ppgmat

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CRISTIANA FADIN

MODELAGEM MATEMÁTICA E PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

LONDRINA

2021

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

CRISTIANA FADIN

MODELAGEM MATEMÁTICA E PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

MATHEMATICAL MODELLING AND ALGEBRAIC THINKING IN THE 6th GRADE OF ELEMENTARY SCHOOL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Tortola

LONDRINA

2021

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Londrina

CRISTIANA FADIN

MODELAGEM MATEMÁTICA E PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 24 de Março de 2021

Prof Emerson Tortola, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Magna Natalia Marin Pires, Doutorado - Universidade Estadual de Londrina (Uel)

Prof Rodolfo Eduardo Vertuan, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

AGRADECIMENTOS

A construção deste trabalho contou com a contribuição direta ou indireta de muitas pessoas especiais. Este é o momento de agradecê-las.

Agradeço a Deus e a Nossa Senhora Aparecida por estarem comigo em todas as ocasiões, principalmente nos momentos de dificuldade, me dando forças para superá-las. Obrigada por me proporcionar tantos momentos de aprendizado e alegria, entre eles, a realização deste trabalho.

Aos meus pais, obrigada por terem sido um porto seguro no momento em que mais precisei. Obrigada por serem os seres humanos que são, eu me espelho em vocês e tenho um orgulho enorme.

Ao meu orientador, Emerson Tortola, obrigada por todas as orientações, ensinamentos e correções. Obrigada por sua dedicação comigo e por acreditar em minha capacidade para elaboração deste trabalho.

Aos professores membros da banca de avaliação, Magna Natália Marin Pires e Rodolfo Eduardo Vertuan, obrigada por aceitarem gentilmente compor a banca examinadora e pelas valiosas contribuições.

Agradeço à minha professora da Licenciatura em Matemática, Veridiana Rezende, por despertar em mim o desejo de realizar um mestrado e por ser uma das minhas referências para a atuação em sala de aula.

Ao Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação e Educação Matemática (GEPEEM), obrigada por todos os momentos de estudos compartilhados, pelas discussões e sugestões que tanto contribuíram para o desenvolvimento de minha pesquisa.

Às minhas amigas Letícia e Mirian, minhas irmãs de orientação, obrigada por todos os momentos compartilhados. Com certeza a caminhada ao longo desses dois anos de estudos se tornou mais leve e divertida ao lado de vocês. Os momentos que passamos juntas serão lembrados com muito carinho.

À minha amiga Camila, tem dias que marcam a alma e você estava lá. Gratidão por todos os momentos que já compartilhamos.

À minha amiga Eliane, uma das pessoas mais incríveis que eu tive o privilégio de conhecer. Ao seu lado o riso é sempre garantido. Você é luz.

A meu primo Raphael, meu auxílio remoto mais “presente”, obrigada por sua disponibilidade, disposição e carinho em me auxiliar.

À minha ex-aluna Camily, que esteve presente nos bastidores de todas as atividades desenvolvidas, obrigada pelo auxílio e disponibilidade. Você é incrível. A dedicação empregada em tudo que faz certamente lhe conduzirá a um caminho de muito sucesso.

Quero agradecer aos meus alunos, minha turma do 6º ano de 2019, com certeza a realização desta pesquisa não seria possível sem o "sim" de vocês. Vocês foram incríveis em todos os momentos, superando minhas expectativas profissionais e me fazendo acreditar ainda mais no potencial das alternativas pedagógicas para o ensino e a aprendizagem em sala de aula.

Enfim, agradeço a todos que de certa forma contribuíram para a concretização deste trabalho. Muito obrigada!

FADIN, Cristiana. **Modelagem Matemática e Pensamento Algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental**. 2021. 164 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

RESUMO

Esta dissertação teve como objetivo investigar *como atividades de Modelagem Matemática, na perspectiva da Model-Eliciting Activities (MEAs), podem contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental* e tem como pressuposto a prática da Modelagem Matemática para a elicitação de modelos, ou seja, para provocar a externalização dos pensamentos e conclusões dos alunos em relação à situação-problema por meio de modelos matemáticos. Trata-se, portanto, de uma possibilidade que oferece suporte para observar evidências do pensamento algébrico. Foram desenvolvidas seis atividades de Modelagem Matemática nessa perspectiva em uma turma de 6º ano, com alunos de 11 a 14 anos, de um Colégio Estadual localizado no Norte do Paraná. Para a coleta de dados foram utilizados uma filmadora, três gravadores de áudio e um celular, com o objetivo de registrar falas e expressões gestuais dos alunos, bem como anotações em um diário de campo e coleta dos registros escritos produzidos por eles. A análise das atividades foi pautada em uma abordagem qualitativa, com seleção de episódios que apresentaram evidências das cinco formas do pensamento algébrico indicadas por Kaput (1999), a saber, (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos); (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações; (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas; e (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos. Os resultados sinalizam o potencial das atividades de Modelagem Matemática, na perspectiva das MEAs, para desenvolver o pensamento algébrico em sala de aula, particularmente no que se refere à produção de modelos matemáticos. Os alunos mostraram ter condições de resolver problemas, utilizando conhecimentos condizentes com sua idade e série escolar, o que justifica a observação de algumas das cinco formas do pensamento algébrico com mais frequência que outras, pois essas cinco formas se configuram como uma estrutura inter-relacionada que pode ser desenvolvida ao longo dos anos escolares, possibilitando o estabelecimento de estruturas capazes de fornecer uma base para níveis mais elevados de abstração e formalização. Os resultados sugerem, ainda, o engajamento dos alunos na resolução dos problemas, as tomadas de decisões de forma autônoma, o pensar e o avaliar os empreendimentos realizados, as reflexões sobre as discussões matemáticas e, principalmente, os argumentos e justificativas das escolhas realizadas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Pensamento Algébrico. Ensino Fundamental.

FADIN, Cristiana. **Mathematical Modelling and Algebraic Thinking in the 6th Grade of Elementary School**. 2021. 164 p. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

ABSTRACT

This dissertation aimed to investigate how Mathematical Modelling activities, from the perspective of Model-Eliciting Activities (MEAs), can contribute to the development of algebraic thinking in the 6th year of Elementary School and is based on the practice of Mathematical Modelling for the elicitation of models, that is, to cause the externalization of students' thoughts and conclusions in relation to the problem situation through mathematical models. It is, therefore, a possibility that offers support for observing evidence of algebraic thinking. Six Mathematical Modelling activities were developed in this perspective in a 6th grade class, with students from 11 to 14 years old, from a State College located in the North of Paraná. For data collection, a camcorder, three audio recorders and a cell phone were used, with the objective of recording students' speeches and gestures, as well as notes in a field diary and collection of written records produced by them. The analysis of the activities was guided by a qualitative approach, with selection of episodes that presented evidence of the five forms of algebraic thinking indicated by Kaput (1999), namely, (i) algebra as generalization and formalization of patterns and constraints; (ii) algebra as syntactically guided manipulation of (opaque) formalisms; (iii) algebra as the study of structures abstracted based from computations and relations; (iv) algebra as the study of functions, relations and joint variation; and (v) algebra as a cluster of modelling and phenomena-controlling languages. The results indicate the potential of the activities of Mathematical Modelling, from the perspective of MEAs, to develop algebraic thinking in the classroom, particularly with regard to the production of mathematical models. The students showed to be able to solve problems, using knowledge consistent with their age and school grade, which justifies the observation of some of the five forms of algebraic thinking more often than others, as these five forms are configured as an interrelated structure which can be developed over the school years, enabling the establishment of structures capable of providing a basis for higher levels of abstraction and formalization. The results also suggest the students' engagement in solving problems, autonomous decision-making, thinking and evaluating the projects carried out, reflections on mathematical discussions and, mainly, the arguments and justifications for the choices made.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modelling. Algebraic Thinking. Elementary School.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica que oportuniza discussões com temáticas associadas à realidade. Segundo Stillman (2015), fazer Modelagem Matemática envolve usar conceitos matemáticos, estruturas e relações para descrever e caracterizar, ou modelar, uma situação do mundo real de modo que capture suas características essenciais.

Nesse sentido, vislumbramos o potencial das atividades de Modelagem Matemática para o desenvolvimento do pensamento algébrico, um dos tipos de pensamentos matemáticos[1] que devem ser desenvolvidos ao longo dos anos escolares, considerando que para isso é necessária a realização de atividades em que os estudantes possam investigar regularidades, sistematizar propriedades, resolver e discutir problemas algébricos, modelar situações e estabelecer padrões entre diferentes informações (LINS; GIMENEZ, 1997).

Considerando essa interpretação, neste trabalho, nos[2] propomos investigar o pensamento algébrico de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental em atividades de Modelagem Matemática. Neste capítulo introdutório, expomos o delineamento da pesquisa, assim como a pertinência do tema ao contexto da Educação Matemática. Indicamos, também, a questão de pesquisa e os objetivos e, por fim, descrevemos a organização deste relatório de pesquisa.

1.1 MOTIVAÇÃO PARA A PESQUISA

Atuo como professora de Matemática da rede estadual de ensino do Paraná desde 2012. Na maior parte desse período estive em contato com alunos de 6º e de 7º ano do Ensino Fundamental, com os quais me identifico profissionalmente, apesar de também ter tido boas experiências com alunos de 8º e de 9º ano do Ensino Fundamental e com alunos do Ensino Médio. A direção do Colégio no qual possuo meu padrão de concurso costuma sugerir as turmas

---

[1] A literatura atual no âmbito da Educação Matemática discorre sobre alguns tipos de pensamentos matemáticos, a saber, pensamento aritmético, algébrico, geométrico, estatístico/probabilístico. O foco das pesquisas foi deslocado do ensino para a aprendizagem, o que derivou novas concepções e modos de ensino da Matemática associados aos processos cognitivos acionados quando os alunos lidam com determinadas relações matemáticas. Material disponível em: https://midia.atp.usp.br/impressos/redefor/GestaoCoordenadores/GCVCMat_2011_2012/GCVC-Matematica_tema02.pdf.

[2] Refiro-me a "nós" pois considero a participação de meu orientador na construção e no encaminhamento da pesquisa. Essa consideração se estende ao longo do texto, reservando alguns momentos a que me refiro a atividades, particularmente, referentes a mim.

no início do ano letivo de acordo com o perfil do professor, acredito que seja esse um dos motivos de minha carga horária concentrar-se nessas séries, pois é visível minha satisfação ao trabalhar com alunos dessa faixa etária.

Durante minha caminhada profissional, concentrada principalmente nas referidas séries, pude constatar que o ensino tardio da Álgebra, iniciado de modo formal apenas no 7º ano do Ensino Fundamental, como sugerem as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008) e outros documentos e orientações curriculares, contribui para acentuar as dificuldades apresentadas pelos estudantes na aprendizagem de noções e conceitos associados à essa área. Além disso, pude observar que essa é também uma preocupação presente na literatura, conforme pesquisas de Ken (1989), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), e outras.

Essas pesquisas sugerem que seria adequado iniciar desde cedo a educação algébrica dos alunos, por meio de atividades que assegurem o desenvolvimento de ideias e formas de pensar, que são características da Álgebra, e que vão dar subsídios para o seu estudo em anos posteriores. Essas ideias e formas de pensar constituem o que na literatura é comumente denominado por pensamento algébrico. Segundo Van de Walle (2009, p. 287), o pensamento algébrico "envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativos e explorar os conceitos de padrão e de função".

Essas ações que envolvem o pensamento algébrico apresentadas por Van de Walle (2009) se alinham à ideia defendida por Kaput (1999), de que o trabalho com a Álgebra em sala de aula deve incluir cinco diferentes formas do pensamento algébrico, a saber, (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos); (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações; (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas; e (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos, o qual pode ser viabilizado por meio de atividades que requerem dos alunos observações de fenômenos e experimentações, que envolvem formulação de conjecturas, justificações, argumentações, generalizações e descrições a partir do uso da linguagem matemática.

O desenvolvimento desse pensamento, contudo, não tem sido o foco do ensino da Álgebra, pois de acordo com Scarlassari e Moura (2015, p. 01) "as abordagens tradicionalmente veiculadas na prática pedagógica de álgebra elementar, nos diferentes níveis de ensino, têm focalizado principalmente o uso, memorização e repetição de fórmulas, como modo único de aplicação dos conceitos algébricos".

Nesse cenário de ensino, pautado na memorização, que a Álgebra se encontra, torna-se cada vez mais necessária a busca por estratégias que denotem significado aos processos de ensiná-la e aprendê-la. Nesse sentido, desde o ano de 2013 participo de Projetos de Pesquisa em parceria com professores do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, *Campus* de Campo Mourão, envolvendo temáticas voltadas ao Ensino de Matemática. Os estudos ocorridos durante nossas reuniões foram determinantes para que eu pudesse reconhecer minha dificuldade em relação ao trabalho com a Álgebra na prática da sala de aula, desejando aprimorar meus estudos levando em consideração minha prática profissional.

Para tanto, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, em Londrina. Trata-se de um Programa voltado a profissionais que ensinam Matemática, oportunizando a ampliação de conhecimentos e a aprendizagem de novas alternativas pedagógicas, baseadas em resultados de pesquisas, para aplicá-las em sala de aula, bem como o desenvolvimento da autonomia e da reflexão a respeito da própria prática, na busca de estratégias para resolução de problemas inerentes à profissão docente.

Desde meu ingresso no Programa, participo do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação e Educação Matemática (GEPEEM). A participação nesse Grupo ampliou consideravelmente as oportunidades de discutir, pensar e refletir sobre temáticas envolvendo práticas da sala de aula. Uma dessas práticas, presente nas discussões, estudos e pesquisas realizadas no âmbito do Grupo, é a Modelagem Matemática.

A Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica que viabiliza "o estudo da Matemática a partir de temas diversos da realidade, sejam eles matemáticos ou não, oportunizando ao estudante o transitar entre a linguagem natural do fenômeno sob investigação e a linguagem matemática" (TORTOLA, 2012, p. 16). O que possibilita essa transição são as hipóteses e as aproximações simplificadoras (BEAN, 2001), bem como a produção e a interpretação do modelo matemático (BORROMEO FERRI, 2010).

A obtenção de um modelo matemático é parte do encaminhamento de uma atividade de Modelagem e trata-se de um sistema de elementos, operações, relações e regras que pode ser usado para descrever, explicar ou prever o comportamento de algum outro sistema familiar (DOERR, ENGLISH, 2003) e, para tanto, se apresenta como um "sistema conceitual, descritivo e explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13). Dessa forma, a Modelagem Matemática pode propiciar aos estudantes o estabelecimento de conexões entre Matemática e realidade, além de contribuir para o ensino e a aprendizagem da Matemática, como apontam Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Ao produzir um modelo matemático o aluno precisa observar características da situação, conjecturar regularidades, estabelecer relações e generalizá-las, usando a linguagem matemática para descrevê-las. Essa produção envolve ações que podem ser associadas ao pensamento algébrico e, se bem planejadas, podem auxiliar no seu desenvolvimento.

Foram os estudos realizados durante as reuniões do GEPEEM, que nos motivaram a investigar o potencial de atividades de Modelagem Matemática para o desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Fundamental. Diante de tal definição escolhemos como sujeitos da pesquisa uma turma de 27 alunos de um 6º ano do Ensino Fundamental de um colégio público, para a qual eu ministrei aulas de Matemática no ano de 2019, visto que essa série, de acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (2008), é a que antecede o ensino formal da Álgebra, sendo portanto, adequada para a promoção de atividades que deem suporte para o desenvolvimento do pensamento algébrico e, consequentemente, para a realização de nossa pesquisa.

1.2 PERTINÊNCIA DA PESQUISA

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento homologado em 20 de dezembro de 2017, que norteia os currículos e propostas pedagógicas da Educação Básica, reconhece a importância do ensino da Álgebra desde os primeiros anos escolares, indicando a necessidade de mudanças no cenário educacional caracterizado por uma abordagem essencialmente voltada aos conjuntos numéricos nos anos iniciais do Ensino Fundamental e que protela a formalização da Álgebra para os anos finais do Ensino Fundamental, como sugeriam, por exemplo, as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná.

Segundo a BNCC, a finalidade do ensino de Álgebra é o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento, o pensamento algébrico. De acordo com o documento "é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e de aprendizagem desde o Ensino Fundamental, anos iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade" (BRASIL, 2018, p. 270).

Embora sob críticas a respeito de sua formulação, proposição e, principalmente, visão fragmentada dos conhecimentos (CUNHA, 2015; CUNHA; DA SILVA, 2016; FREITAS, 2016; RIBEIRO; CRAVEIRO, 2017), a BNCC sinaliza timidamente a necessidade de olhar para além dos conteúdos e pensar no desenvolvimento de habilidades e pensamentos, o que há algum tempo vem sendo alvo de diversas investigações no âmbito da Educação Matemática, programas e orientações curriculares internacionais.

No que diz respeito à Álgebra, podemos citar pesquisas como as de Kieran (2004), Blanton e Kaput (2005), Carraher e Schliemann (2007), Kaput (2008), que buscam compreender as dificuldades dos alunos e sua origem, bem como as habilidades que devem ser desenvolvidas por eles.

Podemos citar também o Programa *Early Algebra*[3], que assume a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade e aponta possibilidades e atividades para desenvolver tal pensamento. Nessa etapa, o pensamento algébrico envolve o desenvolvimento de maneiras de pensar (BLANTON; KAPUT, 2011; RADFORD, 2011), que vão além da manipulação simbólica, pode ser desenvolvido por meio de atividades que solicitem aos alunos analisar relações entre quantidades, notar a formação de estruturas, estudar mudanças, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, comprovar e realizar previsões.

O *National Council of Teachers of Mathematics*[4] (NCTM, 2000) também aborda o desenvolvimento do pensamento algébrico, destacando quatro eixos que devem orientar o trabalho pedagógico nos vários níveis de ensino. São eles: (1) compreender padrões, relações e funções; (2) representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; (3) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (4) analisar a mudança em vários contextos. Cada nível de ensino deve considerar, também, aspectos específicos da faixa etária dos alunos e dos conteúdos de outros eixos da Matemática, recebendo adequações de acordo com essas características (NCTM, 2000).

---

[3]A *Early Algebra* é um programa criado em 1998, que conta com uma equipe de psicólogos e educadores matemáticos que atuam com professores e estudantes em colaboração com escolas de Boston. Neste programa são construídos materiais didáticos e instrucionais a respeito da álgebra dos anos iniciais, abordando vários temas matemáticos, como, por exemplo, números, símbolos, comparações etc., focalizando a aprendizagem e o raciocínio dos estudantes. Esses materiais são disponibilizados em um *website* a fim de enfatizar a necessidade de se introduzir a álgebra nas séries iniciais (SILVA; SAVIOLI; PASSOS, 2015).

[4] Fundado em 1920, o Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) é a maior organização de educação matemática do mundo. O NCTM tem por objetivo auxiliar na promoção dos interesses da matemática na América, especialmente nos campos elementares e secundários através da realização de reuniões para a apresentação e discussão de trabalhos com o objetivo de aprimorar o ensino de matemática, por meio da publicação de jornais, revistas, livros e relatórios, para vitalizar e coordenar o trabalho de muitas organizações locais de professores de matemática e trazer os interesses da matemática à atenção e consideração do mundo educacional. Conforme descrição apresentada em: https://www.nctm.org/About/.

Esses quatro eixos destacados pelo NCTM (2000) podem ser abordados ao se trabalhar com Modelagem Matemática, particularmente com a atividade de produção de modelos, isso porque na construção de modelos as interpretações, descrições, conjecturas, explicações e justificativas são iterativamente refinadas e reconstruídas pelo aluno, constituindo-se em ações fundamentais para aprender Matemática (DOERR, ENGLISH, 2003).

Compreendendo que o trabalho direcionado ao desenvolvimento do pensamento algébrico também demanda, segundo Canavarro (2007), novas atitudes do professor em sala de aula, assumimos a perspectiva da *Model-Eliciting Activities*[5] (MEAs) como orientadora para o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática, para a produção e coleta de dados, bem como, para a análise dos dados de nossa pesquisa, uma vez que essa perspectiva tem como pressuposto a prática da Modelagem Matemática para a elicitação de modelos, ou seja, para provocar a externalização dos pensamentos e conclusões dos alunos em relação à situação-problema por meio de modelos matemáticos. Essa elicitação se dá com base em seis princípios que orientam a produção, interpretação e análise de modelos matemáticos, a saber, construção do modelo, generalização, documentação do modelo, realidade, autoavaliação e protótipo eficaz (LESH, et al., 2000). Trata-se, portanto, de uma possibilidade que nos dá suporte para observar evidências do pensamento algébrico.

De acordo com tal perspectiva, o desenvolvimento do modelo geralmente envolve quantificar, organizar, sistematizar, dimensionar, coordenar e, em geral, matematizar objetos, relações, operações, padrões ou regras que são atribuídas ao sistema modelado (LESH; HAREL, 2003). Todas essas ações estão diretamente ligadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico, pois segundo Blanton e Kaput (2005), a construção do pensamento algébrico em sala de aula inclui estratégias que visam explorar a aritmética na construção de padrões, conjecturas, generalizações, justificando fatos e relacionando-os matematicamente.

1.3 DEFINIÇÕES DA PESQUISA

Diante do cenário descrito a respeito da educação algébrica brasileira e das necessidades que se mostram em relação ao pensamento algébrico, fundamentados nas cinco formas de pensamento algébrico apontadas por Kaput (1999), vislumbramos a Modelagem Matemática,

[5] Optamos por designar a perspectiva das MEAs, em nossa pesquisa, na língua de origem, inglesa, pois a tradução dos termos pode não condizer com o objetivo a que a estratégia se propõe.

particularmente, na perspectiva das MEAs, como uma alternativa às práticas habituais de sala de aula, com o intuito de desenvolver o pensamento algébrico no Ensino Fundamental, uma vez que ao construir modelos matemáticos, os alunos podem interpretar situações associadas à realidade, observar e conjecturar padrões de comportamento de fenômenos, estabelecer relações, generalizar e descrever matematicamente tais padrões, usando linguagem apropriada.

Nesse contexto, nos propomos investigar com esta pesquisa *como atividades de Modelagem Matemática, na perspectiva da Model-Eliciting Activities (MEAs), podem contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental?*

Para isso, no ano de 2019, desenvolvemos seis atividades de Modelagem Matemática com uma turma de 6º ano de um colégio público, para a qual eu ministrei aulas de matemática. As atividades foram desenvolvidas predominantemente no ambiente da sala de aula, sendo algumas ações realizadas no contraturno escolar, com os alunos sempre organizados em grupos. Gravamos as aulas em que as atividades foram desenvolvidas e recolhemos os registros produzidos pelos alunos.

Almejando compreender o conjunto de dados coletados, optamos por uma abordagem qualitativa, uma vez que pesquisas de caráter qualitativo permitem dar atenção aos participantes e às suas ideias, procuram estabelecer significado aos discursos e às suas narrativas, cujo foco é "entender e interpretar dados e discursos" (D'AMBROSIO, 2006, p. 10). Além disso, "pesquisas que utilizam abordagens qualitativas fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações" (BORBA; ARAÚJO 2006, p. 24).

Entendemos, portanto, que essa seja a abordagem mais adequada para nossa pesquisa, uma vez que para compreender como atividades de Modelagem Matemática podem contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico, elas devem ser cuidadosamente descritas e analisadas, para que possamos compreender como se deu a produção, interpretação e análise dos modelos matemáticos por parte dos alunos, os quais viabilizam a investigação de fenômenos por meio da matemática e o registro de regularidades e padrões observados por meio de sua linguagem, além de permitir, quando possível, generalizações dos resultados a outros contextos.

Como Produto Educacional de nossa pesquisa, elaboramos um Material Pedagógico no qual disponibilizaremos atividades de Modelagem Matemática e orientações para seu desenvolvimento, inspiradas nos encaminhamentos dos alunos durante a coleta de dados. Nossa intenção é que os professores de 6º ano do Ensino Fundamental encontrem nesse Material suporte inicial para experienciar o ensino por meio de atividades de Modelagem Matemática, com foco no desenvolvimento do pensamento algébrico. Para cada atividade proposta, disponibilizamos informações a respeito da temática e questão proposta para investigação, em suma, um convite para a investigação do tema e desenvolvimento da atividade, bem como, a descrição, o planejamento e como se deu o desenvolvimento na sala de aula. Em anexo são disponibilizados materiais auxiliares que podem ser impressos e levados para a sala de aula.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A dissertação está organizada em seis capítulos, tratando este primeiro da introdução, ou seja, da contextualização e definições gerais da pesquisa, bem como da caracterização do material pedagógico confeccionado como produto educacional da pesquisa.

Os capítulos seguintes, 2 e 3, são de revisão de literatura e discorrem a respeito da Modelagem Matemática na Educação Matemática e do trabalho com o pensamento algébrico em sala de aula. Assim sendo, no capítulo 2 discorremos sobre a Modelagem Matemática e sobre a perspectiva das MEAs, bem como sua relevância para a elicitação de modelos matemáticos, e no capítulo 3 sobre o trabalho com o pensamento algébrico, segundo algumas perspectivas teóricas, abordando contextos possíveis para seu desenvolvimento na prática de sala de aula.

No capítulo 4, descrevemos o contexto e os aspectos metodológicos que nortearam a pesquisa e fundamentamos nossa opção por uma pesquisa de natureza qualitativa. Comunicamos os instrumentos de coleta de dados e descrevemos o processo de análise.

No Capítulo 5, apresentamos as atividades de Modelagem Matemática que foram desenvolvidas pelos estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental e as analisamos à luz do referencial teórico adotado, objetivando responder a questão que orientou a pesquisa.

Por fim, apresentamos no sexto capítulo as Considerações Finais descrevendo os resultados da pesquisa, e as Referências que fundamentaram e subsidiaram o seu desenvolvimento.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática, na perspectiva da Educação Matemática, é considerada uma tendência metodológica recente, cuja história tem cerca de 40 anos (BIEMBENGUT, 1999). Desde que tal perspectiva foi disseminada, várias experiências e pesquisas foram desenvolvidas, tanto em âmbito nacional, como internacional, e elas "têm se constituído em literatura básica da prática e da pesquisa da Modelagem Matemática desenvolvida na Educação Matemática Brasileira" (KLÜBER, 2012, p. 34).

Apesar de haver na literatura diversos entendimentos de Modelagem Matemática em relação ao seu uso no contexto educacional, no âmbito da Educação Matemática ela pode ser compreendida como

> um caminho para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática ou para o *fazer* Matemática na escola, tendo como norteadores a observação da realidade, discussões e investigações que modificam não só as ações que usualmente têm lugar na sala de aula, mas também as formas como se observa o mundo (KISTEMANN, 2012, p. 743).

É nesse cenário que a Modelagem Matemática vem se firmando como uma importante alternativa pedagógica às práticas de sala de aula, apresentando possibilidades para o ensino de Matemática, e é nesse sentido que consideramos a Modelagem Matemática nesta pesquisa, "como uma abordagem, por meio da Matemática, de um problema não essencialmente matemático" (ALMEIDA; BRITO, 2005, p. 487), na qual os estudantes devem, sob orientação do professor, "pensar e discutir meios, fundamentados na matemática, de solucionar problemas" (TORTOLA, 2016, p. 45).

O trabalho com a Modelagem Matemática traz mudanças para a dinâmica da sala de aula. Nesse sentido, é pertinente questionar: como atividades de Modelagem Matemática podem ser inseridas nas salas de aula? como se faz Modelagem Matemática em sala de aula?

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA E A SALA DE AULA

Uma das principais razões apontadas por Almeida e Brito (2005) para se fazer Modelagem em sala de aula é a necessidade de tornar visível aos estudantes o papel da matemática dentro e fora da sala de aula, visto que, como mencionado por Meyer, Caldeira e

Malheiros (2011), na escola as atividades propostas têm, em geral, pouca relação com a realidade.

Na Modelagem Matemática, a matemática é utilizada para a investigação de problemas associados a temáticas reais, permitindo a produção de modelos matemáticos que podem ser elaborados, adaptados e usados em outros contextos de forma generalizada (LESH; DOERR, 2003; MAAß; GURLITT, 2009). A Modelagem Matemática é, portanto, um caminho que possibilita compreender e atuar sobre as situações problemáticas em uma variedade de contextos do mundo real.

Para tanto é fundamental que o professor que opte por utilizar atividades de Modelagem Matemática como uma estratégia para o ensino da matemática, compreenda como elas são caracterizadas. Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 12), uma atividade de Modelagem Matemática

> pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Nesse sentido, relações entre a realidade (origem da situação inicial) e matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados) servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados. A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo matemático.

Para Almeida e Vertuan (2014), o modelo matemático é o que vai "dar a forma à solução do problema e a Modelagem Matemática é a atividade que busca por esta solução" (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 2). A introdução de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula pode ocorrer de forma gradativa, visto que os alunos não estão familiarizados com esse tipo de atividade. Almeida e Dias (2004) propõem que essa introdução seja feita a partir de três momentos, de modo que os estudantes, organizados em grupos, possam aos poucos se familiarizar com ações e procedimentos característicos da Modelagem Matemática. A principal argumentação para essa introdução gradativa reside na possibilidade que o aluno tem de desenvolver a habilidade de fazer Modelagem.

Conforme a proposta das autoras, em um primeiro momento, o professor desenvolve com os alunos uma atividade de Modelagem já estruturada, que contém as informações necessárias para sua solução. O professor apresenta o contexto da situação-problema em questão, o problema derivado dessa situação, bem como os dados qualitativos e quantitativos necessários para a obtenção de um modelo matemático capaz de descrever a situação e solucionar o problema. Todos os esforços dos alunos na busca pela solução do problema, são orientados pelo professor.

Em um segundo momento, o professor traz para a sala de aula, novamente, uma situação-problema derivada de um contexto não matemático, mas a seleção das informações consideradas essenciais para a resolução do problema é de responsabilidade dos alunos, assim como a formulação de hipóteses, as quais irão direcionar a investigação para a obtenção de um modelo matemático que seja válido para a situação em estudo. Cabe ao professor orientar os encaminhamentos das ações, quando solicitado.

E, finalmente, em um terceiro momento, os alunos são incentivados a desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática, sendo responsáveis por todas as ações empreendidas no primeiro e segundo momentos de familiarização da atividade de Modelagem: escolha de um tema; identificação de um problema para investigação; coleta e análise dos dados; identificação dos conceitos matemáticos necessários para resolver o problema; obtenção e validação de um modelo matemático e seu uso para a análise da situação.

Esses momentos são esquematizados por Almeida e Vertuan (2011), como mostra a Figura 1, de modo a ilustrar a progressão gradativa da autonomia dos alunos ao fazer Modelagem na sala de aula.

Figura 1: Diferentes momentos da Modelagem Matemática na sala de aula

Fonte: Almeida e Vertuan (2011, p. 28)

Além da introdução gradativa de atividades de Modelagem Matemática na sala de aula, é importante que o professor saiba que, em geral, as ações e/ou procedimentos de uma atividade de Modelagem, necessárias para analisar, estruturar e solucionar uma situação-problema, são organizadas em fases, geralmente não lineares. Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15), por exemplo, organizam essas ações e/ou procedimentos em quatro fases e as denominam como: “inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação”.

A fase de inteiração corresponde ao primeiro contato dos alunos na atividade com a situação-problema que se pretende estudar. Nessa fase a situação-problema é analisada com vistas a identificar características e especificidades que conduzirão a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução. As ações dessa fase de inteiração permitem que o aluno a retome sempre que houver a necessidade de novas informações, que podem emergir no decorrer do desenvolvimento de toda a atividade de Modelagem.

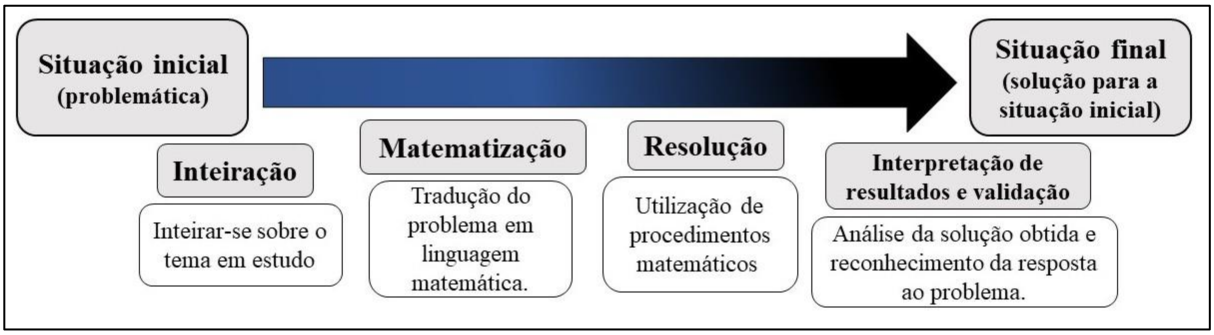
Predominantemente as situações-problema utilizadas em atividades de Modelagem Matemática se apresentam em linguagem natural, não parecendo haver associação a uma linguagem matemática. No entanto, à medida que se trabalha com os dados e informações extraídos da problemática inicial, a linguagem matemática vai tomando forma. Ocorre, então, uma transição da linguagem natural do fenômeno para a linguagem matemática, que caracteriza a fase de matematização. Essa transição se faz por meio de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações.

A fase de resolução, por sua vez, consiste no uso da matemática e de sua linguagem na produção de um modelo matemático capaz de descrever a situação e de fornecer uma resposta para o problema, condizente com a situação em estudo.

Por fim, após a produção do modelo matemático os alunos são convidados a analisar e interpretar os resultados indicados pelo modelo à luz da situação que deu origem ao problema, validando-os ou não. Caso não seja válido, as informações e as hipóteses definidas devem ser retomadas e verificadas, dando um novo encaminhamento para a atividade, se necessário. Essas ações caracterizam a fase de interpretação de resultados e validação.

Essas fases, portanto, revelam procedimentos que são característicos de uma atividade de Modelagem, procedimentos não lineares, cuja dinâmica permite movimentos de ida e volta sempre que necessários. As fases propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012), são organizadas por eles em um esquema, como mostra a Figura 2, que ilustra o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, partindo de uma situação inicial, problemática, em direção a uma situação final, resposta para o problema, e nesse caminhar estão as quatro fases da Modelagem.

Figura 2: Fases da Modelagem Matemática



Fonte: Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15)

Durante o desenvolvimento da atividade de Modelagem, os alunos conseguem observar a utilidade da matemática e, gradativamente, sua capacidade de utilizar conhecimentos matemáticos é refinada (NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007). O professor tem o desafio de "ajudar o aluno a compreender, construindo relações matemáticas significativas em cada etapa do processo" (BASSANEZI, 2002, p. 175).

Para tanto, é conveniente que o professor consiga compreender o modo de pensar de seus alunos e suas estratégias de resolução de problemas. Essa compreensão dificilmente ocorre quando a fonte de instrução é essencialmente a exibição de algoritmos, pois há pouco espaço para diálogo. É necessário buscar alternativas que permitam aos professores investigar o pensamento matemático de seus alunos, como indicado pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) e por alguns importantes educadores matemáticos (WOOD; MERKEL; UERKWITZ, 1996; HIEBERT, et. al., 1997).

No que tange ao pensamento matemático dos alunos, estamos interessados em um tipo particular, o pensamento algébrico. Consideramos que ao desenvolver atividades de Modelagem Matemática, os alunos se voltam à construção de modelos para solucionar a problemática inicial, e durante esse processo as interpretações, descrições, conjecturas, explicações e justificativas são iterativamente refinadas e reconstruídas pelo aluno, constituindo-se em ações fundamentais para aprender Matemática (DOERR, ENGLISH, 2003).

2.2 MODELO MATEMÁTICO

A utilização de modelos não se restringe à Matemática. Um modelo pode ser entendido como "a representação de alguma coisa", segundo o dicionário etimológico de Cunha (1989). Está presente, também, na Moda, na Engenharia, na Arte e em outras ciências.

A atividade científica, de uma maneira geral, envolve a construção, validação e aplicação de modelos científicos. Dentro de uma abordagem educacional, o ensino deve ser projetado para envolver os alunos na elaboração e utilização de modelos (HESTENES, 2006), e não estar pautado apenas na utilização de modelos preestabelecidos.

Comumente os modelos matemáticos apresentados nos livros didáticos estão em sua versão final[6], porém, com a Modelagem Matemática deixa-se de privilegiar o uso de "modelos prontos" e passa-se a enfatizar o processo de tradução de fenômenos ou de construção de modelos (BLUM, 1993), exigindo do aluno mais envolvimento com a situação a ser modelada.

Doerr e English (2003) afirmam que um modelo matemático pode ser entendido como um sistema de elementos, operações, relações e regras, e pode ser utilizado para descrever, explicar ou prever o comportamento de algum outro sistema conhecido, associado a uma situação proveniente do mundo real que pode ser representada por meio da escrita de símbolos, diagramas e gráficos.

A obtenção de um modelo matemático é parte do encaminhamento de uma atividade de Modelagem, sendo entendido como uma "representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam", e para tanto se apresenta como um "sistema conceitual, descritivo e explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13).

Sob essa mesma perspectiva Lesh e Harel (2003) oferecem uma definição mais abrangente para modelos. Segundo eles

> *Modelos* são sistemas conceituais que geralmente tendem a ser expressos usando uma variedade de meios de interação e representação, que podem incluir símbolos escritos, linguagem falada, computação gráfica, diagramas ou gráficos em papel ou metáforas com base na experiência. Seus objetivos são criar, descrever ou explicar outros sistemas.
> Os modelos incluem: (a) *um sistema conceitual* para descrever ou explicar objetos matemáticos relevantes, relações, ações, padrões e regularidades que são atribuídos à situação de solução de problemas; e (b) *os procedimentos de acompanhamento* para gerar construções, manipulações ou previsões úteis para alcançar objetivos claramente reconhecidos.
> Modelos matemáticos são diferentes de outras categorias de modelos, principalmente porque eles se concentram em características estruturais (em vez de, por exemplo, características físicas, biológicas ou artísticas) dos sistemas que eles descrevem.
> *O desenvolvimento do modelo* geralmente envolve quantificar, organizar, sistematizar, dimensionar, coordenar e (em geral) matematizar objetos, relações, operações, padrões ou regras que são atribuídas ao sistema modelado. Consequentemente, o desenvolvimento de modelos suficientemente úteis geralmente requer uma série de "ciclos de modelagem" iterativos, nos quais as descrições (construções, explicações) são testadas e revisadas repetidamente (LESH; HAREL, 2003, p. 159, grifos dos autores).

Bassanezi (2002), sinaliza que os modelos matemáticos nunca são definitivos, sempre dão margem a modificações e melhorias, ou mesmo a novas maneiras de empregar a linguagem matemática. Além disso, o autor defende que o refinamento dos modelos quando o foco está

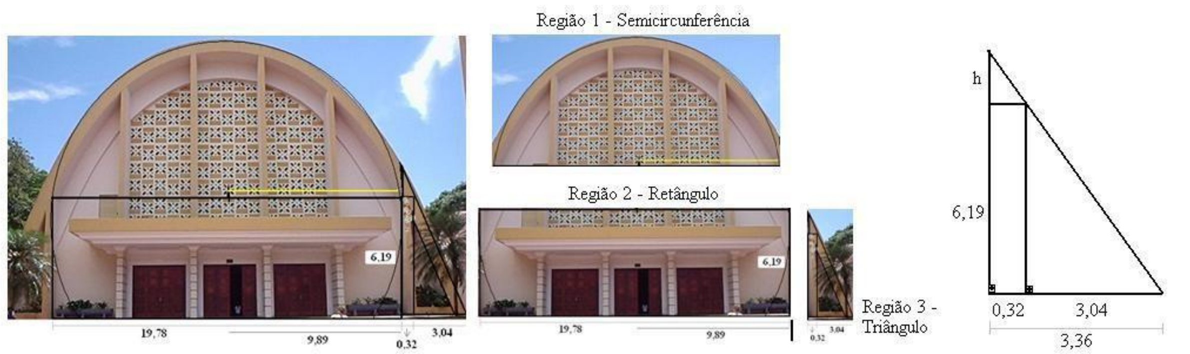
[6] A exposição do conteúdo, feita pela maioria dos livros didáticos, não apresenta uma possibilidade de construção dos modelos matemáticos que ali se encontram, apenas os expõem como constructos prontos.

direcionado ao ensino e à aprendizagem da Matemática, produz a aquisição de novos conhecimentos, assim como o faz as diferentes séries.

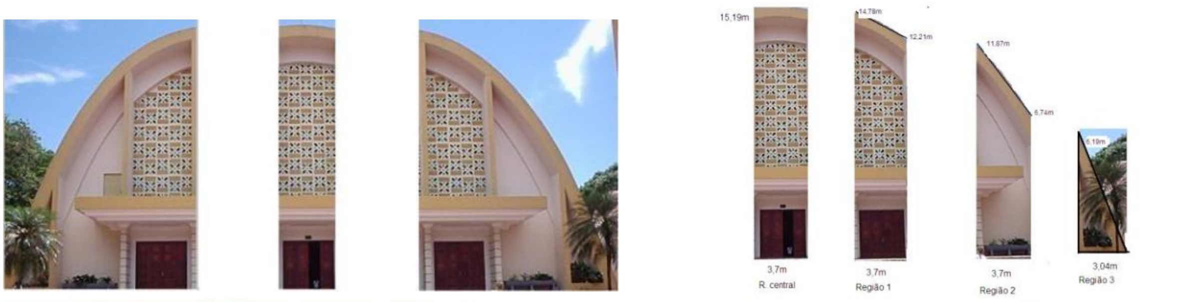
As diferentes abordagens para uma situação, dependem de quem trabalha e estuda tal situação. No âmbito da sala de aula, isto significa que uma mesma situação pode exprimir diferentes modelos matemáticos, dependendo do nível de escolaridade no qual os alunos se encontram (SILVA; VERONEZ, 2010).

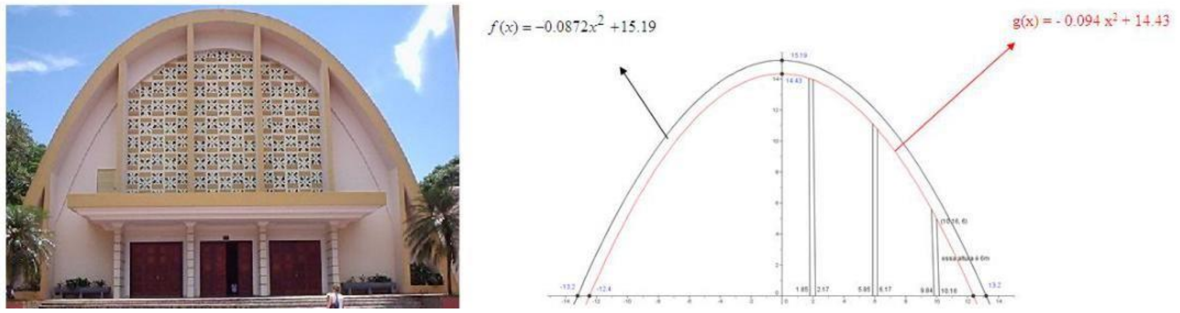
No trabalho desenvolvido por Ferruzzi et al. (2010), por exemplo, os autores sinalizam a possibilidade de encaminhamentos diferentes para uma atividade de Modelagem Matemática em diferentes níveis de escolaridade. Eles sugerem encaminhamentos para o Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior para o problema de determinar a área da fachada de um santuário que seria pintado, apontando diferentes maneiras de usar a matemática para resolver o problema. O Quadro 1 mostra as sugestões de encaminhamentos de acordo com o nível de ensino que os alunos se encontram.

Quadro 1: Diferentes encaminhamentos para o problema "Fachada do Santuário Eucarístico Diocesano"



Divisão da fachada da igreja em figuras planas – abordagem para o ensino fundamental





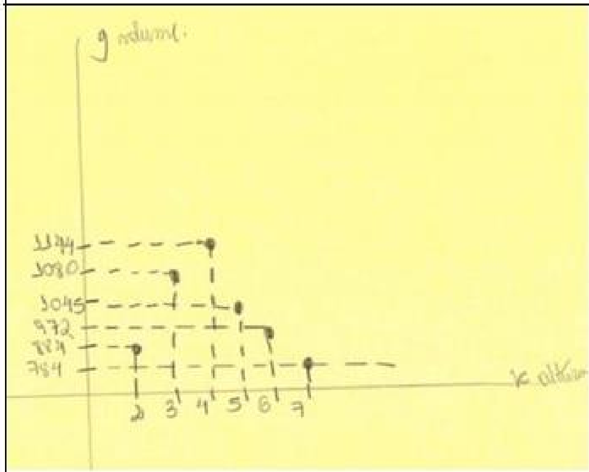
Divisão da fachada em três regiões; aproximação das regiões em figuras planas e representação das funções *f(x)* e *g(x)* da região sob o beiral – abordagem para o Ensino Médio

Para o Ensino Superior a sugestão é considerar o arco da fachada como sendo uma parábola e encontrar a área sob esta curva utilizando-se conceitos do Cálculo Diferencial e Integral (C.D.I) de onde temos que a área sob uma curva *f(x)* no intervalo de a até b é A= $\int_a^b f(x)dx$.

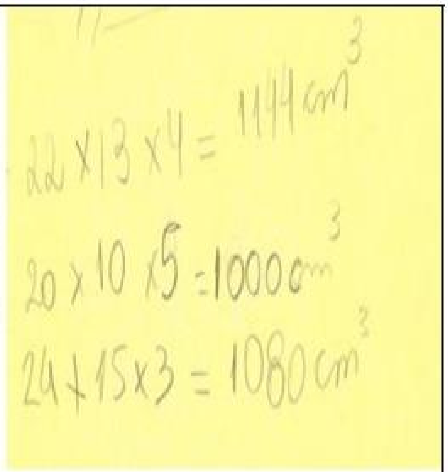
Fonte: Adaptado de Ferruzzi et al. (2010)

Porém, em uma mesma turma, uma atividade de Modelagem Matemática pode apresentar diferentes encaminhamentos e soluções. No trabalho desenvolvido por Gomes e Silva (2017a), por exemplo, os autores apresentam uma atividade de Modelagem Matemática desenvolvida com alunos do Ensino Médio, com a temática "otimização de embalagem", na qual foram deduzidos modelos matemáticos, escritos sob diferentes representações, como mostra o Quadro 2.

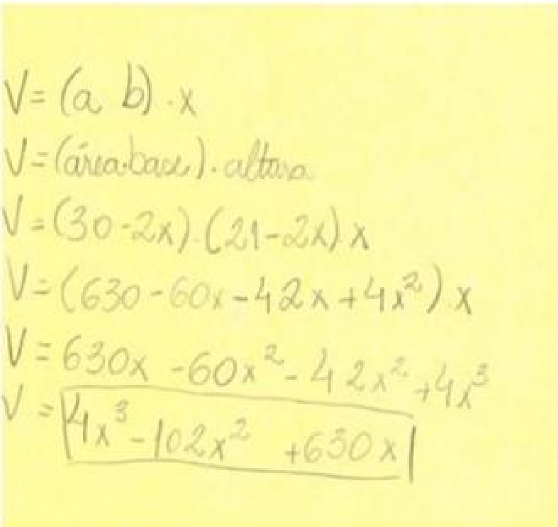
Quadro 2: Modelos Matemáticos para o problema "otimização da caixa" e suas diferentes representações



(a)
Representação gráfica



(b)
Representação aritmética



(c)
Representação polinomial

Altura das Caixas	Volume encontrado
4 cm	1144 cm³
3 cm	1080 cm³
5 cm	1100 cm³
5,5 cm	1045 cm³
2,5 cm	1000cm³
6 cm	972cm ³
2 cm	884 cm³
7 cm	764 cm³
7,5 cm	675 cm³

(d)
Representação tabular

Fonte: Gomes e Silva (2017a)

Esses registros, apresentados por Gomes e Silva (2017a), exemplificam diferentes representações de modelos matemáticos, como indicam Almeida, Silva e Vertuan (2012), os quais foram escritos na forma de tabelas, gráficos e equações.

