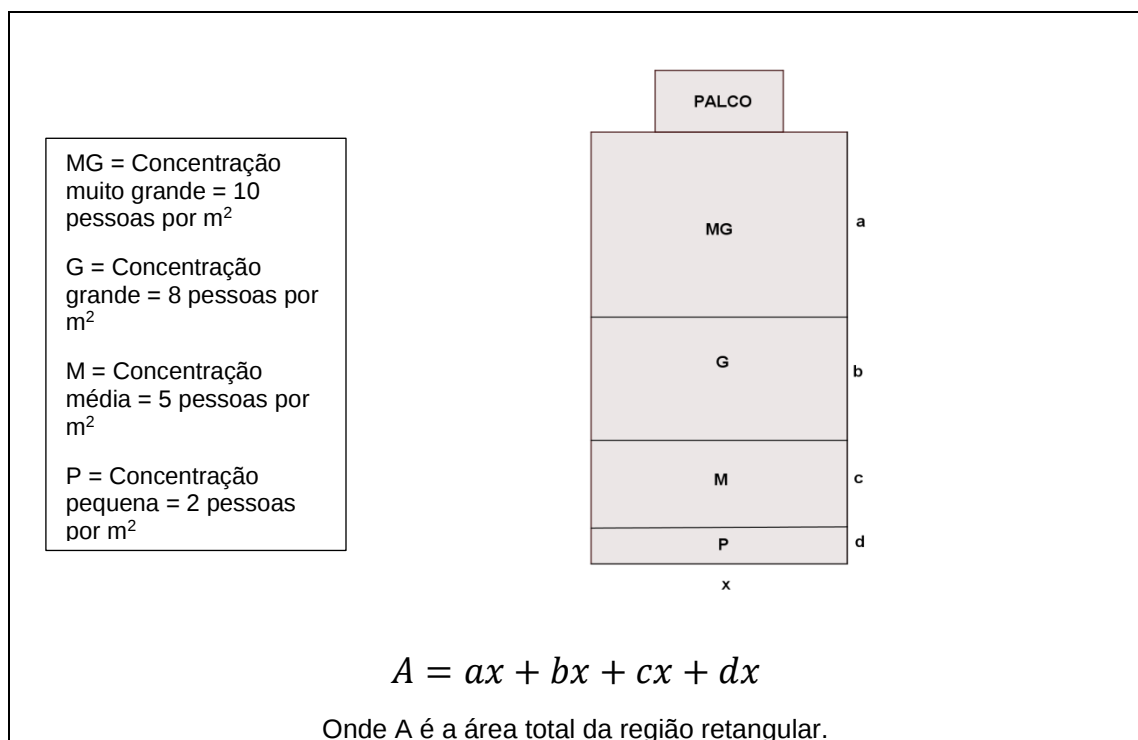


Figura 3 - Modelo matemático construído para determinar a área de um local retangular

Fonte: elaborado pela autora.

De acordo com os parâmetros que os alunos determinaram experimentalmente:

$$MG = 10 \text{ pessoas}; G = 8 \text{ pessoas}; M = 5 \text{ pessoas e } P = 2 \text{ pessoas}$$

Assim, o modelo matemático para estimar a quantidade de pessoas em um local retangular será:

$$Tp = 10ax + 8bx + 5cx + 2dx$$

Onde T_p é a quantidade total estimada de pessoas em um local retangular.

Colocando a variável x em evidência, temos:

$$Tp = x(10a + 8b + 5c + 2d)$$

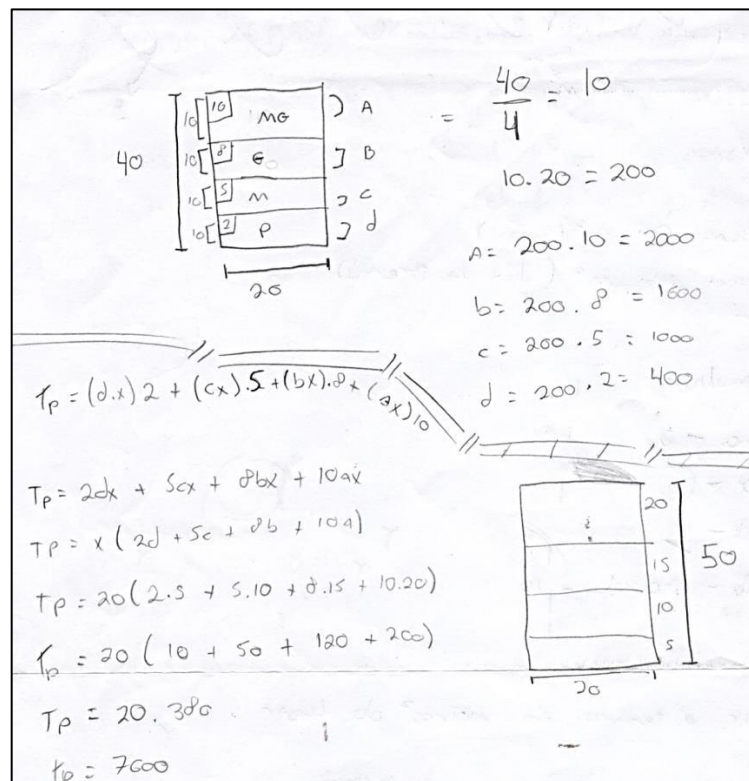


Figura 4 - Registro do grupo 9 - Modelo matemático encontrado para determinar a concentração de pessoas em um local retangular e uma possível solução para o problema
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 4, observamos o registro dos alunos do grupo 9. Inicialmente, eles dividem o local retangular em quatro faixas representando as diferentes aglomerações. No entanto, consideram as quatro regiões com tamanhos iguais e utilizam um valor estimado de 10 metros para cada faixa calculando a quantidade de pessoas em cada faixa. Em seguida, decidem considerar faixas de tamanhos diferentes com medidas estimadas, calculando a quantidade de pessoas presentes em um suposto show.

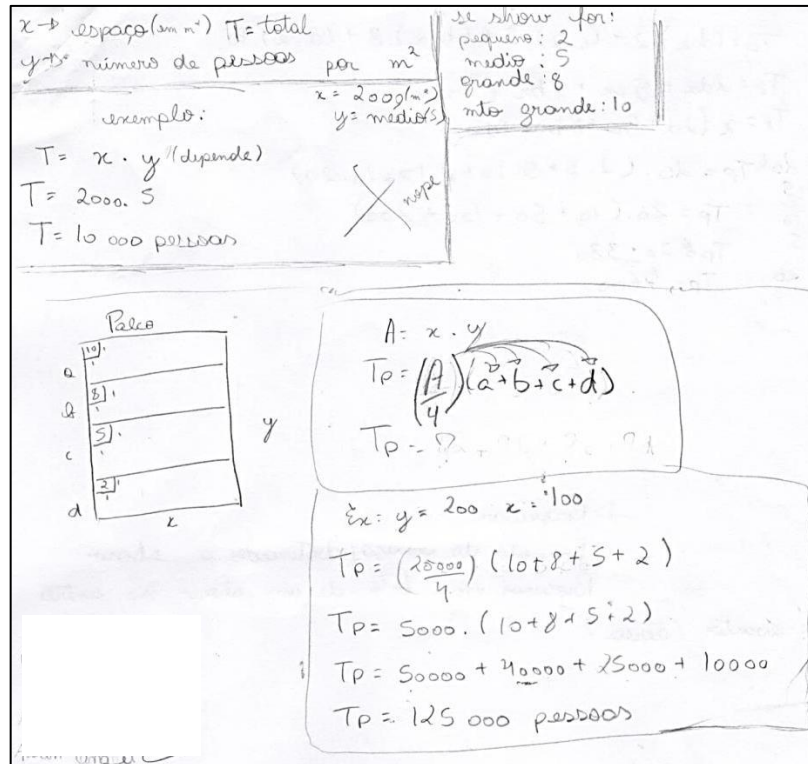


Figura 5 - Registro do grupo 2 - Modelo matemático encontrado para determinar a concentração de pessoas em um local retangular e uma possível solução para o problema
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 5 observamos o registro do grupo 2. A princípio eles consideram x como o espaço em m^2 , y o número de pessoas por m^2 e T o total de pessoas no local. Preocupam-se em apresentar um exemplo supondo a área do local e aglomeração média, encontrando o total de pessoas nessas condições. Em seguida apresentam um modelo algébrico no qual consideram a área da região retangular ($A = xy$, onde agora x é a largura do local e y é o comprimento) dividida por quatro para multiplicar com as diferentes aglomerações. Novamente apresentam um exemplo fictício.

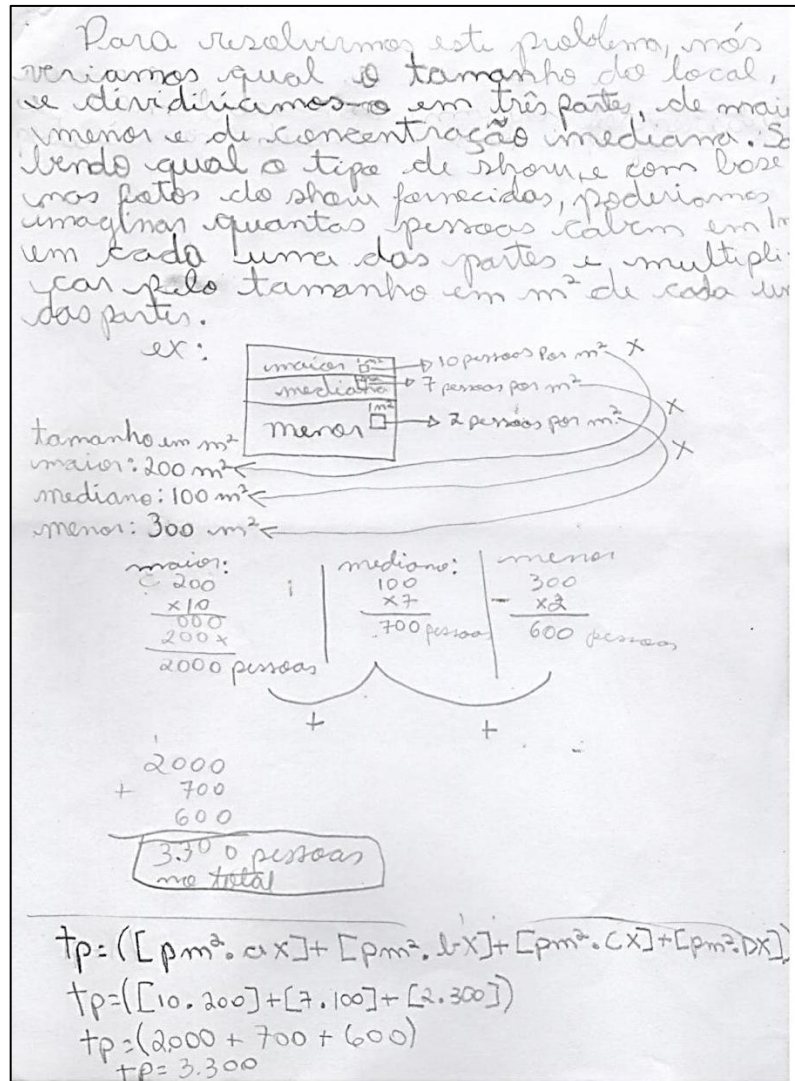


Figura 6 - Registro do grupo 5: Modelo matemático encontrado para determinar a concentração de pessoas em um local retangular e uma possível solução para o problema
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 6, o grupo 5 apresenta o plano de resolução de forma escrita apresentando um exemplo em seguida. Logo após, apresenta a formalização do que escreveu em forma algébrica e a resolução com dados fictícios.

No entanto, após a socialização dos grupos, os questioneei se o local destinado ao público no Centro de Eventos Ângelo Micheletto era realmente retangular. Os alunos não souberam responder. Apesar de alguns conhecerem o local, não se lembravam do formato. Sugeri que pesquisassem. Um aluno sugeriu que olhassem no *Google Maps*. No entanto, a aula já estava terminando. Então, pedi que pesquisassem em casa o formato do local e procurassem uma foto de um show que tivesse ocorrido neste local.

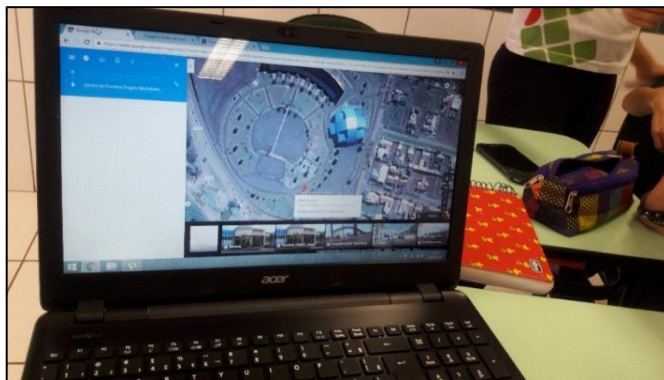
Nas próximas duas semanas, precisei realizar uma avaliação de um conteúdo que havíamos estudado anteriormente para poder fechar o conceito da disciplina, visto que o bimestre estava se encerrando. Deste modo, retomamos a atividade de Modelagem somente após as férias de julho.

Retomamos então a atividade de Modelagem no dia 2 de agosto. Entreguei aos grupos as folhas com as anotações dos dois últimos encontros de Modelagem, para que pudessem retomar a investigação e retomei o seguinte questionamento:

Como determinar a quantidade de pessoas presentes em um show no Parque de Exposições Ângelo Micheletto de Assis Chateaubriand a partir de uma foto aérea do show?

Para auxiliar os grupos, fiz duas perguntas auxiliares: *Qual é a capacidade de pessoas do local destinado ao público dos shows? A partir de uma foto aérea que os próprios alunos selecionaram, quantas pessoas possivelmente estavam presentes no show?*

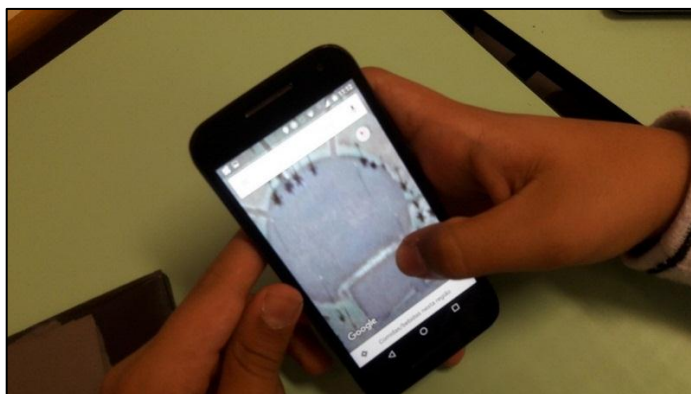
Neste sentido, os grupos passaram a investigar no *Google Maps* o local destinado ao público nos shows da ExpoAssis (Fotografia 5).



Fotografia 5 - Pesquisa no Google Maps no notebook
Fonte: arquivos da autora.



Fotografia 6 - Momento do desenvolvimento da atividade nos grupos
Fonte: arquivos da autora.



Fotografia 7 - Pesquisa no Google Maps no celular
Fonte: arquivos da autora.

Após observarem que o local tinha um formato circular, passaram a investigar algumas características do círculo como: diâmetro, raio, corda e área.

Explorando o *Google Maps*, lembraram que na aula de Geografia estudaram o conceito de escala e usaram-no para determinar o raio da região circular, medindo aproximadamente o diâmetro do local na tela do notebook ou do celular com uma régua e comparando esta medida com a escala apresentada no Google Maps. Outros grupos descobriram a função medir distância no mapa online e a utilizaram para conseguir as medidas reais do local.

Após alguns momentos de discussões, sugestões, utilizaram a fórmula da área do círculo para determinar a área da região. Para determinar a capacidade de pessoas do local, alguns grupos decidiram calcular uma média de concentração, considerando os quatro parâmetros estabelecidos anteriormente. Para isso adicionaram os valores para pequena concentração (2), média (5), grande (8) e muito grande (10) e dividiram por quatro, encontrando uma concentração média de seis pessoas por m^2 . Após determinarem a média, estes grupos multiplicaram pela área e determinaram aproximadamente o número de pessoas que poderiam assistir a um show no Centro de eventos. Outros grupos determinaram apenas a área do local.



Fotografia 8 – Alunos trabalhando na atividade
Fonte: arquivos da autora.



Figura 7 - Imagem do Google Maps
Fonte: adaptado pela autora a partir de print da página do Google Maps.

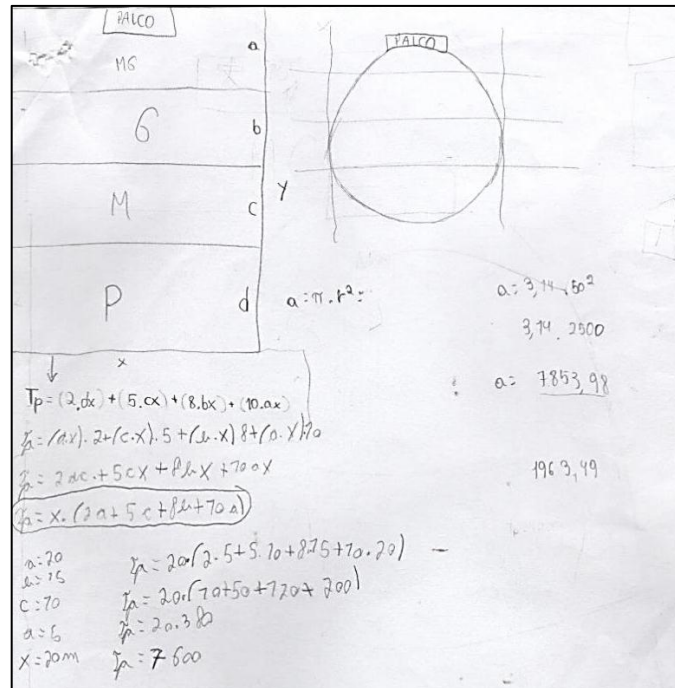


Figura 8 - Registro do grupo 4 – Modelo Matemático
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 8, observa-se no canto superior direito, a representação que os alunos fizeram do local circular. Tentaram transferir este modelo à ideia que utilizaram no modelo retangular, que consiste em dividir o local em faixas de concentração. Podemos observar logo abaixo que eles calculam a área da região circular através da fórmula matemática da área do círculo.

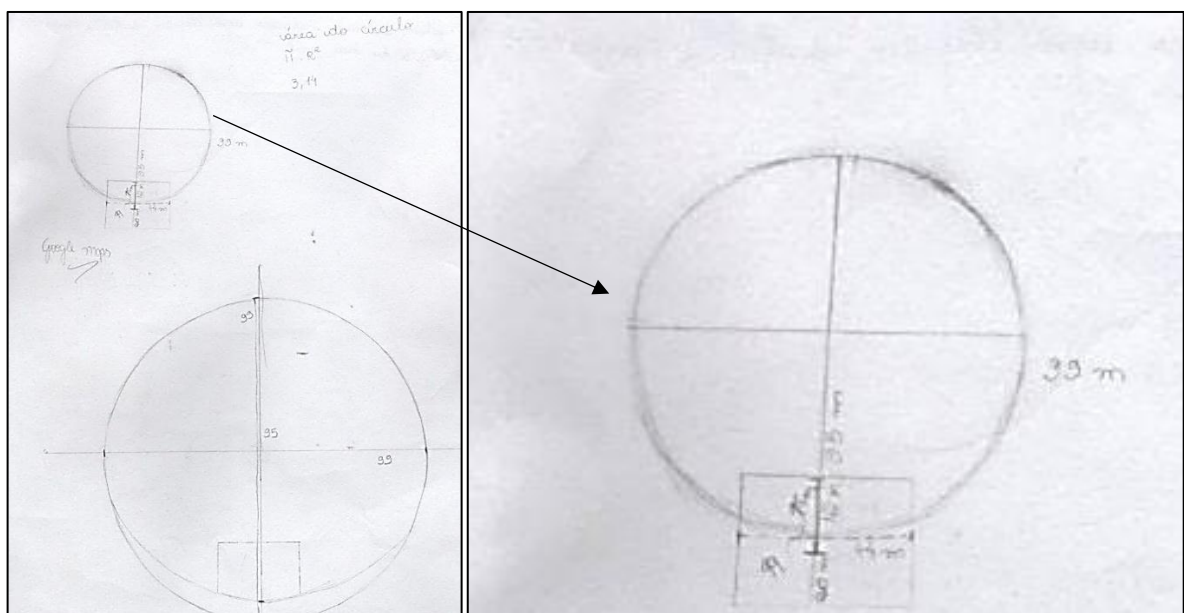


Figura 9 - Registro do grupo 1: Modelo Matemático
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 9, o grupo 1 representou o local através de um círculo e anotaram as medidas verificadas no Google Maps. Percebe-se que se preocuparam em determinar o diâmetro do local e as dimensões do retângulo destinado ao palco. No entanto, neste momento, ainda não apresentaram uma solução para o problema.

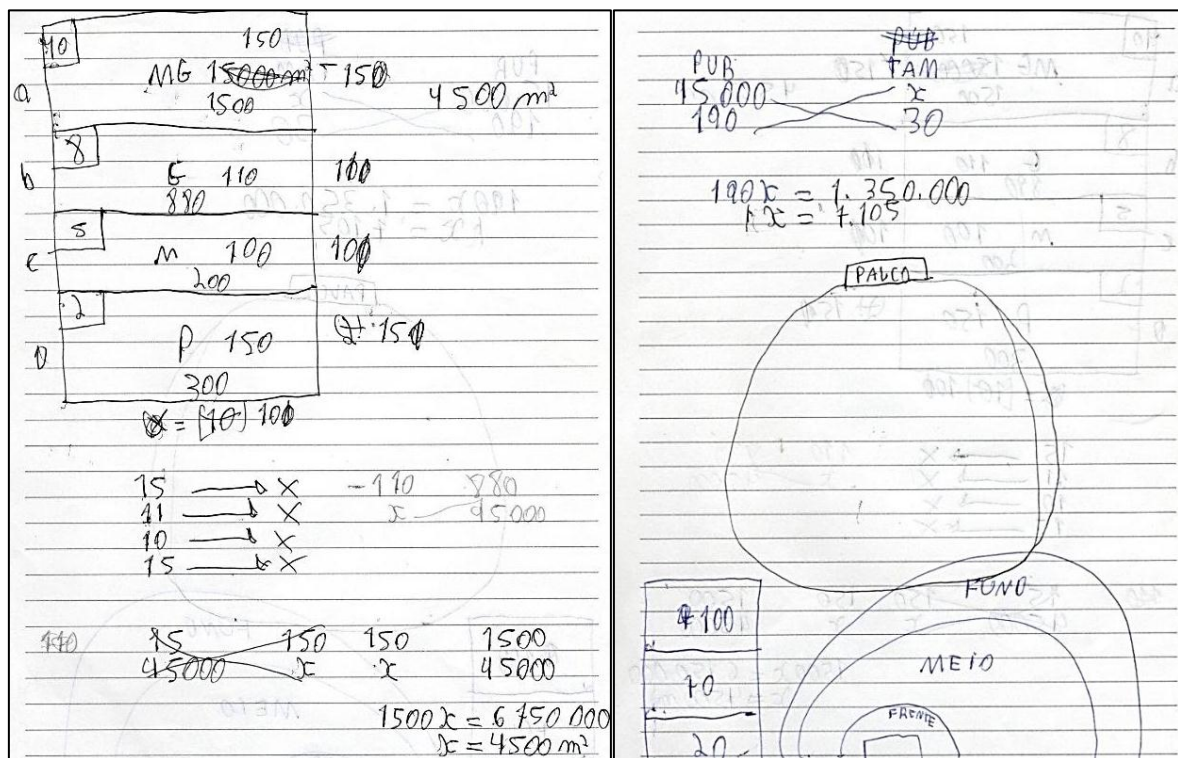


Figura 10 - Registro do grupo 7: Modelo Matemático
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 10, o grupo 7 tentou usar proporção, comparando a área retangular e a quantidade de pessoas no local. Esta última informação foi encontrada pelos alunos sobre um show da ExpoAssis em que esteve presente um público de quarenta e cinco mil pessoas. Deste modo, estimaram a área da região circular em sete mil, cento e cinco metros quadrados.

Depois, os grupos passaram a investigar as fotos dos shows que encontraram na internet para determinar o número de pessoas presentes naquela ocasião específica.

A foto escolhida pelo grupo 5 está apresentada na Fotografia 9 e sua resolução consta na Figura 11. Com o auxílio do Google Earth, os alunos determinaram o diâmetro do local e consequentemente o raio ($d = 100$ m e $r = 50$ m). A partir dessas informações, calcularam o comprimento aproximado e a área do

círculo. Em seguida, utilizando os parâmetros de concentração muito grande (10 pessoas por m^2) e grande (8 pessoas por m^2), calcularam a quantidade de pessoas em cada caso, ou seja, considerando que houvesse 10 pessoas por m^2 em toda a área de show e depois considerando que houvesse 8 pessoas por m^2 em toda a área de show. Depois, calcularam a média dos dois valores encontrados, obtendo 70677 pessoas.



Fotografia 9 - Foto selecionada pelo grupo 5

Fonte: <http://www.radiojornalam.com.br/not%C3%ADcias/geral/item/6648-jads-e-jadson-reuniram-grande-p%C3%BAblico-no-primeiro-dia-da-expo-assis-2015.html>.

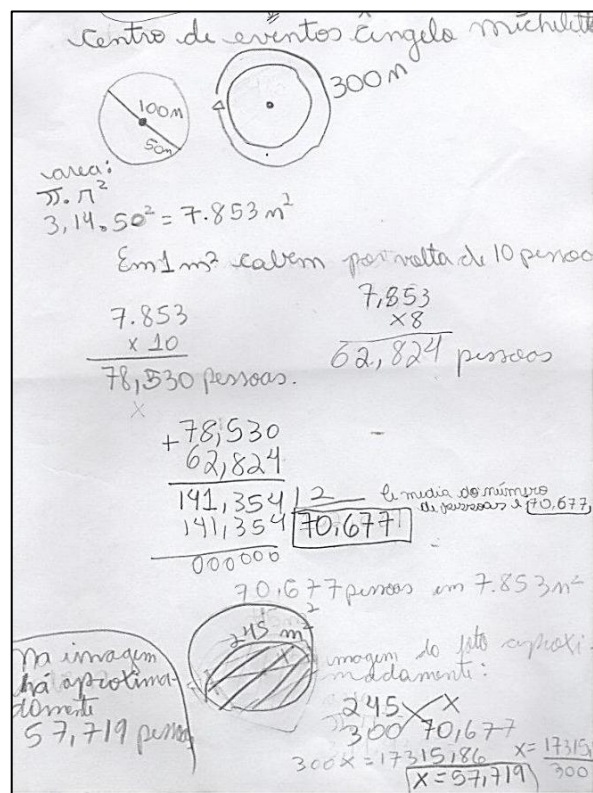


Figura 11 - Registro do grupo 5: Modelo Matemático
 Fonte: registro dos alunos.

No entanto, o grupo não apresentou a informação real de quantas pessoas estavam presentes para poder realizar a validação do resultado. Neste sentido, procuramos em sites da imprensa local a imagem do grupo (Fotografia 9) e a encontramos juntamente com a estimativa de público (Figura 12).



Figura 12 - Recorte da notícia sobre o show de abertura da ExpoAssis 2015
Fonte: <http://www.radiojornalam.com.br/not%C3%ADcias/geral/item/6648-jads-e-jadson-reuniram-grande-p%C3%BAblico-no-primeiro-dia-da-expo-assis-2015.html>.

Tomando como pertinente a estimativa da notícia veiculada na Figura 12, de pelo menos 30 mil pessoas no show, tem-se um valor distante do encontrado pelo grupo. Possivelmente o problema tenha ocorrido devido à concentração considerada pelo grupo, de 9 pessoas por m^2 .

Talvez, se o grupo tivesse considerado as diferentes aglomerações que definiu no início da investigação, também nessa situação, de modo que na faixa mais próxima do palco estivesse uma concentração mais alta e mais distante do palco, uma aglomeração menor, o resultado fosse mais próximo da estimativa noticiada.

Já o grupo 7 (fotografia 10), pensou em outra estratégia de resolução a partir das imagens que selecionou (fotografias 4 e 10). Os alunos calcularam uma média de ocupação e depois multiplicaram pela área do local. Em seguida, para validação, buscaram encontrar a quantidade real de pessoas presentes no show da imagem. No entanto, encontraram esta informação apenas de uma imagem. A informação

encontrada foi de 50938 pessoas e a quantidade estimada pelos alunos foi de 48550 pessoas. O resultado foi considerado satisfatório pelos alunos.



Fotografia 10 - Foto aérea do Centro de eventos Ângelo Micheletto

Fonte: <https://www.opresente.com.br/noticia/show-de-amado-batista-encerra-a-expo-assis-2014-com-recorde-de-publico>. Acesso em 28/06/2016.

diâmetro: 94 m
 raio: 47 m
 $\pi \cdot R^2 = A$
 $3,14 \cdot 47^2 = A$
 $3,14 \cdot 2209 = A$
 $6936 = A$

média 5/m²
 $6936 \text{ m}^2 \times 5 = 34.680 \text{ pessoas}$

1ª Imagem Utilizada
 Na frente: 6
 Meio: 7
 No fundo: 7
 Real: 50938
 médio final: 7/m²
 $6936 \text{ m}^2 \times 7 = 48.552$

2ª Imagem
 Na frente: 3
 Meio: 4
 fundo: 2
 Real: não encontrado
 médio final: 3/m²
 $6936 \text{ m}^2 \times 3 = 20.808$

Figura 13 - Resolução do grupo 7

Fonte: registro dos alunos.

A seguir apresentamos a representação do modelo matemático para a área circular desenvolvido pela maioria dos grupos.

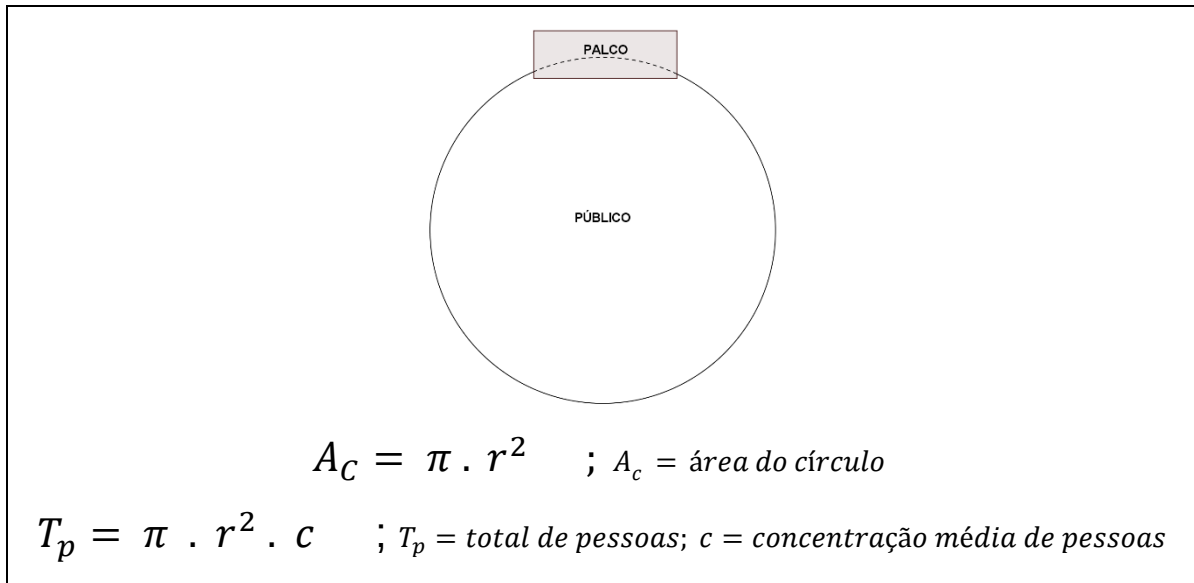


Figura 14 - Modelo Matemático para concentração de pessoas em um local circular
Fonte: elaborado pela autora.

Podemos observar que os grupos (nove ao todo) determinaram quantidades diferentes para o público presente em um show na ExpoAssis. Contudo, estas quantidades se aproximam e ainda, estão condizentes com as informações relatadas pela imprensa da região, que estimou a quantidade de pessoas no show de abertura da ExpoAssis em 30 mil pessoas e no show de encerramento em mais de 40 mil pessoas.

Foi encerrada ontem (23) a Expo Assis 2014 com a 31ª Festa das Nações e outras atrações. A maior festa de Assis Chateaubriand foi sucesso de público e superou os cerca de 70 mil de 2013. Com entrada gratuita em todos os cinco dias, a Expo Assis teve a participação aproximadamente 90 mil pessoas, que passaram pelo Centro de Eventos Ângelo Micheletto.

Destaque para o dia de abertura e o sábado (22). Na quarta-feira (19), o público chegou a cerca de 30 mil com o show da dupla Munhoz e Mariano. Já no sábado, estima-se que Amado Batista levou mais de 40 mil para o evento.

Figura 15 - Recorte da notícia de O PRESENTE

Fonte: <http://www.opresente.com.br/noticia/show-de-amado-batista-encerra-a-expo-assis-2014-com-recorde-de-publico>. Acesso em 18/04/2017.

Entretanto, ainda existem outras possibilidades de encaminhamento desta atividade que foram suscitadas pelos alunos, mas acabaram sendo abandonadas por necessitarem de maiores investigações. Estas possibilidades poderiam desencadear outros modelos e envolver outros conteúdos matemáticos.

A figura 16 apresenta três possibilidades: o modelo I representa uma concentração maior perto do palco e nas “bordas” do local. Isso porque ao redor deste espaço circular concentram-se barracas de comida e os alunos disseram acreditar que as pessoas se concentram perto destas barracas. No modelo II, supõe-se que não existiriam as barracas de comida, logo a atenção do público seria apenas o palco. Deste modo, as pessoas vão se concentrando mais na frente e esta concentração vai diminuindo à medida que se vai distanciando do palco, formando “meias-luas” (como dito pelos alunos). No modelo III, a situação é semelhante ao II, mas ao invés de formar meias-luas, as concentrações vão formando faixas. Das três representações apresentadas, a II é a que mais se assemelha à situação real do Centro de Eventos, de acordo com as imagens aéreas.

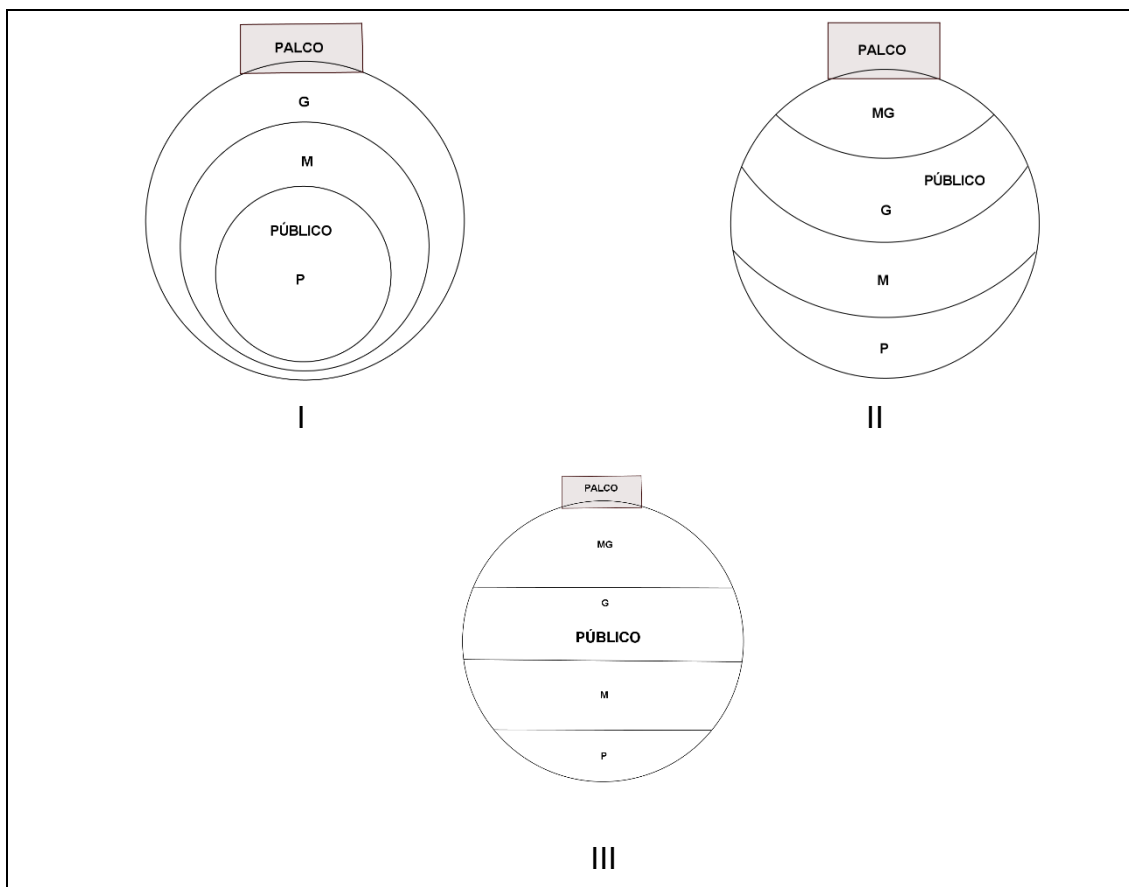


Figura 16 - Outras possibilidades de modelo para concentração de pessoas em um local circular
Fonte: elaborado pela autora.

Por vislumbrarmos que a primeira dessas situações (Modelo I) seria passível de investigação no âmbito da turma em que se deu a coleta de dados, é que nos propusemos a discutir uma possibilidade de resolução para essa configuração de

aglomeração de pessoas em um show. Essa possibilidade, que já se configura como uma reflexão acerca do refinamento do produto educacional no que diz respeito a essa situação de Modelagem, é apresentada como anexo (ANEXO 8.1) desta dissertação e no produto educacional.

Outra reflexão suscitada após o desenvolvimento da atividade é que faltou voltarmos a falar de Malba Tahan no fechamento da atividade. Uma possibilidade, neste contexto, seria retomarmos a discussão acerca de como o homem que calculava possivelmente fazia para realizar suas estimativas e, de repente, a partir da atividade de Modelagem Matemática desenvolvida, buscar calcular a quantidade de folhas em uma árvore, por exemplo, um dos contextos apresentados no livro. Essa reflexão também se caracteriza como um refinamento do produto educacional.

5.1.2 Análise Específica da Situação “Qual é o Público?”

Em relação à interdisciplinaridade nessa atividade, ela ainda se apresentou, de certo modo, tímida. Entendemos que o fato de a atividade emergir da leitura do livro e ser efetivada no contexto em que outras atividades sobre o livro eram realizadas, denota uma relação com a literatura e com a arte. No entanto, a partir das discussões da atividade, conceitos de tecnologia e geografia também apareceram.

A seguir apresentaremos oito episódios do desenvolvimento da atividade e suas referidas análises.

5.1.2.1 Episódio 1

Este episódio ocorreu no início da primeira aula com Modelagem, quando estávamos conversando sobre o contexto do livro, especificamente sobre o personagem principal, Beremiz, o homem que calculava, tentando entender como ele procedia e se hoje, num contexto real, nós utilizamos algumas das estratégias do personagem.

ANA²⁹: Profe, eu vi que ele fazia tipo assim, um galho tinha tantas folhas e tantos galhos e fazia mais ou menos assim, quanto que dava em folhas. Tipo assim.

PROF: Hammm... Como que a gente pode chamar isso? Será que a quantidade de folhas era exatamente a quantidade?

ANA LU: Aproximadamente!

²⁹ Os nomes apresentados não são verdadeiros.

PROF: Aproximadamente né. Pessoal psiuuuuuu. Será que hoje a gente utiliza a mesma estratégia que Beremiz utilizava, para contar folhas de árvores, para alguma coisa?

SANDRO: Não... não.. claro que não... nunca. Hoje é tudo na tecnologia. Hoje você já tira foto da árvore lá e já fala o tanto de folha que tem.

ENZO: quem que ia contar folha de árvore? Pra quê?

SANDRO: Áhhhhmm...

ALUNOS: Sim

PROF: Aonde?

ANA LU: Na escola... em tudo

ANA: Quando tem uma coisa que tem que contar muita coisa, você não vai contar certinho.

[...]

PROF: Pessoal, as meninas chegaram à conclusão, que Beremiz, o homem que calculava, não ficava contando folhinha por folhinha, camelo por camelo, ele usava de alguma estratégia, né, pra encontrar essas quantidades. Será que ele encontrava a quantidade exata? Como a gente chama quando a gente faz algumas análises e

ALUNOS: Aproximadamente.

ENZO: chute.

PROF: Aproximado... chute não... não é tão...

Por exemplo, quando a gente vai em uma festa, aí você chega em casa e sua mãe pergunta: Quantas pessoas tinha lá na festa?

ALUNOS: Ah.... (comentários de muitos alunos ao mesmo tempo e sem sentido)

PROF: Você conta pessoa por pessoa que estava lá na festa?

ALUNOS: Você olha...

PROF: Você olha e faz o quê?

ALUNO³⁰: Ah... e fala tem umas 30.

PROF: Mas o que você usa como parâmetro pra dizer quantas pessoas tinha na festa?

SANDRO: Lógica... volume...

ALUNO: O tamanho do lugar.

PROF: tamanho do lugar, isso é importante.

ALUNO: Se está muito tumultuado.

SAULO: eu calculo a área...

SANDRO: eu calculo o volume... e dentro desse volume, quantas pessoas.

PROF: Se está muito tumultuado, outra coisa importante. O que mais?

ALUNO: Se vender ingresso, conta.

PROF: Ah se vender ingresso, conta a quantidade de ingresso. E se você não tem acesso a isso? À venda de ingressos?

Neste episódio, observa-se que os alunos que se manifestaram leram pelo menos uma parte do livro e observaram que Beremiz utilizava alguma estratégia, ou seja, não contava um a um os objetos. A fala do aluno Enzo - “*Quem que ia contar folha de árvore? Pra quê?*” – demonstra o estranhamento de muitos alunos frente à situações de Matemática sem sentido.

De todo modo, ao serem questionados se hoje utilizamos alguma estratégia parecida, apontam o uso da tecnologia como recurso para determinar grandes quantidades – “*Hoje é tudo na tecnologia*”. Neste sentido, é interessante observar que o livro foi escrito por Malba Tahan no ano de 1938, quando a tecnologia digital ainda

³⁰ Quando aparecer a denominação ALUNO é porque não o identificamos no áudio.

não existia, e ainda, o enredo do livro se passa na região da cidade de Bagdá por volta do ano 1300. Deste modo, a partir da fala dos alunos, podemos inferir que as estratégias matemáticas desenvolvidas nestas épocas já não são viáveis nos dias de hoje frente às tecnologias digitais disponíveis. Ainda assim, partindo dos feitos do personagem, podemos investigar, com o auxílio da tecnologia, como determinar grandes quantidades de objetos e pessoas.

Os alunos, afirmam, ainda, que a quantidade encontrada não é exata e sim aproximada, suscitando assim a ideia de estimativa. Assim, para estimar a quantidade de pessoas presentes em um determinado local levantaram algumas hipóteses como: lógica e volume. Contudo, ao mesmo tempo outros alunos apontaram também o tamanho do lugar, a aglomeração, a venda (ou não) de ingressos e o tipo físico das pessoas. Como, ao planejar a atividade, a professora havia levantado estas mesmas hipóteses, quando as ouviu, não deu importância ao que os primeiros alunos sugeriram. Isso evidencia que, devido ao planejamento da professora e de sua expectativa de quais encaminhamentos poderiam dar os alunos à atividade, ela fica satisfeita quando o que dizem os alunos é o que ela gostaria de ouvir, reforçando esses aspectos em detrimento de outros.

Os conceitos matemáticos que emergiram foram multiplicação, área, volume e estimativa. No entanto, neste momento eles foram apenas elencados como possíveis estratégias de resolução do problema, quando os alunos dizem que precisam saber o tamanho do local e se este local está tumultuado.

Destaca-se que a intervenção da professora de Matemática, questionando os alunos, é que orienta o desenvolvimento da atividade, pois os alunos ainda não estão acostumados com este tipo de atividade e, por não saber como proceder, acabam se dispersando ou aguardando “ordens”.

Neste episódio a interdisciplinaridade ainda é tímida. Observa-se a influência das disciplinas técnicas quando o aluno aponta para o uso de tecnologias para resolver problemas. Mas embora o assunto “tecnologias” tenha emergido, o trabalho interdisciplinar não se efetivou nesse episódio.

Observa-se, também, que algumas oportunidades de encaminhamento da atividade foram perdidas. Por exemplo, quando o aluno sugere que a tecnologia dá conta de realizar este tipo de estimativa, poderíamos ter investigado, juntamente com o professor de informática, como isso é feito. Desta investigação poderia ter surgido outros modelos matemáticos. Deste modo, entende-se que é importante tentar dar o

máximo de atenção às intervenções dos alunos. Uma ideia que passou despercebida poderia ter enriquecido a atividade

A seguir, apresentamos um quadro (Quadro 12) com possíveis comentários para as questões auxiliares de investigação.

ANÁLISE – EPISÓDIO 1	
Quais conceitos matemáticos emergiram?	Multiplicação, Área e Estimativa. Mas ainda não desenvolveram estes conceitos, apenas elencaram.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?	Neste episódio os alunos tentam elencar possibilidades de resolução de uma determinada situação genérica. Os conceitos ainda não foram utilizados, mas os alunos manifestam pensar em um determinado espaço e apontam especificidades deste espaço e das pessoas que o ocupam, para aí concluírem que precisarão multiplicar, calcular área e estimar. Um aluno até fala em volume, ele pode ter pensado no sentido de que uma pessoa ocupa um determinado volume ou até mesmo pode ter confundido com o termo área.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?	A professora de Matemática, neste momento, orienta as discussões, fazendo questionamentos e instigando os alunos a falar. No entanto, elege dentre as respostas apresentadas pelos alunos aquelas que ela já havia vislumbrado como parte da resolução no momento do planejamento da atividade.
Observações importantes sobre o episódio	
Percebe-se que por vezes a falta de atenção da professora ao que dizem os alunos, implica na perda de oportunidades de intervenções e encaminhamentos que enriqueceriam a atividade, como quando a professora não valorizou a ideia de Sandro sobre lógica e volume e a não investigação de como os softwares funcionam em um trabalho como o problema apresentado nesta atividade.	
Observações para o produto educacional	
No produto educacional seria importante apontar outras possibilidades de encaminhamentos das atividades e enfatizar que outras possibilidades surgirão ao desenvolver a atividade em outra turma.	

Quadro 12 - Síntese da análise do Episódio 1

Fonte: elaborado pela autora.

5.1.2.2 Episódio 2

Este episódio ainda ocorreu na primeira aula do primeiro encontro de Modelagem. Continuando as discussões sobre aglomeração de pessoas, os alunos buscam alternativas para determinar a quantidade de pessoas presentes em um show. Estas discussões ocorreram com toda a turma e a professora.

PROF: Pessoal, como que vocês acham que as pessoas responsáveis por festas, shows, as pessoas da administração da cidade, como que eles estimam a quantidade de pessoas em um show que é gratuito, por exemplo. Que não tem ingresso.

SANDRO: ingresso... quantidade de alimento.
 RAISSA: Drone.
 PROF: Por exemplo, vamos ter um show aqui no parque de exposição...
 RAISSA: tem que saber o tamanho.
 SANDRO: calcular o volume.
 SAULO: calcular o volume.
 SANDRO: Mas se você calcular o volume, véio, não vai dá pra descobrir...
 tem que calcular os metros quadrados.
 JM: quantidade de pessoas por metro, sei lá. E contar quantos metros tem o local.
 PROF: Ah legal, olha o que o João Mário disse:
 JM: Contar quantas pessoas cabem em média em $1m^2$, contar quantos metros quadrados tem lá.
 PROF: Isso... E quantas pessoas cabem em média em $1m^2$?
 BRENO: oito.
 JM: mais ou menos oito.
 GUTO: É dez.
 BRENO: É mais ou menos a média... É oito
 PROF: como você sabe?
 BRENO: ah eu tinha visto em algum lugar... agora se for só eu e o Vítor cabe dois.
 LUAN: Professora... depende da pessoa... é cinco... Se tiver mais volume é cinco...
 BRENO: Olha o Mateus, cabe 24.
 TOM: depende...
 PROF: Pessoal, e será, que essa... esse parâmetro serve para qualquer ocasião? De 8 pessoas por metro quadrado?
 MENINOS: não... eu acho que não...
 PROF: Será que num mesmo local, por exemplo, numa mesma festa, nós sempre vamos ter 8 pessoas por metro quadrado?
 ALUNOS: não... depende.
 PROF: Vamos definir quantas pessoas cabem em um metro quadrado?
 MENINOS: oito... Ponha oito... Oito é legal... Oito é o dobro... O 8 se você virar fica infinito, daí pode caber uma infinidade de pessoas...
 PROF: Nós vamos fazer uma baguncinha agora. Nós vamos construir o m^2 . Como temos pouco espaço, vocês vão construir um m^2 lá no fundo, outro aqui, outro aqui.... Cada dois grupos vai construir um metro quadrado. Eu tenho só uma fita. Bem rapidinho. Vocês vão construir com fita crepe, delimitar com fita crepe.

Neste episódio a professora continua a questionar os alunos. Frente ao argumento dos alunos de contar a quantidade de ingressos vendidos, a professora sugere que o show seja gratuito, isso porque nas duas últimas edições da ExpoAssis, foi o que aconteceu. Deste modo, não há venda de ingressos e ainda, o local do show é aberto, logo não há um controle quanto ao número de pessoas que assistiram ao show.

Uma aluna sugere o uso de um drone para sobrevoar o local. De fato, é desta forma que as empresas promotoras de eventos conseguem as fotos aéreas do público presente nos shows. As fotos que conseguimos na internet foram, provavelmente, tiradas por um drone. No entanto, ainda precisamos de uma estratégia. Deste modo, os alunos começaram a levantar hipóteses de resolução.

Novamente, Sandro e Saulo levantam a hipótese do volume. No entanto, a professora não dá a devida importância. Neste sentido, uma intervenção conveniente seria questionar os alunos de “por que volume”, isso permitiria uma compreensão da ideia do aluno na insistência do termo. Mas, a professora apenas enfatiza a resposta que ela esperava. O que pode ter ocorrido também é a professora não ter escutado algumas falas dos alunos, já que falavam ao mesmo tempo e alguns em tom baixo de voz. Entretanto, a gravação do áudio captou as falas de todos os alunos. Assim, na transcrição elas aparecem, mas nada garante que a professora tenha ouvido no momento da discussão em sala.

Na discussão de quantas pessoas cabem em um metro quadrado, a fala de Breno – “[...] *agora se for só eu e o Vítor cabe dois*”-, pode ter influenciado a fala de Luan – “[...] *depende das pessoas... é cinco... se tiver mais volume é cinco...*” - , desencadeando a discussão de que há diferentes quantidades de pessoas em metros quadrados. Chegaram a um acordo de que necessitariam saber a área do local e quantas pessoas ocupam cada metro quadrado desta área. Assim, a professora sugeriu que, experimentalmente, determinassem a capacidade de pessoas em 1 metro quadrado.

Neste contexto, os conceitos que emergiram foram área e volume. Contudo, nesta parte da atividade, os alunos apenas afirmam que precisam descobrir a área do local e citam volume.

ANÁLISE – EPISÓDIO 2	
Quais conceitos matemáticos emergiram?	Área e volume.
Quais ações os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?	Neste episódio ainda aparece a confusão entre área e volume. Os próprios alunos se dão conta de que, neste caso, precisam calcular a área (“o tanto de metros quadrados”) e não o volume. Posteriormente, constroem o metro quadrado no chão da sala com fita adesiva e auxílio de réguas e fita métrica. Após a construção do quadrado de 1 metro de lado, iniciam a experimentação se posicionando dentro do quadrado, considerando várias situações de aglomeração de pessoas.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?	Quando os alunos afirmaram que caberiam 8 pessoas em 1 metro quadrado, a professora questionou se esse número era válido em qualquer situação, incentivando-os a verificar esse número experimentalmente.
Observações importantes sobre o episódio	

Um grupo de alunos disse ter visto a informação de que caberiam 8 pessoas em 1 metro quadrado. No entanto, outros argumentaram que depende das pessoas (tipo físico). Essa dúvida suscitou o trabalho experimental com o metro quadrado onde os próprios alunos puderam verificar a quantidade de pessoas em um metro quadrado, considerando diversas situações como: saída da escola, metrô, show, manifestação, entre outros.