Para Tortola (2016), diferentes estruturas matemáticas podem ser utilizadas pelos alunos para expressar modelos, podendo ser constituídos por inúmeras representações, sendo elas tabulares, pictóricas, descritivas, gráficas, textuais, entre outras, o que corrobora com os exemplos apresentados. O autor categorizou os diferentes tipos de modelos matemáticos resultantes do desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

> *Modelos aritméticos*: consistem em uma estrutura utilizada para expressar a relação entre as variáveis do problema e têm como fundamento números e operações aritméticas elementares.
> *Modelos gráficos*: estrutura utilizada para organizar e apresentar dados e informações de maneira objetiva por meio de recursos visuais, que podem ser expressos na forma de figuras geométricas, diagramas, desenhos, ou, imagens.
> *Modelos tabulares*: trata-se de uma estrutura na qual as informações são organizadas na forma de tabelas.
> *Modelos textuais*: constituem-se em uma estrutura na qual as relações matemáticas entre as variáveis são descritas usando língua materna.
> *Modelos descritivos*: modelos cuja estrutura descreve uma relação entre as variáveis do problema usando língua materna associada a números e operações.
> *Modelos algébricos*: modelos cujas variáveis são expressas por meio de letras e são constituídos pela reunião de letras, números e operações (TORTOLA, 2016, p. 244, grifos do autor).

O autor pontua que cabe ao professor orientar os alunos para que eles consigam estabelecer comparações e relações entre os modelos matemáticos produzidos por eles, tanto com relação aos modelos matemáticos formulados a partir de uma mesma situação, explorando a evolução dos modelos, quanto ao uso de um modelo em diferentes situações-problema.

Nesse sentido, observamos a relevância da produção de modelos no âmbito de atividades de modelagem matemática e, também, quando olhamos para o contexto de nossa pesquisa, para o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que a produção de modelos permite que os alunos revisitem os conhecimentos empreendidos no desenvolvimento da atividade e externalizem seus pensamentos e relações estabelecidas por meio da linguagem matemática (TORTOLA, 2016), ou seja, mostram-se como uma via de acesso ao pensamento dos alunos. Por isso, cabem investigações e orientações aos professores que assegurem a produção de modelos matemáticos. As MEAs, proposta por Lesh, et al. (2000), se mostra como uma possibilidade nesse sentido, uma vez que tem como pressuposto a prática da Modelagem Matemática para a elicitação de modelos, ou seja, para provocar a externalização dos pensamentos e conclusões dos alunos em relação à situação-problema por meio de um sistema conceitual descrito em termos da linguagem matemática, isto é, de um modelo matemático.

2.3 *MODEL-ELICITING ACTIVITIES* (MEAs)

A perspectiva *Model-Eliciting Activities* (MEAs) começou a ser delineada em meados da década de 1970 e foi sendo aperfeiçoada pelos pesquisadores Lesh e Lamon (1992), Lesh, et al., (2000), Chamberlin (2002). Inicialmente foi chamada de *Case Studies for Kids* (Estudo de Caso para Crianças) e *Thought Revealing Activities* (Atividades Reveladoras de Pensamentos), mas atualmente a maioria de seus desenvolvedores se referem a ela como MEAs, pois segundo eles, esse nome explica melhor os objetivos dessa perspectiva.

As MEAs constituem uma estrutura que uma pessoa ou um grupo utiliza para produzir um modelo matemático para resolver problemas associados ao mundo real, a partir dessa estrutura os alunos geram soluções para um problema por meio de descrições, explicações, construções e outras produções escritas, "revelando, testando e refinando ou ampliando repetidamente suas formas de pensar" (LESH, et al., 2000, p. 597).

O desenvolvimento das MEAs foi norteado por dois objetivos; primeiro, encorajar os alunos a criarem modelos matemáticos para resolver problemas complexos do mundo real, de forma similar aos que são empregados na Matemática Aplicada (LESH; DOERR, 2003); segundo, viabilizar que os pesquisadores investiguem o pensamento matemático dos alunos.

Dessa forma, enxergamos as MEAs como uma alternativa promissora para a investigação que nos propomos realizar, pois podem nos ajudar a compreender como atividades de Modelagem Matemática, desenvolvidas nessa perspectiva, podem contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico, à medida que a atividade ocorre e, posteriormente, ao analisar os registros escritos produzidos, tendo em vista que suas orientações viabilizam a externalização dos pensamentos dos alunos por meio de diálogos e registros.

Quando as MEAs são desenvolvidas os alunos trabalham em grupos e são incentivados a revelarem seus pensamentos individuais ou coletivos enquanto se inteiram do problema. O modelo matemático que fornece resultados para o problema em questão reflete o pensamento do grupo, oferecendo oportunidades aos alunos de revisitarem seus próprios pensamentos à medida que documentam seus modelos matemáticos. Depois que os grupos desenvolveram seus modelos, os alunos, geralmente, testam sua robustez ou estabilidade aplicando-os a uma nova situação. Frequentemente, essa prática permite identificar inconsistências ou melhorias no modelo, novamente esse tipo de feedback contribui para o desenvolvimento do pensamento reflexivo e crítico dos alunos (DARK; MANIGAULT, 2007).

As MEAs são delineadas com base em seis princípios que orientam a produção, interpretação e análise de modelos matemáticos, conforme Lesh, et al. (2000). O Quadro 3 apresenta esses princípios.

Quadro 3: Princípios orientadores das atividades de elicitação de modelos matemáticos

Princípio	**Descrição**
Construção do modelo	Garante que a atividade requeira a construção de uma descrição explícita, explicação ou procedimento para uma situação matematicamente significativa.
Generalização	Também conhecido como Princípio de Capacidade de Compartilhamento e Reutilização do Modelo. Requer que os alunos produzam soluções compartilháveis e modificáveis para outras situações relacionadas.
Documentação do modelo	Garante que os alunos criem alguma forma de documentação que revelará explicitamente como eles estão pensando a situação-problema.
Realidade	Requer que a atividade seja colocada em um contexto realista e seja projetada para que os alunos possam interpretar a atividade de forma significativa a partir de seus diferentes níveis de habilidade matemática e conhecimento geral.
Autoavaliação	Garante que a atividade contenha critérios que os alunos possam identificar e usar para testar e revisar suas atuais formas de pensar.
Protótipo eficaz	Garante que o modelo produzido será o mais simples possível, mas ainda matematicamente significativo para fins de aprendizagem (ou seja, um protótipo de aprendizagem ou uma “grande ideia” em matemática).

Fonte: Stohlmann e Albarracín (2016) com base em Lesh, et al. (2000)

Stohlmann e Albarracín (2016) sinalizam que frequentemente ao completarem uma atividade na perspectiva das MEAs os alunos irão revisar, refinar e ampliar conceitos matemáticos. Além disso, durante o desenvolvimento das MEAs os alunos trarão à mesa seu próprio conhecimento (DARK; MANIGAULT, 2007). Os alunos podem ter origens diferentes e podem ter experiências muito diferentes, mas isso deve aumentar a riqueza das discussões em equipe. Eles terão a oportunidade de demonstrar seu domínio das habilidades matemáticas de maneira gradual e compreender como essas habilidades podem ser usadas em uma situação real.

Cada atividade, desenvolvida sob as orientações das MEAs, segundo Chamberlin e Moon (2005), é composta por quatro seções. As duas primeiras seções configuram o contexto e as características da situação-problema, e as duas seções finais abordam o problema.

Na primeira seção é realizada a abordagem da situação-problema com o intuito de gerar interesse e discussão dos alunos sobre o contexto do problema. Para isso o professor pode utilizar recursos como vídeos, imagens, entrevistas, reportagens, documentários ou mesmo uma roda de conversa.

A segunda seção é composta por perguntas de prontidão, geralmente, perguntas simples, perguntas de compreensão a respeito da situação. O objetivo dessa seção é garantir que os alunos tenham o conhecimento básico necessário para resolver o problema. Nessas duas primeiras seções a ênfase está em ajudar os alunos a entender o contexto da situação-problema.

A terceira seção contempla o trabalho com os dados da situação-problema, que podem ser apresentados na forma de diagramas, gráficos, mapas, tabelas, palavras, textos escritos e assim por diante. Essa seção é frequentemente mencionada na seção de perguntas de prontidão e é sempre usada na pergunta final.

A quarta seção é a resolução de um problema decorrente da situação proposta. O problema, normalmente, não passa de um parágrafo e demanda uma interpretação matemática da situação para que possa ser solucionado.

O Quadro 4 apresenta exemplos de perguntas que o professor pode fazer aos alunos para orientar o desenvolvimento da atividade em cada seção das MEAs.

Quadro 4: Exemplos de questionamentos para cada seção das MEAs

Seção	**Perguntas que podem auxiliar**
Primeira seção *Abordagem da situação-problema*	✓ O que vocês sabem sobre o assunto? ✓ Já tiveram experiências anteriores a respeito? ✓ O que vocês gostariam de conhecer sobre o assunto?
Segunda seção *Compreensão da situação-problema*	✓ Vocês compreenderam o que iremos investigar? ✓ O que vocês já conhecem que pode nos ajudar a solucionar o problema? ✓ Já temos todas as informações necessárias para solucioná-lo? ✓ Como podemos proceder? ✓ Onde podemos buscar as informações que ainda desconhecemos?
Terceira seção *Exploração dos dados da situação-problema*	✓ Quais as formas de organização das informações vocês julgam ser mais convenientes? Tabelas, gráficos, figuras, textos? ✓ Como essas informações podem contribuir com a investigação do problema?
Quarta seção *Resolução da situação-problema*	✓ A quais conceitos da Matemática podemos recorrer para analisar os dados coletados? ✓ Vocês já estudaram algum conteúdo matemático que pode nos ajudar a solucionar esse problema? ✓ O modelo matemático obtido fornece uma resposta coerente em termos da situação-problema? ✓ O modelo matemático pode ser utilizado para solucionar situações semelhantes? Por exemplo, “e se agora nós...”

Fonte: Dos autores

O uso das MEAs favorece a significação de conceitos, isso porque os alunos criam modelos para resolver problemas matemáticos realistas. Nesse contexto, os alunos não estão mais à procura de uma resposta já definida e conhecida apenas pelo professor, o qual não ilustra a priori um processo algorítmico para resolver o problema, como é feito em uma abordagem didática habitual (STEINER; STOECKLIN, 1997), em vez disso, em atividades orientadas pelas MEAs, os alunos são incentivados a trabalhar de forma heurística, buscando métodos e modelos que o auxiliarão a resolver o problema. Geralmente, os alunos apresentam sua solução para os colegas e têm a oportunidade de discutir e descrever seus resultados, mostrando que, embora possam existir semelhanças nos raciocínios, cada grupo resolveu o problema usando métodos de sua escolha.

Essa análise de solução não é novidade para muitos professores e salas de aula, porque é uma ferramenta frequentemente usada para criar significado e suscitar comunicação em matemática. Quando os alunos criam soluções específicas, um contexto para falar sobre matemática pode ser desenvolvido (WOOD; MERKEL; UERKWITZ, 1996). A apropriação, frequentemente, promove maior persistência na solução de problemas (PRENZEL, 1992) e esse é outro resultado potencial das MEAs.

Glas (2002) sinaliza que a criação de modelos é uma das atividades matemáticas mais poderosas nas quais os alunos podem se envolver, pois os inserem em situações que favorecem a compreensão de que a Matemática não é uma série de subseções desconexas, pelo contrário, revela a interconectividade dos conteúdos matemáticos durante a produção dos modelos matemáticos. Portanto, a criação de modelos matemáticos por meio das MEAs é uma possibilidade eficaz para estimular o desenvolvimento conceitual no processo de aprendizado de matemática à medida que envolve os alunos no pensamento matemático elementar, o que pode não ser alcançado com outras abordagens curriculares (LESH, et al., 2000).

Glas (2002) lista quatro resultados educacionais alcançados pela Modelagem na sala de aula, indicando que modelos e Modelagem auxiliam os alunos (a) a reconhecer a interconectividade dentro e fora da matemática; (b) reconhecer várias perspectivas em um campo do conhecimento; (c) ser criativo no pensamento matemático e (d) ver a matemática de maneira prática e aplicável. As MEAs se configuram como um método disponível para inserir modelos e Modelagem no currículo de matemática.

3 PENSAMENTO ALGÉBRICO

A Álgebra escolar tem sido tradicionalmente ensinada como um conjunto de procedimentos desconectados de outros conhecimentos matemáticos e da realidade dos alunos, uma vez que envolve predominantemente simplificações de expressões algébricas, resolução de equações e regras para a manipulação simbólica. As aplicações utilizadas são artificiais e aos alunos não é dada a oportunidade de refletir sobre suas experiências, nem de articular seus conhecimentos a outros. Muitas vezes os alunos, baseados em falas de colegas, parentes e até professores, formam preconceitos em relação à Álgebra, antes mesmo de experimentarem atividades relacionadas a ela, e acabam criando barreiras que as impedem de reconhecer sua importância e utilidade para situações do cotidiano.

Para Kaput (1999, p. 134) a Álgebra "envolve generalizar e expressar essa generalidade usando linguagens cada vez mais formais, cuja generalização começa na aritmética, em situações de modelagem, em geometria e em praticamente toda a matemática que pode ou deve aparecer nas séries elementares". Essa perspectiva, defendida pelo autor, é apresentada como possibilidade de uma nova abordagem para o ensino e a aprendizagem de Álgebra, fazendo uso do pensamento algébrico[7], em suas várias formas, e das representações algébricas, como gráficos, tabelas, planilhas e fórmulas tradicionais, ferramentas intelectuais poderosas desenvolvidas por nossa civilização e que podem ser utilizadas para criar ambientes de ensino em salas de aula que permitam aprender com compreensão.

As mudanças mais perceptíveis que essa nova abordagem propõe é iniciar o estudo de Álgebra nos primeiros anos escolares, com base no conhecimento informal dos alunos; integrar a aprendizagem de Álgebra com a aprendizagem de outras disciplinas, ampliando o campo de utilização do conhecimento matemático; incluir as várias formas de pensamento algébrico nas aplicações do conhecimento matemático; utilizar as competências linguísticas e cognitivas naturais dos alunos, incentivando-os a refletir sobre o que aprenderam articulando com o que já sabem; e incentivar a aprendizagem ativa e a construção de relações que valorizem a compreensão e a criação de sentido (KAPUT, 1999).

Embora essas mudanças já venham sendo sinalizadas há alguns anos por pesquisadores e documentos curriculares internacionais, no Brasil, mesmo com várias reformas educacionais,

[7] Apesar de haver pesquisas que utilizam tanto o termo pensamento algébrico, quanto o termo raciocínio algébrico para se referir a essa nova abordagem da Álgebra, é mais comum, no Brasil, o uso do termo pensamento algébrico nas pesquisas e documentos curriculares, portanto, é esse termo que adotamos.

novas diretrizes e orientações curriculares para o sistema educacional, o ensino de Álgebra permaneceu com poucas alterações na Educação Básica (COELHO; AGUIAR, 2018). Pesquisas como a de Aguiar (2014) evidenciam que a maioria dos livros didáticos do Ensino Fundamental ainda abordam o ensino de Álgebra de forma essencialmente técnica, priorizando a aprendizagem de regras operatórias, sendo poucos os que apresentam propostas para o desenvolvimento do pensamento algébrico. A autora argumenta que “as inovações aparecem, mas esbarram nos conteúdos arraigados que não perdem o seu espaço no Ensino Fundamental” (AGUIAR, 2014, p. 286). Como consequência de um trabalho pautado apenas no livro didático, acentua-se a dificuldade de conectar os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios que os alunos já possuem.

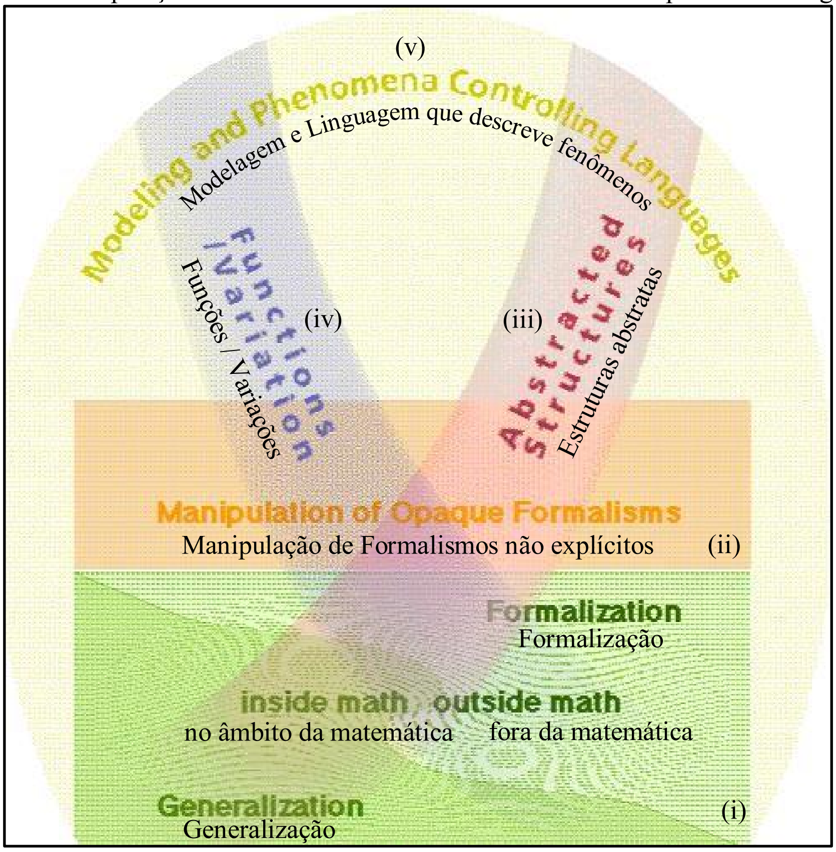
Com a BNCC, porém, reconhece-se a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico para o ensino de Álgebra, e esse pensamento passa a configurar como uma de suas finalidades. De acordo com o documento, para seu desenvolvimento

> é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (BRASIL, 2018, p. 270).

Para Almeida e Santos (2017), em um ensaio teórico sobre a caracterização do pensamento algébrico, apesar de existir um consenso entre os pesquisadores da área de Educação Matemática sobre a importância de desenvolver esse tipo de pensamento nos estudantes, esse consenso não existe quando se trata de conceituá-lo. Isso se deve possivelmente ao “extenso escopo de objetos (por exemplo, equações, funções, padrões, ...) e processos algébricos (inversão, simplificação, ...) bem como os vários modos possíveis de conceber o pensamento em geral” (RADFORD, 2006, p. 2).

Diante dessa multiplicidade de conceitos, o entendimento adotado nessa pesquisa se alinha à concepção apresentada por Kaput (1999), uma vez que se trata de uma visão ampla, que contempla ideias colocadas por outros autores, conforme sinaliza Van de Walle (2009). Kaput (1999) aponta cinco diferentes formas do pensamento algébrico: (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos); (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações; (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas; e (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos. Segundo o autor as cinco formas de pensamento algébrico estão sobrepostas e inter-relacionadas entre si, como mostra a Figura 3.

Figura 3: Sobreposição e inter-relacionamento das cinco formas de pensamento algébrico



Fonte: Adaptado de Kaput (1999, p. 135)

As cinco formas de pensamento algébrico interagem ricamente de forma conceitual, e podem ser encaradas com uma estrutura inter-relacionada que sinaliza como o pensamento algébrico pode ser trabalhado ao longo dos anos escolares.

A forma (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, indicada na Figura 3 pelo retângulo verde, se configura como a base para as outras, pois de acordo com Kaput (1999), a generalização e a formalização são intrínsecas à atividade matemática, são elas que caracterizam um pensamento como matemático.

A forma (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), indicada na Figura 3 pelo retângulo laranja, implica na construção de relações que não estão evidentes, mas que podem ser constatadas e descritas por meio de símbolos e regras sintáticas que permitem construir significados.

A forma (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações, indicada na Figura 3 pela faixa vermelha, sugere que das experiências matemáticas dos alunos surgem estruturas capazes de fornecer uma base para níveis mais elevados de abstração e formalização, como ocorre, por exemplo, com as ideias de correspondência e variação de quantidades que fundamentam o conceito de função, embasadas nos diversos tipos de experiências matemáticas envolvendo contagem, medição e estimativa, que indica a forma (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, indicada na Figura 3 pela faixa azul.

Por fim, a forma (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos, indicada na Figura 3 pela área amarela, indica a modelagem como uma forma de descrever fenômenos extramatemáticos e matematizá-los por meio da linguagem. "Na descrição de Kaput do pensamento algébrico, a modelagem reflete a álgebra como uma 'rede de linguagens' que penetra todos os outros aspectos da matemática" (VAN DE WALLE, 2009, p. 318) e, por isso, na figura, engloba todas as outras formas de pensamento algébrico apresentadas.

Assim, para Kaput (1999), o trabalho com a Álgebra em sala de aula deve incluir essas cinco formas de pensamento algébrico, o qual pode ser viabilizado por meio de atividades que requerem dos alunos observações de fenômenos e experimentações, que envolvem formulação de conjecturas, justificações, argumentações, generalizações e descrições a partir do uso da linguagem matemática. Segundo Lins e Gimenez (1997), em todo o processo realizado pelos alunos no desenvolvimento de uma atividade existe uma lógica em sua resolução, o que requer um olhar atento do professor para compreender a forma de pensar dos alunos.

Blanton e Kaput (2005) sinalizam que os alunos generalizam situações-problema de acordo com sua argumentação e sua forma de expressar ideias. Dependendo da idade, essas generalizações podem ser representadas por meio de símbolos e/ou palavras, utilizando um padrão recursivo ou uma relação funcional.

O estudo de padrões e funções, por exemplo, podem conduzir à formalização do simbolismo algébrico necessário para interpretar uma determinada situação, mas é essencial que os alunos compreendam o significado desses símbolos no âmbito da matemática, para que possam utilizá-los em outras situações.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 87) defendem o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de elementos como "a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam, as tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização".

Para Schliemann, Carraher e Brizuela (2007, p. 12), "a generalização está no coração do pensamento algébrico". Corroborando com essa ideia, Canavarro (2007, p. 87), argumenta que o pensamento algébrico "está na atividade de generalizar", assim além de utilizar as letras para expressar ideias algébricas, "a linguagem natural, e outros elementos como diagramas, tabelas, expressões numéricas, gráficos, podem também ser usadas para expressar a generalização". Lins e Gimenez (1997, p. 114) retratam essa generalização como uma situação que "emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares". Todas essas ideias corroboram com o fato de a generalização ser considerada a base para as demais formas de pensamento algébrico conforme aponta Kaput (1999).

Nesse sentido, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) ressaltam a importância de desenvolver atividades que empreendam esses elementos desde o início da vida escolar dos estudantes.

Incorporar a Álgebra em todo o currículo de Matemática desde o início dos anos escolares é possível, pois segundo Blanton e Kaput (2011) e Radford (2011). Nessa fase o pensamento algébrico envolve mais o desenvolvimento de maneiras de pensar do que a manipulação simbólica, podendo ser desenvolvido através de atividades que solicitem aos alunos analisar relações entre quantidades, notar a formação de uma estrutura, estudar mudanças, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, comprovar e realizar previsões.

A atenção quanto ao desenvolvimento do pensamento algébrico, também está presente no NCTM (2000) que orienta sobre a importância de encorajar os alunos a representar as suas ideias sob formas que, para eles, façam sentido, mesmo que as suas primeiras representações não sejam as convencionais. No entanto, destaca que é igualmente importante "que os alunos tenham oportunidades para aprender formas de representação convencionais, quer para criar, aperfeiçoar e utilizar as suas próprias representações, enquanto ferramentas que suportam a aprendizagem e a produção de Matemática" (NCTM, 2000, p. 76).

Vale a pena citar, ainda, a *Early Algebra,* um programa no qual são produzidos e disponibilizados materiais didáticos e instrucionais a respeito da Álgebra elementar. Busca o reconhecimento do pensamento algébrico em atividades matemáticas em anos anteriores aos sétimos anos do Ensino Fundamental. Configura-se, portanto, como uma abordagem da Educação Matemática para o ensino da Álgebra Elementar e também como uma área de pesquisa (SCHLIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2007; BLANTON; KAPUT, 2005; CARRAHER et. al., 2006; CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008) com interesse na análise das relações entre as quantidades, no desenvolvimento da consciência da estrutura numérica e das propriedades, no estudo das relações funcionais, priorizando a generalização e a justificativa, e na resolução de problemas com foco nas relações.

Nesse sentido, pautados em pesquisas na área da Educação Matemática e em um olhar crítico para as orientações de documentos curriculares, é conveniente que o professor tenha ciência dos contextos que possibilitam o desenvolvimento do pensamento algébrico nas aulas de Matemática. É sobre esses contextos e suas possibilidades que discorreremos na seção a seguir.

3.1 CONTEXTOS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Há duas vertentes que agem como “portas de entrada” (MESTRE, 2014, p. 77) para o desenvolvimento do pensamento algébrico, são elas: o pensamento relacional e o pensamento funcional (CARPENTER et al., 2003).

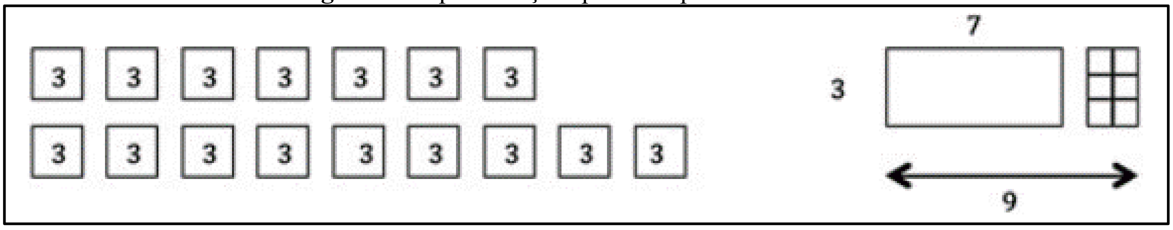
3.1.1 Pensamento Relacional

A terminologia pensamento relacional, utilizada por Carpenter et al. (2003), sintetiza as ideias sobre a aritmética generalizada, uma vez que dizem respeito à capacidade de olhar para expressões ou equações de uma maneira mais ampla, revelando as relações existentes entre elas. No pensamento relacional procura-se compreender as relações e propriedades fundamentais das operações aritméticas em vez de focar exclusivamente nos procedimentos de cálculo (CARPENTER et al., 2003).

Autores como Booth (1988), Kieran (1992), Linchevski e Livneh (1999), identificaram em suas pesquisas que alguns erros dos alunos em Álgebra se devem à incompreensão das estruturas aritméticas. Ou ainda, como apontam Russell et al. (2011), os alunos podem compreender as operações em contextos aritméticos, mas não mobilizam esse conhecimento para o novo contexto algébrico. Assim, é recomendável que o trabalho no contexto aritmético vise a articulação com o pensamento algébrico, como proposto na *Early Algebra*.

A Figura 4 apresenta o estudo de estruturas que surgem no raciocínio aritmético encaminhadas por alunos de um quarto ano nos EUA. Eles analisaram o que acontece com o produto de uma multiplicação quando um dos fatores é aumentado em uma certa quantidade. O professor apresentou algumas afirmações iniciais e durante as discussões as multiplicações propostas foram ilustradas por desenhos.

Figura 4: Representações para comparar 7 x 3 e 9 x 3



Fonte: Kieran, C. et al. (2016, p. 18)

O professor solicitou que os alunos mostrassem como as representações ilustravam as multiplicações, descrevessem as correspondências entre as representações e explicassem por que suas ideias funcionavam para qualquer multiplicação, e não apenas para 7 x 3. Nessas configurações, os alunos aprenderam a perceber regularidades, a realizar generalizações e a explicar ou provar suas conjecturas.

Carpenter et al. (2003) sugerem o desenvolvimento do pensamento algébrico trabalhando com a compreensão do sinal de igual em situações de equivalência numérica; análise de relações numéricas; elaboração de hipóteses sobre relações numéricas; e argumentação em favor dessas hipóteses. Esses autores consideram que é necessário tratar as propriedades dos números e das operações, de modo que os alunos: i) tenham acesso às propriedades matemáticas básicas; ii) percebam por que o procedimento de cálculo que usam funciona; iii) apliquem os seus procedimentos com flexibilidade numa variedade de contextos; e iv) reconheçam as relações entre álgebra e aritmética e que possam usar essa compreensão da aritmética na compreensão da álgebra.

O pensamento relacional é evidenciado quando os alunos compreendem que é possível realizar transformações em expressões ou ainda substituir expressões por outras que lhe são equivalentes, característica essencial para o pensamento algébrico (KAPUT, 2008).

O pensamento relacional pode ser expresso usando uma gama de métodos e formas, mas em todos os casos, essas formas e métodos retratam a atenção às ideias fundamentais de equivalência e compensação. O Quadro 5 exemplifica possibilidades de se explorar as estruturas de expressões trabalhando a compreensão relacional do sinal de igual em situações de equivalência numérica, bem como a generalização de relações numéricas e das propriedades das operações.

Quadro 5: o sinal de igual em situações de equivalência numérica e a generalização de relações numéricas.

<table>
<tr><th></th><th>GENERALIZAÇÃO
(COOPER; WARREN, 2011; MASON; STEPHENS; WATSON, 2009)</th><th>EXEMPLOS</th></tr>
<tr><td>ESTRUTURA DAS EXPRESSÕES NUMÉRICAS
(CAI; NG; MOYER, 2011;
JACOBS et al., 2007)</td><td>Simétrica:
(se $a = b$ então $b = a$, para quaisquer elementos a e b);

Reflexiva:
($a = a$, para todo o elemento a);

Transitiva:
(se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$, para quaisquer elementos a, b e c);

Elemento neutro da adição:
($a + 0 = 0 + a = a$, para todo o elemento a)</td><td>Simétrica:
$13 = 7 + 6$ e $7 + 6 = 13$;

Reflexiva:
$8 = 8$;

Transitiva:
$7 + 6 = 13$ e $13 = 10 + 3$, então $7 + 6 = 10 + 3$;

Elemento neutro da adição:
$19 + 0 = 0 + 19 = 19$.</td></tr>
<tr><td>EQUIVALÊNCIA
(KAPUT; CARRAHER; BLANTON, 2008;
MOLINA; CASTRO; AMBROSE, 2006;
LINS; KAPUT, 2004; KIERAN, 1981)</td><td>Equivalência numérica:
$a \pm b = c$;
$c = a \pm b$;
$a \pm b = c \pm d$;
$a \pm b = c \pm d \pm e$

Equivalência por definição ou notação:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;

$100\ cm = 1\ m$;

$\frac{a}{b} = ab^{-1}$

Equivalência simbólica:
$x^2 - 4x = x(x - 4)$</td><td>Equivalência numérica:
$5 + 3 = 8$;
$8 = 5 + 3$;
$6 + 9 = 7 + 8$;
$10 + 5 = 7 + 6 + 2$

Equivalência por definição ou notação:
$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$;

$100\ cm = 1\ m$;

$\frac{1}{2} = 2^{-1}$

Equivalência simbólica:
$x^2 - 4x = x(x - 4)$</td></tr>
</table>

VARIAÇÃO E COMPENSAÇÃO USANDO EQUIVALÊNCIA DE ACORDO COM OPERAÇÕES ESPECÍFICAS (BRITT; IRWIN, 2011; STEPHENS; WANG, 2009; IRWIN; BRITT, 2005)	Comutativa: $a + b = b + a$; $ab = ba$; Compensação na adição: $a + b = (a + c) + (b - c)$; Compensação na subtração: $a - b = (a + c) - (b + c)$; $a - b = (a - c) - (b - c)$; Associativa da adição e decomposição de parcelas: $a + b = c + d + b$, sendo $c + d$ uma decomposição de a; Grandeza dos números envolvidos: se $a > c$, então $a + b > c$; Multiplicação como adição repetida de parcelas: $4 \times a = a + a + a + a$; Associativa da multiplicação em relação à adição: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$; Distributiva da multiplicação em relação à adição: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$	Comutativa: $3 + 5 = 5 + 3$; $2.4 = 4.2$; Compensação na adição: $23 + 15 = (23 + 1) + (15 - 1)$; Compensação na subtração: $39 - 15 = (39 + 2) - (15 + 2)$; $39 - 15 = (39 - 2) - (15 - 2)$; Associativa da adição e decomposição de parcelas: $19 + 4 = 10 + 9 + 4$; Grandeza dos números envolvidos: $20 > 12$, então $20 + 4 > 12$; Multiplicação como adição repetida de parcelas: $4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$; Associativa da multiplicação em relação à adição: $(6 \times 2) \times 5 = 6 \times (2 \times 5)$; Distributiva da multiplicação em relação à adição: $10 \times (2 + 8) = (10 \times 2) + (10 \times 8)$
NÚMEROS QUE PODEM VARIAR (COOPER; WARREN, 2011; FUJII; STEPHENS, 2001)	Complementaridade da adição e da subtração: $a + b - b = a$; Subtração de um número por si mesmo: $a - a = b - b$;	Complementaridade da adição e da subtração: $78 + 49 - 49 = 78$; $78 + \square - \square = 78$; Subtração de um número por si mesmo: $11 - 11 = 25 - 25$; $\square - \square = \square - \square$

Fonte: Dos autores

O Quadro 5 reúne o trabalho de alguns pesquisadores com a visão de que o desenvolvimento do pensamento relacional está intimamente ligado à exploração das estruturas em expressões. Nessas situações, os alunos têm a oportunidade de “comparar igualdades com vários termos de cada lado decompondo ou rearranjando algumas das combinações de números, demonstrando assim o equilíbrio numérico da igualdade” (KIERAN, 2007a, p. 12). Desse modo, os alunos podem identificar o uso do sinal de igual numa multiplicidade de contextos, observando os diferentes significados que lhe estão associados, realizando análises de relações numéricas, elaborando hipóteses sobre as relações numéricas e argumentação em favor dessas hipóteses.

Esses pesquisadores observaram que existe a possibilidade de envolver os alunos desde as séries iniciais na exploração de estruturas, realizando-as de uma forma mais sofisticada do que alguns autores imaginavam. A atenção à estrutura deve ser uma parte essencial do ensino e aprendizagem da Matemática. No entanto, a exploração precisa ser inserida de forma gradativa e contínua para que os alunos possam significar as relações observadas. Pesquisas recentes que apoiam essa visão sinalizam que proporcionar aos alunos o trabalho com situações particulares, viabiliza a identificação de propriedades gerais que podem, posteriormente, serem aplicadas a novas situações. A compreensão estrutural se configura como uma fonte de controle que permite ir além da situação particular, e a extensão consciente desse controle contribui com o desenvolvimento da generalização.

3.1.2 Pensamento Funcional

O pensamento funcional é outra vertente do pensamento algébrico (BLANTON, 2008; BLANTON; KAPUT, 2011; KAPUT, 2008; WARREN; COOPER, 2005). Segundo Blanton (2008), as funções são o núcleo do pensamento funcional e envolvem procurar regularidades em como as grandezas variam em relação uma à outra. Uma função é um modo de expressar essa variação, cuja relação pode ser muito simples ou mais complexa e pode ser descrita por palavras ou por símbolos matemáticos, através de representações gráficas ou tabulares. Na perspectiva de Blanton (2008), o pensamento funcional envolve o pensamento algébrico porque inclui fazer generalizações sobre o modo como os dados estão relacionados.

Smith (2008) refere-se ao pensamento funcional como o pensamento representacional que revela as relações entre duas ou mais quantidades que variam e, mais especificamente, como o tipo de pensamento que direciona para a generalização dessas relações. De acordo com esse autor, o início do processo para o desenvolvimento do pensamento funcional acontece quando o aluno se envolve numa atividade, presta atenção às quantidades que variam e começa a focar na relação entre essas quantidades.

Esse processo, embora seja individual, acontece no contexto social, mediante a exploração de determinadas situações-problema, sugeridas pelo professor, e por meio do envolvimento na discussão e negociação em sala de aula. Ao se envolver nas resoluções de situações-problema, os alunos tendem, ou são solicitados, a criar um registro. Normalmente, esse registro tem a forma de uma tabela, mas pode e deve ser complementado com outras formas de representação, deixando evidente as relações funcionais que conectam as ações do contexto com o sistema representacional que está sendo utilizado.

Quanto à compreensão das relações funcionais, as representações exercem um papel relevante, pois podem ter diferentes formas, como imagens, tabelas, gráficos, materiais manipulativos, símbolos matemáticos ou até a linguagem natural. Ponte et al. (2009) sintetizam as formas de representação de funções em quatro modos principais: i) através de enunciados verbais, utilizando a linguagem natural; ii) graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros gráficos; iii) aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados; e, iv) algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências. A compreensão dos alunos sobre funções está diretamente ligada ao uso de uma variedade de representações e à capacidade de perceber as conexões entre elas.

O desenvolvimento do pensamento funcional, desde os anos iniciais permite a "transição da linguagem natural para sistemas de notação simbólicas" (BLANTON; KAPUT, 2011, p. 12), oportunizando a compreensão do conceito de forma gradual, à medida em que os anos escolares avançam. Segundo os autores,

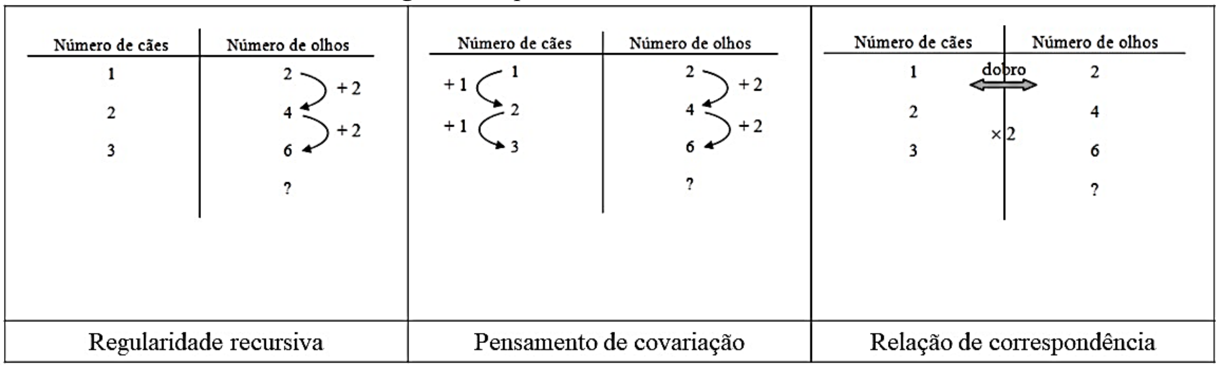
> com o desenvolvimento da infra-estrutura representacional, mantemos aquela instrução que deve começar a sustentar o pensamento dos alunos em direção à notação simbólica desde o início da escolaridade formal para que os alunos possam fazer a transição de algo dificultoso para o uso compreensivo de símbolos à medida que progridem os graus elementares. Em última análise, os alunos do Ensino Fundamental que aprenderam a raciocinar simbolicamente de forma significativa, serão muito melhor preparados para as abstrações do pensamento matemático mais avançado em séries posteriores (BLANTON; KAPUT, 2011, p. 14).

O pensamento funcional integra, assim, o trabalho com sequências (construção e generalização), relações (usando diferentes representações e generalizando) e funções (BLANTON; KAPUT, 2011). Esses autores, pautados em Smith (2008), utilizam o seguinte quadro teórico para categorizar o tipo de pensamento funcional que ocorre em sala de aula:

(i) regularidade recursiva: envolve identificar a variação existente numa sequência de valores; (ii) pensamento covariacional: é baseado na análise de como duas quantidades variam simultaneamente e mantém essa variação como uma parte explícita, dinâmica de descrição de uma função (por exemplo, quando o valor de x aumenta uma unidade, o valor de y aumenta três); (iii) relação de correspondência: demanda identificar a correlação entre variáveis (por exemplo, y é três vezes x mais dois).

Blanton e Kaput (2011) apresentam o exemplo de uma atividade realizada em anos iniciais que permitiu evidenciar os três tipos de pensamento funcional que os alunos podem manifestar ao analisar uma relação.

Figura 5: Tipos de Pensamento Funcional



Fonte: Blanton e Kaput (2011, p. 15)

Considerando as evidências empíricas que demonstram que alunos dos anos iniciais conseguem manifestar relações funcionais já com algum grau de sofisticação, Blanton e Kaput (2005) sugerem alguns encaminhamentos que favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico na vertente do pensamento funcional: i) simbolizar quantidades e operar com expressões simbólicas, como, por exemplo: usar símbolos para modelar problemas, usar símbolos para operar com expressões simbólicas; ii) representar dados graficamente; iii) descobrir relações funcionais, por exemplo: explorar a correspondência entre quantidades ou relações recursivas e desenvolver uma regra para descrever essa relação, usar tabelas para explorar a relação entre a variável dependente e a variável independente, descobrir, descrever, justificar e simbolizar relações matemáticas entre quantidades que variam; iv) prever resultados desconhecidos a partir de dados conhecidos, por exemplo: formular conjeturas sobre dados desconhecidos a partir dos dados conhecidos, estendendo o problema; e v) identificar e descrever padrões numéricos e geométricos, por exemplo: identificar regularidades numéricas que, por vezes, são apresentadas geometricamente, identificar regularidades geométricas e regularidades em conjuntos de expressões numéricas.

O trabalho que o professor desenvolve no âmbito do pensamento relacional contribui para a compreensão que se desenvolve no pensamento funcional, tendo em comum o desenvolvimento da capacidade de generalização, de representação dessa generalização e da argumentação sobre essas generalizações.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS E CONTEXTO DA PESQUISA

Abordamos, neste capítulo, o contexto da pesquisa e o delineamento de seus procedimentos. Descrevemos inicialmente as atividades desenvolvidas no âmbito do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação e Educação Matemática (GEPEEM) e sua relevância para a pesquisa; apresentamos características do ambiente, dos sujeitos da pesquisa, e das atividades desenvolvidas no processo de coleta de dados; e, em relação aos procedimentos, indicamos a natureza da pesquisa, os métodos e estratégias utilizados para produção e coleta de dados e a metodologia de análise utilizada para interpretar e dar sentido à nossa questão de pesquisa.

4.1 GRUPO DE ESTUDO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação e Educação Matemática (GEPEEM) conta com a participação de estudantes de Mestrado e Doutorado, do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), Campus Cascavel e também do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática (PPGMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Londrina/Cornélio Procópio, bem como estudantes de Graduação, do curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR - Toledo.

A participação no GEPEEM ampliou consideravelmente as oportunidades de discutir, pensar e refletir sobre temáticas envolvendo a prática da sala de aula, desenvolvidas segundo a Modelagem Matemática, uma das alternativas pedagógicas que está presente nas pesquisas realizadas no âmbito do Grupo. Foram os estudos realizados durante as reuniões que nos direcionou a investigar o potencial de atividades de Modelagem Matemática para o desenvolvimento do pensamento algébrico com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental.

Todas as atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas foram discutidas previamente no âmbito do Grupo. A coleta de dados para a pesquisa foi realizada durante o ano de 2019 em um Colégio Estadual localizado no Norte do Paraná.

A seguir apresentamos e descrevemos com mais detalhes os sujeitos da pesquisa, o desenvolvimento das atividades e a coleta e a análise dos dados.

4.2 A TURMA

A turma escolhida para nossa pesquisa foi um 6º ano do Ensino Fundamental, composta por vinte e sete alunos com idades que variavam de 11 a 14 anos. A turma, de uma maneira geral, era participativa, ou seja, os alunos geralmente acolhiam as atividades que lhe eram propostas, se engajando nas discussões.

Escolhemos uma turma em que eu era a professora regente da disciplina de Matemática, uma vez que valorizamos a pesquisa da própria prática, e que a constituição da presente pesquisa partiu de uma de minhas inquietações como professora.

4.3 AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA E SEU DESENVOLVIMENTO

A inserção das atividades de Modelagem Matemática nas aulas do 6º ano foi realizada de forma gradativa, de acordo com os três momentos sugeridos por Almeida e Dias (2004), com o intuito de promover a familiarização dos estudantes com esse tipo de atividade.

Nesse contexto, os alunos desenvolveram seis atividades, sendo duas do primeiro momento, tendo como temas "Miniaturas *Hot Wheels*" e "Gincana Outubro Rosa"; três do segundo momento, com os temas, "Tecnopatias"; "Ar-condicionado" e "Aerofractal"; e uma do terceiro momento, cujo tema escolhido pelos alunos foi 'Reciclagem'.

A atividade "Miniaturas *Hot Wheels*" foi a primeira atividade de Modelagem Matemática realizada pelos estudantes, e para o seu desenvolvimento a turma foi organizada em seis grupos com 4, 5 ou 6 estudantes. A atividade foi desenvolvida em contraturno e o espaço utilizado foi a sala da Matemática[8], visto que havia mesas propícias para o trabalho em grupo. Os instrumentos disponibilizados aos alunos foram vinte miniaturas *Hot Wheels,* tabela contendo as dimensões originais de vinte carros correspondentes às miniaturas, régua, trena, paquímetro, calculadora e folhas para anotações. Nessa atividade, os alunos tinham que descobrir a relação entre as medidas de um carro, em tamanho original, e de sua miniatura.

---

[8] A sala da Matemática é um espaço bem amplo que conta com quadro branco, armários e prateleiras que acomodam materiais pedagógicos, jogos e livros. Possui mesas retangulares que acomodam até 6 pessoas. É frequentemente utilizada pelos professores da disciplina, pois seu espaço físico contribui para o desenvolvimento de algumas atividades, principalmente, as que envolvem construções utilizando materiais manipuláveis.

A atividade “Gincana Outubro Rosa” foi a segunda atividade de Modelagem Matemática desenvolvida pelos estudantes. Eles trabalharam de duas formas: em grupos com 5 ou 6 estudantes cada e também todos juntos, formando um só grupo. Os espaços utilizados foram a sala de aula e também o campo de futebol *society* do Colégio. Para o desenvolvimento da atividade foram disponibilizadas aos estudantes bexigas, um laço feito com fita de cetim, símbolo da campanha Outubro Rosa, o celular da professora, o regulamento da Gincana e folhas para anotações.

A Gincana contava com a realização de algumas tarefas estabelecidas pelo Núcleo de Apoio à Saúde da Família (NASF), instituição responsável pela execução da Gincana. Escolhemos duas das tarefas propostas e as orientamos atribuindo um caráter investigativo, configurando-as como atividades de Modelagem Matemática. O objetivo na tarefa 2 foi descobrir uma estratégia que possibilitasse alcançar uma certa quantidade de curtidas na *selfie* da turma, postada no *Facebook*, em um determinado intervalo de tempo. Para a tarefa 4, de caráter social, com base no regulamento que estabelecia os alimentos a serem adquiridos e suas respectivas pontuações, o objetivo foi pensar em uma maneira de calcular a pontuação final da turma, para qualquer que fosse a quantidade de alimentos arrecadados.

A terceira atividade desenvolvida pelos estudantes foi sobre as “Tecnopatias[9]”. Durante o convite à realização da atividade os estudantes permaneceram sentados de forma individual em suas carteiras. Já para o momento de coleta de dados e construção do modelo matemático, que ocorreu em contraturno, os alunos foram organizados em dois grupos, um com 5 e o outro com 6 alunos. Os espaços utilizados foram a sala de aula e também a sala de Educação Física, que por conter tatame, foi mais propícia à realização da atividade. Os instrumentos disponibilizados foram fita métrica, régua escolar, régua em madeira de 100 cm, transferidor em madeira de 180º, folhas para anotações e os travesseiros de cada um dos alunos. Nessa atividade, os alunos tinham que investigar qual deve ser a altura ideal do travesseiro para que a postura, ao dormir, não prejudique a coluna.

Para a atividade “Ar-condicionado”, que foi a quarta atividade de Modelagem Matemática desenvolvida pelos estudantes, tivemos momentos em que os alunos permaneceram em suas carteiras, de forma individual, como durante a visita do técnico em refrigeração, e

[9] Tecnopatias é o nome dado as novas doenças surgidas com o uso inadequado de smartphones, tablets e notebooks, que atingem pessoas de todas as idades, mas sobretudo os adolescentes. Para alertar a população sobre os problemas gerados pelo uso inadequado das tecnologias e promover a conscientização sobre a utilização ética, saudável e segura dos recursos digitais, o governo federal lançou o programa Detox Digital Brasil e o Paraná foi o primeiro estado do país a aderir. Informações disponíveis em: https://reinaldobessa.com.br/2019/07/04/parana-sera-pioneiro-em-campanha-de-prevencao-as-tecnopatias/.

também momentos em que trabalharam organizados em grupos, cinco grupos com 5 ou 6 estudantes cada. O espaço utilizado foi a sala de aula, sendo essa o objeto de investigação dos estudantes. Para o desenvolvimento da atividade foram disponibilizadas aos estudantes tabela para cálculo simplificado de carga térmica e mapa do fator geográfico para cálculo de carga térmica de resfriamento, segundo a Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT, NBR 5858/1983, além de trenas, fitas métricas, réguas, calculadoras e folhas para anotações. Os estudantes deveriam determinar qual a potência do ar-condicionado para as salas de aula que teriam o aparelho instalado naquele ano.

Já a atividade “Aerofractal” foi a quinta atividade desenvolvida pelos estudantes. Para o seu desenvolvimento a turma foi disposta em cinco grupos com 5 ou 6 estudantes. Os espaços utilizados foram a sala de aula e, em contraturno, a sala da Matemática e o campo de futebol *society* do Colégio. Os instrumentos disponibilizados foram canudos de plástico, carretel de linha, papel seda, cartolina, fita dupla-face, tesoura, palito de madeira, réguas e folhas para anotações. Os estudantes observaram as regularidades existentes no Aerofractal confeccionado por eles e determinaram a relação entre a quantidade de canudos, de células e de faces recobertas por papel seda para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer.

Para o desenvolvimento da sexta atividade, referente ao terceiro momento de inserção dos estudantes com atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, de forma individual eles opinaram sobre temas de seu interesse. Os temas mais citados foram “Internet”, “Poluição” e “Reciclagem”. Porém, tínhamos tempo de desenvolver apenas mais uma atividade, pois já estávamos no final do ano letivo, os alunos, então, optaram pelo tema “Reciclagem”. Os espaços utilizados para o desenvolvimento dessa atividade foram a sala de aula e a Associação dos Amigos Recicladores de Peabiru (ADARP), onde puderam se inteirar sobre o tema e também realizar a coleta de dados. Em sala de aula, a turma trabalhou organizada em cinco grupos, com 5 ou 6 estudantes cada. Os instrumentos disponibilizados foram réguas, balança e folhas para anotações. Cientes de que durante o processo de triagem parte dos materiais recicláveis coletados no município viram rejeitos, os estudantes se empenharam em estimar essa quantidade.

Ao término de cada atividade, os procedimentos utilizados e os resultados obtidos por cada grupo foram discutidos com os demais estudantes, com a intenção de validar os modelos matemáticos produzidos e comunicar a investigação realizada.

Para a dissertação, optamos por abordar três dessas atividades: “Miniaturas *Hot Wheels”*, “Aerofractal” e “Reciclagem”, que descrevemos e analisamos com base nos dados coletados e à luz dos referenciais teóricos adotados.

4.4 A PRODUÇÃO E COLETA DOS DADOS

Para a coleta dos dados, foi utilizada uma filmadora para captar as imagens e auxiliar a professora/pesquisadora na identificação dos estudantes, três gravadores para captar o áudio e também o celular da professora/pesquisadora, que serviu para registrar imagens dos estudantes desenvolvendo as atividades, bem como para captar o áudio enquanto ela orientava os grupos. Também foi utilizado um diário de campo, no qual a professora/pesquisadora fazia os relatos das atividades desenvolvidas, anotando fatos que lhe chamavam atenção e que estimulavam as discussões acerca da situação-problema proposta. Os registros escritos dos estudantes também foi uma das fontes utilizadas que nos permitiu analisar os modelos matemáticos desenvolvidos pelos grupos.

Além desses instrumentos utilizados para a coleta dos dados, também tivemos os instrumentos que auxiliaram no desenvolvimento das atividades, como o projetor multimídia, os espaços das salas da Matemática, de Educação Física, do campo de futebol *society*, da Associação dos Amigos Recicladores de Peabiru, quadro, pincel para quadro branco, fitas métricas, trenas, calculadoras, papéis para anotação, miniaturas, travesseiros, canudinhos, papel seda, etc.

4.5 A ANÁLISE DOS DADOS

A análise dos dados busca apresentar os resultados que respondam à questão de pesquisa que está sendo investigada: *como atividades de Modelagem Matemática, na perspectiva da Model-Eliciting Activities (MEAs), podem contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental?*

A análise dos dados é feita à luz dos referenciais teóricos adotados, contendo um caráter descritivo e interpretativo, possibilitando fazermos referência à base teórica assumida e aos registros dos estudantes para fundamentar nossas inferências, sempre que necessário.

Inicialmente, organizamos os registros dos alunos de acordo com os grupos que se estabeleceram durante as atividades, depois criamos uma lista na qual organizamos seus nomes em ordem alfabética e lhes atribuímos um código para poder identificá-los; chamamos de A1 o primeiro nome da lista, A2 o segundo, e assim por diante, até o A27 e à professora/pesquisadora atribuímos o código P.

Em seguida, transcrevemos as gravações de vídeo e áudio na íntegra com o objetivo de selecionar episódios de análise. Na sequência, começamos a analisar os registros escritos produzidos por cada grupo durante o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática e que os conduziram à produção dos modelos matemáticos. Buscamos identificar a presença de elementos que indicassem as cinco formas de se trabalhar o desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme caracterizadas por Kaput (1999), e para as discussões, nos fundamentamos em pesquisas desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; CARPENTER et al., 2003; SMITH, 2008).

Para as análises observamos toda forma de expressão durante o desenvolvimento das atividades, por meio da fala e de gestos; e nos registros escritos por meio de tabelas, figuras, cálculos, generalizações em linguagem natural e/ou em linguagem algébrica.

4.6 NATUREZA DA PESQUISA

Diante da nossa questão de pesquisa, optamos por uma abordagem qualitativa, uma vez que o “foco é entender e interpretar dados e discursos” (D’AMBROSIO, 2012, p. 12). Ainda, segundo o autor, a pesquisa qualitativa permite dar atenção aos participantes e às suas ideias, procura estabelecer significado aos discursos e às suas narrativas, possibilitando ao pesquisador projetar os próximos passos.

Para Borba e Araújo (2012, p. 25), pesquisas que utilizam abordagens qualitativas “fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações”. Cientes de que o ambiente de coleta de dados é uma sala de aula, que se constitui em um espaço no qual as ações mudam constantemente, assim como significados são adquiridos, trocados, compartilhados (MOREIRA, 2011), entendemos ser pertinente a opção por uma abordagem qualitativa.

Bogdan e Biklen (1994) apontam cinco características para pesquisas qualitativas. Essas características podem ser abordadas com mais ou menos ênfase e variam conforme o caráter de cada pesquisa. Algumas delas podem nem ser contempladas, o que não descaracterizaria a abordagem da pesquisa como qualitativa. A seguir, apresentamos essas características relacionando-as com aspectos de nossa pesquisa, com a intenção de justificar nossas escolhas.

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal

No nosso caso, a fonte de dados são os registros produzidos durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática por estudantes de uma turma dos anos finais do Ensino Fundamental, um 6º ano de um Colégio Público do Norte do Paraná, durante as aulas regulares de Matemática da turma e também durante os encontros realizados em contraturno.

2. A investigação qualitativa é descritiva

Buscamos descrever os fatos o mais fielmente possível, fundamentados nos materiais coletados por meio das filmagens, gravações, fotografias e registros dos estudantes, realizando conexões com os referenciais teóricos adotados, para subsidiar nossas argumentações durante a análise do material coletado.

3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos

Uma atividade de Modelagem Matemática envolve fases que constituem o seu desenvolvimento. Parte-se de uma situação-problema inicial, em direção à situação final. A análise de todas as fases envolvidas na atividade de Modelagem é que possibilita compreender como se deu a produção do modelo matemático, que representa a solução para a situação-problema inicialmente proposta. Dessa forma, analisamos a partir dos registros dos estudantes, desde a proposição da investigação até a interpretação dos resultados obtidos por meio do modelo matemático, segundo os princípios e orientações das MEAs, a presença de elementos que indicassem as cinco formas de se trabalhar o desenvolvimento do pensamento algébrico (KAPUT, 1999).

4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva

À medida que coletamos os dados, buscamos estabelecer uma relação de proximidade com esses dados, analisando todos os materiais, a fim de demonstrar, de forma indutiva, e com base nas constatações feitas a partir dos registros dos estudantes, os fatos que asseguraram as induções realizadas pelo pesquisador em relação ao fenômeno investigado.

5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa

As análises realizadas estão fundamentadas nas bases teóricas enunciadas. Durante nossas análises, voltamos nosso olhar, também, para o sentido que os estudantes atribuem às situações-problema propostas; como registram e interpretam os significados a partir de suas experiências de vida, para que possamos reconhecer a contribuição que as atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas tiveram para o desenvolvimento do pensamento algébrico com esses alunos.

Neste sentido, desenvolvemos uma pesquisa de cunho qualitativo, na qual buscamos a partir da observação direta dos estudantes, subsídios para responder nossa questão de pesquisa.

5 ANÁLISES DAS ATIVIDADES

Neste capítulo descrevemos e analisamos três atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, participantes da pesquisa.

5.1 ATIVIDADE MINIATURAS *HOT WHEELS*

Essa foi a primeira atividade de Modelagem Matemática desenvolvida pelos alunos e corresponde ao primeiro momento de familiarização com atividades de Modelagem Matemática, conforme sugerem Almeida e Dias (2004). Para o seu desenvolvimento a turma foi organizada em seis grupos com 4, 5 ou 6 estudantes no dia 14 de maio de 2019, em contraturno, utilizando-se quatro horas-aula.

5.1.1 Descrição da Atividade

A professora iniciou a atividade segurando uma miniatura *Hot Wheels* em suas mãos e fazendo alguns questionamentos aos alunos, como por exemplo, "Vocês conhecem os carrinhos da *Hot Wheels*?", "Vocês têm desses carrinhos em casa?". A maioria dos alunos disseram que conheciam e muitos tinham as miniaturas em casa, até mesmo algumas meninas, que argumentaram que os irmãos tinham. Na sequência a professora distribuiu 20 miniaturas *Hot Wheels*, que ela havia trazido, entre os seis grupos e lançou o seguinte questionamento: "Será que existem carros de verdade como essas miniaturas?". Os alunos responderam que sim, e começaram a falar os nomes das miniaturas que o grupo estava e que eles já tinham visto alguma vez, em tamanho real. A professora, então, exibiu dois vídeos disponíveis na plataforma *YouTube*[10] que apresentam uma exposição de carros ocorrida no 50º aniversário da Empresa *Hot Wheels* e um festival em formato de *tour* por 14 países à procura de carros que iriam se

[10] https://www.youtube.com/watch?v=pDsGer9qqsk.
https://www.youtube.com/watch?v=pmxgLA1k7iI.

tornar os próximos brinquedos da marca. Esses vídeos foram escolhidos por afirmar que algumas miniaturas são concebidas a partir de carros originais.

Após essa discussão inicial foi entregue aos grupos uma folha com dois questionamentos, com a intenção de convidá-los a desenvolver a atividade. A Figura 6 apresenta, em tamanho reduzido, a folha que foi entregue aos alunos com esse convite.

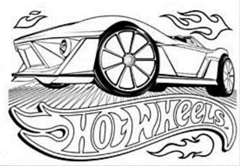
Figura 6: Folha com a proposta da atividade

Estudantes:____

É comum vermos crianças brincando com carrinhos em miniatura. Os carrinhos Hot Wheels, por exemplo, são muito conhecidos. Eles são adorados não só por crianças como também por adultos.

Mas será que existem carros de verdade como essas miniaturas?

E, se existem, como determinar as medidas de um carrinho Hot Wheels a partir do carro original?



Fonte: Dos autores

O primeiro questionamento, "Mas será que existem carros de verdade como essas miniaturas?", foi discutido antes mesmo da folha ser recebida pelos alunos, como forma de introduzir a discussão sobre a temática. Os alunos mostraram conhecê-la e ter condições de discutir a respeito.

Quanto ao segundo questionamento "E, se existem, como determinar as medidas de um carrinho *Hot Wheels* a partir do carro original?", os alunos começaram a formular hipóteses sobre como determinar tais medidas. O aluno A7 disse que era necessário ver "o carro grande"; o aluno A6 disse que era preciso saber "a altura" do carro grande; assim como o aluno A14, que concordou e pontuou que era preciso saber, também, "a largura" do carro grande. Diante dessas considerações, a professora questionou a turma "E vocês sabem me dizer qual é, aproximadamente, o comprimento de um carro em tamanho real?". Os alunos começaram a falar medidas que destoavam uma das outras e, ao mesmo tempo, que não condiziam com as medidas reais de um carro. Percebendo isso, a professora sugeriu que eles fossem até o estacionamento do Colégio para medir as dimensões de um dos carros.

Retornando à sala a professora relembrou a questão que estava em discussão e o aluno A23 afirmou que a necessidade para aquele momento era "ver o carro verdadeiro desses!", segurando uma das miniaturas nas mãos. Possivelmente o aluno quis dizer que precisava do carro real para conhecer suas medidas. Como isso não era possível, a professora disponibilizou a todos os grupos uma tabela contendo as dimensões originais de vinte carros correspondentes às miniaturas que havia distribuído entre os grupos, como exemplifica a Figura 7.

Figura 7: Recorte das dimensões originais de alguns carros correspondentes às miniaturas

DIMENSÕES ORIGINAIS DE ALGUNS CARROS

CARRO	*COMPRIMENTO*	*LARGURA*	*ALTURA*
HONDA CIVIC TYPE-R	439,0 cm	191,8 cm	140,9 cm
PORSCHE 918 SPYDER	454,5 cm	194,0 cm	108,9 cm
CHEVY SILVERADO	537,6 cm	203,2 cm	166,8 cm
CORVETTE C7Z06	467,2 cm	193,5 cm	122,4 cm

Fonte: Dos autores[11]

Assim que receberam a folha, cada grupo identificou imediatamente sua miniatura e as dimensões correspondentes. Pedimos para que os alunos lessem em voz alta as dimensões de um dos carros. O aluno A6 se prontificou e leu o comprimento do carro Corvette como "467 metros e 200 centímetros". Imediatamente o aluno A21 o corrigiu dizendo que o correto seria "467 centímetros e 2 milímetros". Esse momento foi oportuno para que a professora explicasse a relação entre as unidades de medidas de comprimento mostrando algumas equivalências, que puderam ser verificadas com o auxílio de uma trena, instrumento utilizado para medir as dimensões do carro no estacionamento do Colégio.

Retomando a questão sobre como determinar as medidas de um carrinho *Hot Wheels*, os alunos levantaram hipóteses de quantas vezes a miniatura é menor que o carro original correspondente, o que criou a necessidade de se efetuar uma divisão. Quando questionados sobre o que eles deveriam "dividir", o aluno A21 respondeu: "o tamanho do carro grande pelo tamanho da miniatura".

Com essa constatação os alunos perceberam que precisavam conhecer as dimensões das miniaturas. Inicialmente os alunos utilizaram réguas, porém, por não ser um instrumento

[11] As informações para a construção da tabela foram organizadas pelos pesquisadores com base em vídeos, artigos e sites disponíveis na internet, usando como disparadores de busca os nomes das miniaturas, indicados na parte inferior.

maleável, a distância entre a régua e a miniatura gerou dúvidas em relação à sua medida. Diante disso, a professora perguntou se havia algum outro instrumento de medida capaz de fornecer medidas mais precisas, o aluno A25 sugeriu o paquímetro, com base nos conhecimentos adquiridos em aulas anteriores, onde havíamos trabalhado sobre alguns instrumentos de medida. Então, cada grupo recebeu um paquímetro para coletar as dimensões das miniaturas. Como os alunos nunca haviam manipulado um paquímetro antes, passamos um vídeo, disponível também na plataforma *YouTube*[12], que explica como realizar medições com esse instrumento. Enquanto realizavam as medidas, fomos auxiliando os grupos na coleta dos dados.

Os alunos organizaram as dimensões das miniaturas no formato de tabelas e listas e começaram a realizar as divisões das medidas correspondentes às dimensões do carro original e da miniatura. Nesse momento, foi possível observar os integrantes de grupos distintos se comunicando, e constatando que os quocientes estavam se aproximando. A Figura 8 sinaliza a conjectura dos alunos da proximidade dos quocientes ao número 64.

Figura 8: Alunos realizando divisões das grandezas

Fonte: Dos autores

Nesse momento, a professora retomou a fala do aluno A21, que sugeriu dividir "o tamanho do carro grande pelo tamanho da miniatura", e explicou que a comparação que eles realizaram entre as grandezas (dimensões do carro original e dimensões da miniatura), por meio do quociente, é chamada de razão e que uma das aplicações da razão se chama escala.

Ao realizar a divisão dessas grandezas, sempre tomando uma unidade de comprimento comum para ambas, os alunos encontraram quocientes tão próximos que consideraram como um único valor, no caso o número 64. A professora explicou que esse quociente 64, resultante da razão entre as dimensões do carro original e as da miniatura, é denominado de constante e que, por meio dele, seria possível determinar a medida do carro em miniatura a partir da medida do carro original.

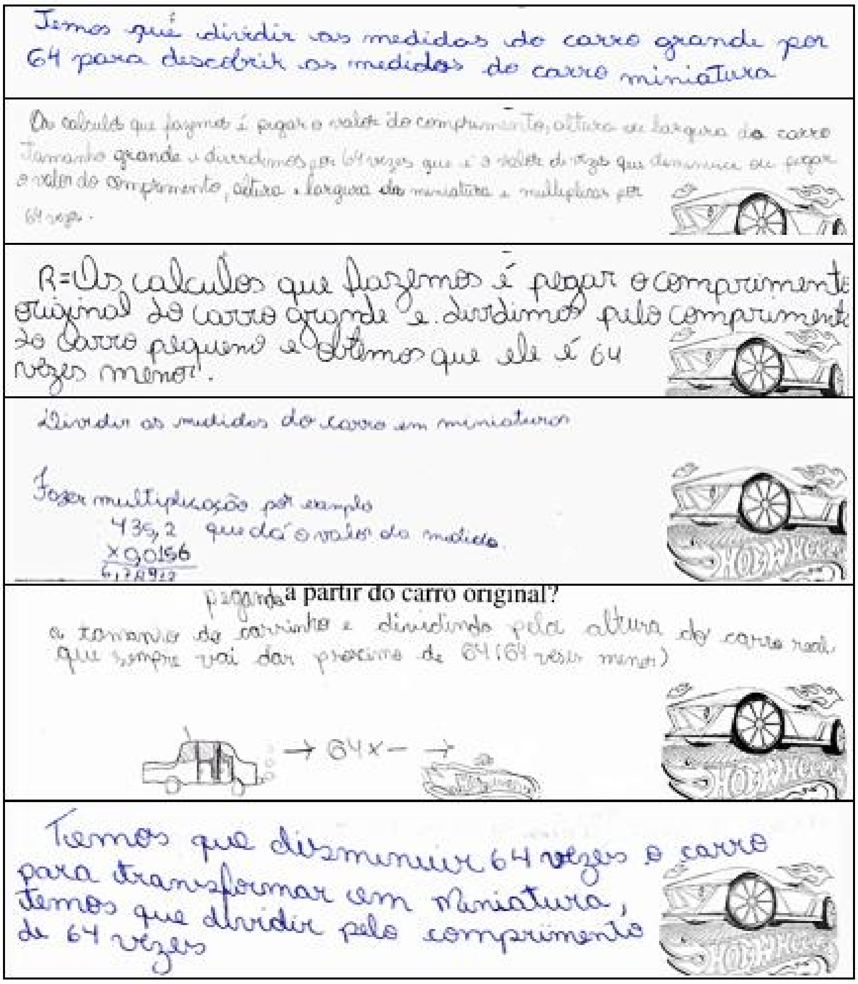
Logo após a explicação da professora, um dos grupos se manifestou dizendo que teriam que refazer seus cálculos, pois obtiveram um valor diferente para o quociente. O grupo realizou a divisão entre as medidas da miniatura e as do carro em tamanho original, nessa ordem,

[12] https://www.youtube.com/watch?v=BhMjGKfYscw.

diferentemente dos outros grupos, invertendo dividendo e divisor. Esse momento foi oportuno para que a professora questionasse a turma sobre como proceder no caso daquele grupo que obteve uma constante diferente, aproximadamente 0,016. O aluno A21 se pronunciou: “faz uma multiplicação”. Nesse momento observamos a iniciativa de vários alunos de verificar nas calculadoras a autenticidade da resposta do colega.

Demos sequência à atividade com a apresentação do vídeo “Como nasce um *Hot Wheels*”*,* disponível no *YouTube*[13]. Nesse vídeo, o vice-presidente de designer da Empresa fala sobre o processo de criação das miniaturas, e explica que fazem as miniaturas na escala 1:64 (um para sessenta e quatro). Dessa forma, o valor encontrado no resultado das divisões, foi interpretado como “a quantidade de vezes que a miniatura é menor”, ou seja, as miniaturas são 64 vezes menores que os carros em tamanho original. O vídeo serviu para os alunos validarem o encaminhamento utilizado na resolução do problema, estabelecendo assim um modelo matemático para a situação. A Figura 9 apresenta os modelos matemáticos de alguns grupos.

Figura 9: Modelos matemáticos



Fonte: Dos autores

[13] https://www.youtube.com/watch?v=ud92JRnrXDg

Tivemos a preocupação de pensar em uma alternativa para que os alunos pudessem compreender que a cada 1 cm na miniatura tem-se 64 cm no carro original. Sendo assim, a professora desenhou no chão da sala de aula um retângulo cujo comprimento e largura era uma média das dimensões correspondentes aos vinte carros originais e convidou os alunos a testar, se era possível "encaixar" aproximadamente 64 miniaturas na largura e também no comprimento do retângulo desenhado.

Para além dessa interpretação, tivemos a intenção de que os alunos compreendessem que a escala encontrada não é única e, sabendo disso de antemão, a professora questionou os alunos sobre a existência de miniaturas em outras escalas. A professora apresentou uma miniatura feita na escala 1:24, fato que suscitou novas discussões, mobilizando nos alunos a capacidade de interpretação da nova escala apresentada (1:24), diferente daquela trabalhada no contexto da atividade (1:64), mas com a compreensão de que conhecendo-se a escala, é possível determinar as medidas do carro em tamanho original ou as medidas da miniatura.

5.1.2 Análise da Atividade

A atividade de Modelagem Matemática intitulada "Miniaturas *Hot Wheels"* foi desenvolvida segundo a *Model-Eliciting Activities* (MEAs), abrangendo os seis princípios elencados por Lesh, et al. (2000) que orientam a produção, interpretação e análise de modelos matemáticos. O tema foi proposto pela professora a partir da percepção do interesse dos alunos pelo assunto por meio de uma conversa informal sobre coleção de objetos. Os alunos citaram as cartinhas, as surpresas do *Kinder* Ovo, as latinhas de refrigerante e as miniaturas *Hot Wheels.* Trata-se de um tema não essencialmente matemático, que ao receber dos estudantes uma abordagem matemática para solucionar um problema decorrente da situação proposta, caracteriza-se, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), como uma atividade de Modelagem Matemática.

A abordagem da situação-problema foi realizada utilizando vídeos, um dos recursos mencionados por Chamberlin e Moon (2005). Os vídeos utilizados estão disponíveis na plataforma *YouTube* e tiveram o intuito de gerar interesse e discussões sobre o contexto do problema. Além disso, os vídeos escolhidos também serviram para situar a atividade em um contexto realista (LESH, et al., 2000).

As perguntas feitas pela professora no início da atividade são denominadas, segundo as MEAs, como perguntas de prontidão. São perguntas simples que tem como objetivo garantir que os alunos tenham o conhecimento básico necessário para resolver o problema. O questionamento introdutório “Será que existem carros de verdade como essas miniaturas?” foi proposto com esse objetivo, além de situar a atividade no “princípio da realidade”, enunciado por Lesh, et al. (2000).

Por meio do segundo questionamento realizado pela professora “E, se existem, como determinar as medidas de um carrinho *Hot Wheels* a partir do carro original?” foi possível perceber a necessidade de proporcionar aos alunos uma prática para o conhecimento das medidas reais de um carro, contextualizando a realidade em que está inserido o problema, característica que é também sinalizada pelo “princípio da realidade”, e considera a situação em termos de conhecimento e experiência de vida, valorizando as vivências dos alunos. A Figura 10 mostra os alunos medindo o comprimento, a largura e a altura de um dos carros no estacionamento do Colégio.

Figura 10: Alunos medindo as dimensões de um carro

Fonte: Dos autores

Esse momento favoreceu a busca por estratégias que se encaminhavam para estabelecer a relação que existe entre um carro e sua miniatura, sinalizando a necessidade da “construção do modelo”, outro princípio enunciado por Lesh, et al. (2000), que garante a explicação matemática de tal relação identificada.

O diálogo seguinte, após o retorno à sala, mostra a percepção de um dos alunos que nem todos os carros têm o mesmo comprimento, cuja dimensão, assim como as outras, dependem do modelo do carro.

> *P*: Então, nós tiramos a dúvida, de qual é o comprimento de um carro. Mas olha só, será que todos os carros irão medir quatro metros e vinte centímetros?
> *Todos*: Não... depende.
> *P*: Depende do quê?
> *A18*: Depende do modelo do carro…
> *P*: Sim… olhem só o que A21 está fazendo! Está comparando duas miniaturas. Nós podemos perceber *(segurando as duas miniaturas lado a lado para apresentar para a turma)* que elas não têm o mesmo comprimento, porque como disse A18, elas são de modelos diferentes.

Essa percepção do aluno A18, quanto ao comprimento de cada carro depender de seu modelo, pode ser interpretada como o elemento "percepção de regularidades" indicado por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) como caracterizador do pensamento algébrico.

A percepção do aluno A18 foi testada e comprovada pelo aluno A21 ao comparar duas miniaturas de modelos distintos que estavam com o seu grupo. Essa percepção inicial foi de grande valia para as discussões que se encaminharam no decorrer da atividade.

Após esse momento, a professora retomou a questão: "E, se existem, como determinar as medidas de um carrinho *Hot Wheels* a partir do carro original?". O aluno A23 afirmou que era preciso "*ver o carro verdadeiro desses*!" segurando uma das miniaturas em suas mãos e sinalizando a necessidade de ter dados que possibilitassem explicar ou provar conjecturas no que diz respeito à relação entre as dimensões da miniatura e do carro real (CARPENTER et al. 2003). A sugestão dada pelo aluno A23, provavelmente se deu com base no convite inicial da professora de conhecer a medida de um carro real, e indica que esse aluno também conseguiu perceber regularidades na situação, ou seja, que também percebeu assim como o aluno A18, que as dimensões dos carros variam conforme o modelo. Mas, além disso, sinaliza a "percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam", outro elemento caracterizador do pensamento algébrico, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), pois indica que o aluno percebeu que para determinar as medidas de uma miniatura, ele precisa saber as medidas do carro original correspondente.

Essas percepções de regularidades e de aspectos invariantes em contraste de outros que variam parecem direcionar os alunos para a forma do pensamento algébrico (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, descrita por Kaput (1999), pois as falas dos alunos sugerem que eles se encaminham para a generalização da relação entre as dimensões da miniatura e do carro original corresponde, observando, inclusive, restrições dessa relação, ou seja, não podemos usar a medida de um carro original qualquer.

Logo após essa fala, foram disponibilizadas aos alunos as dimensões originais de vinte carros correspondentes às miniaturas que haviam sido distribuídas. O diálogo a seguir indica a hipótese que os alunos levantaram sobre a necessidade de se efetuar uma "divisão" para determinar o quão menor é uma miniatura em relação ao tamanho do carro original correspondente.

A7: Ele pega a parte maior e diminui um pouco...
P: Um pouco quanto?
A1: Ele diminui umas 40 vezes!
P: O que vocês acham? Vocês concordam com o pensamento dele?
Todos: Sim!

P: Então como nós podemos fazer para confirmar isso? Que as miniaturas são realmente 40 vezes menores que o carro original?
A21: Fazendo a conta de dividir!
P: E o que nós vamos dividir?
A21: O tamanho do carro grande pelo tamanho da miniatura.

Esse diálogo revela o encaminhamento para a “construção do modelo”, pois a partir dessa fala os alunos começaram a pensar em como resolver a indagação feita pela professora e como comprovar a hipótese de que as miniaturas eram 40 vezes menores que o carro original. Essa busca pela comprovação de hipóteses conduz os alunos a analisar as relações numéricas entre as dimensões investigadas, para argumentar em favor da hipótese formulada, sugerindo conforme Carpenter et al. (2003) o pensamento algébrico.

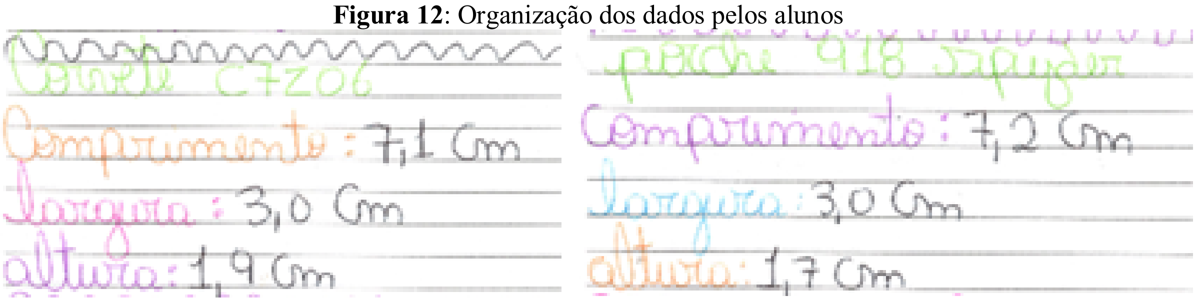
A sugestão dada pelo aluno A21 para a comprovação da hipótese demandava conhecer as dimensões das miniaturas. Os alunos utilizaram paquímetros para coletar os dados necessários para a argumentação em favor da hipótese anunciada, bem como para a “construção do modelo”, registrando as dimensões das miniaturas. A Figura 11 ilustra essa coleta.

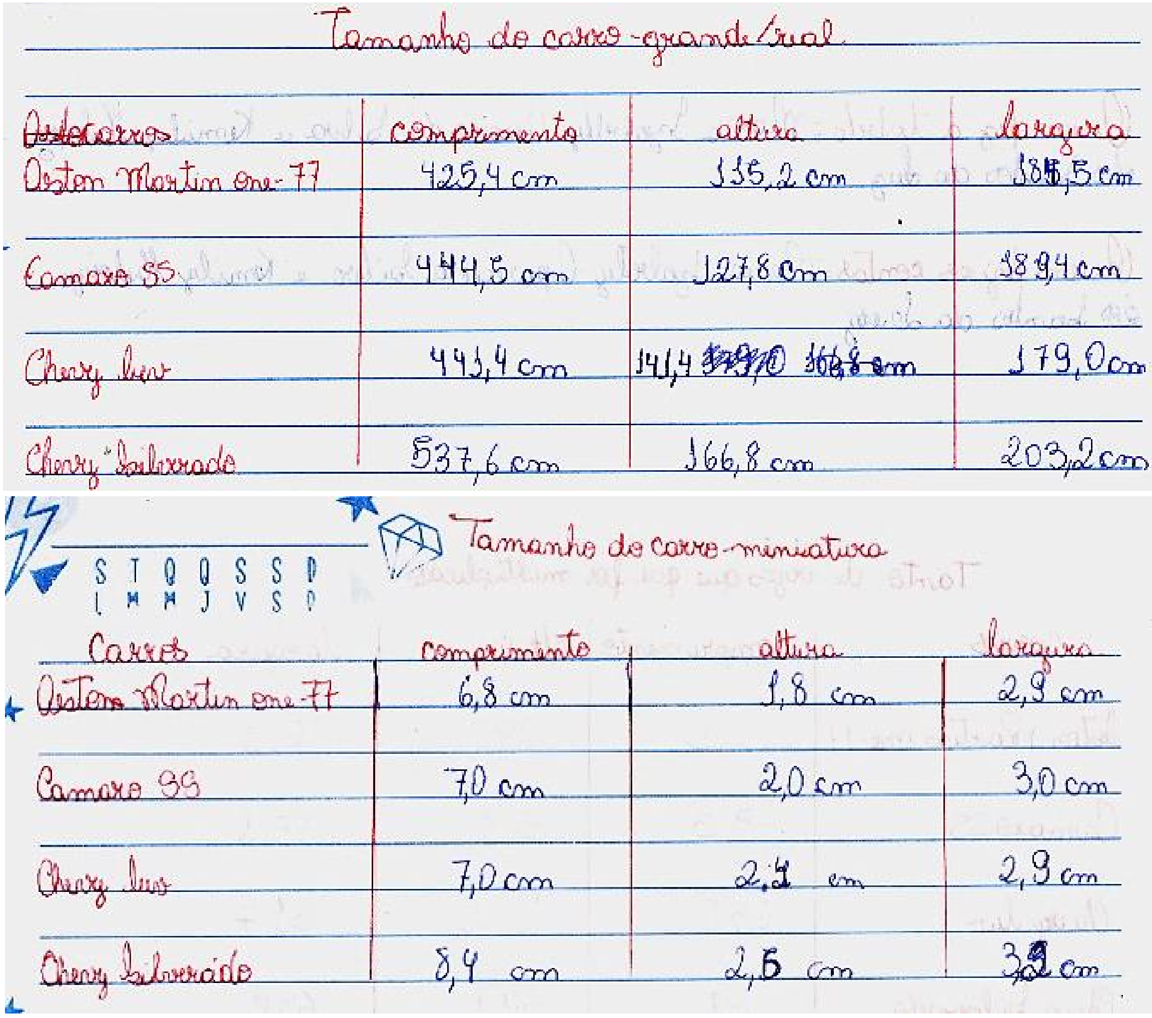
Figura 11: Uso do paquímetro pelos alunos para determinar as dimensões das miniaturas

Fonte: Dos autores

Baseada nos princípios de “construção do modelo” e de “documentação do modelo”, propostos por Lesh et al. (2000), a professora orientou os alunos a pensar em como registrar as relações observadas, de modo a verificar a hipótese formulada. Os alunos optaram por organizar os dados coletados, referentes às medidas dos carros em miniatura, no formato de tabelas e listas, como mostra a Figura 12.

Figura 12: Organização dos dados pelos alunos





Tamanho do carro-grande/real

~~Os~~carros	comprimento	altura	largura
Osten Martin one-77	425,4 cm	135,2 cm	185,5 cm
Camaro SS	444,5 cm	127,8 cm	189,4 cm
Chevy lev	441,4 cm	141,4 ~~149,0~~ ~~166,8 cm~~	179,0 cm
Chevy Silverado	537,6 cm	166,8 cm	203,2 cm

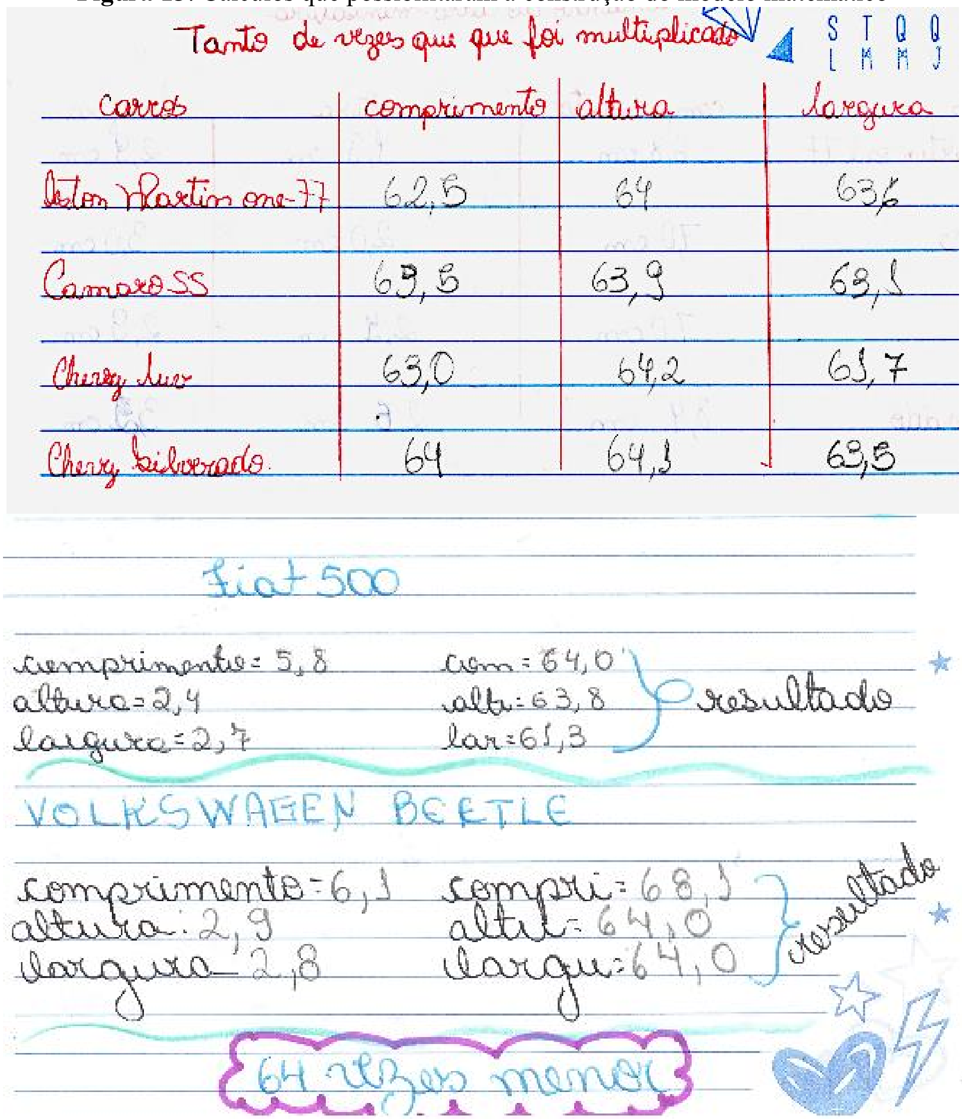
Tamanho do carro-miniatura

Carros	comprimento	altura	largura
Osten Martin one-77	6,8 cm	1,8 cm	2,9 cm
Camaro SS	7,0 cm	2,0 cm	3,0 cm
Chevy lev	7,0 cm	2,1 cm	2,9 cm
Chevy Silverado	8,4 cm	2,6 cm	3,2 cm

Fonte: Dos autores

No momento em que os alunos realizaram as divisões das medidas correspondentes às dimensões do carro original e da miniatura, como proposto pelo aluno A21, foi possível observar os integrantes de grupos distintos se comunicando e constatando que o quociente se aproximava do número 64, ação que indica a presença do “princípio da autoavaliação”, que envolve a identificação de critérios que possam ser utilizados para testar e revisar as formas atuais de pensar. Essa constatação dos alunos, também sinaliza a presença de um elemento caracterizador do pensamento algébrico, a “percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993), que a professora formalizou com a seguinte fala: “*Vocês podem perceber que apesar dos modelos das miniaturas serem todos diferentes, o quociente da divisão que vocês realizaram, se aproximou do número 64*”. A Figura 13 mostra os cálculos dos alunos que viabilizaram essa conclusão.

Figura 13: Cálculos que possibilitaram a construção do modelo matemático



Fonte: Dos autores

Considerando os números como símbolos matemáticos e as regras da operação de divisão como regras sintáticas sobre como operar com esses números em situações com características específicas (o quão menor é a miniatura em relação ao carro original), observamos a presença da forma (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), indicada por Kaput (1999), que requer a construção de relações, descritas por meio de símbolos e regras sintáticas que permitam construir significados (divisão como medida). É possível perceber, portanto, que os alunos iniciaram a construção de relações no momento em que realizaram de forma consciente a divisão das dimensões do carro original pelas dimensões das miniaturas.

A realização da divisão e a intepretação do quociente 64 deu início aos procedimentos que levariam à "documentação do modelo matemático", uma vez que de acordo com Lesh et al. (2000), é importante criar alguma forma de representação para documentar como os alunos estão pensando a situação-problema, deixando explícitas suas ideias (que a miniatura é 64 vezes menor que o carro original).

As considerações dos alunos sobre a relação entre as dimensões da miniatura e do carro original correspondente apontam indícios da forma (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, indicada por Kaput (1999), a qual abrange experiências matemáticas envolvendo contagem, medição e estimativa, pois segundo Smith (2008) o início do processo para o desenvolvimento do pensamento funcional acontece quando o aluno se envolve em uma atividade, presta atenção às quantidades que variam e começa a focar na relação entre essas quantidades.

O envolvimento dos alunos com a atividade permitiu que eles concluíssem que a hipótese inicial de que as miniaturas eram 40 vezes menores que o carro em tamanho original, não se verificava. Para ir além dessa conclusão, a professora retomou a fala dos alunos sobre as comparações (comprimento do carro original e comprimento da miniatura) conduzindo discussões que potencializam a aprendizagem de alguns conceitos matemáticos, como sugere o "princípio do protótipo eficaz", a saber o conceito de razão e uma de suas aplicações, a escala. Durante as discussões os alunos tiveram a oportunidade de refletir suas maneiras de pensar a resolução da atividade. O diálogo a seguir indica essas reflexões.

> *P*: Vamos pensar assim, a miniatura não existe! Eu sou o designer da empresa, a pessoa que vai criar a miniatura. A pergunta é justamente essa. Como eu vou determinar o tamanho que a miniatura tem que ter? Eu não tenho ela para medir nas minhas mãos. Eu vou criá-la ainda. Com esses cálculos que vocês fizeram, vocês chegaram a qual conclusão?
> A17: Que ela é 64 vezes menor que o carro grande.
> *P*: Então, que conta eu tenho que fazer? Você tem o tamanho do carro grandão, e você sabe que a miniatura é 64 vezes menor. Que conta eu tenho que fazer para saber o tamanho que a miniatura tem que ter?
> *Todos*: divisão!
> *P*: Dividir o quê pelo o quê?
> *A6*: Dividir o tamanho do carro grande pela miniatura.
> *P*: Mas você ainda não tem a miniatura, você vai fazer ela, você vai criá-la.
> *A21*: Tem que pegar o tamanho do carro e dividir por 64 que daí dá o tamanho da miniatura!
> *P*: Exatamente. Se você tem a dimensão do carro original e sabe que as miniaturas são 64 vezes menores que o carro original, para saber o tamanho delas, basta você dividir por 64. Assim como A21 acabou de falar. Se vocês soubessem desde o início que o valor da constante era o número 64, bastava dividir as dimensões do carro original por 64 que vocês teriam as dimensões da miniatura, solucionando assim, a nossa problemática.

As reflexões apresentadas no diálogo podem ser associadas à forma de pensamento algébrico (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, uma vez que nesse diálogo ficou evidente a compreensão dos alunos sobre a relação investigada, dimensões da miniatura e do carro original, em falas como "Que ela é 64 vezes menor que o carro grande"

(Aluno A17), “Dividir o tamanho do carro grande pela miniatura” (Aluno A6) e “bastava dividir as dimensões do carro original por 64 que vocês teriam as dimensões da miniatura” (P).

Nesse momento, a professora compartilhou com a turma uma situação ocorrida durante a orientação da atividade, com o intuito de encaminhar as discussões para a generalização e a formalização. A situação compartilhada dizia respeito a um grupo que obteve um valor diferente para o quociente, por ter realizado a divisão entre as medidas da miniatura e do carro, em tamanho original, nessa ordem, diferentemente dos outros grupos, invertendo dividendo e divisor. O diálogo a seguir apresenta esse momento.

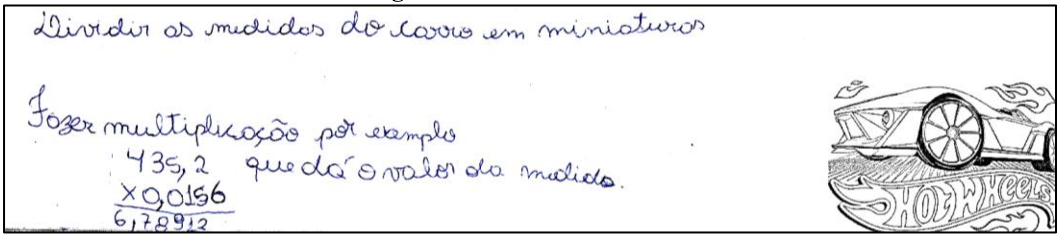
> *P*: Mas, e esse grupo que fez o contrário e não encontrou o número 64... mas encontrou o número 0,0156... que pode ser aproximado para 0,016. Que cálculo esse grupo vai ter que fazer?
> *A21*: faz uma multiplicação!
> *A19*: de vezes.
> *P*: Será que dá certo? Eles têm aqui por exemplo, a Toyota. A Toyota tem de comprimento 435 cm e 2 mm, se eu multiplicar por 0,0156, dá 6,78 cm, que é aproximadamente 6,8 cm. É essa a medida do comprimento da Toyota, grupo?
> *A17*: Sim… É só medir com o paquímetro aqui que vai dar exatamente esse valor.
> *A25*: Então dá certo… dá certo dos dois jeitos.
> *P*: Isso mesmo A25! Foi muito bom esse grupo ter feito diferente dos demais, porque vocês podem perceber que eu consigo fazer das duas formas. Se eu tenho o carro original, eu consigo fazer a miniatura. Se eu tenho a miniatura eu consigo fazer o carro original. A constante da razão desse grupo é aproximadamente 0,016. Qualquer uma das dimensões da miniatura que eles dividirem pela dimensão correspondente do carro original, vai dar esse valor. A diferença é que esse grupo precisa fazer a multiplicação para determinar a dimensão da miniatura... como vocês mesmo disseram, e vocês, tem que fazer a divisão.

A situação relatada pela professora levou os alunos a pensarem nas formas como essa relação entre as dimensões pode ser explicada. Perceber que “dá certo dos dois jeitos” (Aluno A25), inclusive indicando como proceder caso as dimensões sejam consideradas na ordem contrária (carro original e miniatura), “faz uma multiplicação!” (Aluno A21), sinaliza a forma (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), uma vez que o diálogo mostra que os alunos reconheceram a multiplicação como a operação inversa da divisão e sabem como proceder em cada caso, levando em consideração a ordem das dimensões tomada.

Foi a partir da percepção desse procedimento de resolução, que os alunos conseguiriam documentar o modelo matemático, ou seja, registrá-lo em termos de linguagem matemática (LESH, et al., 2000). Os modelos matemáticos resultantes do desenvolvimento da atividade de Modelagem, se constituíram por três representações distintas. Considerando a categorização realizada por Tortola (2016), obtivemos nessa atividade modelos aritméticos, descritivos e gráficos.

A Figura 14 apresenta o modelo aritmético produzido por um dos grupos.

Figura 14: Modelo aritmético

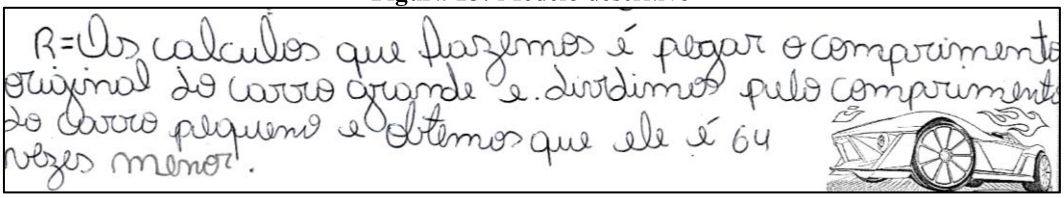


Fonte: Dos autores

Os modelos aritméticos consistem em uma estrutura utilizada para expressar a relação entre as variáveis do problema e têm como fundamento números e operações aritméticas elementares.

A Figura 15 apresenta um modelo descritivo produzido por um dos grupos.

Figura 15: Modelo descritivo

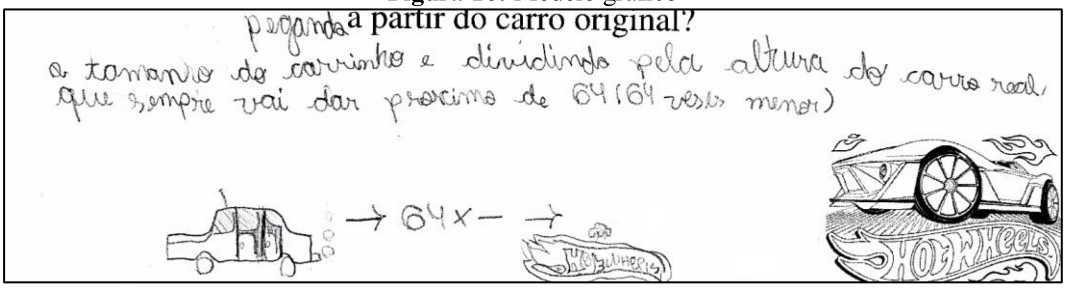


Fonte: Dos autores

Os modelos descritivos possuem uma estrutura que descreve uma relação entre as variáveis do problema usando língua materna associada a números e operações.

A Figura 16 apresenta o modelo gráfico produzido por um dos grupos.