Observações para o produto educacional

Como observamos no episódio, as intervenções da professora interferem no andamento da atividade. Dada a intenção de desenvolver este produto para auxiliar o professor da Educação Básica no trabalho com Modelagem, parece-nos que, além de sugestões de atividades, faz-se importante ter um link para fornecer dicas de como intervir sem descaracterizar a atividade, além de um espaço para compartilhar dificuldades, angústias e superações.

Quadro 13 - Síntese da análise do Episódio 2

Fonte: elaborado pela autora.

5.1.2.3 Episódio 3

Este episódio aconteceu no segundo encontro da atividade de Modelagem, quando os alunos, reunidos em grupo e com os parâmetros de aglomeração de pessoas determinados, têm a tarefa de determinar como estimariam a quantidade de pessoas em um show a partir de uma foto aérea. O episódio é um trecho de uma conversa do grupo 1, onde ainda não há intervenção da professora. Observa-se que dos 5 membros do grupo, apenas 2 realizam discussões que influenciam o desenvolvimento da atividade.

DAN: Eu pensei em a gente pesquisar na internet qual o tamanho do local, aí depois a gente vê na foto aérea que não temos aqui, mas no caso a gente teria...

TONY: imaginar...

DAN: Ehh... rsrsrs... imaginar... vamos imaginar que a gente tem uma foto do local, a gente vai ver... vai fazer um quadradinho lá na imagem e ver quantas pessoas têm naquele quadradinho que representa o metro quadrado... ok? E a gente vai ver quantos metros quadrados têm, vai comparar com quantas pessoas têm em cada metro quadrado, entendeu?

CLEBER: Eu pensei em ir direto lá no local..... eu pensei em ir direto no local, do evento, medir o quanto, o local onde a pessoa tava, ver quantos metros quadrados dá. Dependendo a foto que o, a pessoa, no caso, o prefeito desse pra nós, nós medisse, tipo, cada metro quadrado avaliasse o metro quadrado completo.

DAN: Porém vocês gastariam a maior parte do seu tempo, medindo com uma fita, sei lá, o tamanho do local.

CLEBER: Mas nós temos que medir lá...

DAN: Não... porque... o local já foi medido... e nós temos as informações na internet.

CLEBER: Você tem... mas só que tipo... vai ter lugar que vai ter mais aglomerado... e você não vai ter... metro quadrado aqui... metro quadrado ali... vai ter pessoas com mais concentração na frente e menos concentração atrás... isso que eu tô querendo dizer.

DAN: Então a gente poderia vê quantas pessoas têm por metro quadrado na frente, no meio e atrás.

DJ: Isso ia utilizar muito cálculo. Poderia fazer de um modo mais fácil. Podemos chutar...

CLEBER: Ah valeu...

DAN: Não... não temos a opção de chutar.

CLEBER: Então poderia estabelecer uma estatística, boa ideia, mas tipo... quantas pessoas têm no metro quadrado.

[...]

DAN: Eu pensei assim, a gente poderia ver quantos metros quadrados tem no total...

CLEBER: Então... isso que eu tô falando...

DAN: A gente vê quantas pessoas têm por metro quadrado aqui, aqui e aqui.

CLEBER: Três local?

DAN: E dividir... três locais, meio, frente e atrás. Dividir em três partes, vamos ver quantos têm em cada um, aqui vai ter um número, aqui outro, e aqui outro. Somamos eles e vai dá um número próximo. Provavelmente.

Neste episódio os alunos elaboram hipóteses e elencam simplificações que utilizariam no desenvolvimento da atividade de Modelagem: - pesquisar o tamanho do local; - fazer quadradinhos na imagem e ver quantas pessoas têm em cada quadradinho; - ver quantos metros quadrados tem o local; - comparar com quantas pessoas têm em cada metro quadrado.

No entanto, enquanto um aluno sugere ir até o local e realizar as medições, o outro diz que alguém já realizou estas medições, logo devem estar disponíveis na internet. Deste modo, este episódio alerta para o fato de que a tecnologia, mais especificamente a internet, pode ser uma ferramenta importante e uma aliada em uma investigação matemática. Neste sentido, a tecnologia deve ser considerada uma “parceira intelectual” (HOWLAND; JONASSEN; MARRA, 2011 apud SILVA; BORSSOI; ALMEIDA, 2015, p. 165) em uma atividade de Modelagem.

Quando Cleber diz: “[...] vai ter lugar que vai ter mais aglomerado [...]” – inaugura um novo movimento no encaminhamento da resolução, já que antes disso as pessoas queriam saber o número médio de indivíduos que cabiam em um metro quadrado. A partir dessa fala, eles percebem que as aglomerações, em eventos com muita gente, não se comportam uniformemente. Na continuação do diálogo, Dan lança uma nova hipótese de como se dá essa concentração – “Então a gente vê quantas pessoas têm por metro quadrado na frente, no meio e atrás”.

Por fim, chegam à conclusão que devem dividir a imagem em três locais, frente, meio e atrás, descobrir a área de cada local e determinar quantas pessoas teriam nesses locais.

Assim, os conceitos que emergiram neste episódio foram medidas, área e estimativa. Neste episódio, novamente, os conceitos de Informática tiveram influência

quando o aluno sugere o uso da tecnologia para conseguir as medidas que necessitam.

De acordo com o quadro de categorias de interdisciplinaridade apresentada no capítulo 3 (Quadro 9), seria uma interdisciplinaridade classificada na categoria 2, onde os conceitos de outras disciplinas auxiliam na resolução do problema.

Abaixo, a análise sintetizada no Quadro 14.

ANÁLISE – EPISÓDIO 3	
Quais conceitos matemáticos emergiram?	Medidas, área, estimativa.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?	Neste episódio, levantaram hipóteses de resolução e, a cada ideia nova dita por algum aluno, as hipóteses iam se ajustando. Inicialmente pensavam em descobrir quantas pessoas caberiam em um metro quadrado, depois, consideraram a situação de que a aglomeração não é uniforme.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?	Neste episódio não houve intervenção dos professores.
Observações importantes sobre o episódio	
Observa-se que, como a única informação que os alunos receberam foi o local que deveriam investigar, no início ficaram um pouco perdidos, mas, aos poucos, foram se envolvendo com a atividade e conseguindo as informações. Deste modo, eles vão desenvolvendo a autonomia frente à resolução de um problema com o qual poderiam se deparar fora da escola.	
Observações para o produto educacional	
Como neste episódio o uso da tecnologia, a internet, foi de grande relevância para a coleta de informações, seria importante ter um tópico no blog que aborde o uso da tecnologia digital em sala de aula.	

Quadro 14 - Síntese da análise do Episódio 3
Fonte: elaborado pela autora.

5.1.2.4 Episódio 4

Este episódio faz parte da segunda aula com Modelagem, quando os alunos ainda estavam pensando em um local genérico e de formato retangular. Os alunos estavam discutindo nos grupos e, como a professora estava sendo solicitada a todo o momento e não estava dando conta de atender os nove grupos, decidiu ir até o quadro para esclarecer algumas dúvidas. Deste modo, começou retomando as discussões que os alunos já haviam feito e já tinham como certo, para depois começar a discussão

matemática. No momento deste episódio, os alunos já haviam realizado a atividade de experimentação para determinar diferentes aglomerações em um metro quadrado e haviam determinado os parâmetros de dez pessoas por metro quadrado para uma aglomeração muito grande, oito pessoas para uma aglomeração grande, cinco pessoas para uma aglomeração média e duas pessoas para uma aglomeração pequena.

PROF: Vamos dar um start aí... pessoal... Que forma geométrica é essa aqui?

DAN: retângulo..

PROF: retângulo... certo? Né... nós temos então uma região... pessoal... retangular. Se eu quiser calcular a área dessa região retangular, como eu faria? A área de um retângulo é...

ALUNOS: base vezes altura...

PROF: ou... comprimento vezes largura... as duas formas estão corretas... pessoal... Vocês disseram pra mim que a gente precisa saber a área dessa região. Neh, nós não sabemos o comprimento da base nem a altura desse retângulo, nem comprimento nem a largura, então nós vamos utilizar a incógnita, na base e na altura... e agora? Nós vamos ter a quantidade de pessoas igual em todo retângulo?

ALUNOS: Não

PROF: Não... quê que vocês consideraram? Nós vamos ter uma parte aqui perto do palco com muitas pessoas, com concentração muito grande, certo? Depois, vamos ter uma parte mais ou menos aqui com uma concentração....

ALUNOS: Grande...

PROF: Grande... e depois a gente vai ter uma parte de concentração média e concentração pequena. Certo? Então nós tivemos que dividir o nosso retângulo em faixas, neh, nós não dividimos em faixas? E essas faixas... elas têm que formato?

ALUNOS: retângulos...

PROF: Retangulares também... certo? Eu sei a largura dessas faixas?

ALUNOS: Não

PROF: Não... Elas têm a mesma largura? Não também... Então o quê que eu vou representar, o quê que eu vou usar pra representar a largura das faixas? x? para todas? Elas são iguais?

ALUNOS: não

PROF: não... vamos ter que usar letras diferentes... então eu posso utilizar a letra a, a letra b, a letra c e a letra d. Não posso? Pra representar as larguras das faixas, certo? Eu sei que aqui a cada metro quadrado, tem quantas pessoas? Quantas?

ALUNOS: 10

PROF: 10... E aqui, em cada metro quadrado tem quantas pessoas?

ALUNOS: oito

PROF: e aqui?

ALUNOS: seis

PROF: E aqui?

ALUNOS: dois

PROF: duas... Agora eu quero saber uma fórmula do total de pessoas nesse local, tá, tendo essas informações. Ficou mais claro agora? Tendo essas informações ó... Largura a na concentração muito grande, uma largura na faixa b para concentração grande, uma largura c para concentração média e uma largura d pra concentração pequena. Todas têm base, ah vou mudar aqui, vamos deixar x. E aqui vamos colocar y. Certo? O y, lembrando que é toda, todo esse comprimento aqui. Como que a gente determina o total de pessoas? Por exemplo, como a gente vai determinar a quantidade de pessoas aqui, nessa faixa. Primeiro faz a...

ALUNOS: área

PROF: dessa faixa.... que seria

ALUNO: d vezes x ...

PROF: d vezes x ... então d vezes x vai dar a nossa área, certo? Se eu tenho a área dx , o que eu faço pra calcular a quantidade de pessoas? vezes 2. Certo? Como que a gente vai fazer pra outra faixa?

ALUNOS: c vezes x

PROF: Isso... então...

ALUNOS: b vezes x

PROF: e a última...

ALUNOS: a vezes x

PROF: Isso... Aí nós vamos juntar tudo isso num modelo único. Um modelo só...

ALUNOS: Agora é só somar...

PROF: Você vai poder somar o $2dx$ com o $5cx$?

ALUNOS: nãoooooo

PROF: Pode somar $2dx$ com $5cx$?

ALUNOS: Nãooooo

PROF: Por causa do d e do..... c

Escrevam... escrevam lá, a fórmula pra determinar...

CLEBER: professora eu criei uma fórmula diferente... Baba na minha fórmula DJ... Ô professora... eu tinha pensado numa fórmula diferente... Não... você não vai entender professora.. deixa...

Tipo... aqui é o total de pessoas né, aqui é uma grande concentração, então eu pensei em fazer assim, tipo, nós encontra o metro quadrado, aqui é sempre 1, aqui nós encontra o total de metro quadrado. Aí nós faz esse valor vezes esse. O valor que der aqui nós soma com esse, tá, aí nós faz o mesmo pras outras essas duas, aí no final, pra gente encontra nós faz o valor do metro quadrado encontrado aqui, mais o valor do metro quadrado encontrado aqui, e o valor do metro quadrado encontrado aqui, que é o total de pessoas. E já ia dar o total de pessoas.

PROF: a quantidade seria 10 vezes o metro quadrado, vezes ... depois você me entrega essa folha pra eu analisar direitinho.

Vamos DJ....

[...]

CLEBER: Professora... vai tá errado essa fórmula aqui?

PROF: Não... você só tem que ajustar ela um pouquinho...

CLEBER: só um pouquinho!!!

DAN: Professora, professora, vem cá! O que você acha dessa fórmula?

PROF: Você colocou a área né... muito bem... o quê que é esse TM por metro quadrado?

DAN: É o número de pessoas por metro quadrado...

PROF: hummmm

Os grupos estavam discutindo uma maneira de calcular a quantidade de pessoas, sempre pensando em supostas medidas do local, pois, neste momento, ainda não o havíamos definido. Os alunos não pensavam em representar essas medidas com variáveis, estavam preocupados em trabalhar com a medida numérica. Deste modo, a professora intervém para ajudá-los a pensar algebricamente, utilizando variáveis. Essa intervenção da professora é devido ao fato dos alunos pouco algebrizarem e geralmente agirem por meio da aritmética.

Deste modo, com esta intervenção, eu tinha a intenção de que os alunos construíssem um modelo matemático algébrico para a área da região retangular com várias incógnitas, ao mesmo tempo em que vislumbrava retomar conceitos de área e

operações algébricas. No entanto, acabou intervindo muito e podando a oportunidade de os alunos pensarem em como lidar com as letras no cálculo de área de uma figura que precisa ser decomposta em partes menores e depois ter as áreas somadas.

Na fala de Cleber – “*professora eu criei uma fórmula diferente*” – observa-se uma situação típica de um ambiente de Modelagem Matemática, pois em aulas em que um único procedimento de resolução e uma única resposta são esperados, falas como esta não costumam aparecer. Entretanto, como observou que sua resposta era diferente, acreditou estar errada. Isto denota a vivência do aluno em aulas em que geralmente só há uma resposta correta. Esta observação corrobora com Skovsmose (2000), quando afirma que a educação matemática atual se pauta no paradigma do exercício, onde a premissa central é de que existe uma, e somente uma resposta correta.

Neste sentido, a professora responde – “[...] *você só tem que ajustar um pouquinho*” – isso porque no modelo que o aluno apresentou, ele já teria que conhecer as áreas das pequenas regiões. O ajuste seria para utilizar, no modelo determinado, o procedimento para encontrar estas áreas – “*a quantidade seria 10 vezes o metro quadrado, vezes... depois você me entrega essa folha pra eu analisar direitinho.*” - No entanto, o aluno parece não ficar satisfeito, pois gostaria de ter desenvolvido um modelo igual ao discutido pela professora e os alunos na lousa.

Handwritten mathematical model by Cleber, showing two formulas for area calculation and a list of variable definitions.

1ª fórmula

$$\begin{aligned} T_p &= (mg + m^2n \cdot m^2T) \\ T_p &= (g + m^2n \cdot m^2T) \\ T_p &= (m + m^2n \cdot m^2T) \\ T_p &= (P + m^2n \cdot m^2T) \\ T_{pR} &= (mg^2 + g^2 + m^2 + P^2) \end{aligned}$$

2ª fórmula

$$\begin{aligned} T_p &= (mg + m^2n \cdot m^2T) + (g + m^2n \cdot m^2T) + (m + m^2n \cdot m^2T) + \\ &+ (P + m^2n \cdot m^2T) = (T_{pR} = (mg^2 + g^2 + m^2 + P^2)) = T_{pR} ? \end{aligned}$$

Definições:

- T_p = (total de pessoas)
- T_{pR} = (total de pessoas resultante)
- m^2n = (um metro quadrado de um espaço)
- m^2T = (total de metros quadrados no espaço)
- mg = (total concentração)
- g = (grande concentração)
- m = (média concentração)
- P = (peça concentração)

6. trabalho realizado

Figura 17 - Modelo desenvolvido pelo grupo do aluno Cleber
Fonte: registro dos alunos.

ANÁLISE – EPISÓDIO 4	
Quais conceitos matemáticos emergiram?	Álgebra (representação por variáveis e operações algébricas), área do retângulo, ideia de função.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?	À medida que a professora ia orientando o raciocínio, os alunos participavam e iam lembrando conceitos de álgebra e área do retângulo. Após a exposição da professora um aluno chamou sua atenção para o fato de ter desenvolvido um modelo diferente. Após observar o modelo, a professora diz que apenas precisa de alguns ajustes. Deste modo, observa-se que este grupo tinha uma ideia do trabalho com variáveis.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?	Ao observar nos grupos que os alunos estavam com dificuldade na algebrização para desenvolver um modelo algébrico para a situação, a professora intervém auxiliando neste aspecto. A professora decide ir ao quadro ao invés de auxiliar nos grupos porque não estava conseguindo atender aos 46 alunos divididos nos 9 grupos e porque as dificuldades dos grupos incidiam, no momento, no mesmo aspecto.
Observações importantes sobre o episódio	
Neste episódio observa-se a necessidade da professora em ir ao quadro frente à dificuldade em atender aos nove grupos que a solicitavam quase que ao mesmo tempo para solucionar dúvidas similares.	
Observações para o produto educacional	
A dificuldade em atender os alunos em suas dúvidas, demonstra que, talvez, as atividades de Modelagem seriam mais bem desenvolvidas em uma turma com um número menor de alunos. Assim o professor poderia dar mais atenção às dúvidas e ao desenvolvimento da atividade em cada grupo. Há de se considerar, no entanto, que se o número de alunos por professor fosse menor em sala de aula, não só as atividades de Modelagem seriam melhores desenvolvidas, mas qualquer outra atividade que fosse proposta. É mais uma questão política do que de força de vontade. Isso implica em considerar que a implementação de atividades de Modelagem Matemática no contexto de aulas regulares também esbarra em questões políticas.	

Quadro 15 - Síntese da análise do Episódio 4

Fonte: elaborado pela autora.

5.1.2.5 Episódio 5

Este episódio é referente a um trecho da conversa do grupo 3. Neste momento estavam discutindo como encontrar o número de pessoas em um determinado local.

JV: tipo... supõe que aqui é a frente, e aqui é o meio... aí divide o meio em um monte de quadrado, que seria os metros quadrados.

VINI: não seria mais fácil se ele tivesse fotos...da frente, do lado.

JV: a concentração muito grande seria na frente, 10 aqui, como embaixo vai ser muito pequena, daí a gente tem que aumenta, em vez de 1 metro quadrado, coloca 10. Pra você analisar, você vai analisar de 10 metros, aí fica mais fácil.

VINI: mas a gente tinha que ter o tamanho. Porque se não tem o tamanho não tem como chegar.

JV: mas ela quer... quer que a gente analise um jeito de fazer, ela não quer que a gente faça.

NEIDE: A tá... é só pegar por metro quadrado.. aí vê o tanto que tem aqui... [...]

JV: já que é 10 pessoas em 10 metros quadrados, aqui é 100.

ELLEM: Āhmm...

JV: Se 10 pessoas tem em um metro quadrado, em 10 vai ser 100... em 10 metros.

VINI: tem que resolver assim.. tipo, daí coloca aqui 100, e daí ali para 10 metros vai ser 8...

JV: vai ser a concentração média.

VINI: tipo aqui deveria ser muito grande e coloca.... tinha que ter... mas vamos fazer só em três... tipo 10, 8 e 5.

JV: tá

VINI: uma pequena 5

JV: 8 mais 5, 13... Ah vamo colocar 7, que é a média dos dois....

ELLEM: por que 70 e 20?

JV: aqui é a média do meio e aqui vai ser a média do fundo.

VINI: 20 pessoas a cada 10 metros.

ELLEM: só isso

VINI: daí agora a gente tem o tamanho, daí agora tem que ver o que a gente vai fazer

JV: é

VINI: a gente tem as informações. Daí agora tem que fazer. Aí depois a gente vai ter que passar...

ELLEM: o quê que tá escrito?

JV: quadrantes de 3 metros quadrados.

VINI: daí agora a gente tem que ver... tipo... quantos... tipo... 10 metros cabe ali dentro, tipo dessa área, daí depois fazer vezes,

JV: não dá pra você medir o lugar assim por imagem de satélite?

VINI: ele só dá a escala..

JV: ah... a escala.

VINI: tipo 1 cm equivale a 1000 km, ele só dá isso. Só que daí tem que entrar no Google Maps e ... e aí?

JV: Ah... vamos chamar a professora.

VINI: vamos pedir arrego. Professora!

ELLEM: professora!

JV: professora!

E se considerar de 10 em 10 metros quadrados.

VINI: A gente fez uma média entre a grande e a média, deu 7 pessoas, e aqui a gente fez para cada 10 metros mais tem 100 pessoas, depois tem que ver quantos 10 metros, cabem nessa área de maior concentração, depois multiplicar, e juntar todas as informações.

PROF: mas o espaço que as pessoas ficam lá no centro de eventos é um retângulo assim?

JV: Hummm... daí eu não sei...

VINI: eu não sei.. eu nunca fui lá.

MARI: não sei

PROF: vocês têm que pesquisar como é que é...

ELLEM: pesquisar o quê?

JV: o formato do centro de eventos de Assis Chateaubriand.

[...]

VINI: qual é a área do círculo?

[...]

ELLEM: achou?

JV: é circular.

[...]

JV: é... é um círculo.

ELLEM: um círculo?

[...]

JV: a outra imagem é aérea.

VINI: achou né.

JV: achei... é mais ou menos assim.

VINI: é redondo!

JV: *é ... mas não sei se é um círculo completo.*

VINI: *uma meia lua?*

JV: *deve ser uma meia lua.*

VINI: *porque redondo não tem como ser. Porque senão onde que vai ficar o palco?*

JV: *é*

VINI: *tem que ter um canto.*

JV: *ó o palco tá aqui ó. É retângulo.*

VINI: *é retângulo. Tem que fazer...*

JV: *deixa eu ver se eu acho o tamanho aqui também pra ajudar,...*

ELLEM: *a professora já vai começar.*

VINI: *tipo ela falou que tá certo, só que ela quer que faz a.... tipo... a fórmula certa daí ... redondo.*

JV: *vai fazendo aí.*

VINI: *sim... ele é redondo, mas temos que ver... tipo.. se é um círculo completo, ou uma meia lua. Heheheh... não porque ele tem que ter uma canto, entendeu? Se ele for redondo, onde vai colocar o palco?*

Inicialmente, os alunos pensam em determinar a quantidade de pessoas a cada 10 metros quadrados com a intenção de tentar simplificar os cálculos. Utilizam apenas três concentrações diferentes, e para determinar a concentração mediana calculam a média entre as aglomerações média (5) e a grande (8), chegando a uma concentração aproximada de 7 pessoas por metro quadrado, e 70 pessoas em 10 metros quadrados. Observa-se que, como os outros grupos, este grupo pensou em um local retangular.

A intenção da professora era de que os alunos pensassem algebricamente sobre o problema, tanto que o questionamento inicial, feito por ela aos alunos no primeiro dia da atividade, foi: *“Como vocês fariam para estimar a quantidade de pessoas em um determinado local?”*. A fala de Vini denota a preocupação em obter os dados numéricos: *“mas a gente tinha que ter o tamanho. Por que se não tem o tamanho não tem como chegar”*. Neste sentido, observa-se a dificuldade dos alunos em pensar algebricamente, eles sentem necessidade de dados numéricos para lidar com a situação-problema. Inicialmente recorrem aos parâmetros determinados para aglomeração de pessoas, mas sentem que ainda necessitam de mais informações.

Neste momento, a professora, juntamente com os alunos, já havia determinado um local específico: o espaço para shows do Centro de Eventos Ângelo Micheletto. Em busca de informações numéricas, JV sugere uma alternativa: *“não dá para medir o lugar assim por imagem de satélite?”* Esta fala aborda o uso da tecnologia para auxiliar na resolução de problemas. Este mesmo recurso é utilizado nas aulas de Geografia para o estudo de relevos, vegetação e localização, onde utilizam o conceito de escala. Deste modo, os alunos trouxeram para a aula de Matemática um conhecimento desenvolvido nas aulas de Geografia. Neste sentido, de acordo com o

quadro de categorias de interdisciplinaridade apresentada no capítulo 3 (Quadro 9), seria uma interdisciplinaridade classificada na categoria 2, onde os conceitos de outras disciplinas auxiliam na resolução do problema. Como o recurso das fotos de satélite e o conceito de escala foram legítimos para a situação, foram acatados pelo grupo, que por sua vez pode revisitar o conteúdo de razão e teve a possibilidade de ressignificá-lo diante do seu uso. Para ter acesso às imagens de satélite, o grupo utilizou o GoogleMaps³¹. Deste modo, ao visualizar a imagem, observaram que o local era circular.

ANÁLISE – EPISÓDIO 5	
Quais conceitos matemáticos emergiram?	Área, Escala, Média Aritmética, Circunferência.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?	Frente ao problema, os alunos buscam conceitos com os quais possuem familiaridade. A partir do momento em que são sugeridos, os conceitos que aparentam ter legitimidade com a situação são acatados e ressignificados, que é o caso da área, escala, média e elementos da circunferência.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?	A professora de Matemática, quando solicitada, questiona os alunos quanto ao formato do local, pois eles estavam investigando apenas o formato retangular. Tal intervenção direciona a atenção dos alunos para o ambiente que, de fato, precisam estudar.
Observações importantes sobre o episódio	
Os alunos começaram a investigar o modo de calcular a área de uma região, sem antes saber o formato dela. Supuseram que a região fosse retangular quando na verdade era circular. Provavelmente, eles observariam isso quando fossem tentar encontrar as medidas do local. No entanto, a professora os questionou anteriormente. O que poderíamos nos questionar é o porquê de os alunos terem elegido o formato retangular como primeira possibilidade para pensar sobre a aglomeração em shows ou grandes eventos.	
Observações para o produto educacional	
O interessante desta atividade é que o local investigado é conhecido pelos alunos, e é fácil de ser visitado. Seria interessante especificar no produto educacional que o professor pode utilizar o local destinado a shows de sua cidade ou de uma cidade próxima, onde os alunos costumam frequentar. Este local poderá ter formatos diversos, o que desencadearia diferentes soluções para o problema.	

Quadro 16 - Síntese da análise do Episódio 5

Fonte: elaborado pela autora.

³¹ Serviço de Pesquisa de mapas e imagens de satélite da Terra gratuito desenvolvido e fornecido pelo Google.

5.1.2.6 Episódio 6

Este episódio ocorreu logo após a exposição do grupo quanto ao modelo que desenvolveram para a área retangular e a solicitação da professora para pensarem na área circular, já que haviam verificado que a região foco da investigação era circular.

VINI: como faz pra calcular um metro redondo... não faço a mínima ideia.
 JV: não existe metro redondo cara... rrsrsrs
 VINI: Tipo... como que a gente vai calcular... no círculo não é um raio?
 JV: por exemplo aqui... vai ter 3 metros quadrados... de área total aqui. Bom 30... a gente tava fazendo com 10. E aqui vai ter 70, aqui 100...
 [...]
 VINI: se for pra fazer... tipo... no caso por 10... tipo... pegar e dividir por cada 10 metros, aí tem que pegar a largura... a largura e o comprimento e dividir por 10, naquela área...
 JV: Vamos tentar fazer uma regrinha de três porque...
 VINI: multiplicar cruzado?
 JV: é.... vamo ver... tá... deu 190x...
 [...]
 JV: ó... cheguei em 7 105 metros quadrados.
 VINI: mas tipo, você tá tentando achar o tamanho do espaço ou quantas pessoas?
 JV: o tamanho.... mas não deve ser muito diferente disso porque... se você pensar em 200 metros quadrados não cabem nem 1000 pessoas...
 VINI: ô professora!!!
 Num círculo, tem que achar o raio dele?
 PROF: hum.... tem que envolver o raio né....
 VINI: vai ter que medir o raio na parte de cima.
 JV: aplicar o Teorema de Tales lá.
 VINI: dá pra ver também no de Química, tinha como você medir o raio...
 JV: não... mas você não vai ter que descobrir só... você vai ter que comparar. De um círculo pequeno ...
 VINI: foi o que eu pensei... mas nós vamos ter que fazer uma fórmula... tipo e é a fórmula de achar as pessoas no caso. Ela quer a fórmula. Daí como a gente não tem a largura e a altura, a gente vai ter que fazer com incógnita, vamos supor o... a quantidade de pessoas, que é o que a gente definiu aqui, vezes.. tipo vezes x no caso... x que é o tamanho e a largura que a gente não tem ainda. É isso que a gente tem que fazer. É isso que ela quer... vamos supor, pra aglomeração da frente, 10 pessoas, 10 vezes o x, 10... 10 não... no caso é 100. ... tem que ver quantos 10 metros cabem dentro daquela...
 JV: Mas daí é mais fácil pegar o tamanho do lugar e multiplicar pela quantidade, porque tá em metros quadrados já, mas... e se tivesse certo, seria retangular, pra converter para uma coisa redonda não ficaria o mesmo tamanho?
 VINI: talvez... só que daí num círculo a gente teria que utilizar o raio dele... por ele não ter um canto pra gente definir onde é o comprimento e a largura, entendeu? Por isso que tem que usar o raio... o raio é do meio até o...
 É difícil cara!!!
 Mas JV, primeiro a gente tem que fazer a fórmula do retângulo. Depois fazer o....
 JV: nós vamos ter que descobrir o raio disso daqui.
 VINI: mas primeiro a do retângulo, porque ela quer essa fórmula do retângulo pra depois trabalhar no círculo.
 JV: vamos chamar ela então. Eu acho que a fórmula do retângulo a gente meio que conseguiu né. Mas...

VINI: o círculo a gente tem que achar o.... tem que ver o raio dele. Como ele não tem canto, professora! Professora!!

Antes de concluir o modelo da região retangular, o grupo já começou a se preocupar com o modelo da região circular. Em uma situação real, nem sempre tem o formato de um círculo e muitas vezes não possui o centro evidenciado. Por se tratar de um círculo com um tamanho considerável, a ajuda do aplicativo Google Maps foi essencial. O aplicativo trabalha com imagens de satélite e com escala. Deste modo, os alunos puderam ter uma visão aérea do local e determinar suas dimensões.

O conceito de área foi bem evidenciado neste episódio. No entanto, percebe-se que alguns alunos ainda possuem dúvidas quanto a unidade de medida de área. Na fala de Vini essa percepção fica evidenciada – *“como faz para calcular um metro redondo? Não faço a mínima ideia”*. Essa fala sugere que o aluno acredita que o metro quadrado é associado apenas à figuras retangulares. Contudo, o colega logo em seguida já o corrige – *“não existe metro redondo cara”* – evidenciando assim que possui clareza da unidade de medida. Muitas vezes acreditamos que alguns conceitos estão claros para todos os alunos mas, para alguns, ainda há dúvidas ou defasagens. Deste modo, o trabalho em grupo faz com que os alunos troquem ideias e resgatem esses conceitos. Quando a dúvida é de todos os membros do grupo, recorrem à professora ou até mesmo à pesquisa na internet.

Ainda neste episódio há um embate entre dois alunos, Vini e JV. JV insiste em utilizar o que desenvolveram para a região retangular para pensar na circular. Para isso, sugere a regra de três, supondo que há proporcionalidade entre as duas figuras. No entanto, Vini não está convencido de que obterão sucesso deste modo. Insiste que devem utilizar o raio da figura circular para resolver o problema. O aluno chega a chamar a professora para que possa confirmar sua hipótese.

Os conceitos que emergiram neste episódio foram: Circunferência e Círculo, Regra de Três, Teorema de Tales. Entretanto, observa-se que os conceitos de circunferência, círculo e regra de três foram apresentados e acatados pelo grupo. Pois pareciam possuir legitimidade frente ao problema proposto. O que não ocorreu com o conteúdo de Teorema de Tales. Ele foi apresentado pelo aluno, mas os demais não acataram, não dando sequer importância a ele. Isso porque o conteúdo poderia não parecer legítimo, ou ainda, porque não “combinava” com a situação.

Quando os alunos pensam em formas de resolver um problema, é possível que realizem associações com o que estudam também em outras disciplinas. Como

evidencia a fala de Vini – “dá pra ver também no de Química, tinha como você medir o raio”. Possivelmente, o aluno buscou esta informação pois estavam estudando o modelo atômico de Bohr na disciplina de Química³². Deste modo, tentou associar à atividade que estavam desenvolvendo.

ANÁLISE – EPISÓDIO 6	
Quais conceitos matemáticos emergiram?	Circunferência e Círculo, regra de três, Teorema de Tales.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?	Quando um aluno sugere algo que não apresenta coerência, os colegas o corrigem, ou então, não levam adiante a discussão. Neste sentido, vão dando legitimidade às ideias coerentes para a situação.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?	A intervenção da professora de Matemática ocorre quando um aluno solicita a aprovação do que estava pensando. Mas parece não desencadear mudança alguma no encaminhamento que os alunos estavam tomando.
Observações importantes sobre o episódio	
Os alunos elencam conceitos os quais possuem familiaridade e o grupo avalia os conceitos que são legítimos à situação. A partir desta seleção, buscam elementos, conceitos e modos de resolver, entre os membros do grupo e solicitando a aprovação da professora.	
Observações para o produto educacional	
Como na maioria das atividades de Modelagem Matemática, a tecnologia é uma parceira, seria importante colocar no produto educacional um link para o Google Maps e até mesmo uma lista de softwares gratuitos, com seus respectivos links para downloads, que auxiliariam no desenvolvimento de atividades de Modelagem, como por exemplo o GeoGebra, Modellus, entre outros.	

Quadro 17 - Síntese da análise do Episódio 6

Fonte: elaborado pela autora.

5.1.2.7 Episódio 7

Este episódio ocorreu no terceiro encontro de Modelagem, quando os grupos já estavam investigando especificamente a região circular destinada ao público de shows do Centro de Evento Ângelo Micheletto. A transcrição traz a orientação inicial da professora e em seguida, as primeiras discussões do grupo 2.

LUAN: pra calcular a área é um negocinho doido lá...

³² No modelo de Bohr, os elétrons giram ao redor do núcleo em movimentos circulares.

GUTO: no círculo... é alguma coisa com pi lá.
 JM: é pi vezes raio ao quadrado né...
 MATIAS: tem raio ao quadrado e tem pi. Tinha 2 e tinha pi.
 PROF: Pessoal, a folha em branco que eu dei pra vocês coloquem a data de hoje e tudo que vocês forem fazer, façam nessa folhinha.
 GUTO: Vamos pedir pra professora aí...
 JM: nós podemos ver as medidas no Google Earth.
 GUTO: professora! Como calcula a área do círculo mesmo?
 PROF: pi vezes....
 GUTO: raio ao quadrado?
 PROF: isso... pi vezes raio ao quadrado.
 LUAN: é i vezes raio ao quadrado.
 BRENO: é pi!
 LUAN: pi?
 GUTO: hahahah
 JM: Professora!
 Quería tirar só uma dúvida.
 BRENO: pergunta se é assim que se faz.
 GUTO: então, vou ver aqui um negócio. Vou pesquisar no Google Maps.
 ALUNO: Ô Breno você tá com o note aí?
 GUTO: o que era pra fazer mesmo?
 BRENO: encontrar o raio.
 GUTO: JV... ô JV. No Google Maps só aparece assim ó. Tem escala mas...
 JM: Centro de eventos Ângelo Micheletto. É bem aqui onde você marcou cara? Acho que vai ser melhor no Google Earth.
 ALUNOS: Vocês acharam a área? A escala tudo certinho?
 GUTO: aê... agora deu....
 PROF: ah.. agora deu certo... era só fechar um monte de coisa....
 GUTO: dá 50 metros.
 PROF: essa é a escala... o que significa escala?
 GUTO: EU NÃO SEI!!!!
 BRENO: Cara a gente acabou de estudar em Geografia isso mano!
 PROF: o que é escala gente?
 LUAN: é aquele negócio que você escala o morro... tá ligado.
 BRENO: cara! Eu sei que tem que fazer vezes centímetros, não tem?
 PROF: Isso....
 LUAN: tá quase lá... tá quase lá... você consegue cara!
 BRENO: Certinho! Aqui ó...
 JM: deixa eu anotar... Tá a escala é 100 pés... ué sumiu a escala... ah voltou! A escala some véio... a escala é 100 pés, 20 metros.
 LUAN: 100 pés?
 JM: ô Vítor você mediu assim colocando a escala aqui do lado? Dá 100 né, porque metade é 50. Ó com certeza é 50 metros.
 BRENO: chama a Tayná... ela estava fazendo.
 LUAN: ô Tayná. Vocês conseguiu?
 JM: Então 50 metros...
 LUAN: conseguiu.
 JM: o diâmetro é 100 e o raio é 50.
 LUAN: o raio é 50?
 JM: aí a gente faz 3,14 vezes 50 vezes 50.
 BRENO: essa é a área né.
 GUTO: é pra achar a foto de um show e ver como estava a lotação.

Neste episódio o grupo discute fortemente o conceito de área do círculo. Isso porque o conteúdo foi legítimo para a situação, sendo assim, foi ressignificado. Os alunos tentaram relembrar a fórmula da área. Inicialmente lembraram-se de alguns elementos, o raio, o número π , para posteriormente associá-los. No entanto, essa

associação deriva de uma memorização da fórmula e não do conceito envolvido para obtê-la.

O conceito de escala também foi legitimado pelo grupo e auxiliou na obtenção das medidas do local. Este conceito foi lembrado por conta da aula de Geografia. Sendo assim, de acordo com o quadro de categorias de interdisciplinaridade apresentada no capítulo 3, seria uma interdisciplinaridade classificada na categoria 2, onde os conceitos de outras disciplinas auxiliam na resolução do problema.

É interessante que os alunos necessitam da aprovação da professora o tempo todo antes de dar continuidade ao que estavam pensando – *“pergunta se é assim que se faz”*. Influenciados pelas atividades que tradicionalmente realizam, é como se, sabendo que a professora conhece os encaminhamentos e as respostas, precisassem validar os pequenos passos para, aí sim, dar continuidade ao trabalho. No entanto, em Modelagem, mesmo o professor não tem encaminhamentos traçados *a priori* e respostas calculadas de antemão. Os alunos pensam que se fizerem diferente, estarão errados. E não é o que ocorre em atividades de Modelagem. Nesse tipo de atividade, não há uma única resposta correta, um único encaminhamento correto, mas sim diferentes intervenções para cada situação particular.

Além da aprovação da professora, o grupo confere as informações com o grupo vizinho, para certificarem-se de que está indo pelo caminho correto.

A seguir, apresentamos o Quadro 18 sintetizando as colocações feitas.

ANÁLISE – EPISÓDIO 7	
Quais conceitos matemáticos emergiram?	Área do círculo, escala.
Quais ações os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?	Os alunos, inicialmente, tentam lembrar da fórmula da área do círculo, sabem que ela envolve o π e o raio, mas ainda não têm certeza. Mas vão discutindo até chegar a um consenso. O trabalho em grupo se mostra essencial para revisarem estes conceitos. Ainda assim, a preocupação reside em lembrar uma fórmula, sem indícios de que a mesma tenha sido, um dia, de fato, compreendida por eles.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?	A aprovação da professora no desenvolvimento da atividade incentiva os alunos e dá-lhes segurança no que estão investigando e desenvolvendo.

Observações importantes sobre o episódio
Observa-se, neste episódio, a necessidade que os alunos têm da aprovação do que estão desenvolvendo pela professora e até mesmo da necessidade de estarem fazendo exatamente a mesma coisa que os demais colegas. Espera-se que com a frequência de atividades de Modelagem isso vá se modificando e que os alunos passem a adquirir mais autonomia.
Observações para o produto educacional
Seria interessante disponibilizar um espaço no produto, mais especificamente em cada atividade, para que o professor, após ter desenvolvido a atividade com sua turma, possa socializar os aspectos que observa em sua vivência, para assim podermos observar se há convergências e estabelecermos trocas de experiências.

Quadro 18 - Síntese da análise do Episódio 7

Fonte: elaborado pela autora.

5.1.2.8 Episódio 8

Este episódio aconteceu no terceiro encontro de Modelagem, no momento da finalização da atividade. Nele, os alunos do grupo 3 discutem como determinar as medidas da região circular e, posteriormente, a sua área.

[...]

JV: Mas e se o que a gente tá fazendo não tá certo? ... tá dá 84 metros de circunferência.

VINI: de raio... não.. não de raio... de....de... aí de comprimento. No caso... nem de... a gente tinha que... se a gente achasse o raio.

JV: não mas, com isso aí tem jeito.

VINI: sim, mas daí tinha que colocar o alfinete aqui no meio.

JV: não mas tem... mas tem como fazer... só que eu não lembro o nome direito.

VINI: mas primeiro agora a gente teria que achar o raio.

JV: isso deve ser a corda... eu acho.

VINI: é... acho que é corda.

Tipo... será que esses metros que ele tá dando é original?

JV: eu acho que sim

JV: ou tipo.... será que é diâmetro... vamos ver aqui.... pesquisa aí o que é diâmetro.

VINI: circunferência... o diâmetro é dado por qualquer corda que passa pelo centro da figura. Aqui ó o diâmetro..

JV: Ah.. então é isso. É isso daí que a gente tem.

VINI: Tá mais eu não passei no meio, eu passei do lado. Quer que eu passe no meio?

Porque o diâmetro é assim né... e eu não fiz assim, eu fui mais por fora, pegando dessa ponta.... mas dá na mesma.

JV: dá na mesma...De todo jeito não vai ser exato mesmo.

VINI: seria bom ir lá medir.

JV: É... é melhor.

VINI: vamos lá JV agora?

JV: acho que a gente terminaria primeiro do que eles.

VINI: a gente ia ter primeiro que invadir... pular a grade. Aí depois ainda arrumar uma fita...

ELLEM: ou uma corda

VINI: só que a corda... você tem que saber... vai que os cara corta errado.

JV: então o diâmetro é o raio vezes dois?

VINI: acho que é. ... nossa mas vai ficar grande...

JV: é vezes dois...

VINI: é dois vezes o raio.

JV: 47

VINI: mas tipo eu vi outro aqui ó que pra achar oooo.... pra achar acho que o raio, pra achar a área tem que fazer, pi vezes o diâmetro.

JV: pi vezes o diâmetro?

VINI: Eh

JV: tá...o resultado é a área mesmo?

VINI: é... eu acho que é. Ou é a circunferência.

JV: Eh... eh....

Diâmetro... eh... diâmetro... raio...

VINI: eu acho que é a circunferência... é a circunferência é o tamanho

JV: Ehhh... é pi vezes raio ao quadrado.

VINI: então a gente tem que achar o raio agora.

JV: não... o raio a gente já tem.

JV: 3,14 vezes....

VINI: pergunta pra professora primeiro se tá certo...

Professora!!! Tipo pra ela ver se a gente tá indo pro caminho certo.

JV: sei lá... vai dar muito grande.... 6 mil...

VINI: Ah.... 6 mil metros?

JV: ou centímetros...

VINI: não tem 6 quilômetros lá... acho que é 6 mil centímetros... mas mesmo assim... Professora!!!!

JV: sei lá... a gente fez mas deu um número muito alto na área...

PROF: raio deu 45, mas.... porque deu alto?

VINI: 6 mil!!!!

PROF: Cabe 6 mil metros quadrados lá será?

JV: AHHHH

VINI: Ahhh... não sei

PROF: hum?

ELLEM: olha pessoal...

JV: lembra aquele que a gente fez aquele dia???? Aquela regrinha de três? Deu 7 mil e 100...quase a mesma coisa...

VINI: o que a gente vai fazer???

JV: hã.... esperar...

VINI: Mas a gente não tinha que determinar quantas pessoas?

JV: ah é isso mesmo... com aqueles parâmetros lá...

VINI: que é daí tipo... 6 mil quadrado né... agora a gente tem que colocar pessoas ali dentro...

JV: tá mais tem uma média final...

JV: aí fica mais fácil... 34 680?

VINI: nossa!

JV: pessoas...

JV: pode ser né... já teve show com mais de 40 mil já... mas daí é super lotação daí...

VINI: anota isso aí...

Tipo... mas isso é feito a média dos público.

JV: aham

Eu acho que não é isso daqui... você copiou no seu caderno o que ela passou no quadro aquele dia?

JV: não... mas é 5 também...

ELLEM: é 5 o que?

JV: a média.

ELLEM: mas tem aqui na folha...

JV: eu acho que tava faltando uma parte.. mas acho que é isso. Porque, ali a gente juntou a pequena com a média. Chama a professora de novo.

VINI: professora!!!

JV: professora!!! Eh... a gente multiplicou aquela média final.. aí deu 34 mil e 600.

PROF: vocês fizeram por 5 pessoas? Isso. Aí agora, vocês vão escolher uma foto... já escolheram uma foto de um show? Vocês vão pesquisar então na internet, uma foto de um show ali no centro de eventos. Aí vão determinar

quantas pessoas têm naquela foto. Procurem uma foto que pegue todo o espaço. Aquele círculo tá.
JV: já... já achou a foto aí?
VINI: vou ver se eu acho.
ELLEM: já... já achei.
[...]
JV: nós vamos ter que fazer outro parâmetro né. Senão vai dar igual. Na frente dá pra colocar quantas você acha? Acho que 5.
VINI: é na frente... ou 4 né... porque na frente tem menos...
JV: vou colocar 5.
VINI: daí acho que... que na metade... dá para por umas 7 pessoas... tem que fazer daí... 4 faz 3... acho q 3 já dá... 3, 7 e lá atrás umas 8 pessoas. Ou 7 mesmo também...
Porque já pra trás parece que tem mais gente...
JV: vamos colocar 6 no meio e 7 atrás.
Peraí... o palco tá aqui...e depois a gente faz com essa...
Só vai ser mais fácil porque vai ter pouca gente.
VINI: tem que fazer uma média.
JV: tá...
VINI: agora 19 divide por 3
JV: 18
VINI: ah é 18...
JV: 6
VINI: 6?
Daí o que tem que fazer mesmo? Fazer 6 vezes isso aqui?
VINI: 41 MIL 616.... daí vamos tentar fazer com a outra...

Neste episódio o grupo explorou os elementos da circunferência: raio, diâmetro, corda. Quando tinham dúvidas, procuravam na internet. Percebe-se um grupo mais autônomo, inclusive em relação às discussões dos conceitos matemáticos e às interpretações de conceitos consultados na internet. Durante este tempo chamaram a professora duas vezes apenas para a aprovação do que estavam fazendo.

Na região retangular, o mesmo grupo dividiu o retângulo em faixas, calculou a área de cada faixa e multiplicou pelos parâmetros determinados no primeiro encontro. No entanto, na região circular, optaram por calcular uma média, considerando a parte da frente com maior lotação e a de trás com menor lotação.

Neste episódio, ainda observamos certa insegurança na fala de JV – *“Mas e se o que a gente tá fazendo não tá certo?”* - isso demonstra que muitas vezes, os alunos podem até desistir de resolver alguns problemas por insegurança, por medo de não estar fazendo corretamente. Essa insegurança sugere o “medo de errar” que muitos alunos desenvolvem no decorrer de suas vidas escolares e que, muitas vezes, está associado à aprovação constante do docente, em relação a cada passo realizado pelos alunos.

Os conceitos que emergiram neste episódio foram Circunferência (raio, diâmetro, corda, área) e média aritmética. Como os conceitos de raio, diâmetro e área foram legítimos para a situação, foram ressignificados e utilizados. No entanto, o conceito de corda não foi legitimado e, portanto, nem utilizado e nem revisitado.

ANÁLISE – EPISÓDIO 8	
Quais conceitos matemáticos emergiram?	Circunferência (raio, diâmetro, corda, área), média aritmética, regra de três.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?	Estes conceitos já foram estudados pelos alunos em anos anteriores. Alguns dos elementos eles acabaram lembrando, mas com algumas confusões. Deste modo, recorreram à internet para sanar suas dúvidas. As discussões, realizadas com maior autonomia neste momento da atividade, denotam que o trabalho em grupo contribui para a revisão de conceitos.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?	A intervenção da professora neste episódio foi no sentido de aprovar o que os alunos estavam desenvolvendo. Observa-se que os alunos precisam dessa aprovação a todo o momento.
Observações importantes sobre o episódio	
Há momentos em que, mesmo que o professor vislumbre, a interdisciplinaridade não ocorre, ou porque os alunos não estão acostumados a relacionar conhecimentos de diferentes disciplinas.	
Observações para o produto educacional	
Nos encaminhamentos de resolução, conforme os conceitos vão aparecendo, os definiremos formalmente.	

Quadro 19 - Síntese da análise do Episódio 8
Fonte: elaborado pela autora.

5.1.3 Interdisciplinaridade na Atividade

A atividade de Modelagem Matemática “Qual é o público” iniciou-se a partir de um contexto literário, a obra de Malba Tahan, que mesmo envolvendo conceitos matemáticos, é literatura. O início deste trabalho envolveu as disciplinas e as professoras de Português e Arte. No entanto, quando passamos a discutir a aglomeração de pessoas inspirados em uma passagem do livro, estas professoras não tiveram participação. Deste modo, podemos afirmar que inicialmente houve um trabalho interdisciplinar que ainda não se configurava como Modelagem Matemática.

No desenvolvimento da atividade de Modelagem, propriamente dita, os indícios de interdisciplinaridade se deram à medida que os alunos necessitavam de

conceitos de outras disciplinas para entender ou resolver o problema. Por exemplo, o conceito de escala estudado na disciplina de Geografia.

Neste contexto, é interessante observar que os alunos começam a buscar em outras disciplinas similaridades com o que estão fazendo. Nesta situação, buscaram numa atividade de Química estabelecer relações com círculo e raio.

Outro aspecto que se configurou nesta atividade foi a presença da tecnologia digital, com o uso de notebooks e celulares. Destaca-se o uso de celulares, tão condenados no contexto escolar, principalmente no cenário paranaense onde há uma lei que proíbe o seu uso em sala quando não há um fim pedagógico³³ (Lei nº 18.118/2014), e que, nessa aula, foi importante recurso para a investigação do problema.

Neste sentido, podemos concluir que a atividade “Qual é o público” apresentou características da categoria 2 de interdisciplinaridade (SETTI; VERTUAN, 2016a), pois o objetivo maior era resolver o problema, deste modo, os alunos buscavam não só na Matemática, mas em outras áreas ou disciplinas, conhecimentos que pudessem auxiliar nesta resolução. No entanto, faltou maior intervenção dos professores das disciplinas neste processo.

5.2 CONTEXTO EM QUE SE DESENVOLVEU A ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA 2 – DE QUE TAMANHO VAI FICAR?

A ideia do tema da segunda atividade de Modelagem surgiu em conversa com o orientador deste trabalho, quando discutíamos quais temas relacionados à informática poderiam ser abordados numa atividade de Modelagem. Ele lembrou-se de uma atividade sobre transístores³⁴ que havia desenvolvido em outra oportunidade. Deste modo, sugeriu que desenvolvêssemos esse tema com meus alunos.

Assim, levei o tema para o professor de informática, bem como uma tabela com os tamanhos dos transístores no decorrer dos anos (VERTUAN, 2013, p. 179). Deste modo, complementamos os dados da tabela com o tamanho atual do transístor,

³³ “Art. 1º Proíbe o uso de qualquer tipo de aparelhos/equipamentos eletrônicos durante o horário de aulas nos estabelecimentos de educação de ensino fundamental e médio no Estado do Paraná. Parágrafo único. A utilização dos aparelhos/equipamentos mencionados no *caput* deste artigo será permitida desde que para fins pedagógicos, sob orientação e supervisão do profissional de ensino” (Lei nº 18.118/2014).

³⁴ Componente eletrônico semicondutor responsável pelo controle do fluxo de energia (elétrons) nos processadores eletrônicos.

dado que o último tamanho era de 2010 e assim conversamos sobre como poderíamos desenvolver a atividade.

Eu desconhecia a função desse componente, portanto pesquisei sobre o tema em sites e em livros especializados da biblioteca, bem como conversei com o professor a respeito. Também tive a oportunidade de assistir algumas aulas do professor de Informática juntamente com a turma. Na aula de informática, os alunos estudaram sobre o componente, sua função, como funciona e porque seu tamanho vem diminuindo ao longo dos anos. De modo geral, o que se pode dizer é que o interesse em diminuir o tamanho dos transístores reside no fato de que, assim, há a possibilidade de utilizar um maior número desses componentes em um processador, tornando-o cada vez mais veloz. E ainda, quanto menor os transístores, menores poderão ser os aparelhos eletrônicos.

5.2.1 A Atividade

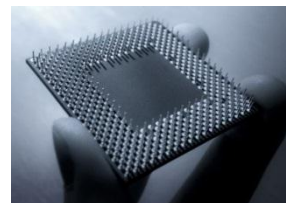
No dia 18 de agosto, na aula de Matemática, entreguei aos alunos a atividade impressa (Quadro 20) com uma breve descrição do transístor e a tabela com dados de 1971 até 2016, com o seguinte problema:

Tendo em vista a diminuição do tamanho dos transístores observada no decorrer dos anos, qual pode ser o tamanho do transístor no ano de 2020 se considerarmos o quadro 1 como referência de progressão?

ATIVIDADE 2 – DE QUE TAMANHO VAI FICAR?

Transistor ou transístor é um componente eletrônico semicondutor responsável pelo controle do fluxo de energia (elétrons) nos processadores eletrônicos. Foi inventado na década de 1950 devido a necessidade de substituir a válvula eletrônica e que fosse mais barato, mais pequeno e consumisse menos energia que as válvulas. Existem hoje diferentes tipos de transístores que estão presentes em um grande número de diferentes processadores³⁵.