Figura 16: Modelo gráfico



Fonte: Dos autores

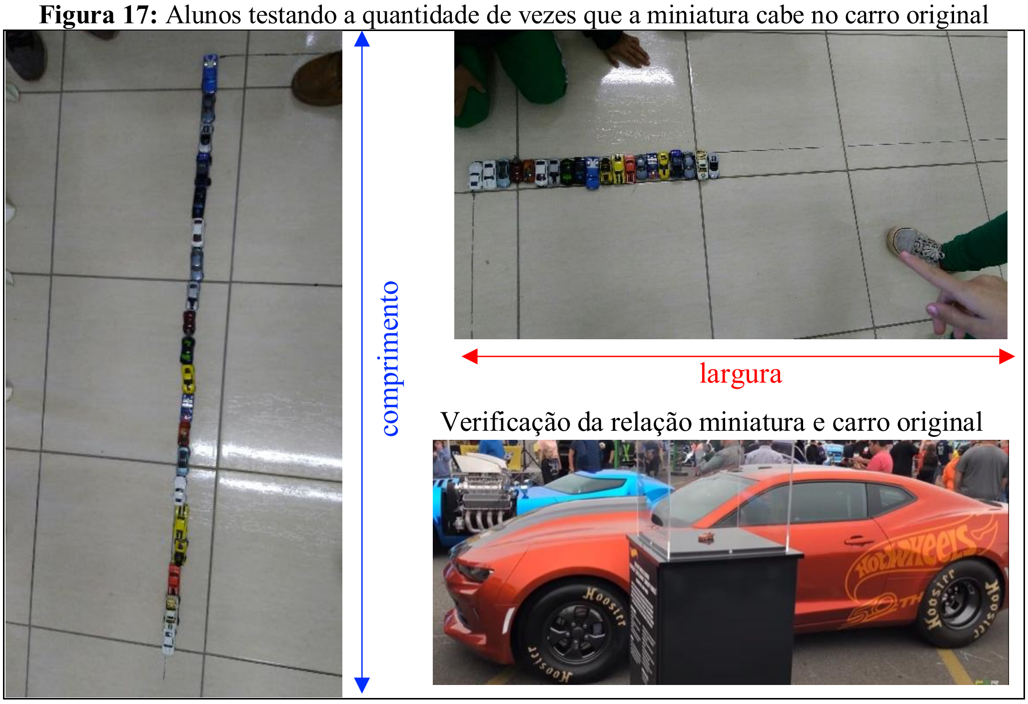
Os modelos gráficos possuem uma estrutura utilizada para organizar e apresentar dados e informações de maneira objetiva por meio de recursos visuais, que podem ser expressos na forma de figuras geométricas, diagramas, desenhos ou imagens.

Ao analisar os modelos matemáticos produzidos pelos alunos do 6º ano, observamos que são condizentes com as colocações de Blanton e Kaput (2005) e de Tortola (2016), uma vez que os alunos buscaram no discurso argumentativo estabelecer uma estrutura textual, fundamentada em seus conhecimentos e nas discussões que foram realizadas durante a atividade, que indica as regularidades observadas na situação-problema e permite que os alunos façam descrições, explicações e previsões com relação ao fenômeno sob investigação, a produção de carrinhos em miniaturas (DOERR; ENGLISH, 2003).

Os textos dos alunos podem ser interpretados como estruturas capazes de fornecer uma base para níveis mais elevados de abstração e formalização, pois eles compreendem o conceito de escala e, além disso, se preparam para representá-la por meio de equações e expressões algébricas futuramente, sinalizando a forma do pensamento algébrico (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações, proposta por Kaput (1999).

A discussão do conceito de escala, foi interpretada nesse contexto como: a cada 1 cm na miniatura tem-se 64 cm no carro original ou as dimensões do carro, em tamanho original, é 64 vezes maior que as dimensões da miniatura. Para interpretar essa afirmação a professora desenhou no chão da sala de aula um retângulo cujo comprimento e largura era uma média das dimensões correspondentes dos vinte carros originais, conforme dados da Figura 7. Os alunos foram convidados a testar se era possível "encaixar" aproximadamente 64 miniaturas na largura e também no comprimento do retângulo desenhado, como mostra a Figura 17.

Figura 17: Alunos testando a quantidade de vezes que a miniatura cabe no carro original



Fonte: Dos autores

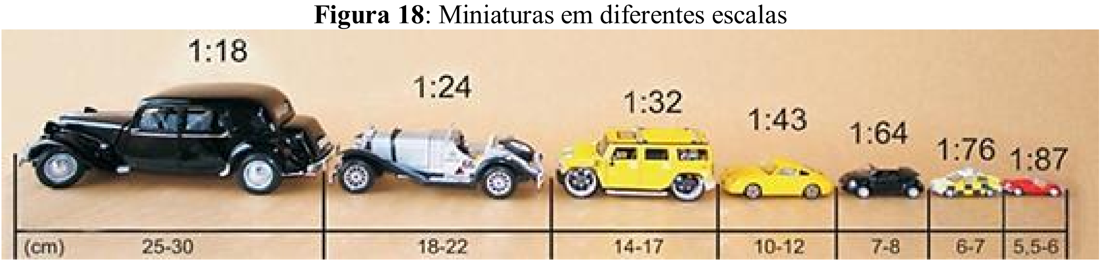
Essa estratégia utilizada pela professora é orientada pelo "princípio do protótipo eficaz", uma vez que tem como intuito a validação da relação encontrada pelos alunos e, por conseguinte, dos modelos matemáticos produzidos. Também vem revestida de intenções em relação à compreensão do conceito de escala, ou seja, o que significa dizer 1:64, por exemplo, que indica que cada 1 cm da miniatura corresponde a 64 cm no carro original. Essa estratégia pode, ainda, ser associada ao desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que sinaliza uma tentativa de expressar ou explicar a estrutura da relação entre as dimensões de uma miniatura e seu carro original correspondente, indicada por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).

Vale ressaltar que a escala explorada nessa atividade não é única e, sabendo disso de antemão, a professora questionou os alunos sobre a existência de miniaturas em outras escalas, conforme mostra o diálogo seguinte.

> *P:* Será que existem miniaturas só na escala 1:64?
> *A25:* Não. Tem umas maiores e umas menores.

A Figura 18 foi utilizada para validar a resposta do aluno e verificar que, de fato, há outras miniaturas construídas em escalas diferentes. Além disso, mostra que a escala 1:64 é utilizada para miniaturas com comprimentos entre 7 cm e 8 cm, como confirmado pela coleta de dados realizada pelos alunos.

Figura 18: Miniaturas em diferentes escalas



Fonte: https://www.colecaovirtual.com.br/blog/iniciar-uma-colecao-de-veiculos-em-miniatura

A apresentação das miniaturas em diferentes escalas suscitou novas discussões voltadas ao desenvolvimento da forma (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, do pensamento algébrico (KAPUT, 1999), pois essa apresentação possibilitou a discussão de outras escalas, explorando as ideias de correspondência e de variação, conforme mostra o diálogo apresentado na sequência.

> *P:* Essa miniatura que eu estou segurando foi feita na escala 1:24. Quem poderia me dizer o comprimento do "carro grande" que deu origem a ela?
> *A21:* Tem que multiplicar o comprimento dela por 24.
> *P:* Então calculem e me digam qual é o comprimento do carro original?
> *A7:* Pode ser 432.
> *A25:* Ou 528.
> *P*: Então, esse carro no tamanho real, pode ter de 4 metros e 32 cm a 5 metros e 28 cm. Então, percebam que se eu tenho a escala, eu consigo saber o tamanho real do carro. Se ao invés dos 18 cm, eu tivesse a informação dos 432 cm...que cálculo eu teria que fazer para descobrir o comprimento da miniatura?
> *A21*: uma divisão...que dá 18.
> *P*: Então, sabendo em qual escala foi feita a miniatura, nós conseguimos determinar o comprimento do carro real ou o comprimento da miniatura.

Uma dupla de alunos realizou as medidas do comprimento da miniatura, como mostra a Figura 19, para confirmar se o carrinho apresentado estava no intervalo citado, entre 18 cm e 22 cm.

Figura 19: Comprimento da miniatura na escala 1:24

Fonte: Dos autores

O diálogo mostra que os alunos foram capazes de interpretar a nova escala apresentada (1:24), diferente daquela trabalhada no contexto da atividade (1:64), como propõe o “princípio da generalização” (LESH, et al., 2000), produzindo uma solução compartilhável para resolver uma situação relacionada. Além disso, sinaliza a forma de pensamento algébrico (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), pois os alunos foram capazes de a partir da escala indicada calcular as dimensões da miniatura a partir do carro original, ou vice-versa, inclusive, comprovando isso por meio da experimentação, medindo uma miniatura com escala diferente (1:24) trazida pela professora (Figura 19). Essa discussão pode ser associada também à forma (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, já que foi realizada com a intenção de explorar a relação observada pelos alunos e generalizá-la para situações relacionadas conforme a escala.

A forma (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos, indicada por Kaput (1999), para o desenvolvimento do pensamento algébrico, indica a modelagem como uma forma de descrever fenômenos extramatemáticos e matematizá-los por meio da linguagem. O desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática Miniaturas *Hot Wheels* propiciou matematizar um fenômeno fora do âmbito da Matemática e explorar, argumentar e representar relações de diferentes formas, alcançando níveis de formalização, bem como colaborando com a “transição da linguagem natural para sistemas de notação simbólicas” (BLANTON; KAPUT, 2011), que, geralmente, serão trabalhadas somente a partir do 7º ano do Ensino Fundamental.

Segundo Kaput (1999), a Álgebra deve ser inserida em salas de aula por meio de situações-problema de naturezas diversas, que devem ser conduzidas, pelo professor, de forma a contemplar as formas do pensamento algébrico possibilitando à construção de uma linguagem simbólica que seja significativa para o estudante. O desenvolvimento da atividade de modelagem oportunizou essa leitura da situação em termos da linguagem matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), destacam que não existe uma única forma de expressar o pensamento algébrico. Ele pode expressar-se através da linguagem natural, aritmética, geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica. Dessa forma, entendemos que os alunos tiveram a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico, pois durante a atividade foi possível constatar indícios de desenvolvimento das cinco formas do pensamento algébrico, indicadas por Kaput (1999), algumas com mais frequência que outras.

O desenvolvimento dessa atividade de Modelagem Matemática, cujo *design* foi orientado pelos princípios das MEAs, requereu a produção de modelos matemáticos para a situação-problema sob investigação, que levou os alunos a engajarem-se na resolução do problema, tomarem decisões de forma autônoma, realizarem ações por iniciativa própria, pensarem e avaliarem os empreendimentos realizados, refletirem sobre as discussões matemáticas que surgiram argumentando e justificando suas escolhas.

Vale ressaltar que essa atividade foi o primeiro contato que os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental tiveram tanto com a Modelagem Matemática, como com o encaminhamento de um trabalho com essa finalidade. Portanto, acreditamos haver possibilidades de se trabalhar as formas de desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de atividades de Modelagem Matemática.

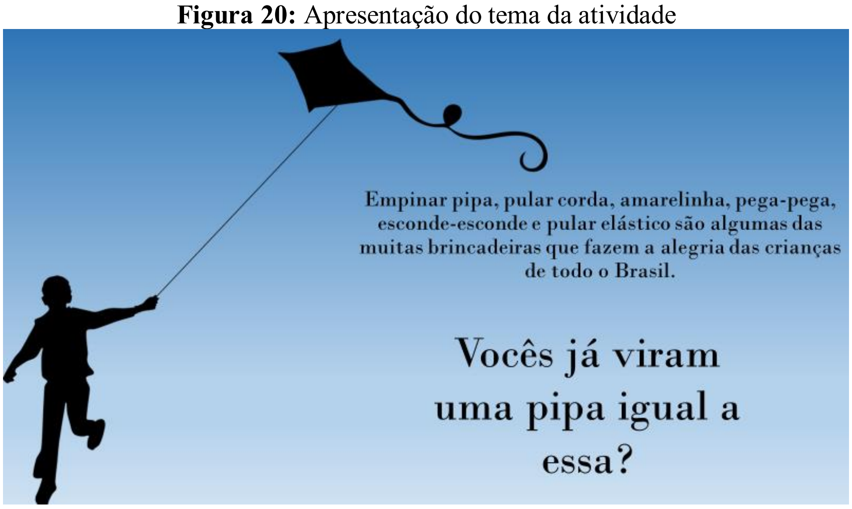
5.2 ATIVIDADE AEROFRACTAL

Essa foi a quinta atividade de Modelagem Matemática desenvolvida pelos alunos e corresponde ao segundo momento de familiarização com atividades de Modelagem Matemática, conforme sugerem Almeida e Dias (2004). O desenvolvimento da atividade se deu em duas etapas: a primeira correspondeu ao convite à confecção de uma pipa, que ocorreu em contraturno e a segunda etapa foi destinada à coleta de dados e construção do modelo matemático, na qual a turma foi organizada em cinco grupos com 5 ou 6 estudantes. Foram necessárias cinco horas-aula para o desenvolvimento dessa atividade, que ocorreu nos dias 19, 22, 25 e 29 de novembro de 2019.

5.2.1 Descrição da Atividade

O tema dessa atividade foi proposto pela professora a partir da percepção do interesse dos alunos pelo assunto, pois durante o desenvolvimento de outra atividade de Modelagem Matemática os alunos deveriam cumprir o desafio de permanecerem 24 horas sem manipular o celular, buscando realizar atividades que privilegiassem o contato com o meio ambiente, uma das brincadeiras mencionadas pelos alunos foi “empinar pipa”. A professora projetou no quadro a imagem, conforme Figura 20 e, na sequência, exibiu o vídeo chamado “Aerofractal[14]”.

Figura 20: Apresentação do tema da atividade



[14] Disponível no endereço eletrônico https://vimeo.com/339986414.

Fonte: Dos autores

O vídeo apresenta registros da Equipe Criar e Recriar, durante a abertura do FestA - Festival de Aprendizagem do SESC, ocorrido no Rio de Janeiro, no ano de 2018. A pipa Aerofractal é derivada de um processo de investigação tridimensional, uma escultura composta por módulos idênticos de tetraedros que, montados de acordo com uma lógica fractal, ganha o potencial de voar. Assim como as pipas gigantes dos experimentos de Alexander Graham

Bell[15], a pipa é feita com estruturas celulares conectadas, resultando numa peça com mais de 4m de aresta que voa com estabilidade. As grandes proporções da pipa contrastam com a leveza da composição, que geram diferentes visuais de acordo com o ponto de vista do objeto no céu.

Os alunos ficaram maravilhados: "*é uma pipa gigante*"; "*é um pipão*"; "*nossa, eu queria tá ali*"; "*sobe de boa*"; "*que massa... muito legal*". Essas foram algumas das manifestações que ouvimos durante a exibição do vídeo. A professora aproveitou o momento de empolgação dos alunos para convidá-los a confeccionar uma pipa seguindo o formato apresentado. Com o intuito de simplificar o processo de confecção da pipa, que tem a estrutura formada por canudos de plástico ao contrário do habitual graveto de bambu, buscamos recursos visuais que nos auxiliassem nesse sentido, utilizamos o passo a passo que se encontra disponível no site "Clubes de Matemática da OBMEP[16]". A Figura 21 mostra os alunos confeccionando a pipa.

Figura 21: Alunos confeccionando a pipa

Fonte: Dos autores

Auxiliamos os grupos durante o processo da confecção. À medida em que os tetraedros da pipa iam se formando indagávamos os alunos se eles possuíam o formato de algum sólido geométrico. Nesse momento, foi possível discutir sobre faces, arestas e vértices, bem como sobre as diferenças entre figuras planas e sólidos geométricos.

[15] No início do século XX, uma das questões que confrontavam os cientistas da época era sobre a possibilidade de se construir aparatos voadores grandes e estáveis o suficiente para levar um homem aos céus e trazê-lo de volta em segurança. Assim, a partir de 1891, Graham Bell iniciou um novo projeto de estudo: a construção de uma estrutura com grande área de superfície e, ao mesmo tempo, leve, de modo que voasse e permitisse transportar um homem. Seus estudos o levaram a combinar triângulos equiláteros e construir, a partir de 1902, pipas, utilizando tetraedros cobertos por tecido. As estruturas assim construídas poderiam ser pequenas, médias, grandes, ou muito grandes, dependendo do número de peças utilizadas. Estava, então, inventada a Pipa tetraédrica de Graham Bell: uma estrutura forte e rígida que voava. Descrição apresentada em: http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-pipa-uma-brincadeira-seria-sala-2-3/.

[16] http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-pipa-uma-brincadeira-seria-sala-2-3/atividade-pipa-umabrincadeira-seria-construcao-da-pipa-tetraedrica/.

Finalizada a confecção, chegou a hora da brincadeira: empinar a pipa. Nos dirigimos ao campo de futebol *Society* do Colégio, onde os alunos fizeram diversas tentativas de fazê-la "subir", no entanto, como não havia vento naquele horário, não tivemos êxito. Combinamos, então, que ao finalizarmos a atividade, a professora sortearia a pipa entre os integrantes de cada grupo. Os sorteados poderiam levá-la para casa e gravar um vídeo mostrando o momento da brincadeira.

No dia 22 de novembro, a professora distribuiu as pipas confeccionadas entre os grupos e iniciou a conversa sobre os tetraedros que compunham a pipa. Por meio do diálogo, formalizou alguns conceitos que já haviam sido mencionados pelos alunos, como por exemplo, triângulo, pirâmide de base triangular, tetraedro.

Como no vídeo que passamos aos alunos aparecia o nome "Aerofractal", questionamos se eles sabiam o que é um Fractal. Visto que a turma se manifestou dizendo não saber do que se tratava, a professora projetou no quadro a definição de Fractal, assim como mostra a Figura 22, destacando a propriedade da autossimilaridade[17], que pôde ser observada nas imagens apresentadas.

Figura 22: Definição de Fractal

Fonte: Dos autores

Expusemos mais alguns exemplos de Fractais e promovemos uma discussão a respeito das formas geométricas pertencentes à Geometria Plana que, muitas vezes, não conseguem retratar o formato dos diversos objetos ao nosso redor, e, portanto, podemos recorrer à Geometria dos Fractais.

[17] Apesar de termos ciência das propriedades dos Fractais, a saber, autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão, por se tratar de um 6º ano do Ensino Fundamental, optamos por explorar apenas a propriedade da autossimilaridade.

Após essas discussões a professora entregou aos grupos uma folha contendo diversas questões referentes à pipa confeccionada e que requereram dos alunos a percepção de regularidades e a identificação de padrões. A Figura 23 mostra, em tamanho reduzido, a folha entregue aos alunos:

Figura 23: Folha com as questões propostas aos alunos

Estudantes:____

____

ATIVIDADE: PIPA TETRAÉDRICA - AEROFRACTAL

Um Fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo, essa caracteristica recebe o nome de auto-similaridade. Eles podem ser encontrados na natureza em estruturas vegetais, animais ou podem ser produzidos artificialmente em computador através de um algoritmo matemático, criando arte.

a) Observe a Pipa que você confeccionou. Você consegue observar se nela existe essa auto-similaridade? Descreva o que você consegue observar.

b) Quantos canudos foram utilizados para construirmos a estrutura de uma célula da Pipa Tetraédrica?

c) Quantas células possui a Pipa construída por você e seu grupo?

d) Quantos canudos foram utilizados na estrutura da Pipa construída por você e seu grupo?

e) Ao unirmos as Pipas de quatro grupos, teremos uma estrutura maior, com as mesmas características da Pipa Tetraédrica inicial. Quantas células terá essa nova estrutura?

f) Quantos canudos são necessários para formar a estrutura dessa Pipa Tetraédrica?

g) As células que formam a estrutura da Pipa possuem quatro faces triangulares. Quantas dessas faces são recobertas por papel seda?

h) Na Pipa construída por você e seu grupo, quantas faces ao todo receberam papel seda?

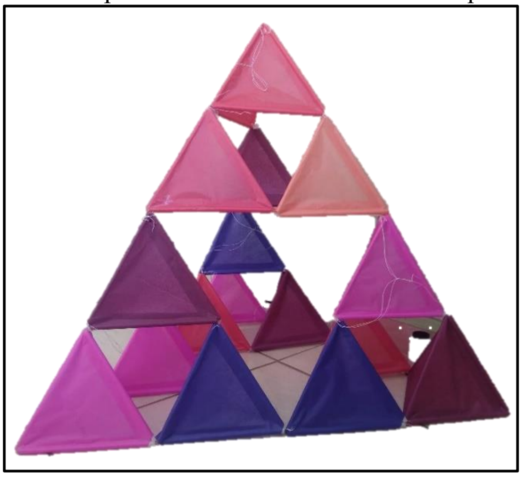
i) É possível saber quantas faces estão recobertas por papel seda na Pipa que surge ao unirmos as pipas dos quatro grupos? Se sim, descreva como você pensou.

j) Quantos centímetros quadrados de papel seda você e seu grupo utilizou na confecção da Pipa? (Desconsidere a quantidade utilizada para as dobras).

Fonte: Dos autores

A professora solicitou que os alunos discutissem as questões com seu grupo e respondessem. Posteriormente as respostas seriam discutidas em conjunto. Os alunos solicitaram a presença da professora poucas vezes e, de maneira geral, identificaram as regularidades sem dificuldades. As duas principais intervenções realizadas pela professora foram em relação ao termo "célula", que demandou explicação, já que se trata de um termo pertencente à Geometria Fractal, e corresponde à estrutura que se repete, nesse caso, a célula corresponde a cada tetraedro confeccionado. A segunda intervenção foi a exibição da imagem e também a estruturação da pipa em tamanho maior, formada a partir de quatro pipas, conforme apresenta a Figura 24.

Figura 24: Pipa com estrutura maior citada na questão i)



Fonte: Dos autores

Essa pipa seguia o mesmo padrão da estrutura da pipa confeccionada pelos alunos, a base era formada por três estruturas e a quarta estrutura era inserida no topo, dando origem ao quarto vértice da pipa.

Durante a plenária os alunos participaram ativamente, explicando e confrontando os raciocínios. A última questão da folha foi discutida coletivamente, já que se tratava da área do triângulo equilátero, conteúdo ainda não estudado pelos alunos. A professora realizou questionamentos aos grupos que permitiu formalizar novos conceitos matemáticos. Iniciou explicando sobre a classificação dos triângulos quanto aos lados, citando as características e diferenças entre os triângulos escaleno, isósceles e equilátero, e ao questionar sobre o cálculo da área do triângulo, os alunos mencionaram que sabiam calcular, apenas, a área do quadrado e do retângulo. No entanto, a professora desafiou a turma com o seguinte questionamento: "*tem como transformar esse triângulo equilátero aqui (mostrando um triângulo equilátero confeccionado em papel sulfite) em algumas dessas duas figuras geométricas que vocês disseram?*". O desafio proposto agitou a sala e vários alunos se dispuseram a realizar tentativas. O aluno A21 foi quem desenvolveu um raciocínio a partir do qual conseguiu decompor o triângulo equilátero e organizar suas partes para formar um retângulo. A Figura 25 mostra os passos que o aluno seguiu para a obtenção do retângulo com área congruente à do triângulo equilátero.

Figura 25: Decomposição de um triângulo equilátero em retângulo

Fonte: Dos autores

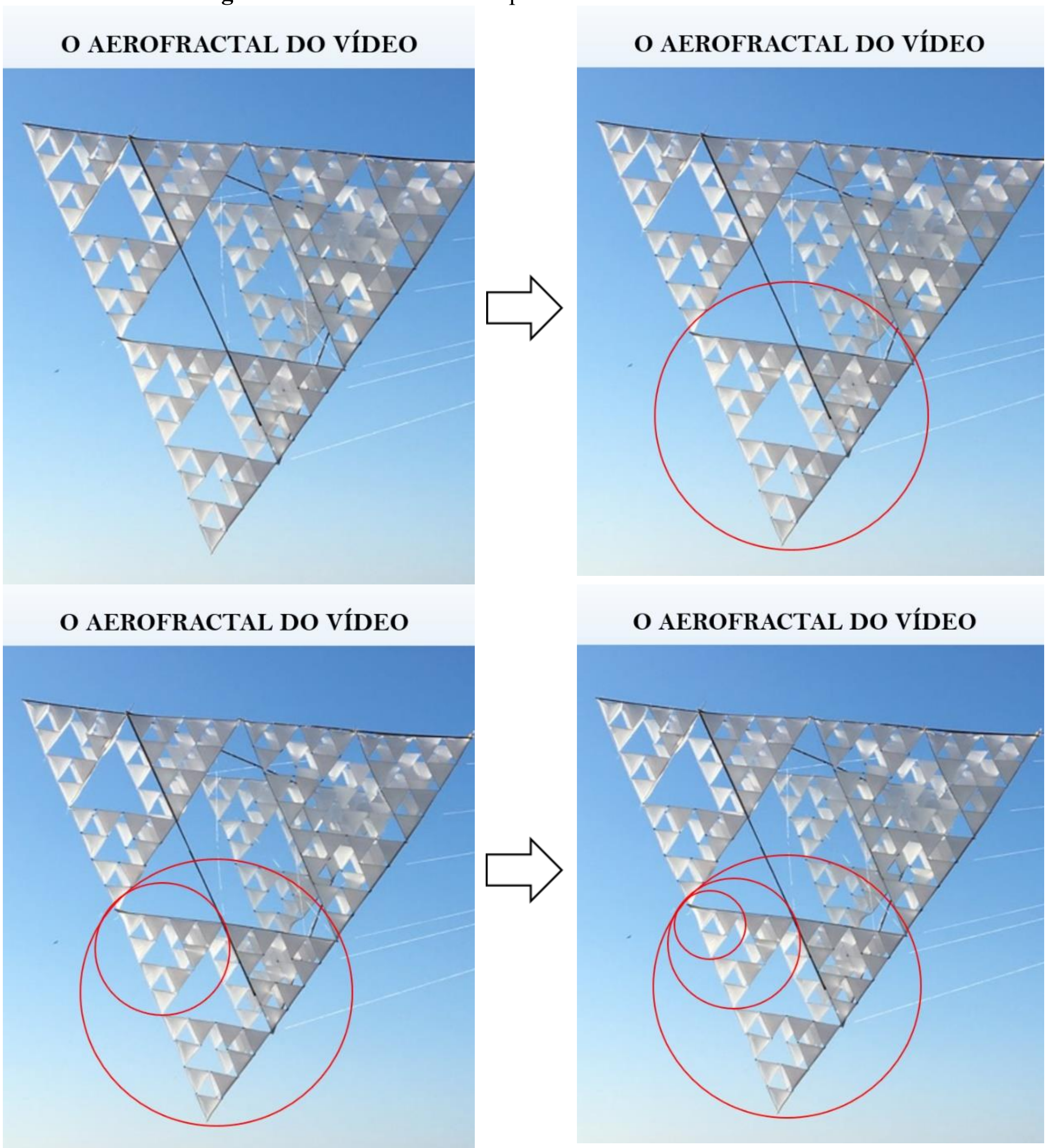
A aula naquele dia acabou com o combinado de continuarmos as discussões a respeito do cálculo da área para o retângulo obtido pelo aluno A21. No entanto, o aluno A25 se manifestou dizendo que já sabia como calcular: "*mede aqui (mostrando a largura do retângulo) e aqui (mostrando o comprimento) e multiplica*". A professora elogiou o raciocínio do aluno e disse que os cálculos poderiam ser realizados na aula seguinte.

No dia 25 de novembro a professora iniciou a aula retomando as discussões a respeito do cálculo da área do triângulo equilátero, e fez uso da fala do aluno A25 que havia sinalizado, no fim da última aula, quais dimensões deveriam ser multiplicadas, quando decomposto e reorganizado em um retângulo. Os alunos relacionaram com as dimensões do retângulo, compreendendo que o comprimento do triângulo equilátero, foi dividido por dois se tornando a largura do retângulo e a altura permaneceu a mesma. Dessa forma, foram disponibilizadas aos grupos réguas para que realizassem as medições necessárias e determinassem quantos centímetros quadrados de papel seda foram utilizados em cada pipa, desconsiderando a quantidade utilizada para as dobras.

Realizados os cálculos, os grupos socializaram seus resultados e na sequência a professora retomou as discussões sobre Fractais, utilizando a imagem da pipa, Aerofractal, que apareceu no vídeo. Na ocasião, a professora explicou que se tratava de um Fractal Geométrico, pois era formado apenas por sólidos geométricos, diferentemente dos Fractais encontrados na natureza.

Projetando a imagem do Aerofractal, a professora recorreu a animações do *Software PowerPoint* para destacar a característica da autossimilaridade. A Figura 26 apresenta o destaque dado à imagem projetada durante as discussões.

Figura 26: Autossimilaridade presente no Aerofractal



Fonte: Dos autores

Alguns alunos mencionaram: "*é tudo a mesma coisa*", se referindo à estrutura do Aerofractal. Dessa forma, a professora deixou a primeira imagem projetada e entregou aos grupos uma segunda folha questionando a possibilidade de determinar a quantidade de canudos, de células e de faces recobertas por papel seda do Aerofractal que apareceu no vídeo. Os grupos deveriam analisar se era possível determinar essas quantidades e descrever o raciocínio empreendido.

Os alunos se empolgaram e encararam o questionamento como um desafio. O aluno A25 foi o primeiro a se dirigir até o quadro, onde a imagem estava projetada, e justificar a seu grupo o que estava pensando. A ação do aluno A25 foi repetida, posteriormente, por vários alunos. Durante a resolução a professora permaneceu auxiliando os grupos.

A socialização dos resultados foi, particularmente, um momento valioso. Os grupos confrontaram seus raciocínios argumentando que pensaram de formas distintas, mas chegaram a um mesmo resultado. Além disso, durante as discussões, os erros cometidos iam sendo constatados pelos próprios alunos, que relatavam no que haviam se equivocado, como por exemplo, a fala do aluno A10: "*aqui a gente multiplicou por dois, em vez de multiplicar por quatro, daí errou*".

Na mesma folha entregue pela professora, havia uma tabela a ser preenchida pelos grupos, conforme apresenta a Figura 27.

Figura 27: Tabela

Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

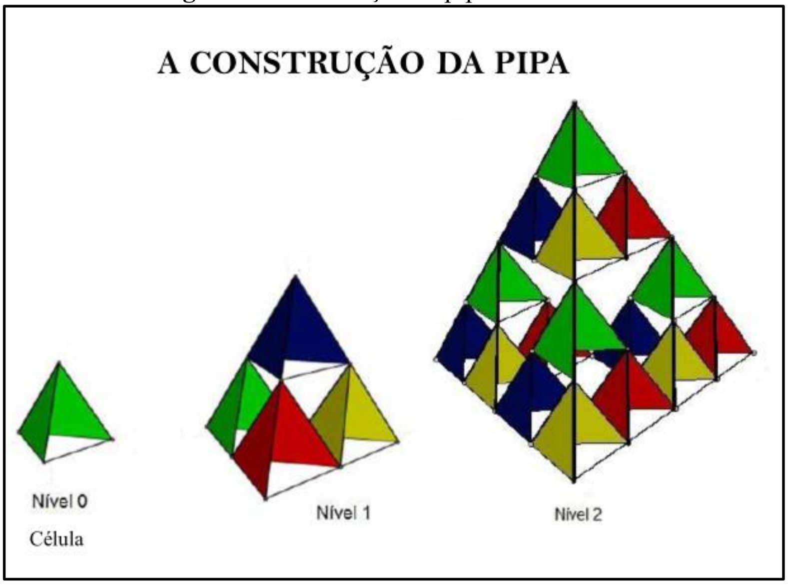
Nível	**Número de canudos**	**Número de células**	**Número de faces com papel seda**
0			
1			
2			
⋮			
AEROFRACTAL			
n			

Fonte: Dos autores

Essa tabela solicitava a reunião dos dados tanto da pipa confeccionada pelos grupos, como do Aerofractal apresentado no vídeo, objetivando que os alunos conseguissem estabelecer um modelo matemático para o cálculo dos materiais necessários para a confecção de um Aerofractal, qualquer que fosse o seu nível. A próxima aula seria destinada as discussões em relação à construção do modelo matemático a partir da observação das regularidades e padrões presentes nos dados dessa tabela.

No dia 29 de novembro a professora iniciou a aula explicando os itens presente na tabela. Para que os alunos compreendessem o que é o nível, item presente na tabela, a professora projetou no quadro a construção da pipa até o nível 2, conforme a Figura 28, e explicou que a célula inicial era equivalente ao nível 0, por não configurar, ainda, a estrutura de uma pipa.

Figura 28: Construção da pipa até o nível 2



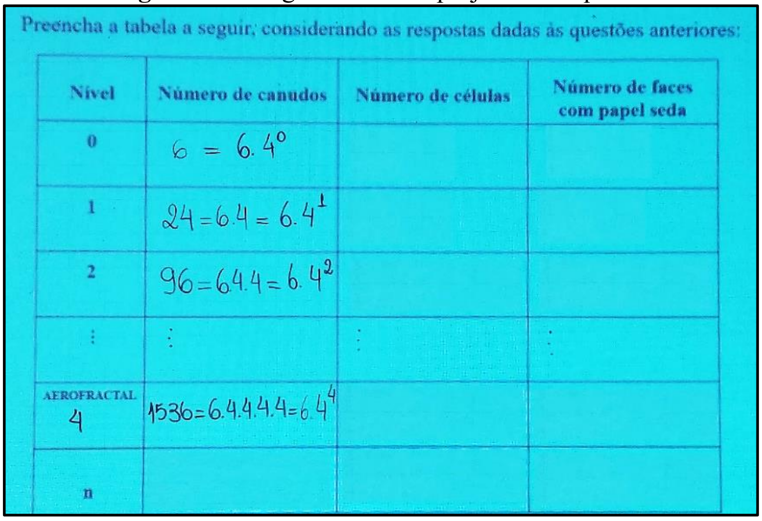
Fonte: Adaptado de http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-pipa-uma-brincadeira-seria-sala-2-3/

Além de poderem manipular a pipa, o recurso visual utilizado foi de grande valia. A professora pediu que os grupos completassem os dados da tabela até o nível do Aerofractal, inclusive que determinassem a que nível ele correspondia. Como o Aerofractal tinha uma estrutura grande, os alunos começaram a palpitar sobre qual seria o nível: "*eu acho que vai ser nível 10*" (A19); "*eu acho que é mais que 10*" (A8); "*eu acho que é nível 4*" (A21).

Após os grupos terem completado a tabela conforme a orientação dada, a professora se dirigiu ao quadro e começou a socializar os resultados colocando-os na tabela projetada, incentivando os alunos perceberem a relação de correspondência existente entre o nível da pipa e o número de canudos. O aluno A21 observou que "*conforme vai aumentando o nível, o número de canudos vai multiplicando de 4 em 4*". Vários alunos demonstraram estar de acordo com o raciocínio. A professora elogiou a percepção da turma, mas repetiu o questionamento, dessa vez, encobriu a quantidade de canudos utilizados para o nível 1, e questionou como determinariam o número de canudos necessários para a confecção da pipa no nível 2. A intenção era fazer com que a turma manifestasse a relação de correspondência.

Mais uma vez o aluno A21 se pronunciou: "*faz tipo uma potenciação... vai ser 6 elevado a quarta potência, uma coisa assim... aí 6 vezes 4 vai dar 24; 24 vezes 4 vai dar 96; 96 vezes 4 vai dar 384 e 384 vezes 4 vai dar 1536*". A professora utilizou a fala do aluno para escrever os dados da tabela no formato sugerido, de potenciação. A Figura 29 apresenta o resultado das discussões empreendidas para o item "Número de canudos". A escrita na forma de potência, permitiu que a relação de correspondência entre o nível e o valor atribuído ao expoente fosse facilmente identificado pelos alunos, bem como possibilitou determinar a que nível o Aerofractal correspondia, validando a hipótese sugerida pelo Aluno A21.

Figura 29: Imagem da tabela projetada no quadro



Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

Nível	Número de canudos	Número de células	Número de faces com papel seda
0	$6 = 6.4^0$		
1	$24 = 6.4 = 6.4^1$		
2	$96 = 6.4.4 = 6.4^2$		
⋮	⋮	⋮	⋮
AEROFRACTAL 4	$1536 = 6.4.4.4.4 = 6.4^4$		
n			

Fonte: Dos autores

Chegou a hora de construir o modelo matemático ou a "regrinha[18]", como os alunos o chamaram, para a quantidade de material necessário para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer. Considerando o encaminhamento dado às discussões a professora questionou os grupos: "*então, para qualquer nível de pipa que uma pessoa queira confeccionar, o que eu devo falar pra ela? pra ela saber quantos canudinhos vai precisar?*". O aluno A25 disse que era necessário "*multiplicar seis pelo número (nível) qualquer*". A professora, então, fez algumas considerações chamando a atenção para qual termo era variável e logo o aluno A1 declarou que a "regrinha" era: "*seis vezes quatro elevado ao n*".

Após a fala do aluno a professora se dirigiu até o quadro e escreveu a regra declarada, indagando os grupos se aquela operação permitia calcular a quantidade de canudos utilizados para qualquer nível da pipa. O aluno A25 concordou e exemplificou como ficaria o cálculo para o 8º nível do Aerofractal. Outros alunos mostraram compreender o raciocínio e se puseram a dar exemplos também. Dessa forma, a professora solicitou que os grupos discutissem entre si de modo a determinar a "regrinha" para os itens "Número de células" e "Número de faces com papel seda".

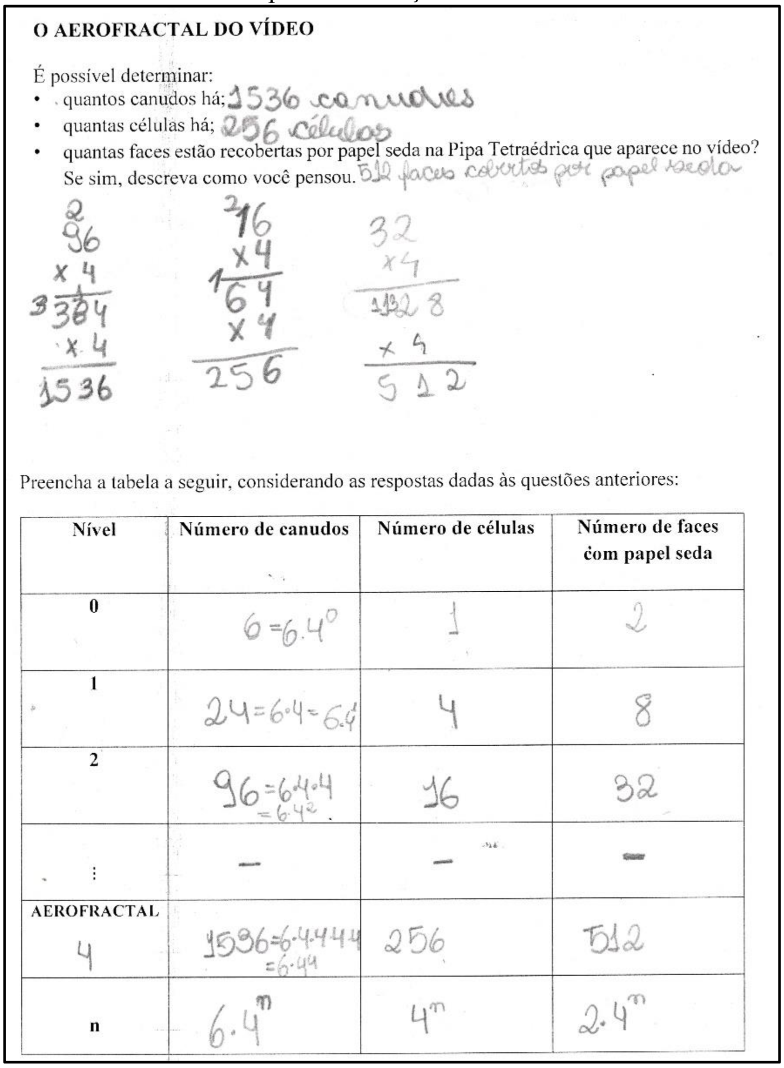
A capacidade de observação de alguns alunos, durante as discussões realizadas no âmbito dos grupos, nos chamou muito a atenção. Os alunos justificaram o raciocínio para o grupo, estabelecendo relações que culminaram no modelo matemático pretendido. Alguns

---

[18] Na segunda atividade de Modelagem Matemática desenvolvida os alunos nomearam a representação do modelo em linguagem algébrica como "regrinha".

grupos apresentaram dificuldade, mas permaneceram engajados no objetivo. Com um auxílio mais presente da professora, também conseguiram estabelecer as relações propostas. A Figura 30 apresenta o modelo matemático estabelecido por alguns grupos, que permitia calcular a quantidade de material necessário para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer.

Figura 30: Modelos Matemáticos para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer



O AEROFRACTAL DO VÍDEO

É possível determinar:

- quantos canudos há; 1536 canudos
- quantas células há; 256 células
- quantas faces estão recobertas por papel seda na Pipa Tetraédrica que aparece no vídeo? Se sim, descreva como você pensou. 512 faces cobertas por papel seda

$96 \times 4 = 384$, $384 \times 4 = 1536$

$16 \times 4 = 64$, $64 \times 4 = 256$

$32 \times 4 = 128$, $128 \times 4 = 512$

Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

Nível	Número de canudos	Número de células	Número de faces com papel seda
0	$6 = 6 \cdot 4^0$	1	2
1	$24 = 6 \cdot 4 = 6 \cdot 4$	4	8
2	$96 = 6 \cdot 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4^2$	16	32
⋮	—	—	—
AEROFRACTAL 4	$1536 = 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4^4$	256	512
n	$6 \cdot 4^n$	4^n	$2 \cdot 4^n$

Sim, uma pequena é 24 canudos e multiplicar por 4 dos grupos que é 96 canudos, e multiplica novamente por 4 para dar a média que dará 384 e multiplicar novamente para dar a enorme.

Sim, porque se uma pipa inicial é 8 faces, já dos 4 grupos juntos dará 32 faces que será multiplicado novamente por 4 para dar 128 que é igual a um dos grupos, que é multiplicado novamente para dar a pipa grande (512).

Sim, uma pequena é 4 células, e multiplicado pelos 4 grupos que dará 16 células, e multiplicado por 4 de novo para formar a média que dará 64 células e multiplicar novamente por 4 para dar a grande que dará 256 células.

$16 \times 16 = 96 + 160 = 256$

$96 \times 16 = 576 + 960 = 1536$

O AEROFRACTAL DO VÍDEO

É possível determinar:

- quantos canudos há: 1536 canudos
- quantas células há; 256 células
- quantas faces estão recobertas por papel seda na Pipa Tetraédrica que aparece no vídeo? Se sim, descreva como você pensou.

Sim, 512, nós pegamos primeiro o total de das pipas dos quatro grupos, multiplicamos pelo total de papel de seda por 4 que deu 32, depois multiplicamos por 4 (total de grupos) que deu 128, logo em seguida multiplicamos o 128 por 4 que deu 512

$32 \times 4 = 128$

$128 \times 4 = 512$

Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

Nível	Número de canudos	Número de células	Número de faces com papel seda
0	6	$1 = 4^0$	$2 = 2 \cdot 4^0$
1	24	$4 = 4^1$	$8 = 2 \cdot 4^1$
2	96	$16 = 4^2$	$32 = 2 \cdot 4^2$
⋮			
AEROFRACTAL 4	1536	$256 = 4^4$	$512 = 2 \cdot 4^4$
n	$6 \cdot 4^n$	4^n	$2 \cdot 4^n$

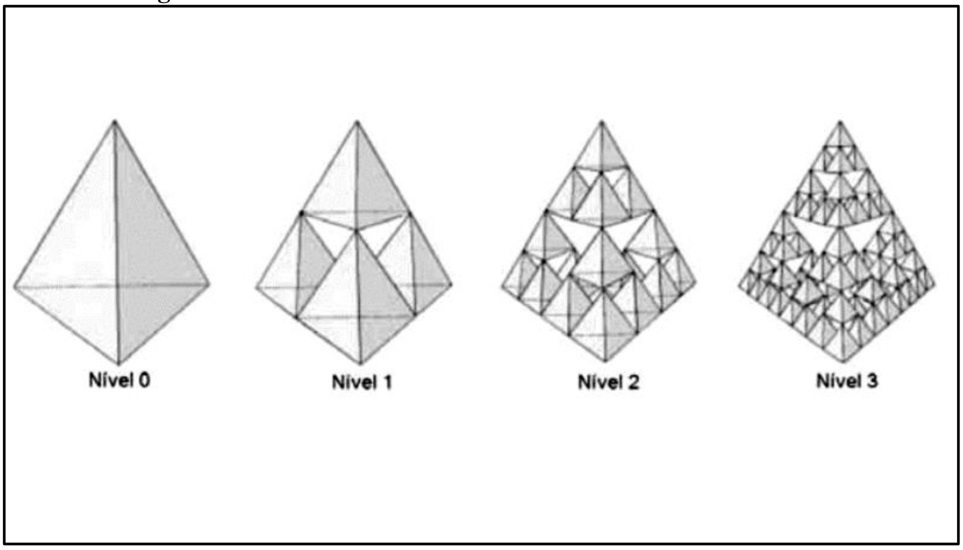
Fonte: Dos autores

Durante a construção do modelo matemático, a fala do aluno A16 nos chamou atenção, antes que seu grupo escrevesse os dados na forma de potência para analisar, o aluno constatou que o número de faces com papel seda seria, sempre, o dobro do número de células. Além disso, durante o momento de socialização, no qual a professora completou a tabela mediante os debates, foi possível observar o desenvolvimento dos raciocínios acompanhados de suas justificativas.

Para finalizar a atividade, a professora relembrou que a pipa confeccionada se tratava de um Fractal Geométrico, que poderia ser produzido artificialmente em computador através de um algoritmo matemático, criando arte. Sendo assim, exibimos um *gif* da construção da pipa até o nível 4, sinalizando que a produção do algoritmo se dá diferentemente da confecção com materiais manipuláveis, uma vez que o programa considera o nível 0, não como a célula inicial, mas como uma célula cujas dimensões externas não se alteram à medida em que os níveis avançam.

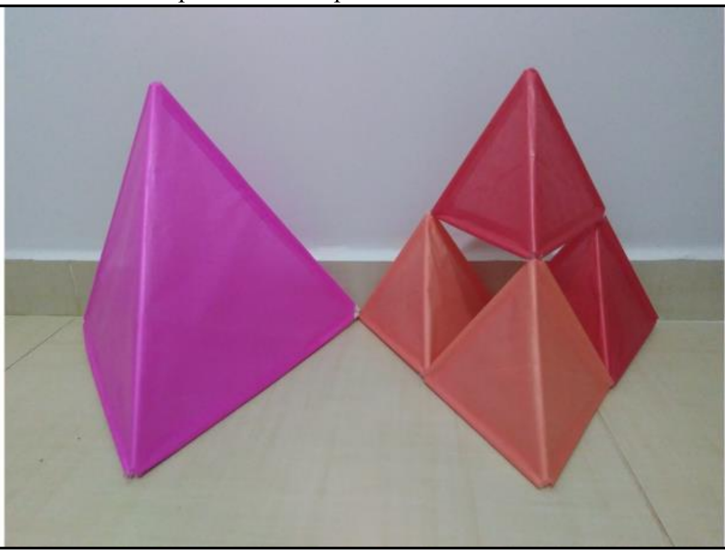
Antes da exibição do *gif*, recorremos a uma imagem que apresentava a produção do Aerofractal até o nível 3, conforme mostra a Figura 31, e também confeccionamos uma pipa com as mesmas dimensões da pipa confeccionada pelos grupos, Figura 32, apresentando o que seria o nível 0 quando a produção é realizada artificialmente. O *gif* foi utilizado como validação dos modelos matemáticos estabelecidos para o fenômeno em questão, já que permitiu dar significado à linguagem algébrica utilizada. À medida que os alunos visualizavam a passagem de um nível a outro, realizávamos discussões nesse sentido. Tanto a imagem utilizada quanto o material manipulável, nos permitiram discutir diversos conceitos matemáticos com os grupos, tais como equivalência de áreas, ponto médio, quádruplo, proporção, entre outros.

Figura 31: Aerofractal desenvolvido artificialmente até o nível 3



Fonte: Dos autores

Figura 32: Aerofractal Nível 0 confeccionado com materiais manipuláveis representando o produzido artificialmente



Fonte: Dos autores

E como não poderia faltar o propósito inato da brincadeira, exibimos o vídeo caseiro de um dos alunos soltando a pipa de nível 1, visto que no dia da confecção, não havia condições climáticas favoráveis. A atividade desenvolvida superou nossas expectativas. Exigiu concentração e observação desde o momento da confecção. Permitiu que os alunos discutissem entre si, tomassem iniciativas e justificassem seus raciocínios.