A velocidade de um processador depende em grande parte da quantidade de transístores que ele possui. Para conseguir chegar a uma



³⁵ SCHIAVONI, Marilene. **Hardware**. Informação e Comunicação, técnico (nível médio), Curitiba: Editora do Livro Técnico, 2010, 120 p.

velocidade cada vez maior, as indústrias estão em busca de transístores cada vez menores conforme exposto no quadro a seguir:

Processador	Ano	Tamanho do transmissor (em μm)
Intel 4004	1971	15
Intel 8088	1979	3
Intel 80486	1989	1
Pentium 60 MHz	1993	0,8
Pentium 100 MHz	1994	0,6
Pentium 166 MHz	1995	0,4
Pentium 166 MHx	1997	0,35
Pentium III 350	1998	0,25
Intel Celeron 366	1999	0,22
Cyrix 3	2000	0,15
Pentium III Tualatin	2001	0,13
Pentium IV	2005	0,07
Core	2010	0,03
Core i x	2016	0,022

Quadro1: Relação entre modelo de processador, ano de lançamento e tamanho do transistor.

Fonte: adaptado de VERTUAN (2013) e complementado por dados apresentados pelo professor de informática.

AS PESQUISAS CONTINUAM...

Segundo artigo da revista Exame³⁶ publicado em julho de 2015, um grupo de cientistas desenvolveu um transistor tão pequeno que pode ser não apenas o menor modelo já criado, mas o menor modelo possível composto por uma única molécula. Pesquisadores dos Estados Unidos, Alemanha e Japão, utilizaram uma molécula de ftalocianina de cobre com uma dúzia de átomos de índio e um material de suporte de arsenieto de índio. Mas, antes de comemorar a conquista, e imaginar que ela dará origem a uma série de eletrônicos minúsculos, é preciso lembrar que o experimento foi realizado em laboratório, no vácuo quase total e a uma temperatura pouco acima do zero absoluto. Ou seja, a tecnologia ainda levará um bom tempo para chegar às linhas de produção, isso se ela se demonstrar viável em outras condições.

Tendo em vista a diminuição do tamanho dos transístores observada no decorrer dos anos, qual pode ser o tamanho do transistor no ano de 2020 se considerarmos o quadro 1 como referência de progressão?

Quadro 20 - Atividade de Modelagem 2: De que tamanho vai ficar?

FONTE: elaborado pela autora e pelo professor de Informática com referências de SCHIAVONI (2010) e <http://exame.abril.com.br/ciencia/cientistas-criam-transistor-a-partir-de-uma-unica-molecula>.

³⁶ <http://exame.abril.com.br/ciencia/cientistas-criam-transistor-a-partir-de-uma-unica-molecula/>
<acesso em: julho de 2016>.

Sugeri que os alunos “brincassem com os dados”, que observassem se existia algum padrão. Sugeri também que construíssem gráficos com os dados e observassem o seu comportamento.

Os alunos, em grupo, começaram a analisar o comportamento dos dados da tabela 1. Alguns grupos recorreram ao GeoGebra³⁷ (Gráfico 2) e outros à planilha eletrônica Calc³⁸ (Gráfico 1) para construir o gráfico correspondente aos pares formados pelos anos e pelos tamanhos do transistor, e outros tentaram esboçar o gráfico no papel (Figura 18).

Tabela 1 - Progressão do tamanho dos transístores

<i>Ano</i>	<i>T</i>	<i>Tamanho</i>
1971	1	15
1979	9	3
1989	19	1
1993	23	0,8
1994	24	0,6
1995	25	0,4
1997	27	0,35
1998	28	0,25
1999	29	0,22
2000	30	0,15
2001	31	0,13
2005	35	0,07
2010	40	0,03
2016	46	0,022

Fonte: elaborado pela autora.

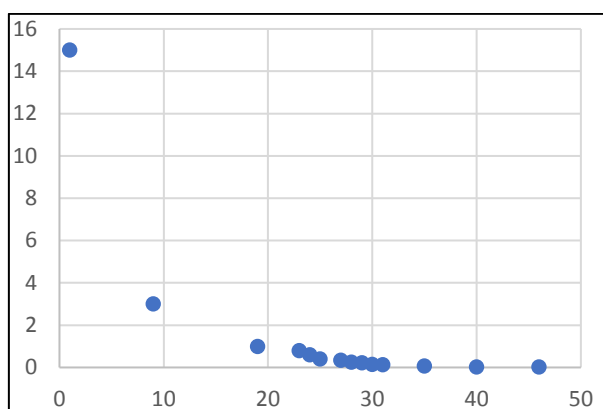


Gráfico 1 - Tamanho do transistor em μm no decorrer dos anos (1971 – 2016): gráfico construído na planilha eletrônica
Fonte: elaborado pela autora.

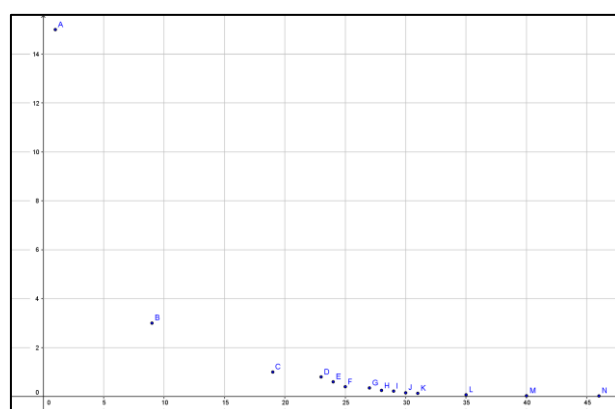


Gráfico 2 - Tamanho do transistor em μm no decorrer dos anos (1971 – 2016): gráfico construído no GeoGebra
Fonte: elaborado pela autora.

³⁷ Software livre de Geometria dinâmica.

³⁸ Planilha eletrônica do LibreOffice.

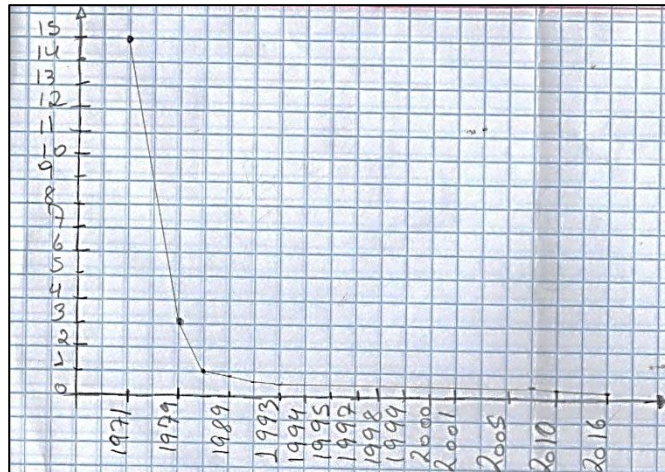


Figura 18 - Registro dos alunos: dados plotados no plano cartesiano
Fonte: registro dos alunos.

Depois que plotaram os pontos no gráfico, questionei-os sobre o comportamento dos dados. Os alunos sugeriram que, de acordo com os pontos no gráfico, o tamanho do transistor vem diminuindo muito no decorrer dos anos. Questionei-os então em como faríamos para determinar o tamanho do transistor (Figura 19) no ano de 2020. Eles começaram a analisar a variação do tamanho do transistor e observaram que ela não era constante e nem se aproximava de uma constante, por isso não poderia ser expressa por uma função afim. Assim, voltando à representação gráfica, concluíram que se a variação fosse constante, os pontos se comportariam linearmente, o que não era o caso.

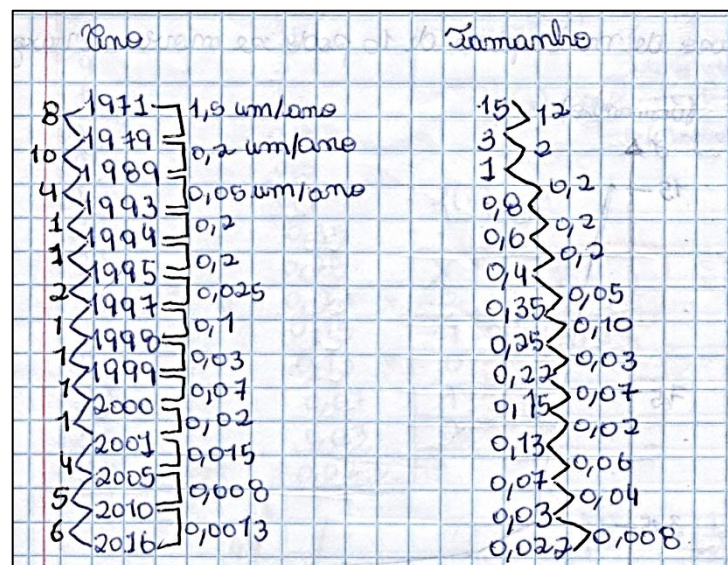


Figura 19 - Registro dos alunos: estudo da variação
Fonte: registro dos alunos.

Deste modo, depois que eles tentaram associar o comportamento dos dados a uma função afim e observaram que não era possível, ou seja, que a variação não

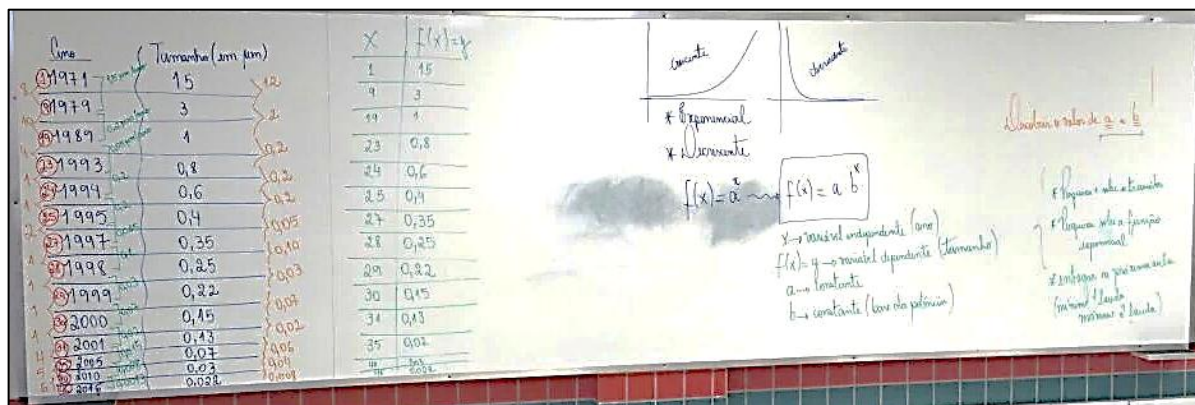
era constante, bem como depois que observaram os pontos no plano cartesiano e descartaram a hipótese de associar a curva a uma parábola, eles não tinham conhecimento de qual outra curva poderia se adequar à situação.

Neste momento, começaram a requerer minha ajuda, porque não possuíam instrumentos suficientes para dar conta da situação. Como professora, aproveitei o momento para revisar as funções que já conheciam do ano anterior (9º ano) - afim e quadrática - e ainda para abordar outro tipo de curva da qual eles não tinham conhecimento até o momento, a exponencial.

Assim, fui caracterizando cada função, explicitando as diferenças entre elas no que tange à variação, comportamento gráfico, domínio, imagem, deslocamentos nos eixos, representação algébrica, entre outras características.

Em relação às funções afim e quadrática, somente revisei suas características. No entanto, como a situação se configurou como um caso exponencial, debruçamo-nos em estudar este tipo de função, contrariando a sequência de conceitos que geralmente é trabalhada no primeiro ano do Ensino Médio – Função Afim, Função Quadrática, Função Exponencial, Logaritmo. Os conceitos de Função Afim e Quadrática foram trabalhados após o estudo de Função Exponencial e Logaritmos.

Depois de discutirmos as características das referidas funções, os alunos concordaram que os pontos se comportavam exponencialmente. Neste contexto, fui para o quadro para juntos socializarmos o que os grupos haviam discutido e, como nos aproximávamos do final da aula, solicitei que pesquisassem mais sobre função exponencial para a próxima aula.



Fotografia 11 - Registro no quadro da socialização do estudo de variação
Fonte: arquivos da autora.

Na semana seguinte, os alunos trouxeram algumas informações sobre função exponencial. Uma delas era de que o gráfico da função exponencial sempre interceptava o eixo y em 1, o que não estava acontecendo com a representação da situação. Neste sentido, expliquei que nós estávamos lidando com um caso de função do tipo exponencial ($f(x) = k \cdot a^x$), ou seja, ela sofreu algumas modificações e se deslocou no plano cartesiano em comparação com a função exponencial ($f(x) = a^x$). A partir daí, expliquei o conteúdo de função exponencial, enfatizando suas características e as relacionando com a situação que estávamos investigando (Fotografia 11). Em seguida, sugeri que tentássemos encontrar a forma algébrica que melhor se aproximava dos dados.

Como se tratava de uma turma de primeiro ano que estava tendo o primeiro contato com função exponencial e função do tipo exponencial, assim como ainda estava se adaptando às atividades de Modelagem, optei em intervir na determinação do modelo, sugerindo que escolhessem dois pontos e os substituíssem na função $f(x) = k \cdot a^x$. Deste modo, surgiu um sistema de equações exponenciais. No entanto, os alunos não tinham reação, não lembravam como se resolvia um sistema. Então acabei intervindo de modo a revisar também o método de resolução de sistema de equações.

Handwritten student work on graph paper showing the derivation of an exponential model $f(x) = k \cdot a^x$ from two data points: $(1, 15)$ and $(46, 0.022)$.

The student starts with the general form $f(x) = k \cdot a^x$ and substitutes the points to get the system of equations:

$$15 = k \cdot a^1 \quad 0.022 = k \cdot a^{46}$$

A table is shown with columns x and $f(x)$:

x	$f(x)$
1	15
2	
3	
4	
5	

The student then solves the system of equations. One path shows the substitution $k = \frac{15}{a}$ into the second equation, leading to $0.022 = \frac{15}{a} \cdot a^{46}$, which simplifies to $0.022 = 15 \cdot a^{45}$. Another path shows $a \cdot k = 15$ and $a \cdot k = 0.022$, leading to $k = \frac{15}{a}$ and $a^{46} \cdot \frac{15}{a} = 0.022$, which simplifies to $a^{45} = \frac{0.022}{15}$.

The student then calculates $a^{45} = 0.001467$ and $a = \sqrt[45]{0.001467}$, resulting in $a \approx 0.86503$. The value of k is calculated as $k = \frac{15}{a} = 17.3404$.

The final model is boxed: $f(x) = 17.3404 \cdot 0.86503^x$.

Figura 20 - Registro dos alunos: Obtenção do modelo algébrico

Fonte: registro dos alunos.

Após a obtenção do modelo, solicitei que os alunos o validassem substituindo os dados da tabela 1, conforme consta na tabela 2 e Figura 21. Como os valores encontrados eram muito próximos, consideraram o modelo válido.

Tabela 2 - Validação do modelo		
x	Tamanho do transistor	$f(x)$
1	15	14,9999
9	3	4,7026
19	1	1,1031
23	0,8	0,6176
24	0,6	0,5343
25	0,4	0,4522
27	0,35	0,3458
28	0,25	0,2991
29	0,22	0,2587
30	0,15	0,2238
31	0,13	0,1936
35	0,07	0,1084
40	0,03	0,0525
46	0,022	0,022

Fonte: elaborado pela autora.

X	F(x)	$F(x) = 17,3409 \cdot 0,86503^x$
1	15	14,99996621
9	3	4,70261729
19	1	1,103192576
23	0,8	0,617697734
24	0,6	0,53432707
25	0,4	0,452208946
27	0,35	0,345860278
28	0,25	0,299179716
29	0,22	0,258790297
30	0,15	0,223869121
31	0,13	0,193653506
35	0,07	0,108430145
40	0,03	0,0525177210
46	0,022	0,022003557

Figura 21 - Registro dos alunos: validação
Fonte: registro dos alunos.

Feito isso, agora os alunos tinham condições de responder ao problema apresentado: *Tendo em vista a diminuição do tamanho dos transistores observada no decorrer dos anos, qual pode ser o tamanho do transistor no ano de 2020 se considerarmos o quadro 1 como referência de progressão?*

Então, como o ano de 2016 correspondia ao tempo 46, consideraram o ano de 2020 como tempo 50. Substituíram no modelo desenvolvido e obtiveram a solução apresentada no Quadro 21.

$$f(50) = 17,34 (0,865)^{50} \rightarrow f(50) = 17,34 \cdot 0,00070926 \rightarrow f(50) = 0,0123$$

Quadro 21 - Resolução do problema
Fonte: elaborado pela autora.

Portanto, no ano de 2020, provavelmente o transistor terá aproximadamente 0,0123 μm (Figura 22).

76	0,032	10,022
50	0,012	→ para 2020

Figura 22 - Registro dos alunos: Resposta do problema

Fonte: registro dos alunos.

Para melhor validar o modelo desenvolvido, construímos no GeoGebra, a função de domínio $D = \{x \in \mathbb{N} | x > 1\}$, $f(x) = 17,34 (0,865)^x$ (em azul), plotamos os pontos e construímos a regressão exponencial (em vermelho). Podemos observar, no Gráfico 3, a proximidade das duas curvas e delas com os pontos que representam os dados.

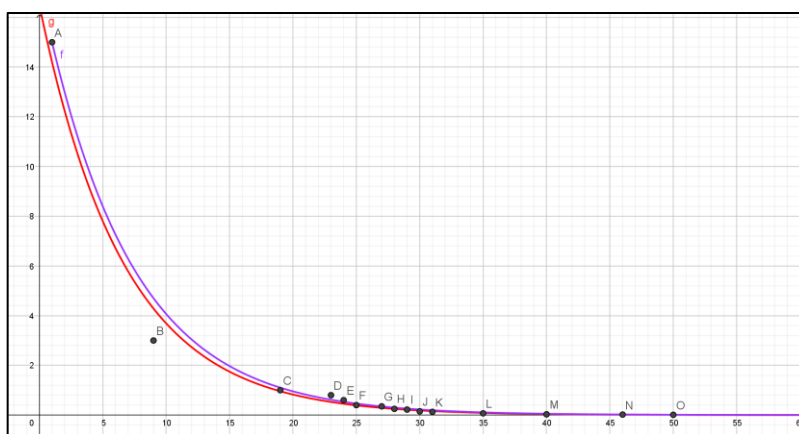


Gráfico 3 - Regressão dos dados realizada no GeoGebra

Fonte: elaborado pela autora.

Embora no momento do desenvolvimento da atividade só tenhamos discutido a abordagem da função exponencial, no momento das análises atentamos para o fato de existirem outras abordagens, como a consideração de uma progressão geométrica. Levando em consideração que não houve avanços em relação ao tamanho dos transistores entre os anos mencionados, o domínio desta função seria discreto, portanto não teria sentido o traçado da curva. No entanto, esta discussão não foi empreendida em aula. Consideramos o domínio da função como sendo $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$. A discussão empreendida com os alunos foi de considerarmos o ano de 1971 como sendo $x = 1$ e, a partir daí, ir relacionando os demais anos com os valores de x correspondentes. Deste modo, discutimos o conceito de domínio e imagem, relacionando os possíveis valores para a variável x e para a variável $f(x)$.

Paralelamente ao desenvolvimento da atividade de Modelagem nas aulas de Matemática, os alunos sanavam possíveis dúvidas com o professor de Informática nas

aulas de Fundamentos de Informática e Algoritmos e Linguagem de Programação. O professor relatou que quando trabalhou sobre o tema no início do ano, os alunos não demonstraram tanto interesse como no momento da atividade de Modelagem. Relatou que os alunos estavam motivados e faziam perguntas pontuais sobre o tema se mostrando curiosos.

5.2.2 Análise Específica da Situação “De que tamanho vai ficar?”

A atividade de Modelagem “De que tamanho vai ficar?” correspondente ao tema transístores, caracterizou-se como uma atividade mais curta. De início eu apresentei aos alunos os dados já coletados e o problema já formulado (BARBOSA, 2004), diferentemente da primeira situação, onde eles deveriam coletar os dados e o problema foi sendo formulado no decorrer da atividade pelos alunos e por mim. Deste modo, nesta atividade, os alunos precisariam analisar as informações apresentadas e responder ao problema. Passamos às análises específicas de cada episódio selecionado.

5.2.2.1 Episódio 9

Este episódio refere-se ao registro escrito de um dos grupos. Após a sugestão de representar os dados graficamente, alguns alunos, que estavam sem notebook, buscaram representar manualmente em folha de papel. Podemos observar que após colocarem os pontos no plano cartesiano, eles traçam segmentos de reta para uni-los (Figura 23). Isso pode denotar resquícios do estudo de função afim que tiveram no último ano do Ensino Fundamental. No entanto, após discussões no que tange à variação e às demais características de função afim, os alunos observaram que não se tratava de uma função deste tipo. Após a construção do esboço do gráfico pelos alunos, seja no papel ou no software, passamos a investigar o comportamento destes pontos. A partir daí, os alunos perceberam que se tratava de um comportamento ainda desconhecido por eles. Deste modo, houve a necessidade de ressignificar os conceitos de função afim e função quadrática e de conhecer uma nova função, a exponencial (ver seção 5.2.1). Concluíram então, que poderia se tratar de um comportamento exponencial.

Este é um caminho interessante para iniciar a abordagem de um conteúdo porque os alunos é que requerem uma explicação e não o professor que a impõe para cumprir um cronograma.

Embora no momento da aula só tenhamos discutido que o comportamento exponencial não apresenta segmentos de reta entre um ponto e outro, e sim uma curva diferente da reta, ao analisar a atividade depois de sua realização pontuamos duas possibilidades de encaminhamento/interrogação com os alunos: 1) Poderíamos utilizar uma função definida por várias sentenças em que cada uma delas fosse segmentos de reta, representando o registro feito inicialmente pelos alunos?; 2) Considerando a situação representada, faz sentido pensar na continuidade da curva e ligar os referidos pontos?

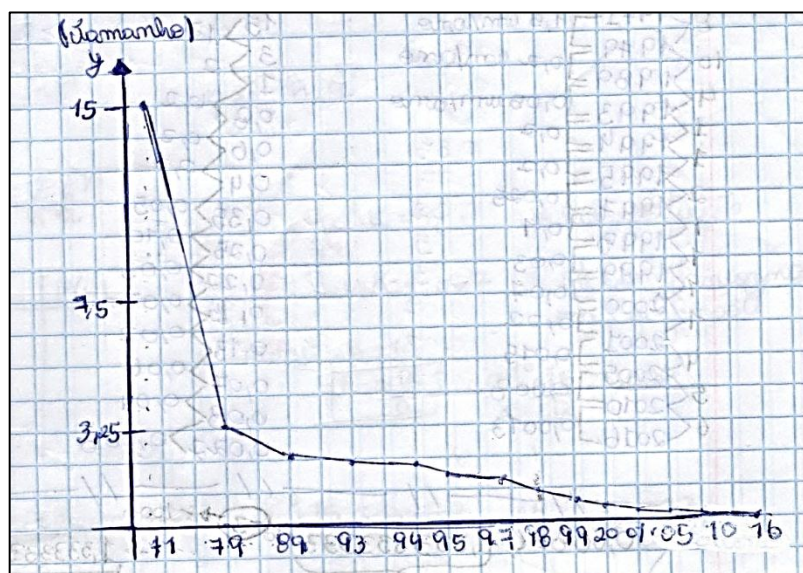


Figura 23 - Registro dos alunos: representação gráfica dos dados
Fonte: registro dos alunos.

ANÁLISE – EPISÓDIO 9		
Quais conceitos matemáticos emergiram?		Função, Função polinomial do Primeiro Grau, Função Polinomial do Segundo Grau, Função Exponencial.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?		Inicialmente, buscaram os conhecimentos que já tinham em relação a funções (afim), a ideia de variação e a ideia de que dois pontos são ligados por segmento de reta. Mas, quando estes conhecimentos não foram suficientes, recorreram à professora.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos		A professora de Matemática apresentou alguns dos diferentes comportamentos gráficos de funções, dando subsídios para que os alunos pudessem identificar a curva encontrada. Para isso, no entanto, revisou conceitos já estudados pelos alunos.

no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?	
Observações importantes sobre o episódio	
Mesmo inconscientemente, ao tentar representar algo graficamente, os alunos buscam os conhecimentos que adquiriram no decorrer de suas vidas escolares. No entanto, quando se deparam com uma situação para a qual os conhecimentos que possuem não são suficientes, precisam adquirir novos por intermédio da professora ou pesquisas. Este modo de iniciar um conteúdo mostrou-se significativo porque é o aluno que requer a explicação e não o professor que a impõe.	
Observações para o produto educacional	
Nas atividades de Modelagem em que se têm a possibilidade de esboçar gráficos, é interessante o uso de softwares como o GeoGebra ou o Calc. Isso porque o tempo de construção é muito menor e o gráfico, as variáveis e os pontos têm a possibilidade de serem manuseados. Portanto é interessante disponibilizar um computador ou um notebook por grupo, pelo menos. Outra possibilidade é baixar o GeoGebra no smartphone e utilizá-lo em sala de aula.	

Quadro 22 - Síntese da análise do Episódio 9**Fonte: elaborado pela autora.**

5.2.2.2 Episódio 10

Ao utilizar a calculadora para resolver operações de potenciação com expoente consideravelmente grande, apareceu no visor uma notação que os alunos estranharam, era um número com vírgula com muitas casas decimais seguido de um pequeno “x” e o número dez, e ainda outro número pequeno no canto superior direito (Figura 24). No entanto, para realizar os cálculos que necessitavam, simplesmente utilizavam o número com duas ou três casas decimais e ignoravam todo o resto. Observa-se que mesmo tendo estudado potenciação e notação científica, quando esta notação aparece no visor da calculadora pela primeira vez para os alunos, eles não a reconhecem. Isso denota a importância de, ao trabalhar os conceitos, buscar vivenciá-los para além da execução de exercícios.

Deste modo, o conteúdo de notação científica teve que ser ressignificado, a partir de uma necessidade advinda da atividade de Modelagem. Para isso, relembremos a importância e a necessidade de se utilizar números em notação científica e o processo de transformação de um número em notação comum para científica e vice-versa, sempre discutindo o sentido de colocar potência positiva ou negativa, relacionando a divisão e multiplicação do número por números múltiplos de 10 (potências de base 10) (Figura 25).



Figura 24 - Resultado na calculadora com notação científica
Fonte: arquivos da autora.

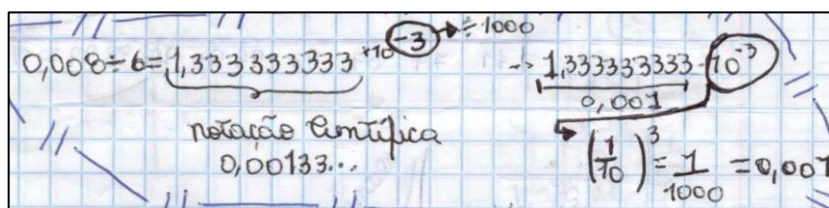


Figura 25 - Registro dos alunos: ressignificação do conteúdo de notação científica
Fonte: registro dos alunos.

ANÁLISE – EPISÓDIO 10		
Quais conceitos matemáticos emergiram?		Potenciação, fração e decimal, Notação Científica.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?		Quando a notação apareceu no visor da calculadora pela primeira vez, os alunos simplesmente ignoraram a potência de base 10, considerando apenas o primeiro fator. Quando estávamos socializando os cálculos, estranhei o valor e pedi para que algum aluno calculasse novamente. Neste momento que questionaram a potência de base 10.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?		Ao verificar que os alunos não estavam reconhecendo a notação no visor da calculadora, questionou-os e iniciou uma discussão sobre notação científica e inevitavelmente sobre potenciação, números decimais e frações. Justificando que, além de aparecer naquela atividade, quando investigamos situações da realidade, lidamos com grandezas consideradas muito grandes ou muito pequenas, que necessitam de muitos algarismos para serem representadas.
Observações importantes sobre o episódio		
Mesmo tendo estudado o conteúdo de notação científica em anos anteriores, os alunos não a reconheceram numa situação prática. Esta situação exemplifica a importância de lidar com situações em que os conceitos não estão formalmente estipulados.		
Observações para o produto educacional		
No item “sugestões para o desenvolvimento da atividade”, sugerir ao professor que desenvolverá atividades de Modelagem, que se atente para situações similares a esta.		

Quadro 23 - Síntese da análise do Episódio 10
Fonte: elaborado pela autora.

5.2.2.3 Episódio 11

Neste episódio, verifica-se um trecho da socialização do que os alunos pesquisaram sobre função exponencial. Na aula anterior, quando suscitamos que a situação poderia ser modelada exponencialmente, solicitei que os alunos pesquisassem mais sobre o assunto para que pudéssemos discuti-lo na próxima aula. Assim os alunos fizeram. Ao retomarmos as discussões sobre os transístores, já tinham em mãos algumas informações sobre função exponencial. A partir daí, passamos a relacionar o conceito com a situação. E os alunos conseguiram identificar na situação as características da função exponencial.

PROF.: Vocês pesquisaram sobre a função exponencial?

ANA LU: Sim.

ALUNOS³⁹: Sim.

PROF.: o que vocês encontraram sobre ela?

ANA LU: Ah, eu não achei muita coisa não prof. Eu só achei o que é e depois um exemplo. Função exponencial ocorre quando temos uma variável no expoente e um número real como base.

RAISSA: pode ser crescente ou decrescente.

PROF.: Isso... nós temos função exponencial crescente e função exponencial decrescente. A nossa dos transístores, vai ser crescente ou decrescente?

SANDRO: decrescente.

CLEBER: decrescente.

ANA LU: decrescente.

PROF.: decrescente, né. Porque o tamanho dos transístores está diminuindo no decorrer dos anos, então ela é decrescente. Será que vai chegar algum momento em que o transistor vai ter tamanho zero?

SANDRO: não.

RAISSA: não.

PROF.: não é possível. Ele pode ter um tamanho muito próximo de zero, certo. Muito próximo de zero, só que ele nunca vai chegar em zero, né. Esta é uma característica da função exponencial também, tá.

[...]

PROF.: Quando que a função exponencial vai ser decrescente? Alguém pesquisou? Encontrou?

ALUNO: quando o expoente for menor que zero.

PROF.: Será? Aqui a gente não usou expoente menor que zero?

ANA LU: quando o quê prof?

PROF.: quando que uma função exponencial vai ser decrescente?

ANA LU: Quando ocorrer.... quando... tá aqui ó prof! (não conseguiu ler o intervalo, mostrou a folha para a professora)

PROF.: “a” maior que 1 ela vai ser.... crescente e...decrescente?

ANA LU: menor que 1...tá aqui ó.

PROF.: Como que eu leio isso aqui ó... A gente começa sempre pela variável tá... olha.. “a” maior que zero e menor que 1. Tá... Isso aqui é um intervalo, tá. É um intervalo numérico. Que valores estão no intervalo de zero a 1?

ANA LU: 0,5; 0,6; 0,7...

³⁹ Usaremos a expressão ‘ALUNOS’ quando a fala é de mais de um aluno.

SANDRO: 0,0000000000....

PROF.: E esses valores só aparecem na forma decimal?

GUTO: não... tem fração também.

PROF.: Isso... podem aparecer na forma de fração. Que tipo de fração vai estar entre zero e 1? Porque a gente tem frações que são valores menores do que 1 e temos frações que os valores são maiores do que 1, não temos? Por exemplo: sete meios, é maior ou menor do que 1?

ALUNO: é maior.

PROF.: dois terços.

ALUNO: menor.

PROF.: qual é a diferença entre o sete meios e o dois terços? Hum? Que tipo de frações representam valores menores do que 1? Ó... eu vou colocar algumas frações aqui... vocês vão me dizer se elas são maiores ou menores do que 1. Então vamos lá... Então que característica frações que representam valores menores do que 1 possuem?

ALUNO: o 1 em cima

PROF.: mas e se eu colocar dois terços?

ALUNO: o número de cima tem que ser menor.

PROF.: Isso... o numerador tem que ser menor que o denominador. Quando o numerador de uma fração for menor que o denominador, essa fração representa um valor menor do que 1. Certo? Se o numerador for maior, ela representa um valor maior do que 1. Certo? Então pra nossa função exponencial ser decrescente, a nossa base da potência tem que ser um valor entre 0 e 1. Então, a base da potência da nossa função, que a gente está estudando vai ser maior que 1 ou entre zero e 1?

ALUNO1: entre zero e um.

ALUNO2: maior do que 1. Não.. não. Entre zero e um.

PROF.: Isso. Porque a nossa função é decrescente não é? Então o nosso a vai estar entre zero e 1.

Podemos observar que quando a docente solicita aos alunos para pesquisarem sobre função exponencial, a aluna Ana Lu se mostra insatisfeita com o que encontra na internet - *Ah, eu não achei muita coisa não prof. Eu só achei o que é e depois um exemplo.* Esta fala pode denotar que a aluna possuía uma expectativa de encontrar informações para além daquelas que se encontram nos livros didáticos. No entanto, em sua pesquisa, aparentemente, encontrou as mesmas informações e com o mesmo formato. É possível que a aluna esperasse encontrar algo parecido com o que estávamos discutindo. Neste sentido, acreditamos que os textos matemáticos, muitas vezes, não são autossuficientes, de modo que o aluno consiga entender o conteúdo sem que haja a intervenção de outra pessoa com mais conhecimento sobre o assunto, como o professor de sala ou um professor “virtual” (vídeo-aulas).

Um dos motivos que denotam a não autossuficiência é que estes textos são carregados de símbolos e termos próprios da Matemática, muitos deles, desconhecidos pelo aluno. Podemos verificar esta situação no excerto - *Quando ocorrer.... quando... tá aqui ó prof! (não conseguiu ler o intervalo, mostrou a folha para a professora).* Nesta situação, a aluna já deveria ter condições de ler um intervalo numérico. No entanto, apresentou dificuldades. Esta mesma situação, pode ser

vivenciada por muito alunos pois, muitas vezes, as definições, o formalismo matemático, as notações matemáticas, embora constem nos livros didáticos e nos demais materiais utilizados pelos docentes, inclusive nas questões que utilizam, muitas vezes são ignorados pelos alunos (e até mesmo pelos docentes) como se não houvesse um motivo para estarem ali. Ou seja, muitas vezes os professores acabam dizendo aos alunos o que fazer na atividade, sem atentá-los para o significado destas notações. E o não se atentar para isso pode contribuir para que os alunos continuem dependentes do professor no que tange à interpretação de enunciados, de textos matemáticos, etc.

Nesse sentido, a dinâmica estabelecida pela docente, embora não tivesse essa pretensão inicial, mostrou-se interessante por fazer os alunos se atentarem para a linguagem matemática muitas vezes facilitada pelo docente ou ignorada pelos alunos.

Neste episódio, ainda observa-se que a professora aproveita para revisar o conteúdo de frações, pelo menos no aspecto que se relaciona à definição da função exponencial, a partir do que os alunos pesquisaram - *E esses valores só aparecem na forma decimal? não... tem fração também. Isso... podem aparecer na forma de fração. Que tipo de fração vai estar entre zero e 1? Porque a gente tem frações que são valores menores do que 1 e temos frações que os valores são maiores do que 1, não temos?* Neste sentido, concordamos com Lopes (2008) quando defende que o ensino de frações não deveria ser um conteúdo específico de uma determinada série, mas sim, fazer parte de diferentes momentos do currículo, sempre que se fizer necessário. Para o autor,

[...] subjaz a crença no caráter categórico e acumulativo dos conteúdos, bastando ensinar frações em algum ponto do programa e, pronto! Daí em diante as frações estariam disponíveis como objetos de domínio dos alunos. Mas a realidade é outra, [...]. Confinar o tema frações em algumas séries do currículo é um erro grave, desconsidera o fato de que o desenvolvimento do pensamento proporcional se estende por um longo período que vai dos 7/8 anos aos 14/15 anos, em níveis distintos de complexidade (LOPES, 2008, p.10 - 11).

Neste sentido, o autor sugere um tratamento espiral que implique em aquisição e mudança conceitual explorando as distintas ideias sobre frações.

É importante destacar que, nesta atividade, a situação é que contribuiu para significar e ajudar os alunos a entenderem o conceito e as características da função exponencial.

Quando o aluno se depara com uma situação até então desconhecida por ele numa atividade de Modelagem, é necessário que o professor intervenha para que novos conhecimentos matemáticos sejam construídos. Neste episódio, após o momento em que os alunos se depararam com um comportamento gráfico desconhecido, a professora apresenta diferentes funções e os alunos concordam que se trata de um comportamento exponencial, a professora solicita que procurem mais informações sobre esta função. Deste modo, quando os alunos apresentam o que pesquisaram, a professora passa a dialogar com eles de modo a relacionar as características da situação com as características da função exponencial. Neste processo, outros conhecimentos emergem. - *Então, a base da potência da nossa função, que a gente está estudando vai ser maior que 1 ou entre zero e 1? Entre zero e um. Maior do que 1. Não... não. Entre zero e um. Isso. Porque a nossa função é decrescente não é? Então o nosso a vai estar entre zero e 1.*

ANÁLISE – EPISÓDIO 11	
Quais conceitos matemáticos emergiram?	Função Exponencial; Frações; Notação de intervalos numéricos.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?	Os alunos pesquisaram informações sobre um conteúdo que eles não conheciam. A princípio, não compreenderam muito bem o que haviam pesquisado. No entanto, após as discussões em sala relacionando os conceitos com a situação em estudo, parecem ter entendido as características discutidas. Nesse caso, a situação parece ter contribuído para significar o conceito de função exponencial e ressignificar alguns conceitos de frações e intervalos numéricos.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?	A partir das informações que os alunos apresentaram, as relacionava com a situação dos transistores, dialogando com os alunos de modo que eles mesmos observassem essas relações.
Observações importantes sobre o episódio	
Nem todos os alunos realizaram a pesquisa sobre função exponencial. No entanto, é importante investir em práticas como estas, primeiro por conta destes que vão atrás e trazem as informações merecendo nossa atenção e, segundo, por conta de essa prática, de repente, ir contagiando a outros que não a tem.	
Observações para o produto educacional	
Deixar claro no produto educacional, a importância de sistematizar corretamente os conceitos que emergirem da atividade de Modelagem. Porque é com a sistematização que o aluno terá condições de utilizar os conhecimentos desenvolvidos na atividade em outras situações. No entanto, em Modelagem, a sistematização não se dá com o professor falando para os alunos, mas sim com o professor falando com os alunos.	

Quadro 24 - Síntese da análise do Episódio 11

Fonte: elaborado pela autora.

5.2.2.4 Episódio 12

Como não havia a possibilidade de eu estar presente em todas as aulas de Fundamentos de Informática, após o término do desenvolvimento da atividade conversei com o professor da disciplina para ter conhecimento de como foi sua participação na atividade. Ele enfatizou a relevância da atividade e como ela suscitou a curiosidade dos alunos motivando-os a saber mais sobre o assunto.

PROF. INF.: A respeito dos transístores, eles foram mais pontuais, aí eles queriam entender com mais clareza, porque o que aconteceu... eu já tinha trabalhado o conteúdo de transístores em aulas já bem no começo do ano. [...] Então, depois, essa retomada do conteúdo foi bem relevante, porque coisa que eu já tinha até comentado com eles e tal, porque era aula introdutória, não era o objetivo que o aluno decorasse aquilo ou soubesse com propriedade, era pra ter uma noção que existia, então foi retomado e eles estavam com mais... eles tinham mais clareza sobre tópicos que eram relevantes saber a informação, entendeu? Então eles já tinham uma boa noção do que era mesmo o transístor e como que podia ter tantos transístores em um espaço tão pequeno, como que era a física desse negócio, se era uma chavinha que ligava ou desligava, ou como que era, aí eu detalhei um pouco mais, entendeu? Então, você vê que está aliado à curiosidade, entendeu? E aí, o aluno que tem uma motivação pra aprender, a chance dele aprender é bem maior do que aquele aluno passivo que está sentado lá na sala... você está só falando ali e o cara não está preocupado com nada. Então, eu achei que contribuiu muito nessa parte de tornar a aula mais participativa, onde os alunos interagiram mesmo, eu achei bem legal.

Neste episódio, podemos verificar a relevância da participação de outras disciplinas com seus respectivos professores no desenvolvimento da atividade de Modelagem. Isso porque, a partir do desenvolvimento da atividade de Modelagem, diferentes conhecimentos emergiram – conhecimentos de Matemática e conhecimentos de Informática. Deste modo, voltamos a evidenciar que, o foco é o problema, e quanto mais conhecimentos são envolvidos para a resolução do problema, mais benefícios terá o aluno. Além disso, quando o professor é especialista em um determinado assunto e ele aborda questões sobre este assunto na investigação de um problema, as contribuições para a discussão e para a investigação do problema podem ser mais seguras do que quando o professor de Matemática se aventura a falar sobre assuntos dos quais não é especialista, por mais que busque informações para isso.

ANÁLISE – EPISÓDIO 12	
Quais conceitos matemáticos emergiram?	Não há observações em relação a este item.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?	Não há observações em relação a este item.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?	O professor de Informática contribuiu com seus conhecimentos sobre o assunto para atender às demandas e aos questionamentos dos alunos. Deste modo, os alunos puderam compreender melhor o componente e o seu desenvolvimento no decorrer dos anos, tendo a ajuda de um especialista, também professor da turma.
Observações importantes sobre o episódio	
Neste episódio podemos verificar a relevância da participação de outros professores no desenvolvimento da atividade de Modelagem. Consideramos esta contribuição importante tanto para a disciplina de Matemática, quanto para as outras disciplinas envolvidas, dentre outros motivos, porque há a possibilidade de o aluno se motivar em discutir e aprender determinado conteúdo, devido a dinâmica a qual ele está inserido e às possibilidades de discutir, sobre diferentes entendimentos e com diferentes especialistas, os assuntos que figuram na investigação.	
Observações para o produto educacional	
Enfatizar a importância da participação de outros professores no desenvolvimento de atividades de Modelagem, devido às contribuições desses professores no que diz respeito aos temas extra matemáticos em que são especialistas e que figuram na investigação.	

Quadro 25 - Síntese da análise do Episódio 12

Fonte: elaborado pela autora.

5.2.3 Interdisciplinaridade na Atividade

A atividade “De que tamanho vai ficar?”, contou com a participação efetiva do professor de Informática da turma, desde o seu planejamento. Ou seja, o professor de Informática e a professora de Matemática⁴⁰, juntos, pensaram em um tema que fosse da área de formação técnica dos alunos. Ao decidir pelo tema dos transístores⁴¹, passaram a conversar sobre ele e a pensar na elaboração de um problema. Deste modo, o objetivo dos dois professores era contribuir com os alunos para a resolução do problema, o foco passou a ser o problema, não mais os conceitos da ementa das disciplinas. Consequentemente, ao buscar resolver o problema, os conceitos das duas disciplinas foram emergindo.

⁴⁰ Autora deste trabalho.

⁴¹ Tema sugerido pelo orientador da dissertação.

É importante ressaltar que o tema foi discutido nas aulas das duas disciplinas – *“Então eles já tinham uma boa noção do que era mesmo o transístor e como que podia ter tantos transístores em um espaço tão pequeno, como que era a física desse negócio, se era uma chavinha que ligava ou desligava, ou com que era, aí eu detalhei um pouco mais, entendeu? Então, você vê que está aliado à curiosidade, entendeu?”* (Professor de Informática). Neste contexto, concluímos que esta atividade apresentou características de interdisciplinaridade que a relaciona com a categoria 2 (SETTI; VERTUAN, 2016a), onde diferentes disciplinas trabalham juntas para resolver uma situação-problema. O foco é o problema e os conhecimentos das disciplinas envolvidas são igualmente importantes.

5.3 CONTEXTO EM QUE SE DESENVOLVEU A ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA 3 – LIXO ELETRÔNICO

O tema lixo eletrônico surgiu durante minhas reflexões sobre assuntos que poderiam interessar aos alunos do curso técnico em Informática. Levei o tema ao professor da área técnica, parceiro das atividades desde o início, para que, juntos, pensássemos em um problema. O tema lixo eletrônico é muito amplo, poderíamos desenvolver a atividade a partir de inúmeros aspectos, dentre eles: impacto do lixo eletrônico na natureza, política reversa, reciclagem do lixo eletrônico, minerais preciosos presentes no lixo eletrônico, componentes tóxicos do lixo eletrônico, entre outros. E ainda, poderíamos explorar o lixo eletrônico como um todo, ou apenas focar em computadores, ou celulares, ou notebooks. Tendo isso em vista, decidimos deixar um problema mais abrangente e, durante a interação com o tema, formular um problema mais específico.

Surgiu então a ideia de envolver outros professores no desenvolvimento desta atividade. Enviei, então, um e-mail aos professores de Química, Geografia, Biologia e Física marcando uma reunião de planejamento. Esta reunião aconteceu no dia 21 de setembro de 2016. O professor de Informática também participou das discussões. Inicialmente, conversamos sobre Modelagem e sobre interdisciplinaridade. Pude perceber que os professores possuíam dúvidas acerca do que era um trabalho interdisciplinar e de como realizá-lo. Depois de conversarmos sobre as diferentes características de interdisciplinaridade observadas em Setti e Vertuan (2016a, 2016b),

chegamos ao acordo em tentar desenvolver a atividade do lixo eletrônico sob o aspecto da categoria 2, onde diferentes disciplinas trabalham sob um mesmo problema. No entanto, ainda possuíamos dúvidas de como isso se daria. Combinamos de cada professor orientar os alunos na atividade no que tangia à sua disciplina e de nos comunicarmos no decorrer da atividade.

5.3.1 A Atividade

Após três semanas, onde trabalhamos atividades relacionadas aos conceitos⁴² que emergiram da atividade dos transístores e realizamos uma prova, no dia 23 de setembro, demos início às primeiras discussões sobre o lixo eletrônico. Anteriormente, no final da aula do dia 9 de setembro, entreguei a atividade (Quadro 26) e solicitei aos alunos que pesquisassem sobre o tema e que anotassem informações relevantes.

Quanto celulares e notebooks você já teve?



O que você faz com os aparelhos eletrônicos que você não utiliza mais?





JORNAL NACIONAL - Edição do dia 09/11/2015
09/11/2015 20h55 - Atualizado em 11/11/2015 21h41

BRASIL DESCARTA POR ANO 1,2 MILHÃO DE TONELADAS DE LIXO ELETROELETRÔNICO

Lixo eletrônico vai chegar a 48 milhões de toneladas em 2017 no mundo.
Toneladas de material são descartadas com as novidades da tecnologia.

De acordo com uma notícia publicada no site do Jornal Nacional⁴³ do dia 10 de novembro de 2015, das mais de 5500 cidades brasileiras apenas 724 possuem algum tipo

⁴² Potenciação, Função Exponencial, Equação Exponencial.

⁴³ Telejornal da Rede Globo de televisão.

de coleta de lixo eletrônico. E para onde vão os celulares, computadores e outros aparelhos eletrônicos que não são mais utilizados nas outras cidades?

Será que o descarte incorreto desse lixo prejudica o meio ambiente? De que forma?

O site E-lixo⁴⁴ destaca que os lixos eletrônicos, quando descartados de modo incorreto, podem gerar sérios riscos ao meio ambiente, devido a presença de metais pesados e tóxicos em sua composição.

E há uma agravante em tudo isso!

Os produtos eletroeletrônicos são descartados em pouco tempo devido à inovação tecnológica. Gerando assim um grande acúmulo de objetos eletrônicos em desuso.

Algumas pessoas descobriram que podem ganhar seu sustento ao reciclar o lixo eletrônico. Mas esta reciclagem é perigosa, portanto deve ser feita com algumas regras de segurança.

Tendo em vista esta situação, questiona-se:
Qual é o impacto ambiental e econômico ocasionado pelo lixo eletrônico?

<http://www.sermelhor.com.br/ecologia/lixo-eletronico-problema-e-solucoes.html>

<http://www.elixo.org.br/reciclagem-lixo-eletronico/>
<http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/destino-do-lixo-eletronico-vira-um-desafio-planetario.html>



Quadro 26 - Atividade de Modelagem 3: Lixo Eletrônico

Fonte: elaborado pela autora com base nas referências citadas na atividade.

Para iniciar as discussões, no dia da aula de Matemática passei para os alunos quatro vídeos⁴⁵ curtos de uma série do Jornal Nacional sobre Lixo Eletrônico, disponibilizada no site do jornal em novembro de 2015. Os vídeos apresentam o contexto do lixo eletrônico no Brasil, os procedimentos corretos de reciclagem, os

⁴⁴ Entidade associativa constituída em 17 de março de 2008. A E-lixo é a única entidade de Londrina e região com licença ambiental de operação específica para lixo eletrônico conforme concedido pelo Instituto Ambiental do Paraná (IAP). O objetivo é contribuir com o desenvolvimento sustentável através de atitudes e práticas ecologicamente corretas no que se refere ao recolhimento e destinação do lixo eletroeletrônico. Link: <http://elixo.org.br/>

⁴⁵ Vídeo 1: <http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/brasil-descarta-por-ano-12-milhao-de-toneladas-de-lixo-eletronico.html>

Vídeo 2: <http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/destino-do-lixo-eletronico-vira-um-desafio-planetario.html>

Vídeo 3: <http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/lixo-eletronico-pode-ser-altamente-perigoso-com-manuseio-inadequado.html>

Vídeo 4: <http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/paises-exportam-lixo-eletronico-para-outros-em-vez-de-reciclar.html>

perigos da reciclagem sem as devidas precauções, o impacto do lixo eletrônico na natureza, entre outras coisas. Deste modo, entre um vídeo e outro íamos conversando e refletindo sobre o tema, além de anotar informações consideradas importantes. Nesta ocasião os alunos não estavam organizados em grupos. Os alunos se mostraram muito interessados no tema e anotaram algumas informações que consideraram importantes (Quadro 27).

40 milhões de toneladas de lixo eletrônico são gerados por ano no mundo.
Brasil: 97 mil toneladas por ano de computadores 2,2 mil toneladas por ano de celulares 17,2 mil toneladas por ano de impressoras
Em 2005, apenas 724 cidades no Brasil possuíam coleta de lixo eletrônico.
Brasil: 1,2 milhão de toneladas por ano de lixo eletroeletrônico.
Substâncias químicas presentes no lixo eletrônico: chumbo, cádmio, mercúrio, berílio, etc.
No lixo eletrônico há componentes de ouro, prata, cobre.

Quadro 27 - Informações coletadas pelos alunos

Fonte: elaborado pelo autor a partir das anotações dos alunos com referência nos vídeos de 2015.

Iniciamos uma reflexão sobre o consumo de tecnologia, de como as pessoas são levadas a trocar de aparelhos eletrônicos com frequência pela “Obsulência Programada⁴⁶”. Surgiu então a ideia de levantar dados sobre o consumo de celulares na sala de aula. Solicitei então que os alunos anotassem em uma folha de papel quantos celulares já tiveram e, destes, quantos foram para o lixo (reciclável ou rejeito) (Figura 26).

⁴⁶ Quando um produto é lançado no mercado e se torna propositalmente inutilizável em um curto período de tempo.