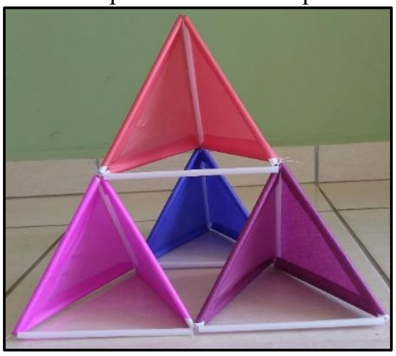
5.2.2 Análise da Atividade

A atividade de Modelagem Matemática intitulada "Aerofractal" foi desenvolvida segundo a *Model-Eliciting Activities* (MEAs), abrangendo os seis princípios elencados por Lesh, et al. (2000) que orientam a produção, interpretação e análise de modelos matemáticos. Os alunos confeccionaram um Aerofractal de nível 1 observando as regularidades existentes para que pudessem determinar a relação entre a quantidade de canudos, de células e de faces recobertas por papel seda para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer.

O tema proposto não é essencialmente matemático, mas ao receber dos estudantes uma abordagem matemática para solucionar um problema decorrente da situação proposta, caracteriza-se, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), como uma atividade de Modelagem Matemática. A discussão do tema foi realizada por meio de uma conversa sobre quais brincadeiras, sem fazer o uso do celular, os alunos costumavam realizar e também fizemos uso de vídeos, recursos mencionados por Chamberlin e Moon (2005) para gerar interesse e discussão sobre o contexto do problema. Tanto a conversa inicial quanto o vídeo escolhido serviram para situar a atividade no "princípio da realidade", enunciado por Lesh, et al. (2000), que requer que a atividade seja inserida em um contexto realista, possibilitando aos alunos a discussão a partir de seus diferentes níveis de habilidade matemática e conhecimento geral.

No âmbito da atividade, cada grupo confeccionou uma pipa do tipo Aerofractal com estrutura similar à exibida no vídeo, porém, em tamanho reduzido. A pipa confeccionada pelos grupos contou com a junção da estrutura de quatro "tetraedros", conforme mostra a Figura 33.

Figura 33: Pipa confeccionada pelos alunos



Fonte: Dos autores

A investigação a respeito da estrutura da pipa confeccionada ocorreu por meio de perguntas de compreensão, como propõem Chamberlin e Moon (2005). Essas perguntas tem como objetivo garantir que os alunos tenham o conhecimento básico necessário para resolver o problema. Nesse sentido, foi preciso que a professora explicasse alguns conceitos pertencentes à Geometria dos Fractais, como por exemplo o conceito de 'autossimilaridade', bem como a diferenciação entre os conceitos de triângulo e de pirâmide, que havia gerado discussão entre os integrantes dos grupos durante a confecção da pipa.

As questões de compreensão entregues aos grupos mobilizou "a percepção de regularidades", elemento caracterizador do pensamento algébrico, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993). A Figura 34 apresenta respostas de alguns grupos onde é possível perceber a presença desse elemento.

Figura 34: Respostas de alguns grupos para as questões de compreensão

a) Observe a Pipa que você confeccionou. Você consegue observar se nela existe essa auto-similaridade? Descreva o que você consegue observar.

Sim, os tetraedros, as bases, a pirâmide em si.

i) É possível saber quantas faces estão recobertas por papel seda na Pipa que surge ao unirmos as pipas dos quatro grupos? Se sim, descreva como você pensou. Sim, a gente pegou as faces cobertas por seda em um tetraedro e multiplicou pelos 4 grupos. 8·4=32
a) Observe a Pipa que você confeccionou. Você consegue observar se nela existe essa auto-similaridade? Descreva o que você consegue observar. sim, as pirâmides de base triangular, todas são iguais.
i) É possível saber quantas faces estão recobertas por papel seda na Pipa que surge ao unirmos as pipas dos quatro grupos? Se sim, descreva como você pensou. sim, porquê são 4 grupos, nós multiplicamos o 8 por 4

Fonte: Dos autores

Os alunos perceberam a presença de regularidades tanto na estrutura dos tetraedros, que utilizavam sempre 6 canudinhos, como na estrutura do Aerofractal, percebendo que a união de três tetraedros formava a *"base"* do Aerofractal. Do mesmo modo, conseguiram perceber que para determinar a quantidade de material para a confecção de uma pipa maior, bastava realizar o cálculo proporcional, pois já haviam identificado a presença de regularidades na estrutura da pipa.

As questões de compreensão também favoreceram a busca por estratégias que permitiram determinar a quantidade de material necessário para a confecção do Aerofractal exibido no vídeo a partir da observação da estrutura da pipa confeccionada pelos grupos e, posteriormente, para a confecção de um Aerofractal, em um nível qualquer, sinalizando a necessidade da "construção do modelo", outro princípio enunciado por Lesh, et al. (2000), que garante a explicação matemática da relação entre a quantidade de material utilizado na confecção de um Aerofractal em nível 1 e um Aerofractal em um nível qualquer.

Além disso, os registros das percepções e justificativas presentes nas questões de compreensão parecem direcionar os alunos para a forma do pensamento algébrico (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, descrita por Kaput (1999), uma vez que é possível verificar tanto nos registros escritos, quanto nas argumentações durante a socialização, o encaminhamento para a generalização da quantidade de material necessário para a confecção de um Aerofractal em um nível diferente do confeccionado pelos grupos.

O diálogo a seguir mostra a percepção dos alunos em relação à quantidade de tetraedros necessários para formar a estrutura da pipa maior, conforme apresentada na Figura 24. Uma ideia semelhante foi abordada na questão i), Figura 34, ao questionar os alunos sobre a quantidade de células necessárias nessa estrutura.

> *P:* Ao unirmos as pipas de quatro grupos, teremos uma estrutura maior, com as mesmas características da pipa tetraédrica inicial. Por que olhem para essa que está na mesa de vocês e olhem para essa da imagem... quantas células, quantos tetraedros terá essa nova estrutura?
> *Todos:* Dezesseis.
> *P:* Por quê?
> *A21:* É por causa que... se numa estrutura são quatro células e são quatro pirâmides tetraédricas[19], então, quatro vezes quatro, dezesseis.
> *P:* Exatamente. Para formar essa pipa maior (apontando para a imagem projetada no quadro) eu uso quatro pipas iguais a que vocês confeccionaram, então para saber quantas células ela tem eu não preciso contar de um em um, eu posso raciocinar como A21 disse, basta que eu faça quatro vezes quatro. Esses "porquês" gente, é que fazem vocês pensarem nas respostas que estão dando às questões.

Os alunos discutiram e responderam na folha de anotações nove das dez questões de compreensão propostas sem que fossem necessárias muitas intervenções da professora. As intervenções mais frequentes realizadas foram a respeito dos significados dos termos células e faces, presentes nas questões. As respostas dessas nove questões foram socializadas pelos grupos, momento que podemos associar ao "princípio da autoavaliação", indicado por Lesh, et al. (2000), pois solicitamos que os alunos argumentassem e justificassem suas respostas, testando e revisando suas formas de pensar.

Na décima questão, porém, a respeito da quantidade de papel seda utilizado para a confecção de uma pipa, desconsiderando a quantidade utilizada para as dobras, os alunos necessitaram de ajuda, pois como as faces das células eram triangulares e os alunos ainda não haviam estudado o cálculo da área de triângulos, essa questão demandou explicações por parte da professora, portanto, foi solucionada de forma conjunta com toda a turma. Para explicar esse cálculo, levamos em consideração conhecimentos prévios dos alunos, que já sabiam calcular a área de um retângulo e, por meio da decomposição/composição, explicamos como calcular a área de um triângulo. Aproveitamos a oportunidade para falar sobre a existência de diferentes tipos de triângulos, quando classificados conforme seus lados, a saber, triângulo equilátero, triângulo isósceles e triângulo escaleno. O diálogo seguinte mostra como as discussões foram encaminhadas visando determinar a quantidade de papel seda a ser utilizado na confecção de uma pipa tetraédrica.

> *P:* Bem, a última questão pede para determinar quantos centímetros quadrados de papel seda... quando eu falo em centímetros quadrados, é a unidade de medida do quê?
> *A3:* Da área.

[19] Esse aluno se referiu à pipa tetraédrica como pirâmide tetraédrica.

P: Da área, ótimo. Quantos centímetros quadrados eu estou… lembra que quando eu calculo a área de uma superfície, eu estou calculando o quanto de material é necessário para recobrir aquela superfície? E é isso que a gente fez… a gente não cobriu essas duas faces aqui? (mostrando na pipa). Quantos centímetros quadrados de papel seda você e seu grupo utilizou na confecção da pipa? E tem um detalhe... eu pedi para desconsiderar aquela quantidade de seda que a gente dobra aqui para dentro. Como se fosse um triângulo assim… (mostrando um triângulo equilátero com as mesmas dimensões, feito no papel sulfite. Sobrepus ao papel seda, para que eles percebessem que se encaixava perfeitamente na face do tetraedro). Mas vocês ainda não estudaram como se calcula a área de triângulo equilátero… esse estudo vocês farão nas séries seguintes, mas mesmo assim vocês conseguem calcular a área desse triângulo utilizando um outro conhecimento que vocês já possuem. Vocês sabem calcular a área de quais figuras geométricas?
Todos: Quadrado e retângulo.
P: Hum... e tem como transformar esse triângulo equilátero aqui (mostrando) em algumas dessas duas figuras que vocês disseram?
A13: É só juntar dois desse aí... colocar outro do lado.
P: Mas usando apenas esse! Pode dobrar, pode cortar…
A3: Ah pro, assim ó (levantou da carteira e veio mostrar. Dobrou as três pontas, mas acabou percebendo que não daria certo). Mas eu preciso de mais papel!
P: Mas eu não posso usar mais papel! O papel que tem é só esse do triângulo. Porque a proposta é transformar esse aqui, em um quadrado ou um retângulo, usando dobras ou cortes.
A21: Eu sei.
P: Então pode vir mostrar aqui pra gente.
A21: É só cortar aqui no meio (mostrando a altura do triângulo). Dobra aqui no meio…
A25: Depois é só juntar eles.
P: Mostra como ficou A21.... Qual figura geométrica que formou?
Todos: Um retângulo.
A1: Mas ela usou outro tipo de triângulo.
A25: Não! ela usou o mesmo triângulo, ela só cortou no meio.
A1: Mas fez outro tipo.
P: Eu entendi o que você quer dizer. Quando a gente corta o triângulo equilátero ao meio, a gente fica com dois triângulos e esses dois triângulos não são mais equiláteros, agora eles são escalenos. Os três lados têm tamanhos diferentes. É isso que você percebeu?
A1: Sim.
P: Gostei muito da sua percepção. Bem, e posicionando esses dois triângulos que surgiram a partir do corte (mostrando) eu consigo o formato retangular agora. Certo? E como se calcula a área de um retângulo?
A21: Pelo comprimento e a largura.
A25: Mede aqui (mostrando a largura) e aqui (mostrando a comprimento) e multiplica.
P: Ótimo. Vocês têm como fazer essas medidas? Olhem para a pipa, qual vai ser a largura do retângulo? Pensa no retângulo... relaciona o triângulo equilátero das faces com o retângulo que acabamos de formar. Qual é a largura dele?
A21: É a metade desse aqui (mostrando a medida de uma das arestas do tetraedro).
P: Vocês concordam?
Todos: Sim.
P: Essa parte aqui (mostrando a aresta de um dos tetraedros e sobrepondo uma das partes do triângulo equilátero que foi cortado ao meio) se tornou a largura do retângulo quando o A21 cortou ao meio. Por isso que ele falou que é metade. E a altura?
A25: A altura não mudou, é a mesma.
P: Isso mesmo, a altura permanece a mesma do triângulo equilátero inicial (mostrando o triângulo sobreposto na face do tetraedro). E o que tem que fazer com esses valores?
Todos: Multiplicar.
P: Multiplicar. Muito bem! É esse o cálculo que vocês têm que fazer para responder a última questão então.

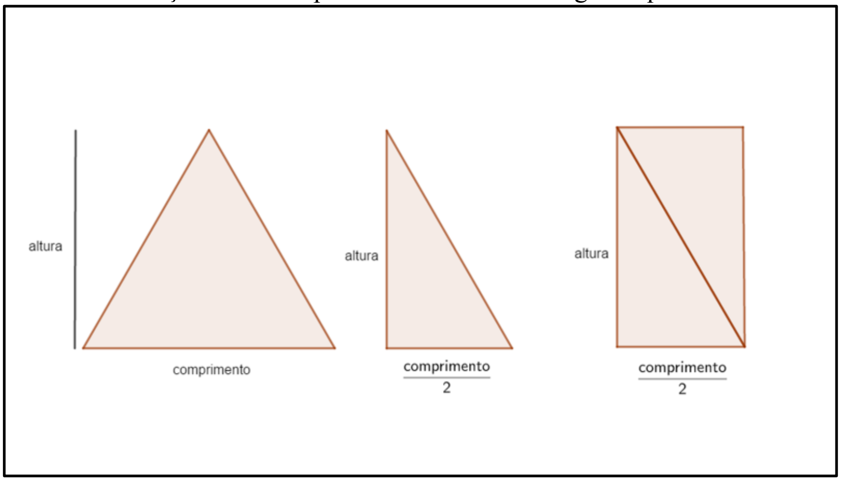
Esse diálogo revela a presença de elementos caracterizadores do pensamento algébrico, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), “a percepção de regularidades”, presente em falas como “é só cortar aqui no meio (mostrando a altura do triângulo). Dobra aqui no meio” (Aluno A21) e “depois é só juntar eles” (Aluno A25). E também, “a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam”, em falas como “pensa no retângulo... relaciona o triângulo equilátero das faces com o retângulo que acabamos de formar. Qual é a largura dele?” (Professora), “é a metade desse aqui (mostrando a medida de uma das arestas do tetraedro)” (Aluno A21) e “a altura não mudou, é a mesma” (Aluno A25).

As considerações e comprovações dos alunos mediante a ação de decompor um triângulo equilátero e formar um retângulo para que conseguissem calcular sua área, mobilizaram a forma do pensamento algébrico (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), indicada por Kaput (1999), que implica na construção de relações, descritas por meio de símbolos e regras sintáticas que permitem construir significados. É possível perceber que a partir da decomposição do triângulo equilátero, os alunos foram capazes de observar a equivalência entre as áreas do retângulo formado e do triângulo equilátero que o originou, externalizando a relação constatada entre as dimensões das figuras geométricas, a altura será invariante e a base do retângulo terá a metade da dimensão da base do triângulo.

Essa discussão pode ser associada também à forma (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações, pois as relações comprovadas pelos alunos podem ser interpretadas como estruturas capazes de fornecer uma base para níveis mais elevados de abstração e formalização, como por exemplo, base para a interpretação da fórmula para o cálculo da área de triângulos equiláteros, que será apresentada aos alunos em séries posteriores.

Assim que os grupos realizaram os cálculos para determinar a área do papel seda utilizado, eles sinalizaram a intenção de socializar suas respostas. Nesse momento a professora projetou no quadro uma sequência de figuras que traduzia o encaminhamento dado pelos alunos para o cálculo da quantidade de papel seda utilizado em uma face do tetraedro. A Figura 35 apresenta a imagem projetada pela professora.

Figura 35: Transformação realizada pelos alunos de um triângulo equilátero em um retângulo



Fonte: Dos autores

Os grupos apontavam para a imagem projetada justificando seus cálculos. Na ocasião, foi possível discutir, também, a diferença entre área e perímetro, conceitos que ainda acarretam alguns equívocos entre os alunos.

Após esse momento, a professora distribuiu entre os grupos a segunda folha com questões que auxiliaram a "documentação do modelo", princípio enunciado por Lesh, et al. (2000), que garante o registro das observações em termos de uma linguagem matemática. A Figura 36 mostra, em tamanho reduzido, a folha entregue aos grupos.

Figura 36: Questões propostas aos grupos

O AEROFRACTAL DO VÍDEO

É possível determinar:
- quantos canudos há;
- quantas células há;
- quantas faces estão recobertas por papel seda na Pipa Tetraédrica que aparece no vídeo? Se sim, descreva como você pensou.

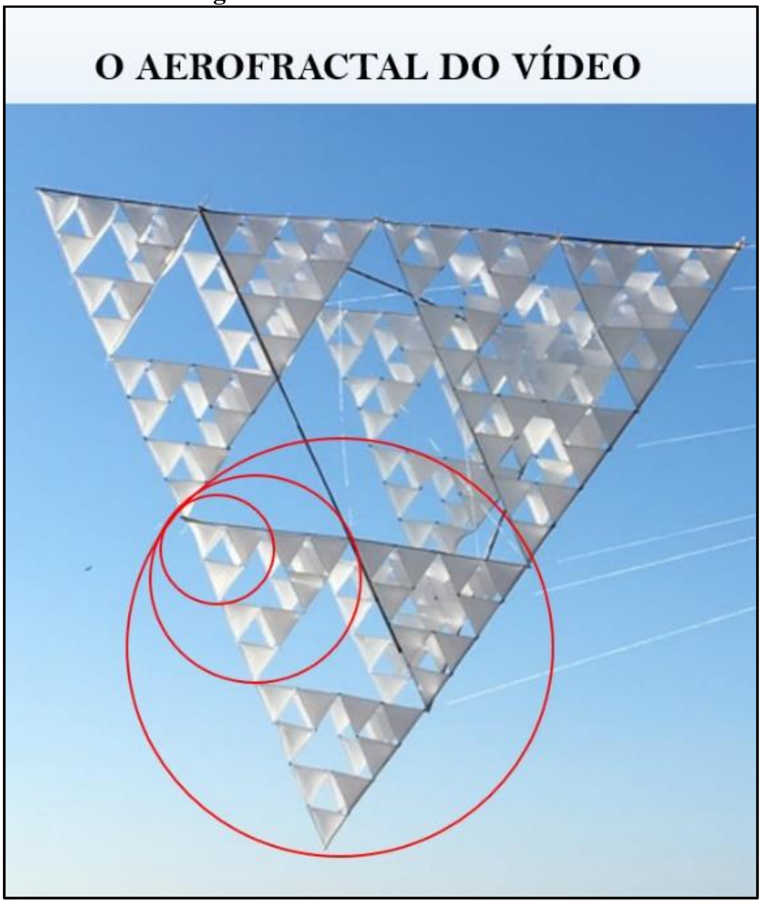
Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

Nível	Número de canudos	Número de células	Número de faces com papel seda
0			
1			
2			
⋮			
AEROFRACTAL			
n			

Fonte: Dos autores

Assim que a professora entregou a folha com as questões referentes ao Aerofractal, ela relembrou com a turma o conceito de Fractal. Projetou no quadro a imagem do Aerofractal exibido no vídeo, conforme mostra a Figura 37.

Figura 37: Estrutura do Aerofractal



Fonte: Dos autores

A professora explicou que a pipa tetraédrica confeccionada podia ser considerada um Fractal Geométrico por conter a característica de ser autossimilar, pois cada parte da estrutura destacada na Figura 37 era similar à estrutura como um todo.

O aluno A25 foi o primeiro a tomar a iniciativa de ir até o quadro e mostrar a seu grupo como estava pensando para responder as questões propostas, sinalizando, assim, a necessidade da “construção do modelo”, princípio enunciado por Lesh, et al. (2000), que garante a explicação matemática da relação identificada. Integrantes de outros grupos também sentiram a necessidade de repetir a ação realizada pelo aluno A25 para visualizar e compreender como se formava a estrutura do Aerofractal. Como não tínhamos o Aerofractal para manipular, alguns grupos tiveram dificuldade para visualizar como a estrutura do Aerofractal era formada, e nesse momento a professora interveio, conforme mostra o diálogo a seguir.

P: Pessoal, deixa eu ajudar vocês um pouquinho? Eu estou vendo que alguns alunos vieram aqui para confirmar ou expor suas ideias, e isso é bem bacana, mas eu também estou percebendo que vocês estão com um pouco de dificuldade de visualizar a estrutura dessa pipa... então olha só, estão vendo essa menor? (mostrando na imagem projetada o destaque com a circunferência menor) tem quantas células nessa aqui que está circulada?
Todos: Quatro.
P: Quatro... depois de saber isso, tem uma pergunta aí que vocês já têm a resposta de quantas células tem essa outra estrutura aqui (mostrando na imagem projetada o destaque com a circunferência média), que é quando junta as pipas de quatro grupos. E então a gente tem essa última estrutura que está circulada aqui (mostrando na imagem projetada o destaque com a circunferência maior) quantas estruturas iguais à anterior formam ela?
A27: Três.
Todos: Quatro.
P: Quatro também... uma, duas, ...
A25: E tem uma aí atrás.
A27: Ah, verdade.
A19: Então conta daquela ali (indicando a estrutura da pipa formada pela junção de quatro pipas confeccionadas pelos grupos) e multiplica por 4! (se referindo a quantidade de material necessário para confeccionar o Aerofractal)
P: Muito bem A19! Você já antecipou a resposta à minha pergunta. Para formar o Aerofractal, nós também teremos quatro estruturas iguais a essa (mostrando na imagem projetada o destaque com a circunferência maior) uma, duas, três e a quarta lá atrás. Porque na foto a pipa está assim... (colocando a pipa na mesma posição da imagem) a estrutura dela continua sendo, três na base e uma em cima. Então pensem no que eu acabei de falar que eu acho que pode ajudar na compreensão de vocês.

As considerações apresentadas no diálogo sinalizam "a percepção de regularidades", elemento caracterizador do pensamento algébrico, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), além disso, podem ser associadas, à forma de pensamento algébrico (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, uma vez que as falas dos alunos demonstram o encaminhamento para a generalização da quantidade de material necessário para a confecção do Aerofractal.

A intervenção realizada pela professora viabilizou a "documentação do modelo", princípio indicado por Lesh, et al. (2000), que revela explicitamente como os alunos estão pensando a situação-problema. Ao analisarmos os registros escritos dos grupos foi possível identificar que a documentação das justificativas e formas de pensar se deram, predominantemente, por meio da linguagem natural, recorrendo aos conceitos da aritmética, como mostra a Figura 38.

Figura 38: Documentação do modelo

O AEROFRACTAL DO VÍDEO

É possível determinar:

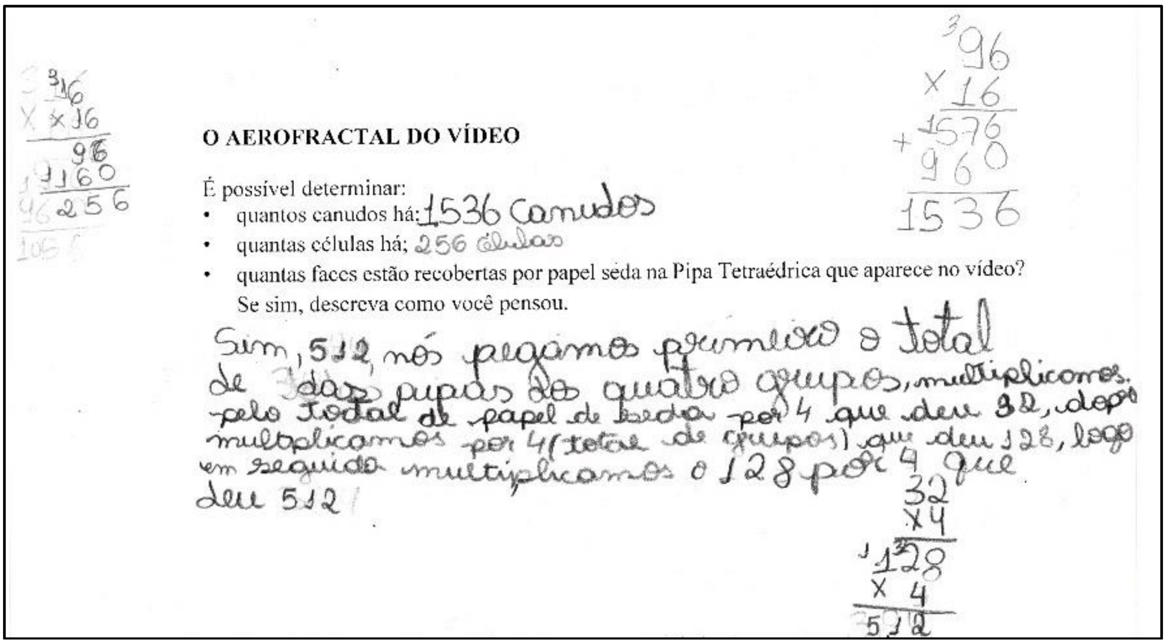
- quantos canudos há; 1536 canudos
- quantas células há; 256 células
- quantas faces estão recobertas por papel seda na Pipa Tetraédrica que aparece no vídeo? Se sim, descreva como você pensou. 512 faces cobertos por papel seda

$$\begin{array}{r} 96 \\ \times 4 \\ \hline 384 \\ \times 4 \\ \hline 1536 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times 4 \\ \hline 64 \\ \times 4 \\ \hline 256 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \times 4 \\ \hline 128 \\ \times 4 \\ \hline 512 \end{array}$$

Ssim, asuma pequena é 24 canudos e multiplicar por 4. dos grupos que é 96 canudos, e multiplica novamente por 4 para dar a média que dará 384 e multiplicar novamente para dar a enorme.

Ssim, porque se uma pipa inicial é 8 faces, a dos 4 grupos juntos dará 32 faces que será multiplicado novamente por 4 para dar 128 que é igual a som dos grupos, que é multiplicado novamente para dar a pipa grande (512).

Ssim, uma pequena é 4 células, e multiplicado pelos 4 grupos que dará 16 células, e multiplicado por 4 de novo para formar a média que dará 64 células e multiplicar novamente por 4 para dar a grande que dará 256 células.

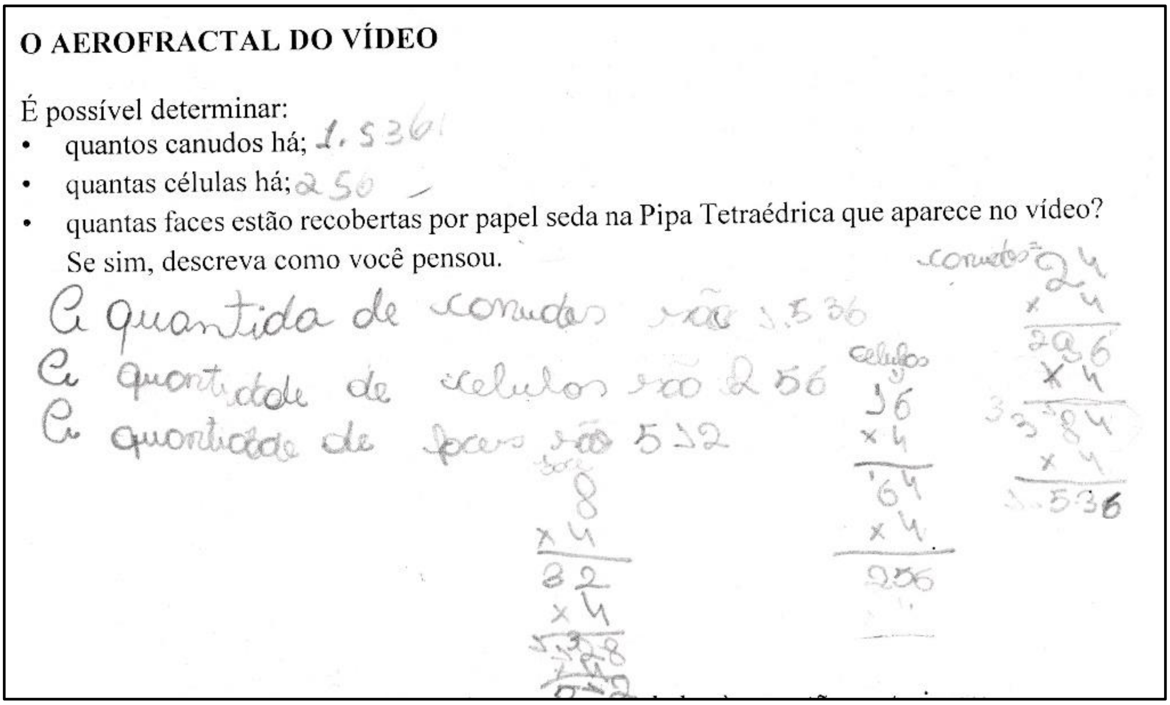


O AEROFRACTAL DO VÍDEO

É possível determinar:

- quantos canudos há; 1536 canudos
- quantas células há; 256 células
- quantas faces estão recobertas por papel seda na Pipa Tetraédrica que aparece no vídeo? Se sim, descreva como você pensou.

Sim, 512 nós pegamos primeiro o total de ~~3~~ das pipas dos quatro grupos, multiplicamos pelo total de papel de seda por 4 que deu 32, depois multiplicamos por 4 (total de grupos) que deu 128, logo em seguida multiplicamos o 128 por 4 que deu 512



O AEROFRACTAL DO VÍDEO

É possível determinar:

- quantos canudos há; 1.536
- quantas células há; 256
- quantas faces estão recobertas por papel seda na Pipa Tetraédrica que aparece no vídeo? Se sim, descreva como você pensou.

a quantida de canudos são 1.536

a quantidade de celulos são 256

a quantidade de faces são 512

Fonte: Dos autores

Os registros escritos dos alunos apontam indícios da forma (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, proposta por Kaput (1999), a qual abrange experiências matemáticas envolvendo contagem, medição e estimativa, pois segundo Blanton (2008), o pensamento funcional envolve procurar regularidades em como as grandezas variam em relação uma à outra, inclui fazer generalizações sobre o modo como os dados estão relacionados.

Nesse sentido, é possível, ainda, destacar a presença do “princípio da generalização”, indicado por Lesh, et al. (2000), visto que, os alunos demonstraram a capacidade de compartilhar soluções para situações semelhantes, no caso, determinar a quantidade de material necessário para confeccionar um Aerofractal com a mesma estrutura do exibido no vídeo, a partir da percepção da autossimilaridade presente na estrutura da pipa confeccionada nos grupos.

Ao finalizarem a solução das questões referentes à quantidade de material necessário para a confecção do Aerofractal exibido no vídeo, os alunos mencionaram o desejo de compartilhar suas soluções, demonstrando engajamento na atividade de Modelagem Matemática e indicando, mais uma vez, a presença do "princípio da autoavaliação", que permitiu aos alunos testarem e revisarem suas formas de pensar a solução do problema (LESH, et al., 2000). Esse momento permitiu, também, que os alunos identificassem os erros cometidos e a existência de mais de uma forma de pensar a solução do problema, como mostra o diálogo a seguir.

> *A6*: O pro, a gente fez a conta diferente... a gente fez 16 vezes 96.
> *P*: Ótimo! Vocês contaram quantas estruturas iguais a essa (mostrando na imagem projetada o destaque com a circunferência média) tinha no Aerofractal todo e multiplicaram por 96, que é a quantidade de canudinhos que cada uma dessas 16 estruturas tem. Vocês erraram? (se referindo a um dos grupos) O que aconteceu?
> *A1*: Nós fizemos 32 vezes 16.
> *P*: Vamos tentar entender no que o grupo se equivocou? Por que 32?
> *A1*: A gente confundiu com as faces que vai a seda.
> *P*: Ah tá, entendi.

No decorrer desse momento de socialização o aluno A25 questionou porque a professora estava utilizando um processo longo para os cálculos se havia a possibilidade de solucionar a problemática utilizando cálculos simplificados. O diálogo seguinte mostra essa discussão.

> *A6*: O pro, a gente fez 16 vezes 16 e deu o mesmo resultado.
> *P*: Isso mesmo. Vocês pensaram para essa estrutura (mostrando na imagem projetada o destaque com a circunferência média) sabendo que havia 16 iguais a ela para formar o Aerofractal. Ótimo! Quem acertou? (alunos de quatro grupos ergueram a mão)
> *A25*: Mas por que a senhora fez uma conta gigante, em vez de fazer essa?
> *P*: Porque eu fui da estrutura pequenininha para a grande (mostrando na imagem projetada) e vocês pensaram de outra maneira e chegaram ao mesmo resultado, não perderam tempo fazendo uma conta gigante (rsrs).

O questionamento feito por esse aluno e seu grupo revela características essenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico, considerando a vertente do pensamento relacional (CARPENTER et al., 2003), que é evidenciado quando os alunos compreendem que é possível realizar transformações em expressões ou ainda substituir expressões por outras que lhe são equivalentes (KAPUT, 2008).

Após esse momento de ricas discussões os alunos tinham o desafio de completar a tabela apresentada na Figura 36, contendo os itens nível, número de canudos, número de células, número de faces com papel seda. As questões resolvidas anteriormente permitiam completar parcialmente os dados da tabela, além de auxiliá-los na escrita de uma “regrinha” que permitisse determinar a quantidade de material necessário para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer.

O uso de tabelas para explorar a relação entre a variável dependente e a variável independente, descobrir, descrever, justificar e simbolizar relações matemáticas entre quantidades que variam é um dos encaminhamentos que favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico na vertente do pensamento funcional, segundo Blanton e Kaput (2005).

Como o conceito de ‘nível’, pertencente à Geometria dos Fractais, ainda não havia ocorrido durante as questões anteriores, foi preciso que a professora explicasse o seu significado no contexto da atividade. A professora recorreu à projeção da imagem apresentada na Figura 28, que continha a construção da pipa até o nível 2 para explorar o conceito de ‘nível’ com os alunos. O diálogo a seguir mostra essa exploração.

> *P:* Agora nós temos a seguinte atividade, preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores. Tem o nível, tem número de canudos, número de células, número de faces com papel seda. Todos esses itens, já tinha nas perguntas anteriores, eu só preciso explicar esse item aqui, o nível. O que é o nível zero, o nível 1, o nível 2, os três pontinhos significam que continua, igual nós fizemos naquela atividade da...
> *A21*: Da pontuação!
> *P*: Isso! E depois nós temos o “n” que vai significar o que mesmo?
> *A25*: Número qualquer.
> *P*: Número qualquer ou um nível qualquer. Bom, o que seria esse nível 0? Como a gente foi construindo a nossa pipa? (mostrando a imagem projetada até o nível 2). Primeiro a gente fez uma célula, não fez?
> *Todos*: Sim.
> *P*: Mas uma célula, um tetraedro só, ele representa uma pipa?
> *Todos*: Não.
> *P*: Ainda não... por isso que eu não coloco o número um aqui (apontando para a imagem de uma célula), porque ela ainda não possui a estrutura de uma pipa. Para chamar de pipa eu preciso unir quatro células, quatro tetraedros iguais a esse, só então eu posso dizer que a primeira pipa, a primeira estrutura corresponde ao nível 1. Mas nós podemos pensar em um número para colocar aqui na célula, um número que venha antes do 1, porque ela foi confeccionada antes, quatro delas (se referindo à célula) unidas que dão origem a estrutura de uma pipa. Que número vêm antes do 1?
> *Todos*: O zero.
> *P*: Exatamente. Então eu posso falar que o nível 0 corresponde a uma célula e nós precisamos unir quatro células para dar origem à pipa. O nível 2 é quando eu utilizo quatro estruturas iguais a essa do nível 1 e formo essa estrutura maior, lembram da imagem que eu mostrei que usava quatro das pipas que vocês fizeram?
> *Todos*: Sim.
> *P*: Então, nível 0 é um tetraedro, uma célula... nível 1 é a pipa que vocês confeccionaram e nível 2 é a união de quatro pipas. Tudo bem até aqui?
> *Todos*: Sim.
> *P*: Então, é essa informação a mais que está na tabela, que vocês terão que considerar. Então no nível 0, que é a célula, quantos canudinhos a gente usou?
> *Todos*: Seis.

P: Certo, então você vai colocar aqui (mostrando na tabela projetada) o número 6. Quantas células eu tenho nesse nível?
A6: Uma.
P: Uma... coloca o número 1 aqui (mostrando na tabela projetada). E quantas faces dessa célula recebia papel seda?
Todos: Duas.
P: Isso mesmo. Tudo bem? Conseguiram compreender?
Todos: Sim.
P: Ótimo, então vocês podem ir completando a tabelinha até o nível do Aerofractal que eu vou passando nos grupos tirando as dúvidas.

Os alunos completaram rapidamente os dados da tabela considerando as respostas dadas às questões anteriores e começaram a palpitar sobre qual seria o nível correspondente ao Aerofractal. O aluno A19 opinou *"eu acho que é nível 10"*; e o aluno A27 concordou *"é, é por aí"*; já o aluno A8 colocou sua opinião justificando, *"eu acho que é mais alto, porque olha o tamanho dessa pipa!"*; o último a palpitar foi o aluno A21, *"eu acho que é o nível 4"*.

Os grupos se agitaram esperando saber quem estava correto, e então, a professora se dirigiu ao quadro e começou a completar os dados da tabela que estava projetada, conforme mostra a Figura 39, sempre realizando indagações e explicações, contando, assim, mais uma vez com a presença do "princípio da autoavaliação", indicado por Lesh, et al. (2000).

Figura 39: Tabela com dados parciais

Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

Nível	Número de canudos	Número de células	Número de faces com papel seda
0	6	1	2
1	24	4	8
2	96	16	32
⋮	⋮	⋮	⋮
AEROFRACTAL	1536	256	512
n			

Fonte: Dos autores

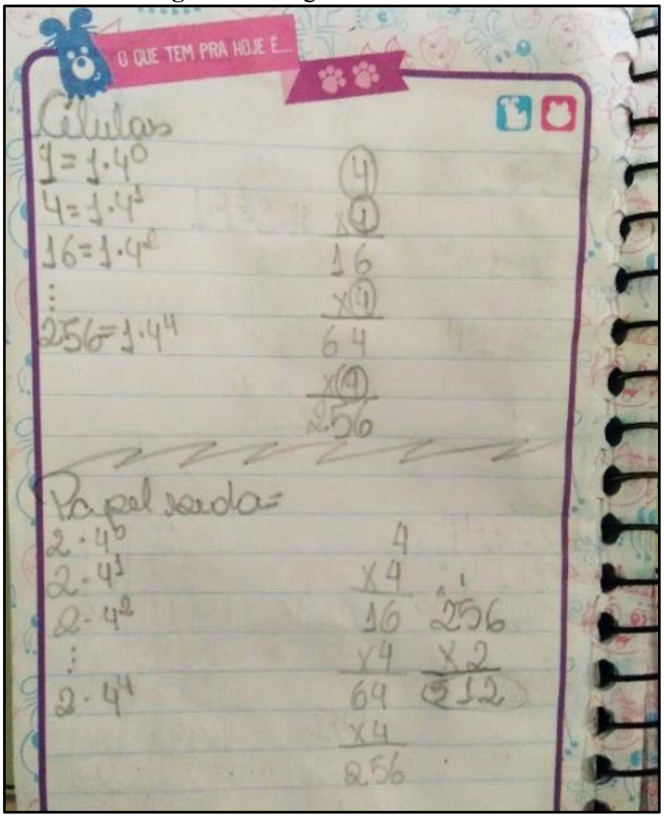
Além da presença do "princípio da autoavaliação" esse momento também propiciou o "princípio da construção do modelo" (LESH, et al., 2000), pois a professora argumentou que havia uma relação entre o nível do Aerofactal e os dados lançados nas demais colunas da tabela, explicando que ao determinar essa relação seria possível determinar a quantidade de material necessário para a confecção de qualquer Aerofractal que se queira, incentivando a descrição explícita de tal relação, conforme indica o diálogo a seguir.

> *P:* Falem uma coisa aqui pra mim... existe alguma relação entre o número de canudos e o nível da pipa? Se você sabe que usa 6 canudinhos em uma célula, dá para saber quantos canudinhos vai usar para fazer qualquer quantidade de células, sem considerar a quantidade de canudinhos utilizada no nível anterior? Eu sei que no nível 0 usa 6 canudinhos, no nível 1 usa 24, no nível 2 usa 96... tem alguma relação entre o nível do Aerofractal e a quantidade de canudinhos que se usa?
> *A21*: Ah tá...é que, conforme vai aumentando o nível, vai multiplicando de 4 em 4.
> *A6*: Ah, verdade! Eu multipliquei assim pro.
> *A17*: O A8 falou isso agora pra mim!
> *P*: Entendi... isso que vocês falaram está certinho, mas essa relação que vocês observaram é de um nível para o outro. Eu preciso saber quantos canudinhos foram utilizados na pipa anterior para eu conseguir determinar quantos serão necessários para a próxima, mas a minha pergunta foi a seguinte: e se eu não souber quantos canudinhos foi utilizado nesse nível aqui (nível 1 - 24 canudinhos - encobri com a mão). Como que eu sei que essa pipa aqui (nível 2) vai precisar de 96 canudinhos? Agora eu não sei quantos canudinhos foram usados para construir a pipa anterior... se eu perguntar para vocês quantos canudinhos precisa para construir a pipa no nível 10?
> *A21*: Faz tipo uma potenciação... vai ser seis elevado à quarta potência, uma coisa assim... aí 6 vezes 4 vai dar 24... 24 vezes 4 vai dar 96... 96 vezes 4 vai dar 384... e 384 vezes 4 vai dar 1536.

Esse diálogo revela dois tipos de pensamento funcional (BLANTON; KAPUT, 2011), desenvolvidos pelo aluno A21, o pensamento covariacional, que pode ser identificado quando o aluno fala “ah tá... é que, conforme vai aumentando o nível, vai multiplicando de 4 em 4”, e também indícios da relação de correspondência, ao citar a operação de potenciação, ainda que a explicação dada pelo aluno não estivesse representada na forma de potência.

Assim que o aluno A21 completou a exposição de seu pensamento sobre a operação de potenciação, ele se dirigiu até a professora e apresentou os cálculos que havia feito no decorrer das discussões. A Figura 40 apresenta o registro dos cálculos sinalizando, explicitamente, a presença da relação de correspondência (BLANTON; KAPUT, 2011), entre o nível do Aerofractal e o número de células e também entre o nível do Aerofractal e o número de faces com papel seda, por meio da operação de potenciação que o aluno tentou explicar durante o diálogo.

Figura 40: Registro do aluno A21



Fonte: Dos autores

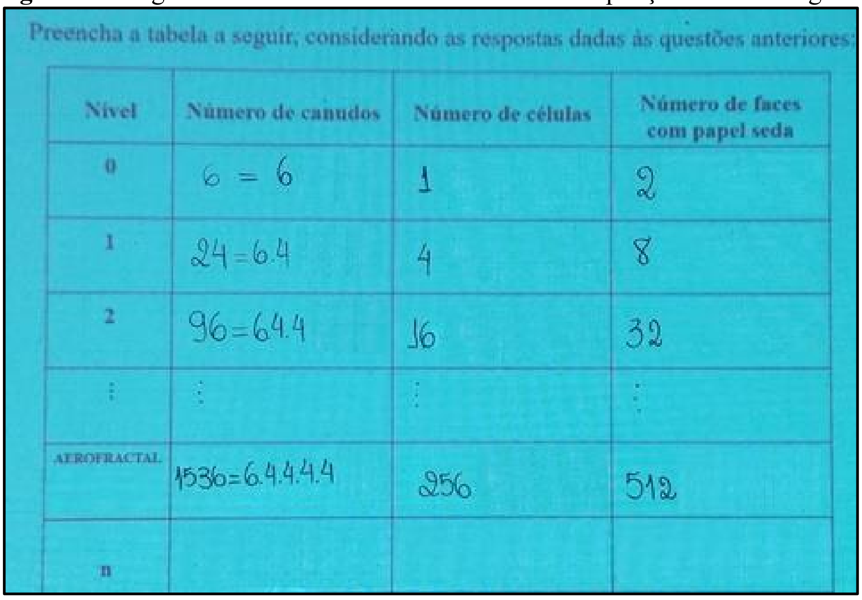
Analisando os registros do aluno A21 é possível verificar que o raciocínio empreendido por esse aluno apresenta indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico na forma (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, pois os cálculos realizados encaminham a relação de correspondência observada para a generalização da quantidade de material necessário para a confecção de um Aerofractal em nível qualquer, observando, inclusive, restrições dessa relação, ou seja, o expoente da potência está diretamente ligado ao nível do Aerofractal que se deseja confeccionar, que ficou evidente no destaque dado aos números ‘quatro’, que aparecem no registro do aluno.

A forma (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), proposta por Kaput (1999), também pode ser verificada nos registros do aluno A21, uma vez que o aluno utilizou as regras sintáticas da operação de potenciação para estabelecer relações, descritas por meio de símbolos e regras sintáticas que permitiram construir significados.

Podemos considerar, ainda, a presença da forma (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, nos registros desse aluno, pois segundo Blanton e Kaput (2005), o desenvolvimento do pensamento algébrico na vertente do pensamento funcional sugere que os alunos se envolvam em experiências matemáticas que possibilitem explorar a correspondência entre quantidades ou relações recursivas e desenvolver uma regra para descrever essa relação.

Assim que a professora analisou os registros escritos do aluno A21, pediu permissão para compartilhá-lo com a turma. A Figura 41 apresenta o número de canudos escrito, inicialmente, como uma repetição de fatores iguais, com o intuito de construir significados para as observações que encaminhariam a escrita da relação entre o nível do Aerofractal e o número de canudos na forma de potenciação, considerando os cálculos realizados pelo aluno A21 e também as discussões já ocorridas.

Figura 41: Registro do número de canudos como uma repetição de fatores iguais



Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

Nível	Número de canudos	Número de células	Número de faces com papel seda
0	6 = 6	1	2
1	24=6.4	4	8
2	96=6.4.4	16	32
⋮	⋮	⋮	⋮
AEROFRACTAL	1536=6.4.4.4.4	256	512
n			

Fonte: Dos autores

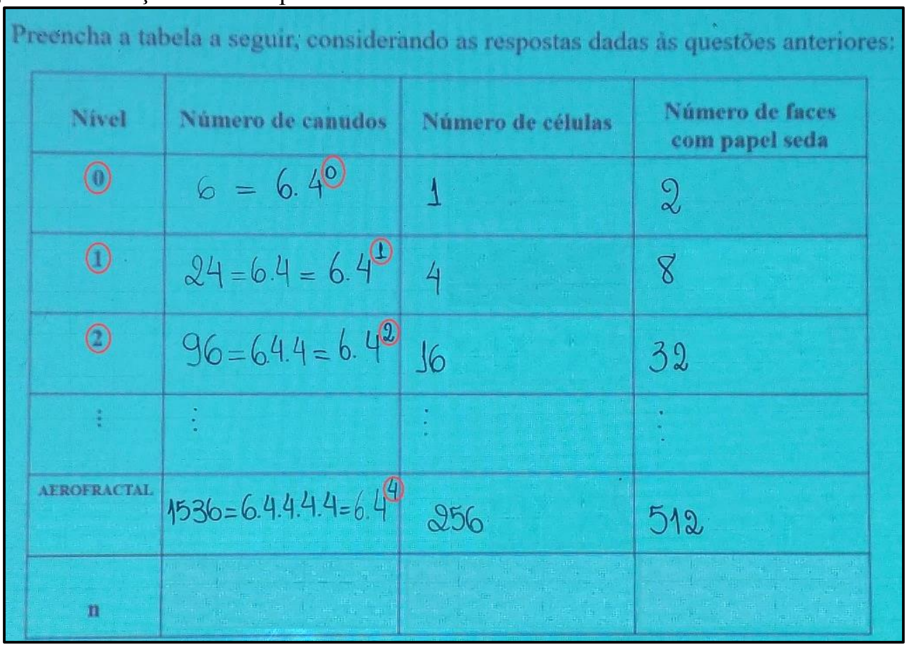
Esse momento permitiu revisar o conceito e algumas propriedades da potenciação com os alunos e demandou a capacidade de visualização da autossimilaridade presente na estrutura do Aerofractal qualquer que fosse o nível em questão, ou seja, foi necessário que os alunos conseguissem observar que o número de canudos utilizados para a confecção de uma célula do Aerofractal estava diretamente ligado à estrutura do Aerofractal como um todo.

Durante as discussões os alunos mencionaram que a quantidade de canudos utilizados em um nível específico seria sempre 4 vezes maior que a quantidade de canudos utilizados no nível anterior. No entanto, essa compreensão ainda estava ancorada em um pensamento covariacional (BLANTON; KAPUT, 2011), o objetivo era determinar uma relação de correspondência entre o nível do Aerofractal e o número de canudos e escrevê-la na forma de potenciação.

Com essa finalidade a professora solicitou que os alunos mencionassem o número de canudos para o nível 2 na forma de potenciação e também para o nível do Aerofractal. Optou por solicitar esses níveis por entender que o expoente 0 e o expoente 1 são motivos de algumas incompreensões, portanto, seria prudente explorar a relação de correspondência em níveis que favorecessem essa visualização.

Os alunos não tiveram dificuldade para cumprir a solicitação da professora e diante disso as discussões foram direcionadas para o nível 1 e nível 0, relembrando as propriedades correspondentes a esses expoentes. Assim que o número de canudos para o nível 0 foi escrito na forma de potenciação o aluno A25 se manifestou dizendo que era a hipótese do aluno A21 sobre o nível correspondente ao Aerofractal que estava correta. O aluno fez essa afirmação por ter observado a relação de correspondência entre o nível e o expoente, pois ao ser questionado o aluno argumentou, *"eu reparei que quando é nível zero, o expoente vai ser 0... quando é nível 1, o expoente vai ser 1... quando é nível 2, o expoente vai ser 2... então ali no Aerofractal, se o expoente é 4, o nível vai ser 4"*. Diante da justificativa dada pelo aluno A25 a professora circulou na tabela projetada os números correspondentes ao nível e ao expoente, reforçando para a turma a relação de correspondência observada pelo aluno. A Figura 42 ilustra essas observações.

Figura 42: Relação de correspondência entre o nível do Aerofractal e o número de canudos



Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

Nível	Número de canudos	Número de células	Número de faces com papel seda
0	$6 = 6.4^0$	1	2
1	$24 = 6.4 = 6.4^1$	4	8
2	$96 = 6.4.4 = 6.4^2$	16	32
⋮	⋮	⋮	⋮
AEROFRACTAL	$1536 = 6.4.4.4.4 = 6.4^4$	256	512
n			

Fonte: Dos autores

A observação da relação mencionada indica "a percepção de regularidades", elemento caracterizador do pensamento algébrico, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993). Além disso, retrata, também, o processo de generalização, que, segundo Lins e Gimenez (1997), ocorre quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares.

A relação de correspondência observada dá indícios da forma do pensamento algébrico (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações, pois os alunos se preparam para representar essa relação por meio de uma linguagem algébrica, que eles chamam de "regrinha". O diálogo a seguir apresenta como as discussões foram conduzidas.

> *P*: Isso... então, para qualquer nível de pipa que uma pessoa queira confeccionar, o que eu vou ter que falar pra ela? Para ela saber de quantos canudinhos vai precisar?
> *A6*: Multiplicar o 6 pelo número qualquer...
> *P*: Quase isso, esse número qualquer está onde?
> *A4*: No nível.
> *P*: Isso. E qual desses números aqui representa o nível? Quem vai mudando aí?
> *A6*: É a potência.
> *A25*: Ah, é o expoente!
> *P*: Isso mesmo, é o expoente. Então, como ficaria a regrinha... quantos canudos a pessoa vai usar para construir a pipa para um nível qualquer?
> *A1*: Seis vezes quatro elevado ao "n".
> *P*: Maravilhoso! Perfeito, A1! Então, quando eu quiser falar para uma pessoa, como que ela calcula quantos canudinhos ela vai precisar para fazer qualquer pipa é só ela pegar seis e fazer vezes quatro elevado ao nível da pipa que ela está construindo... por exemplo... ah, eu quero construir uma pipa de nível 8... quantos canudos eu vou usar?
> *A21:* Seis vezes quatro elevado a oito.
> *A6:* 4 repetido oito vezes.
> *P*: Exatamente... é a operação seis vezes quatro elevado a oitava potência que me permite determinar o número de canudinhos que eu vou usar para confeccionar uma pipa de nível 8. Lembrando que devemos calcular a potência primeiro e depois multiplicar por seis. Tudo bem até aqui então?
> *Todos*: Sim.

A partir dessa discussão os alunos conseguiram "documentar o modelo" (LESH, et al., 2000) em termos de uma linguagem algébrica. A turma foi desafiada a discutir em seus grupos e determinar a "regrinha", também, para o número de células e para o número de faces com papel seda, ação que direcionaria os alunos para a forma do pensamento algébrico(i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, já que foi realizada com a intenção de explorar a relação observada pelos alunos e generalizá-la.

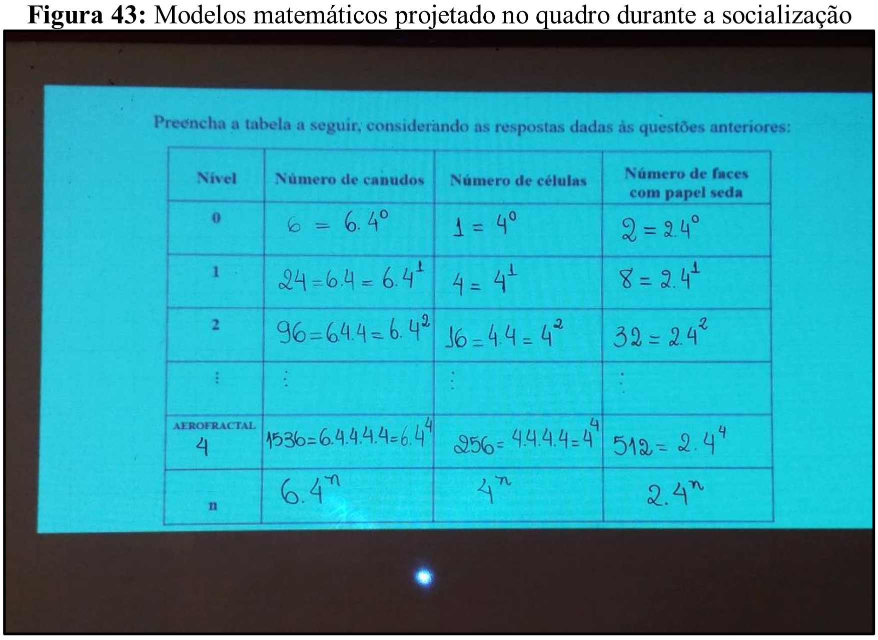
Observamos, durante o auxílio aos grupos, a presença da "construção do modelo", princípio indicado por Lesh, et al. (2000), pois as discussões no âmbito dos grupos sugeriam a necessidade de descrever matematicamente as observações e conclusões realizadas. Todos os grupos necessitaram de auxílio, uns com mais frequência, outros com menos. Mas a capacidade de visualização da relação de correspondência (BLANTON; KAUPT, 2011), de alguns alunos nos surpreenderam positivamente. O aluno A16 solicitou a presença da professora até seu grupo e colocou a seguinte observação *"profe, eu percebi que o número de faces com papel seda vai ser o dobro do número de células, né?!"*. Esse aluno foi capaz de observar a relação de correspondência antes que seu grupo escrevesse os dados na forma de potência para analisarem, sinalizando, assim, o "princípio da construção do modelo" (LESH, et al., 2000), que garante a explicação matemática da relação observada.

A observação desse aluno aponta indícios da forma (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, indicada por Kaput (1999), pois segundo Smith (2008) o início do processo para o desenvolvimento do pensamento funcional acontece quando o aluno se envolve em uma atividade, presta atenção às quantidades que variam e começa a focar na relação entre essas quantidades.

Assim que os grupos registraram seus modelos matemáticos na folha de anotações a turma realizou a socialização. A professora foi escrevendo os dados da tabela na forma de potenciação à medida em que os grupos iam comunicando seus registros, encaminhando as reflexões para o reconhecimento da relação entre a álgebra e a aritmética, realizando intervenções para que os alunos pudessem usar a compreensão da aritmética na compreensão da álgebra, pois para Carpenter et al. (2003), o desenvolvimento do pensamento algébrico considera necessário tratar as propriedades dos números e das operações, de modo que os alunos reconheçam as relações entre álgebra e aritmética.

Esse momento permitiu discutir a notação simbólica da "regrinha" para um nível qualquer do Aerofractal, sinalizando, assim, a presença do "princípio do protótipo eficaz" que oportuniza discussões para fins de aprendizagem (LESH, et al., 2000). A Figura 43 apresenta a tabela com os dados completos após a socialização, representando os modelos matemáticos definidos para o cálculo da quantidade de material necessário para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer.

Figura 43: Modelos matemáticos projetado no quadro durante a socialização



Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

Nível	Número de canudos	Número de células	Número de faces com papel seda
0	$6 = 6.4^0$	$1 = 4^0$	$2 = 2.4^0$
1	$24 = 6.4 = 6.4^1$	$4 = 4^1$	$8 = 2.4^1$
2	$96 = 6.4.4 = 6.4^2$	$16 = 4.4 = 4^2$	$32 = 2.4^2$
⋮	⋮	⋮	⋮
AEROFRACTAL 4	$1536 = 6.4.4.4.4 = 6.4^4$	$256 = 4.4.4.4 = 4^4$	$512 = 2.4^4$
n	6.4^n	4^n	2.4^n

Fonte: Dos autores

A partir dos modelos matemáticos definidos foi possível questionar os grupos sobre a quantidade de material necessário para a construção do Aerofractal em níveis diferentes do contexto da atividade, como propõe o "princípio da generalização" (LESH, et al., 2000). Ainda que a pergunta fosse direcionada para um grupo em específico, percebíamos os demais grupos se envolvendo nos cálculos também. O envolvimento e entusiasmo durante toda a atividade oportunizou a aprendizagem de diversos conceitos matemáticos a partir de um tema extramatemático, como propõe a prática da Modelagem Matemática em sala de aula (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Como a professora havia explicado no início da atividade sobre a existência de Fractais gerados a partir de *softwares*, exibimos a imagem apresentada na Figura 31, e fomos sinalizando as diferenças entre confeccionar o Aerofractal em programas de computador e com materiais manipuláveis. Sinalizamos, também, a presença da autossimilaridade no Aerofractal gerado a partir de um *software* fazendo uso de uma célula confeccionada pela professora com as mesmas dimensões da pipa no nível 1, conforme apresentado na Figura 31.

Essa exposição realizada pela professora indica a presença do "princípio do protótipo eficaz" (LESH, et al., 2000), uma vez que conceitos matemáticos diferentes dos abordados no contexto da atividade puderam ser discutidos, tais como, equivalência de áreas, ponto médio, quádruplo, proporção, entre outros.

> *P*: Se nós tivéssemos mais tempo, a professora ia ensinar vocês a fazer o Aerofractal no computador... é muito legal, porque você consegue fazer para qualquer nível que você quiser. Bem, mas como nós confeccionamos nossa pipa? (segurando uma pipa nas mãos). Nós fizemos uma célula primeiro, e fizemos mais três iguais e amarramos, não foi isso?
> *Todos*: Aham.
> *P*: Mas o computador não faz assim... como que o computador faz? Ele faz assim (mostrando a imagem apresentada na Figura 31). Ah, eu quero fazer uma igual a essa (apontando para a pipa que foi confeccionada pelos grupos) que vocês fizeram, mas no computador. Você vai fazer uma grande, do mesmo tamanho de quando você junta as quatro células, assim (mostrando a célula confeccionado pela professora). O nível 0 para o computador não é uma célula, igual para nós. É uma inteira, assim… já com a dimensão que você quer que ela fique depois de pronta. Aí o computador começa a dividir ela, e vai ficando nesse formato (segurando a pipa que foi confeccionada pelos grupos). E essa divisão segue um padrão também, a estrutura possuí autossimilaridade do mesmo jeito que vocês observaram na pipa de vocês... olhem essa imagem aqui, (na Figura 30, o nível 0) o computador encontra a metade, o ponto médio de cada lado do tetraedro inicial, une esses pontos e retira a parte central... que é essa parte vazada aqui, e continua o mesmo processo... ele encontra a metade, o ponto médio do lado de cada um dos quatro tetraedros que se formaram agora, une os pontos, retira a parte central e vai surgir 16 tetraedros e assim ele segue fazendo. Eu vou mostrar para vocês como que o computador faria a construção de um Aerofractal através de um *gif*, tá! (exibimos o *gif*).
> *A10*: Vai até o nível 4 aí.

P: Isso mesmo, que é a pipa que aparece no vídeo, o Aerofractal.

A forma (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos, indicada por Kaput (1999), para o desenvolvimento do pensamento algébrico, indica a modelagem como uma forma de descrever fenômenos extramatemáticos e matematizá-los por meio da linguagem. O desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática Aerofractal permitiu matematizar um fenômeno fora do âmbito da Matemática, realizando observações e experimentações que envolveram formular conjecturas, justificar, argumentar, generalizar e descrever um fenômeno a partir do uso da linguagem matemática, ações pertencentes às cinco formas de pensamento algébrico propostas por Kaput (1999), que podem ser trabalhadas durante os anos escolares viabilizando o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O desenvolvimento dessa atividade também oportunizou o trabalho com formas de representação convencionais, como sugere o NCTM (2000), permitindo que os alunos aperfeiçoassem suas representações, utilizando-as como ferramentas para a aprendizagem da Matemática. Embora esse processo seja individual, pode acontecer no contexto social, mediante a exploração de determinadas situações-problema, sugeridas pelo professor, e por meio do envolvimento na discussão e negociação em sala de aula (SMITH, 2008), como ocorrido nos diversos momentos de socialização.

A atividade de Modelagem Matemática Aerofractal, cujo *design* foi orientado pelos princípios das MEAs, requereu a produção de modelos matemáticos para a situação-problema sob investigação, que levou os alunos a manifestarem a compreensão das relações funcionais presente no fenômeno investigado. Segundo Ponte et al. (2009) as relações funcionais podem ser representadas de diferentes formas, por meio de imagens, gráficos, materiais manipulativos, símbolos matemáticos ou até a linguagem natural. Dessa forma, entendemos que os alunos tiveram a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico, pois durante a atividade foi possível constatar indícios de desenvolvimento das cinco formas do pensamento algébrico, indicadas por Kaput (1999), algumas com mais frequência que outras. Outrossim, todo o encaminhamento dado à atividade teve o intuito de capacitar os alunos para o alcance de níveis de formalização, bem como colaborar com a "transição da linguagem natural para sistemas de notação simbólicas" (BLANTON; KAPUT, 2011), que, geralmente, serão trabalhadas somente a partir do 7º ano do Ensino Fundamental.

5.3 ATIVIDADE RECICLAGEM

Esta foi a sexta e última atividade de Modelagem Matemática desenvolvida pelos alunos e corresponde ao terceiro momento de inserção de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, conforme sugerem Almeida e Dias (2004). O tema foi proposto pelos alunos e o desenvolvimento da atividade ocorreu na Associação dos Amigos Recicladores de Peabiru (ADARP), em contraturno, e também em sala de aula, em horário regular, em grupos com 5 ou 6 estudantes. Foram necessárias seis horas-aula para o desenvolvimento dessa atividade, que ocorreu nos dias 27 de novembro, 02, 03, 04, 06 e 09 de dezembro de 2019.

5.3.1 Descrição da Atividade

No dia 27 de novembro a professora fez uma conversa com a turma, relembrando os temas das atividades que já haviam sido desenvolvidas, convidando os alunos a indicarem temas de interesse para a atividade de Modelagem de terceiro momento, conforme orientações de Almeida e Dias (2004). De forma individual os alunos foram falando os temas e a professora foi registrando no quadro. Os temas mais citados foram “Internet”, “Poluição” e “Reciclagem”. Porém, tínhamos tempo de desenvolver apenas mais uma atividade, pois já estávamos no final do ano letivo, os alunos, então, fizeram uma votação e elegeram o tema “Reciclagem”, visto que no município várias pessoas trabalham na coleta de materiais recicláveis, inclusive familiares de alguns alunos.

Na sequência a professora relembrou a problemática que foi investigada de algumas das atividades desenvolvidas e questionou os alunos o que poderiam investigar sobre o tema escolhido. Alguns problemas propostos não demandavam investigação, como por exemplo, qual material é mais reciclado no Brasil? Quanto de lixo, em média, uma pessoa produz diariamente? Explicamos que realizar uma pesquisa na internet, obtendo assim, a resposta, não constituiria um problema. Depois de algumas sugestões, o problema a seguir foi definido para investigação “quantos por cento do material recolhido serve para ser reciclado?”. Essa questão estava relacionada à higienização do material reciclável, pois até o momento, acreditávamos que o material reciclável deveria, obrigatoriamente, estar higienizado para passar pelo processo de reciclagem. Os alunos tinham o interesse em saber a quantidade de material reciclável que chegava sujo à Associação e o que era feito, eram descartados? Tinham que ser higienizados? A professora ficou responsável por conseguir agendar uma visita à Associação dos Amigos Recicladores de Peabiru (ADARP) para que os dados pudessem ser coletados.

No dia 02 de dezembro a professora projetou no quadro *slides* contendo algumas informações sobre o tema escolhido, o que provocou discussões muito valiosas. Os alunos relataram que as Escolas Municipais participavam do projeto “Escola Eco-Cidadã”, desenvolvido pela Prefeitura em parceria com os diretores da rede municipal. O projeto funcionava da seguinte forma: o município distribuía aos alunos uma sacola de ráfia e uma vez por semana os alunos levavam os materiais recicláveis que haviam coletado em casa para a Escola. O material era armazenado em grandes *bags* e posteriormente transportado pela Prefeitura à Associação dos Amigos Recicladores de Peabiru. A Figura 44 apresenta um desses *bags*, repleto de papel e papelão.

Figura 44: *Bag* com papel e papelão

Fonte: Dos autores

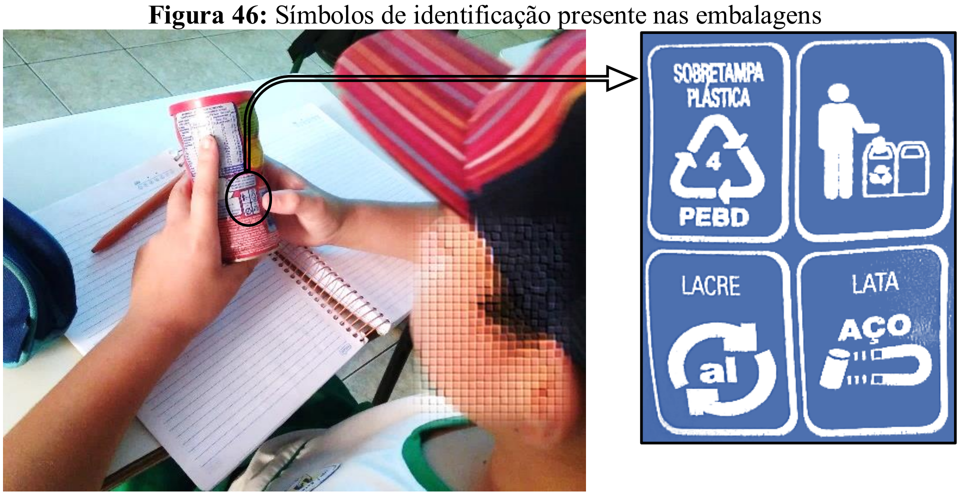
As discussões seguiram com o interesse da turma pelo tema, visto que já possuíam um certo conhecimento sobre o assunto. Além da habitual separação dos resíduos por cores das lixeiras, a professora projetou no quadro os símbolos de identificação dos materiais recicláveis que podem estar presentes nas embalagens, conforme mostra a Figura 45.

Figura 45: Símbolos de identificação dos materiais recicláveis

Fonte: www.revistavivasaude.uol.com.br

Os alunos argumentaram que nunca haviam se atentado para a existência dessa simbologia nas embalagens. A professora, então, distribuiu algumas embalagens que apresentavam tais símbolos. A Figura 46 mostra um dos alunos manuseando uma embalagem de achocolatado contendo quatro símbolos de identificação:

Figura 46: Símbolos de identificação presente nas embalagens



Fonte: Dos autores

As discussões se encaminharam com informações a respeito dos materiais que podem e que não podem ser reciclados, seja pela constituição do próprio material ou pela falta de empresas especializadas na reciclagem deles, como ocorre, por exemplo, com o isopor, que tem reciclagem apenas nos grandes centros urbanos. Além dessas informações, a professora também quis chamar a atenção da turma para os desafios que o mercado da reciclagem enfrenta no Brasil, considerando desde o baixíssimo percentual dos materiais potencialmente recicláveis coletados pelo setor público nas casas e ruas das cidades que são, de fato, recuperados, até o valor irrisório que é atribuído aos volumes de materiais recicláveis.

A exposição dessas informações promoveu ainda mais a participação da turma, narrando experiências pessoais condizentes com os dados apresentados. Aproveitamos esse momento para colocarmos a importância de se pensar em soluções e alternativas para esse cenário ambiental e, com esse intuito, exibimos uma reportagem do Programa "Como Será?[20]", apresentando a única empresa do mundo, até a data da gravação da reportagem, especializada na reciclagem de esponjas de lavar louça. O vídeo mostra o processo de reciclagem que as esponjas sofrem para se tornar matéria prima de diversos objetos como baldes, bacias, para-choque de carros, lixeiras, entre outros.

A aula daquele dia foi finalizada com discussões sobre a nossa responsabilidade enquanto consumidores. Um dos alunos lembrou dos três "Rs" da sustentabilidade: Reduzir, Reutilizar e Reciclar, ações fundamentais na rotina de um consumidor consciente. Finalizando a aula a professora comunicou a turma que iria, ainda pela manhã, conversar com o técnico responsável pela Secretaria do Meio Ambiente do Município e tentar agendar uma visita à Associação dos Amigos Recicladores de Peabiru (ADARP) para o dia 03, no período vespertino. A visita seria primordial para a coleta de dados, possibilitando, assim, solucionar a problemática levantada pelos alunos.

Após deixar o Colégio a professora dirigiu-se à Prefeitura e reuniu-se com o técnico do Meio Ambiente. A professora se apresentou, explicou o tema da atividade que seria desenvolvida e o problema que os alunos se propuseram a investigar, solicitando, assim, uma visita à Associação (ADARP). O técnico ficou encantado com a preocupação dos alunos, no entanto, explicou que se tratando de reciclagem, havia outros pontos mais relevantes no processo do que a higienização do material, argumentando que: "*a questão da limpeza não tem tanto impacto, na prática, o que acaba tendo mais impacto é o tipo de material que chega... porque tem muitos materiais que nós separamos com zelo e chega lá (na Associação) e não tem reciclagem... acaba virando rejeito, indo parar no Aterro Sanitário*".

Diante das explicações do técnico, não seria possível coletar dados para o problema inicialmente proposto pelos alunos. Dessa forma, a professora repassaria à turma essa informação, para que propusessem outro problema a ser investigado. No dia 03 de dezembro,

---

[20] Parceria do Jornalismo e da área de Responsabilidade Social da Globo, o programa aborda temas como cidadania, educação, ecologia e inovação, com linguagem lúdica e interativa. Mostra experiências transformadoras, exemplos de cidadania. Disponível através do *link* https://www.youtube.com/watch?v=MRrWn-r6yAs.

no período vespertino, como combinado, a professora se reuniu no Colégio com os alunos para visitarem à ADARP. Antes da saída, a professora expôs aos alunos as informações repassadas pelo técnico e solicitou que pensassem qual problemática poderia ser investigada, diante desse contexto.

Vários alunos manifestaram interesse em determinar qual seria a quantidade de materiais recicláveis que chegam à Associação, mas acabam virando rejeito. Dessa forma, a problemática estabelecida foi: "*sabendo que durante o processo de triagem parte dos materiais recicláveis coletados em nosso município viram rejeitos, estime essa quantidade*". Após a definição do novo problema, os alunos e a professora se dirigiram à Associação. Fomos recebidos por três colaboradores, um deles, em particular, nos acompanhou durante toda a visita, apresentando todos os espaços físicos, maquinários e a rotina de trabalho. Os alunos se mostraram bem interessados, fazendo diversos questionamentos, desde curiosidades, como por exemplo, saber como a prensa funciona, até questões referentes aos registros das quantidades de material coletado pela Associação, o aluno A25 perguntou: "*em média, assim... por semana, quantos quilos ou toneladas de material é coletado?*".

Infelizmente, assim como o técnico já havia relatado para a professora, a Associação ainda não tinha conhecimento da quantidade de material que é coletado, e do quanto é destinado ao rejeito. Segundo o técnico, a partir do ano de 2020 esse controle seria obrigatório, devendo ser informado ao Governo Federal. O colaborador que nos acompanhou deu diversos exemplos de materiais recicláveis, que são considerados rejeitos, como por exemplo, o copinho descartável, que, infelizmente, não tendo comprador para esse tipo de material nas proximidades do município, a destinação é o Aterro Sanitário.

Durante a visita tivemos a oportunidade de presenciar o caminhão da Coleta Seletiva descarregando alguns materiais recicláveis. O material é colocado em uma caçamba e posteriormente é encaminhado para a esteira, onde ocorre a triagem, realizada manualmente pelos colaboradores. Os materiais considerados rejeitos, vão permanecendo na esteira e na sequência são lançados em um *bag*. A cada 15 dias os *bags* com os rejeitos são transportados para o Aterro Sanitário.

Após a saída do caminhão da Coleta Seletiva, a professora retomou a problemática sugerida, questionando os alunos sobre uma maneira para coletar os dados. O aluno A1 sugeriu "*fazer o cálculo de quantos quilos mais ou menos vai ter ali (apontando para a caçamba com os materiais recicláveis coletados)*", e o aluno A22 complementou "*e daí a gente separa... os recicláveis dos rejeitos*". O encaminhamento sugerido pelos alunos apresentava dois empecilhos: primeiro, não era possível determinar a massa de todo o material que se encontrava na caçamba; segundo, teríamos que aguardar os colaboradores realizarem a triagem de todo o material que havia na caçamba para determinar a quantidade de rejeito resultante, isso levaria muito tempo.

Dessa forma, a professora direcionou as discussões para que os alunos pensassem sobre a possibilidade de se trabalhar com uma amostra do material, realizando, assim, uma estimativa da quantidade de rejeito. A estimativa é pertinente nessa situação uma vez que os materiais que chegam à Associação não são sempre os mesmos. O aluno A25 propôs a seguinte estratégia: "*eu tava pensando... tipo, daquele lá que é rejeitado (apontando para o bag com os rejeitos), que já tá cheio, se a gente pesasse? Porque daí a gente via o peso dele, e tipo, via o tanto de saco daqueles que enche por dia ou por semana... daí a gente baseava*". O colaborador informou que, geralmente, eles retiram três *bags* por dia de rejeitos.

A estratégia defendida pelo aluno A25 foi acolhida pelos demais, no entanto, a professora indagou: "*certo, mas quanto de material precisou ser colocado na esteira para encher um bag daquele ali? Essa é a informação que nós precisamos ter, porque daí nós podemos dizer que de tantos quilos de materiais recicláveis, tantos quilos viram rejeito*". Essa intervenção foi necessária para que os alunos compreendessem que o rejeito é resultante da triagem dos materiais que chegam até à Associação.

Após essa intervenção o colaborador foi explicar como funcionava a prensa, e apontou para uma balança, informando que ela suportava até 1000 quilos, mas que também pesava coisas bem leves, porque era muito sensível. Assim que o aluno A25 terminou de ouvir essa informação ele concluiu que "*tinha que ter alguma coisa, uma caixa... sei lá... pra colocar e poder pesar*". Nesse momento os alunos olharam ao redor procurando algum objeto que pudesse ser utilizado para a coleta mencionada pelo aluno A25. O aluno A4 apontou uma caixa de papelão que poderia ser utilizada para essa coleta. Com todos os alunos de acordo, pedimos que o colaborador acionasse a esteira e transferisse uma quantidade de materiais para a caixa de papelão. A Figura 47 apresenta os materiais que foram colocados na caixa, ainda na esteira.

Figura 47: Materiais recicláveis na esteira de triagem

Fonte: Dos autores

A professora incitou os alunos à externalizarem como os cálculos seriam realizados. Nesse momento vários alunos queriam colocar seu raciocínio, o aluno A25 disse: "*a gente tem que saber primeiro o peso*" e o aluno A21 completou: "*do material que ele pegou*, *daí depois quando for separado pega e põe aqui de novo (apontando para a caixa de papelão)*" (A25); "*e pesa*" (A6).

A professora elogiou o raciocínio empreendido e continuou questionando: "*e quando nós conhecermos esses valores, o que isso vai significar?*". O aluno A21 respondeu o questionamento exemplificando "*vamos dizer que aquela caixa lá tem a capacidade de 10 kg… e, por exemplo, 6 foi rejeitado… então, a cada 10 kg de material que vêm pra cá, 6 kg são rejeitados*". Os alunos concordaram com o exposto pelo aluno A21 e ficaram palpitando sobre a quantidade de rejeito que resultaria da amostra. A Figura 48 apresenta a massa dos materiais coletados e a massa do rejeito resultante.

Figura 48: Massa da caixa com os materiais recicláveis coletados para a amostra e massa da caixa com os materiais considerados rejeito

Fonte: Dos autores

Como os palpites dos alunos diziam respeito a gramas, ao constatarem a quantidade de 1,4 kg no visor da balança, ficaram espantados. Antes que a professora pudesse fazer alguma intervenção para que pensassem a respeito do que ainda não havia sido considerado nos dados que estavam coletando, o colaborador falou: "*é por causa do peso da caixa, né?!*". Os alunos sentiram um alívio ao constatar que a massa da caixa era de 1 kg. Com os dados devidamente registrados, por meio de fotos, a professora e os alunos se despediram agradecendo toda a atenção e conhecimento despendido durante a visita. Combinamos que as discussões sobre a problemática inicial seriam realizadas no dia seguinte.

No dia 04 de dezembro, a professora havia planejado iniciar a construção do modelo matemático com os grupos, porém foi surpreendida com o pedido do aluno A21 em poder apresentar para a turma as diversas embalagens que havia trazido de casa contendo os símbolos de identificação do tipo de material que eram produzidas. A professora ficou feliz com o pedido, pois o envolvimento e a autonomia empreendidos pelos alunos durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática são extremamente importantes.

Durante a apresentação do aluno A21, alguns dos alunos que estavam presentes na visita à Associação aproveitavam para repassar os conhecimentos que haviam adquirido, como por exemplo, saber identificar um plástico que tem reciclagem de outro que não tem, pois infelizmente, como a vista ocorreu em contraturno, apenas 11 alunos tiveram disponibilidade para comparecer. A apresentação foi excelente, contou com muita participação e um vocabulário muito acessível aos alunos que não puderam estar presentes no dia da visitação.

Dando sequência à aula, a professora projetou no quadro a problemática definida para investigação, para que todos os alunos tivessem conhecimento, visto que o problema precisou ser reformulado antes da visita à Associação devido aos novos dados obtidos. A professora explicou como ocorreu o processo de coleta de dados, utilizando fotos de vários momentos. Os alunos foram informados que a massa da caixa de papelão utilizada para a coleta da amostra dos materiais recicláveis era de um quilograma. A massa da caixa de papelão com os materiais coletados era de dois quilos e seiscentos gramas e a massa da caixa com os materiais considerados rejeitos, após a triagem, era de um quilo e quatrocentos gramas. Na ocasião, foi possível discutir com os alunos a diferença entre peso e massa. A professora utilizou a tirinha apresentada na Figura 49 para auxiliar as discussões.

Figura 49: Tirinha sobre a diferença entre peso e massa

Fonte: http://www.cepa.if.usp.br/e-fisica/mecanica/universitario/cap09/cap09_31.htm

Além da tirinha, a professora também solicitou que os alunos observassem a nomenclatura presente no livro didático de Matemática, sinalizando que se trata de medidas de massa. Os alunos já possuíam algum conhecimento sobre gravidade, dessa forma, a professora registrou no quadro o valor da aceleração da gravidade na Terra e também na Lua, e na sequência apresentou a fórmula para calcular a força peso:

$$P = m \cdot g$$

Por se tratar de uma turma de 6º ano, a professora apenas mencionou que a unidade de medida da força peso é o newton (N), mas a intenção era que os alunos compreendessem que o peso está diretamente ligado à aceleração da gravidade presente no local, diferentemente da massa. Os alunos que conheciam sua massa fizeram o cálculo do seu peso aqui na Terra e também na Lua. Foi um momento descontraído e de muito aprendizado. Após vários alunos mencionarem seus resultados, o aluno A19 concluiu: "*então quer dizer pro, que quanto maior a gravidade mais peso a gente tem!*". A aula naquele dia foi finalizada dessa forma.

No dia 06 de dezembro a professora distribuiu aos grupos uma folha contendo o problema e os dados que foram coletados na Associação. Solicitou que os grupos discutissem os possíveis encaminhamentos para estimar a quantidade de material reciclável que vira rejeito, durante a triagem. O grupo do aluno A21 foi o primeiro a se manifestar, eles disseram que a primeira coisa a ser feita era descobrir a quantidade de material reciclável que foi coletado na amostra, e que, para isso, o raciocínio era o seguinte: "*a caixa é um quilo e o peso da caixa com os materiais coletados é dois quilos e seiscentos gramas... se eu quero saber quanto pesa só os materiais, então eu tenho que pegar dois quilos e seiscentos e tirar o peso da caixa, que é um quilo... e dois mil e seiscentos menos mil, vai dar mil e seiscentos*" (A21).

Assim que o aluno A21 explicou o raciocínio, a professora questionou os outros grupos se eles estavam de acordo. Alguns alunos disseram não compreender por que havia a necessidade de realizar a subtração. Sendo assim, a professora perguntou quem conhecia a opção de *self-service,* praticada em alguns restaurantes, a fim de esclarecer o raciocínio empreendido pelo grupo do aluno A21. Na ocasião, a professora explicou *"então, nesse sistema de self-service eles descontam a massa do prato, pra que a hora que você colocar o seu prato com comida lá na balança, seja cobrado de você apenas a massa da comida que você pegou"*. Após esse exemplo, muitos alunos gesticularam concordando com o exposto.

Imediatamente o grupo do aluno A1 argumentou que, então, a massa do material considerado rejeito seria 400 gramas. A intenção inicial era de que as discussões fossem realizadas nos pequenos grupos, porém a argumentação do aluno A21 acabou conduzindo as discussões para o grande grupo. Dessa forma, a professora questionou a turma: *"e como que nós podemos escrever essa comparação entre a quantidade de rejeito que sai toda vez que eles fazem a triagem do material que chega na Associação? Como que a gente pode escrever matematicamente essa relação?"*. Mais uma vez o aluno A21 colocou seu raciocínio, dizendo que poderia escrever na forma de razão. A professora quis saber por que a relação poderia ser expressa na forma de razão, e então o aluno justificou: "*porque razão é quando a gente compara uma coisa com outra*". E teve sua justificativa complementada por um aluno de outro grupo: "*igual aquela dos carrinhos... os carros com as miniaturas (fazendo gestos com as mãos)*" (A6).

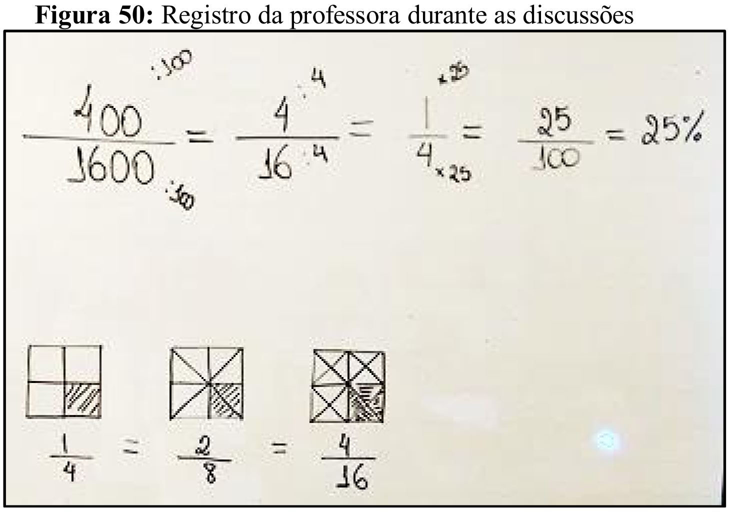
A professora parabenizou o raciocínio apresentado e aproveitou para explicar que o conceito de razão possuí diversas aplicações, a mencionada pelo aluno A6, sobre a relação entre os carros e suas miniaturas, dizia respeito à escala, e mencionou alguns outros exemplos para a turma. O aluno A25 argumentou que essa razão poderia ser escrita na forma de fração e relatou que seu grupo gostaria de estimar a quantidade de rejeito na forma de porcentagem, questionando a professora sobre essa possibilidade. Possivelmente, a porcentagem foi citada por estar presente no problema inicialmente proposto pela turma. A professora direcionou a pergunta aos grupos: "*e aí? O que vocês acham? É possível escrever essa razão na forma de porcentagem?*".

Nesse instante a professora dirigiu-se ao quadro e começou a registrar a razão entre a quantidade de rejeito e a quantidade de material reciclável coletado na forma de fração. Durante esse registro foi possível retomar a importância de as grandezas envolvidas estarem em uma mesma unidade de medida. Além disso, a definição de fração também foi discutida, uma vez que o aluno A19 questionou: "*ou os dois com vírgula, né professora?*". A professora explicou que em uma fração numerador e denominador devem ser números inteiros, sendo que o denominador não pode ser o zero.

Após a razão ser registrada na forma de fração cujo numerador era 400, representando a massa do rejeito, e o denominador 1600, representando a massa do material coletado, a professora voltou a questionar os grupos sobre a possibilidade de escrever a razão na forma de porcentagem. Vários alunos se manifestaram: "*divide o de cima pelo de baixo*" (A22); "*divide o 400 por 100*" (A23); "*professora, a gente pode simplificar essa fração... porque daí dá um quarto*" (A1).

A Figura 50 apresenta os registros das discussões realizadas com os grupos, envolvendo equivalência de frações, fração decimal, representação na forma figural e percentual.

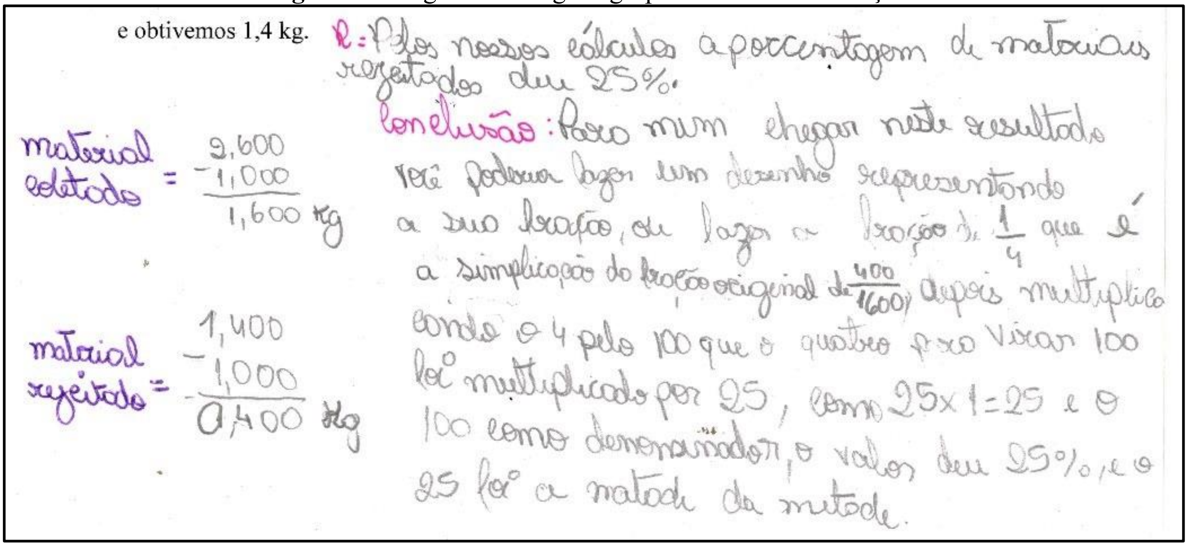
Figura 50: Registro da professora durante as discussões



Fonte: Dos autores

Após esse momento a professora solicitou que cada grupo fizesse o registro na folha condizente com as compreensões que obtiveram. A Figura 51 apresenta alguns desses registros.

Figura 51: Registros de alguns grupos na folha de anotações



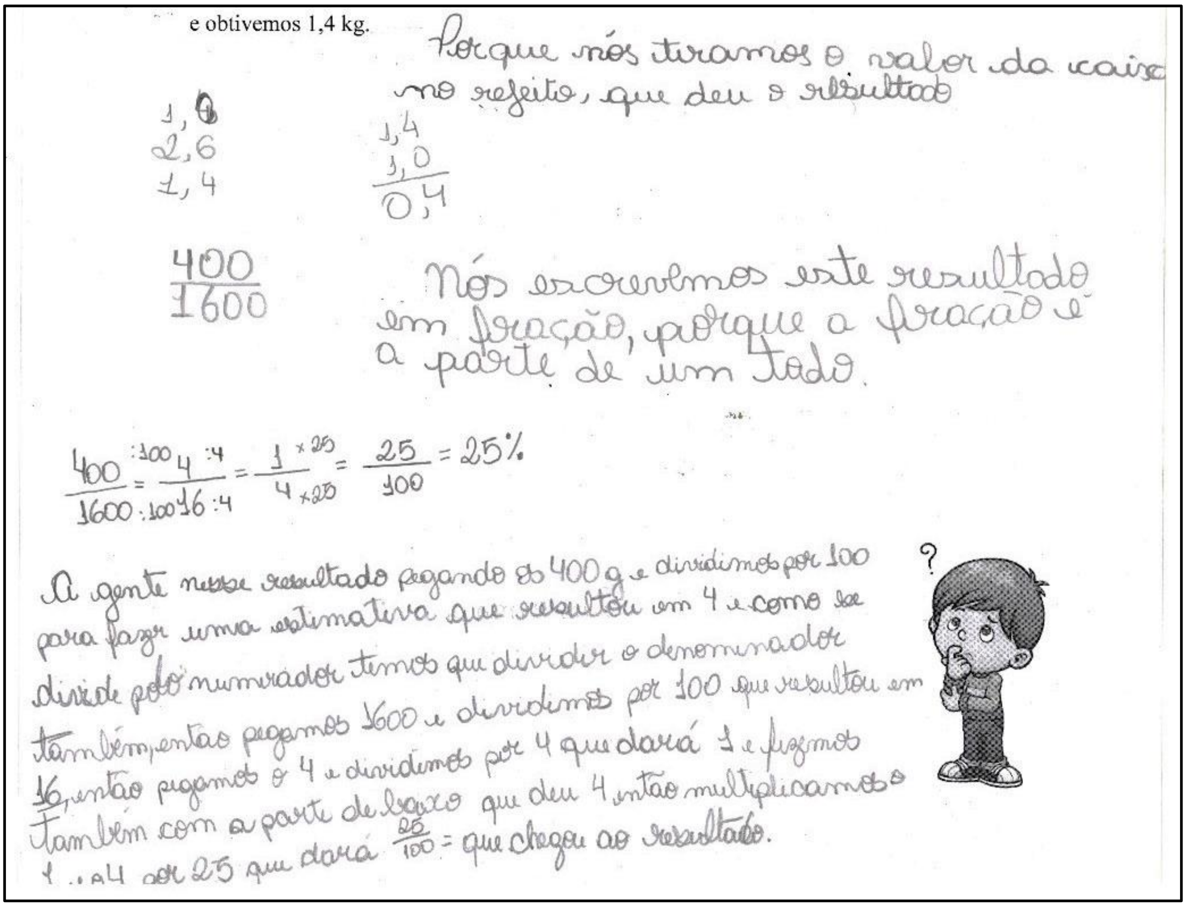
e obtivemos 1,4 kg.

R: Pelos nossos cálculos a porcentagem de materiais rejeitados deu 25%.

material coletado = 2,600 − 1,000 = 1,600 kg

material rejeitado = 1,400 − 1,000 = 0,400 kg

Conclusão: Para mim chegar neste resultado você poderia fazer um desenho representando a sua fração, ou fazer a fração de $\frac{1}{4}$ que é a simplificação da fração original de $\frac{400}{1600}$, depois multiplicando o 4 pelo 100 que o quatro para virar 100 foi multiplicado por 25, como 25x1=25 e o 100 como denominador, o valor deu 25%, e o 25 foi a metade da metade.



e obtivemos 1,4 kg.

Porque nós tiramos o valor da caixa no rejeito, que deu o resultado

1,0
2,6
1,4

1,4 − 1,0 = 0,4

$\frac{400}{1600}$

Nós escrevemos este resultado em fração, porque a fração é a parte de um todo.

$\frac{400}{1600}\,\frac{:100}{:100} = \frac{4}{16}\,\frac{:4}{:4} = \frac{1}{4}\,\frac{\times 25}{\times 25} = \frac{25}{100} = 25\%$

A gente nesse resultado pegando os 400 g e dividimos por 100 para fazer uma estimativa que resultou em 4 e como se divide pelo numerador temos que dividir o denominador também, então pegamos 1600 e dividimos por 100 que resultou em 16, então pegamos o 4 e dividimos por 4 que dará 1 e fizemos também com a parte de baixo que deu 4, então multiplicamos o 1 e 4 por 25 que dará $\frac{25}{100}$ = que chegou ao resultado.

Fonte: Dos autores

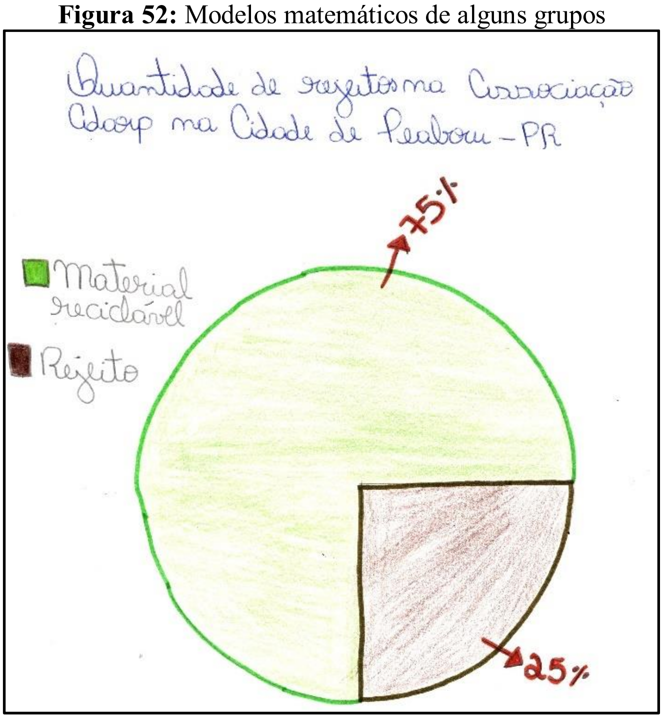
Como o registro feito pelos alunos foi descritivo, a professora questionou a turma como eles apresentariam o resultado da investigação que realizaram caso fossem questionados por alguém, e provocou: "*vocês pediriam para a pessoa ler esse 'texto' que vocês escreveram?*". A maioria dos alunos disseram que não, mas, no entanto, não sabiam outra forma de representar. Então, a professora fez referência aos resultados de pesquisas apresentados, por exemplo, nos telejornais. O aluno A27 se manifestou dizendo: "*agora eu lembrei! É um negócio que tem* *umas linhas assim ô (fazendo o gesto com a mão)*". Um dos integrantes do grupo desse mesmo aluno disse que se tratava dos gráficos.

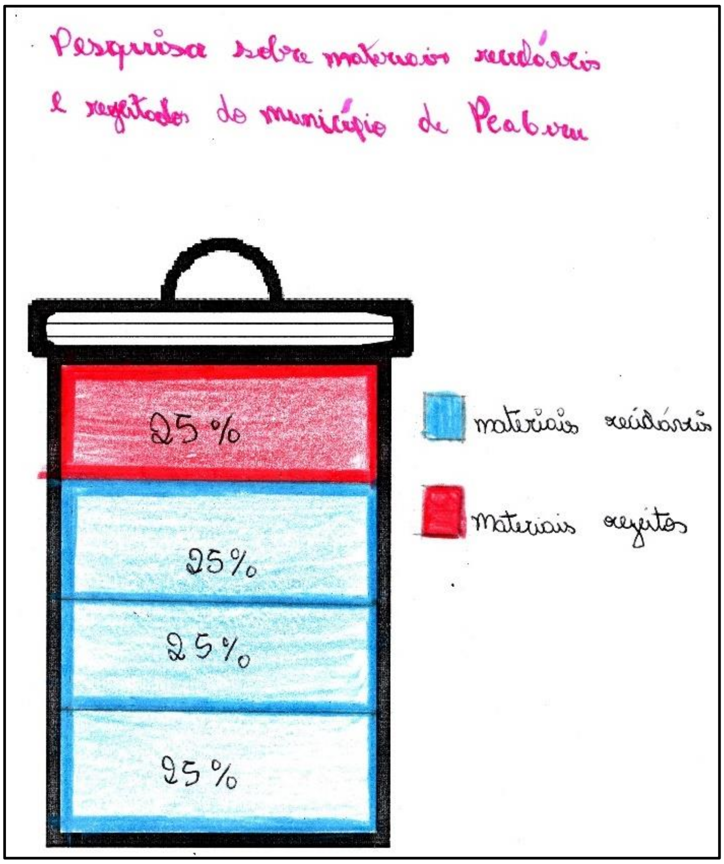
Dessa forma, a professora teve a oportunidade de discutir sobre o uso de gráficos para a apresentação de resultados de pesquisas. Contou, também, com o capítulo de Tratamento da Informação do livro didático de Matemática da turma para expor alguns tipos de gráficos, a saber, gráficos de barras, de linhas, de setores e pictóricos, e seus principais elementos. A aula daquele dia terminou com o acordo de que os grupos pensariam em como representar o resultado da problemática investigada por meio de um gráfico.