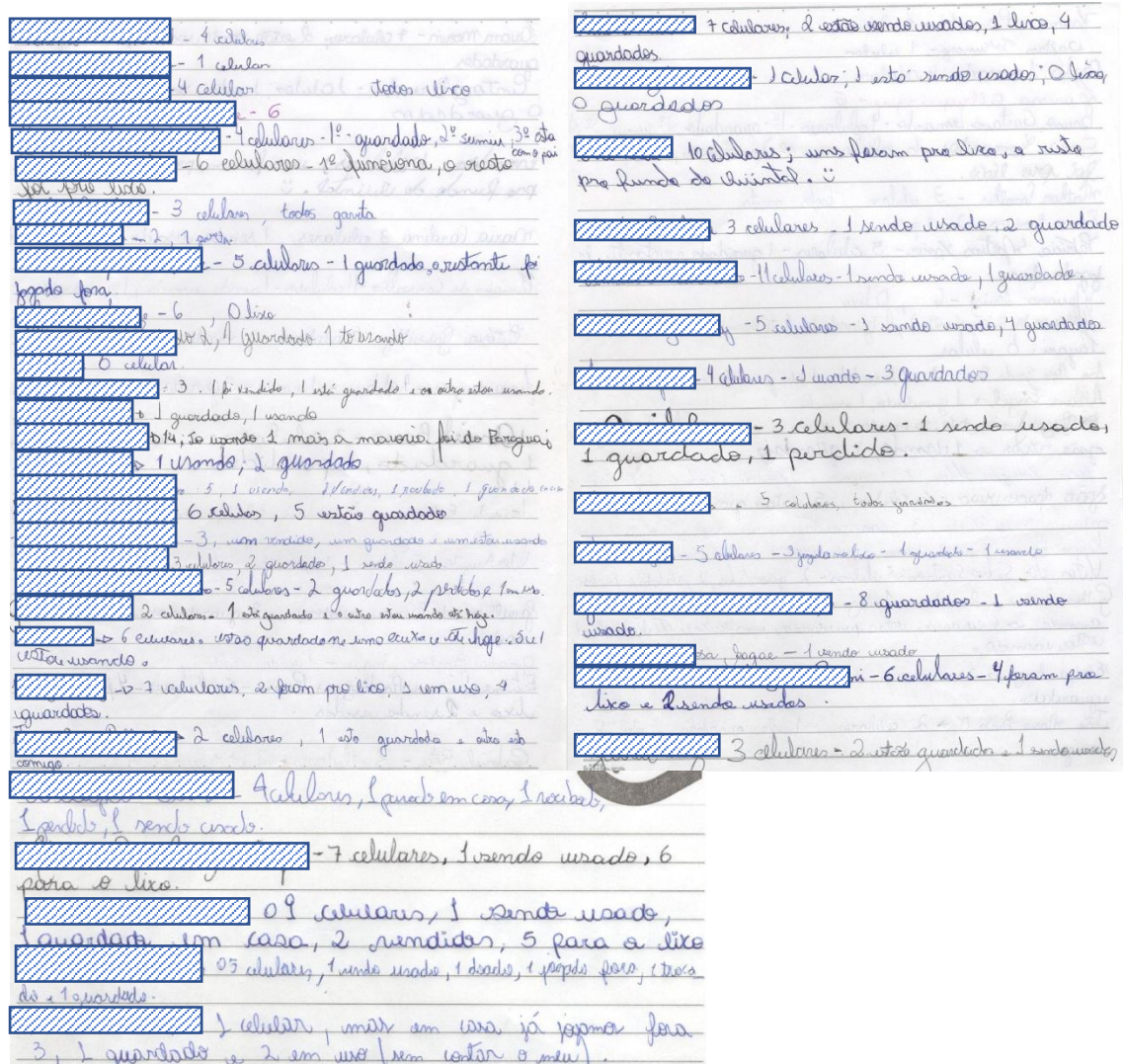


Figura 26 - Registro dos alunos: coleta de informações sobre quantidade de celulares
Fonte: registro dos alunos.

Durante o mês de outubro, os alunos ficaram de pesquisar mais sobre o tema, levantando informações e pensando em possíveis problemas. Sempre conversávamos sobre o tema no final da aula. Nestas conversas falamos sobre os elementos químicos presentes no lixo eletrônico, comentamos sobre a meia-vida destes elementos, sobre a quantidade de lixo eletrônico acumulada no Brasil (e no mundo) e sobre reciclagem.

No decorrer do desenvolvimento da atividade, o professor de informática, em conversa na sala dos professores, sugeriu que, como iria solicitar que os alunos desenvolvessem um site, que o tema poderia ser lixo eletrônico. A ideia inicial era de que o site apresentasse todo o desenvolvimento da atividade de Modelagem sobre o

lixo eletrônico com as contribuições de todas as disciplinas envolvidas. Concordamos com a ideia e continuamos com os trabalhos.

No período de desenvolvimento da atividade, sempre buscava perguntar aos professores como estava sendo a contribuição de suas disciplinas. No entanto, as respostas sempre eram: “não tive tempo de contribuir ainda”, “estava terminando o conteúdo”, “os alunos não perguntaram nada”, “pode deixar que ainda vou contribuir”, “tive que aplicar prova”. Ao contrário do professor de Informática que buscava, em suas aulas, sempre trazer o assunto à tona e contribuir.

No final de uma aula de Matemática sobre funções, conversei com os alunos sobre o site que eles desenvolveriam com o professor de Informática. Deste modo, concordamos em utilizar o site como um meio de conscientização em relação ao lixo eletrônico. Isso porque estavam preocupados com a quantidade de lixo e com os elementos químicos que compõem este lixo. Neste contexto, conversamos sobre a meia-vida de um elemento químico e então sugeri que conversassem mais sobre o assunto com o professor de Química.

Os alunos concluíram a primeira parte do blog (Figura 27) e apresentaram para mim e para o professor de Informática, os outros professores não puderam estar presentes. Neste primeiro momento, eles colocaram o que haviam coletado de informações sobre o lixo eletrônico. Então, ao final das apresentações, solicitei que acrescentassem ao site as próximas etapas da atividade de Modelagem que seriam desenvolvidas.



Figura 27 - Página inicial do site de uma dupla de alunos
Fonte: site construído pelos alunos.

No dia 9 de novembro reservamos todo o tempo das duas aulas de Matemática para o desenvolvimento da atividade de Modelagem. Solicitei aos alunos que expusessem todas as informações que haviam encontrado até o momento para, assim, podermos iniciar a matematização da situação. Estas informações deveriam ter sido encontradas em sites e com os professores das outras disciplinas. No entanto, os alunos apresentaram poucos dados. Realmente, não há muitos dados numéricos precisos sobre o lixo eletrônico. Deste modo tentamos trabalhar com o que conseguimos.

Discutimos, então, todas as informações no grande grupo, toda a turma. Decidimos, portanto, trabalhar com as informações coletadas em sala de aula, a respeito da quantidade de celulares que os alunos já tiveram. Deste modo, projetei as informações coletadas já organizadas em uma tabela (Tabela 3).

Tabela 3 - Tabulação das informações coletadas

Qtde celulares	Qtd de alunos	Total de celulares
1	4	4
2	5	10
3	8	24
4	5	20
5	7	35
6	7	42
7	3	21
8	0	0
9	2	18
10	1	10
11	1	11
12	0	0
13	0	0
14	1	14
Total	44	209

Fonte: elaborado pela autora.

Os alunos, então, calcularam a média de celulares por aluno da turma ($209 \div 44 = 4,75 \cong 5$ celulares por aluno). Aproveitei para explicar as ideias iniciais de Estatística (coleta e organização dos dados) e sobre as Medidas de Tendência Central – Média, Moda e Mediana. Para complementar os dados, fizemos uma pesquisa rápida em sala, para saber o período em que eles tiveram esses celulares. A moda da coleta de dados foi o período de 5 anos. Então os alunos sugeriram utilizar este

período para todos. Assim, perguntei a eles então, em média, a cada quanto tempo eles costumavam trocar de celular, ao que responderam que, em média, eles trocam de celular a cada ano. Com esta suposição de que, em média, as pessoas trocam de celulares todo ano, passamos a pensar como isso impactaria no caso da cidade de Assis Chateaubriand.

Neste contexto, formulamos a seguinte questão de investigação: *Considerando a média encontrada em sala de que as pessoas trocam de celular a cada ano, quantos celulares são descartados na cidade de Assis a cada ano?*

Os alunos tiveram que pensar na população da cidade, em que faixa etária costuma-se ter celular e na taxa de crescimento populacional. Pesquisaram então, no site do IBGE⁴⁷ e do IPARDS⁴⁸, as informações necessárias (Quadro 28).

População de Assis Chateaubriand (2010) = 33 028.

População economicamente ativa (2010) = 17 340.

Taxa de crescimento populacional da cidade = não encontrada

Taxa de crescimento populacional do Brasil (2010) = 0,9%

Quantidade de pessoas na cidade de acordo com a faixa etária em 2007:

CONTAGEM DA POPULAÇÃO SEGUNDO FAIXA ETÁRIA E SEXO - 2007

FAIXA ETÁRIA (anos)	MASCULINA	FEMININA	TOTAL
Menores de 1 ano	177	170	347
De 1 a 4	813	765	1.578
De 5 a 9	1.190	1.151	2.341
De 10 a 14	1.510	1.394	2.904
De 15 a 19	1.419	1.368	2.787
De 20 a 24	1.121	1.223	2.344
De 25 a 29	1.126	1.187	2.313
De 30 a 34	1.178	1.241	2.419
De 35 a 39	1.235	1.358	2.593
De 40 a 44	1.215	1.309	2.524
De 45 a 49	950	1.118	2.068
De 50 a 54	893	998	1.891
De 55 a 59	745	839	1.584
De 60 a 64	689	751	1.440
De 65 a 69	641	560	1.201
De 70 a 74	410	392	802
De 75 a 79	265	265	530
De 80 anos e mais	251	280	531
Idade ignorada	5	5	10
TOTAL	15.833	16.374	32.226

FONTE: IBGE

NOTA: A soma das parcelas não corresponde ao total porque está incluído no mesmo, a população estimada nos domicílios fechados. Incluído a estimativa do IPARDES para os que não tiveram contagem (Cascavel, Colombo, Curitiba, Foz do Iguaçu, Londrina, Maringá, Ponta Grossa e São José dos Pinhais).

Quadro 28 - Informações coletadas pelos alunos

Fonte: elaborado pela autora a partir das informações coletadas pelos alunos.

⁴⁷ Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

⁴⁸ Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social.

Os alunos decidiram considerar as pessoas com a faixa etária de 10 a 74 anos, totalizando 26 870 pessoas. Neste momento, iniciamos a resolução do problema com a construção do modelo matemático.

Para isso, coloquei a quantidade de pessoas consideradas em 2007 no quadro e considerando a taxa de crescimento populacional do Brasil (0,9%), solicitei que calculassem a quantidade de pessoas nessa faixa etária em 2008, e assim por diante.

Tabela 4 - Recorrência da quantidade de celulares descartados		
Ano	T	Celulares descartados
2007	0	26870
2008	1	$26870 \cdot 1,009 = 27112$
2009	2	$26870 \cdot 1,009 \cdot 1,009 = 27356$
2010	3	$26870 \cdot 1,009 \cdot 1,009 \cdot 1,009 = 27602$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2007 + t	t	$26870 \cdot 1,009^t$

Fonte: elaborado pela autora a partir das discussões empreendidas em sala com os alunos.

Deste modo, por recorrência, chegamos ao modelo algébrico:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde } f(t) = 26870 (1,009)^t.$$

Onde $t = 0$ representa o ano de 2007. Assim:

$$Q: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde } Q(a) = 26870 (1,009)^{a-2007}, a \in \mathbb{N}, a \geq 2007.$$

Onde $Q(a) \rightarrow$ quantidade de celulares descartados no ano a .

Questionei os alunos quanto ao tipo de função que encontramos. Alguns ainda não conseguiram reconhecê-la como função exponencial. Uma aluna sugeriu que a função fosse afim, justificando-se pela “variação” constante de 0,9%. Deste modo, podemos observar que ainda havia dúvidas quanto ao conceito de variação.

Retomamos estas questões e deste modo, concluíram que a função era exponencial. Evidenciei a diferença no processo de obtenção do modelo nas duas atividades de Modelagem - a do transístor e a dos celulares -, na primeira, após esboçar o gráfico com conjunto de dados, sugerimos que fosse exponencial e encontramos o modelo algébrico por substituição das variáveis e, na segunda, foi por recorrência.

Solicitei então que, em casa, os alunos pensassem e tentassem responder as duas questões que seguem:

- 1) *Considerando o modelo encontrado, quantos celulares serão descartados no ano de 2020?*
- 2) *Em que ano a população de Assis descartará aproximadamente 100 000 celulares? Considerando a taxa de 0,9% e as condições consideradas.*

Na semana seguinte, retomamos o modelo encontrado e exploramos a função exponencial novamente, retomando suas características e especificidades. Ao investigar o gráfico da função exponencial, questionei os alunos quanto ao seu comportamento, ou seja, o que estaria acontecendo com a quantidade de celulares descartados pela população de Assis Chateaubriand no decorrer dos anos. Quando se trabalha com Modelagem, a todo o momento os conceitos são revisitados, caracterizando a abordagem de conteúdos em espiral.

Os alunos responderam que no decorrer dos anos a quantidade de celulares descartados vai aumentando e que a cada ano que passa aumenta mais. Neste contexto, reforcei a ideia de variação. Esbocei num mesmo plano cartesiano o gráfico da função exponencial, da função afim, da função quadrática com concavidade voltada para baixo e da função logarítmica (Fotografia 12).



Fotografia 12 - Análise dos comportamentos gráficos das funções de acordo com a situação apresentada

Fonte: arquivos da autora.

Solicitei aos alunos que descrevessem o comportamento da quantidade de celulares descartados de acordo com a curva que supostamente o descreveria. Deste

modo, conseguiram associar o comportamento da função (Figura 28) com determinadas situações.

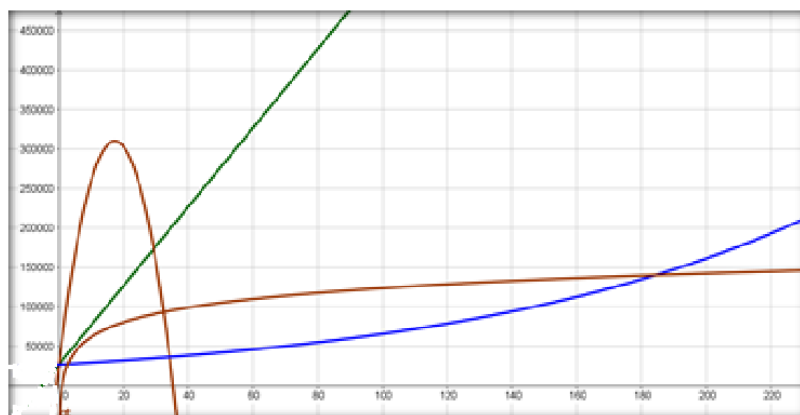


Figura 28 - Representações gráficas de supostos comportamentos do descarte de lixo eletrônico⁴⁹

Fonte: elaborado pela autora.

- ✓ Para a função afim: sugeriram que a quantidade de celulares descartada anualmente era sempre a mesma, ou seja, não houve mudança na variação.
- ✓ Para a função quadrática: a quantidade de celulares descartada estava aumentando até chegar num valor máximo, a partir daí as pessoas tomaram consciência do que estavam fazendo e passaram a trocar de celulares com menor frequência ou passaram a reciclar seus celulares, até chegar o ponto de nenhum celular ir para o lixo. Que, segundo os alunos, seria o ideal.
- ✓ Para a função logarítmica: sugeriram que a quantidade de celulares vai aumentando a cada ano. No entanto, esta variação vai diminuindo no decorrer do tempo até quase se estabilizar.
- ✓ Para a função exponencial: sugeriram que a quantidade de celulares descartados vai aumentando a cada ano, assim como sua variação.

Em seguida, pedi que alguns alunos fossem ao quadro para responder as duas questões da aula passada: 1) *Considerando o modelo encontrado, quantos celulares serão descartados no ano de 2020?* 2) *Em que ano a população de Assis*

⁴⁹ Estas curvas não se referem ao ajuste (regressão) dos pontos dados. É apenas uma representação do esboço feito pela professora no quadro a partir dos comentários dos alunos.

descartará aproximadamente 100 000 celulares? Considerando a taxa de 0,9% e as condições consideradas.

Para resolver a primeira questão os alunos substituíram o ano 2020 no modelo exponencial encontrado e resolveram sem dificuldades (Quadro 29). No entanto, para responder a segunda questão, embora os alunos tenham substituído a quantidade de celulares em $Q(a)$, não conseguiram resolver a equação exponencial sozinhos, pois desconheciam logaritmos ou outro modo de solucionar o problema.

Um aluno me procurou no dia anterior, no horário de atendimento, para que eu o explicasse como se resolvia. Como eu o havia ajudado, solicitei que ele explicasse aos colegas, e assim o fez. Neste contexto, expliquei o conceito de logaritmo, suas propriedades e aplicabilidades.

Em Modelagem, quando os alunos se deparam com um problema com o qual não conseguem lidar e esse problema se refere a um conteúdo matemático que desconhecem, é o momento de o professor apresentar o conteúdo para a turma, sem que configure uma aula tradicional, até porque os motivos da exposição são outros, o interesse dos alunos é outro, e o objetivo em se aprender o conceito reside na aplicação do mesmo para resolver o problema.

Questão 1:

$$\begin{aligned} Q(a) &= 26870 (1,009)^{a-2007} \\ Q(2020) &= 26870 (1,009)^{2020-2007} \\ Q(2020) &= 26870 (1,009)^{13} \\ Q(2020) &= 26870 \cdot 1,12353 \\ Q(2020) &= 30\,189 \text{ celulares.} \end{aligned}$$

Questão 2:

$$\begin{aligned} Q(a) &= 26870 (1,009)^{a-2007} \\ 100\,000 &= 26870 (1,009)^{a-2007} \\ 3,7216 &= (1,009)^{a-2007} \\ \log 3,7216 &= \log(1,009)^{a-2007} \\ 0,5707 &= (a - 2007)0,00389 \\ 146,66 &= a - 2007 \\ a &= 2154 \end{aligned}$$

Quadro 29 - Resolução das questões propostas

Fonte: elaborado pela autora a partir dos registros dos alunos no quadro.

Por fim, solicitei que os alunos concluíssem o site acrescentando todo o encaminhamento da atividade de Modelagem. Nas figuras 28 e 29, apresentamos duas imagens de uma das páginas de dois sites construídos.



Figura 29 - Print da página do site de uma dupla de alunos
Fonte: site construído pelos alunos.



Figura 30 - Print da página do site de outra dupla de alunos
Fonte: site construído pelos alunos.

5.3.2 Análise Específica da Situação “Lixo Eletrônico”

A atividade “Lixo Eletrônico” se configurou como uma atividade mais aberta, onde o problema foi sendo definido à medida em que os alunos foram se inteirando da situação. Deste modo, acabaram recorrendo a uma situação particular – celulares - , mas preocupados com a situação da cidade e da conscientização de todos, tentam realizar um estudo com mais impacto e justamente por isso a definição do problema levou mais tempo.

5.3.2.1 Episódio 13

Podemos observar no episódio a seguir o encaminhamento da atividade. Inicialmente, há a reflexão sobre o consumismo tecnológico, de como acabamos nos deixando levar por essa “onda” tecnológica sem dar-nos conta do lixo que estamos produzindo. Chega-se a refletir sobre a obsolescência programada. A partir desta discussão surge a curiosidade de saber quantos celulares a turma já possuiu. Deste modo, realizamos a pesquisa em sala de aula. Ao tentarem lembrar-se dos celulares que tiveram, se deram conta de que o consumismo que estavam discutindo se evidenciava neles mesmo. Neste sentido, frente aos poucos dados encontrados sobre o lixo eletrônico, decidimos focar nossa atenção, inicialmente, aos celulares descartados pelos alunos da turma.

[...]

PROF: Por que a gente está produzindo tanto lixo eletrônico?

GABRIEL: muita tecnologia.

ANA LU: vira dependente da tecnologia.

ANA: As pessoas vão comprando e vão jogando os velhos fora.

PROF.: Pessoal vocês já ouviram falar em obsu....

JM: Obsolescência programada...

PROF.: Isso. Vocês já ouviram falar nisso? Obsolescência programada?

ALGUNS ALUNOS: Não.

PROF.: Obsolescência programada. Os aparelhos eletrônicos, né celulares computadores, eles já são fabricados com essa Obsolescência programada. O que é isso? Por exemplo, o meu celular antigo, que eu comprei há três anos atrás, eu estou lá com ele, e ele está bom, está fazendo ligação, não preciso trocar ele, está bonitinho, aí vem uma mensagem, não vem? De atualização de software, do celular... vocês não recebem?

ALUNOS: Sim.

PROF.: Aí você atualiza o software. Só que esse software que você mandou atualizar, o teu celular não dá conta de rodar. Aí o celular fica travando e você não consegue mais fazer nem ligação, nem WhatsApp, nem mensagem você consegue mais mandar. O aparelho já é programado para durar no máximo três anos. Por que isso?

SAULO: *Pra fazer com que as pessoas comprem mais produtos tecnológicos.*

PROF.: *Mas será que a intenção é só nos deixar mais tecnológicos?*

ALUNOS: *consumismo...*

DJ: *eu ainda estou no primeiro (mostra um celular antigo).*

PROF.: *Isso DJ... você está contra o consumismo. Mas a coisa é tão criteriosa que a gente acaba se envolvendo sem perceber. Acaba se deixando levar pelo consumismo, não é verdade? Quantos celulares vocês já tiveram?*

ALUNOS: *10⁵⁰... 4... 2...*

PROF.: *Eu vou passar uma folha e vocês vão anotar o nome de vocês e na frente quantos celulares vocês já tiveram contando com os que vocês têm hoje e quantos vocês jogaram no lixo.*

RAISSA: *E os que estão guardados?*

PROF.: *Vocês anotem também, por exemplo 1 lixo e 1 gaveta... tá guardado.*

[...]

RAISSA: *terá algum momento que nós vamos trazer lixo para o Instituto?*

PROF.: *podemos falar com a Acamar⁵¹. Ver como está a licença deles para coletar lixo eletrônico.*

KARLA: *podemos também fazer uma ação com a comunidade também.*

PROF.: *sim, ótimo. O primeiro passo é o site que vocês estão fazendo com o professor de Informática. Ele pode ser um meio de conscientização e informação para a comunidade.*

[...]

PROF.: *Gente, contando de todos vocês deu 209 celulares. Duzentos e nove celulares na turma de 44 pessoas, dividam esses valores.*

ANA FLORA: *4,75*

PROF.: *então em média 5 celulares por pessoa.*

[...]

PROF.: *Vocês pesquisaram quais são os elementos químicos presentes nos celulares?*

KARLA: *chumbo, bromo, cloro, mercúrio, cádmio. Aí tem os minerais. Mas não consegui encontrar a quantidade.*

PROF.: *eu também não encontrei[...] Não encontrei a quantidade de cada componente no celular. Então o que podemos fazer? Podemos dar mais uma pesquisadinha e conversar sobre isso com os professores de Química e com o professor de Informática.*

Inicialmente, suscita-se uma discussão em torno do consumismo tecnológico e entra em cena uma expressão comum na área da tecnologia: *“Isso. Vocês já ouviram falar nisso? Obsolescência programada?”* Este excerto demonstra que na aula de Matemática, surgiu a oportunidade de discutir conceitos de outras áreas, suscitando uma interdisciplinaridade. Nos trechos - *“O primeiro passo é esse site que vocês estão fazendo com o professor de Informática⁵²”; “Vocês pesquisaram quais são os elementos químicos presentes nos celulares?”; Podemos dar mais uma pesquisadinha e conversar sobre isso com os professores de Química e com o*

⁵⁰ A cidade de Assis Chateaubriand fica localizada no oeste do Paraná, muito próximo da fronteira com o Paraguai. Neste sentido, muitas pessoas adquirem aparelhos eletrônicos no país vizinho com valores mais acessíveis.

⁵¹ Associação de catadores de materiais recicláveis de Assis Chateaubriand.

⁵² Ao invés de utilizarmos um nome fictício, optamos por utilizar “professor de Informática”.

professor de Informática. Porque o professor de Informática entende muito da composição dos computadores, celulares e ele acha coisa na internet que a gente não acha. Eu comentei com vocês sobre a meia-vida"; *"O que vocês forem encontrando na internet e o que vocês forem pegando de informação com os outros professores"* – também fica evidenciado o caráter interdisciplinar da atividade, a intenção de envolver professores de outras disciplinas no desenvolvimento de uma única atividade.

Das discussões empreendidas neste episódio, emergiu o conceito matemático de média. No entanto, conceitos de Química – *"chumbo, bromo, cloro, mercúrio, cádmio. Aí tem os minerais"*; *"Meia-vida de um componente químico é o tempo que leva pra ele se reduzir à metade"*. – e Informática (tecnologia) – *"Obsolescência programada"* – também emergiram. Todavia, os alunos levaram mais demandas para o professor de Informática. Esta ação pode ter ocorrido pela abertura que o professor de Informática apresentava frente às dúvidas e curiosidades que os alunos manifestavam.

Outro fato que podemos observar é a intervenção da docente de modo a provocar o debate do assunto extra matemático, inclusive do conceito de obsolescência programada – *Por que a gente está produzindo tanto lixo eletrônico?* - Esta intervenção pode ter acontecido diante de um encaminhamento vislumbrado pela docente de trabalhar com o número de celulares que os alunos já tiveram nos últimos anos, e diante de a atividade já vir sendo discutida há algum tempo, sem que dados que pudessem dar outro encaminhamento para a situação surgissem das pesquisas realizadas pelos alunos. É interessante destacar que a ideia de trabalhar com os celulares dos alunos surgiu no momento de discussão em sala, os dados coletados, as reflexões empreendidas e a curiosidade foram contribuindo para a elaboração do problema sobre os celulares.

Outro ponto a se destacar é o fato de que a inteiração, fase do processo de Modelagem, pode ter contribuído no tocante à aluna se preocupar com a possibilidade de o lixo eletrônico ser descartado de modo incorreto, tanto que apresentou a sugestão de fazer uma ação com a comunidade também – *podemos também fazer uma ação com a comunidade* – a professora, então, sugere a construção do site – *sim, ótimo. O primeiro passo é o site que vocês estão fazendo com o professor de Informática* – No entanto, possivelmente, o que a aluna propunha era algo mais próximo da comunidade, o que não aconteceu. Os alunos acabaram se envolvendo

com o site e não houve tempo hábil para a realização de uma ação mais próxima da comunidade, como panfletagem ou a coleta de resíduos eletrônicos.

Ainda neste episódio, podemos observar numa mediação da professora, outro encaminhamento vislumbrado por ela no momento do planejamento da atividade realizado com o professor de Informática e com o professor de Química – *vocês pesquisaram quais são os elementos químicos presentes nos celulares?* – No planejamento, a ideia inicial era trabalhar com a poluição que poderia ser ocasionada com o descarte incorreto do lixo eletrônico, por exemplo, os celulares, no meio ambiente. Diante disso, ela questiona os alunos sobre os elementos químicos presentes nos celulares. Esse vislumbre de diferentes encaminhamentos pela docente, que decide empreendê-los quando os dados obtidos em pesquisa pelos alunos não soam suficientes para iniciar uma discussão via Modelagem Matemática, denota o planejamento da docente frente à atividade de Modelagem. No entanto, mesmo que este encaminhamento tenha sido vislumbrado no planejamento e suscitado em aula, os alunos decidem não ir por esse caminho.

Neste sentido, o planejamento numa atividade de Modelagem é muito importante. É no planejamento que os caminhos e possibilidades são vislumbrados. E quando os alunos não vêem saída para uma situação, o professor pode intervir apontando possibilidades por meio de questionamentos. Entretanto, é preciso tomar cuidado para não intervir demais a ponto de “podar” os caminhos vislumbrados pelos alunos.

ANÁLISE – EPISÓDIO 13	
Quais conceitos matemáticos emergiram?	Média Aritmética.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?	A menção ao conceito de média neste episódio foi superficial. Ele foi discutido e utilizado com mais propriedade posteriormente.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho	Neste episódio houve apenas a intervenção da professora de Matemática. No entanto, o diálogo entre professora e alunos desencadeou diversas discussões de cunho interdisciplinar, tais como as que dizem respeito à tecnologia e aos elementos químicos.

interdisciplinar nesse episódio?	
Observações importantes sobre o episódio	
Atividades de Modelagem Matemática como esta podem desencadear preocupações e compromissos nos alunos. Como a preocupação da aluna em fazer alguma ação na comunidade com vistas a conscientização da população.	
Observações para o produto educacional	
Sem observações.	

Quadro 30 - Síntese da análise específica do Episódio 13

Fonte: elaborado pela autora.

5.3.2.2 Episódio 14

A partir dos dados coletados em sala de aula sobre a quantidade de celulares que os alunos já possuíram, realizou-se o cálculo de média e moda, deste modo, os alunos determinaram que, em média, é descartado 1 celular por aluno por ano. Com este dado, decidiu-se estender a reflexão para a população da cidade. A seguir, podemos verificar parte da investigação acerca da possível quantidade de celulares descartados no município de Assis Chateaubriand considerando sua população na faixa etária de 10 a 64 anos.

PROF.: E para Assis Chateaubriand? Quantos habitantes tem o município de Assis?

ALUNOS: 34 mil... 35 mil...

PROF.: Então vamos considerar a população de Assis com 34 mil habitantes... mas destes habitantes temos bebês, idosos, será que essas pessoas têm celular? Será que a gente consegue pesquisar a quantidade de habitantes em cada faixa etária? Pessoal, quem tem o celular aí ajuda a pesquisar: População ativa de Assis Chateaubriand.

ANA LU: achei... população economicamente ativa... 17 340.

PROF.: são pessoas que trabalham. Mas nós temos adolescentes que não trabalham, mas que possuem celulares.

(Os alunos encontraram o caderno estatístico de Assis Chateaubriand do ano de 2012. Havia uma tabela da contagem de população por faixa etária. Somaram as quantidades de pessoas de 10 até 64 anos e encontraram a quantidade de 26 870 pessoas que possivelmente teriam celular em Assis Chateaubriand. Na oportunidade, trabalhou-se os conceitos de intervalos do tipo: 10- 14).

PROF.: A população está aumentando ou diminuindo?

[...]

PROF.: Neste momento a população do Brasil é de 206.272.780.

Pesquisem agora para mim, a taxa de crescimento populacional do Brasil atual.

ALUNOS: 0,9% ao ano.

PROF.: então a cada ano que passa a população do Brasil aumenta 0,9%.

Eu li em um artigo que a taxa de crescimento populacional do Brasil vem diminuindo. Por quê?

A taxa de natalidade diminui e a taxa de mortalidade também está diminuindo. As pessoas estão tendo poucos filhos, no máximo 2.

Essa quantidade aqui ó, é de 2007. Calculem a quantidade de 2008, de 2009 e assim por diante.

[...]

PROF: Que tipo de função é essa? Quais são as características dessa função? A variação é constante?

JV: exponencial.

MARINA: Profe, não é afim? Porque a variação é constante. É sempre 0,009...

PROF.: Mas é 0,009 no primeiro ano... depois será 0,009 ao quadrado... e assim por diante... a taxa de porcentagem é sempre a mesma... mas a cada ano é da quantidade anterior... então a variação muda. Que função é essa mesmo?

SANDRO: quadrática

PROF.: quadrática? Cadê o x ao quadrado?

ALUNOS: exponencial

PROF.: Isso... agora eu vou passar uma tarefa para vocês.

A obtenção do modelo exponencial para esta situação ocorreu diferentemente da situação dos transístores. Naquela situação, os alunos lidaram inicialmente com a representação gráfica dos dados, visualizando o comportamento dos pontos que denotava um comportamento exponencial. Neste sentido, a partir do modelo geral de função exponencial, substituíram por dois pontos e encontraram o modelo para a situação. No entanto, na situação do lixo eletrônico, a investigação foi diferente. Os alunos tinham a quantidade inicial de celulares descartadas em 2007 e a taxa de crescimento populacional. Por recorrência, chegaram a um modelo exponencial.

Contudo, ao serem questionados sobre o tipo de função, alguns alunos apresentaram dúvidas. A primeira dúvida foi em relação a variação: *“Profe, não é afim? Porque a variação é constante. É sempre 0,009”*. A taxa de crescimento populacional levou a aluna a sugerir que a variação era constante, pois na recorrência, sempre calculávamos com a mesma taxa. Deste modo, sugeriu que a função fosse afim. A partir da fala da aluna, podemos observar a tentativa dela em associar um conhecimento que já tinha a respeito de função afim em que a variação é constante a esta nova situação. Ela busca identificar algo similar ao que já conhece. Ao olhar para a parte aritmética e algébrica, a aluna não conseguiu identificar “a variação”, tal como conseguiu verificar com o gráfico. Isto mostra a importância de se utilizar diferentes representações.

Já o segundo aluno sugere que a função seja quadrática - “*quadrática*”-, o que pode ser pelo fato da presença de uma potência ou por ser a única função que veio à mente do aluno. Outra possibilidade é pela característica de que a variação na função quadrática muda. Entretanto, a professora recorreu a outro argumento para diferenciar as funções – *cadê o x ao quadrado?* – não valorizando ou inquirindo a observação do aluno.

Para a investigação da situação e coleta de informações, o uso do celular dos alunos foi fundamental, pois quando necessitavam de algum dado, recorriam à pesquisa. Deste modo, assim como apontam Almeida, Silva e Vertuan (2013) a interação pode acontecer no decorrer de toda a atividade de Modelagem, sempre que se fizer necessário.

ANÁLISE – EPISÓDIO 14	
Quais conceitos matemáticos emergiram?	Função afim, função exponencial e função quadrática.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?	Alguns alunos confundiram a taxa de crescimento populacional utilizado na função exponencial como sendo uma variação constante, sugerindo que a situação fosse descrita por uma função afim. As sugestões dos alunos se deram mais em função da ideia de variação do que em relação à representação gráfica e à representação algébrica da função.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?	A professora propôs o pensar acerca da representação algébrica da situação.
Observações importantes sobre o episódio	
No momento da coleta de informações, os alunos não encontraram a taxa de crescimento populacional de Assis Chateaubriand, então optaram por utilizar a taxa de crescimento populacional do Brasil. Talvez não tenha sido uma boa escolha, levando em consideração as especificidades de cada região do país.	
Observações para o produto educacional	
Chamar a atenção dos professores para a importância de se trabalhar funções diante das características das funções e da influência dos parâmetros numéricos das funções, diferente do modo como geralmente é apresentado aos alunos, pela atribuição de valores à expressão algébrica, construção de tabela e conversão da tabela em gráfico.	

Quadro 31 - Síntese da análise do Episódio 14

Fonte: elaborado pela autora.

5.3.2.3 Episódio 15

Este episódio trata de um trecho de uma conversa com o professor de Informática. Como não pude acompanhar os momentos de aula dos alunos na disciplina de Fundamentos da Informática e de Algoritmos, busquei com o professor informações a respeito das contribuições destas disciplinas para a atividade de Modelagem.

PROF. INF.: Eles queriam entender algumas coisas específicas do material de informática, por exemplo, “é verdade que tem ouro nos computadores?”, então eu falei, é verdade, só que é uma quantidade tão pequena, que para vocês extrair algo que tenha valor, você tem reciclar milhares de

computadores, então é uma situação que você tem que ter uma empresa especializada nisso, não é sair raspando com a faca em casa que você vai resolver o problema. Então tem que ter alguma coisa planejada.

A respeito também de, não lembro se foi armazenagem que eles queriam saber, por exemplo, pra você lidar com as situações lá, se tinha um.... como é que eu possa dar um exemplo... depende a coisa que você guarda lá ela gera um gás tóxico lá e você pode passar mal, entendeu? Então eles queriam saber, por exemplo, do computador. Se você tivesse um galpão e fosse armazenar se você teria algum problema né, daí o que eu pude lembrar pra falar na época, foi que alguns monitores, que já tão em desuso, que é o chamado tubão né, eles têm aqueles tipo um pó dentro né, não sei o que é aquilo, mas sei que é bem tóxico, então as vezes algumas pessoas até jogam uma pedra num monitor daquele porque ele explode e acha bonito ver aquele pó subindo. Só que se inalar aquilo ali é altamente tóxico. E o custo hoje é inviável, né. Não vou falar que a indústria mudou porque estava preocupada que tinha o pó tóxico dentro, eles mudaram pra esses monitor fininho porque é mais barato né. Então a tecnologia avançou e se deu assim. Então do lixo eletrônico mais especificamente foi isso. Alguns perguntaram algumas coisas a respeito de tempo de... que... como e que fala... que a natureza consome o negócio? O tempo que demora pra sumir lá... se você jogar na terra, né. E daí eu acabei falando que eles direcionassem mais para a professora de Biologia isso, porque eu achei que era mais adequado que ela respondesse do que eu, porque a gente sabe que o componente eletrônico, o tempo de.... como é essa palavra, não lembro...

PROF. MAT.: meia-vida... decomposição...

PROF. INF.: decomposição... isso... o tempo de decomposição dele é indeterminado né, então é uma coisa que daria até pra ela trabalhar uma questão interdisciplinar.

PROF. MAT.: É que a gente comentou sobre os elementos químicos que têm nos componentes, né. Daí a gente falou da meia-vida do elemento químico, né, quanto tempo ele leva pra diminuir sua presença na natureza.

[...]

PROF. INF.: Houve uma motivação muito grande por parte dos alunos em tentar representar por meio do site aquilo que eles estavam registrando no caderno, então, tirar dali e colocar de uma forma mais clara, mais agradável visualmente, ou tecnologicamente falando melhor né. [...] abri como aula de laboratório no sentido de que vamos então fazer as atividades de Modelagem, aplicando no site e na medida em que vocês forem tendo dúvida, vocês vão me chamando pontualmente na carteira, então a aula não tinha um caráter assim - hoje nós estamos estudando esse conteúdo - a situação era, atender sob demanda a criatividade de cada aluno, - a eu quero que o meu tenha uma parte que acontece isso, ah eu quero que o meu tenha uma letra que pisca, o meu eu quero colocar um vídeo -, então, cada um foi gerando a sua demanda e foi construindo o seu site por criatividade [...], e é obvio que você não vai colocar um conteúdo ruim então você tem que de fato ter feito a sua atividade lá de Modelagem Matemática, com os cálculos que sejam adequados, que tenha gráfico, que tenha a realidade expressa nele né, não vai achar uma abobrinha na internet e colocar ali porque sabe que isso vai ficar visível né, então a pessoa se preocupa também com o que ela tá colocando ali, coloca o nome do autor no site, então há uma série de fatores que desencadeiam para que a coisa gere uma responsabilidade no aluno e ele faça alguma coisa que tenha sentido.

[...] só que o site por si só ele não é um fim, ele é um meio, os conteúdos que você coloca no site são o fim, então você pode até associar ele com uma vitrine se você quiser, ou um cartaz, um outdoor, [...] então se você tem uma atividade que ela já vem sendo construída, e que isso pode virar a ser um fim para o site, com certeza o aluno sabe com mais propriedade o que colocar nesse site e não uma coisa assim, só pra dizer que fez. [...] inclusive você vê o aluno satisfeito porque a satisfação é a prova do aproveitamento, você pode ver.

Neste diálogo com o professor de Informática podemos observar o caráter interdisciplinar da atividade. Além de discutir o tema na aula de Matemática, os alunos levaram a discussão para as aulas de Fundamentos de Informática e para a aula de Algoritmos e Linguagem de Programação. Mesmo não sendo um conteúdo que estava previsto na ementa das referidas disciplinas, o professor orientou os alunos compartilhando os conhecimentos que possuía em relação ao tema. E ainda, quando se deparou com um questionamento que não possuía subsídios para responder, orientou os alunos que procurassem a professora de Biologia. Essas características apontam para a segunda categoria de interdisciplinaridade (quadro 09), onde diferentes disciplinas contribuem com seus conhecimentos para a investigação de um único tema e um único problema. Em seguida, o professor enfatiza o trabalho e a dedicação dos alunos na construção do site (em linguagem HTML). O site serviu como um meio de divulgação da atividade que estavam desenvolvendo.

ANÁLISE – EPISÓDIO 15	
Quais conceitos matemáticos emergiram?	Não houve menção a conceitos matemáticos.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?	Não houve menção a conceitos matemáticos.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?	O episódio retrata as intervenções do professor de informática em suas aulas em relação ao tema lixo eletrônico. Pelo que relatou, suas intervenções foram no sentido de auxiliar os alunos em suas demandas relacionadas ao site e ao próprio tema.
Observações importantes sobre o episódio	
Sem observações.	
Observações para o produto educacional	
Sem observações.	

Quadro 32 - Síntese da análise específica do Episódio 15
Fonte: elaborado pela autora.

5.3.2.4 Episódio 16

Para este episódio selecionamos a página inicial de dois sites⁵³ desenvolvidos por duas duplas de alunos. A proposta era que o site funcionasse como um meio de conscientização sobre o lixo eletrônico, que pudesse orientar as pessoas quanto ao descarte correto, que informasse sobre a situação do lixo eletrônico no Brasil e no mundo e, ainda, que divulgasse a atividade de Modelagem realizada pelos alunos.

No texto escrito pelos alunos no primeiro site (figura 30), na primeira seção, fica evidente a parceria entre a disciplina de Matemática e Fundamentos de Informática. Em seguida, eles já iniciam com a definição de lixo eletrônico e apresentam alguns exemplos de objetos que compõem este lixo.

No início do texto da figura 31, as alunas justificam a atividade de Modelagem como sendo uma necessidade particular da professora. No momento em que observei o que escreveram, argumentei que não era apenas uma necessidade particular minha, mas que o motivo de eu estar fazendo o mestrado também era eles. Que o que me motivou a estudar foi o desejo de melhorar a minha prática como professora (Quadro 34).

Em seguida, apresentam rapidamente o modelo encontrado e sua representação gráfica obtida no GeoGebra. Como havíamos discutido em sala qual seria o comportamento do descarte do lixo de acordo com as diferentes funções, as alunas expuseram essa análise logo depois do gráfico da função encontrada, o que sugere a importância atribuída por elas à essa discussão realizada em sala.

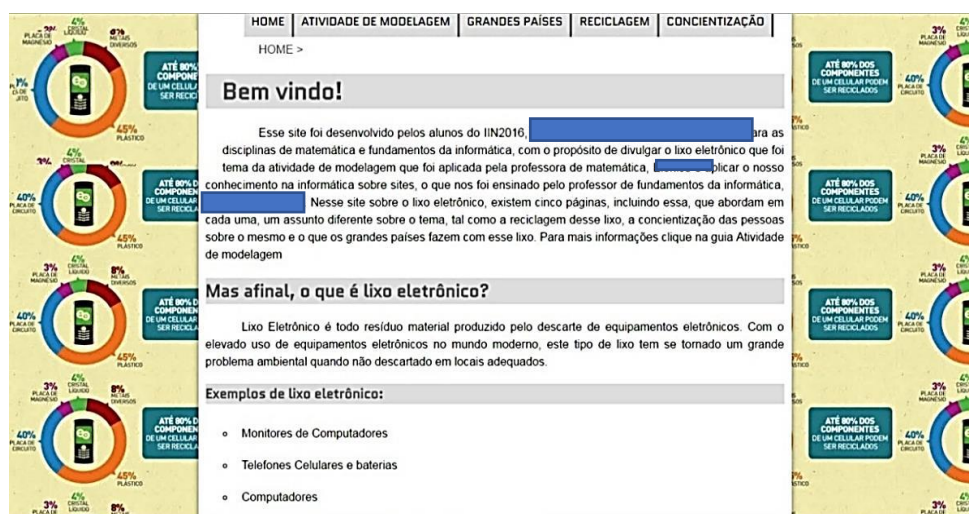


Figura 31 - Print da primeira página do site de uma dupla de alunos
Fonte: site elaborado pelos alunos.

⁵³ Um terceiro site é apresentado nos anexos.

Bem Vindo!

Esse site foi desenvolvido pelos alunos do IIN2016, NNNNNNNNNNNN e NNNNNNNNNN, para as disciplinas de matemática e fundamentos de informática, com o propósito de divulgar o lixo eletrônico que foi tema da atividade de modelagem que foi aplicada pela professora de matemática, NNNNNN e aplicar o nosso conhecimento na informática sobre sites, o que nos foi ensinado pelo professor de fundamentos da informática, NNNNNNNN. Nesse site sobre o lixo eletrônico, existem cinco páginas, incluindo essa, que abordam em cada uma, um assunto diferente sobre o tema, tal como a reciclagem desse lixo, a conscientização das pessoas sobre o mesmo, e o que os grandes países fazem com esse lixo. Para mais informações clique na guia atividade de modelagem.

Mas afinal, o que é lixo eletrônico?

Lixo Eletrônico é todo resíduo material produzido pelo descarte de equipamentos eletrônicos. Com o elevado uso de equipamentos eletrônicos no mundo moderno, este tipo de lixo tem se tornado um grande problema ambiental quando não descartado em locais adequados.

Exemplos de lixo eletrônico:

- Monitores de computadores
- Telefones Celulares e baterias
- Computadores

Quadro 33 - Transcrição da página do site da figura 30

Fonte: transcrito pela autora.

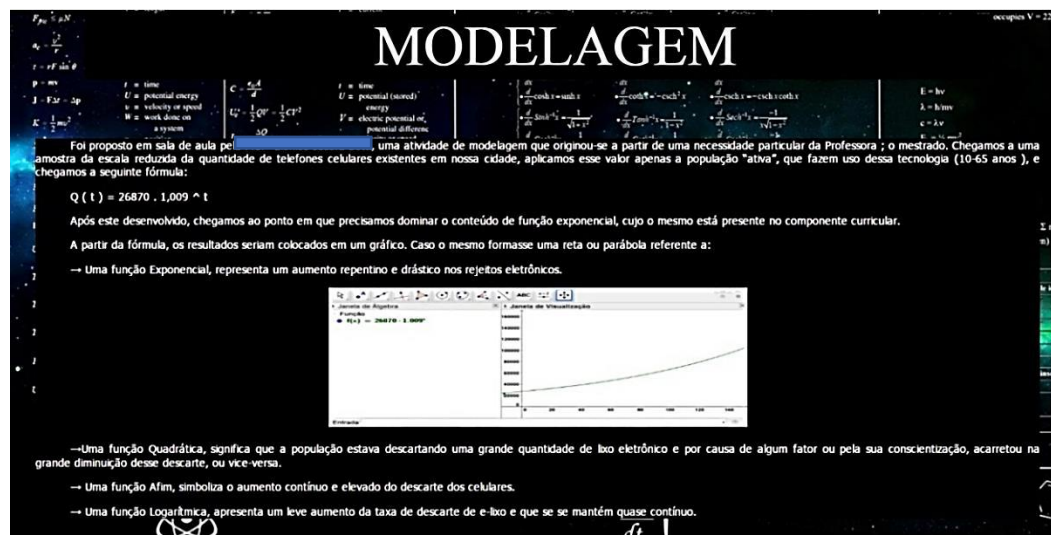


Figura 32 - Print da primeira página do site de uma dupla de alunos

Fonte: site elaborado pelos alunos.

MODELAGEM

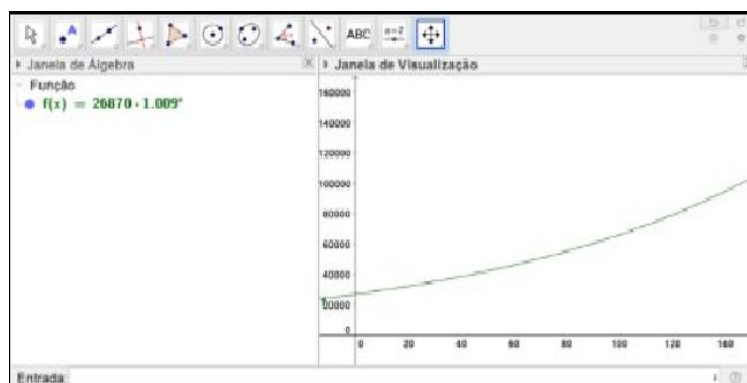
Foi proposto em sala de aula pela NNNNNNNNNNNN, uma atividade de modelagem que originou-se a partir de uma necessidade particular da professora; o mestrado. Chegamos a uma amostra da escala reduzida da quantidade de telefones celulares existentes em nossa cidade, aplicamos esse valor apenas para a população "ativa", que fazem uso dessa tecnologia (10-65 anos), e chegamos a seguinte fórmula:

$$Q(t) = 26870 \cdot 1,009^t$$

Após este desenvolvido, chegamos ao ponto em que precisamos dominar o conteúdo de função exponencial, cujo mesmo está presente no componente curricular.

A partir da fórmula, os resultados seriam colocados em um gráfico. Caso o mesmo formasse uma reta ou uma parábola referente a:

➤ Uma função exponencial representa um aumento repentino e drástico nos rejeitos eletrônicos;



➤ Uma função quadrática, significa que a população estava descartando uma grande quantidade de lixo eletrônico e por causa de algum fator ou pela sua conscientização, acarretou na grande diminuição desse descarte, ou vice-versa.

➤ Uma função afim, simboliza o aumento contínuo e elevado do descarte de celulares.

➤ Uma função logarítmica, apresenta um leve aumento na taxa de descarte de e-lixo⁵⁴ e que se mantém quase contínuo.

Quadro 34 - Transcrição da página do site da figura 31
Fonte: transcrito pela autora.

ANÁLISE – EPISÓDIO 16		
Quais conceitos matemáticos emergiram?		Função exponencial, função afim, função quadrática, função logarítmica.
Quais ações empreendem os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos nesse episódio?		O episódio retrata a exposição da discussão empreendida em sala de aula em relação à quantidade de celulares descartada pela população de Assis e a análise do comportamento gráfico de acordo com alterações da situação. Deste modo, puderam perceber diferenças nos comportamentos gráficos.
Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar nesse episódio?		A professora de Matemática auxiliou os alunos na obtenção do modelo, na análise e construção dos gráficos no GeoGebra e o professor de informática os auxiliou a construir o site ensinando, entre outras coisas, a como inserir o gráfico construído no GeoGebra. As intervenções de cada professor foram realizadas em suas respectivas aulas.
Observações importantes sobre o episódio		

⁵⁴ A intenção dos alunos era se referir ao lixo eletrônico e não ao site.

Não há observações.
Observações para o produto educacional
Não há observações.

Quadro 35 - Síntese da análise específica do Episódio 16

Fonte: elaborado pela autora.

5.3.3 Interdisciplinaridade Na Atividade

A atividade “Lixo Eletrônico” foi planejada inicialmente com o professor de Informática. Quando nos reunimos para pensar sobre o tema, surgiram inúmeras possibilidades de investigação e encaminhamentos. Deste modo, decidimos apresentar aos alunos uma problemática mais aberta - *Qual é o impacto ambiental e econômico ocasionado pelo lixo eletrônico* -, para que no decorrer da inteiração com o tema, o problema fosse sendo definido.

À medida que os alunos foram se familiarizando com o tema, sentiram necessidade de pensar num modo de conscientizar as pessoas em relação ao lixo eletrônico. Então, o professor de Informática sugeriu a construção de um site sobre o tema. Deste modo, os alunos passaram a ter o objetivo de construir um site com informações sobre lixo eletrônico. Assim, o que era desenvolvido em sala sobre o lixo eletrônico era acrescentado ao site. A construção do site e dúvidas sobre lixo eletrônico eram mediadas pelo professor de Informática.

Após alguns momentos de inteiração sobre o tema, delimitamos o problema em investigar a quantidade de celulares descartados pelos alunos da turma e posteriormente pela população de Assis Chateaubriand no decorrer dos anos, a partir de 2007, ano em que os dados encontrados foram coletados.

Como o tema se mostrava muito amplo, com a possibilidade de envolvimento de diferentes conhecimentos, decidimos convidar os professores de Física, Química, Biologia e Geografia para participar da atividade. Realizamos uma reunião para definir possibilidades de intervenções. Definimos que os professores mediarão a atividade à medida que os alunos apresentassem demandas, ou seja, que quando os alunos tivessem dúvidas, eles contribuiriam com os conhecimentos de suas disciplinas.

No entanto, mesmo orientando os alunos que buscassem informações com estes professores, este movimento foi relativamente fraco. Buscaram apenas informações com o professor da disciplina de Química – *“Entendo que a atividade foi muito significativa em minha disciplina (química). Alguns poucos estudantes perguntaram sobre a composição química do lixo eletrônico, os impactos ambientais*

gerados por este resíduo, e se havia algum procedimento químico para minimizar os impactos ou reciclar estes resíduos: tenho certeza de que estes compreenderam o assunto e conseguiram construir conceitos a partir desta atividade. Mesmo com poucos perguntando, entendo que sim, a atividade foi bastante proveitosa. Conhecemos nossos alunos, e acredito que aqueles que não perguntaram, ao menos buscaram na internet algo sobre o tema” (professor de Química).

Neste sentido, podemos classificar esta atividade com a categoria 2 (SETTI; VERTUAN, 2016a), em que diferentes disciplinas contribuíram para a resolução de um único problema: a questão do lixo eletrônico.

6 O TRABALHO INTERDISCIPLINAR EM MODELAGEM MATEMÁTICA NO QUE DIZ RESPEITO À RESSIGNIFICAÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS E À APRENDIZAGEM DE NOVOS CONCEITOS

Nosso objetivo de pesquisa consistiu em investigar a existência de contribuições de um trabalho interdisciplinar em Modelagem Matemática no que diz respeito à ressignificação de conceitos matemáticos e à aprendizagem de novos conceitos em uma turma do Curso Técnico de Informática Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal do Paraná, analisando as ações dos alunos ao lidarem com os conceitos que emergirem na resolução e inferindo acerca das influências das intervenções dos professores ao mediar essas ações no decorrer do trabalho interdisciplinar.

Para atingir nosso objetivo de pesquisa nos apoiamos nas seguintes questões auxiliares de investigação:

- Quais conceitos matemáticos emergiram no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática no contexto de um trabalho interdisciplinar específico realizado por professores que atuam no primeiro ano do Curso Técnico de Informática Integrado ao Ensino Médio?
- Quais ações empreenderam os alunos ao lidar com esses conceitos matemáticos?
- Quais as intervenções dos professores, se houveram, ao mediar as ações dos alunos no decorrer do trabalho interdisciplinar?

Estas questões foram discutidas em todos os 16 episódios selecionados para análise. A seguir, passaremos a discuti-las globalmente tendo como direcionamento o que foi apontado nos episódios.