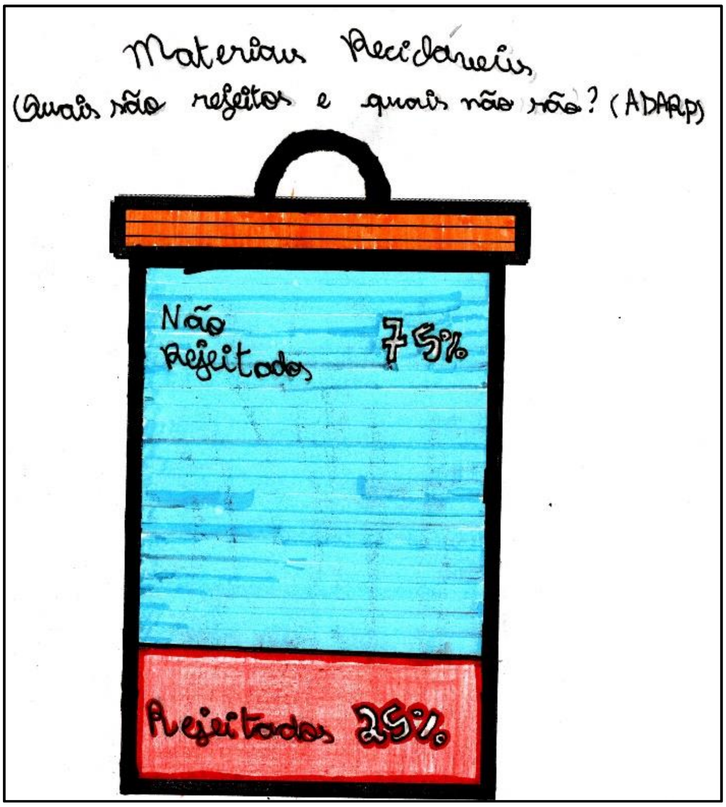
No dia 09 de dezembro a professora iniciou a aula questionando os alunos sobre a representação gráfica do resultado da problemática. O grupo do aluno A25 disse que eles pensaram em fazer um gráfico de setores, onde os 25% de rejeitos representariam "*a metade da metade*" (A25). Outro grupo manifestou a intenção de fazer um gráfico pictórico, mas ainda não haviam entrado em acordo de como fazê-lo. Prevendo essa intenção, a professora levou impressa a figura de uma lixeira e sugeriu sua utilização ao grupo que manifestou interesse. Os grupos receberam folhas em branco para a elaboração de seus gráficos, bem como, réguas, compassos e lápis de cor.

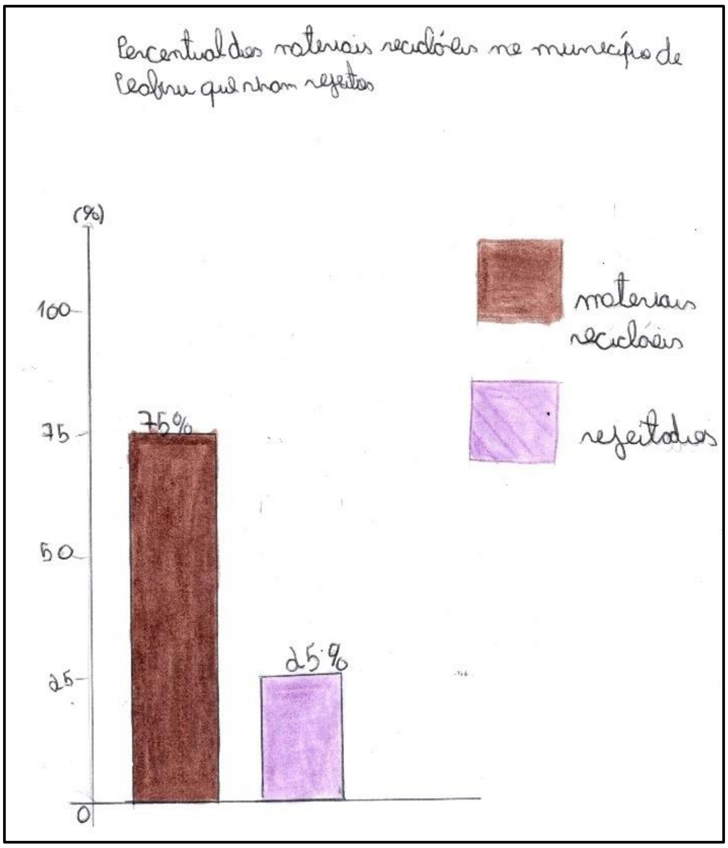
Os grupos manifestaram interesse em construir mais que um tipo de gráfico, dessa forma, cada grupo elaborou um gráfico de barras, um de setores e um pictórico, contando com a orientação da professora. A Figura 52 apresenta os modelos matemáticos representados em forma de gráfico elaborados por alguns dos grupos.

Figura 52: Modelos matemáticos de alguns grupos




Pesquisa sobre materiais recicláveis
e rejeitados do município de Peabiru
25%
25%
25%
25%
materiais recicláveis
Materiais rejeitos


Materiais Recicláveis
(Quais são rejeitos e quais não são? (ADARP)
Não Rejeitados 75%
Rejeitados 25%

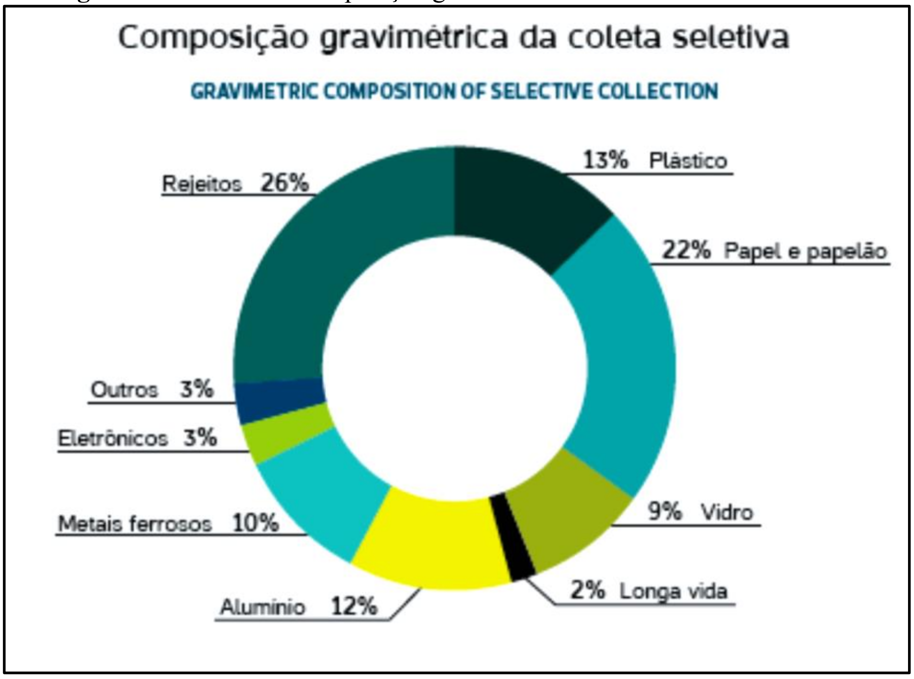


Fonte: Dos autores

Após a construção do modelo matemático, a professora fez um momento de socialização, a fim de fazer a formalização do principal conceito matemático envolvido na atividade, a porcentagem. Para isso, a professora questionou os grupos como eles interpretavam o percentual obtido, pois era fundamental que os alunos conseguissem compreender que uma das possíveis interpretações poderia ser, a cada 100 kg de materiais recicláveis que chegam à Associação, 25 kg estão indo parar no Aterro Sanitário, ou seja, 25% dos materiais recicláveis coletados, no município, viram rejeitos, durante o processo de triagem.

Além do cuidado com essa interpretação, a professora também apresentou à turma o gráfico da composição gravimétrica da coleta seletiva no Brasil, no ano de 2019. A Figura 53 apresenta o gráfico utilizado.

Figura 53: Gráfico da composição gravimétrica da coleta seletiva no Brasil



Fonte: CEMPRE, 2019

Esse gráfico serviu como uma validação do resultado obtido na investigação realizada, pois o percentual de materiais recicláveis que são considerados rejeitos, no Brasil, é muito próximo do percentual obtido na estimativa realizada na Associação. Para além de todos os conceitos matemáticos empreendidos, a temática da atividade revelou a grande responsabilidade ambiental que nos é atribuída todos os dias.

5.3.2 Análise da Atividade

A atividade de Modelagem Matemática intitulada “Reciclagem” foi desenvolvida segundo a perspectiva *Model-Eliciting Activities* (MEAs), abrangendo os seis princípios elencados por Lesh, et al. (2000) que orientam a produção, interpretação e análise de modelos matemáticos. O tema foi proposto pelos alunos, visto que corresponde ao terceiro momento de familiarização com atividades de Modelagem Matemática.

Logo no início da atividade, particularmente na escolha e compreensão do tema, bem como definição do problema para investigação, o “princípio da realidade”, indicado por Lesh, et al. (2000), se mostrou presente. Esse princípio garante que a atividade seja colocada em um contexto realista e possa ser interpretada pelos alunos a partir de seus diferentes níveis de habilidade matemática e conhecimentos gerais.

Durante a escolha do tema, por exemplo, os alunos levaram em consideração a realidade de muitos munícipes, inclusive de alguns de seus familiares que trabalham com a coleta de materiais recicláveis. Já na definição da situação-problema, os alunos contaram com seus conhecimentos prévios em relação à higienização dos materiais a serem reciclados. O diálogo a seguir indica as argumentações dos alunos nesse sentido.

> *P:* Por que vocês quiseram estudar sobre reciclagem?
> *A22*: Porque é interessante.
> *A8*: Porque é do nosso dia a dia.
> *A16*: Porque é sobre ajudar os outros.
> *A27*: É sobre ajudar o mundo.
> *P*: É sobre ajudar o mundo... e vocês vão ver o quanto o mundo está precisando! Tem aqui no nosso município?
> *Todos*: Têm!
> *A19*: Professora, e principalmente tem agora, aquele negócio lá, que você tem que levar o lixo lá na escola lá, que tem uma sacola própria…
> *A4*: Eles colocavam tudo em um pacotão (se referindo ao bag, fazendo gestos com as mãos).

O princípio da realidade também pode ser observado no momento em que os alunos discutem a respeito da separação dos resíduos, que é ilustrada na Figura 54, momento no qual eles argumentaram saber realizar a separação indicada na imagem, com exceção dos resíduos pertencentes à última lixeira, os não recicláveis.

Figura 54: Separação dos resíduos

Fonte: Adaptado de https://www.ferrovelhocoradin.com.br/cores-e-simbolos-da-reciclagem/

A separação dos resíduos levou os alunos a discutirem sobre a presença dos símbolos de identificação dos materiais recicláveis nas embalagens que foram disponibilizadas a eles. A Figura 55 apresenta uma das embalagens destacando a presença de cinco símbolos de identificação dos materiais recicláveis empregados em sua confecção.

Figura 55: Embalagem disponibilizada aos alunos

Fonte: Dos autores

A Figura 56 apresenta uma imagem utilizada pela professora para auxiliar os alunos a diferenciarem os materiais recicláveis dos não recicláveis, considerando o tipo de material que os constituem. Na Figura há informações em relação à separação dos resíduos, bem como de cuidados que devemos ter. É possível observar que a higienização dos materiais, considerada pelos alunos no problema proposto inicialmente, está presente nas recomendações apresentadas.

Figura 56: Separação dos resíduos por tipo de material

Fonte: Adaptado de https://pt.slideshare.net/alaazzoni/curso-aracaju-completa-1-13529669

Essa figura fomentou outras reflexões, que levaram em consideração conhecimentos dos alunos em relação à situação-problema, fazendo inclusive, conexões com outras disciplinas, quando citaram, por exemplo, o processo da logística reversa de alguns materiais, conteúdo estudado na disciplina de Ciências, e levando-os a refletir sobre como realizavam a separação domiciliar dos resíduos que podem ser reciclados. Os argumentos eram de que *"a gente separa, mas depois não sabe o que fazer com esse lixo"; "fica lá profe e ninguém passa pegar"; "a gente separa, mas daí vem o caminhão de lixo e leva tudo embora"; "a minha mãe separa e um homem com uma carrocinha passa lá pegar toda semana"*. De fato, os argumentos dos alunos tinham fundamento, pois o calendário de Coleta Seletiva do município ainda estava sendo elaborado, o caminhão não percorria todas as localidades da cidade, bem como, a maioria dos alunos desconheciam a existência da Associação dos Amigos Recicladores de Peabiru (ADARP). Os poucos alunos que faziam a separação recorriam aos coletores informais para dar destinação a seus resíduos, "um homem com uma carrocinha", como mencionado por um dos alunos.

O princípio da realidade, portanto, levou os alunos a usarem seus conhecimentos para refletir sobre como o tema escolhido para investigação impacta em suas vidas. Isso também se mostra, quando discutiram informações e índices sobre os desafios do mercado da reciclagem no Brasil, abordando alguns dos fatores que impedem o crescimento do setor no país, como a falta de viabilidade econômica, de estrutura, de pessoal qualificado e de informação. O diálogo a seguir mostra as discussões empreendidas.

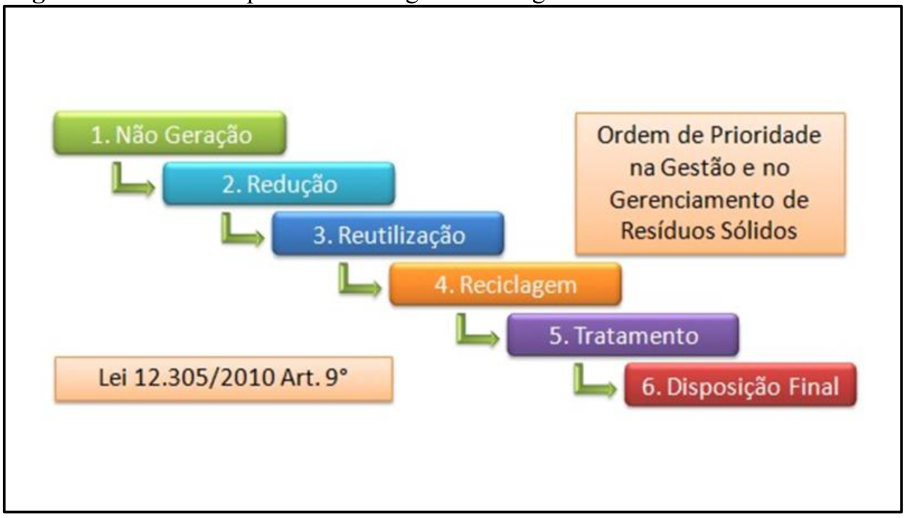
> *P:* A taxa de reciclagem hoje no Brasil é baixíssima. Em 2017, a gente tinha um índice que indicava que apenas 5,4% dos materiais potencialmente recicláveis coletados pelo setor público nas casas e ruas das cidades eram, de fato, recuperados. O que significa 5,4%?
> *A8*: Quase a metade.
> *A1*: Quase nada.
> *A19*: Quase nada…
> *P*: Vocês já estudaram porcentagem, né?
> *Todos*: Sim.
> *P*: Porcentagem se refere à parte de um total de 100 partes…
> *A23*: Por cento.
> *P*: Isso, também pode ser representada pelo símbolo do por cento (%). No nosso caso, significa que de cada 100 coisas que dá para reciclar...
> *A25:* 5 e meia é reciclada.
> *P:* Legal A25. Podemos analisar assim. Isso é bastante?
> *Todos*: Não!
> *P*: Tem 100 garrafas PET, aqui…
> *A22*: 95 não vai ser reciclada.
> *P*: Isso! Apenas 5 garrafas e metade da sexta garrafa serão realmente recicladas, aqui no Brasil.

Ao mesmo tempo em que essas discussões possibilitavam aos alunos conhecer informações como "um caminhão cheio de isopor vale R$ 200,00 e um quilo daquelas embalagens de salgadinho para a reciclagem custa R$ 0,25 – para chegar a um quilo são necessárias mil unidades", elas permitiram revisar alguns conteúdos matemáticos contribuindo com a construção de significados, como o conceito de porcentagem, presente no diálogo, bem como o conceito de valor unitário, presente na informação apresentada aos alunos.

Os alunos tiveram a oportunidade de pensar sobre possíveis soluções e alternativas para esse cenário ambiental, a partir da fala do Presidente do Instituto Lixo Zero Brasil, Rodrigo Sabatini, "o aumento da reciclagem depende de movimentos de baixo para cima, é a conscientização das pessoas que leva à mudança de estrutura, porque nem governo nem indústria querem educar. O negócio deles é vender, não pegar de volta, por causa do custo". Essa fala trouxe para discussão a importância da logística reversa, citada anteriormente por um dos alunos, que pôde ser verificada na reportagem exibida pela professora, que mostrava uma empresa especializada na reciclagem de esponjas de lavar louça, abordando todo o ciclo da logística reversa aplicada a esse produto, enfatizando o engajamento de todos para a promoção do uso consciente dos recursos.

Essa discussão, levou o aluno A25, após a exibição do vídeo, a argumentar que *"a gente tem que aplicar os 3Rs"*, mencionando o que prevê a Lei 12.305/2010, denominada por 'Ordem de Prioridades na Gestão e no Gerenciamento de Resíduos Sólidos', apresentada na Figura 57.

Figura 57: Ordem de prioridades na gestão e no gerenciamento de resíduos sólidos



Fonte: http://www.singep.org.br/7singep/resultado/275.pdf

Essas discussões, orientadas pelo princípio da realidade, auxiliaram na definição do problema a ser investigado, escrito primeiramente por meio da questão: "quantos por cento dos resíduos recicláveis coletados em nosso município são descartados durante a triagem por não estarem higienizados?". A coleta de dados seria realizada na ADARP, mediante o agendamento de uma visita que a professora formalizaria com o técnico da Secretaria do Meio Ambiente.

A conversa com o técnico revelou que o problema proposto inicialmente pelos alunos teria que ser redefinido. Diante dessa informação os alunos reelaboraram a problemática. A professora auxiliou na estruturação, "sabendo que durante o processo de triagem parte dos materiais recicláveis coletados em nosso município viram rejeitos, estime essa quantidade". A visita à Associação possibilitaria coletar dados que permitiriam responder essa indagação.

Mesmo com a informação repassada pela professora, os alunos questionaram o colaborador que nos acompanhou durante a visita quanto a higienização dos materiais, *"e não precisa estar limpo?"* (A6); *"não, não precisa!"* (Colaborador). Durante toda a visita os alunos se mostraram interessados nas explicações do colaborador. Após algumas explicações os alunos já conseguiam classificar alguns materiais como rejeito, observando o material que o constituía e realizando testes, assim como o colaborador demonstrava.

Esse momento favoreceu a busca por informações que se encaminhavam para estabelecer a estimativa da quantidade de materiais recicláveis que viram rejeitos durante o processo de triagem, sinalizando a necessidade da "construção do modelo", princípio indicado por Lesh, et al. (2000), que requer uma explicação matemática da situação-problema, a ponto de fornecer uma solução. O diálogo a seguir apresenta os questionamentos dos alunos direcionados ao colaborador com esse intuito.

> *A25*: Demora quanto tempo pra encher um saco desse? (se referindo ao bag contendo rejeitos)
> *Colaborador*: do lixo assim?
> *A25*: É.
> *Colaborador*: Ah, a gente coloca uns dois ou três por dia aqui!
> *A1*: Dois, por dia?! Minha nossa! Ainda vai tudo isso embora?
> *Colaborador*: Vai tudo isso embora… geralmente é uns três desse aqui por dia que a gente tira.
> *A4*: Nossa! é muita coisa!
> *A25*: Em média, assim, por semana, quantos quilos ou toneladas de material é coletado?
> *Colaborador*: Ah, isso aí eu não sei te responder... eu não faço ideia (risos).
> *A25:* Ah, tá... é que eu achei assim, se a gente soubesse quantos litros esse saco (se referindo a um bag) cabe, talvez a gente conseguisse fazer... porque que nem você falou que enche bastante desse por semana, daí de acordo com o litro, a gente podia fazer uma estimativa.

Os questionamentos do aluno A25 revelam "as tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema", que segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), indicam elementos caracterizadores do pensamento algébrico. Além disso, esses questionamentos, também, sinalizam que o aluno estava analisando as possíveis relações numéricas existentes na situação, elaborando hipóteses sobre as relações e argumentando em favor dessas hipóteses, ações que sugerem, segundo Carpenter et al. (2003), o desenvolvimento do pensamento algébrico.

As considerações presentes nesse diálogo podem ser associadas à forma de pensamento algébrico (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, pois as falas dos alunos sugerem que conhecendo a quantidade de material coletado semanalmente seria possível realizar o encaminhamento para a generalização da situação. Essas mesmas considerações, também, podem ser associadas à forma (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, indicada por Kaput (1999), a qual abrange experiências matemáticas envolvendo contagem, medição e estimativa, pois caso o colaborador possuísse as informações das quais foi questionado, seria possível documentar a solução da problemática, deixando explícitas as ideias envolvidas sobre como os alunos estavam pensando para estimar a quantidade de material que vira rejeito ao passar pelo processo de triagem.

No entanto, como essa informação não era conhecida, os alunos continuaram pensando em estratégias que permitissem realizar a estimativa a que se propuseram. O diálogo seguinte sinaliza mais uma vez a presença do princípio da "construção do modelo" a partir de questionamentos e intervenções realizados pela professora.

P: Como vocês pensam que a gente pode fazer? Uma ideia...
A25: Quanto desse material é reciclado?
P: Quanto desse material é rejeitado! Olha só, aqui (apontando para a caçamba onde os materiais coletados eram depositados) são os materiais que foram coletados. Supostamente as pessoas que separaram esses materiais, acham que tudo que está aqui é reciclável… mas vocês acabaram de ver vários exemplos, que o colaborador foi explicando de muitos materiais que não são recicláveis, né?
Todos: Sim.
P: Então, eu pergunto a vocês... quanto desse material que está aqui (apontando para a caçamba onde os materiais coletados eram depositados), que não é reciclável?
A6: Tem que separar as coisas que são das que não são…
P: Certo… e como nós vamos fazer isso?
A1: Igual eles fazem... coloca lá na esteira e vai separando.
P: Mas como que eu faço pra saber quanto de material tem aqui? (apontando para a caçamba onde os materiais coletados eram depositados). Porque a quantidade de rejeitos vocês já sabem que cada bag cheio pesa em torno de 40 kg, igual o colaborador falou.
A25: Que tanto é colocado na esteira? Tem alguma quantidade?
Colaborador: Não…é até ela chegar no final.
P: E então? Pensem aí…
A21: Em porcentagem?
P: Quais dados nós podemos utilizar para expressar essa estimativa em porcentagem?
A6: Aí meu Deus!
Colaborador: (risos). Eu só quero mostrar pra eles como que funciona a prensa.
P: Beleza! Enquanto isso, vão pensando!
A22: Professora, é tipo... os não recicláveis e os recicláveis?
P: Isso mesmo, A22!
A22: Tem que pensar qual a porcentagem disso?

P: Desse tanto de material que está aqui na caçamba, que ainda vai passar pela triagem ali na esteira, quanto desse material que vai virar rejeito? Não necessariamente desse tanto que está aqui na caçamba, porque nós vamos estar fazendo uma estimativa… como o colaborador explicou, o "peso" dos rejeitos depende do tipo de material... e não é sempre as mesmas coisas, por isso que a gente faz uma estimativa, faz um cálculo aproximado... pra poder dizer que é em torno de tantos quilos, por exemplo. Mas como que a gente pode fazer isso?
A1: Fazer o cálculo de quantos quilos mais ou menos vai ter ali.
A22: E daí a gente separa... os recicláveis dos rejeitos.
P: Mas a gente consegue colocar aquele material todo em algum lugar pra poder pesar?
A1: (pensativo)

O grande empecilho para os alunos estava sendo encontrar uma forma de quantificar o material que se encontrava na caçamba, porém quando o colaborador manifestou a intenção de explicar sobre o manuseio da prensa, passou uma informação que gerou um *insight* nos alunos. O colaborador apontou para uma balança argumentando que após prensado o material era pesado. A balança suportava até 1000 quilos, mas também aferia a massa de materiais muito leves, pois era muito sensível.

Após essa informação o aluno A25 mencionou uma estratégia revelando a necessidade da "construção do modelo" para a situação sob investigação, conforme mostra o diálogo a seguir.

A25: Tinha que ter alguma coisa, uma caixa... sei lá, pra colocar e poder pesar.
A4: Ali ó… tem uma ali no canto (apontando para uma caixa de papelão).
P: Certo, mas como vocês estão pensando em fazer?
A6: A gente pede pra ele (se referindo ao colaborador) encher a caixa pra gente...
A25: A gente tem que saber primeiro o peso …
A21: Do material que ele (se referindo ao colaborador) pegou.
P: Hum… e depois?
A21: Depois a gente leva lá na esteira e separa o que é e o que não é reciclável…
A25: Daí depois quando for separado pega e põe aqui de novo…
A6: E pesa!
P: Gostei! E quando nós conhecermos esses valores, o que isso vai significar?
A21: Vamos dizer que aquela caixa lá tem a capacidade de 10 kg… e por exemplo, 6 foi rejeitado, então a cada 10 kg de material que vêm pra cá…
A25: 6 kg serão rejeitados.
P: Muito bem! Adorei o raciocínio de vocês. Então, peçam para o colaborador se nós podemos usar aquela caixa.

A sugestão dada pelo aluno A25, sinaliza "a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam", outro elemento caracterizador do pensamento algébrico, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), pois indica que o aluno percebeu a possibilidade de utilizar uma amostra do material para realizar a estimativa da quantidade de rejeito.

Essa percepção despertou a argumentação dos demais alunos quanto aos procedimentos envolvidos na estratégia mencionada, direcionando para a forma do pensamento algébrico (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, descrita por Kaput (1999), pois as falas dos alunos sugerem que eles se encaminhavam para a generalização da estimativa que seria realizada. Essa discussão pode ser associada também à forma (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações, pois as relações que os alunos estavam estabelecendo podem ser interpretadas como estruturas capazes de fornecer uma base para níveis mais elevados de abstração e formalização, como por exemplo, a interpretação percentual da relação investigada.

Dessa forma, a professora pediu que o colaborador acionasse a esteira e transferisse uma quantidade de materiais para a caixa de papelão, possibilitando, assim, executar a estratégia defendida pelos alunos. As ações que seguiram, medir a massa do material coletado, realizar a triagem, medir a massa do rejeito resultante e medir a massa da caixa de papelão, foram acompanhadas de muitos palpites a respeito do "peso" do rejeito e também de espanto ao verem o resultado exibido no visor da balança. Antes que os alunos pudessem refletir a respeito da massa do rejeito, o colaborador antepôs a informação de que a massa da caixa de papelão deveria ser subtraída, proporcionando a comemoração daqueles que deram palpites que se aproximaram da quantidade obtida.

Os alunos que estavam presentes na visita à Associação se envolveram no contexto da atividade de forma a exemplificarem e demonstrarem para os demais alunos da turma, por meio das diversas embalagens trazidas de suas casas, os conhecimentos que obtiveram durante a visita. Os alunos utilizaram o quadro de símbolos de identificação dos materiais recicláveis que havia sido exibido pela professora durante a abordagem da situação-problema para relacionar com os materiais dos quais as embalagens eram produzidas, sinalizando, assim, a presença da "percepção de regularidades", elemento caracterizador do pensamento algébrico, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), pois a ação de sentir a textura do material do qual a embalagem era feita gerava significados para a classificação exibida no quadro de símbolos.

Além dessas informações e conhecimentos era necessário compartilhar com os alunos que não puderam estar presentes na visitação o motivo da redefinição do problema a ser investigado, justificativa que foi anunciada momentos antes da ida à Associação. Nesse sentido, a professora exibiu um vídeo caseiro apresentando o processo de reciclagem da sacolinha plástica, essas utilizadas pela maioria dos supermercados e comércios em geral. O vídeo foi feito por um morador do município que trabalha com a coleta de materiais recicláveis e mostra que após ser triturado o material é lançado em um compartimento com água e direcionado, pelos colaboradores, para as demais etapas do processo. A Figura 58 apresenta essa etapa do processo.

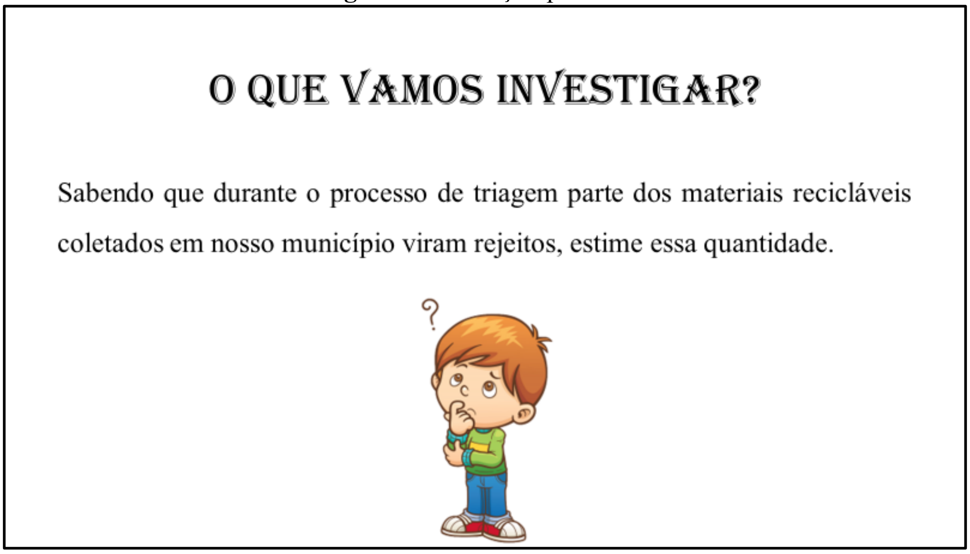
Figura 58: Etapa do processo de reciclagem da sacolinha plástica

Fonte: Dos autores

Assim que o vídeo foi exibido a professora fez a seguinte fala *"Esse vídeo aqui nos mostra pessoal, que nós temos um problema em relação ao que nós havíamos proposto investigar... vocês lembram? A gente queria saber quantos por cento do material que chega na Associação deixava de ser reciclado porque não estava higienizado, porque a gente achava que se não tivesse limpo, não poderia ser reciclado... mas lá na Associação, eles nos explicaram que não precisa estar limpo, o material vai ser reciclado da mesma forma. E nesse vídeo a gente consegue entender o porquê. Ele é triturado e já caí nessa água... claro que a questão da higienização é super importante, o pessoal lá da Associação nos disse que tem situações que se perde o material, porque contamina. Então, nós tivemos que mudar o nosso problema, levando em consideração, também, o que o técnico do Meio Ambiente me explicou quando eu fui agendar a nossa visita. Ele disse que um dos maiores problema que o setor da reciclagem enfrenta aqui no nosso município é a quantidade de material reciclável que se perde. O material chega até a Associação, mas acaba virando rejeito, por não ter empresas interessadas na reciclagem desses materiais aqui nas proximidades do nosso município e o envio para as cidades grandes é financeiramente impossível, como a gente já discutiu"*.

A partir dessa argumentação a professora projetou no quadro a redefinição da situação-problema que orientou a coleta de dados durante a visitação à Associação, conforme mostra a Figura 59.

Figura 59: Situação-problema



Fonte: Dos autores

Além disso a professora apresentou uma síntese da condução da coleta de dados, com imagens de alguns momentos que traduziam a estratégia utilizada pelos alunos, disponibilizando, assim, as informações para todos os grupos. Os alunos estavam munidos de informações e dados que os permitiriam realizar a "documentação do modelo", que até o momento estava em processo de construção. Essas mesmas informações também estavam presentes na folha de anotações, posteriormente, entregue aos grupos, conforme apresenta a Figura 60.

Figura 60: Folha de anotações proposta aos grupos

O QUE VAMOS INVESTIGAR?

Sabendo que durante o processo de triagem parte dos materiais recicláveis coletados em nosso município viram rejeitos, estime essa quantidade.

Realizamos uma visita à Associação dos Amigos Recicladores de Peabiru (ADARP) para entender como ocorre o processo de triagem dos materiais recicláveis.

Durante o processo de triagem, percebemos que parte dos materiais recicláveis que passam pela esteira, são considerados rejeitos. No entanto, a Associação ainda não tem esses dados quantificados. Sendo assim, para estimar essa quantidade, nós coletamos uma pequena amostra do material que iria passar pela triagem utilizando uma caixa de papelão com massa igual a 1 kg, vazia. Medimos a massa da caixa com os materiais coletados e obtivemos 2,6 kg; realizamos a triagem dos materiais, colocando nessa mesma caixa àqueles considerados rejeitos e obtivemos 1,4 kg.

Fonte: Dos autores

A professora utilizou esse momento de exposição dos dados coletados para discutir a diferença entre peso e massa, visto que na maioria das vezes essas grandezas são utilizadas como sinônimos. Conceitos como aceleração da gravidade e a fórmula que permite calcular a força peso também foram apresentados aos alunos, ainda que de uma forma superficial, já que se trata de uma turma de 6º ano.

Os alunos que conheciam sua massa fizeram o cálculo do seu peso aqui na Terra e também na Lua, ação que colocou os alunos em contato com a forma do pensamento algébrico (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), indicada por Kaput (1999), que requer a construção de relações, descritas por meio de símbolos e regras sintáticas que permitam construir significados (diferença entre as grandezas peso e massa), pois os alunos revelaram a compreensão de que o peso está diretamente ligado à aceleração da gravidade presente no local, diferentemente da massa.

Considerando que todos os alunos estavam cientes da estratégia utilizada durante a coleta de dados a professora, baseada no princípio da "construção do modelo", proposto por Lesh et al. (2000), orientou os alunos a pensarem em como registrar as relações observadas, de modo a estimar a quantidade de material reciclável que vira rejeito durante o processo de triagem. O diálogo a seguir apresenta esse momento.

> *P:* Agora vocês vão pensar com o seu grupo, como vocês podem estimar essa quantidade... como vocês podem expressar essa quantidade de material que vira rejeito. A primeira informação que é importante destacar aí na folha que eu acabei de entregar é o quanto de material foi coletado.
> *A18*: Vazia ela tem um quilo e coletada tem dois quilos e seiscentos gramas…
> *A21*: Então só o material coletado vai pesar um quilo e seiscentos.
> *P*: Por quê?
> *A21*: Porque se você pegar o peso da caixa que é um quilo e pegar o que você obteve com a caixa e os materiais que é dois vírgula seis... dois vírgula seis menos um quilo que dá, dois mil e seiscentos menos mil... mil e seiscentos. Mil e seiscentos gramas ou um quilo e seiscentos.
> *P*: Vocês entenderam o que o A21 está falando ou não?
> *Todos*: Não!
> *P*: Fala de novo, por favor A21.
> *A21*: A caixa é um quilo e o peso da caixa com os materiais coletados é dois quilos e seiscentos gramas… se eu quero saber quanto pesa só os materiais, então eu tenho que pegar dois quilos e seiscentos e tirar o peso…
> *P*: A massa! (tentando corrigir a referência à grandeza)
> *A21*: A massa (risos) da caixa, que é um quilo... e dois mil e seiscentos menos mil…
> *A25*: Vai dar mil e seiscentos.
> *A21*: Vai dar mil e seiscentos!
> *P*: Ótimo raciocínio! Por que o A21 falou que tem que descontar a massa da caixa, que é um quilo? Porque a caixa não faz parte dos materiais coletados... então eu preciso saber quanto é a massa apenas dos materiais, sem considerar a caixa de papelão, que foi o recipiente que nós utilizamos para coletar. Esse cálculo pessoal é muito parecido com comer em self-service... quem aqui já foi em restaurante que você "pesa" a comida?
> *Todos*: Eu, eu já fui.

P: Então, nesse sistema de self-service eles descontam a massa do prato, pra que a hora que você colocar o seu prato com comida lá na balança, seja cobrado de você apenas a massa da comida que você pegou.
Todos: Ah!
P: Da mesma forma aqui, a caixa de papelão é como se fosse o nosso prato... um quilo e seiscentos é a massa do material que está dentro dela ou eu posso falar mil e seiscentos gramas, porque um quilo equivale a mil gramas... e agora? Quanto que é a massa do material rejeitado, então?
A10: Mil e duzentos!
P: Por quê?
A10: Porque você tem que fazer o dois vírgula seis menos o um vírgula quatro.
A1: Não! 400 gramas são rejeitos... porque vai ser mil e quatrocentos menos mil da caixa.
P: Hum... e agora? Qual raciocínio está certo? (a maioria dos alunos argumentaram concordar com o raciocínio do aluno A1). É assim mesmo que nós devemos pensar A1! Basta subtrair a massa da caixa de papelão, que é um quilo, da massa da caixa com a quantidade de material considerado rejeito, que é um quilo e quatrocentos gramas. Mas vamos tentar entender o cálculo do A10. Com o seu cálculo A10 você encontra a massa da quantidade de material bom, material reciclável... porque veja, você está pegando 2,6 kg que é a massa da caixa com o material todo coletado e retirando 1,4 kg que é a massa da caixa com o rejeito... que vai dar 1,2 kg. Esse valor é a massa do material bom, que vai ser reciclado, porque você retirou a massa do que é rejeito e se eu somar 1,2 kg com os 400 gramas que o A1 acabou de falar, eu tenho a massa do material todo novamente, o material que foi coletado no início, que era 1,6 kg... descontando a massa da caixa.
A10: Ah, verdade...

Apesar da professora ter sinalizado que as discussões deveriam ocorrer nos grupos, os alunos se engajaram na socialização de seus raciocínios, o que de certa forma contribuiu para elucidar algumas incompreensões que se revelaram durante esse momento. As considerações dos alunos implicam no início do processo para o desenvolvimento do pensamento funcional, que segundo Smith (2008), ocorre quando o aluno se envolve em uma atividade, presta atenção às quantidades que variam e começa a focar na relação entre essas quantidades. Essas ações estão relacionadas, também, à forma do pensamento algébrico (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, indicada por Kaput (1999), pois considera experiências matemáticas envolvendo contagem, medição e estimativa, ideias exploradas durante a atividade.

O diálogo seguinte revela que experiências matemáticas anteriores foram determinantes para expressar a relação entre a quantidade de rejeito e de material reciclável em termos de uma linguagem matemática, ou seja, para a "documentação do modelo" (LESH, et al., 2000).

P: E como que nós podemos escrever essa comparação entre a quantidade de rejeito que sai toda vez que eles fazem a triagem do material que chega na Associação? Como que a gente pode escrever matematicamente essa relação?
A21: Usando razão.
P: Razão... o que é razão, A21? Por que eu posso escrever esses dados que nós temos, como uma razão?
A21: Vixi professora (risos)... Porque razão é quando a gente compara uma coisa com outra.
A6: Igual aquela dos carrinhos... os carros com as miniaturas (fazendo gestos com as mãos).

P: Ótimo! Que a gente chamou de escala... lembram disso? Aqui não será escala, mas o conceito de razão se aplica em diversas situações. Aqui eu estou comparando a quantidade de rejeito que saí, da quantidade de material que é colocado na esteira. Qual é a quantidade de rejeito mesmo?
Todos: 400 gramas.
P: E como a gente que pode escrever essa razão, então?
A25: Em fração. Professora, a gente também pode escrever na forma de porcentagem?
P: E aí? O que vocês acham? É possível escrever essa razão na forma de porcentagem?
A25: Eu acho que sim, porque a porcentagem também é uma fracão né pro?
P: Isso mesmo, A25! Nós podemos escrever essa razão na forma de fração, porque as frações podem ser utilizadas para representar partes de um todo, de alguma coisa... no nosso caso o que representa o todo?
A1: Tudo que vai lá pra Associação.
P: Isso mesmo! Toda a quantidade de material reciclável que chega até a Associação. E as partes desse todo é representada pela quantidade de rejeito que saí durante a triagem. Nós também podemos representar essa fração na forma de porcentagem, que foi a pergunta do A25. O que essas formas de escrever tem de diferente?
A23: Eu sei! É que na porcentagem vai ser cem.
P: Na porcentagem a gente olha para um grupo de 100, partes de 100. O nosso todo é representado pelo 100, que fica no denominador da fração. A gente já estudou esse conteúdo, lembram?
Todos: Sim.
P: E ainda pode ser representado por esse símbolo "%" (escrevendo no quadro). Quando vocês forem registrar as ideias, procurem pensar sempre em registrar de uma forma que faça sentido para vocês, que vocês consigam entender o que esses cálculos significam.

A sugestão dada pelo aluno A21 sobre utilizar a razão para escrever matematicamente a relação observada e as justificativas que se seguiram dos demais alunos indicam a forma do pensamento algébrico (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), proposta por Kaput (1999), uma vez que o diálogo mostra que os alunos compreendem o conceito de razão como a comparação relativa entre duas grandezas, bem como, reconhecem que a razão pode ser expressa na forma de fração, e além disso, argumentam sobre a possibilidade dessa fração ser escrita na forma de porcentagem.

Todos esses conceitos matemáticos mencionados pelos alunos no decorrer do diálogo foram sendo formalizados pela professora por meio de registros no quadro, validando o raciocínio empreendido pelos alunos. Dessa forma, a professora começou a registrar os dados na forma sugerida, de fração. Ainda que os grupos não tivessem documentado seus modelos matemáticos na folha de anotações, os alunos já haviam sinalizado como o fariam. Essa ação revela a presença do princípio do "protótipo eficaz", indicado por Lesh, et al. (2000), pois as relações envolvidas foram discutidas matematicamente para fins de aprendizagem, como apresenta o diálogo a seguir.

P: Então eu vou escrever aqui no numerador o 400. E a gente vai comparar o tanto de rejeito com o quê?
A10: Com o material bom.

P: Mas vocês lembram que o denominador de uma fração corresponde sempre ao todo… então o denominador dela pode ser a quantidade de material bom, de material que vai ser reciclado?
Todos: Não.
P: Não! Aqui no denominador eu vou ter que colocar o meu todo, a quantidade que representa todo o material que eu coletei... que valor será esse?
A21: Um quilo e seiscentos…
P: Isso mesmo… eu só tenho que tomar um cuidado, quando eu estou escrevendo na forma de razão, as grandezas tem que estar na mesma unidade de medida, lembram? Então, se o 400 está em gramas eu devo escrever um quilo e seiscentos na mesma unidade, em gramas.
A19: Ou os dois com vírgula, né professora?
P: Então, pela definição de fração, que a gente já estudou, tanto o numerador como o denominador devem ser apenas números inteiros, lembrando que o denominador não pode ser o zero.
A19: Ah...
P: Então, nesse caso, eu vou ter que escrever o denominador em gramas, que vai ser?
A1: Mil e seiscentos.
P: Certo, mas como eu interpreto essa razão que nós acabamos de escrever?
A21: Que de cada mil e seiscentos gramas de material que chega na Associação...
A25: 400 gramas vai pro lixão.
P: Exatamente, 400 gramas vão parar no Aterro Sanitário…e nós ainda podemos utilizar a fração para conseguir expressar na forma de porcentagem, como o A25 falou. Mas o que é a porcentagem?
A1: Dividir por cem.
A25: Por cem..
A27: Por cento.
P: Como assim? por cem? Quando eu falo assim… três por cento da sala não veio hoje, o que significa dizer que três por cento da sala não veio?
A27: Três pessoas não veio.
A25: Que a cada 100 pessoas, 3 não vieram…
P: Exatamente! Então, para escrever essa razão na forma de porcentagem… o que eu tenho que fazer?
A22: Divide o de cima pelo de baixo…
P: É uma boa opção! Será que temos alguma outra?
A23: Divide o quatrocentos por cem!
P: O que eu vou ter se eu dividir o 400 por 100, A23?
A21: Ah, já sei professora! Fazer aquele.. aí esqueci! Como que fala? Você coloca na frente e vai dividindo pelo mesmo número em cima e embaixo…
A1: Professora, a gente pode simplificar essa fração!
P: Por que, A1?
A1: Porque daí dá um quarto…
A21: Ah, professora... era isso! Faz a fração equivalente! Agora eu lembrei o nome (risos).
P: As opções que vocês deram, estão todas corretas... se eu dividir o numerador (mostrando) pelo denominador (mostrando), eu vou obter um número decimal, que me permite ler e interpretar a porcentagem… se eu dividir o 400 por 100 e também o 1600 por 100, eu vou obter uma fração equivalente a essa, uma fração simplificada, que será quatro dezesseis avos, que é equivalente a um quarto, que é a fração equivalente irredutível dessa fração inicial, que nós tínhamos... o que significa tudo isso que eu estou falando? Como assim, todas as respostas estão certas se cada fração vai ficar com numerador e denominador diferentes? É porque elas são equivalentes... eu vou representar na forma de figura o que eu estou falando. Como sempre meu desenho vai ficar horrível (risos), mas eu acho que vocês vão conseguir entender... se eu tenho um quarto, quer dizer que o meu todo tem quatro partes iguais e eu peguei uma dessas partes…
A1: Agora você vai dividir isso daí em mil e seiscentas partes (risos).
P: (risos) acho que não vou não! Vou desenhar a mesma figura e vou dividir agora em oito partes iguais, mas eu quero que a quantidade que eu pegar, permaneça igual, então eu tenho que pintar quantas partes?

> *Todos*: Duas…
> *P*: Isso, vejam que o tamanho da parte pintada nos dois desenhos permanece o mesmo… só que aqui (se referindo a segunda figura desenhada) só está dividido em mais partes! E eu posso fazer mais divisões, quantas eu quiser, até chegar em mil e seiscentas, né A1? (risos). Se eu fizer dezesseis divisões agora, numa terceira figura, eu devo pintar quantas partes para que a quantidade pintada continue sendo a mesma nos três desenhos?
> *Todos*: Quatro.
> *P*: Exatamente... se a gente observar a parte pintada nas três figuras são exatamente iguais, quando isso acontece nós dizemos que essas frações, (apontando para os registros feitos) são equivalentes, porque correspondem a uma mesma quantidade, independente do tamanho dos pedaços em que está dividida... um quarto é equivalente a dois oitavos e também é equivalente a quatro dezesseis avos… esse raciocínio nos ajuda a escrever essa fração (quatrocentos mil e seiscentos avos) de uma forma que seja mais fácil observar a porcentagem a que ela corresponde.

Além de sinalizar o princípio do "protótipo eficaz", esse diálogo também revela a presença de um elemento caracterizador do pensamento algébrico, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), "a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam", que pode ser observada nas falas que se referem às frações equivalentes. Podemos perceber também a forma do pensamento algébrico (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), ao analisarmos as falas dos alunos em relação às formas de representar e interpretar a fração como porcentagem. A representação figural realizada pela professora, apenas validou as interpretações dos alunos nesse sentido.

Assim que a professora terminou de fazer a representação figural o aluno A21 afirmou que a porcentagem seria 25%, justificando seu raciocínio por meio da fala *"isso daí vai ser vinte e cinco por cento, porque essa daqui (se referindo a fração quatro dezesseis avos) é a mesma que essa (se referindo a fração um quarto) e um quarto é vinte e cinco por cento"*. O Aluno A25 concordou o raciocínio do colega sinalizando que 25% se trata *"da metade da metade"*.

Essas considerações sinalizam a presença da forma (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, proposta por Kaput (1999), pois eles reconhecem o significado da fração (parte/todo) explorado no contexto da atividade e conseguem observar a correspondência entre as frações equivalentes e a porcentagem. Os demais grupos sinalizaram estar de acordo com as observações mencionadas. Dessa forma, a professora solicitou que cada grupo realizasse a "documentação do modelo" na folha de anotações, justificando o raciocínio empreendido. A Figura 61 apresenta as anotações de alguns grupos, sinalizando a interpretação da porcentagem obtida.

Figura 61: Interpretação do resultado obtido

Nos chegamos a conclusão de 400g de rejeitos, porque 1 kg era da caixa.
A gente pode fazer em fração porque, fração é a parte de um todo.

$$\frac{400}{1600} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

Todo lixo reciclável que chega na associação 25% são rejeitos

Grupo formado pelos alunos: A3, A4, A16, A17 e A23.

e obtivemos 1,4 kg. R: Pelos nossos cálculos a porcentagem de materiais rejeitados deu 25%.