6.1 SOBRE OS CONCEITOS MATEMÁTICOS QUE EMERGIRAM NO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

No desenvolvimento das três atividades de Modelagem Matemática – Qual é o público?; De que tamanho vai ficar?; e Lixo Eletrônico – os conceitos matemáticos que figuraram foram: operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão); conceito de área; área de uma região retangular; área de uma região circular;

estimativa; volume; medidas; representação algébrica; ideia de função; escala; média aritmética; elementos da circunferência e círculo; regra de três; Teorema de Tales; função afim; função quadrática; função exponencial; potenciação; fração e decimal; notação científica; leitura de números acima da classe dos milhões; Estatística (coleta, organização e análise dos dados); Medidas de tendência central (média, moda e mediana); Logaritmo e função logarítmica.

Destes conceitos, alguns faziam parte da ementa do primeiro ano do curso técnico de Informática integrado ao Ensino Médio, como: função afim, quadrática e exponencial, logaritmo, e outros eram conceitos que os alunos podem ter ressignificado a partir das atividades de Modelagem Matemática como: Notação científica, média, conceitos iniciais de função e função afim e quadrática que haviam estudado no 9º ano, área, entre outros. Os alunos também tiveram a oportunidade de lidar com conceitos previstos para os outros anos do curso, como Estatística.

E ainda, houve conceitos que os alunos sugeriram como caminho para resolução, mas ao perceberem que o conceito não daria conta da situação, o abandonaram, é o caso, por exemplo, de Teorema de Tales e de Volume.

Em atividades de Modelagem, os conceitos vão emergindo à medida em que se tenta matematizar a situação e resolver o problema. Alguns conceitos já podem ser vislumbrados no momento do planejamento da atividade. No entanto, no desenvolvimento da atividade, outros conceitos podem emergir. Por exemplo: quando a atividade do lixo eletrônico foi planejada, uma das hipóteses consideradas pelos professores era de que os alunos iriam optar pelo caminho da meia-vida dos componentes químicos presentes no lixo eletrônico, trabalhando assim apenas com o conteúdo de função exponencial. No entanto, no desenvolvimento da atividade, emergiu os conceitos de Estatística (média, moda e mediana), além da função exponencial. Na atividade dos transístores, no planejamento, vislumbrou-se também o estudo da função exponencial. No entanto, também emergiram os conceitos de Notação Científica, Frações, Potenciação, Função Afim e Quadrática.

Outro aspecto importante a se considerar é que a discussão sobre o conteúdo e sua sistematização se dá de modo diferenciado das aulas que os alunos geralmente vivenciam. Por exemplo, quando discutimos sobre os três tipos de funções – Afim, Quadrática e Exponencial – não foi como costumeiramente é realizado, construindo tabela, substituindo valores na variável independente e construindo o gráfico a partir de pontos plotados no plano cartesiano. Na atividade dos transístores, a abordagem

do conteúdo de funções se deu a partir da análise da variação, do seu comportamento gráfico e da relação da função com a situação. E ainda, a abordagem partiu da necessidade do aluno, em entender um conceito, para desenvolver a atividade e resolver um problema. Nestes contextos é que a ressignificação ou a aprendizagem de um novo conteúdo pode acontecer.

Neste sentido “a Matemática em atividades de Modelagem assume para os alunos sentido e significado⁵⁵ que provavelmente diferem daqueles das aulas convencionais. [...] os alunos estabelecem algumas relações e elas podem ajudá-los a atribuir sentidos” (ALMEIDA; BRITO, 2005, p. 495).

6.2 SOBRE AS AÇÕES QUE EMPREENDERAM OS ALUNOS AO LIDAREM COM OS CONCEITOS

No que diz respeito à segunda questão - *Quais ações os alunos empreenderam ao lidarem com os conceitos matemáticos que emergiram nas situações?* – consideramos que as ações que os alunos empreenderam podem ser classificadas em quatro categorias:

- 1) Os alunos tentam elencar possibilidades de ação, recorrendo a conhecimentos (conceitos) que já possuíam;
- 2) A partir das discussões em grupo, os alunos legitimam ou não o conceito que utilizarão no encaminhamento de resolução;
- 3) Os alunos recorrem à tecnologia digital (internet, Google Maps, planilhas eletrônicas, GeoGebra) quando é necessário;
- 4) Quando os conceitos que conhecem não dão conta de responder ao problema, os alunos recorrem aos professores.

No que diz respeito à primeira categoria, podemos citar como exemplo, quando os alunos, frente à situação de pensar em como estimar a quantidade de pessoas em um determinado local, começam a sugerir conceitos conhecidos e que aparentemente se adaptam à situação, como: área, volume, lógica. Outra situação

⁵⁵ Os autores se apoiam nas noções de sentido e significado dadas por Leontiev (1978). “O significado refere-se ao sistema de relações objetivas que se forma no processo de desenvolvimento de uma expressão. Ele constitui um núcleo relativamente estável de compreensão que é compartilhado por todas as pessoas. O sentido, refere-se ao significado da palavra para cada indivíduo, e incorpora relações que dizem respeito ao contexto de uso da palavra e a vivência afetivas do indivíduo. Assim o sentido é produzido por relações (ALMEIDA; BRITO, 2005, p. 486)”.

que podemos observar é quando os alunos estão lidando com os dados da segunda atividade, sobre os transístores, tentam pensar numa relação com a função afim e até com a função quadrática. No entanto, consideramos que, em sua maioria, os conceitos que eles elencam têm, por mais distante que seja, alguma relação com o conceito que eles vêm a utilizar depois. É o caso, por exemplo, de quando os alunos pensam em função afim sem que o conceito seja pertinente pra situação, talvez por conta da ideia de relação entre duas grandezas, ideia essa que é utilizada no desenvolvimento da atividade. E ainda, na primeira situação, a ideia de área relacionada à ocupação de uma superfície.

Na segunda categoria, o trabalho em grupo possibilita uma cooperação entre seus membros, desde a sugestão e legitimação de caminhos até a ressignificação de conceitos entre os alunos que compõem o grupo. Deste modo, como “as atividades de Modelagem Matemática são essencialmente cooperativas, [...] tem nos trabalhos em grupo seu aporte” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 25). Podemos observar este movimento no diálogo entre os alunos no momento que estão elencando possíveis encaminhamentos (conceitos) para a resolução da situação. À medida que os conceitos são elencados, os próprios alunos o legitimam ou não. Por exemplo, quando JV sugere aplicar o Teorema de Tales na situação de estimativa de público, os membros do grupo não legitimam o uso do conteúdo para a resolução do problema, considerando inadequado para a situação. Deste modo, dos conceitos elencados, nem todos são legitimados, portanto nem mesmo têm a possibilidade de serem discutidos e, conseqüentemente, ressignificados.

Na terceira categoria, observamos a importância do papel da tecnologia digital no ambiente de aprendizagem. Quando os alunos se deparam com a insuficiência de informações, realizam pesquisas em seus smartphones e notebooks. Utilizam, ainda, o Google Maps para investigar o local envolvido na primeira situação, por exemplo, e ainda recorrem ao GeoGebra e à planilha eletrônica para plotar gráficos, das situações dos transístores e do lixo eletrônico, por exemplo. Caso os alunos da turma não possuam estes aparelhos tecnológicos, uma alternativa seria o uso do laboratório de informática existente na maioria das escolas. “O aspecto interativo das novas tecnologias permite criar ambientes em que os alunos possam aprender fazendo, ao mesmo tempo em que recebem *feedback* e podem aprimorar continuamente seus conhecimentos construindo novos conhecimentos” (SILVA; BORSSOI; ALMEIDA, 2015, p. 165).

Por fim, na quarta categoria, referimo-nos aos momentos em que os alunos percebem que os conceitos que conhecem não dão conta de responder ao problema e, por isso, recorrem à professora. Observamos que durante o desenvolvimento da atividade, principalmente da primeira, os alunos recorrem muito aos professores para receber aprovação do que estão realizando. Por exemplo - *professora, está certo? É assim que se faz? Olha o que eu fiz*. Esta necessidade pode ser explicada pelo fato de que durante os seus anos de escolaridade, os alunos deveriam resolver os exercícios e chegar a uma resposta correta que só o professor sabia qual era.

No entanto, percebe-se que no decorrer das atividades, esta prática vai diminuindo e os alunos recorrem à professora quando os conhecimentos que possuem não dão conta de resolver o problema. Deste modo, ele deixa de ser apenas um receptor do conhecimento e passa a ser um colaborador, fazendo parte do processo. E à medida que participa de atividades de Modelagem, esse papel vai se redefinindo contínua e dinamicamente. Ou seja, de acordo com os momentos de familiarização de Almeida e Dias (2004), quanto mais os alunos fazem Modelagem mais hábeis ficam em desenvolver esse tipo de atividade.

6.3 SOBRE AS INTERVENÇÕES DOS PROFESSORES, SE HOUVERAM, AO MEDIAR AS AÇÕES DOS ALUNOS NO DECORRER DO TRABALHO INTERDISCIPLINAR

Na questão relacionada às intervenções dos professores, consideramos as intervenções da professora de Matemática e do professor de Informática que configuraram nos episódios.

De modo geral, as intervenções dos dois professores foram no sentido de orientar, questionar, incentivar e auxiliar os alunos. “Talvez, no que se refere ao papel do professor em aulas mediadas por atividades de Modelagem Matemática, a questão de ordem devesse ser: professor é orientador!” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 24).

Frente às demandas apresentadas pelos alunos, os professores buscam contribuir com os conhecimentos de suas disciplinas. A professora de Matemática também sugere alguns caminhos quando percebe que os conhecimentos que os alunos possuem já não são suficientes, por exemplo, quando apresenta a função exponencial.

No entanto, figuram-se também intervenções que, de certo modo, “podam” os alunos. Por exemplo, no episódio em que o aluno sugeriu à professora o cálculo de volume para estimar a quantidade de pessoas em um determinado local, devido ao conteúdo soar estranho à professora, pois não o havia vislumbrado no planejamento, ela simplesmente o ignorou, não dando oportunidade para o aluno de tentar justificar sua escolha. Santana e Barbosa (2012) caracterizam ações como esta em *discurso silenciador*, pois invalidam os encaminhamentos que os alunos propõem.

Observamos, no desenvolvimento deste trabalho, que por vezes a influência dos professores se mostrava positiva e outras vezes negativa. Positiva, como, por exemplo, quando o professor de Informática intervinha para esclarecer dúvidas dos alunos acerca dos aspectos específicos de informática ou quando, a professora de Matemática questionava-os sobre as razões em utilizar determinada estratégia. No entanto, quando a professora se mostrou indiferente ao que os alunos sugeriram, em algumas situações, demonstra uma atitude negativa, deixando de “dar voz” aos alunos.

Neste sentido, há que se tomar cuidado ao mediar o desenvolvimento da atividade de Modelagem. Pois,

O professor assume um papel diferenciado em um ambiente de Modelagem Matemática. Nesse contexto, o professor deve incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não as suas conjecturas. Durante a fase de discussão cabe ao professor estimular a comunicação entre os alunos. Ao organizar a fase de discussão coletiva o professor deve conhecer bem os trabalhos de todos os grupos de alunos de modo a valorizar tanto as descobertas mais interessantes como as mais modestas (ALMEIDA; DIAS, 2004, p. 6).

Quando o professor não dá atenção ao que o aluno sugere, ou impõe um encaminhamento vislumbrado no planejamento, pode descaracterizar o ambiente de Modelagem. Entretanto, frente a possível inércia dos alunos, pode intervir fazendo questionamentos, de modo a incentivar os alunos a pensar numa estratégia. Deste modo, quando os alunos apresentam demandas ao professor, ou seja, dúvidas sobre algum conteúdo, é importante, dialogando com os alunos, realizar o resgate destes conceitos e até a apresentação de novos. Contudo, esta intervenção terá características diferenciadas, pois parte do interesse do aluno e com vistas a resolver um problema, e não a cumprir uma ementa.

Neste sentido, a partir das considerações apresentadas, observa-se que, quanto mais os professores desenvolvem Modelagem em suas aulas, mais experiências adquirem. Deste modo, passam a intervir com mais prudência e de modo a provocar a participação dos alunos.

6.4 SOBRE A INTERDISCIPLINARIDADE QUE SE VERIFICOU NAS ATIVIDADES

A partir da revisão de literatura realizada, concluímos que atividades de Modelagem Matemática podem ser consideradas interdisciplinares, pois, além de partirem de um contexto extra matemático, têm a possibilidade de envolver diferentes disciplinas e seus respectivos professores numa atividade em comum. No entanto, consideramos também que existem diferentes características quanto à interdisciplinaridade no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, desde a relação da atividade com outra área que não seja matemática até o engajamento de diferentes professores para o desenvolvimento da atividade. Deste modo, consideramos que a interdisciplinaridade em Modelagem pode acontecer de acordo com as categorias apresentadas no quadro 36.

CATEGORIA	CARACTERÍSTICAS
1	Interdisciplinaridade entendida como a contextualização de conceitos da Matemática que o professor pretende ensinar ou aplicar – o foco está na matemática.
2	Interdisciplinaridade entendida como o movimento entre diferentes disciplinas e seus respectivos docentes que buscam, a partir de seus referenciais, mediar a resolução de um problema de interesse comum – o foco está na resolução de um problema via diferentes olhares.
4	Interdisciplinaridade sendo suscitada em decorrência da necessidade advinda do desenvolvimento de uma atividade de Matemática.
5	Interdisciplinaridade sendo desenvolvida em uma disciplina que não seja Matemática, que utiliza a Matemática como ferramenta de resolução da situação-problema.

Quadro 36 - Categorias de Interdisciplinaridade em Modelagem Matemática
Fonte: elaborado pelo autor, adaptado de (SETTI; VERTUAN, 2016b).

Mesmo considerando que as categorias são efetivas e enriquecedoras, o que vislumbramos é o trabalho interdisciplinar em Modelagem com características da categoria 2 - Interdisciplinaridade entendida como o movimento entre diferentes disciplinas e seus respectivos docentes que buscam, a partir de seus referenciais, mediar a resolução de um problema de interesse comum, de modo que o foco está na

resolução de um problema via diferentes olhares – pois acreditamos que em uma atividade de Modelagem, todos os conhecimentos envolvidos têm igual importância e precisam ser tratados com propriedade.

No entanto, um trabalho neste aspecto não é simples. É necessário que haja a disponibilidade e o engajamento de diferentes professores da turma, para que de fato esta categoria de interdisciplinaridade aconteça.

Neste sentido, buscamos desenvolver as três atividades de Modelagem sob esta perspectiva de interdisciplinaridade.

A participação do professor de Informática aconteceu durante todo o desenvolvimento das três atividades, com menor enfoque na primeira, nos momentos de planejamento e auxiliando nas demandas que os alunos apresentavam. Houve também a participação das professoras de Português e da professora de Arte nas atividades sobre o livro de Malba Tahan que antecederam a atividade de Modelagem e por fim, na atividade do lixo eletrônico, os alunos buscaram junto ao professor de Química, alguns conhecimentos sobre os elementos químicos presentes no lixo eletrônico. Tentamos envolver os professores de Geografia, Física e Biologia, mas por diversos motivos, não houve participação destes.

Concluindo, inferimos que quando se almeja realizar um trabalho interdisciplinar, um ensino integrado, a Modelagem Matemática se constitui uma alternativa efetiva no que diz respeito à Matemática. É um trabalho que pode ser realizado em colaboração com outros professores, os quais podem, no ambiente escolar, constituir grupos de estudos e planejamento, com vistas a desenvolver propostas iniciais de projetos integradores e investigativos que possam interessar aos alunos.

Assim, o modo como vislumbramos o trabalho interdisciplinar (categoria 2), oferece contribuições no trabalho com Modelagem, que os outros modos de se ver a interdisciplinaridade não permitiriam. Por exemplo: o movimento de diferentes professores em prol de um objetivo comum que é resolver um determinado problema; e ainda, os diferentes conhecimentos partilhados neste movimento, que um professor sozinho, possivelmente não teria condições de partilhar.

6.5 CONSIDERAÇÕES IMPORTANTES

Na realização das análises de cada episódio, além de apresentar reflexões às questões auxiliares, outras observações se fizeram pertinentes. Como o fato de que, por vezes, a falta de atenção da professora ao que dizem os alunos, implica na perda de oportunidades de intervenções e encaminhamentos que enriqueceriam a atividade. Isso pode ocorrer com mais frequência quando a turma é numerosa, como foi o caso da turma onde esta pesquisa foi desenvolvida: 46 alunos que formavam 9 grupos.

Outra consideração a se fazer é que uma dúvida dos alunos pode gerar um encaminhamento diferente para a atividade. Por isso é que se desenvolvermos a mesma atividade com diferentes grupos de alunos, poderão surgir diferentes encaminhamentos.

É natural, que no início da atividade, os alunos se mostrem um pouco perdidos, sem saber o que fazer. Mas o que percebemos é que aos poucos vão se familiarizando com a Modelagem Matemática e desenvolvendo confiança em si mesmos.

Além disso, em uma atividade de Modelagem, frente a uma dúvida dos alunos, ou frente à necessidade de introduzir um novo conteúdo, é natural que o professor utilize o quadro e realize uma explicação para toda a turma. A diferença desta ação numa aula de Modelagem, para a mesma ação numa aula convencional, é que esta “exposição” se dá de forma dialogada com a turma e surge de uma necessidade dos alunos e não meramente para cumprir um protocolo ou uma ementa.

Outra observação diz respeito à atividade dos alunos na situação “Qual é o público?”. Quando os alunos estavam pensando em como estimar a quantidade de pessoas em um determinado local, todos os grupos pensaram em um local retangular, quando na verdade o local em questão tinha o formato circular. Poderíamos nos questionar: por que os alunos pensam em uma região retangular quando se fala em área? Talvez, por que é a região que eles associam com o metro quadrado? Quando passam a ter consciência de que a região era circular, um aluno demonstra uma preocupação: - *Mas eu não sei calcular metro redondo?* – Isso pode denotar a relação que eles fazem do metro quadrado com regiões retangulares.

Percebe-se que, no desenvolvimento das atividades, os alunos elencam conceitos os quais possuem familiaridade e o grupo avalia os conceitos que são legítimos à situação. A partir desta seleção, buscam elementos, conceitos e modos

de resolver, entre os membros do grupo e solicitam a aprovação da professora. Espera-se que com a frequência de atividades de Modelagem os alunos vão adquirindo mais autonomia, deixando de solicitar o professor a todo o momento.

Estes conceitos que os alunos elencam, são conhecimentos que adquiriram no decorrer de suas vidas escolares. Ao se depararem com uma situação que precisam solucionar, buscam estes conceitos e tentam adaptá-los ao que se está sendo investigado. No entanto, quando estes conhecimentos não são suficientes, precisam adquirir novos por intermédio da professora ou pesquisas. Estas pesquisas podem partir dos próprios alunos ou podem ser motivadas pelo professor. Entendemos que o professor deve investir em práticas de pesquisas com os alunos, mesmo que de início nem todos a realizam, pois pode contribuir para o desenvolvimento da autonomia no estudante. Neste sentido, como dito anteriormente, este modo de iniciar um conteúdo é importante porque o aluno que requer a explicação e não o professor que a impõe.

Outra questão a se considerar é que mesmo tendo estudado certos conceitos considerados básicos em anos anteriores, os alunos não os reconhecem em contextos diferentes dos trabalhados nos exercícios dos livros didáticos. Podemos citar como exemplo a situação em que os alunos se depararam com a notação científica no visor da calculadora, ou até mesmo, a situação de calcular a área numa região circular. Esta situação demonstra a importância de lidar com situações em que os conceitos não estão formalmente estipulados.

E ainda, a partir de alguns episódios, podemos verificar a relevância da participação de outros professores no desenvolvimento de atividades de Modelagem. Consideramos esta contribuição importante tanto para a disciplina de Matemática, quanto para as outras disciplinas envolvidas, dentre outros motivos, porque há a possibilidade de o aluno se motivar em discutir e aprender determinado conteúdo, devido à dinâmica a qual ele está inserido, que é a obtenção da resolução do problema.

Por fim, retomando nossa questão de pesquisa - *quais são as possíveis contribuições de um trabalho interdisciplinar em Modelagem Matemática no que diz respeito à ressignificação de conceitos matemáticos e à aprendizagem de novos conceitos?* – a partir de todo o estudo realizado, entendemos que um trabalho interdisciplinar em Modelagem Matemática apresenta potencialidades significativas em relação à ressignificação de conceitos matemáticos e à aprendizagem de novos

conceitos visto que, no desenvolvimento das atividades de Modelagem, conceitos emergiram à medida que foram sendo necessários à resolução do problema. Deste modo, há uma motivação nos alunos em compreender determinado conceito, não apenas saber por saber, mas saber para realizar algo, e “este algo” sendo próximo de sua realidade, de sua formação profissional, tendo consciência de que os conceitos que se aprende em Matemática têm relação com contextos extra matemáticos, muitas vezes de seu interesse.

Neste sentido, podemos concluir que no desenvolvimento de atividades de Modelagem, os alunos podem aprender novos conceitos matemáticos ou reaprender conceitos um dia já estudados, já que a aprendizagem é sempre provisória e dinâmica, a partir da busca por uma solução para o problema.

Além disso, podemos constatar que, em atividades interdisciplinares em Modelagem Matemática, o aluno tem a oportunidade de desenvolver diferentes aprendizagens como:

- Aprendizagens conceituais, tanto de Matemática como de outras disciplinas ou áreas do conhecimento (VERTUAN; SILVA; BORSSOI, 2017). Como quando compreenderam a funcionalidade do transistor e o porquê da necessidade de diminuir o seu tamanho.
- Aprendizagens procedimentais, como estratégias de resolução e algoritmos (VERTUAN; SILVA; BORSSOI, 2017). Como quando precisaram calcular a área da região circular e realizar cálculos com logaritmos.
- Aprendizagens de comunicação, ao lidar com conflitos, trabalhar em grupo e justificar suas ideias (VERTUAN; SILVA; BORSSOI, 2017). Como quando apresentavam conceitos ao grupo, e em consenso, o legitimavam ou não.
- Aprendizagens tecnológicas, ao lidarem com softwares de Modelagem, de simulação ou planilhas eletrônicas. Como quando recorreram à pesquisa online, ou ao Google Maps, ou ao GeoGebra.
- Aprendizagens metacognitivas, quando o aluno sabe onde possui dificuldades, no que precisa se dedicar mais, ou desenvolve experiência em resoluções de atividades de Modelagem. Como quando têm consciência de que os conhecimentos sobre funções são insuficientes e

buscam novos conhecimentos através de pesquisas ou por intermédio da professora.

Neste sentido, acreditamos que ao desenvolver atividades interdisciplinares em Modelagem Matemática com alunos do primeiro ano de um curso técnico de Informática, não há a necessidade de se realizar os famosos nivelamentos tradicionais, visto que, à medida que se desenvolve as atividades, a retomada a esses conceitos pode se dar de modo significativo, relacionando-os com novos conceitos e ainda, contextualizando-os, pois o foco principal é a resolução do problema.

6.6 PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional, fruto dessa pesquisa de Mestrado Profissional, consiste em um Site/blog de Modelagem Matemática (Figura 24) que tem a pretensão de servir de apoio ao professor que se interessar em trabalhar com Modelagem.

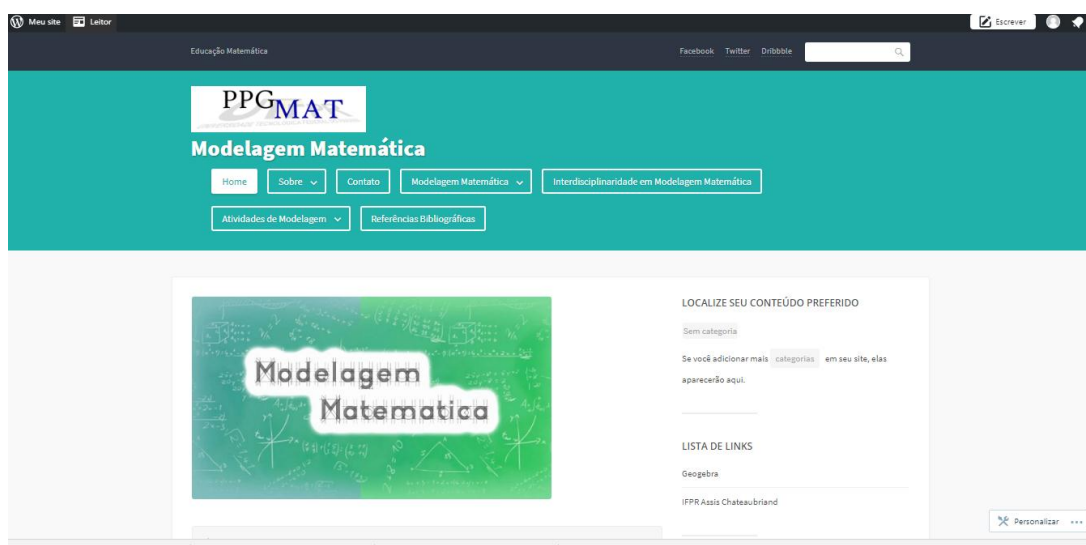


Figura 33 - Página inicial do Site/blog de Modelagem (Produto Educacional)
Fonte: modelagemmatematica.wordpress.com. Acesso em: 23/08/2017.

A página inicial do Site/Blog consiste em um espaço para o blog com a visualização de posts, bem como com os menus de acesso aos conteúdos de Modelagem Matemática, de Interdisciplinaridade, de Sobre, de Contato e de acesso às atividades (todos eles na parte superior do site).

No menu Modelagem Matemática percorremos, de modo sucinto, sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, com base na pesquisa bibliográfica

realizada para a dissertação. Do mesmo modo, procederemos no menu Interdisciplinaridade em Modelagem Matemática. Quando essa dissertação estiver publicada é intenção fazer um link para a dissertação, de modo que os interessados possam se aprofundar nos textos aqui contidos.

As atividades desenvolvidas, juntamente com os relatos do desenvolvimento, dicas de encaminhamento, e demais elementos serão disponibilizados no menu Atividades de Modelagem.

Em cada atividade de Modelagem, disponibilizaremos:

- a versão da atividade em formato PDF e DOC (a versão .doc visa que o professor possa alterar a situação diante de sua realidade e contexto);
- uma orientação de encaminhamento da atividade de Modelagem;
- links relacionados ao tema (materiais, sites, vídeos, etc.);
- possíveis encaminhamentos: encaminhamentos dos alunos em sala e sugestão de outros encaminhamentos;
- diário (espaço onde a professora compartilhará seus momentos de angústia frente a um novo modo de ensinar Matemática, suas superações e as conquistas dos alunos, com a intenção de encorajar professores e mostrar que mesmo a professora/pesquisadora passou por momentos de insegurança e dúvidas);
- outros temas relacionados para investigar.

A partir das análises dos episódios selecionados, levantamos algumas observações importantes para o produto educacional e para os professores que o acessar. Algumas destas considerações estarão disponíveis no link “Orientações de Encaminhamento da Atividade de Modelagem”.

- Apontar outras possibilidades de encaminhamentos das atividades e enfatizar que outras possibilidades surgirão ao desenvolver a atividade em outra turma.
- Criar um link para fornecer dicas de como intervir no desenvolvimento da atividade sem descaracterizá-la, além de um espaço para compartilhar dificuldades, angústias e superações.
- Como o uso da tecnologia foi de grande relevância no desenvolvimento das atividades, seria importante criar um tópico no site que aborde o uso da

tecnologia digital em sala de aula, ou disponibilizar links para trabalhos que tratem do tema. Assim como links de acesso para download do GeoGebra e de outros softwares que podem ser utilizados no desenvolvimento de atividades de Modelagem.

- Nas dicas, sugerir ao professor, que quando for trabalhar a atividade “Qual é o público?”, que motive os alunos a investigar um local de shows de sua cidade, ou de cidades vizinhas, onde os alunos costumam ir.
- Disponibilizar no site um espaço de socialização para os professores.
- No item dicas, deixar claro a importância de sistematizar os conceitos considerados novos para a turma que emergirem numa atividade de Modelagem. Pois é com a sistematização que o aluno terá condições de utilizar os conhecimentos desenvolvidos na atividade em outras situações. No entanto, deixar claro que em Modelagem, não é o professor falando “para” os alunos, mas sim o professor falando “com” os alunos.
- Enfatizar a importância da participação de outros professores no desenvolvimento de atividade de Modelagem. Pois quando o professor de outra disciplina estiver engajado na investigação, o conteúdo pode ser melhor abordado, pois todos os conhecimentos são igualmente importantes, caracterizando assim a interdisciplinaridade vislumbrada por nós.
- Ao se trabalhar função a partir de uma demanda de uma atividade de Modelagem, trabalha-se diante das características das funções e da influência dos parâmetros numéricos das funções, diferente do modo como geralmente é apresentado aos alunos, pela atribuição de valores à expressão algébrica, construção de tabela e conversão da tabela em gráfico.

Tendo em vista estas considerações e toda a pesquisa desenvolvida no decorrer do trabalho, construímos o Site/Blog de Modelagem Matemática na Educação Matemática, que pode ser acessado pelo endereço <https://modelagemmatematica.wordpress.com>.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; DIAS, Michele Regiane. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

_____; BRITO, Dirceu dos Santos. Atividades de Modelagem Matemática: Que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência e Educação**, Bauru, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

_____; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Discussões sobre “como fazer” Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. ARAÚJO, Jussara de Loiola. BISOGNIN, Eleni. (Orgs.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**. 1.ed. Londrina: Edue, 2011. p. 19 – 43.

_____; SILVA, Karina Pessoa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1 ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001a, Caxambu. **Anais...** Rio de Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

_____. Modelagem Matemática na Sala de Aula. **Perspectiva**, Erechim, v. 27, n. 98, p. 65-74, jun. 2003.

_____. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, Lisboa, n.4, p. 73-80, 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **R.B.E.C.T.**, Curitiba, v. 5, n. 2, mai./ago. 2012.

BIEMBENGUT, Maria Salett. Modelagem nas Ciências da Natureza e na Matemática do Ensino Médio. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2011. Belém. **Anais...** Belém: SBEM, 2011.

_____. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BLUM, Werner. NISS, Mogens. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação**. 1. ed. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho. A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27, 2004. Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2004. p. 1 – 18.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara da Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio: Ensino Médio** – MEC/SEMTEC. BRASÍLIA: MEC. RESOLUÇÃO Nº 6, DE 20 DE SETEMBRO DE 2012.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 2000.

_____. Lei nº 11.892, de 29 de dezembro de 2008. **Institui a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, cria os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia**. Brasília, DF, 29 dez. 2008.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2004. Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2004.

CALDEIRA, Ademir Donizeti. Modelagem Matemática: um outro olhar. **ALEXANDRIA: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v.2, n.2, p.33-54, jul. 2009.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Integração e Interdisciplinaridade no Ensino Brasileiro: Efetividade ou Ideologia**. 6.ed. São Paulo: Edições Loyola, 2011.

_____. **Interdisciplinaridade: história, teoria e pesquisa**. 12.ed. Campinas: papirus, 2005.

GARRUTTI, Érica Aparecida; SANTOS, Simone Regina dos. A interdisciplinaridade como forma de superar a fragmentação do conhecimento. **Revista de Iniciação Científica da FFC**, Marília, v. 4, n. 2, 2004.

GODOY, Arilda Schmidt. Introdução à Pesquisa Qualitativa e suas Possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v.35, n. 2, p. 57-63, 1995.

GONÇALVES, Harryson Júnio Lessa. Educação Matemática na Educação Profissional de Nível Médio: análise sobre possibilidades de abordagens interdisciplinares. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 48, p. 230-254, 2014.

JAPIASSU, Hilton. **Interdisciplinaridade e patologia do saber**. 1 ed. Rio de Janeiro: Imago, 1976.

KLÜBER, Tiago Emanuel. BURAK, Dionísio. Concepções de Modelagem Matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34, 2008.

LOPES, Antonio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**, Rio Claro, n. 31, p. 1 a 22, 2008.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E.p.u., 2013.

NEGRELLI, Leônia Gabardo. **Uma Reconstrução Epistemológica do Processo de Modelagem Matemática para a Educação (em) Matemática**. 2008. 103 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Setor Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

OLIVEIRA, Andreia Maria Pereira de; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática e Situações de Tensão na Prática Pedagógica dos Professores. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 265-296, abr. 2011.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes curriculares da educação básica: Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.

_____. Lei n. 18.118/2014 de 24 de junho de 2014. **Dispõe sobre a proibição do uso de aparelhos e equipamentos eletrônicos em sala de aula**. Curitiba, PR, 24 jun. 2004.

PIRES, Marília Freitas de Campos. Multidisciplinaridade, Interdisciplinaridade e Transdisciplinaridade no Ensino. **Interface**, Botucatu, v.2, n. 2, p. 173-182, 1998.

SANTANA, Thaine Souza; BARBOSA, Jonei Cerqueira. A Intervenção do Professor em um Ambiente de Modelagem Matemática e a Regulação da Produção Discursiva dos Alunos. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n.43, p. 991-1020, ago. 2012.

SANTOMÉ, Jurjo Torres. **Globalização e Interdisciplinaridade**. 1. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

SETTI, Elenice Josefa Kolancko. et al. Modelagem Matemática e Física: uma experiência com foguetes In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, 2016. São Paulo: **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016.

_____; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Que interdisciplinaridade se verifica nos trabalhos de Modelagem Matemática? In: Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, 7, 2016. Londrina: **Anais...** Londrina: SBEM, 2016a.

_____; _____. Um olhar para a interdisciplinaridade presente nos trabalhos de Modelagem Matemática apresentados nas últimas seis edições da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM). In: Simpósio Nacional de Ensino e Aprendizagem, 3, 2016. Londrina: **Anais...** Londrina: UTFPR, 2016b.

_____; _____. Práticas de Ensino de Matemática no contexto de cursos técnicos integrados ao Ensino Médio. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14, 2017, Cascavel. **Anais...** Cascavel: SBEM, 2017, no prelo.

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da; BORSSOI, Adriana Helena; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Uma análise semiótica de atividades de modelagem matemática mediadas pela tecnologia. **R.B.E.C.T.**, Curitiba, v. 8, n.1, jan./abr. 2015.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação. **Bolema**, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

TAHAN, Malba (Júlio César de Mello e Souza). **O homem que calculava**. 84.ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2013.

THIESEN, Juares da Silva. A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v. 13, n.39, p. 545-598, 2008.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela M. S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula**. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

VELEDA, Gabriele Granada; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. O que constitui 'realidade' em uma atividade de Modelagem Matemática. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1, 2009. Ponta Grossa. **Anais...** Ponta Grossa: UTFPR, 2009.

VELEDA, Gabriele Granada. **Sobre a Realidade em atividades de Modelagem Matemática**. 2010. 88 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

VERONEZ, Michele Regiane Dias; VELEDA, Gabriele Granada. Reflexões sobre a Realidade em uma Atividade de Modelagem Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática – INMA/UFMS**, Campo Grande, v.9, n.21, p. 1237-1252, 2016.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v.30, n. 56, p. 1070-1071, dez. 2016.

_____; SILVA, Karina Pessôa da; BORSSOI, Adriana Helena. Modelagem Matemática em disciplinas no Ensino Superior: o que manifestam os estudantes? **Educere et Educare, Revista de Educação**, Cascavel, v.12, n.24, jan./abr.2017.

VILLA-OCHOA, Jhony Alexander; LÓPEZ, Carlos Mario Jaramillo. Sense of Reality Through Mathematical Modelling. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. Borromeo; STILLMAN G. (Eds.), **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. New York: Springer, 2011, p. 701–711.

ZANTEN, Agnès Van. Pesquisa qualitativa em educação: pertinência, validade e generalização. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 22, n. 01, p. 25-45, jan./ jun. 2004.

Referências dos artigos de análise

ABITANTE, Lucilaine Goin. et al. Modelagem Matemática de Fenômenos Ópticos: relato de experiência interdisciplinar entre Matemática e Física. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2013.Santa Maria. **Anais...** Santa Maria: SBEM, 2013.

BARBOZA, Jennifer Valleriano. et al. The Possibility of Interdisciplinary Integration Through Mathematical Modelling of Optical Phenomena. In: STILLMAN, Gloria Ann; BLUM, Werner; BIEMBENGUT, Maria Salett. **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences**. New York: Springer, 2015. p. 305-316.

BISOGNIN, Eleni; MARTINS, Márcio Marques; BISOGNIN, Vanilde. A Modelagem Matemática e as leis físicas dos Gases: construção do conceito de proporcionalidade. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2011. Belém. **Anais...** Belém: SBEM, 2011.

BONOTTO, Danusa de Lara; SCHELLER, Morgana; BIEMBENGUT, Maria Salett. Modelagem nas Ciências e Matemática: percepção de professores em formação continuada. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2015. São Carlos. **Anais...** São Carlos: SBEM, 2015.

BORGIO, Vanessa Toledo Karpinski; BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática: da Interdisciplinaridade à Transdisciplinaridade. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2011. Belém. **Anais...** Belém: SBEM, 2011.

CRUZ, Alexandre Nunes da. et al. Modelagem, criticidade e interdisciplinaridade: o caso do peso das mochilas. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2013.Santa Maria. **Anais...** Santa Maria: SBEM, 2013.

GOMES, Vivilí Maria Silva et al. Modelagem Matemática na formação continuada: um olhar de professores sobre a questão do câncer de mama. In: CONFERÊNCIA NACIONAL

SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 2009. Londrina. **Anais...** Londrina: SBEM, 2009.

JÚNIOR, Geraldo Bull da Silva. Biologia e Matemática e Modelagem Matemática: Redes de Saberes. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2007. Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: SBEM, 2007.

KATO, Lilian Akemi. Modelagem Matemática e a formação da consciência crítica frente aos problemas ecológicos. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2007. Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: SBEM, 2007.

_____. Modelos Matemáticos para o estudo de dinâmicas populacionais. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 2009. Londrina. **Anais...** Londrina: SBEM, 2009.

LARA, Isabel Cristina Machado; BIEMBENGUT, Maria Salett. Modelagem e Modelação nas Ciências da Natureza e Matemática: algumas propostas pedagógicas. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2011. Belém. **Anais...** Belém: SBEM, 2011.

LAUTENSCHLAGER, Etienne; MORAES, Adilson de. Modelagem Matemática: um instrumento para a formulação de problemas. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 2009. Londrina. **Anais...** Londrina: SBEM, 2009.

LOZADA, Cláudia de Oliveira. Trabalho colaborativo entre Matemática e Física: a interdisciplinaridade como fator relevante para a Modelagem Matemática aplicada ao contexto do ensino de Física. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2007. Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: SBEM, 2007.

_____; MAGALHÃES, Nadja Simão. Um relato de experiência sobre a prática da modelagem matemática aplicada ao ensino de física. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 2009. Londrina. **Anais...** Londrina: SBEM, 2009.

LUNA, Ana Virgínia de Almeida; SOUZA, Elizabeth Gomes; LIMA, Larissa Borges de Souza. Mathematical Texts in a Mathematical Modelling Learning Environment in Primary School. In: STILLMAN, Gloria Ann; BLUM, Werner; BIEMBENGUT, Maria Salett. **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences**. New York: Springer, 2015. p. 535-543.

MAGNAGO, Karine Faverzani; MARTINS, Márcio Marques; MENDES, Jéferson Norberto Marinho. Modelo Matemático de orbitais atômicos: o uso do aplicativo Maple para obter resultados. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2007. Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: SBEM, 2007.

MATTÉ, Israel; ROCHA, Josy; SANT'ANA, Marilaine de Fraga. Modelagem Matemática aplicada a utilização de sensores de temperatura. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2011. Belém. **Anais...** Belém: SBEM, 2011.

_____; SANT'ANA, Marilaine de Fraga. Modelagem Matemática e sensores de temperatura na escola técnica. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2013. Santa Maria. **Anais...** Santa Maria: SBEM, 2013.

MELLENDEZ, Thiago Troina; SANT'ANA, Marilaine de Fraga. Modelando uma propriedade agropecuária sustentável. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2013. Santa Maria. **Anais...** Santa Maria: SBEM, 2013.

MELLO, Jéssica. A Modelagem Matemática no Ensino de Funções como possibilidade de reflexão para o consumo consciente. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2013. Santa Maria. **Anais...** Santa Maria: SBEM, 2013.

NG, Kit Ee Dawn; STILLMAN, Gloria Ann. Exploring Interconnections Between Real-World and Application Tasks: Case Study from Singapore. In: STILLMAN, Gloria Ann; BLUM, Werner; BIEMBENGT, Maria Salett. **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences**. New York: Springer, 2015. p. 207-217.

PAGUNG, Camila Maria Dias; REZENDE, Oscar Luiz Teixeira de; LORENZONI, Luciano Lessa. Contribuições da Modelagem Matemática na Construção do Conceito de Função a partir da Geração de Renda em uma Associação de Catadores de Resíduos Sólidos. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2015. São Carlos. **Anais...** São Carlos: SBEM, 2015.

SILVA, Gabriella Helena Jorge; SOUSA, Lívia Fernandes; LEITE, Maria Beatriz. A Modelagem Matemática e a informática educativa: uma experiência interdisciplinar no âmbito da iniciação científica. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 2009. Londrina. **Anais...** Londrina: SBEM, 2009.

SILVA, Jaqueline Munise Guimarães; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da. O Uso da Modelagem Matemática na Formação Inicial de Professores de Química. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2015. São Carlos. **Anais...** São Carlos: SBEM, 2015.

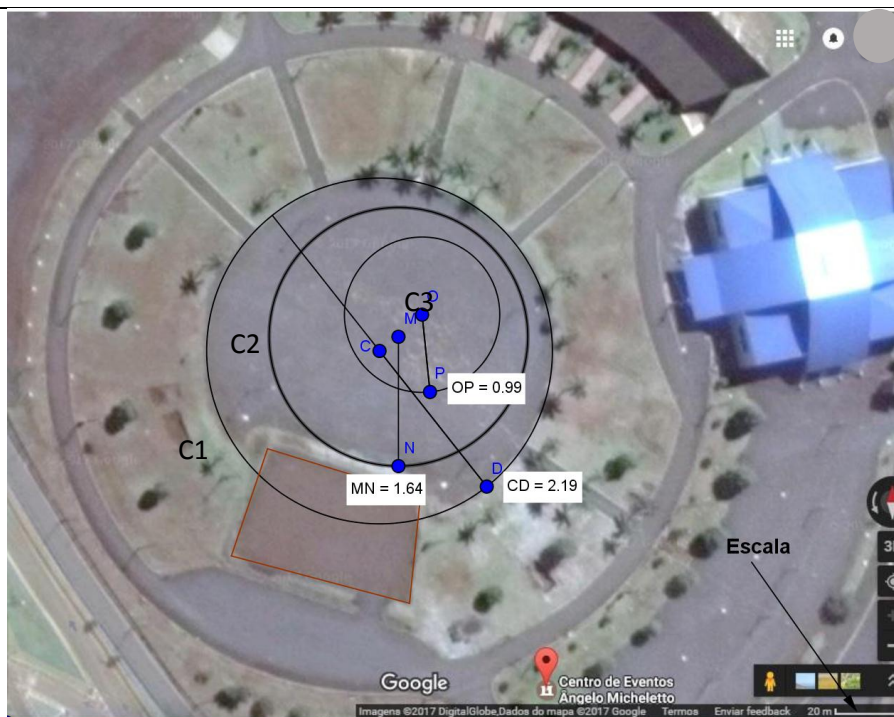
_____; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da. O Desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática como APCC: uma experiência. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 2014. Curitiba. **Anais...** Curitiba: SBEM, 2014.

TOPÁZIO, Joseane de Almeida. Modelagem Matemática e interdisciplinaridade: qual é a relação? In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2005. Feira de Santana. **Anais...** Feira de Santana: SBEM, 2005.

VIEIRA, Grasiella; THIEL, Afrânio Austragésilo. A Matemática no Basquetebol. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2015. São Carlos. **Anais...** São Carlos: SBEM, 2015.

8 ANEXOS

8.1 REPRESENTAÇÃO E POSSÍVEL RESOLUÇÃO DO MODELO I (REFINAMENTO PARA O PRODUTO EDUCACIONAL)



Na tela do Google Maps, o diâmetro da circunferência maior é de 6 cm, como a escala (no zoom fixado) era de 20 m para um segmento de 1,2 cm (na tela), temos que o diâmetro real é de 100 metros. Capturamos a imagem da tela e a abrimos no GeoGebra. No software, construímos três circunferências que representam as delimitações das diferentes aglomerações e medimos os seus respectivos raios:

$$OP = 0,99 \text{ cm}$$

$$MN = 1,64 \text{ cm}$$

$$CD = 2,19 \text{ cm}$$

Como $CD = 2,19 \text{ cm}$ representa o raio de 50 metros, por proporção determinamos os outros dois raios:

$$2,19 \rightarrow 50 \text{ m} \qquad 2,19 \rightarrow 50 \text{ m}$$

$$1,64 \rightarrow x \qquad 0,99 \rightarrow x$$

$$x = 37,4 \text{ m} \qquad x = 22,6 \text{ m}$$

Área da Região G:

$$A_G = A_{C1} - A_{C2}$$

$$A_G = \pi \cdot r_1^2 - \pi \cdot r_2^2$$

$$A_G = (3,14 \cdot 50^2) - (3,14 \cdot 37,4^2)$$

$$A_G = 7850 - 4392$$

$$A_G = 3458 \text{ m}^2$$

Procedendo do mesmo modo para as regiões M e P, encontramos as seguintes áreas:

$$A_M = A_{C2} - A_{C3}$$

$$A_P = A_{C3}$$

$$A_M = 4392 - 1604$$

$$A_P = 1604 \text{ m}^2$$

$$A_M = 2788 \text{ m}^2$$

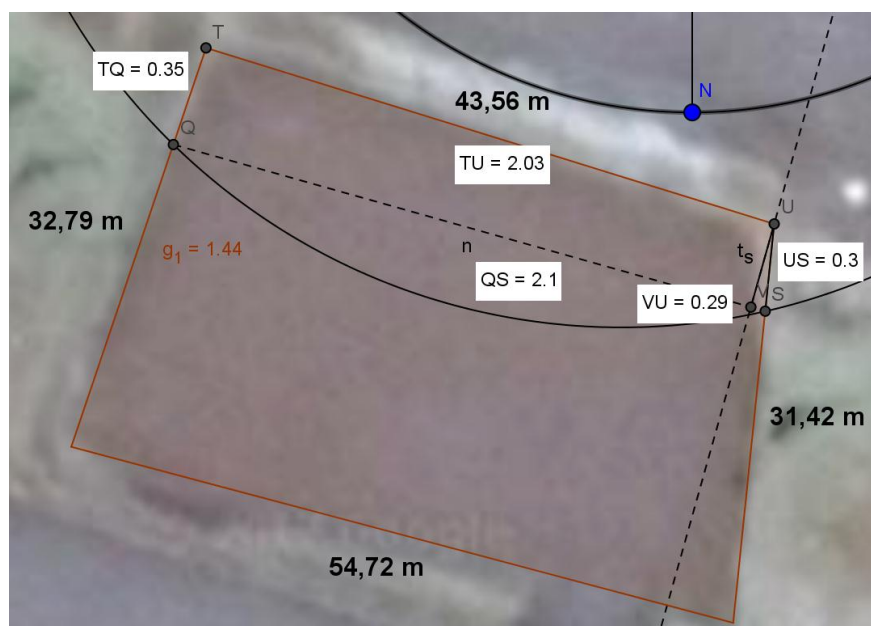
Deste modo, a concentração estimada de pessoas no local com estas características de aglomeração será de:

$$Q_P = A_G \cdot 8 + A_M \cdot 5 + A_P \cdot 2$$

$$Q_P = 3458 \cdot 8 + 2788 \cdot 5 + 1604 \cdot 2$$

$$Q_P = 44812 \text{ pessoas}$$

*Observa-se que uma parte do palco ocupa uma pequena área da região G. Esta parte não é ocupada pelo público e sim pela equipe do show (banda, equipe técnica). O ideal seria desconsiderar esta área.



Cálculo da área do trapézio TUSQ:

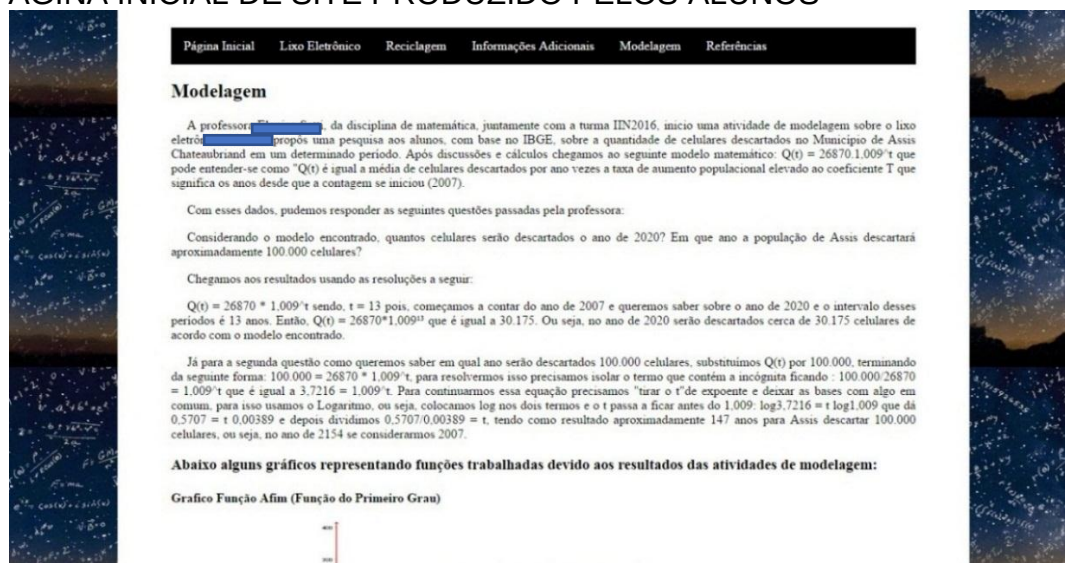
➔ Obtenção das medidas reais desconhecidas por proporção das medidas reais conhecidas:

$$TQ = 0,35 \text{ cm} \rightarrow TQ = 7,51 \text{ m}$$

$$US = 0,3 \text{ cm} \rightarrow US = 6,44 \text{ m}$$

$$QS = 2,1 \text{ cm} \rightarrow QS = 45,06 \text{ m}$$

8.2 PÁGINA INICIAL DE SITE PRODUZIDO PELOS ALUNOS



Print da primeira página do site de uma dupla de alunos
Fonte: site elaborado pelos alunos.

Modelagem

A professora XXXXXXXXXX, da disciplina de matemática, juntamente com a turma IIN2016, inicio uma atividade de modelagem sobre o lixo eletrônico. XXXXXXXX propôs uma pesquisa aos alunos, com base no IBGE, sobre a quantidade de celulares descartados no município de Assis Chateaubriand em um determinado período. Após discussões e cálculos chegamos ao seguinte modelo matemático: $Q(t) = 26870 \cdot 1,009^t$ que pode entender-se como “ $Q(t)$ é igual a média de celulares descartados por ano vezes a taxa de aumento populacional elevado ao coeficiente t que significa os anos desde que a contagem se iniciou (2007).

Com esses dados, pudemos responder as seguintes questões passadas pela professora:

Considerando o modelo encontrado, quantos celulares serão descartados o ano de 2020? Em que ano a população de Assis descartará aproximadamente 100.000 celulares?

Chegamos aos resultados usando as resoluções a seguir:

$Q(t) = 26870 \cdot 1,009^t$ sendo $t = 13$ pois, começando a contar do ano de 2007 e queremos saber sobre o ano de 2020 e o intervalo desses períodos é 13 anos. Então, $Q(t) = 26870 \cdot 1,009^{13}$ que é igual a 30.175. Ou seja, no ano de 2020, serão descartados cerca de 30.175 celulares de acordo com o modelo encontrado.

Já para a segunda questão como queremos saber em qual ano serão descartados 100.000 celulares, substituímos $Q(t)$ por 100.000, terminando da seguinte forma: $100.000 = 26870 \cdot 1,009^t$, para resolvermos isso precisamos isolar o termo que contém a incógnita ficando : $100.000/26870 = 1,009^t$ que é igual a $3,7216 = 1,009^t$. Para continuarmos essa equação precisamos “tirar o t ” de expoente e deixar as bases com algo em comum, para isso usamos o Logaritmo, ou seja, colocamos log nos dois termos e o t passa a ficar antes do 1,009: $\log 3,7216 = t \log 1,009$ que dá $0,5707 = t \cdot 0,00389$ e depois dividimos $0,5707/0,00389 = t$, tendo como resultado aproximadamente 147 anos para Assis descartar 100.000 celulares, ou seja, no ano de 2154 se considerarmos 2007.

Quadro 37 - Transcrição da página do site da figura 34
Fonte: transcrito pela autora.

8.3 TERMO DE ASSENTIMENTO

TERMO DE ASSENTIMENTO

TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO LIVRE E ESCLARECIDO (Adolescentes com 12 anos completos, maiores de 12 anos e menores de 18 anos)

Informação geral: O assentimento informado para a criança/adolescente não substitui a necessidade de consentimento informado dos pais ou guardiães. O assentimento assinado pela criança demonstra a sua cooperação na pesquisa.

Título do Projeto: Modelagem Matemática no Ensino Médio Técnico Integrado em Informática: um trabalho interdisciplinar.

Investigador(a): Elenice Josefa Kolancko Setti e Rodolfo Eduardo Vertuan.

Local da Pesquisa: Instituto Federal do Paraná, campus Assis Chateaubriand.

Endereço: Avenida Cívica, 475. Centro Cívico. Assis Chateaubriand/Pr.

O que significa assentimento?

O assentimento significa que você concorda em fazer parte de um grupo de adolescentes, da sua faixa de idade, para participar de uma pesquisa. Serão respeitados seus direitos e você receberá todas as informações por mais simples que possam parecer. Pode ser que este documento denominado TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO contenha palavras que você não entenda. Por favor, peça ao responsável pela pesquisa ou à equipe do estudo para explicar qualquer palavra ou informação que você não entenda claramente.

INFORMAÇÃO AO SUJEITO DA PESQUISA:

a) APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa, cujo objetivo é investigar a existência de contribuições de um trabalho interdisciplinar em Modelagem Matemática no que diz respeito à ressignificação de conceitos matemáticos e à aprendizagem de novos conceitos. Você participará, caso concorde, desenvolvendo, juntamente com os colegas, atividades de Modelagem Matemática. Com o desenvolvimento das atividades pretendo analisar e posteriormente inferir, com base na fundamentação teórica, se as atividades de Modelagem Matemática trazem contribuições no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, contribuindo assim para a ressignificação e aquisição de novos conceitos.

b) Desconfortos, Riscos e Benefícios.

Conforme a Resolução nº 466 de 12 de dezembro de 2012 existe a possibilidade de danos à dimensão psíquica e moral do indivíduo já que envolve questões de caráter pessoal e coletivo. O pesquisador responsável suspenderá a pesquisa imediatamente ao perceber algum risco ou dano à saúde do sujeito participante da pesquisa, consequente à mesma, não previsto no termo de consentimento. Os participantes não pagarão e nem serão remunerados por sua participação e poderão, sem qualquer ônus, desistir a qualquer momento da pesquisa.

O projeto de pesquisa foi elaborado pensando em contribuir com as discussões de professores sobre a aprendizagem em Matemática dos alunos, no que diz respeito ao desenvolvimento de atividades que levam o aluno à investigar e fazer matemática e não simplesmente reproduzir cálculos muitas vezes sem sentido para ele.

c) Confidencialidade

A pesquisa não divulgará seu nome, garantindo o anonimato.

d) Critérios de inclusão e exclusão

Foram selecionados para participar dessa pesquisa, alunos matriculados regularmente no primeiro ano do Curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal do Paraná, campus Assis Chateaubriand. Não se aplica o critério de exclusão.

e) Ressarcimento e indenização.

Estão assegurados o ressarcimento e indenização provenientes de custos ou danos gerados ao participar dessa pesquisa.

f) Contato para dúvidas:

Se você ou os responsáveis por você tiver(em) dúvidas com relação ao estudo, direitos do participante, ou no caso de riscos relacionados ao estudo, você deve contatar o(a) Investigador(a) do estudo ou membro de sua equipe: ELENICE JOSEFA KOLANCKO SETTI, Rua Santa Catarina, 20, Centro, CEP 85945-000, Tupãssi-PR, celular (44) 9976 3925 e Rodolfo Eduardo Vertuan, Rua General Estilac Leal, 984, Centro, CEP 85900120, Toledo-PR. Se você tiver dúvidas sobre seus direitos como um paciente de pesquisa, você pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O CEP é constituído por um grupo de profissionais de diversas áreas, com conhecimentos científicos e não científicos que realizam a revisão ética inicial e continuada da pesquisa para mantê-lo seguro e proteger seus direitos.

DECLARAÇÃO DE ASSENTIMENTO DO SUJEITO DA PESQUISA:

Eu li e discuti com o investigador responsável pelo presente estudo os detalhes descritos neste documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar, e que posso interromper a minha participação a qualquer momento sem dar uma razão. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Eu entendi a informação apresentada neste TERMO DE ASSENTIMENTO. Eu tive a oportunidade para fazer perguntas e todas as minhas perguntas foram respondidas.

Eu receberei uma cópia assinada e datada deste Documento DE ASSENTIMENTO INFORMADO.

NOME DO ADOLESCENTE	ASSINATURA	DATA

Elenice Josefa Kolancko Setti

NOME DO INVESTIGADOR	ASSINATURA	DATA

Endereço do Comitê de Ética em Pesquisa para recurso ou reclamações do sujeito pesquisado

Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR) REITORIA:
Av. Sete de Setembro, 3165, Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, telefone: 3310-4943, e-mail:
coep@utfpr.edu.br

8.4 TERMO DE CONSENTIMENTO

TERMO DE CONSENTIMENTO

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO LIVRE E ESCLARECIDO

(Para pais e/ou responsáveis)

Título do Projeto: Modelagem Matemática no Ensino Médio Técnico Integrado em Informática – desafios e possibilidades na efetivação de um trabalho interdisciplinar.

Investigador(a): Elenice Josefa Kolancko Setti e Rodolfo Eduardo Vertuan.

Local da Pesquisa: Instituto Federal do Paraná, campus Assis Chateaubriand.

Endereço: Avenida Cívica, 475. Centro Cívico. Assis Chateaubriand/Pr.

O que significa o consentimento?

O consentimento significa que você concorda que o(a) jovem pelo qual é responsável faça parte de um grupo de jovens e adultos, para participar de uma pesquisa. Serão respeitados seus direitos e os direitos desse jovem e você receberá todas as informações por mais simples que possam parecer. Para isso, basta ligar para uma das responsáveis pela pesquisa, Elenice Josefa Kolancko Setti, cujo telefone é (44) 9976 3925. Pode ser que este documento denominado TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO contenha palavras que você não entenda. Por favor, peça ao responsável pela pesquisa ou à equipe do estudo para explicar qualquer palavra ou informação que você não entenda claramente.

INFORMAÇÃO AO PARTICIPANTE DA PESQUISA:

g) APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

O(a) jovem pelo qual você é responsável está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa, cujo objetivo é investigar a existência de contribuições de um trabalho interdisciplinar em Modelagem Matemática no que diz respeito à ressignificação de conceitos matemáticos e à aprendizagem de novos conceitos. Ele participará, caso você concorde, desenvolvendo, juntamente com os colegas, atividades de Modelagem Matemática. Com o desenvolvimento das atividades pretendo analisar e posteriormente inferir, com base na fundamentação teórica, se as atividades de Modelagem Matemática trazem contribuições no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, contribuindo assim para a ressignificação e aquisição de novos conceitos.

h) Desconfortos, Riscos e Benefícios.

Conforme a Resolução nº 466 de 12 de dezembro de 2012 existe a possibilidade de danos à dimensão psíquica e moral do indivíduo já que envolve questões de caráter pessoal e coletivo. O pesquisador responsável suspenderá a pesquisa imediatamente ao perceber algum risco ou dano à saúde do sujeito participante da pesquisa, consequente à mesma, não previsto no termo de consentimento. Os participantes não pagarão e nem serão remunerados por sua participação e poderão, sem qualquer ônus, desistir a qualquer momento da pesquisa.

O projeto de pesquisa foi elaborado pensando em contribuir com as discussões de professores sobre a aprendizagem em Matemática dos alunos, no que diz respeito ao desenvolvimento de atividades que levam o aluno a investigar e fazer matemática e não simplesmente reproduzir cálculos muitas vezes sem sentido para ele.

i) Confidencialidade

A pesquisa não divulgará nomes, garantindo o anonimato.

j) Critérios de inclusão e exclusão

Foram selecionados para participar dessa pesquisa, alunos matriculados regularmente no primeiro ano do Curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal do Paraná, campus Assis Chateaubriand. Não se aplica o critério de exclusão.

k) Ressarcimento e indenização.

Estão assegurados o ressarcimento e indenização provenientes de custos ou danos gerados ao participar dessa pesquisa.

l) Contato para dúvidas

Se você ou os responsáveis por você tiver(em) dúvidas com relação ao estudo, direitos do participante, ou no caso de riscos relacionados ao estudo, você deve contatar o(a) Investigador(a) do estudo ou membro de sua equipe: ELENICE JOSEFA KOLANCKO SETTI, Rua Santa Catarina, 20, Centro, CEP 85945-000, Tupãssi-PR, celular (44) 9976 3925 e Rodolfo Eduardo Vertuan, Rua General Estilac Leal, 984, Centro, CEP 85900120, Toledo-PR. Se você tiver dúvidas sobre seus direitos como um paciente de pesquisa, você pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O CEP é constituído por um grupo de profissionais de diversas áreas, com conhecimentos científicos e não científicos que realizam a revisão ética inicial e continuada da pesquisa para mantê-lo seguro e proteger seus direitos.

DECLARAÇÃO DE CONSENTIMENTO DO PARTICIPANTE DA PESQUISA:

Eu li e discuti com o investigador responsável pelo presente estudo os detalhes descritos neste documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar, e que posso interromper a minha participação a qualquer momento sem dar uma razão. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Eu entendi a informação apresentada neste TERMO DE CONSENTIMENTO. Eu tive a oportunidade para fazer perguntas e todas as minhas perguntas foram respondidas.

Eu receberei uma cópia assinada e datada deste Documento DE CONSENTIMENTO INFORMADO.

NOME	ASSINATURA	DATA
------	------------	------

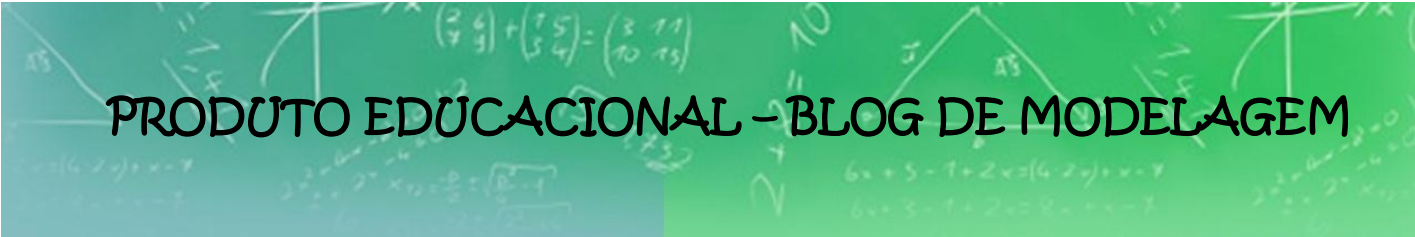
Elenice Josefa Kolancko Setti

NOME DO INVESTIGADOR	ASSINATURA	DATA
----------------------	------------	------

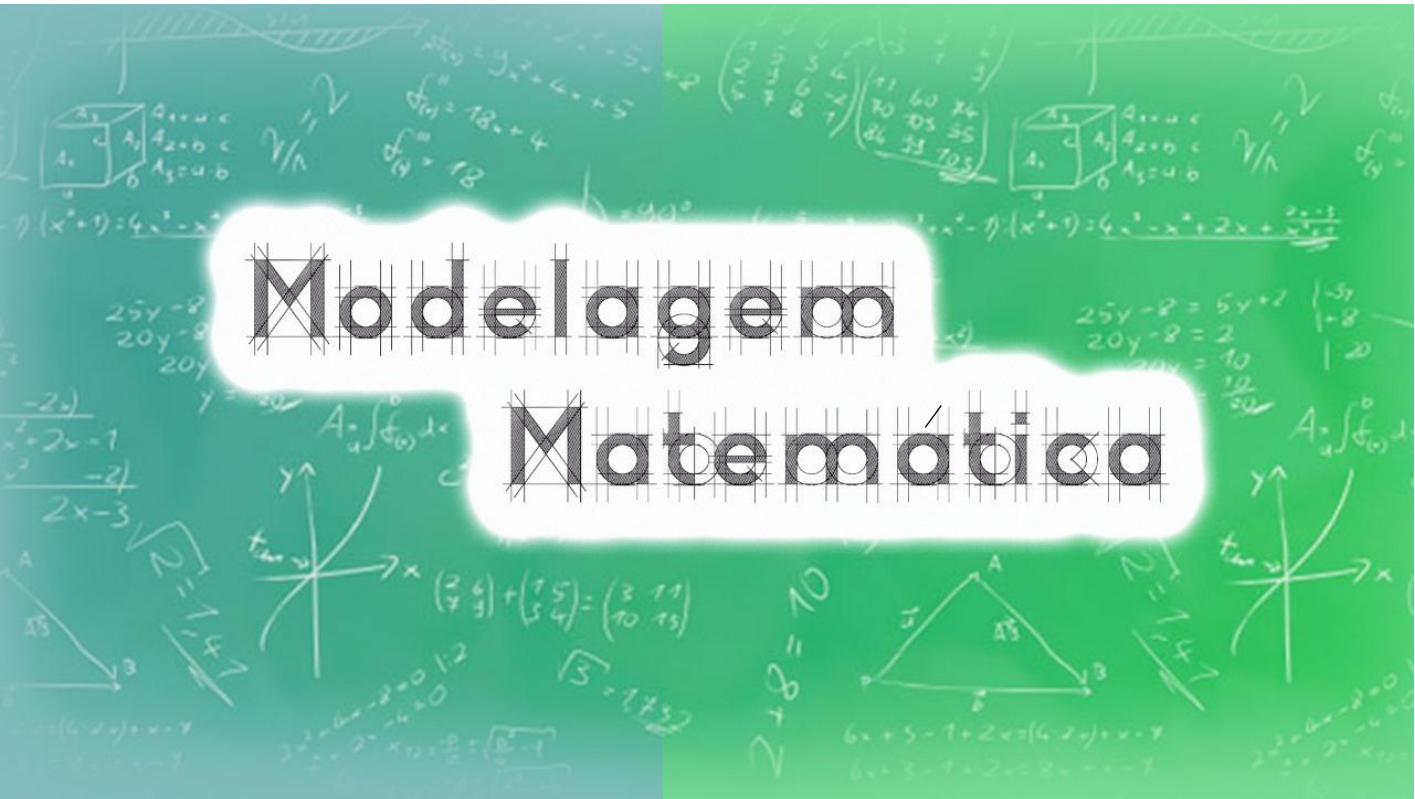
Endereço do Comitê de Ética em Pesquisa para recurso ou reclamações do sujeito pesquisado

Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR) REITORIA:
Av. Sete de Setembro, 3165, Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, telefone: 3310-4943, e-mail:
coep@utfpr.edu.br

8.5 PRODUTO EDUCACIONAL



PRODUTO EDUCACIONAL – BLOG DE MODELAGEM



Modelagem Matemática

Elenice Josefa Kolancko Setti
Orientador: Dr Rodolfo Eduardo Vertuan

PRODUTO EDUCACIONAL

Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

UTFPR

2017

MODELAGEM MATEMÁTICA NO CURSO TÉCNICO DE INFORMÁTICA INTEGRADO AO ENSINO MÉDIO - UM TRABALHO INTERDISCIPLINAR



TERMO DE LICENCIAMENTO

Esta Dissertação e o seu respectivo Produto Educacional estão licenciados sob uma Licença Creative Commons *atribuição uso não-comercial/compartilhamento sob a mesma licença 4.0 Brasil*. Para ver uma cópia desta licença, visite o endereço <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, Califórnia 94105, USA.



APRESENTAÇÃO

Prezados Professores,

Este material foi produzido com o propósito de auxiliá-los no trabalho com Modelagem Matemática, visto que se trata de um modo de se trabalhar Matemática muito diferente do habitual.

Assim como tive dificuldades no início quando decidi trabalhar sob esta perspectiva, imagino que muitos professores devam ter. E muitas vezes, frente às primeiras dificuldades, costumamos desistir e achar que não obteremos êxito. No entanto, aos poucos vamos obtendo experiência e se apaixonando cada vez mais pela Modelagem.

Deste modo, o Site/Blog será um canal de comunicação entre nós, para trocarmos experiências, dúvidas, anseios e nos ajudar neste lindo trabalho.

Todo este material, produzido a partir da pesquisa de mestrado, está disponível no site que será “abastecido” à medida que eu for desenvolvendo outras atividades com meus alunos.

Trata-se de um breve referencial teórico sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática a partir das perspectivas de alguns autores. Uma reflexão sobre interdisciplinaridade e Modelagem Matemática. Um pequeno guia de iniciação para o trabalho com Modelagem. Três atividades de Modelagem, com relatos de desenvolvimento, dicas e links relacionados ao tema.

Espero que possamos realizar um ótimo trabalho com nossos alunos!

Um grande abraço!

Professora Elenice Josefa Kolancko Setti

Sumário

Modelagem Matemática na Educação Matemática.....	4
Implementação de atividades de Modelagem em sala de aula.....	8
Quando os professores realizam atividades de Modelagem Matemática com seus alunos	12
Aprendizagem dos alunos em (com) Modelagem Matemática.....	14
Interdisciplinaridade e Modelagem Matemática	16
Orientações de desenvolvimento da atividade.....	19
Atividades de Modelagem	21
O Homem que calculava – Malba Tahan	22
De que tamanho vai ficar?	45
Quantos celulares e notebooks você já teve ???	53

Modelagem Matemática na Educação Matemática

A pergunta “*Professora, onde vou usar isso na minha vida?*” é recorrente nas aulas de Matemática da Educação Básica. Alunos, e até mesmo professores, muitas vezes não conseguem relacionar a Matemática que é estudada na escola com situações da realidade[1], quando isso poderia contribuir na atribuição de sentido, pelo aluno, ao que se estuda. Então, por que não explorar a Matemática que pode “florescer” dessas situações da realidade?

Quando o professor inicia um conteúdo pelas explicações de seus conceitos e algoritmos ou por uma pseudo aplicação (como o crescimento de uma população de bactérias fictícia a uma taxa fictícia), o que se observa, geralmente, são práticas de aulas de Matemática divididas em duas partes, assim como observou Cotton (1998, apud Skovsmose, 2000): inicialmente, o professor expõe o conteúdo matemático e suas técnicas de resolução e logo em seguida os alunos trabalham com exercícios.

No entanto, há a possibilidade de o professor chegar à sala de aula e apresentar aos alunos uma situação real, com dados reais e com um problema que, de fato, pode interessar aos alunos, ou ainda, pode discutir com os alunos um problema que interesse a eles e, a partir de então, buscar os dados para investigá-lo.

Neste sentido, a partir de um único problema, os alunos têm a oportunidade de estudar não só um, mas vários conteúdos matemáticos, além de poderem desenvolver a criticidade e a conscientização em relação ao tema escolhido.

Neste caso, o aluno não perguntaria ao professor “*para que devo aprender esse conteúdo matemático? Onde vou usar isso?*”, mas, sim, podem surgir questionamentos do tipo “*o que posso utilizar para resolver este problema?*”, “*como se resolve isso professora?*”, entre outros.

Este “jeito” de trabalhar a Matemática é o que diversos autores chamam de Modelagem Matemática (Almeida; Silva; Vertuan (2013), Burak (2004); Barbosa (2004); Caldeira (2009), Bassanezi (2013)). De modo geral, é não só o olhar matemático sobre as diversas situações da realidade, mas um olhar interdisciplinar, onde para além de ensinar Matemática, Física, Química ou Biologia, visa ensinar o aluno a pensar, a investigar, a resolver problemas, trabalhar em grupo, organizar ideias e matematizar. Neste contexto, Almeida e Dias (2004, p. 2) denotam que “a exploração, no ensino, de situações da vida real, em que a Matemática se aplica, torna-a mais dinâmica e interessante e proporciona maior eficiência no processo de ensino e aprendizagem”.

Segundo Barbosa (2004, p.3), Modelagem “é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações

com referência na realidade”. Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 17) veem na Modelagem Matemática “uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático”. Burak (2004, p. 2) a entende como “alternativa metodológica para o Ensino de Matemática” e aponta o princípio de sua perspectiva como sendo o “interesse do grupo ou dos grupos”.

A Modelagem Matemática, como ambiente de aprendizagem (BARBOSA, 2004), como alternativa pedagógica (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013) ou ainda como alternativa metodológica (BURAK, 2004), busca promover a aprendizagem ao interpretar matematicamente um fenômeno da realidade[3].

Para isso, Burak (2004) sugere cinco etapas de encaminhamento do trabalho com Modelagem em sala de aula: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema e, por fim, análise crítica da(s) solução(s). Para o autor, a escolha do tema deve ser incumbência dos alunos, deve partir do interesse deles. O desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema acontece no momento da resolução do problema, ou seja, ao tentar resolver o problema matematicamente, desenvolve-se uma Matemática, que não é definida *a priori*, mas surge dependendo do tema. O modelo matemático, para Burak, constitui-se como uma representação que permite uma tomada de decisão. Sua construção é oportunizada na 4ª etapa, resolução do problema e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema.

Na perspectiva de Almeida, Silva e Vertuan (2013) a

Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 12).

Segundo os autores, a essa situação final desejada associa-se uma representação matemática chamada de modelo matemático. Assim conceituam modelo como sendo “uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p.13). Por exemplo: quando alunos do Ensino Médio decidem modelar a relação existente entre a quantidade de bicarbonato colocada como combustível em um foguete de garrafa pet e a distância atingida pelo foguete, simplificam o modelo considerando apenas duas variáveis – quantidade de bicarbonato e distância alcançada – mesmo tendo conhecimento de outras variáveis como direção e velocidade do vento, ponto de pressão e de gravidade, entre outras[5].

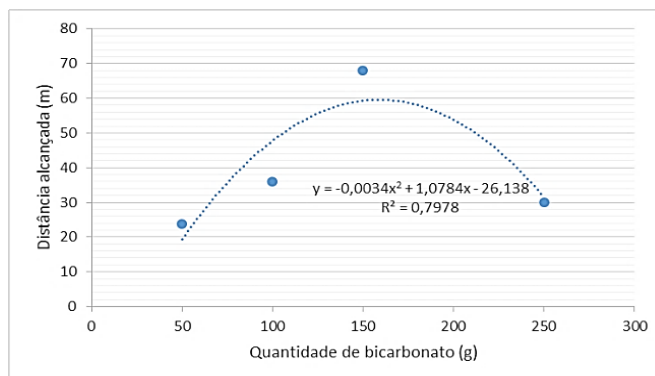
Almeida, Silva e Vertuan (2013), ainda afirmam que o modelo matemático pode ser representado de diferentes maneiras: uma equação, uma tabela, um gráfico, entre outros. No caso do foguete descrito acima o modelo encontrado pode ser representado das seguintes maneiras:

TABELA

Dados coletados na primeira fase do experimento

Dia de lançamento	Quantidade de Bicarbonato (gramas)	Pressão atingida (PSI ¹)	Distância alcançada (metros)	Situação
1º	50	59	26,44	Não considerado
1º	100	72	48,1	Não considerado
2º	50	70	23,7	Considerado
2º	100	75	24,2	Não considerado
2º	100	98	36,05	Considerado
2º	150	102	68,1	Considerado
2º	120 (base) + 80 (tubo saída)	100	Não medido	Não considerado

Fonte: os autores.

GRÁFICO E EXPRESSÃO ALGÉBRICA**Quadro 1 - Exemplos de modelos matemáticos**

Fonte: SETTI et al., 2016, p. 9 e 10.

Almeida, Silva e Vertuan (2013), apresentam cinco fases relativas aos procedimentos necessários para o desenvolvimento da atividade: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. A inteiração é o primeiro contanto com a situação-problema e consiste em conhecer os aspectos dessa situação inicial. A matematização consiste na transformação da linguagem natural para a linguagem matemática, dando significado matemático à situação inicial e permitindo a resolução. Após resolver o problema é necessário interpretar os resultados e validá-los comparando-os com os dados coletados.

Vertuan e Almeida (2016, p. 1072), todavia, consideram que “a ordem em que tais fases aparecem bem como o tempo dedicado a cada uma e os obstáculos presentes em cada uma delas dependem da dinâmica da atividade e do contexto em que a atividade é realizada”. E ainda que as fases devem ser revisitadas sempre que houver necessidade.

¹ Unidade de medida de pressão no Manômetro (instrumento que acoplado à base que mede a pressão). PSI – Libra-força por polegada quadrada.

Essas diferentes perspectivas de Modelagem se refletem na pesquisa em Modelagem e também na sua implementação em sala de aula.

Notas:

[1] Não é nossa intenção discutir o termo realidade. No entanto, temos ciência das discussões que são realizadas na área (VERONEZ; VELEDA, 2016; VILLA-OCHOA; LOPEZ, 2011; VELEDA, 2010; VELEDA; ALMEIDA, 2009; NEGRELLI, 2008). Neste trabalho, assumiremos as ideias de Negrelli (2008), que também foram abordadas em Veronez e Velede (2016), sobre realidade. Deste modo, realidade pode ser dividida em realidade inicial (é a realidade dada ao aluno, considerada existente independente dele, composta por elementos da natureza social, física, econômica, etc.) e realidade intermediária (realidade construída pelo aluno, criada com base na relação estruturada dos elementos possíveis de serem captados por ele).

[2] Verifique esta atividade no menu Atividades de Modelagem – Qual é o público.

[3] Além das perspectivas apresentadas, há outras na comunidade de Modelagem, tais como: Bassanezi (2013); Biembengut (2011, 2016); Caldeira (2009).

[4] Os casos de Barbosa serão apresentados na próxima seção.

[5] SETTI, Elenice Josefa Kolancko, et al. Modelagem Matemática e Física: uma experiência com foguetes In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais XII Enem**. São Paulo: SBEM, 2016

[6] Unidade de medida de pressão no Manômetro (instrumento que acoplado à base que mede a pressão). PSI – Libra-força por polegada quadrada.

Implementação de atividades de Modelagem em sala de aula

Podemos nos questionar quando e como utilizar Modelagem Matemática na Educação Básica. Blum e Niss (1991), caracterizam diferentes possibilidades de inclusão da Modelagem na escola: **separação, combinação, alternativa da integração curricular e alternativa interdisciplinar integrada**. Na alternativa de separação, em vez de incluir a Modelagem nas aulas regulares, as atividades são desenvolvidas em cursos separados, em momentos extraclasse. Na combinação, aspectos da Modelagem Matemática são utilizados no decurso das aulas para introduzir ou para aplicar conceitos matemáticos. Quando se fala em alternativa da integração curricular, os problemas vêm em primeiro lugar e a matemática para lidar com eles é desenvolvida de acordo com a necessidade. De todo modo, como o próprio nome sugere, a alternativa trata de atividades cujos conteúdos utilizados são relevantes à série dos alunos que lidam com a situação. Por fim, na alternativa interdisciplinar integrada, há uma integração completa entre as atividades matemáticas e extra-matemáticas num quadro interdisciplinar onde a “matemática” não é um assunto separado. As duas primeiras trabalham de forma a utilizar atividades de Modelagem para desenvolver alguns conteúdos de Matemática. Já as duas últimas defendem a Modelagem como “orientadora” do programa de Matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p.21).

Almeida, Silva e Vertuan (2013) afirmam que a inclusão de atividades de Modelagem pode se dar no âmbito da própria aula de Matemática, em horários extraclasse (cursos ou oficinas) ou em uma combinação dessas duas circunstâncias (uma parte é desenvolvida em sala e a outra em encontros extraclasse).

Nesse sentido, entende-se que uma atividade de Modelagem pode ser adaptada de acordo com as especificidades da escola, turma e professor. No entanto, deve-se preservar sua característica fundamental: **a investigação, pelos alunos, de um problema da realidade, por meio da Matemática, atividade em que o professor tem a função de orientar, indicar caminhos, perguntar, sugerir procedimentos** (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013).

Ao trabalhar Modelagem em cursos regulares, Almeida e Dias (2004), sentiram a necessidade de introduzi-la de forma gradativa, para que os alunos pudessem ir se familiarizando com o “novo jeito” de estudar Matemática. As autoras, então, sugerem três momentos de implementação de atividades de Modelagem.

– Em um primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que ações como definição de variáveis e de hipóteses, a simplificação, a transição para linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para a análise da situação, são em certa medida, orientadas e avalizadas pelo professor.

– Posteriormente, em um segundo momento, uma situação-problema é sugerida pelo professor aos alunos, e estes, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação e realizam a definição de variáveis e a formulação de hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação. O que muda essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência do estudante no que se refere à definição de procedimentos extra matemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação.

– Finalmente, no terceiro momento, os alunos, distribuídos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema, a coleta e análise de dados, as transições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação, bem como a comunicação desta investigação para a comunidade escolar (ALMEIDA; DIAS, 2004, p.7)

Neste sentido, observa-se que o primeiro momento consiste em um papel mais ativo do professor, no segundo os alunos já assumem a responsabilidade de coleta de dados e no terceiro eles precisam identificar o problema, coletar os dados e chegar ao modelo matemático, neste momento o professor orienta a condução das atividades (ALMEIDA; DIAS, 2004). Isso porque no contexto em que desenvolveram a pesquisa, possivelmente identificaram esta necessidade de implementar as atividades de Modelagem de modo gradativo, principalmente frente ao enfrentamento da tradição escolar que muito difere da dinâmica de uma aula com Modelagem Matemática e ao estranhamento que a transição de um paradigma a outro pode suscitar. No entanto, dependendo da característica da turma em que a atividade será desenvolvida ou do objetivo do trabalho, acredita-se não haver necessidade de seguir fielmente estes momentos, de forma linear.

Na perspectiva de Barbosa (2004), as atividades de Modelagem Matemática não possuem sempre os mesmos encaminhamentos de resolução, tendo em vista a sua proposição e o nível de envolvimento do professor e dos alunos. Barbosa (2004, p.4) chama estes encaminhamentos diferenciados de “regiões de possibilidades” ou simplesmente de “casos”.

Uma atividade se aproxima do caso 1 de Barbosa (2004, p.4) quando “o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação”. O caso 2 se caracteriza quando “os alunos se deparam apenas com o problema para investigar, mas têm que sair da sala de aula para coletar dados. Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial” (BARBOSA, 2004, p.4). O caso 3, por sua vez, “trata de projetos desenvolvidos a partir de temas ‘não-matemáticos’, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos” (BARBOSA, 2004, p. 4).

Em cada caso há uma distribuição de responsabilidades sobre as tarefas que devem ser desenvolvidas nas atividades de Modelagem. O quadro I ilustra esta distribuição.

	CASO1	CASO2	CASO3
Formulação do Problema	Professor	Professor	Professor/aluno
Simplificação	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Coleta de dados	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Solução	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno

Quadro 2 - Tarefas no processo de Modelagem

Fonte: BARBOSA (2004, p. 5).

É importante destacar que os “momentos” de Almeida e Dias (2004) e os “casos” de Barbosa (2004) são coisas distintas. O primeiro se refere à familiarização gradativa dos alunos com a Modelagem Matemática e o segundo trata das possibilidades de atribuições de alunos e professor no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem (ALMEIDA; VERTUAN, 2011).

Apresentamos, a seguir, um quadro síntese das três perspectivas de Modelagem que mais estão alinhadas com nossa pesquisa.

AUTORES	DEFINIÇÃO DE MODELAGEM	DEFINIÇÃO DE MODELO	ENCAMINHAMENTO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM
ALMEIDA, DIAS (2004)	Percebida como um estudo matemático acerca de um problema não essencialmente matemático, que envolve a formulação de hipóteses e simplificações adequadas na criação de modelos matemáticos para analisar o problema em estudo.	Uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam.	Sugerem 3 momentos de implementação da atividade de Modelagem, dando a ideia de implementação gradativa: o primeiro consiste em um papel mais ativo do professor; no segundo os alunos já assumem a responsabilidade de coleta de dados e no terceiro eles precisam identificar o problema, coletar os dados e chegar ao modelo matemático, neste momento o professor apenas orienta a condução das atividades.
ALMEIDA, SILVA e VERTUAN (2013)	Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final.		Apresentam cinco fases de desenvolvimento da atividade de modelagem: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.
BARBOSA (2001, 2003, 2004)	É um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade.	Não exige a obtenção de um modelo matemático.	Sugere três diferentes possibilidades de organização curricular, chamando-as de casos.
BURAK (2004)	Conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano,	Qualquer representação que permite uma tomada de decisão.	Sugere cinco etapas: - escolha do tema; - pesquisa exploratória; - levantamento dos problemas;

	ajudando-o a fazer previsões e tomar decisões. Alternativa metodológica para o ensino de Matemática. Parte do princípio do interesse do grupo de alunos.		- resolução do problema e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema; - análise crítica das soluções.
--	--	--	--

Quadro 3 - Síntese das perspectivas de Modelagem de ALMEIDA e DIAS, BARBOSA e BURAK

Fonte: elaborado pela autora, baseado em ALMEIDA, DIAS (2004), ALMEIDA, SILVA e VERTUAN (2013), BARBOSA (2001, 2003, 2004) E BURAK (2004).

Quando os professores realizam atividades de Modelagem Matemática com seus alunos

Ao decidir trabalhar com Modelagem, o professor se depara com inúmeros desafios, conflitos e angústias, pois essa tendência em ensino de Matemática talvez seja a que mais se diferencie do que costumeiramente se desenvolve em sala de aula. Sem falar das resistências por parte dos alunos, de outros professores e até da gestão da instituição, uma vez que os conteúdos matemáticos não serão trabalhados linearmente, mas sim à medida que vão surgindo no desenvolvimento da atividade (OLIVEIRA; BARBOSA, 2011).

Em um ambiente de Modelagem, o professor pode não ter muita clareza sobre o controle da comunicação em termos de seleção, sequência, ritmo e critérios da comunicação da prática pedagógica, pois não há previsibilidade do que ocorre na abordagem de situações-problema provenientes do dia a dia ou de outras disciplinas (OLIVEIRA; BARBOSA, 2011, p. 269).

Segundo Burak (2004, p. 3) “o papel do professor fica redefinido, pois ele passa a se constituir como mediador entre o conhecimento matemático elaborado e o conhecimento do aluno ou do grupo”. Com isso,

O professor assume um papel diferenciado em um ambiente de Modelagem Matemática. Nesse contexto, o professor deve incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não as suas conjecturas. Durante a fase de discussão cabe ao professor estimular a comunicação entre os alunos. Ao organizar a fase de discussão coletiva o professor deve conhecer bem os trabalhos de todos os grupos de alunos de modo a valorizar tanto as descobertas mais interessantes como as mais modestas (ALMEIDA; DIAS, 2004, p. 6).

E o modo como o professor medeia uma atividade de Modelagem, ou o modo como realiza intervenções, interfere na atitude dos alunos frente a atividade, de ativa à acomodada (SANTANA; BARBOSA, 2012). Ou seja, a mediação do professor pode fazer com que o aluno participe mais ou menos ativamente na atividade.

Santana e Barbosa (2012) classificam essas intervenções em *discurso procedimental* e *discurso silenciador*. Segundo os autores,

O discurso procedimental, refere-se ao discurso do professor, no qual ele deixa evidentes os procedimentos de abordagem do problema no ambiente de aprendizagem, como: onde as informações podem ser coletadas; quais informações são relevantes para o desenvolvimento das situações-problema; e como podem ser desenvolvidas as situações-problema. Já o discurso silenciador refere-se à invalidação de encaminhamentos propostos pelos alunos, como aqueles em termos de que dados devem ser utilizados, das informações relevantes etc (SANTANA; BARBOSA, 2012, p.1016).

“Tais discursos dão visibilidade sobre as regras para as produções discursivas dos alunos nesse ambiente de aprendizagem, seja no abandono de hipóteses [...] ou na escolha dos conteúdos matemáticos ou dados [...]” (SANTANA; BARBOSA, 2012, p. 1016). Neste contexto, entende-se que com “orientações demais” o professor acaba dizendo o que os alunos devem fazer, e que “orientações de menos” podem desestimular os alunos frente aos obstáculos das atividades. Neste sentido, a “medida” ideal, se é que existe uma, precisa ser sentida pelo professor com sua turma, dadas as especificidades do ambiente, da turma, do dia e da atividade, refletindo sempre sobre sua maneira de intervir, para que não descaracterize a atividade de Modelagem.

Neste sentido, o papel do professor é de grande importância, pois suas contribuições devem se dar no sentido de orientar os alunos sem violar a sua criatividade (ALMEIDA; DIAS, 2004).

Toda essa mudança no papel do professor na aula de Matemática com Modelagem gera situações de tensão (OLIVEIRA; BARBOSA, 2011), principalmente na primeira experiência do professor. Em uma pesquisa realizada com professores atuantes na educação básica que participavam de um curso de formação, Oliveira e Barbosa (2011) identificaram as situações de tensão apresentadas no Quadro 1.

SITUAÇÕES DE TENSÃO	TENSÕES NOS DISCURSOS	PERCEPÇÃO DOS AUTORES – OLIVEIRA e BARBOSA
O envolvimento dos alunos na discussão do tema.	Interação com os alunos.	O que pode ser perguntado aos alunos e como pode ser perguntado.
	Sequenciamento e ritmo na prática pedagógica.	Qual sequência utilizar, o seu ritmo e como implementá-las.
O planejamento do ambiente de Modelagem.	Escolha do tema.	Qual tema escolher e como escolher um tema que envolva os alunos.
	Interação com os alunos.	Quais perguntas fazer e como fazê-las.
A organização dos alunos para realizar as atividades.	Participação dos alunos.	Como propor atividades que envolvam os alunos para que participem ativamente.
A apresentação das respostas dos alunos.	Abordagem das respostas dos alunos.	Como intervir e discutir as respostas dos alunos.

Quadro 4 - Relação entre situações de tensão e tensões nos discursos

Fonte: OLIVEIRA; BARBOSA, 2011, p. 288. A terceira coluna, percepção dos autores, foi construída pela autora baseados em Oliveira e Barbosa (2011).

Apesar de os estudos acerca da Modelagem Matemática assinalarem inúmeros benefícios para o ensino de Matemática, em decorrência de todas as considerações anteriores, sua implantação nas escolas ainda é um desafio.

Aprendizagem dos alunos em (com) Modelagem Matemática

Nesta seção discorreremos sobre o que os alunos aprendem **em** Modelagem Matemática e sobre o que os alunos aprendem **com** Modelagem Matemática, a partir de pesquisas realizadas por diversos autores.

Em atividades de Modelagem Matemática a aprendizagem dos alunos parece acontecer de forma distinta àquela construída segundo o paradigma do exercício, isso porque os papéis dos alunos são diferentes (SANTANA; BARBOSA, 2012). O aluno deixa de ser apenas um receptor e reproduzidor de informações e algoritmos e passa a ser um colaborador no processo de aprendizagem. Colaborador no sentido de contribuir na construção do conhecimento à medida que participa do desenvolvimento da atividade. Quem colabora, faz parte do processo.

Como enfatizam Almeida e Brito (2005, p. 495), “a Matemática em atividades de Modelagem assume para os alunos sentido e significado[1] que provavelmente diferem daqueles das aulas convencionais. [...] os alunos estabelecem algumas relações e elas podem ajudá-los a atribuir sentidos”.

No entanto, Klüber e Burak (2008, p. 25), observaram que “algumas crianças se adaptam mais facilmente ao sistema de reprodução e, o fato de gostar de Matemática não implica diretamente em aprendizagem a partir do significado, mas sim da repetição”. Isso implica em certa resistência por parte de alguns alunos em participar de atividades de Modelagem, pois a dinâmica é diferente e o objetivo não é só desenvolver técnicas de resolução e sim, também, outros conhecimentos inerentes à atividade de Modelagem.

Neste sentido, Silva, Borssoi e Almeida (2015), enfatizam que as atividades de Modelagem,

ao mesmo tempo em que proporcionam ao aluno o envolvimento com uma situação-problema, também visam desenvolver no aluno o que Galbraith (2012) chama de ‘infraestrutura intelectual’, de modo que os alunos possam se tornar usuários dos conhecimentos matemáticos construídos e resolver problemas de forma independente em diferentes situações dentro e fora do ambiente escolar (SILVA; BORSSOI; ALMEIDA, 2015, p.163).

As autoras denotam que, ao desenvolver uma atividade de Modelagem, os alunos podem se deparar com uma situação em que não possuem conhecimentos suficientes para resolvê-la, emergindo assim a necessidade de desenvolvê-los. Neste sentido, no desenvolvimento de atividades de Modelagem, os alunos podem aprender novos conceitos matemáticos a partir da busca por uma solução para o problema. Essa aprendizagem dos alunos pode ser autônoma, quando buscam informações em livros ou sites, ou através do professor que está mediando a atividade, o que parece ser mais comum.

Neste contexto, Vertuan e Almeida (2016) afirmam que:

A familiarização dos alunos com atividade de Modelagem pode resultar, para além de uma compreensão acerca do que constitui uma atividade de Modelagem, em um aumento no repertório de estratégias de resolução e em certa autonomia frente à utilização dos conceitos matemáticos, suas propriedades e sua importância no contexto do problema (VERTUAN; ALMEIDA, 2016, p. 1074).

Os autores concluem que:

Quando um aluno toma consciência dos conceitos matemáticos que conhece, das estratégias que pode utilizar frente a um problema específico e dos modos como se dá sua aprendizagem, pode otimizar suas ações de modo a potencializar a apreensão de conhecimentos e o desenvolvimento cognitivo (VERTUAN; ALMEIDA, 2016, p. 1074).

Neste contexto, Almeida, Silva e Vertuan (2013) denotam que os alunos desenvolvem ações cognitivas, quando: partindo da situação inicial até a identificação do problema, realizam uma representação mental da situação, compreendendo-a e estruturando-a; constroem um modelo matemático, realizando a matematização da situação; ao caminhar para os resultados matemáticos realizam uma síntese; interpretam e validam os resultados e; por fim, comunicam seus resultados e argumentam acerca deles.

Para isso os alunos precisam trabalhar em grupo, pois uma atividade de Modelagem se caracteriza como uma atividade cooperativa (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013). No entanto, este modo de estudar apresenta-se como um desafio para os alunos, que estão acostumados a sentar em fileiras e “ouvir” a aula do professor. Assim, ao participar de atividades de Modelagem, os alunos podem aprender a trabalhar em grupos, a lidar com conflitos e justificar suas ideias.

Portanto, o trabalho com Modelagem Matemática parece ter potencialidades para desenvolver nos alunos aprendizagens conceituais, tanto de Matemática como de outras disciplinas ou áreas do conhecimento; aprendizagens procedimentais, como estratégias de resolução e algoritmos; aprendizagens de comunicação, ao lidar com conflitos, trabalhar em grupo e justificar suas ideias (VERTUAN; SILVA; BORSSOI, 2017); aprendizagens tecnológicas, ao lidarem com softwares de Modelagem, de simulação ou planilhas eletrônicas e; aprendizagens metacognitivas, quando o aluno sabe onde possui dificuldades, no que precisa se dedicar mais, ou desenvolve experiência em resoluções de atividades de Modelagem.

Notas:

[1] Os autores se apoiam nas noções de sentido e significado dadas por Leontiev (1978). “O significado refere-se ao sistema de relações objetivas que se forma no processo de desenvolvimento de uma expressão. Ele constitui um núcleo relativamente estável de compreensão que é compartilhado por todas as pessoas. O sentido, refere-se ao significado da palavra para cada indivíduo, e incorpora relações que dizem respeito ao contexto de uso da palavra e a vivência afetivas do indivíduo. Assim o sentido é produzido por relações (ALMEIDA; BRITO, 2005, p. 486)”.

Interdisciplinaridade e Modelagem Matemática

As reformulações curriculares sempre apontam para o ensino de Matemática contextualizado e interdisciplinar. A interdisciplinaridade pode ser entendida como “diferentes propostas, com diferentes perspectivas, entre elas, aquelas que defendem um ensino aberto para inter-relações entre Matemática e outras áreas do saber científico ou tecnológico, bem como com as outras disciplinas escolares” (TOMAZ; DAVID, 2008, p.14).

Assim,

A Matemática escolar passa a ser vista como um meio de levar o aluno à participação mais crítica na sociedade, [...] contribuindo com a formação integral do aluno, como cidadão da sociedade contemporânea, onde cada vez mais é obrigado a tomar decisões políticas complexas (TOMAZ; DAVID, 2008, p. 15).

Tomaz e David (2008), como exemplo, apresentam estratégias adotadas em escolas da Dinamarca e utilizadas por Skovsmose (1994, apud TOMAZ, DAVID, 2008) para construir o seu entendimento sobre interdisciplinaridade. Skovsmose (1994, apud TOMAZ; DAVID, 2008) apresenta a abordagem por tematização e a organização-em-projetos.

Tomaz e David (2008) acreditam, ainda, que

a adoção de temas para organizar a abordagem dos conteúdos disciplinares é uma forma de promover a interdisciplinaridade e pode contribuir para o engajamento do aluno nas discussões dos conteúdos e desenvolver competência crítica (TOMAZ; DAVID, 2008, p. 20).

Em se tratando da escolha de temas como uma forma de promover a interdisciplinaridade, uma metodologia de ensino de Matemática que compartilha desse encaminhamento inicial no desenvolvimento de uma atividade, é a Modelagem Matemática.

É natural associar Modelagem Matemática à interdisciplinaridade, isto porque a atividade de Modelagem, na maioria das vezes, é sobre um tema não matemático, de outra área, podendo integrar, inclusive, diversas áreas.

Isso porque, em Modelagem, as relações entre a realidade e a Matemática servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não-matemáticos sejam acionados, produzidos e integrados. Neste sentido, a abordagem de questões reais pode motivar a compreensão de métodos e conteúdos da Matemática escolar, contribuindo para a construção de conhecimentos e mostrar aplicações da Matemática em outras áreas do conhecimento (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013).

De todo modo, observa-se diferenças nas características de interdisciplinaridade nos diversos trabalhos de Modelagem.

A partir de pesquisas realizadas em trabalhos de Modelagem publicados nos anais de eventos da área², organizou-se o seguinte quadro:

CATEGORIA	CARACTERÍSTICAS
1	Interdisciplinaridade entendida como a contextualização de conceitos da Matemática que o professor pretende ensinar ou aplicar – o foco está na matemática.
2	Interdisciplinaridade entendida como o movimento entre diferentes disciplinas e seus respectivos docentes que buscam, a partir de seus referenciais, mediar a resolução de um problema de interesse comum – o foco está na resolução de um problema via diferentes olhares.
3	Interdisciplinaridade apontada como aspecto importante a ser considerado na formação docente inicial e continuada.
4	Interdisciplinaridade sendo suscitada em decorrência da necessidade advinda do desenvolvimento de uma atividade de Matemática.
5	Interdisciplinaridade sendo desenvolvida em uma disciplina que não seja Matemática, que utiliza a Matemática como ferramenta de resolução da situação-problema.
6	Interdisciplinaridade entendida como várias disciplinas desenvolvendo suas atividades a partir de um mesmo tema, sem que haja integração entre uma atividade e outra. (Multidisciplinaridade)

Quadro 5 - Categorias de Interdisciplinaridade em Modelagem Matemática

Fonte: SETTI; VERTUAN (2016b).

Concordamos com a afirmação de Japiassu (1976) de que não existe uma única definição, muito menos um único entendimento de interdisciplinaridade. Esta multiplicidade de características pode causar certa confusão de entendimento de um trabalho interdisciplinar, mas oportuniza diferentes possibilidades de encaminhamentos.

Esses encaminhamentos, ao qual chamamos de categorias (Quadro 5), apontam para uma integração entre diferentes disciplinas e para uma preocupação em tornar a interdisciplinaridade realidade em nossas escolas. No entanto, a condução dessa integração de disciplinas aponta, por vezes, que o foco está na Matemática e que para contextualizar utilizam-se conceitos de outras disciplinas sem a participação do professor dessas disciplinas, o que também é satisfatório. Assim, o professor, sozinho, dá conta de explorar conceitos de diferentes disciplinas, mesmo sem ter domínio em algumas delas. Nesse caso, o professor precisa mediar as ações dos estudantes de modo a fazer esses conceitos “conversarem” durante a atividade.

Em outras situações, a Matemática age como ferramenta para o desenvolvimento de atividades de Modelagem em outras disciplinas. Observa-se também, que há o caso de duas ou mais disciplinas trabalharem em torno de um único tema, mas independentemente uma da outra, caso que se aproxima da multidisciplinaridade.

Ainda se vislumbram situações que, no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, a investigação suscita o surgimento de conceitos de outras

² SETTI; VERTUAN (2016a, 2016b).

disciplinas. Finalmente, observa-se em algumas atividades de Modelagem um único foco, um único problema, onde as diferentes disciplinas contribuem de modo conjunto e integrado, com seus conhecimentos, para resolver este problema.

Em atividades de Modelagem Matemática os conhecimentos acabam sendo utilizados e reinventados, ressignificados à medida que são trabalhados de modo não isolado, mas de modo integrado. É nesse sentido que vislumbramos a interdisciplinaridade: quando uma disciplina não está a serviço da outra, mas trabalham e atuam juntas. Assim, cada professor contribui com a atividade de acordo com sua perspectiva, desde o planejamento até a execução, promovendo, deste modo, o desenvolvimento do conhecimento em todas disciplinas, sem aparente grau de importância.

Das leituras realizadas, concluímos que em todos os trabalhos de Modelagem consultados nos anais de eventos, o objetivo comum era promover a integração de duas ou mais disciplinas. Esta integração se diferencia de acordo com as características de interdisciplinaridade elencadas nas atividades, apresentando desde o uso de conceitos de outra disciplina até a efetiva participação de diversos professores de diferentes disciplinas em prol da resolução de um problema.

Nossa compreensão é de que para que o trabalho seja efetivamente interdisciplinar deve-se haver uma “interação entre duas ou mais disciplinas” (JAPIASSU, 1976) mas, em concordância com Tomaz e David (2008, p. 16), entendendo que “a interdisciplinaridade poderia ser alcançada quando os conhecimentos de várias disciplinas são utilizados para resolver um problema ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista”.

Neste contexto, a atividade de Modelagem, ao partir de uma situação da realidade, necessariamente envolve mais de uma área do conhecimento (não necessariamente uma disciplina escolar, mas área do conhecimento), pois a realidade é interdisciplinar. Todavia, para este trabalho ser efetivamente interdisciplinar no que tange às disciplinas, as disciplinas envolvidas (e seus professores) devem contribuir cada qual com seus conhecimentos, promovendo, deste modo, a aprendizagem interdisciplinar.

Deste modo, tomando as categorizações que foram construídas e verificadas na literatura para a interdisciplinaridade, faz sentido pensar as atividades de Modelagem Matemática como atividades interdisciplinares. Isto porque, necessariamente, ao trabalhar com Modelagem Matemática, lidamos com outra área do conhecimento, independentemente dessa área do conhecimento ser disciplina ou não na escola.

Sugerimos a leitura dos artigos a seguir:

SETTI, Elenice Josefa Kolancko. VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Que interdisciplinaridade se verifica nos trabalhos de Modelagem Matemática? In: Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, 7, 2016. Londrina: **Anais...** Londrina: SBEM, 2016.

SETTI, Elenice Josefa Kolancko. VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Um olhar para a interdisciplinaridade presente nos trabalhos de Modelagem Matemática apresentados nas últimas seis edições da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM). In: Simpósio Nacional de Ensino e Aprendizagem, 3, 2016. Londrina: **Anais...** Londrina: UTFPR, 2016.

ORIENTAÇÕES DE DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

Oriente os alunos a sentarem em grupos:

- É importante que a atividade de Modelagem seja desenvolvida pelos alunos organizados em grupo. Deste modo, poderão trocar ideias e conhecimentos.

Há três possibilidades de iniciar uma atividade de Modelagem Matemática:

- Você pode apresentar aos alunos, o tema, informações sobre o tema juntamente com os dados necessários e o problema. Deste modo, os alunos se envolveriam somente na resolução do problema e obtenção do modelo matemático (BARBOSA, 2004);
- Você pode apresentar o tema juntamente com o problema. Assim, os alunos deverão buscar as informações e os dados necessários (BARBOSA, 2004);
- Você pode ainda apresentar somente o tema aos alunos, que por sua vez, deverão buscar as informações e formular o problema, para então resolvê-lo (BARBOSA, 2004).
- E, por fim, há a possibilidade de os alunos escolherem um tema de interesse, buscarem informações e dados a respeito do tema escolhido, formular o problema e resolvê-lo obtendo o modelo matemático (BURAK, 2004).

O modo como decidirá como irá iniciar uma atividade de Modelagem, dependerá das especificidades de sua turma e de sua escola, assim como do tempo disponível e dos objetivos que quer alcançar.

É importante tomar alguns cuidados na mediação da atividade para não a descaracterizar como sendo de Modelagem Matemática:

- Inicialmente, deixar que os alunos investiguem a situação.
- Permitir que eles busquem caminhos, mesmo que você acredite que não seja o melhor, ou que seja diferente do que você tomaria. Talvez, a partir da abordagem de um grupo de alunos, surja discussões muito ricas.
- Reservar um momento de socialização das resoluções dos grupos.

- Durante o desenvolvimento da atividade pode surgir dúvidas sobre conceitos matemáticos nos grupos. O professor pode, e deve, explicar o conceito no grupo ou no quadro.

SISTEMATIZAÇÃO DOS CONTEÚDOS:

- É muito importante sistematizar os conteúdos considerados novos para a turma que emergirem numa atividade de Modelagem. Pois é com a sistematização que o aluno terá condições de utilizar os conhecimentos desenvolvidos na atividade em outras situações. No entanto, em Modelagem, não é o professor falando para os alunos, mas sim o professor falando com os alunos.
- É importante também, a participação de outros professores no desenvolvimento de atividades de Modelagem. Pois quando o professor de outra disciplina estiver engajado na investigação, o conteúdo pode ser melhor abordado, pois todos os conhecimentos são igualmente importantes. Caracterizando assim a interdisciplinaridade vislumbrada na categoria 2.
- Quando sistematizamos os conteúdos, trabalhamos de modo diferenciado dos livros didáticos. Por exemplo: ao se trabalhar função a partir de uma demanda de uma atividade de Modelagem, trabalha-se diante das características das funções e da influência dos parâmetros numéricos das funções, diferente do modo como geralmente é apresentado aos alunos, pela atribuição de valores à expressão algébrica, construção de tabela e conversão da tabela em gráfico.

ATIVIDADES DE MODELAGEM

O Homem que Calculava – Malba Tahan

[...] Contente com os lucros que obteve, o meu bondoso patrão, acaba de conceder-me quatro meses de repouso e vou, agora, a Bagdá, pois tenho desejo de visitar alguns parentes e admirar as belas mesquitas e os suntuosos palácios da cidade famosa. E para não perder tempo, exercito-me durante a viagem, contando as árvores que ensombram esta região, as flores que a perfumam, os pássaros que voam no céu entre nuvens.

E, apontando para uma velha grande figueira que se erguia à pequena distância, prosseguiu:

- Aquela árvore, por exemplo, tem duzentas e oitenta e quatro ramos.

Sabendo-se que cada ramo tem, em média, trezentas e quarenta e sete folhas, é fácil concluir que aquela árvore tem um total de noventa e oito mil, quinhentas e quarenta e oito folhas! Estará certo, meu amigo?

- Que maravilha! - exclamei atônito. - É inacreditável possa um homem contar, em rápido volver d'olhos, todos os galhos de uma árvore e as flores de um jardim! Tal habilidade pode proporcionar, a qualquer pessoa, seguro meio de ganhar riquezas invejáveis!

- Como assim? - estranhou Beremiz. - Jamais me passou pela ideia que se pudesse ganhar dinheiro, contando aos milhões folhas de árvores e enxames de abelhas! Quem poderá interessar-se pelo total de ramos de uma árvore ou pelo número do passaredo que cruza o céu durante o dia?

- A vossa admirável habilidade - expliquei - pode ser empregada em vinte mil casos diferentes. Numa grande capital, como Constantinopla, ou mesmo Bagdá, sereis auxiliar precioso para o governo. Podereis calcular populações, exércitos e rebanhos. Fácil vos será avaliar os recursos do país, o valor das colheitas, os impostos, as mercadorias e todos os recursos do Estado. Asseguro-vos - pelas relações que mantenho, pois sou bagdálí - que não vos será difícil obter lugar de destaque junto ao glorioso califa Al Motacém (nosso amo e senhor). Podeis talvez exercer o cargo de vizir-tesoureiro ou desempenhar as funções de secretário da Fazenda muçulmana. [...] (O Homem que Calculava – Malba Yahan, pg. 7)



VAMOS PENSAR UM POQUINHO!!!



Como será que Beremiz, o homem que Calculava, conseguia descobrir a quantidade de galhos e folhas de uma árvore? Será que ele utilizava algum artifício matemático? Alguma regra? Escreva o que vocês pensam sobre isso?

Será que é o mesmo método utilizado pelos organizadores de shows para ter ideia do público presente? Escreva o que vocês pensam sobre isso?



Como podemos estimar a quantidade de pessoas presentes em um show ou manifestação?

RELATO DO DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE 1 COM OS ALUNOS DO CURSO TÉCNICO EM INFORMÁTICA

No decorrer de algumas semanas já vinha conversando com os alunos que desenvolveríamos algumas atividades diferenciadas, expliquei a dinâmica de uma aula com atividades de Modelagem, seus objetivos e importância.

No dia 14 de junho de 2016, cheguei em sala e solicitei que os alunos se sentassem em grupos de 5 integrantes. Como a turma era numerosa, 46 alunos, eles se atrapalharam um pouco, necessitando de ajuda. Depois que os alunos estavam em grupos, iniciei a conversa retomando o assunto do livro. A reação dos alunos não foi das melhores. Por se tratar de um livro de “Matemática” já iniciaram a leitura com receio. Disseram que não entenderam, que o livro era muito difícil. Um aluno chegou a dizer: *“Eu odeio Matemática, como que eu vou ler um livro de Matemática?”*. Questionei-os sobre se tentassem uma segunda leitura, após as atividades alusivas ao Dia da Matemática com a apresentação do teatro, vídeos e paródias, se eles acreditavam que a compreensão seria melhor. Alguns alunos disseram acreditar que sim.

Continuamos então a fazer um *feedback* do contexto da história, especificamente dos trechos que tratavam de contagem de folhas, camelos, etc. Sempre questionando os alunos em como eles achavam que “o homem que calculava” conseguia determinar grandes quantidades com tanta rapidez.

Distribui entre os alunos a atividade 1 (disponível para impressão no site).

Passamos a discutir e a levantar hipóteses de como ele poderia realizar esses cálculos e como hoje poderíamos utilizar a mesma estratégia para determinar a quantidade de pessoas em um show, passeata, palestra ou manifestação.

Uma aluna sugeriu que Beremiz contava inicialmente a quantidade de folhas em um galho, depois contava a quantidade de galhos e multiplicava os valores. Deste modo, chegaram à conclusão que, para estimar a quantidade de pessoas em certo local, primeiramente devemos saber quantas pessoas estão presentes em uma região de área igual a $1m^2$, depois calcular a área do local e, por fim, multiplicar essa quantidade de pessoas pela área do local.

Questionei-os então, sobre quantas pessoas cabem em $1m^2$. Alguns disseram oito, outros seis. Em seguida, questionei-os se em qualquer situação a quantidade de pessoas por metro quadrado será sempre a mesma. Sugeri então que construíssem uma região quadrada cuja área é de $1m^2$ no chão da sala de aula e determinassem quantas pessoas caberiam nela.

Deste modo, cada grupo de alunos construiu a sua região quadrada cuja área era de $1m^2$ utilizando fita métrica ou régua e fita crepe. Eles mesmos, por experimentação,

determinaram quantas pessoas caberiam em uma área de $1m^2$ em várias situações, de pequenas, médias e grandes aglomerações conforme apresentado nas Fotografias 1, 2 e 3.



Fotografia 1 - Alunos medindo os segmentos para formar a região quadrada de 1 metro de lado
Fonte: arquivos da autora.



Fotografia 2 - Alunos medindo os segmentos para formar a região quadrada de 1 metro de lado
Fonte: arquivos da autora.



Fotografia 3 - Grupo de alunos determinando experimentalmente a quantidade de pessoas que cabem em $1 m^2$
Fonte: arquivo da autora.

Após a experimentação, os alunos voltaram aos grupos e passaram a socializar os valores que os demais grupos definiram. Os alunos pensaram em quantidades de pessoas por metro quadrado em diferentes locais e em diferentes situações (Figura 1).

Numero (pessoas)	m ²	local
8	1	Passeata
5	1	Danzando em 1 festa
9	1	Balada
3	1	(ajoelhados) Igreja judaica
10	1	Ônibus
1	1	(Girando com os braços abertos)
PARÂMETRO		
PEQUENO	MÉDIO	GRANDE
2	5	8

Figura 1 - Registro do grupo 1: Aglomeração de pessoas em 1m² em diferentes situações
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 1, o grupo 1 apresentou seis situações diferentes onde há aglomeração de pessoas: passeata, dançando em uma festa, balada, ajoelhados em uma igreja, no ônibus e girando com os braços abertos. A partir de experimentações no “metro quadrado construído” estimaram quantas pessoas caberiam em uma área de 1m² em cada situação. Em seguida, este grupo generalizou os parâmetros em pequeno com duas pessoas, médio com cinco pessoas e grande com oito pessoas.

* Em uma festa : $\cong 4$ pessoas por metro ²
* Manifestações : $\cong 7$ pessoas p/ metro ²
* Festa com poucas pessoas: $\cong 2$ pessoas p/ metro ²
* Saída da escola: $\cong 10$ pessoas p/ metro ² (quando está chovendo)
* Saída da escola em dias normais: $\cong 5$ pessoas p/ metro ²
* Entrada / saída de metrô : $\cong 12$ pessoas p/ metro ²

Figura 2 - Registro do grupo 4: Aglomeração de pessoas em 1m² em diferentes situações.
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 2, o grupo 4 apresentou situações diferentes das apresentadas pelo grupo 1. Observa-se que cada grupo pensou em locais que seus membros costumam frequentar ou até mesmo aproveitaram para expressar a dificuldade de algum familiar ou amigo que mora em outra cidade, como quando apresentam a situação do metrô, que não existe na cidade de Assis Chateaubriand.

Assim, após a socialização de todos os grupos, definiram, em consenso, um parâmetro para quantidade de pessoas por metro quadrado para pequenas, médias, grandes e muito grandes aglomerações (Quadro 11). Essa definição se deu levando em conta que quando há aglomeração de pessoas, esta, dificilmente, é homogênea. E ainda, há casos em que a aglomeração é grande e há casos que é pequena, ou seja, tem muitas pessoas no local ou tem poucas pessoas no local. Neste sentido, os alunos pensaram nestes quatro parâmetros: pequena concentração, média concentração, grande concentração e muito grande concentração, para poder pensar e modelar diferentes situações.

GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3
Festa: 4 pessoas Metrô: 12 pessoas Escola (chuva): 10 pessoas Escola (sem chuva): 5 pessoas Manifestação: 7 pessoas Festa (pouca): 2 pessoas	Palco: 12 Saída escola: 6 Manifestação: 8	Manifestação: 8 Festa: 6 Show (palco): 9
GRUPO 4	GRUPO 5	GRUPO 6
Dançando: 4 Palco: 10 Palco (longe): 5 Manifestação: 7 Parados: 10	Passeata: 8 Dançando: 5 Balada: 9 Ajoelhado na igreja: 3 Ônibus: 10 Girando com os braços abertos: 1	Perto palco: 6 Dançando: 2 Desfile a pé: 1
GRUPO 7	GRUPO 8	GRUPO 9
Show (frente): 7 Show (meio): 5 Show (fundo): 3 Festa: 5 Manifestação: 8 Desfile: 4	Perto do palco (dançando): 6 Longe: 3 Manifestação: 7 Rave: 6 a 8 Desfile: 2 a 3	Show frente: 7 Show meio: 6 Show fundo: 2 Ônibus: 6 Fila da "Break's" ³ : 5
PARÂMETRO PARA A ATIVIDADE (negociado entre todos os alunos)		
Para uma aglomeração: Pequena: 2 pessoas Média: 5 pessoas Grande: 8 pessoas Muito grande: 10 pessoas		

Quadro 5 - Parâmetros de todos os grupos referentes à aglomeração de pessoas em 1m²

Fonte: elaborado pela autora.

³ Lanchonete do Instituto que os alunos frequentam nos intervalos das aulas e no período da tarde.

A maioria dos grupos pensou em um parâmetro para festas ou shows. Neste sentido, a partir dos parâmetros determinados, os alunos passaram a investigar a seguinte questão:

Como determinar a quantidade de pessoas presentes em um show no Centro de Eventos Ângelo Micheletto de Assis Chateaubriand a partir de uma foto aérea do show?

Na semana seguinte tivemos “Semana de Cursos” e os alunos foram assistir a uma palestra no auditório durante a aula de Matemática. Deste modo, a continuação da atividade de Modelagem ocorreu somente na semana seguinte, no dia 28 de junho.

Assim, por haver se passado duas semanas, inicialmente realizamos um *feedback* da última aula para podermos nos situar. Em seguida, com os alunos já sentados em grupo, disse a eles que agora teríamos que determinar um modelo matemático para responder ao nosso problema que era estimar a quantidade de pessoas presentes em um determinado local.

Questionei-os quanto a que aspectos deveríamos levar em consideração. Um aluno disse que o espaço do show e outro disse que o tipo de show. Um terceiro aluno argumentou que bastaria contar os ingressos vendidos. Contra argumentei então no caso de o show ter entrada livre, que é o que aconteceu nas últimas edições da ExpoAssis⁴.

Então um aluno disse que deveríamos levar em consideração o tamanho do lugar. Neste momento questionei: Quantos metros quadrados tem o espaço para shows no Parque de Exposições de Assis?

Solicitei que discutissem nos grupos como faríamos para determinar a área de um determinado local. Disponibilizei 15 minutos para que pudessem discutir e depois socializar o que fizeram.

Os alunos ficaram alguns minutos sem reação. Após alguns questionamentos e incentivos iniciaram as discussões nos grupos. Chamavam-me para esclarecer algumas dúvidas e voltavam a pensar. Projetei então uma foto (Fotografia 4) de um show que aconteceu no Centro de Eventos Ângelo Micheletto em Assis Chateaubriand, local onde ocorre a ExpoAssis.

⁴ ExpoAssis – Festa e Exposição do município de Assis Chateaubriand-Paraná.



**Fotografia 4 - Foto aérea de um show no Centro de Eventos Ângelo Micheletto
(projetada pela professora)**

Fonte: <http://mapio.net/pic/p-20930388/> - acesso em 08/03/2017.

Solicitei que observassem e fizessem comentários sobre a imagem. Alguns alunos observaram que as pessoas se aglomeravam mais perto do palco e à medida que ficavam mais longe do palco a concentração era menor. Após o tempo se encerrar, iniciamos a socialização do que os alunos fizeram.

Cada grupo falou como pensou para calcular a quantidade de pessoas num determinado local. No entanto, os alunos pensaram somente em um local retangular, não se atentaram em observar a forma geométrica do espaço. Todos os grupos pensaram mais ou menos da mesma forma, calcular a área do local e multiplicar pela quantidade de pessoas por metro quadrado em cada região. Na exposição dos alunos, eles explicavam como procederiam para resolver o problema. No entanto, não apresentaram um modelo algébrico para representar a quantidade de pessoas em um determinado local. Desse modo, a partir das estratégias que os alunos apresentaram, passamos a construir o modelo algébrico juntos, pensando em variáveis para representar as dimensões do local retangular, como os alunos haviam investigado (Figura 3).

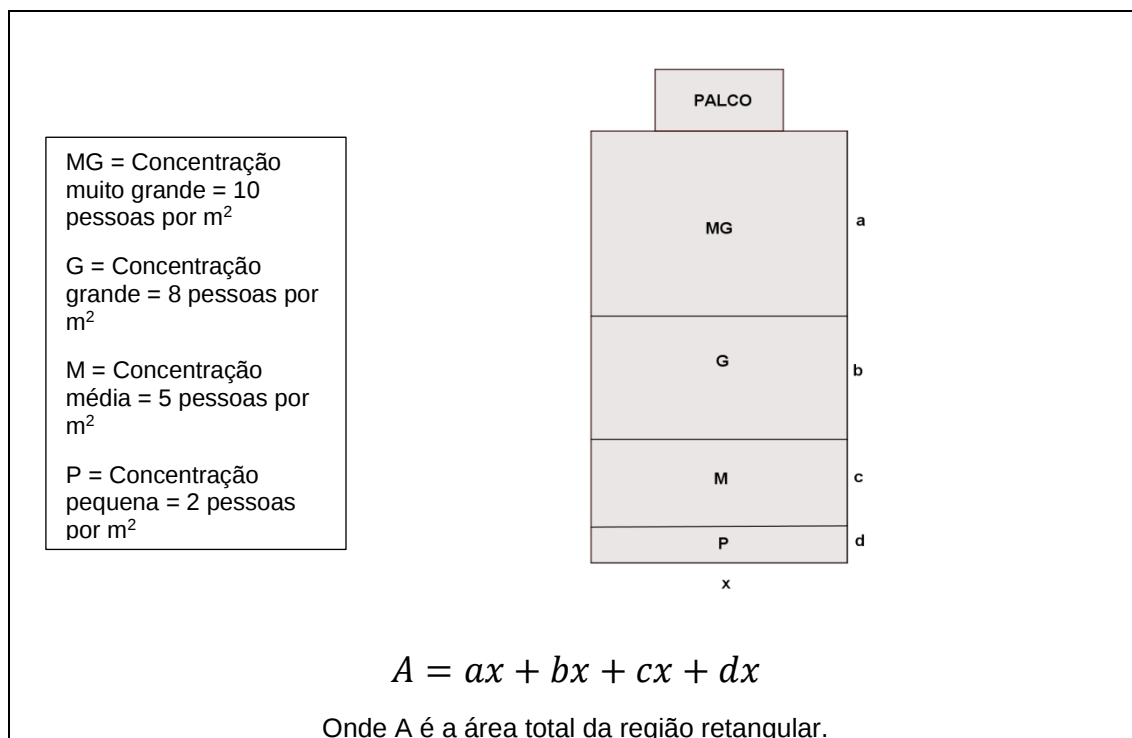


Figura 3 - Modelo matemático construído para determinar a área de um local retangular
Fonte: elaborado pela autora.

De acordo com os parâmetros que os alunos determinaram experimentalmente:

$$MG = 10 \text{ pessoas}; G = 8 \text{ pessoas}; M = 5 \text{ pessoas e } P = 2 \text{ pessoas}$$

Assim, o modelo matemático para estimar a quantidade de pessoas em um local retangular será:

$$Tp = 10ax + 8bx + 5cx + 2dx$$

Onde T_p é a quantidade total estimada de pessoas em um local retangular.

Colocando a variável x em evidência, temos:

$$Tp = x(10a + 8b + 5c + 2d)$$

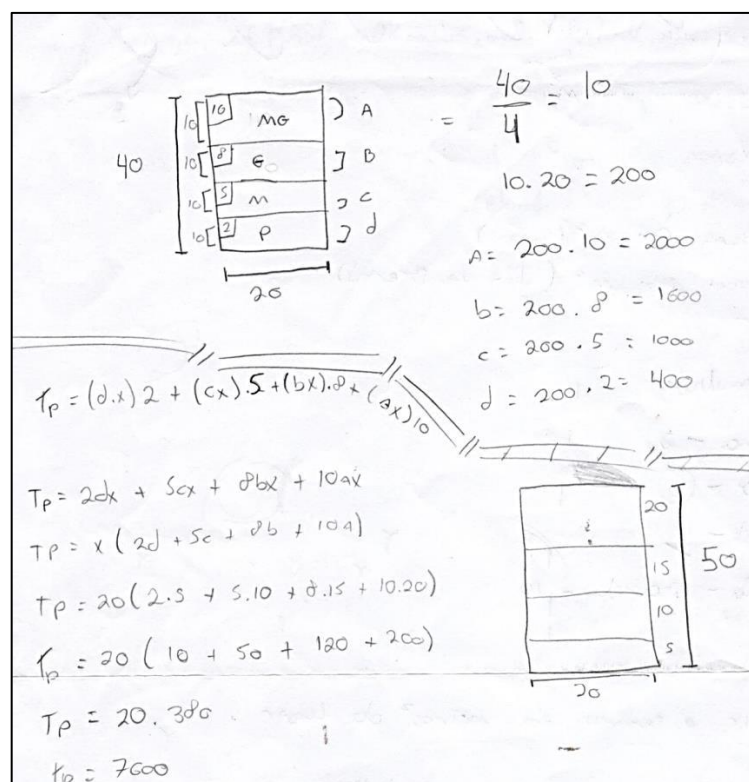


Figura 4 - Registro do grupo 9 - Modelo matemático encontrado para determinar a concentração de pessoas em um local retangular e uma possível solução para o problema
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 4, observamos o registro dos alunos do grupo 9. Inicialmente, eles dividem o local retangular em quatro faixas representando as diferentes aglomerações. No entanto, consideram as quatro regiões com tamanhos iguais e utilizam um valor estimado de 10 metros para cada faixa calculando a quantidade de pessoas em cada faixa. Em seguida, decidem considerar faixas de tamanhos diferentes com medidas estimadas, calculando a quantidade de pessoas presentes em um suposto show.

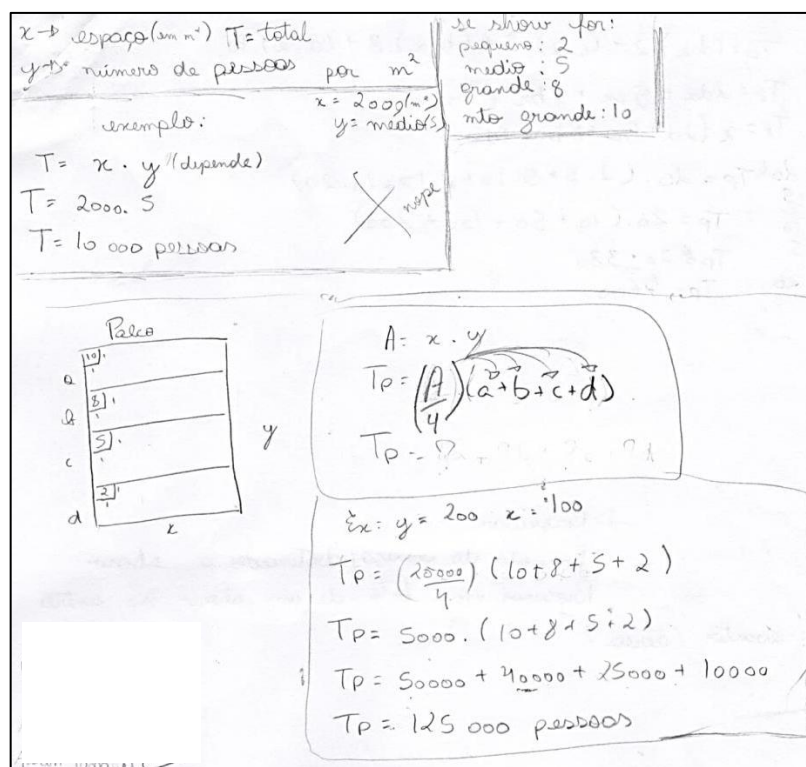


Figura 5 - Registro do grupo 2 - Modelo matemático encontrado para determinar a concentração de pessoas em um local retangular e uma possível solução para o problema
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 5 observamos o registro do grupo 2. A princípio eles consideram x como o espaço em m^2 , y o número de pessoas por m^2 e T o total de pessoas no local. Preocupam-se em apresentar um exemplo supondo a área do local e aglomeração média, encontrando o total de pessoas nessas condições. Em seguida apresentam um modelo algébrico no qual consideram a área da região retangular ($A = xy$, onde agora x é a largura do local e y é o comprimento) dividida por quatro para multiplicar com as diferentes aglomerações. Novamente apresentam um exemplo fictício.

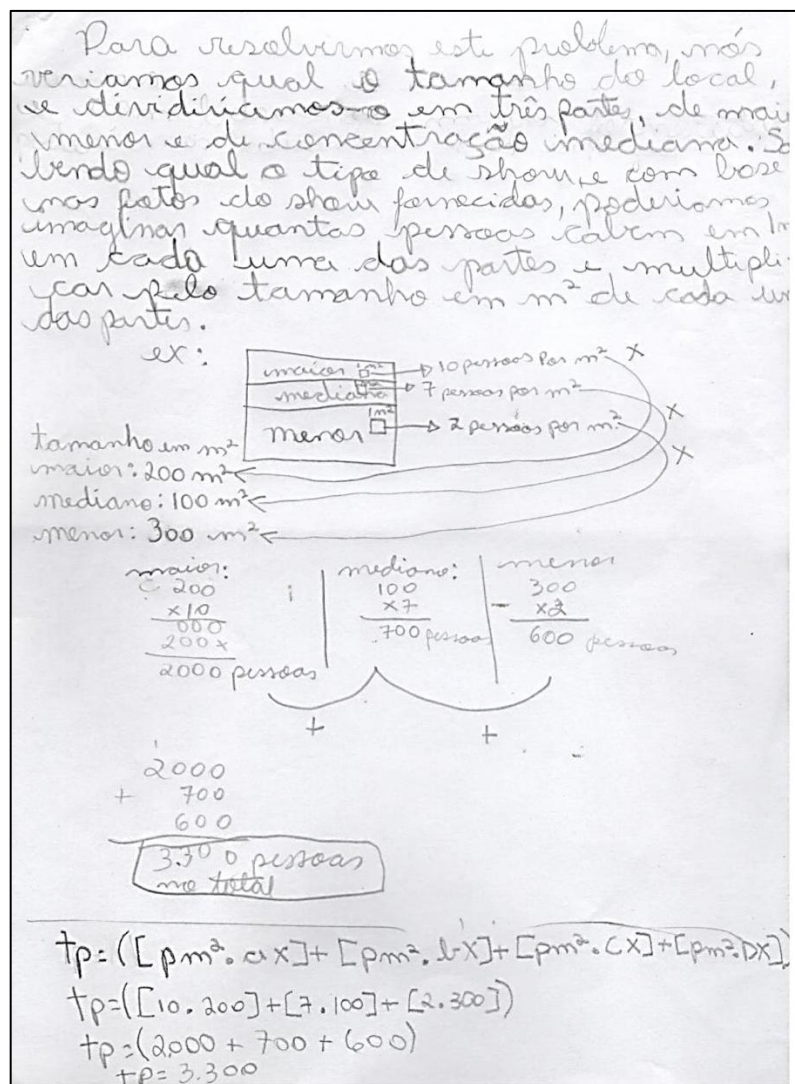


Figura 6 - Registro do grupo 5: Modelo matemático encontrado para determinar a concentração de pessoas em um local retangular e uma possível solução para o problema
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 6, o grupo 5 apresenta o plano de resolução de forma escrita apresentando um exemplo em seguida. Logo após, apresenta a formalização do que escreveu em forma algébrica e a resolução com dados fictícios.

No entanto, após a socialização dos grupos, os questioneei se o local destinado ao público no Centro de Eventos Ângelo Micheletto era realmente retangular. Os alunos não souberam responder. Apesar de alguns conhecerem o local, não se lembravam do formato. Sugerir que pesquisassem. Um aluno sugeriu que olhassem no *Google Maps*. No entanto, a aula já estava terminando. Então, pedi que pesquisassem em casa o formato do local e procurassem uma foto de um show que tivesse ocorrido neste local.

Nas próximas duas semanas, precisei realizar uma avaliação de um conteúdo que havíamos estudado anteriormente para poder fechar o conceito da disciplina, visto que o

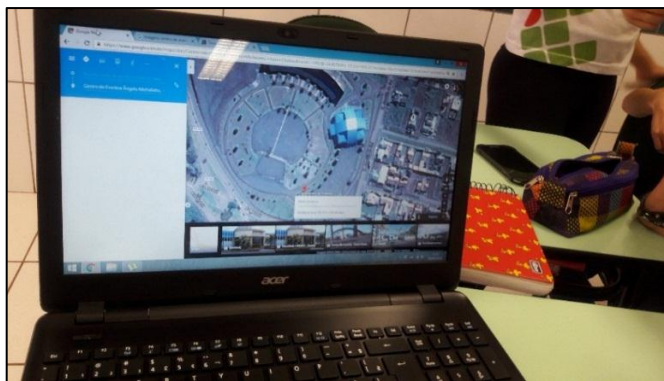
bimestre estava se encerrando. Deste modo, retomamos a atividade de Modelagem somente após as férias de julho.

Retomamos então a atividade de Modelagem no dia 2 de agosto. Entreguei aos grupos as folhas com as anotações dos dois últimos encontros de Modelagem, para que pudessem retomar a investigação e retomei o seguinte questionamento:

Como determinar a quantidade de pessoas presentes em um show no Parque de Exposições Ângelo Micheletto de Assis Chateaubriand a partir de uma foto aérea do show?

Para auxiliar os grupos, fiz duas perguntas auxiliares: *Qual é a capacidade de pessoas do local destinado ao público dos shows? A partir de uma foto aérea que os próprios alunos selecionaram, quantas pessoas possivelmente estavam presentes no show?*

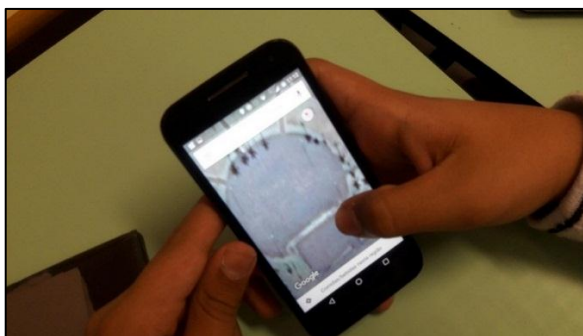
Neste sentido, os grupos passaram a investigar no *Google Maps* o local destinado ao público nos shows da ExpoAssis (Fotografia 5).



Fotografia 5 - Pesquisa no Google Maps no notebook
Fonte: arquivos da autora.



Fotografia 6 - Momento do desenvolvimento da atividade nos grupos
Fonte: arquivos da autora.



Fotografia 7 - Pesquisa no Google Maps no celular
Fonte: arquivos da autora.

Após observarem que o local tinha um formato circular, passaram a investigar algumas características do círculo como: diâmetro, raio, corda e área.

Explorando o *Google Maps*, lembraram que na aula de Geografia estudaram o conceito de escala e usaram-no para determinar o raio da região circular, medindo aproximadamente o diâmetro do local na tela do notebook ou do celular com uma régua e comparando esta medida com a escala apresentada no Google Maps. Outros grupos descobriram a função medir distância no mapa online e a utilizaram para conseguir as medidas reais do local.

Após alguns momentos de discussões, sugestões, utilizaram a fórmula da área do círculo para determinar a área da região. Para determinar a capacidade de pessoas do local, alguns grupos decidiram calcular uma média de concentração, considerando os quatro parâmetros estabelecidos anteriormente. Para isso adicionaram os valores para pequena concentração (2), média (5), grande (8) e muito grande (10) e dividiram por quatro, encontrando uma concentração média de seis pessoas por m^2 . Após determinarem a média, estes grupos multiplicaram pela área e determinaram aproximadamente o número de pessoas que poderiam assistir a um show no Centro de eventos. Outros grupos determinaram apenas a área do local.



Fotografia 8 – Alunos trabalhando na atividade
Fonte: arquivos da autora.



Figura 7 - Imagem do Google Maps

Fonte: adaptado pela autora a partir de print da página do Google Maps.

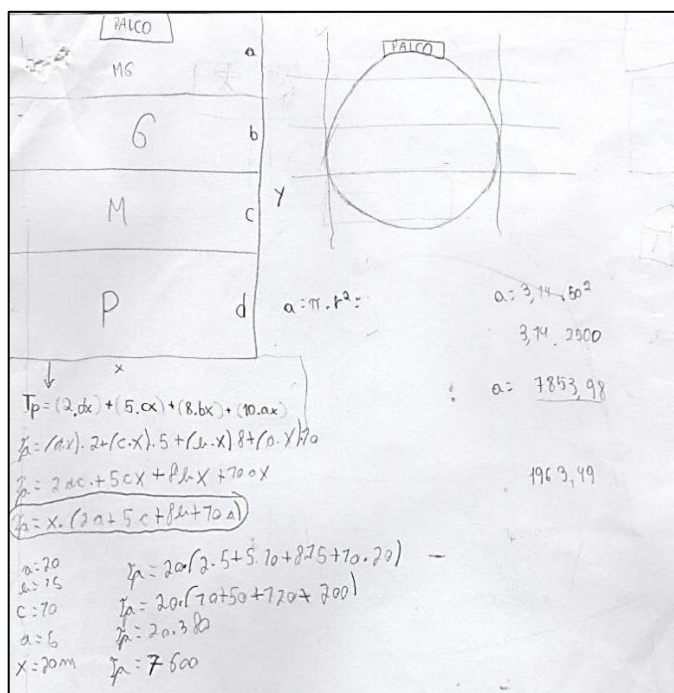


Figura 8 - Registro do grupo 4 – Modelo Matemático

Fonte: registro dos alunos.

Na figura 8, observa-se no canto superior direito, a representação que os alunos fizeram do local circular. Tentaram transferir este modelo à ideia que utilizaram no modelo retangular, que consiste em dividir o local em faixas de concentração. Podemos observar logo abaixo que eles calculam a área da região circular através da fórmula matemática da área do círculo.

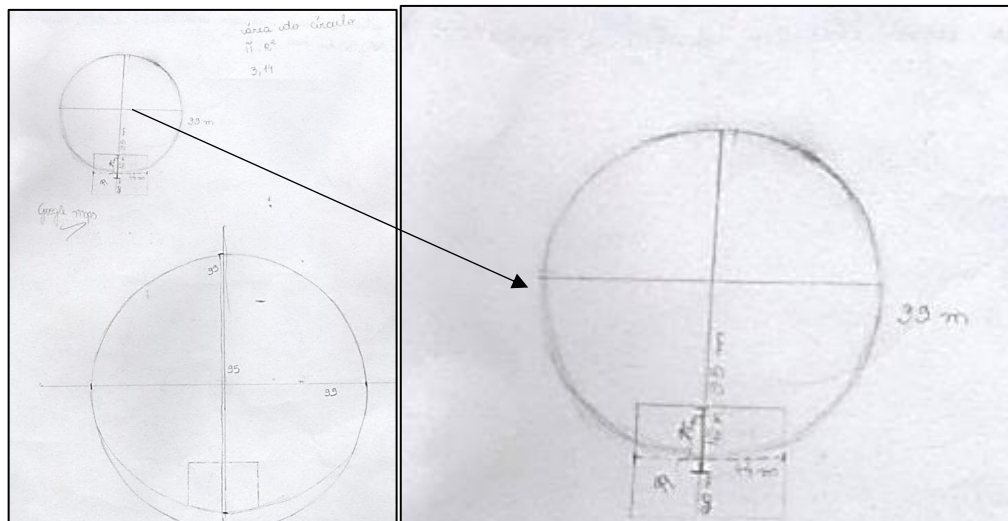


Figura 9 - Registro do grupo 1: Modelo Matemático
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 9, o grupo 1 representou o local através de um círculo e anotaram as medidas verificadas no Google Maps. Percebe-se que se preocuparam em determinar o diâmetro do local e as dimensões do retângulo destinado ao palco. No entanto, neste momento, ainda não apresentaram uma solução para o problema.

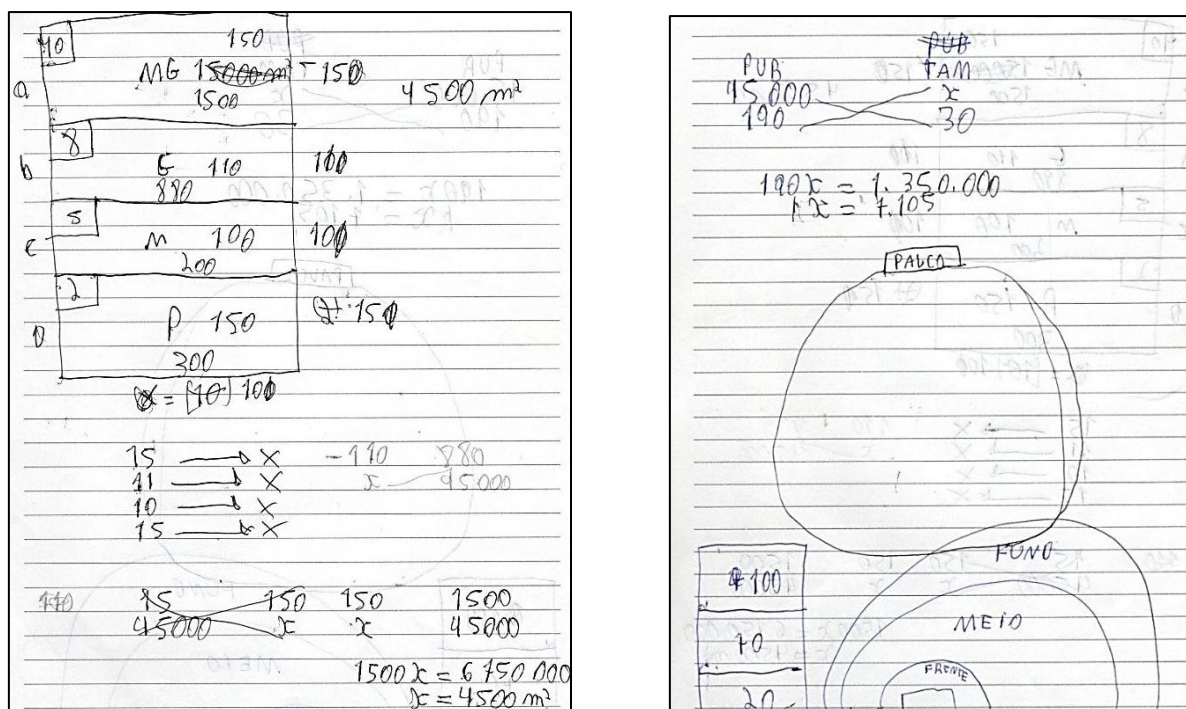


Figura 10 - Registro do grupo 7: Modelo Matemático
Fonte: registro dos alunos.

Na figura 10, o grupo 7 tentou usar proporção, comparando a área retangular e a quantidade de pessoas no local. Esta última informação foi encontrada pelos alunos sobre um show da ExpoAssis em que esteve presente um público de quarenta e cinco mil pessoas. Deste modo, estimaram a área da região circular em sete mil, cento e cinco metros quadrados.

Depois, os grupos passaram a investigar as fotos dos shows que encontraram na internet para determinar o número de pessoas presentes naquela ocasião específica.

A foto escolhida pelo grupo 5 está apresentada na Fotografia 9 e sua resolução consta na Figura 11. Com o auxílio do Google Earth, os alunos determinaram o diâmetro do local e consequentemente o raio ($d = 100 \text{ m}$ e $r = 50 \text{ m}$). A partir dessas informações, calcularam o comprimento aproximado e a área do círculo. Em seguida, utilizando os parâmetros de concentração muito grande ($10 \text{ pessoas por m}^2$) e grande ($8 \text{ pessoas por m}^2$), calcularam a quantidade de pessoas em cada caso, ou seja, considerando que houvesse 10 pessoas por m^2 em toda a área de show e depois considerando que houvesse 8 pessoas por m^2 em toda a área de show. Depois, calcularam a média dos dois valores encontrados, obtendo 70677 pessoas.



Fotografia 9 - Foto selecionada pelo grupo 5

Fonte: <http://www.radiojornalam.com.br/not%C3%ADcias/geral/item/6648-jads-e-jadson-reuniram-grande-p%C3%BAblico-no-primeiro-dia-da-expo-assis-2015.html>.

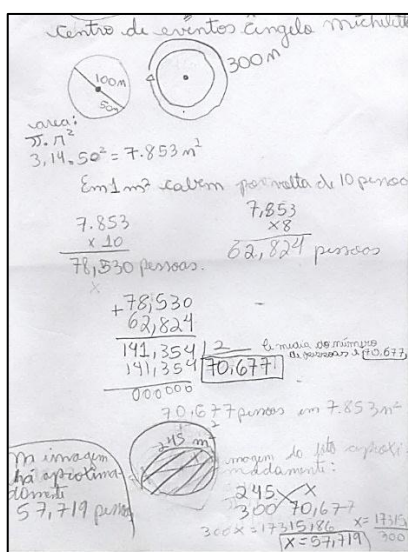


Figura 11 - Registro do grupo 5: Modelo Matemático

Fonte: registro dos alunos.

No entanto, o grupo não apresentou a informação real de quantas pessoas estavam presentes para poder realizar a validação do resultado. Neste sentido, procuramos em sites da imprensa local a imagem do grupo (Fotografia 9) e a encontramos juntamente com a estimativa de público (Figura 12).



Figura 12 - Recorte da notícia sobre o show de abertura da ExpoAssis 2015
Fonte: <http://www.radiojornalam.com.br/not%C3%ADcias/geral/item/6648-jads-e-jadson-reuniram-grande-p%C3%BAblico-no-primeiro-dia-da-expo-assis-2015.html>.

Tomando como pertinente a estimativa da notícia veiculada na Figura 12, de pelo menos 30 mil pessoas no show, tem-se um valor distante do encontrado pelo grupo. Possivelmente o problema tenha ocorrido devido à concentração considerada pelo grupo, de 9 pessoas por m².

Talvez, se o grupo tivesse considerado as diferentes aglomerações que definiu no início da investigação, também nessa situação, de modo que na faixa mais próxima do palco estivesse uma concentração mais alta e mais distante do palco, uma aglomeração menor, o resultado fosse mais próximo da estimativa noticiada.

Já o grupo 7 (fotografia 10), pensou em outra estratégia de resolução a partir das imagens que selecionou (fotografias 4 e 10). Os alunos calcularam uma média de ocupação e depois multiplicaram pela área do local. Em seguida, para validação, buscaram encontrar a quantidade real de pessoas presentes no show da imagem. No entanto, encontraram esta informação apenas de uma imagem. A informação encontrada foi de 50938 pessoas e a

quantidade estimada pelos alunos foi de 48550 pessoas. O resultado foi considerado satisfatório pelos alunos.



Fotografia 10 - Foto aérea do Centro de eventos Ângelo Micheletto

Fonte: <https://www.opresente.com.br/noticia/show-de-amado-batista-encerra-a-expo-assis-2014-com-recorde-de-publico>. Acesso em 28/06/2016.

diâmetro: 94 m
raio: 47 m

$$\pi \cdot R^2 = A$$

$$3,14 \cdot 47^2 = A$$

$$3,14 \cdot 2209 = A$$

$$6936 \approx A$$

média 5/m²
 $6936 \text{ m}^2 \times 5 = 34.600 \text{ pessoas}$

1ª imagem utilizada

na frente: 6 Real: 50938
 meio: 7
 no fundo: 7 médio final: 7/m²
 $6936 \text{ m}^2 \times 7 = 48.552$

2ª imagem

na frente: 3 Real: não encontrado
 meio: 4
 fundo: 2 médio final: 3/m²
 $6936 \text{ m}^2 \times 3 = 20.808$

Figura 13 - Resolução do grupo 7

Fonte: registro dos alunos.

A seguir apresentamos a representação do modelo matemático para a área circular desenvolvido pela maioria dos grupos.

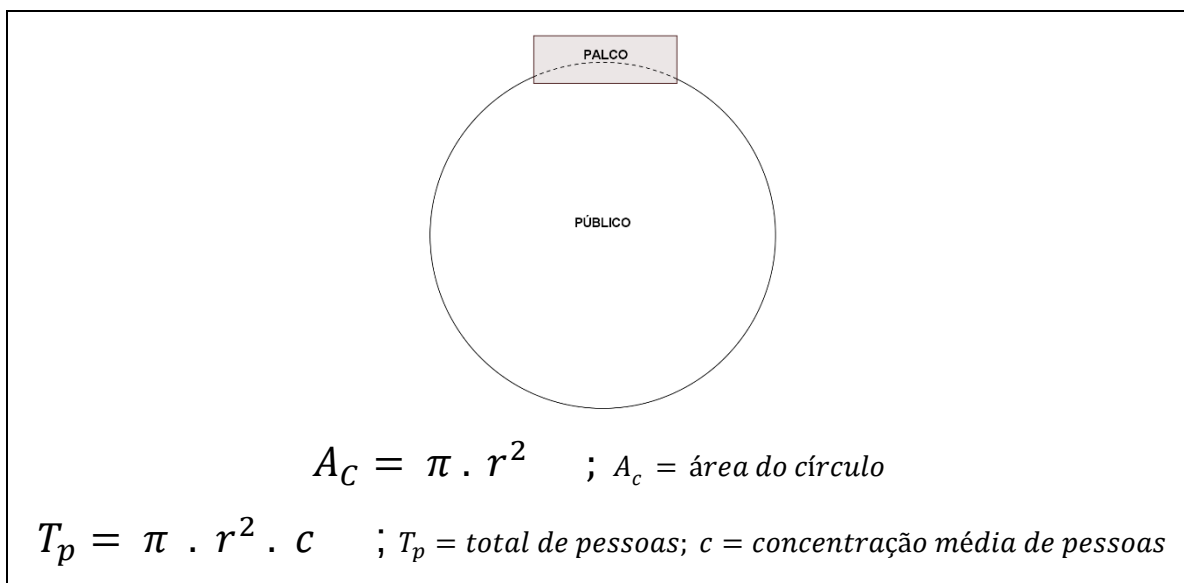


Figura 14 - Modelo Matemático para concentração de pessoas em um local circular
Fonte: elaborado pela autora.

Podemos observar que os grupos (nove ao todo) determinaram quantidades diferentes para o público presente em um show na ExpoAssis. Contudo, estas quantidades se aproximam e ainda, estão condizentes com as informações relatadas pela imprensa da região, que estimou a quantidade de pessoas no show de abertura da ExpoAssis em 30 mil pessoas e no show de encerramento em mais de 40 mil pessoas.

Foi encerrada ontem (23) a Expo Assis 2014 com a 31ª Festa das Nações e outras atrações. A maior festa de Assis Chateaubriand foi sucesso de público e superou os cerca de 70 mil de 2013. Com entrada gratuita em todos os cinco dias, a Expo Assis teve a participação aproximadamente 90 mil pessoas, que passaram pelo Centro de Eventos Ângelo Micheletto.

Destaque para o dia de abertura e o sábado (22). Na quarta-feira (19), o público chegou a cerca de 30 mil com o show da dupla Munhoz e Mariano. Já no sábado, estima-se que Amado Batista levou mais de 40 mil para o evento.

Figura 15 - Recorte da notícia de O PRESENTE

Fonte: <http://www.opresente.com.br/noticia/show-de-amado-batista-encerra-a-expo-assis-2014-com-recorde-de-publico>. Acesso em 18/04/2017.

Entretanto, ainda existem outras possibilidades de encaminhamento desta atividade que foram suscitadas pelos alunos, mas acabaram sendo abandonadas por necessitarem de maiores investigações. Estas possibilidades poderiam desencadear outros modelos e envolver outros conteúdos matemáticos.

A figura 16 apresenta três possibilidades: o modelo I representa uma concentração maior perto do palco e nas “bordas” do local. Isso porque ao redor deste espaço circular

concentram-se barracas de comida e os alunos disseram acreditar que as pessoas se concentram perto destas barracas. No modelo II, supõe-se que não existiriam as barracas de comida, logo a atenção do público seria apenas o palco. Deste modo, as pessoas vão se concentrando mais na frente e esta concentração vai diminuindo à medida que se vai distanciando do palco, formando “meias-luas” (como dito pelos alunos). No modelo III, a situação é semelhante ao II, mas ao invés de formar meias-luas, as concentrações vão formando faixas. Das três representações apresentadas, a II é a que mais se assemelha à situação real do Centro de Eventos, de acordo com as imagens aéreas.

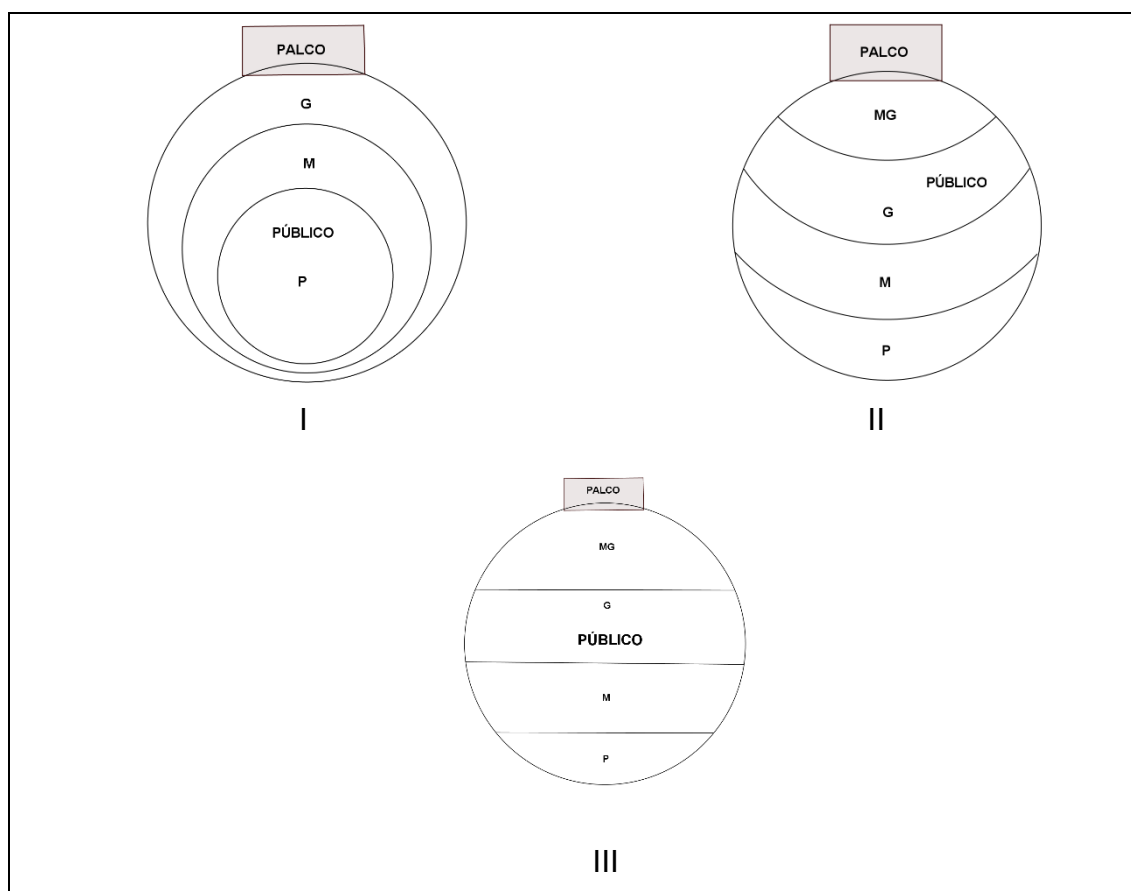


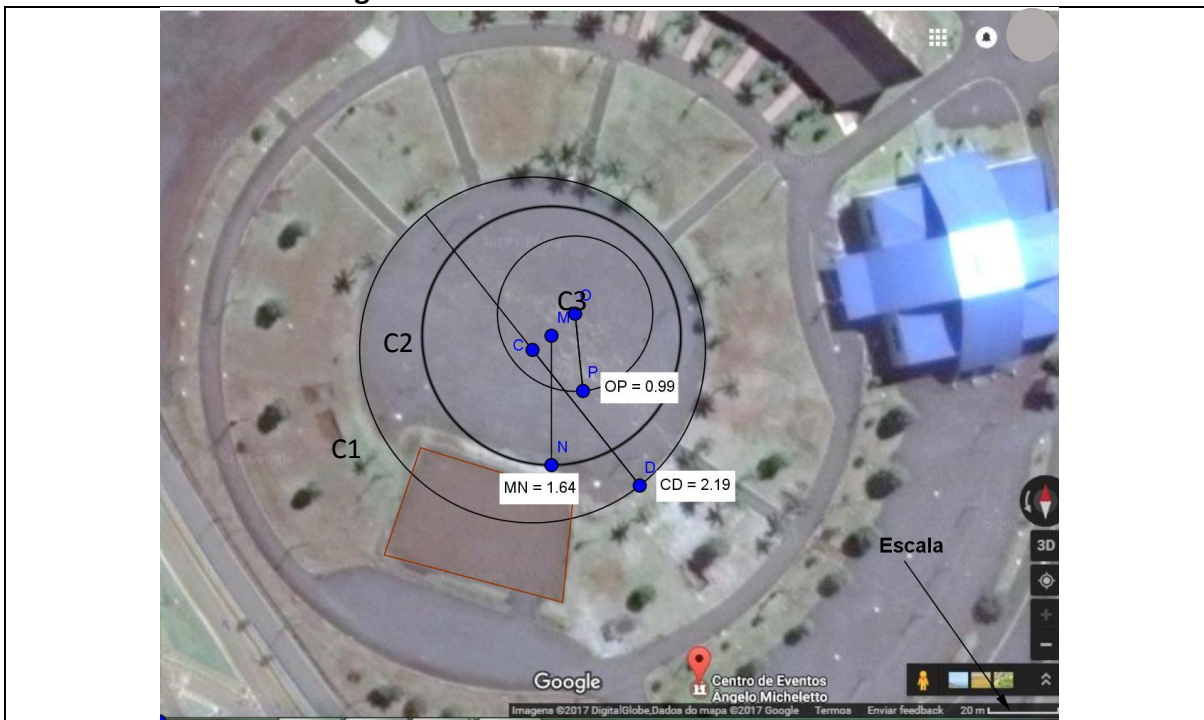
Figura 16 - Outras possibilidades de modelo para concentração de pessoas em um local circular
Fonte: elaborado pela autora.

Por vislumbrarmos que a primeira dessas situações (Modelo I) seria passível de investigação no âmbito da turma em que se deu a coleta de dados, é que nos propusemos a discutir uma possibilidade de resolução para essa configuração de aglomeração de pessoas em um show.

Outra reflexão suscitada após o desenvolvimento da atividade é que faltou voltarmos a falar de Malba Tahan no fechamento da atividade. Uma possibilidade, neste contexto, seria

retomarmos a discussão acerca de como o homem que calculava possivelmente fazia para realizar suas estimativas e, de repente, a partir da atividade de Modelagem Matemática desenvolvida, buscar calcular a quantidade de folhas em uma árvore, por exemplo, um dos contextos apresentados no livro.

Sugestão de encaminhamentos – Modelo 1



Na tela do Google Maps, o diâmetro da circunferência maior é de 6 cm, como a escala (no zoom fixado) era de 20 m para um segmento de 1,2 cm (na tela), temos que o diâmetro real é de 100 metros. Capturamos a imagem da tela e a abrimos no GeoGebra. No software, construímos três circunferências que representam as delimitações das diferentes aglomerações e medimos os seus respectivos raios:

$$OP = 0,99 \text{ cm}$$

$$MN = 1,64 \text{ cm}$$

$$CD = 2,19 \text{ cm}$$

Como $CD = 2,19 \text{ cm}$ representa o raio de 50 metros, por proporção determinamos os outros dois raios:

$$2,19 \rightarrow 50 \text{ m}$$

$$2,19 \rightarrow 50 \text{ m}$$

$$1,64 \rightarrow x$$

$$0,99 \rightarrow x$$

$$x = 37,4 \text{ m}$$

$$x = 22,6 \text{ m}$$

Área da Região G:

$$A_G = A_{C1} - A_{C2}$$

$$A_G = \pi \cdot r_1^2 - \pi \cdot r_2^2$$

$$A_G = (3,14 \cdot 50^2) - (3,14 \cdot 37,4^2)$$

$$A_G = 7850 - 4392$$

$$A_G = 3458 \text{ m}^2$$

Procedendo do mesmo modo para as regiões M e P, encontramos as seguintes áreas:

$$A_M = A_{C2} - A_{C3}$$

$$A_P = A_{C3}$$

$$A_M = 4392 - 1604$$

$$A_P = 1604 \text{ m}^2$$

$$A_M = 2788 \text{ m}^2$$

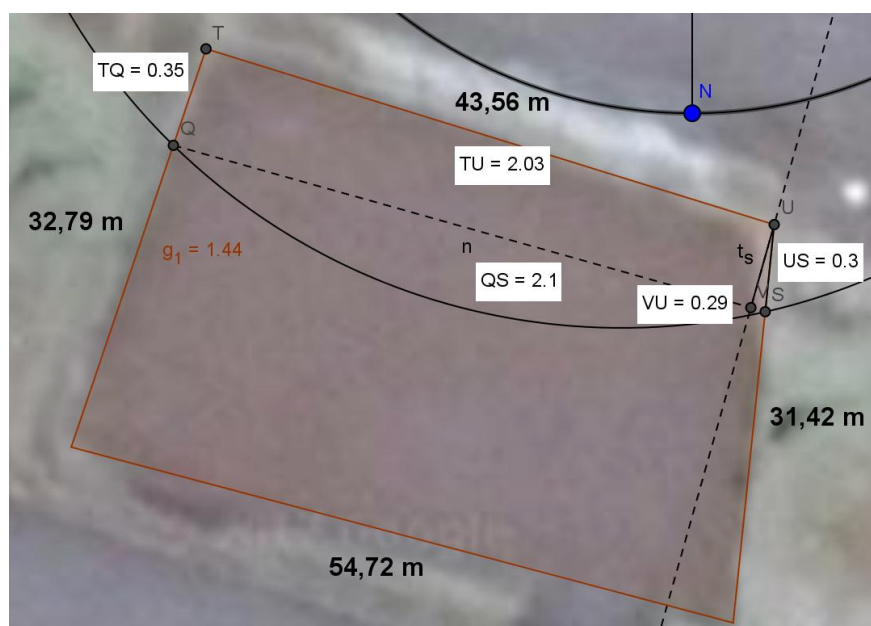
Deste modo, a concentração estimada de pessoas no local com estas características de aglomeração será de:

$$Q_P = A_G \cdot 8 + A_M \cdot 5 + A_P \cdot 2$$

$$Q_P = 3458 \cdot 8 + 2788 \cdot 5 + 1604 \cdot 2$$

$$Q_P = 44812 \text{ pessoas}$$

*Observa-se que uma parte do palco ocupa uma pequena área da região G. Esta parte não é ocupada pelo público e sim pela equipe do show (banda, equipe técnica). O ideal seria desconsiderar esta área.

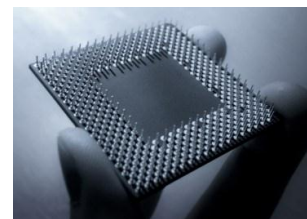


Cálculo da área do trapézio TUSQ:

➔ Obtenção das medidas reais desconhecidas por proporção das medidas reais conhecidas:

DE QUE TAMANHO VAI FICAR?

Transistor ou transístor é um componente eletrônico semicondutor responsável pelo controle do fluxo de energia (elétrons) nos processadores eletrônicos. Foi inventado na década de 1950 devido a necessidade de substituir a válvula eletrônica e que fosse mais barato, mais pequeno e consumisse menos energia que as válvulas. Existem hoje diferentes tipos de transístores que estão presentes em um grande número de diferentes processadores.



A velocidade de um processador depende em grande parte da quantidade de transístores que ele possui. Para conseguir chegar a uma velocidade cada vez maior, as indústrias estão em busca de transístores cada vez menores conforme exposto no quadro a seguir:

Processador	Ano	Tamanho do transmissor (em μm)
Intel 4004	1971	15
Intel 8088	1979	3
Intel 80486	1989	1
Pentium 60 MHz	1993	0,8
Pentium 100 MHz	1994	0,6
Pentium 166 MHz	1995	0,4
Pentium 166 MHzx	1997	0,35
Pentium III 350	1998	0,25
Intel Celeron 366	1999	0,22
Cyrix 3	2000	0,15
Pentium III Tualatin	2001	0,13
Pentium IV	2005	0,07
Core	2010	0,03
Core i x	2016	0,022

Quadro1: Relação entre modelo de processador, ano de lançamento e tamanho do transistor. Fonte: adaptado de VERTUAN (2013)

AS PESQUISAS CONTINUAM...

Segundo artigo da revista Exame publicado em julho de 2015, um grupo de cientistas desenvolveu um transistor tão pequeno que pode ser não apenas o menor modelo já criado, mas o menor modelo possível composto por uma única molécula. Pesquisadores dos Estados Unidos, Alemanha e Japão, utilizaram uma molécula de ftalocianina de cobre com uma dúzia de átomos de índio e um material de suporte de arsenieto de índio. Mas, antes de comemorar a conquista, e imaginar que ela dará origem a uma série de eletrônicos minúsculos, é preciso lembrar que o experimento foi realizado em laboratório, no vácuo quase total e a uma temperatura pouco acima do zero absoluto. Ou seja, a tecnologia ainda levará um bom tempo para chegar às linhas de produção, isso se ela se demonstrar viável em outras condições.

Tendo em vista a diminuição do tamanho dos transístores observada no decorrer dos anos, qual pode ser o tamanho do transístor no ano de 2020 se considerarmos o quadro 1 como referência de progressão?

RELATO DO DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE 2 COM OS ALUNOS DO CURSO TÉCNICO EM INFORMÁTICA

No dia 18 de agosto, na aula de Matemática, entreguei aos alunos a atividade impressa (Quadro 20) com uma breve descrição do transistor e a tabela com dados de 1971 até 2016, com o seguinte problema:

Tendo em vista a diminuição do tamanho dos transístores observada no decorrer dos anos, qual pode ser o tamanho do transistor no ano de 2020 se considerarmos o quadro 1 como referência de progressão?

Sugeri que os alunos “brincassem com os dados”, que observassem se existia algum padrão. Sugeri também que construíssem gráficos com os dados e observassem o seu comportamento.

Os alunos, em grupo, começaram a analisar o comportamento dos dados da tabela 1. Alguns grupos recorreram ao GeoGebra⁵ (Gráfico 2) e outros à planilha eletrônica Calc⁶ (Gráfico 1) para construir o gráfico correspondente aos pares formados pelos anos e pelos tamanhos do transistor, e outros tentaram esboçar o gráfico no papel (Figura 18).

Tabela 1 - Progressão do tamanho dos transístores

<i>Ano</i>	<i>T</i>	<i>Tamanho</i>
1971	1	15
1979	9	3
1989	19	1
1993	23	0,8
1994	24	0,6
1995	25	0,4
1997	27	0,35
1998	28	0,25
1999	29	0,22
2000	30	0,15
2001	31	0,13
2005	35	0,07
2010	40	0,03
2016	46	0,022

Fonte: elaborado pela autora.

⁵ Software livre de Geometria dinâmica.

⁶ Planilha eletrônica do LibreOffice.

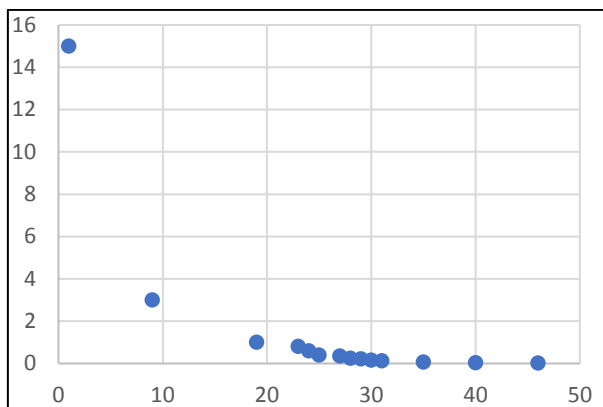


Gráfico 1 - Tamanho do transístor em μm no decorrer dos anos (1971 – 2016): gráfico construído na planilha eletrônica
 Fonte: elaborado pela autora.

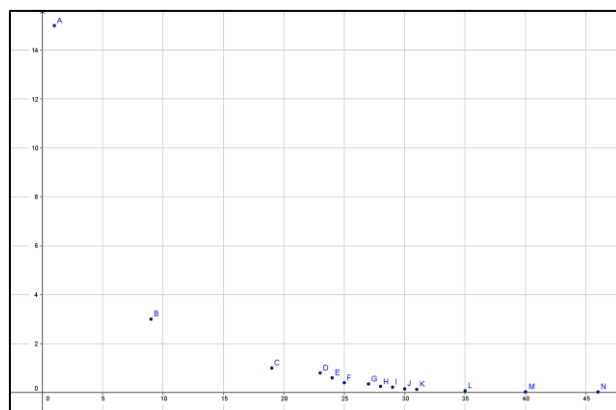


Gráfico 2 - Tamanho do transístor em μm no decorrer dos anos (1971 – 2016): gráfico construído no GeoGebra
 Fonte: elaborado pela autora.

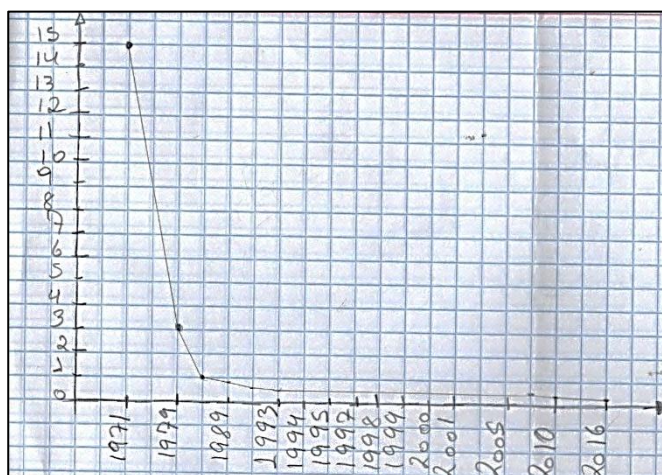


Figura 17 - Registro dos alunos: dados plotados no plano cartesiano
 Fonte: registro dos alunos.

Depois que plotaram os pontos no gráfico, questionei-os sobre o comportamento dos dados. Os alunos sugeriram que, de acordo com os pontos no gráfico, o tamanho do transístor vem diminuindo muito no decorrer dos anos. Questionei-os então em como faríamos para determinar o tamanho do transístor (Figura 19) no ano de 2020. Eles começaram a analisar a variação do tamanho do transístor e observaram que ela não era constante e nem se aproximava de uma constante, por isso não poderia ser expressa por uma função afim. Assim, voltando à representação gráfica, concluíram que se a variação fosse constante, os pontos se comportariam linearmente, o que não era o caso.

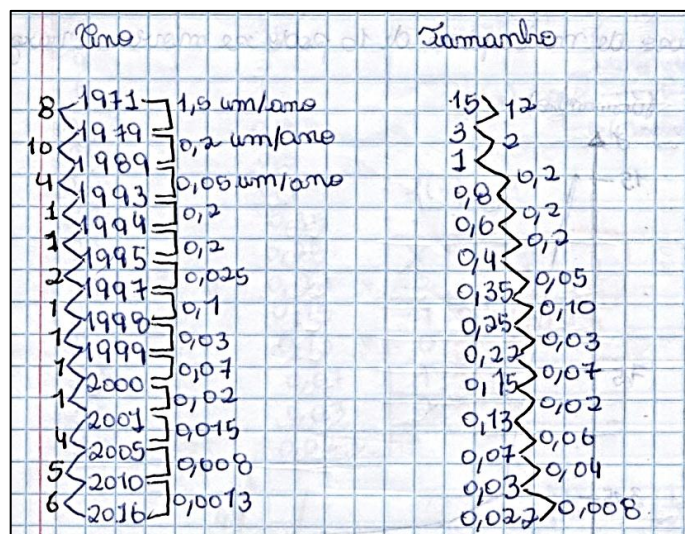


Figura 18 - Registro dos alunos: estudo da variação
Fonte: registro dos alunos.

Deste modo, depois que eles tentaram associar o comportamento dos dados a uma função afim e observaram que não era possível, ou seja, que a variação não era constante, bem como depois que observaram os pontos no plano cartesiano e descartaram a hipótese de associar a curva a uma parábola, eles não tinham conhecimento de qual outra curva poderia se adequar à situação.

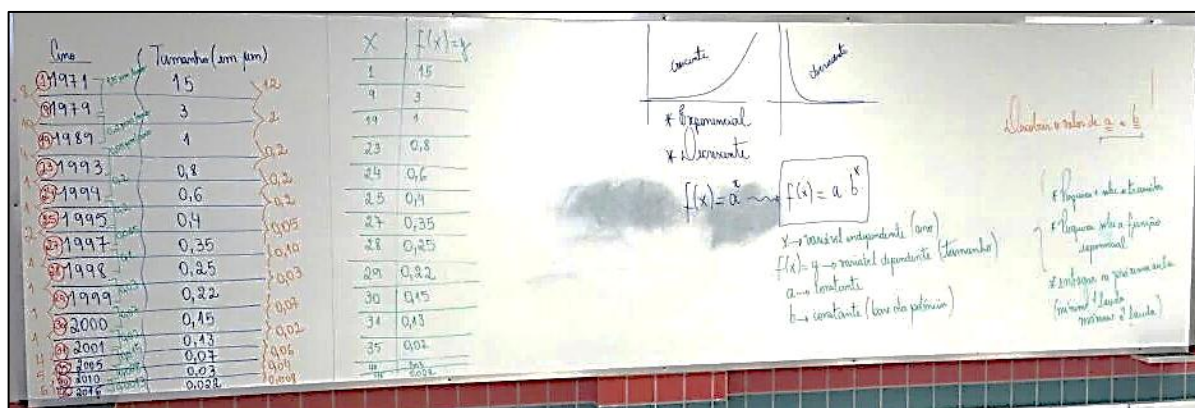
Neste momento, começaram a requerer minha ajuda, porque não possuíam instrumentos suficientes para dar conta da situação. Como professora, aproveitei o momento para revisar as funções que já conheciam do ano anterior (9º ano) - afim e quadrática - e ainda para abordar outro tipo de curva da qual eles não tinham conhecimento até o momento, a exponencial.

Assim, fui caracterizando cada função, explicitando as diferenças entre elas no que tange à variação, comportamento gráfico, domínio, imagem, deslocamentos nos eixos, representação algébrica, entre outras características.

Em relação às funções afim e quadrática, somente revisei suas características. No entanto, como a situação se configurou como um caso exponencial, debruçamo-nos em estudar este tipo de função, contrariando a sequência de conceitos que geralmente é trabalhada no primeiro ano do Ensino Médio – Função Afim, Função Quadrática, Função Exponencial, Logaritmo. Os conceitos de Função Afim e Quadrática foram trabalhados após o estudo de Função Exponencial e Logaritmos.

Depois de discutirmos as características das referidas funções, os alunos concordaram que os pontos se comportavam exponencialmente. Neste contexto, fui para o quadro para juntos socializarmos o que os grupos haviam discutido e, como nos

aproximávamos do final da aula, solicitei que pesquisassem mais sobre função exponencial para a próxima aula.



Fotografia 11 - Registro no quadro da socialização do estudo de variação
Fonte: arquivos da autora.

Na semana seguinte, os alunos trouxeram algumas informações sobre função exponencial. Uma delas era de que o gráfico da função exponencial sempre interceptava o eixo y em 1, o que não estava acontecendo com a representação da situação. Neste sentido, expliquei que nós estávamos lidando com um caso de função do tipo exponencial ($f(x) = k \cdot a^x$), ou seja, ela sofreu algumas modificações e se deslocou no plano cartesiano em comparação com a função exponencial ($f(x) = a^x$). A partir daí, expliquei o conteúdo de função exponencial, enfatizando suas características e as relacionando com a situação que estávamos investigando (Fotografia 11). Em seguida, sugeri que tentássemos encontrar a forma algébrica que melhor se aproximava dos dados.

Como se tratava de uma turma de primeiro ano que estava tendo o primeiro contato com função exponencial e função do tipo exponencial, assim como ainda estava se adaptando às atividades de Modelagem, optei em intervir na determinação do modelo, sugerindo que escolhessem dois pontos e os substituíssem na função $f(x) = k \cdot a^x$. Deste modo, surgiu um sistema de equações exponenciais. No entanto, os alunos não tinham reação, não lembravam como se resolvia um sistema. Então acabei intervindo de modo a revisar também o método de resolução de sistema de equações.

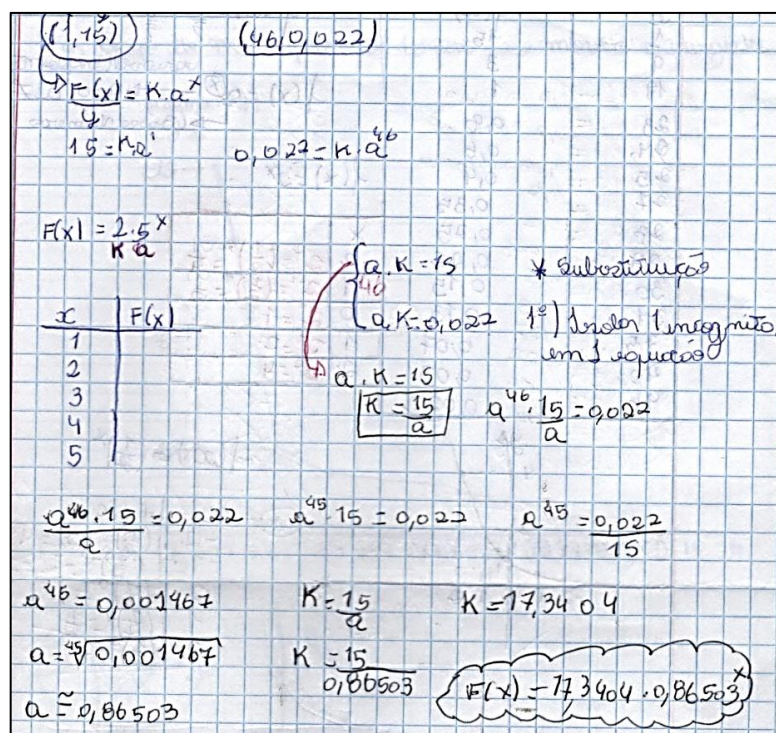


Figura 19 - Registro dos alunos: Obtenção do modelo algébrico
Fonte: registro dos alunos.

Após a obtenção do modelo, solicitei que os alunos o validassem substituindo os dados da tabela 1, conforme consta na tabela 2 e Figura 21. Como os valores encontrados eram muito próximos, consideraram o modelo válido.

x	Tamanho do transistor	$f(x)$
1	15	14,9999
9	3	4,7026
19	1	1,1031
23	0,8	0,6176
24	0,6	0,5343
25	0,4	0,4522
27	0,35	0,3458
28	0,25	0,2991
29	0,22	0,2587
30	0,15	0,2238
31	0,13	0,1936
35	0,07	0,1084
40	0,03	0,0525
46	0,022	0,022

Fonte: elaborado pela autora.

x	$F(x)$	$F(x) = 17,3404 \cdot 0,86503^x$
1	15	14.99996621
9	3	4.70261729
19	1	1.103192576
23	0,8	0.617697734
24	0,6	0.53432707
25	0,4	0.452208946
27	0,35	0.345860278
28	0,25	0.299179716
29	0,22	0.2587901277
30	0,15	0.223869121
31	0,13	0.193653506
35	0,07	0.108430145
40	0,03	0.0525177210
46	0,022	0.022003557

Figura 20 - Registro dos alunos: validação
Fonte: registro dos alunos.

Feito isso, agora os alunos tinham condições de responder ao problema apresentado: *Tendo em vista a diminuição do tamanho dos transístores observada no decorrer dos anos, qual pode ser o tamanho do transístor no ano de 2020 se considerarmos o quadro 1 como referência de progressão?*

Então, como o ano de 2016 correspondia ao tempo 46, consideraram o ano de 2020 como tempo 50. Substituíram no modelo desenvolvido e obtiveram a solução apresentada no Quadro 21.

$$f(50) = 17,34 (0,865)^{50} \rightarrow f(50) = 17,34 \cdot 0,00070926 \rightarrow f(50) = 0,0123$$

Quadro 6 - Resolução do problema
Fonte: elaborado pela autora.

Portanto, no ano de 2020, provavelmente o transístor terá aproximadamente 0,0123 μm (Figura 22).

46	0,032	10,022
50	0,012	→ para 2020

Figura 21 - Registro dos alunos: Resposta do problema
Fonte: registro dos alunos.

Para melhor validar o modelo desenvolvido, construímos no GeoGebra, a função de domínio $D = \{x \in \mathbb{N} | x > 1\}$, $f(x) = 17,34 (0,865)^x$ (em azul), plotamos os pontos e construímos a regressão exponencial (em vermelho). Podemos observar, no Gráfico 3, a proximidade das duas curvas e delas com os pontos que representam os dados.

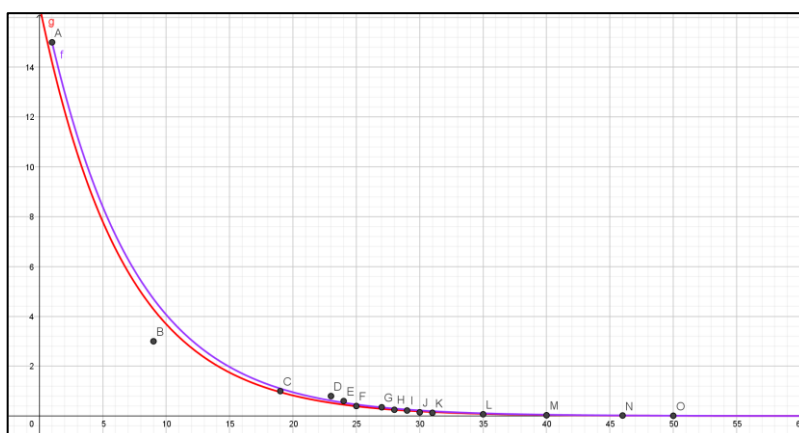


Gráfico 3 - Regressão dos dados realizada no GeoGebra
Fonte: elaborado pela autora.

Embora no momento do desenvolvimento da atividade só tenhamos discutido a abordagem da função exponencial, no momento das análises atentamos para o fato de existirem outras abordagens, como a consideração de uma progressão geométrica. Levando em consideração que não houve avanços em relação ao tamanho dos transístores entre os anos mencionados, o domínio desta função seria discreto, portanto não teria sentido o traçado da curva. No entanto, esta discussão não foi empreendida em aula. Consideramos o domínio da função como sendo $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$. A discussão empreendida com os alunos foi de considerarmos o ano de 1971 como sendo $x = 1$ e, a partir daí, ir relacionando os demais anos com os valores de x correspondentes. Deste modo, discutimos o conceito de domínio e imagem, relacionando os possíveis valores para a variável x e para a variável $f(x)$.

Paralelamente ao desenvolvimento da atividade de Modelagem nas aulas de Matemática, os alunos sanavam possíveis dúvidas com o professor de Informática nas aulas de Fundamentos de Informática e Algoritmos e Linguagem de Programação. O professor relatou que quando trabalhou sobre o tema no início do ano, os alunos não demonstraram tanto interesse como no momento da atividade de Modelagem. Relatou que os alunos estavam motivados e faziam perguntas pontuais sobre o tema se mostrando curiosos.



**Quantos celulares e notebooks você já teve ???
O que você faz com os aparelhos eletrônicos que
você não utiliza mais ???**



JORNAL NACIONAL - Edição do dia 09/11/2015
09/11/2015 20h55 - Atualizado em 11/11/2015 21h41

Brasil descarta por ano 1,2 milhão de toneladas de lixo eletroeletrônico

Lixo eletrônico vai chegar a 48 milhões de toneladas em 2017 no mundo.
Toneladas de material são descartadas com as novidades da tecnologia.

De acordo com uma notícia publicada no site do Jornal Nacional do dia 10 de novembro de 2015, das mais de 5500 cidades brasileiras apenas 724 possuem algum tipo de coleta de lixo eletrônico. E para onde vão os celulares, computadores e outros aparelhos eletrônicos que não são mais utilizados nas outras cidades?

Será que o descarte incorreto desse lixo prejudica o meio ambiente? De que forma?

O site E-lixo destaca que os lixos eletrônicos, quando descartados de modo incorreto, podem gerar sérios riscos ao meio ambiente, devido a presença de metais pesados e tóxicos em sua composição.

E há uma agravante em tudo isso!!!

Os produtos eletroeletrônicos são descartados em pouco tempo devido à inovação tecnológica. Gerando assim um grande acúmulo de objetos eletrônicos em desuso.

Algumas pessoas descobriram que podem ganhar seu sustento ao reciclar o lixo eletrônico. Mas esta reciclagem é perigosa, portanto deve ser feita com algumas regras de segurança.

Tendo em vista esta situação, questiona-se:

Qual é o impacto ambiental e econômico ocasionado pelo lixo eletrônico?

<http://www.sermelhor.com.br/ecologia/lixo-eletronico-problema-e-solucoes.html>

<http://www.elixo.org.br/reciclagem-lixo-eletronico/>

<http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/destino-do-lixo-eletronico-vira-um-desafio-planetario.html>



RELATO DO DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE 3 COM OS ALUNOS DO CURSO TÉCNICO EM INFORMÁTICA

Após três semanas, onde trabalhamos atividades relacionadas aos conceitos⁷ que emergiram da atividade dos transístores e realizamos uma prova, no dia 23 de setembro, demos início às primeiras discussões sobre o lixo eletrônico. Anteriormente, no final da aula do dia 9 de setembro, entreguei a atividade (Quadro 26) e solicitei aos alunos que pesquisassem sobre o tema e que anotassem informações relevantes.

Para iniciar as discussões, no dia da aula de Matemática passei para os alunos quatro vídeos⁸ curtos de uma série do Jornal Nacional sobre Lixo Eletrônico, disponibilizada no site do jornal em novembro de 2015. Os vídeos apresentam o contexto do lixo eletrônico no Brasil, os procedimentos corretos de reciclagem, os perigos da reciclagem sem as devidas precauções, o impacto do lixo eletrônico na natureza, entre outras coisas. Deste modo, entre um vídeo e outro íamos conversando e refletindo sobre o tema, além de anotar informações consideradas importantes. Nesta ocasião os alunos não estavam organizados em grupos. Os alunos se mostraram muito interessados no tema e anotaram algumas informações que consideraram importantes (Quadro 27).

40 milhões de toneladas de lixo eletrônico são gerados por ano no mundo.
Brasil: 97 mil toneladas por ano de computadores 2,2 mil toneladas por ano de celulares 17,2 mil toneladas por ano de impressoras
Em 2005, apenas 724 cidades no Brasil possuíam coleta de lixo eletrônico.
Brasil: 1,2 milhão de toneladas por ano de lixo eletroeletrônico.
Substâncias químicas presentes no lixo eletrônico: chumbo, cádmio, mercúrio, berílio, etc.
No lixo eletrônico há componentes de ouro, prata, cobre.

Quadro 7 - Informações coletadas pelos alunos

Fonte: elaborado pelo autor a partir das anotações dos alunos com referência nos vídeos de 2015.

⁷ Potenciação, Função Exponencial, Equação Exponencial.

⁸ Vídeo 1: <http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/brasil-descarta-por-ano-12-milhao-de-toneladas-de-lixo-eletroeletronico.html>

Vídeo 2: <http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/destino-do-lixo-eletronico-vira-um-desafio-planetario.html>

Vídeo 3: <http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/lixo-eletronico-pode-ser-altamente-perigoso-com-manuseio-inadequado.html>

Vídeo 4: <http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2015/11/paises-exportam-lixo-eletronico-para-outros-em-vez-de-reciclar.html>

Iniciamos uma reflexão sobre o consumo de tecnologia, de como as pessoas são levadas a trocar de aparelhos eletrônicos com frequência pela “Obsulência Programada”⁹. Surgiu então a ideia de levantar dados sobre o consumo de celulares na sala de aula. Solicitei então que os alunos anotassem em uma folha de papel quantos celulares já tiveram e, destes, quantos foram para o lixo (reciclável ou rejeito) (Figura 26).

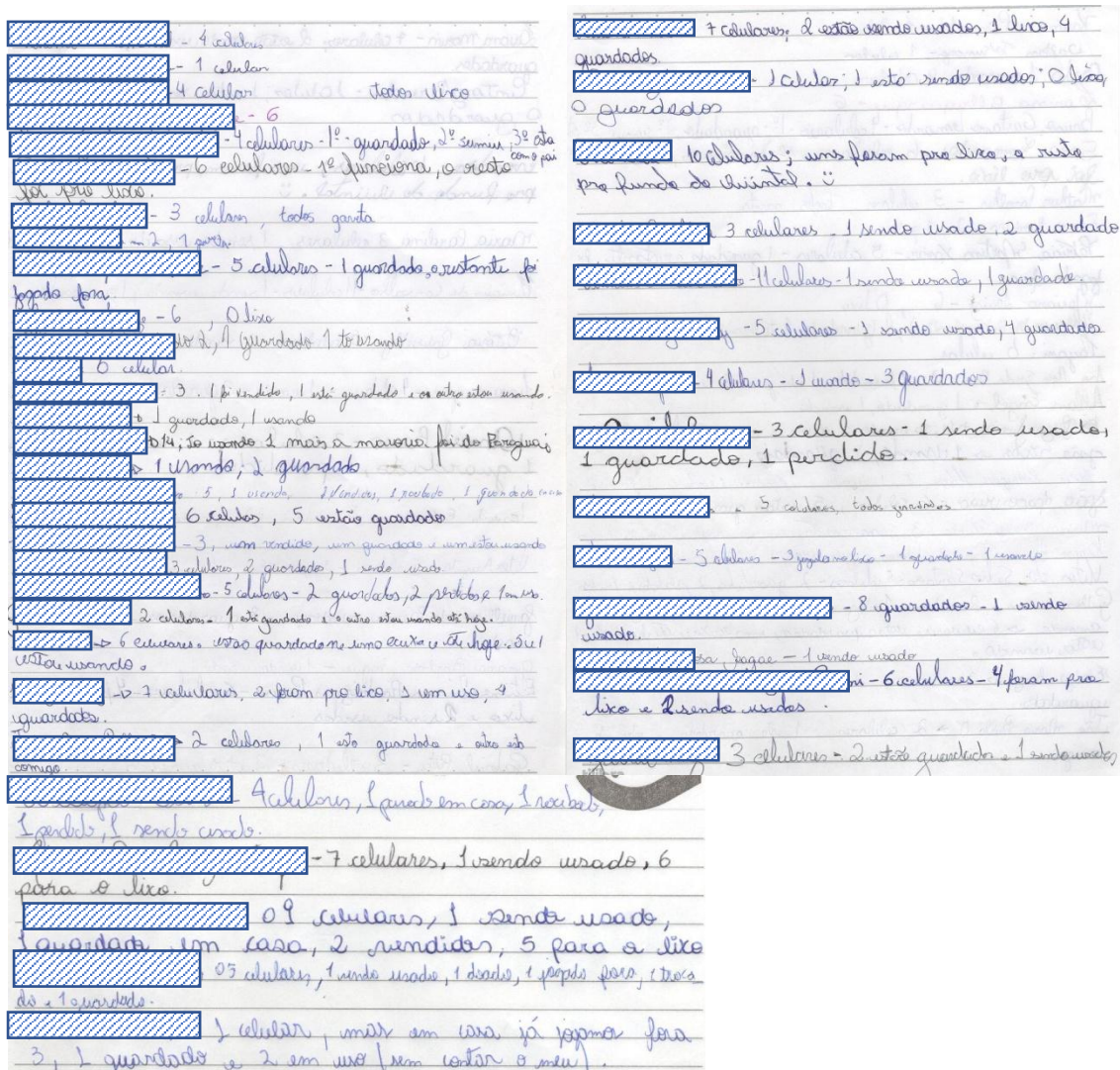


Figura 22 - Registro dos alunos: coleta de informações sobre quantidade de celulares
Fonte: registro dos alunos.

Durante o mês de outubro, os alunos ficaram de pesquisar mais sobre o tema, levantando informações e pensando em possíveis problemas. Sempre conversávamos sobre o tema no final da aula. Nestas conversas falamos sobre os elementos químicos presentes

⁹ Quando um produto é lançado no mercado e se torna propositalmente inutilizável em um curto período de tempo.

no lixo eletrônico, comentamos sobre a meia-vida destes elementos, sobre a quantidade de lixo eletrônico acumulada no Brasil (e no mundo) e sobre reciclagem.

No decorrer do desenvolvimento da atividade, o professor de informática, em conversa na sala dos professores, sugeriu que, como iria solicitar que os alunos desenvolvessem um site, que o tema poderia ser lixo eletrônico. A ideia inicial era de que o site apresentasse todo o desenvolvimento da atividade de Modelagem sobre o lixo eletrônico com as contribuições de todas as disciplinas envolvidas. Concordamos com a ideia e continuamos com os trabalhos.

No período de desenvolvimento da atividade, sempre buscava perguntar aos professores como estava sendo a contribuição de suas disciplinas. No entanto, as respostas sempre eram: “não tive tempo de contribuir ainda”, “estava terminando o conteúdo”, “os alunos não perguntaram nada”, “pode deixar que ainda vou contribuir”, “tive que aplicar prova”. Ao contrário do professor de Informática que buscava, em suas aulas, sempre trazer o assunto à tona e contribuir.

No final de uma aula de Matemática sobre funções, conversei com os alunos sobre o site que eles desenvolveriam com o professor de Informática. Deste modo, concordamos em utilizar o site como um meio de conscientização em relação ao lixo eletrônico. Isso porque estavam preocupados com a quantidade de lixo e com os elementos químicos que compõem este lixo. Neste contexto, conversamos sobre a meia-vida de um elemento químico e então sugeri que conversassem mais sobre o assunto com o professor de Química.

Os alunos concluíram a primeira parte do blog (Figura 27) e apresentaram para mim e para o professor de Informática, os outros professores não puderam estar presentes. Neste primeiro momento, eles colocaram o que haviam coletado de informações sobre o lixo eletrônico. Então, ao final das apresentações, solicitei que acrescentassem ao site as próximas etapas da atividade de Modelagem que seriam desenvolvidas.



Figura 23 - Página inicial do site de uma dupla de alunos
Fonte: site construído pelos alunos.

No dia 9 de novembro reservamos todo o tempo das duas aulas de Matemática para o desenvolvimento da atividade de Modelagem. Solicitei aos alunos que expusessem todas as informações que haviam encontrado até o momento para, assim, podermos iniciar a matematização da situação. Estas informações deveriam ter sido encontradas em sites e com os professores das outras disciplinas. No entanto, os alunos apresentaram poucos dados. Realmente, não há muitos dados numéricos precisos sobre o lixo eletrônico. Deste modo tentamos trabalhar com o que conseguimos.

Discutimos, então, todas as informações no grande grupo, toda a turma. Decidimos, portanto, trabalhar com as informações coletadas em sala de aula, a respeito da quantidade de celulares que os alunos já tiveram. Deste modo, projetei as informações coletadas já organizadas em uma tabela (Tabela 3).

Tabela 3 - Tabulação das informações coletadas

Qtde celulares	Qtd de alunos	Total de celulares
1	4	4
2	5	10
3	8	24
4	5	20
5	7	35
6	7	42
7	3	21
8	0	0
9	2	18
10	1	10
11	1	11
12	0	0
13	0	0
14	1	14
Total	44	209

Fonte: elaborado pela autora.

Os alunos, então, calcularam a média de celulares por aluno da turma ($209 \div 44 = 4,75 \cong 5$ celulares por aluno). Aproveitei para explicar as ideias iniciais de Estatística (coleta e organização dos dados) e sobre as Medidas de Tendência Central – Média, Moda e Mediana. Para complementar os dados, fizemos uma pesquisa rápida em sala, para saber o período em que eles tiveram esses celulares. A moda da coleta de dados foi o período de 5 anos. Então os alunos sugeriram utilizar este período para todos. Assim, perguntei a eles então, em média, a cada quanto tempo eles costumavam trocar de celular, ao que responderam que, em média, eles trocam de celular a cada ano. Com esta suposição de que,

em média, as pessoas trocam de celulares todo ano, passamos a pensar como isso impactaria no caso da cidade de Assis Chateaubriand.

Neste contexto, formulamos a seguinte questão de investigação: *Considerando a média encontrada em sala de que as pessoas trocam de celular a cada ano, quantos celulares são descartados na cidade de Assis a cada ano?*

Os alunos tiveram que pensar na população da cidade, em que faixa etária costuma-se ter celular e na taxa de crescimento populacional. Pesquisaram então, no site do IBGE¹⁰ e do IPARDS¹¹, as informações necessárias (Quadro 28).

População de Assis Chateaubriand (2010) = 33 028.

População economicamente ativa (2010) = 17 340.

Taxa de crescimento populacional da cidade = não encontrada

Taxa de crescimento populacional do Brasil (2010) = 0,9%

Quantidade de pessoas na cidade de acordo com a faixa etária em 2007:

CONTAGEM DA POPULAÇÃO SEGUNDO FAIXA ETÁRIA E SEXO - 2007

FAIXA ETÁRIA (anos)	MASCULINA	FEMININA	TOTAL
Menores de 1 ano	177	170	347
De 1 a 4	813	765	1.578
De 5 a 9	1.190	1.151	2.341
De 10 a 14	1.510	1.394	2.904
De 15 a 19	1.419	1.368	2.787
De 20 a 24	1.121	1.223	2.344
De 25 a 29	1.126	1.187	2.313
De 30 a 34	1.178	1.241	2.419
De 35 a 39	1.235	1.358	2.593
De 40 a 44	1.215	1.309	2.524
De 45 a 49	950	1.118	2.068
De 50 a 54	893	998	1.891
De 55 a 59	745	839	1.584
De 60 a 64	689	751	1.440
De 65 a 69	641	560	1.201
De 70 a 74	410	392	802
De 75 a 79	265	265	530
De 80 anos e mais	251	280	531
Idade ignorada	5	5	10
TOTAL	15.833	16.374	32.226

FONTE: IBGE

NOTA: A soma das parcelas não corresponde ao total porque está incluído no mesmo, a população estimada nos domicílios fechados. Incluído a estimativa do IPARDES para os que não tiveram contagem (Cascavel, Colombo, Curitiba, Foz do Iguaçu, Londrina, Maringá, Ponta Grossa e São José dos Pinhais).

Quadro 8 - Informações coletadas pelos alunos

Fonte: elaborado pela autora a partir das informações coletadas pelos alunos.

Os alunos decidiram considerar as pessoas com a faixa etária de 10 a 74 anos, totalizando 26 870 pessoas. Neste momento, iniciamos a resolução do problema com a construção do modelo matemático.

¹⁰ Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

¹¹ Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social.

Para isso, coloquei a quantidade de pessoas consideradas em 2007 no quadro e considerando a taxa de crescimento populacional do Brasil (0,9%), solicitei que calculassem a quantidade de pessoas nessa faixa etária em 2008, e assim por diante.

Tabela 4 - Recorrência da quantidade de celulares descartados		
Ano	T	Celulares descartados
2007	0	26870
2008	1	$26870 \cdot 1,009 = 27112$
2009	2	$26870 \cdot 1,009 \cdot 1,009 = 27356$
2010	3	$26870 \cdot 1,009 \cdot 1,009 \cdot 1,009 = 27602$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2007 + t	t	$26870 \cdot 1,009^t$

Fonte: elaborado pela autora a partir das discussões empreendidas em sala com os alunos.

Deste modo, por recorrência, chegamos ao modelo algébrico:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde } f(t) = 26870 (1,009)^t.$$

Onde $t = 0$ representa o ano de 2007. Assim:

$$Q: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde } Q(a) = 26870 (1,009)^{a-2007}, a \in \mathbb{N}, a \geq 2007.$$

Onde $Q(a) \rightarrow$ quantidade de celulares descartados no ano a .

Questionei os alunos quanto ao tipo de função que encontramos. Alguns ainda não conseguiram reconhecê-la como função exponencial. Uma aluna sugeriu que a função fosse afim, justificando-se pela “variação” constante de 0,9%. Deste modo, podemos observar que ainda havia dúvidas quanto ao conceito de variação.

Retomamos estas questões e deste modo, concluíram que a função era exponencial. Evidenciei a diferença no processo de obtenção do modelo nas duas atividades de Modelagem - a do transístor e a dos celulares -, na primeira, após esboçar o gráfico com conjunto de dados, sugerimos que fosse exponencial e encontramos o modelo algébrico por substituição das variáveis e, na segunda, foi por recorrência.

Solicitei então que, em casa, os alunos pensassem e tentassem responder as duas questões que seguem:

- 1) Considerando o modelo encontrado, quantos celulares serão descartados no ano de 2020?
- 2) Em que ano a população de Assis descartará aproximadamente 100 000 celulares? Considerando a taxa de 0,9% e as condições consideradas.

Na semana seguinte, retomamos o modelo encontrado e exploramos a função exponencial novamente, retomando suas características e especificidades. Ao investigar o

gráfico da função exponencial, questionei os alunos quanto ao seu comportamento, ou seja, o que estaria acontecendo com a quantidade de celulares descartados pela população de Assis Chateaubriand no decorrer dos anos. Quando se trabalha com Modelagem, a todo o momento os conceitos são revisitados, caracterizando a abordagem de conteúdos em espiral.

Os alunos responderam que no decorrer dos anos a quantidade de celulares descartados vai aumentando e que a cada ano que passa aumenta mais. Neste contexto, reforcei a ideia de variação. Esbocei num mesmo plano cartesiano o gráfico da função exponencial, da função afim, da função quadrática com concavidade voltada para baixo e da função logarítmica (Fotografia 12).



Fotografia 12 - Análise dos comportamentos gráficos das funções de acordo com a situação apresentada
Fonte: arquivos da autora.

Solicitei aos alunos que descrevessem o comportamento da quantidade de celulares descartados de acordo com a curva que supostamente o descreveria. Deste modo, conseguiram associar o comportamento da função (Figura 28) com determinadas situações.

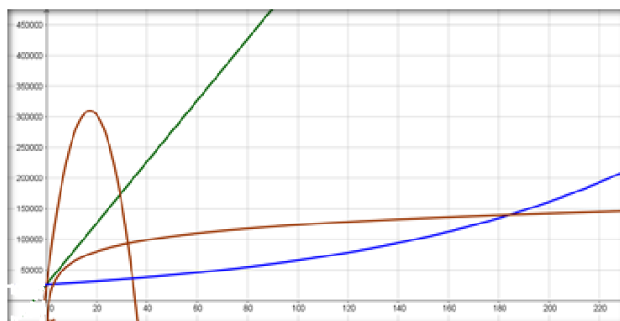


Figura 24 - Representações gráficas de supostos comportamentos do descarte de lixo eletrônico¹²
Fonte: elaborado pela autora.

¹² Estas curvas não se referem ao ajuste (regressão) dos pontos dados. É apenas uma representação do esboço feito pela professora no quadro a partir dos comentários dos alunos.

- ✓ Para a função afim: sugeriram que a quantidade de celulares descartada anualmente era sempre a mesma, ou seja, não houve mudança na variação.
- ✓ Para a função quadrática: a quantidade de celulares descartada estava aumentando até chegar num valor máximo, a partir daí as pessoas tomaram consciência do que estavam fazendo e passaram a trocar de celulares com menor frequência ou passaram a reciclar seus celulares, até chegar o ponto de nenhum celular ir para o lixo. Que, segundo os alunos, seria o ideal.
- ✓ Para a função logarítmica: sugeriram que a quantidade de celulares vai aumentando a cada ano. No entanto, esta variação vai diminuindo no decorrer do tempo até quase se estabilizar.
- ✓ Para a função exponencial: sugeriram que a quantidade de celulares descartados vai aumentando a cada ano, assim como sua variação.

Em seguida, pedi que alguns alunos fossem ao quadro para responder as duas questões da aula passada: 1) *Considerando o modelo encontrado, quantos celulares serão descartados no ano de 2020?* 2) *Em que ano a população de Assis descartará aproximadamente 100 000 celulares? Considerando a taxa de 0,9% e as condições consideradas.*

Para resolver a primeira questão os alunos substituíram o ano 2020 no modelo exponencial encontrado e resolveram sem dificuldades (Quadro 29). No entanto, para responder a segunda questão, embora os alunos tenham substituído a quantidade de celulares em $Q(a)$, não conseguiram resolver a equação exponencial sozinhos, pois desconheciam logaritmos ou outro modo de solucionar o problema.

Um aluno me procurou no dia anterior, no horário de atendimento, para que eu o explicasse como se resolvia. Como eu o havia ajudado, solicitei que ele explicasse aos colegas, e assim o fez. Neste contexto, expliquei o conceito de logaritmo, suas propriedades e aplicabilidades.

Em Modelagem, quando os alunos se deparam com um problema com o qual não conseguem lidar e esse problema se refere a um conteúdo matemático que desconhecem, é o momento de o professor apresentar o conteúdo para a turma, sem que configure uma aula tradicional, até porque os motivos da exposição são outros, o interesse dos alunos é outro, e o objetivo em se aprender o conceito reside na aplicação do mesmo para resolver o problema.

Questão 1:

$$Q(a) = 26870 (1,009)^{a-2007}$$

$$Q(2020) = 26870 (1,009)^{2020-2007}$$

$$Q(2020) = 26870 (1,009)^{13}$$

$$Q(2020) = 26870 \cdot 1,12353$$

$$Q(2020) = 30\,189 \text{ celulares.}$$

Questão 2:

$$Q(a) = 26870 (1,009)^{a-2007}$$

$$100\,000 = 26870(1,009)^{a-2007}$$

$$3,7216 = (1,009)^{a-2007}$$

$$\log 3,7216 = \log(1,009)^{a-2007}$$

$$0,5707 = (a - 2007)0,00389$$

$$146,66 = a - 2007$$

$$a = 2154$$

Quadro 9 - Resolução das questões propostas

Fonte: elaborado pela autora a partir dos registros dos alunos no quadro.

Por fim, solicitei que os alunos concluíssem o site acrescentando todo o encaminhamento da atividade de Modelagem. Nas figuras 28 e 29, apresentamos duas imagens de uma das páginas de dois sites construídos.



Figura 25 - Print da página do site de uma dupla de alunos

Fonte: site construído pelos alunos.



Figura 26 - Print da página do site de outra dupla de alunos
Fonte: site construído pelos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; DIAS, Michele Regiane. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

_____; BRITO, Dirceu dos Santos. Atividades de Modelagem Matemática: Que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência e Educação**, Bauru, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

_____; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Discussões sobre “como fazer” Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. ARAÚJO, Jussara de Loiola. BISOGNIN, Eleni (Orgs). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**. 1.ed. Londrina: Edue, 2011. p. 19 – 43.

_____; SILVA, Karina Pessôa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1 ed. 1 reimpressão. São Paulo: Contexto, 2013.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001a, Caxambu. **Anais...** Rio de Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

_____. Modelagem Matemática na Sala de Aula. **Perspectiva**, Erechim, v. 27, n. 98, p. 65-74, jun. 2003.

_____. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, Lisboa, n.4, p. 73-80, 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BIEMBENGUT, Maria Salett. .Modelagem nas Ciências da Natureza e na Matemática do Ensino Médio. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2011. Belém. **Anais...** Belém: SBEM, 2011.

_____. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BLUM, Werner. NISS, Mogens. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2004. Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2004.

CALDEIRA, Ademir Donizeti. Modelagem Matemática: um outro olhar. **ALEXANDRIA: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v.2, n.2, p.33-54, jul. 2009.

JAPIASSU, Hilton. **Interdisciplinaridade e patologia do saber**. Rio de Janeiro: Imago, 1976.

KLÜBER, Tiago Emanuel. BURAK, Dionísio. Concepções de Modelagem Matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34, 2008.

NEGRELLI, Leônia Gabardo. **Uma Reconstrução Epistemológica do Processo de Modelagem Matemática para a Educação (em) Matemática**. Curitiba, 2008. 103 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Setor Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

OLIVEIRA, Andreia Maria Pereira de; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática e Situações de Tensão na Prática Pedagógica dos Professores. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 265-296, abr. 2011.

SANTANA, Thaine Souza. BARBOSA, Jonei Cerqueira. A Intervenção do Professor em um Ambiente de Modelagem Matemática e a Regulação da Produção Discursiva dos Alunos. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n.43, p. 991-1020, ago. 2012.

SETTI, Elenice Josefa Kolancko. et al. Modelagem Matemática e Física: uma experiência com foguetes In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, 2016. São Paulo: **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016.

_____; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Que interdisciplinaridade se verifica nos trabalhos de Modelagem Matemática? In: Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, 7, 2016. Londrina: **Anais...** Londrina: SBEM, 2016a.

_____; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Um olhar para a interdisciplinaridade presente nos trabalhos de Modelagem Matemática apresentados nas últimas seis edições da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM). In: Simpósio Nacional de Ensino e Aprendizagem, 3, 2016. Londrina: **Anais...** Londrina: UTFPR, 2016b.

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da; BORSSOI, Adriana Helena; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Uma análise semiótica de atividades de modelagem matemática mediadas pela tecnologia. **R.B.E.C.T**, Curitiba, v. 8, n.1, jan-abr. 2015.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação. **Bolema**, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

TAHAN, Malba (Júlio César de Mello e Souza). **O homem que calculava**. 84.ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2013.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela M. S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula**. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

VELEDA, Gabriele Granada; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. O que constitui 'realidade' em uma atividade de Modelagem Matemática. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1, 2009. Ponta Grossa. **Anais...** Ponta Grossa: UTFPR, 2009.

VELEDA, Gabriele Granada. **Sobre a Realidade em atividades de Modelagem Matemática**. 2010. 88 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

VERONEZ, Michele Regiane Dias; VELEDA, Gabriele Granada. Reflexões sobre a Realidade em uma Atividade de Modelagem Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática – INMA/UFMS**, Campo Grande, v.9, n.21, p. 1237-1252, 2016.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v.30, n. 56, p. 1070-1071, dez. 2016.

_____; SILVA, Karina Pessoa da; BORSSOI, Adriana Helena. Modelagem Matemática em disciplinas no Ensino Superior: o que manifestam os estudantes? **Educere et Educare, Revista de Educação**, Cascavel, v.12, n.24, já./abr.2017.

VILLA-OCHOA, Jhony Alexander; LÓPEZ, Carlos Mario Jaramillo. Sense of Reality Through Mathematical Modelling. In: G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. New York: Springer, 2011, p. 701–711.