Conclusão: Para mim chegar neste resultado você poderia fazer um desenho representando a sua fração, ou fazer a fração de $\frac{1}{4}$ que é a simplificação da fração original de $\frac{400}{1600}$, depois multiplicando o 4 pelo 100 que o quatro pra virar 100 foi multiplicado por 25, como 25x1=25 e o 100 como denominador, o valor deu 25%, e o 25 foi a metade da metade.

material coletado = 2,600 − 1,000 = 1,600 kg

material rejeitado = 1,400 − 1,000 = 0,400 kg

Grupo formado pelos alunos: A6, A21, A25 e A27.

e obtivemos 1,4 kg. R: Para chegar a uma conclusão precisa-se fazer contas para dar fração e porcentagem.
Para saber o resultado precisa dos seguintes cálculos.

$$\frac{400}{1600} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 25} \frac{25}{100} = 25\%$$

Primeiro simplificamos o número, que deu $\frac{1}{4}$ depois fizemos ×25 no numerador de 25 e no denominador 100.
E assim, a porcentagem de tanto lixo rejeitado foi 25%.

material coletado – 1600 g

2600 − 1000 = 1600

material rejeitado 400 g

1400 − 1000 = 0400

Grupo formado pelos alunos: A1, A8, A10, A12, A15.

Fonte: Dos autores

Assim que os grupos finalizaram seus registros, a professora socializou a interpretação do resultado obtido, realizando algumas explicações que julgou serem necessárias para que não houvessem dúvidas em relação ao que significava a porcentagem no contexto da atividade. Para isso a professora mencionou que eles poderiam pensar da seguinte forma, *"é como se todo o material que chega lá na Associação, eu dividisse em quatro montes iguais e um desses montes voltasse para o lixão, para o Aterro Sanitário. É muita coisa, né pessoal?!"*. Essa exemplificação estava relacionada à representação figural já discutida.

Além disso, a professora também pontuou que o resultado obtido se trata de uma estimativa, gerada por meio de uma amostra do material, o que implica na possibilidade de uma pequena variação, pois os materiais coletados não são sempre os mesmos. Após esse momento, a professora iniciou um diálogo com a turma sobre as possíveis maneiras de representar o resultado da estimativa realizada, fazendo relação com os resultados de pesquisas que são divulgados, por exemplo, em telejornais. O aluno A27 disse que esses resultados eram divulgados por meio de *"um negócio que tem umas linhas assim ô (fazendo o gesto com as mãos)"*, e sua colocação foi, imediatamente, corrigida pelo aluno A25 que afirmou *"o nome disso aí é gráfico, moleque!"*. A turma toda deu risada e concordou com a afirmação do aluno A25.

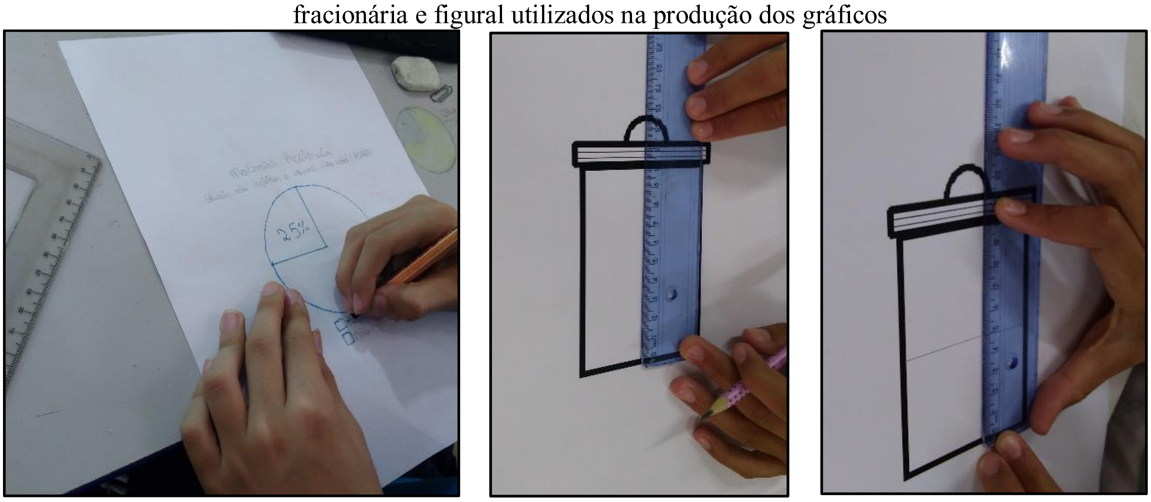
A intenção era promover o uso de uma variedade de representações, como a linguagem natural, os cálculos aritméticos, as figuras e os gráficos, bem como, a percepção da conexão entre elas, assim como propõe Ponte et al. (2009), que sugere conectar as ações do contexto com o sistema representacional que está sendo utilizado, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento funcional.

Considerando a colocação dos alunos a respeito do uso dos gráficos, a professora utilizou as informações contidas no capítulo de Tratamento da Informação, do livro didático de Matemática da turma para abordar os diferentes tipos de gráficos, sinalizando a importância da presença de elementos que asseguram a leitura e a credibilidade das informações que estão sendo representadas.

Os gráficos discutidos foram o gráfico de barras, o gráfico de linhas, o gráfico de setores e o pictograma. Cada grupo sinalizou a intenção de produzir o gráfico que mais havia lhe agradado, desta forma, a professora disponibilizou os materiais necessários para essa produção. Um dos grupos sinalizou a intenção de produzir um gráfico pictórico, mas não conseguiam definir como o fariam. Após várias tentativas, a professora, disponibilizou uma folha com a impressão da figura de uma lixeira, já prevendo que esse impasse poderia ocorrer.

Assim que os demais grupos viram a figura impressa, também sinalizaram o desejo de produzir um gráfico pictórico. Ao final, todos os grupos produziram três tipos de gráficos, gráfico de barras, gráfico de setores e gráfico pictórico, conforme apresentado na Figura 52. Essas discussões e reflexões revelam a presença do princípio da “documentação do modelo”, dessa vez, sendo representado graficamente. A produção dos três tipos de gráficos por grupo partiu dos próprios alunos, não houve uma solicitação da professora nesse sentido. Durante o auxílio aos grupos, conceitos matemáticos relacionados ao conteúdo de Tratamento da Informação puderam ser revisados, como por exemplo, a equivalência entre a representação fracionária e figural, que foi utilizada na construção do gráfico de setores e também nas divisões da figura do gráfico pictórico, como apresenta a Figura 62. Os alunos, também, tiveram a oportunidade de manipular o compasso, instrumento de medida que ainda não havia sido manuseado pela maioria dos alunos.

Figura 62: Conceitos de equivalência entre a representação fracionária e figural utilizados na produção dos gráficos



Fonte: Dos autores

Os grupos finalizaram a representação gráfica do resultado obtido na estimativa da quantidade de materiais recicláveis que viram rejeito durante o processo de triagem e socializaram seus resultados. Esse momento indica a presença do “princípio do protótipo eficaz”, indicado por Lesh, et al. (2000), pois os conceitos que foram discutidos no âmbito dos grupos foram retomados e formalizados durante a socialização. Na sequência, a professora projetou no quadro a interpretação do resultado expresso na forma de porcentagem, opção escolhida pelos alunos durante os encaminhamentos da atividade, bem como, uma situação relacionada ao contexto da atividade, conforme mostra a Figura 63.

Figura 63: Interpretação do resultado e situação relacionada ao contexto da atividade

Se formos expressar essa quantidade em porcentagem, é possível dizer que:

A cada 100 kg de materiais recicláveis que chegam à Associação, 25 kg estão indo parar no Aterro Sanitário, ou seja, **25%** dos materiais recicláveis coletados, em nosso município, viram rejeitos, durante o processo de triagem.

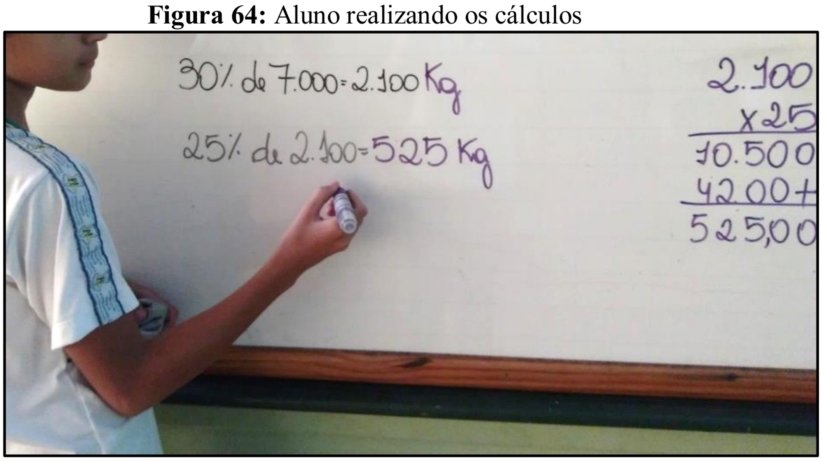
Esse percentual é altíssimo, visto que o município produz, em média, 7 toneladas diárias de resíduos, dos quais, segundo estudos, 30% correspondem à resíduos recicláveis.

Fonte: Dos autores

As informações contidas na situação apresentada aos alunos permitiram a produção de uma solução compartilhável para resolver uma situação relacionada, ações que indicam a presença do "princípio da generalização", indicado por Lesh, et al. (2000). As discussões realizadas em conjunto com toda a turma permitiram determinar a quantidade diária de materiais recicláveis que o município produz e utilizar as compreensões presentes no modelo matemático produzido pelos alunos para determinar a quantidade de rejeito produzido diariamente no município.

A apresentação da situação relacionada suscitou novas discussões voltadas ao desenvolvimento da forma (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, do pensamento algébrico (KAPUT, 1999), pois essa apresentação possibilitou a discussão de outros valores percentuais, explorando a ideia de correspondência e de variação. O aluno A21 manifestou a intenção de realizar os cálculos no quadro, conforme apresenta a Figura 64.

Figura 64: Aluno realizando os cálculos



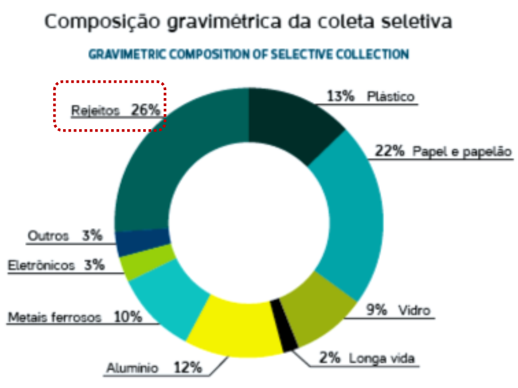
Fonte: Dos autores

Apesar do cálculo ter sido realizado por um aluno em específico, todos os grupos se envolveram na resolução, auxiliaram na equivalência entre as unidades de medida de massa envolvidas na situação, manifestaram conhecimentos sobre o cálculo da fração como operador multiplicativo, realizaram arredondamentos dos valores para a unidade de milhar mais próxima realizando cálculos mentais que se aproximaram do resultado obtido e manifestaram indignação ao constatarem a quantidade de rejeito produzida diariamente, como demonstra a fala do aluno A10 *"mas é muito!"*.

A última informação compartilhada com os alunos sinalizava a presença do "princípio da autoavaliação". A informação pontuava que o alto índice de rejeitos não era uma particularidade do município, pois o gráfico da composição gravimétrica da coleta seletiva, no Brasil, no ano de 2019, permitia constatar que esse índice era de 26%, conforme apresenta a Figura 65.

Figura 65: Índices da composição gravimétrica da coleta seletiva no Brasil

Infelizmente esse alto índice de rejeito não é uma particularidade do nosso município. O gráfico a seguir mostra o percentual de rejeitos que compõe os materiais recicláveis coletados no Brasil, neste ano.



CEMPRE, 2019.

Fonte: Dos autores

O índice apresentado era muito próximo à estimativa realizada pelos alunos, o que permitiu validar a estratégia e os encaminhamentos realizados durante a atividade. O desenvolvimento da atividade Reciclagem permitiu realizar uma abordagem, por meio da Matemática, de um problema não essencialmente matemático, indicando assim a forma (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos, indicada por Kaput (1999), para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Observamos indícios de desenvolvimento das cinco formas do pensamento algébrico, indicadas por Kaput (1999), ainda que, algumas formas tenham ocorrido com mais frequência que outras. A atividade de Modelagem Matemática desenvolvida se configurou como uma possibilidade de compreender e atuar sobre as situações problemáticas do mundo real, onde a professora teve o desafio de ajudar os alunos a compreender e construir relações matemáticas significativas (BASSANEZI, 2002), evidenciando as conexões entre as ações do contexto e o sistema representacional adotado. As intervenções e orientações da professora viabilizaram as generalizações sobre o modo como os dados estavam relacionados, contribuindo com o desenvolvimento das formas do pensamento algébrico.

5.4 ANÁLISE GLOBAL

Para a análise global, vamos olhar os resultados obtidos a partir das três atividades, as quais nominamos "Miniaturas *Hot Wheels*", "Aerofractal" e "Reciclagem", desenvolvidas em conformidade com os momentos de familiarização com atividades de Modelagem Matemática sugeridos por Almeida, Silva e Vertuan (2012) e segundo os seis princípios das MEAs (LESH, et al., 2000). Abordarmos, particularmente, como se deu o desenvolvimento das cinco formas do pensamento algébrico indicadas por Kaput (1999) pelos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental nas atividades de Modelagem Matemática. Para isso, fizemos uma síntese dos indícios de desenvolvimento das cinco formas do pensamento algébrico observados em cada atividade e os organizamos no Quadro 6.

Quadro 6: As cinco formas do pensamento algébrico presentes nas atividades de Modelagem Matemática

Formas do pensamento algébrico (KAPUT, 1999)	Miniaturas *Hot Wheels*	Aerofractal	Reciclagem
(i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições	• A partir do conhecimento das medidas reais de um carro, que se encontrava no estacionamento do Colégio, os alunos sinalizaram a percepção de regularidades (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993). No momento em que a professora retomou o questionamento inicial, um dos alunos levantou uma hipótese, sinalizando a necessidade de ter dados que possibilitassem explicar ou provar conjecturas no que diz respeito à relação entre as dimensões da miniatura e do carro real (CARPENTER et al., 2003). Essa mesma hipótese indica que o aluno percebeu que para determinar as medidas de uma miniatura, ele precisa saber as medidas do carro original correspondente, revelando a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993). • A busca pela comprovação de hipóteses conduziu os alunos a analisarem as relações numéricas entre as dimensões investigadas, possibilitando a compreensão da relação existente entre um carro e sua miniatura. • Exploração da relação existente entre um carro e sua miniatura e generalização para outras situações relacionadas, como miniaturas produzidas com outras escalas.	• Percepções e justificativas registradas nas questões de compreensão do problema, que encaminharam para a generalização da quantidade de material necessário para a confecção de um Aerofractal, em um nível diferente do confeccionado pelos grupos. • Percepção de regularidades (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993), presentes nas falas dos alunos a respeito da autossimilaridade identificada na estrutura do Aerofractal. • Registro de cálculos sinalizando a presença da relação de correspondência (BLANTON; KAPUT, 2011), entre o nível do Aerofractal e o número de células e também entre o nível do Aerofractal e o número de faces com papel seda, por meio da operação de potenciação. • Determinação da “regrinha” para o número de células e para o número de faces cobertas com papel seda.	• Os questionamentos dos alunos em busca de informações sugerem que conhecendo a quantidade de material coletado semanalmente seria possível realizar o encaminhamento para a generalização da situação investigada. Esses questionamentos revelam, também, a “tentativa de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993), analisando as possíveis relações numéricas existentes entre a quantidade de material coletado e a quantidade de rejeito, elaborando hipóteses sobre as relações e argumentando em favor dessas hipóteses (CARPENTER et al., 2003). • A sugestão de coletar uma amostra dos materiais recicláveis, dada por um dos alunos sinaliza “a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993) sugerindo que os alunos se encaminhavam para a generalização da estimativa que seria realizada. • Afirmação dos alunos a respeito da equivalência entre as frações, com interpretação na forma percentual. Os alunos reconhecem o significado da fração (parte/todo) explorado no contexto da atividade e conseguem observar a correspondência entre as frações equivalentes e a porcentagem, sinalizando “a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

(ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos)	• Consideração dos números como símbolos matemáticos e as regras da operação de divisão como regras sintáticas, permitindo a realização consciente da divisão das dimensões. • Reconhecimento da multiplicação como operação inversa da divisão e de como proceder em cada caso a partir da situação de um grupo que obteve um valor diferente para o quociente, por ter realizado a divisão entre as medidas da miniatura e do carro, em tamanho original, nessa ordem, diferentemente dos outros grupos, invertendo dividendo e divisor. • A partir da indicação de uma escala, diferente da trabalhada no contexto da atividade, os alunos foram capazes de realizar o cálculo das dimensões da miniatura a partir do carro original ou vice-versa.	• Decomposição de um triângulo equilátero e, a partir de suas partes, composição de um retângulo de área equivalente, possibilitando, assim, calcular a área. • Registro de cálculos utilizando regras sintáticas da operação de potenciação para estabelecer relações entre a quantidade de material necessário para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer.	• Compreensão de que o peso está diretamente ligado à aceleração da gravidade presente no local, diferentemente da massa, por meio da exploração da fórmula do cálculo da força peso utilizada para a compreensão da tirinha apresentada pela professora. • Compreensão do conceito de razão como a comparação relativa entre duas grandezas, bem como reconhecimento de que a razão pode ser expressa na forma de fração; e, além disso, argumentação sobre a possibilidade dessa fração ser escrita na forma de porcentagem. • A "percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993), presente nas falas que se referem às frações equivalentes.
(iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações	• A estrutura textual estabelecida pelos alunos para indicar as regularidades observadas na situação-problema permitiu que os alunos fizessem descrições, explicações e previsões com relação ao fenômeno sob investigação, a produção de carrinhos em miniaturas e pudesse ser interpretada como estruturas capazes de fornecer uma base para níveis mais elevados de abstração e formalização, demonstrando a compreensão do conceito de escala.	• Equivalência entre as áreas do retângulo e do triângulo equilátero. Altura invariante e base do retângulo igual a metade da dimensão da base do triângulo equilátero. • Percepção de regularidades (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993) a partir de questionamentos sobre a quantidade de material necessária para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer. Os alunos escreveram uma "regrinha" que permitiu determinar o número de canudos necessários para a confecção de uma pipa em um nível qualquer. Presença do processo de generalização (LINS; GIMENEZ, 1997), ao observar o que é comum a um conjunto de casos particulares para representar a relação de correspondência por meio de uma linguagem algébrica, para os números de células e de faces com papel seda.	• A partir da coleta dos dados os alunos interpretaram a comparação entre quantidade de rejeitos e a quantidade de materiais recicláveis coletados por meio da razão percentual.

(iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas	• Envolvimento dos alunos na atividade, com atenção às quantidades que variam e foco na relação entre essas quantidades (SMITH, 2008). Considerações sobre a relação entre as dimensões da miniatura e do carro original correspondente. Percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993). • A apresentação de miniaturas em diferentes escalas, explorando as ideias de correspondência e de variação.	• Registro das justificativas sobre a quantidade de material necessário para a confecção do Aerofractal. • Registro de cálculos indicando o desenvolvimento do pensamento algébrico na vertente do pensamento funcional (BLANTON; KAPUT, 2005), uma vez que os registros indicam a relação de correspondência entre o nível do Aerofractal e o número de células e, também, entre o nível do Aerofractal e o número de faces com papel seda, por meio da operação de potenciação. • Percepção dos alunos indicando a relação de correspondência entre o número de faces com papel seda e o número de células do Aerofractal, antes dos dados serem analisados e escritos por meio de potências.	• Questionamentos ao colaborador a respeito da quantidade de materiais coletados diariamente a fim de documentar a solução da problemática, deixando explícitas as ideias envolvidas. • Envolvimento dos alunos durante a atividade explorando ideias envolvendo contagem, medição e estimativa, ações que contribuem com o início do processo para o desenvolvimento do pensamento funcional (SMITH, 2008). • Apresentação de uma situação relacionada ao contexto da atividade possibilitando a discussão de outros valores percentuais, explorando a ideia de correspondência e de variação.
(v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos	• A atividade teve início com a discussão da existência de carros como os carrinhos em miniatura que os alunos tinham e desencadeou em uma investigação sobre como os carrinhos em miniatura são produzidos de modo a ficarem tão parecidos com os carros originais. A partir dessa investigação os alunos produziram modelos matemáticos que permitiram verificar e validar a razão 1:64 (um para sessenta e quatro) que as miniaturas da marca *Hot Wheels* são construídas.	• A exibição de um vídeo apresentando uma pipa com estrutura fractal foi um convite à confecção de uma pipa com estrutura similar à exibida, porém, em tamanho reduzido. Os alunos confeccionaram um Aerofractal de nível 1 e investigaram as regularidades existentes. A partir dessa investigação produziram modelos matemáticos que permitiram determinar a quantidade de canudos, de células e de faces recobertas por papel seda para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer.	• A partir do tema proposto pelos alunos foi possível visitar uma Associação de recicladores e investigar a quantidade de materiais recicláveis coletados no município que durante o processo de triagem acaba virando rejeito. Os alunos produziram modelos matemáticos empregando os conceitos de razão e porcentagem para realizar essa estimativa.

Fonte: Dos autores

O quadro revela que as cinco formas de pensamento algébrico indicadas por Kaput (1999), foram desenvolvidas por meio das atividades de Modelagem Matemática, algumas com mais frequência que outras.

A forma (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições foi observada nas fases de “inteiração” e de “matematização” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), bem como em decorrência dos princípios da “realidade”, da “construção” e da “documentação do modelo” (LESH, et al., 2000). Os indícios de desenvolvimento dessa forma de pensamento foram observados com mais frequência que as outras, fato que corrobora com a descrição mencionada por Kaput (1999), pois para o autor, essa forma de pensamento algébrico se configura como base para as outras, uma vez que a generalização e a formalização são intrínsecas à atividade matemática, pois são elas que caracterizam um pensamento como matemático.

A forma (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), foi observada de uma forma mais frequente na primeira e na terceira atividade, principalmente nas fases de “matematização” e “resolução (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) e em decorrência dos princípios da “documentação do modelo” e do “protótipo eficaz” (LESH, et al., 2000), uma vez que os alunos foram capazes de construir relações que não estavam evidentes, mas que puderam ser constatadas e descritas por meio de símbolos e regras sintáticas, mobilizando a construção de significados para os conceitos envolvidos durante as observações e experimentações, como quando reconheceram a multiplicação como operação inversa da divisão, ao realizarem os cálculos que comprovariam as hipóteses mencionadas; quando foram capazes de determinar as dimensões de uma miniatura em escala diferente da trabalhada no contexto da atividade; quando utilizaram as regras sintáticas da operação de potência para estabelecer relações entre a quantidade de material necessário para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer; e quando compreenderam o conceito de razão como a comparação relativa entre duas grandezas, bem como reconheceram que a razão pode ser expressa na forma de fração e, também, na forma de porcentagem.

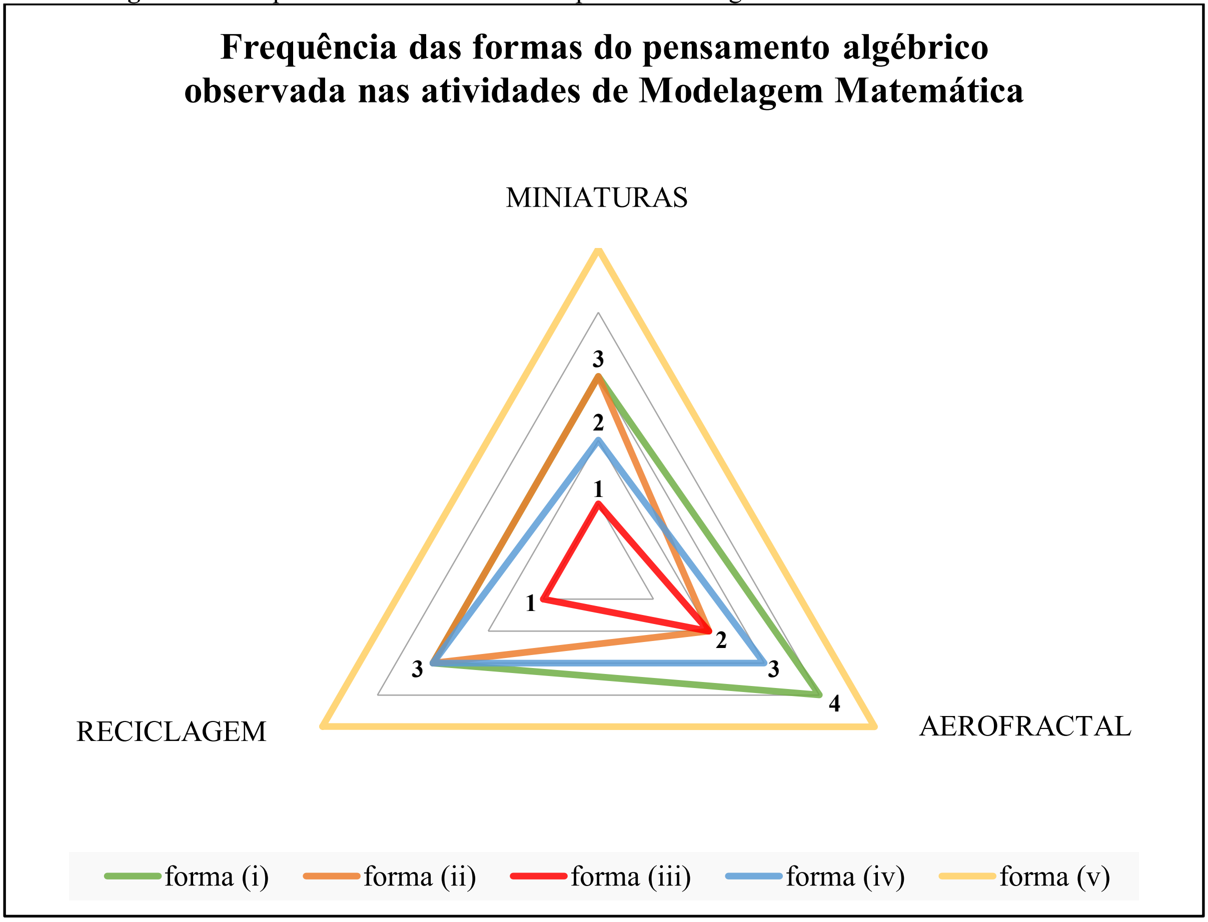
A forma (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações teve mais indícios de desenvolvimento na segunda atividade. Foi observada com mais frequência nas fases de “matematização” e “resolução” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) e em decorrência dos princípios da “construção do modelo” e da “autoavaliação” (LESH, et al., 2000). A partir de suas experiências matemáticas, os alunos se envolveram em situações de experimentações, testando e comprovando equivalências, bem como, em situações que requereram a percepção de regularidades possibilitando generalizá-las e registrá-las em termos de uma linguagem matemática. Essas ações compreendem o estudo de estruturas capazes de fornecer uma base para níveis mais elevados de abstração e formalização.

A forma (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas foi observada com mais frequência na segunda e na terceira atividade, principalmente nas fases de “matematização” e de “interpretação de resultados e validação” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) e em decorrência dos princípios da “construção”, da “documentação do modelo” e da “generalização” (LESH, et al., 2000). Os momentos que oportunizaram a observação dos indícios dessa forma de pensamento estão ligados às ideias de correspondência e variação de quantidades que fundamentam o conceito de função, embasadas nos diversos tipos de experiências matemáticas envolvendo contagem, medição e estimativa.

A forma (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos indica a modelagem como uma forma de descrever fenômenos extramatemáticos e matematizá-los por meio da linguagem. Observamos que os momentos que oportunizaram aos alunos explorar, argumentar e representar relações de diferentes formas, estiveram presentes durante todo o desenvolvimento das atividades. Assim sendo, a forma (v) do pensamento algébrico “reflete a álgebra como uma ‘rede de linguagens’ que penetra todos os outros aspectos da matemática” (VAN DE WALLE, 2009, p. 318), compreendendo todas as outras formas do pensamento algébrico indicadas por Kaput (1999). Dessa forma, esteve presente nas quatro fases indicadas por Almeida, Silva e Vertuan (2012) e sua ocorrência leva em consideração os seis princípios indicados por Lesh, et al. (2000).

O gráfico a seguir, Figura 66, apresenta uma possibilidade de leitura da frequência em que as cinco formas do pensamento algébrico foram observadas.

Figura 66: Frequência das cinco formas do pensamento algébrico durante as três atividades analisadas



Fonte: Dos autores

No gráfico, o vértice de cada triângulo indica a frequência com que cada forma do pensamento algébrico ocorreu na respectiva atividade. Por exemplo, na atividade “Aerofractal” observamos que a forma (i), sinalizada pelo triângulo verde ocorreu em quatro momentos; a forma (ii), sinalizada pelo triângulo laranja ocorreu em dois momentos; a forma (iii), sinalizada pelo triângulo vermelho, também ocorreu em dois momentos; a forma (iv), sinalizada pelo triângulo azul ocorreu em três momentos; e, por fim, a forma (v), sinalizada pelo triângulo amarelo, configura a Modelagem do fenômeno sob investigação, que permeia todo o desenvolvimento da atividade, por isso, optamos por representá-la no gráfico por um triângulo que inclui todos os outros.

A escala utilizada, do 1 ao 4, foi escolhida com a intenção de indicar a quantidade de ocorrências que cada forma do pensamento algébrico foi observada durante o desenvolvimento das atividades. A intenção não é fazer um comparativo entre as quantidades e as atividades, ou seja, não queremos apontar a atividade que proporcionou mais indícios de desenvolvimento do pensamento algébrico, mas sinalizar o potencial que atividades de Modelagem Matemática têm para desenvolver as cinco formas de pensamento algébrico, sistematizadas por Kaput (1999).

Por isso, nas análises, consideramos as especificidades de cada atividade – tema, problema, desenvolvimento matemático, etc. –, bem como os momentos de familiarização dos alunos com as atividades de Modelagem Matemática.

Reconhecemos durante a análise das atividades de Modelagem Matemática, cujo *design* foi orientado pelos princípios das MEAs, diversos momentos em que os alunos tiveram a oportunidade de produzir modelos matemáticos com o intuito de solucionar a problemática inicial. As ações pertencentes a esses momentos envolvem interpretações, descrições, conjecturas, explicações e justificativas, constituindo-se em ações fundamentais para aprender Matemática (DOERR, ENGLISH, 2003). Observamos, ainda, que essas ações estão ligadas às cinco formas do pensamento algébrico propostas por Kaput (1999), pois segundo o próprio autor, o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio dessas cinco formas requer dos alunos observações de fenômenos e experimentações, envolvendo formulação de conjecturas, justificações, argumentações, generalizações e descrições a partir do uso da linguagem matemática. Assim sendo, entendemos que os alunos tiveram a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico, pois durante o desenvolvimento das atividades analisadas foi possível observar a prática dessas ações.

Vale a pena destacar que as atividades de Modelagem Matemática analisadas foram planejadas e desenvolvidas com base nas quatro fases de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e nos seis princípios das MEAs (LESH, et al., 2000) e não tinham, a priori, a intenção de desenvolver as formas do pensamento algébrico sistematizadas por Kaput (1999). Portanto, as discussões e reflexões ocorridas não foram direcionadas para esse fim, mas para orientar o desenvolvimento da atividade. Por isso, em nossas análises nos dedicamos a investigar *como atividades de Modelagem Matemática, na perspectiva da Model-Eliciting Activities (MEAs), podem contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental?* e é nesse momento de análise que apresentamos evidências de desenvolvimento das cinco formas do pensamento algébrico, indicadas pelo autor. Foi possível concluir, a partir das análises, que as cinco formas do pensamento algébrico estiveram presentes no desenvolvimento das atividades, conforme descrevemos neste capítulo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa fundamentou-se principalmente em questões teóricas associadas ao Ensino de Matemática no 6º ano do Ensino Fundamental, à Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e ao Pensamento Algébrico, com a intenção de investigar *como atividades de Modelagem Matemática, na perspectiva da Model-Eliciting Activities (MEAs), podem contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental?*

Na fundamentação de nosso trabalho consideramos a Modelagem Matemática como uma alternativa para as práticas de sala de aula (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; TORTOLA, 2012; 2016; STILLMAN, 2015), e vislumbramos seu potencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico, um dos tipos de pensamentos matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo dos anos escolares e que tem sido foco de pesquisas (KEN, 1989; FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; LINS; GIMENEZ, 1997), que sugerem a iniciação da educação algébrica desde os primeiros anos escolares. Nesse contexto, Kaput (1999), defende a ideia de que o trabalho com a Álgebra em sala de aula deve incluir cinco diferentes formas do pensamento algébrico, o qual pode ser viabilizado por meio de atividades que requerem dos alunos observações de fenômenos e experimentações, que envolvem formulação de conjecturas, justificações, argumentações, generalizações e descrições a partir do uso da linguagem matemática.

Entretanto, constatamos, que o desenvolvimento do pensamento algébrico não tem sido o foco do ensino da Álgebra, que, ainda, têm focalizado o uso, a memorização e a repetição de fórmulas, como modo único de aplicação dos conceitos algébricos (AGUIAR, 2014; SCARLASSARI; MOURA, 2015; COELHO; AGUIAR, 2018). Sendo assim, nos propomos investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio de atividades de Modelagem Matemática, em um 6º ano do Ensino Fundamental, visto que essa série, de acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (2008), é a que antecede o ensino formal da Álgebra, sendo, portanto, adequada para a promoção de atividades que deem suporte para o desenvolvimento do pensamento algébrico e, consequentemente, para a realização de nossa pesquisa.

Para isso foi necessário compreender que a produção de um modelo matemático, considerado parte do encaminhamento de uma atividade de Modelagem, que pode ser expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), oportuniza aos alunos a observação de características da situação-problema, a conjectura de regularidades, o estabelecimento e a generalização de relações, fazendo uso da linguagem matemática para descrevê-las, e que essas ações, podem ser associadas ao pensamento algébrico e, se bem planejadas, podem auxiliar no seu desenvolvimento.

Em nossa pesquisa, optamos por utilizar a *Model-Eliciting Activities* (MEAs), proposta por Lesh, et al. (2000), que é delineada com base em seis princípios que orientam a produção, interpretação e análise de modelos matemáticos, e envolve ações que estão diretamente ligadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico (BLANTON; KAPUT, 2005). Essa estratégia viabilizou interpretar os indícios de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos à medida que a atividade ocorria e, posteriormente, ao analisar os registros escritos produzidos. As atividades desenvolvidas sob a perspectiva das MEAs têm como pressuposto a prática da Modelagem Matemática para a elicitação de modelos, ou seja, para provocar a externalização dos pensamentos e conclusões dos alunos em relação à situação-problema por meio de um sistema conceitual descrito em termos de uma linguagem matemática, isto é, de um modelo matemático.

A análise das atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas sob a perspectiva das MEAs, revelou indícios do desenvolvimento das cinco formas do pensamento algébrico indicadas por Kaput (1999), algumas com mais frequência que outras. As estratégias utilizadas pelos alunos como a elaboração de hipóteses, a argumentação em favor dessas hipóteses, as justificativas, o uso de gestos, de registros aritméticos, tabulares, figurais, em linguagem natural, as ideias algébricas, as observações e reflexões sobre os diferentes encaminhamentos para a produção dos modelos matemáticos, geraram questionamentos e diálogos que foram favoráveis para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Observamos o engajamento dos alunos na resolução das situações-problema, as tomadas de decisões de forma autônoma, o pensar e o avaliar os empreendimentos realizados, a reflexão sobre as discussões matemáticas e, principalmente, os argumentos e justificativas das escolhas realizadas, sinalizando a liberdade de encaminhamentos que essas atividades proporcionam aos alunos e a intencionalidade pedagógica que permeia a busca pela resolução dos problemas. As atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas envolveram os alunos na elaboração e utilização de modelos. Os alunos não utilizaram modelos preestabelecidos, como em uma abordagem habitual, ao invés disso, utilizaram estratégias próprias e intuitivas, recorreram às experiências de vida, à percepção de regularidades, à criatividade, aos conhecimentos matemáticos prévios empregando a interconectividade dos conteúdos matemáticos durante a produção de seus modelos.

Essas ações mostraram que os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental são capazes de resolver situações-problema apresentando evidências das cinco formas do pensamento algébrico que o trabalho com a Álgebra em sala de aula deve considerar (KAPUT, 1999), ou seja, a Modelagem Matemática se configura como uma alternativa pedagógica que permite o trabalho com o pensamento algébrico antes mesmo do ensino formal, que, geralmente, ocorre somente a partir do 7º ano do Ensino Fundamental. Os alunos tiveram a oportunidade de se envolver na construção de uma linguagem simbólica que fosse significativa para eles, oportunizando o trabalho com formas de representação convencionais, como sugere o NCTM (2000), permitindo que os alunos aperfeiçoassem suas representações, utilizando-as como ferramentas para a aprendizagem da Matemática.

Diante disso, acreditamos que nossa pesquisa promoveu experiências nas quais os alunos fizeram observações, manipularam objetos, investigaram e resolveram situações-problema de seu entorno usando a Matemática, buscando meios próprios e formas de pensar sem, necessariamente, fazer uso de mecanismos prontos e predeterminados. Os alunos demonstraram entusiasmo, interesse, empenho e atuaram nas ações que exigiram tanto individualidade, quanto coletividade. Dessa forma, acreditamos que os alunos ampliaram seus conhecimentos científicos e socioculturais, por meio da Matemática.

Os resultados que apresentamos neste relatório de pesquisa foram utilizados na confecção do produto educacional "Modelagem Matemática e Pensamento Algébrico: orientações para professores do Ensino Fundamental", um material pedagógico no qual as atividades de Modelagem desenvolvidas são sugeridas como atividades com potencial para ensinar e aprender Matemática e, com as devidas orientações, mobilizar e/ou desenvolver o pensamento algébrico.

Para aqueles professores que queiram trabalhar com o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da Modelagem Matemática no Ensino Fundamental, o nosso produto educacional elucida possibilidades de implementar essa alternativa nesse contexto escolar, pelo fato de acreditarmos que os alunos, antes mesmo da introdução formal da Álgebra, no 7º ano do Ensino Fundamental, possuem condições de resolver problemas utilizando conhecimentos condizentes com sua idade e série escolar, estabelecendo estruturas capazes de fornecer uma base para níveis mais elevados de abstração e formalização, que serão representadas por meio de equações e expressões algébricas em séries futuras.

As atividades apresentadas no produto educacional contemplam as especificidades da turma em que foram desenvolvidas, ou seja, do 6º ano do Ensino Fundamental que participou da pesquisa. Os resultados, portanto, dependem das discussões empreendidas pelos sujeitos e ao utilizarem as atividades disponibilizadas no produto os professores devem encaminhá-las de acordo com os conhecimentos e série de seus alunos, ou seja, novas aplicações possivelmente vão gerar diferentes discussões e, por isso, o professor não pode se limitar às discussões apresentadas e deve estar atento e fundamentado teoricamente para que consiga auxiliar no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Consideramos importante ressaltar alguns desafios e percalços que enfrentamos durante o desenvolvimento de nossa pesquisa, a saber, o estranhamento de alguns alunos com a prática da Modelagem Matemática, que não prioriza a resolução de exercícios no caderno e o uso do livro didático, como ocorre nas aulas habituais; a resistência inicial de alguns alunos em trabalhar coletivamente; a cobrança pedagógica em relação ao cumprimento dos conteúdos curriculares preestabelecidos; e a ausência de alguns alunos nas coletas de dados que necessitaram ser realizadas em contraturno, visto que a professora possuía outras turmas no mesmo período em que as atividades foram desenvolvidas e não obteve autorização da direção do Colégio para redefinir seus horários de aula para que pudesse atender a esse propósito.

Cabe mencionar que os resultados observados devem ser pensados como um ponto de partida para novos estudos sobre as temáticas abordadas. As pesquisas que articulam Modelagem Matemática e pensamento algébrico no Ensino Fundamental se mostram como um vasto campo a ser explorado. Acreditamos que a partir dessa pesquisa possa ser possível, por exemplo, investigar sobre o desenvolvimento de cada uma das cinco formas do pensamento algébrico (KAPUT, 1999), em específico, ou ainda, investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de atividades de Modelagem Matemática em séries cuja Álgebra já tenha sido introduzida de modo formal.

Por fim, gostaríamos de pontuar que o desenvolvimento desta pesquisa mostrou o quão gratificante e produtivo pode ser o trabalho com atividades de Modelagem Matemática no 6º ano do Ensino Fundamental e o potencial que essas atividades têm para criar momentos em que o pensamento algébrico pode ser explorado, assim como outras ideias e conceitos matemáticos. Esperamos que nossa pesquisa possa contribuir para a compreensão do modo que alunos do 6º ano do Ensino Fundamental lidam com atividades de Modelagem Matemática e como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico nesse contexto.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, M. **O percurso da didatização do pensamento algébrico no Ensino Fundamental**: uma análise a partir da Transposição Didática e de Teoria Antropológica do Didático. São Paulo, 2014. 310 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2014.

ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C. **Pensamento algébrico: em busca de uma definição**. Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM. Campo Mourão, PR: v.6, n.10, p.34-60, jan.-jun. 2017.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência & Educação**, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre "como fazer" Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Orgs.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, p. 19-43, 2011.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: ALMEIDA, M. W. L; SILVA, K. A. P. (Orgs.). **Modelagem em Foco**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2014.

BASSANEZI, R.C. **Ensino–aprendizagem com modelagem matemática.** São Paulo: Contexto, 2002.

BEAN, D. O que é Modelagem Matemática? **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 8, n. 9-10, p. 49-57, abr. 2001.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática**. Blumenau: Ed. FURB, 1999.

BLANTON, M. L. **Algebra and the Elementary Classroom – Transforming Thinking, Transforming Practice**. Portsmouth, NH: Heinemann, 2008.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.36, n.5, p.412-446, 2005.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.). **Early algebraization**, Berlin: Springer, p.5-23, 2011.

BLUM, W. Mathematical Modelling in Mathematics Education and Instruction. In: BREITEIG, T.; HUNTLEY, I.; KAISER, G. Messmer (Ed.). **Teaching and Learning Mathematics in Context**. London: Ellis Horwood Limited, 1993. p. 3-14.

BOOTH, L. R. Children's difficulties in beginning algebra. In: COXFORD, A. F. (Ed.), **The ideas of algebra, K-12.** Reston, VA: NCTM, p. 20-32, 1988.

BORBA, M; ARAÚJO, J. L. (Org.). Pesquisa qualitativa em educação matemática. 2. ed. – Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BORROMEO FERRI, R. Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. **Educação e Matemática**: Revista da Associação de Professores de Matemática, Lpromoisboa, n. 110, p. 19-25, nov./dez. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC versão final.** Brasília, DF, 2018.

BRITT, M. S.; IRWIN, K. C. Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.), **Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives**. Heidelberg, Germany: Springer, p. 137-159, 2011. DOI: 10.1007/9783-642-17735-4.

CAI, J.; NG, S.; MOYER, J. C. Developing students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.), **Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives**. Heidelberg, Germany: Springer, p. 25-41, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-17735-4_3

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, Lisboa, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007.

CARPENTER, T. P.; FRANKE, M. L.; LEVI, L. **Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school**. Portsmouth, NH: Heinemann, 2003.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M.; SCHLIEMANN, A. D. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM Mathematics Education**, n. 40, p. 3-22, 2008. DOI: 10.1007/s11858-007-0067-7

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.; BRIZUELA, B. M.; EARNEST, D. Arithmetic and algebra in early mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education**, n. 37, p. 87–115, 2006.

CHAMBERLIN, M. T. **Teacher investigations of students' work: The evolution of teachers' social processes and interpretations of students' thinking**. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, IN, 2002.

CHAMBERLIN, S. A.; MOON, S. Model-Eliciting Activities as a Tool to Develop and Identify Creatively Gifted Mathematicians. **Journal of Secondary Gifted Education**, v. 17, n.1, p. 37-47, 2005.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estud. av.**, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 171-187, 2018. DOI: 10.1590/s0103-40142018.3294.0013

COOPER, T.; WARREN, E. Year 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representation and theory for teaching and learning. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.), **Early algebraization**. Berlin: Springer, p. 187-214, 2011.

CUNHA, A. G. da. **Dicionário etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1989.

CUNHA, E. V. R. Cultura, contexto e a impossibilidade de uma unidade essencial para o currículo. **Currículo sem Fronteiras**, v. 15, n.3, p. 575-587, set./ dez. 2015.

CUNHA, K. S.; S, J. P. Sobre base e bases curriculares, nacionais, comuns: de que currículo estamos falando? **Revista e-Curriculum**, São Paulo, v. 14, n. 4, p. 1236- 1257, out./ dez. 2016.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M; ARAÚJO, J. L. (Org.). Pesquisa qualitativa em educação matemática. 2. ed. – Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 9 –21.

DARK, M.; MANIGAULT, C. **Information Assurance Model-Eliciting Activities for Diverse Learners.** Center for Education and Research Information Assurance and Security - CERIAS Tech Report 2007-92, Purdue University, West Lafayette, IN 47907-2086, 2007.

DOERR, H. M.; ENGLISH, L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 34, n. 2, p. 110-136. 2003.

FERRUZZI, E. C.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E.; ALMEIDA, L. M. W. Possibilidades de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática em diferentes níveis de escolaridade. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: SBEM, 2010.

FIORENTINI, D.; MIORIM, A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar a Educação. Algébrica Elementar. **Pró-posições**, v.4, n.1, p.78-91, 1993.

FREITAS, L. C. BNCC: sob nova direção. Disponível em: https:// avaliacaoeducacional.com/2016/05/31/bncc-sob-nova-direcao/.Acesso em 20 de janeiro de 2021.

FUJII, T.; STEPHENS, M. Fostering understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. In: CHICK, H.; STACEY, K.; VINCENT, J.; VINCENT, J. (Eds.), **Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the teaching and learning of álgebra**. Melbourne, Australia: University of Melbourne, v.1, p.258-264, 2001.

GLAS, E. F. Klein's model of mathematical creativity. **Science and Education**, v.11, p. 95–104, 2002.

GOMES, J. C. S. P.; SILVA, K. A. P. **Modelagem Matemática na otimização de um protótipo de embalagem: relato de experiência**. ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – XIV EPREM. 2017a. **Anais**. Cascavel – PR.

HESTENES, D. Notes for a Modeling Theory of Science, Cognition and Instruction. In: **GIREP Conference: Modelling in Physics and Physics Education**, Amsterdam, Netherlands, 2006.

HIEBERT, J.; CARPENTER, T.; FENNEMA, E.; FUSON, K.; WEARNE, D.; MURRAY, H., et al. **Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding**. Portsmouth, NH: Heinemann Publishers, 1997.

IRWIN, K. C.; BRITT, M. S. The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zealand Numeracy Project. **Educational Studies in Mathematics**, v.58, n.2, p.169-188, 2005.

JACOBS, V. R.; FRANKE, M. L.; CARPENTER, T. P.; LEVI, L.; BATTEY, D. Professional developing focused on children's algebraic reasoning in elementary School. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 38, n.3, p. 258–288, 2007.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra with understanding. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Orgs.) **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Erlbaum, p. 133-155, 1999.

KAPUT, J. J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (Eds.). **Algebra in the early grades**, 2008. p.5-17. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W; BLANTON, M. L. (Eds.), **Algebra in the early years**. Hillsdale, NJ, U.S.A.: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics, 2008.

KEN, M. Fostering algebraic thinking in children. **The Australian Mathematics Teacher**, v.4, n.45, p.14-16, 1989.

KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: what is it? **The Mathematics Educator**, v.8, n.1, p.139–151, 2004.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 317-326, 1981.

KIERAN, C. Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante**, v.16, n.1, p. 5-26, 2007a.

KIERAN, C. The learning and teaching of algebra. In: GROUWS, D. A. (Ed.), **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York, NY: Macmillan, p. 390-419, 1992.

KIERAN, C.; PANG, J.; SCHIFTER, D.; NG, S. F. **Early ALgebra Research into its Nature, its Learning, its Teaching**. Series: ICME-13 Topical Surveys. Springer International Publishing, 2016.

KISTEMANN, M. A. J. Modelagem em Educação Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 26, n. 42, p.743-746, 2012.

KLÜBER, T. E. **Uma metacompreensão da Modelagem Matemática na Educação Matemática**. 396. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

LESH, R.; DOERR, H. M. Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In: LESH, R.; DOERR, H. M. (Eds.). **Beyond constructivism**: Models and Modelling Perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching. New York: Routledge, 2003. p. 3-33.

LESH, R.; HAREL, G. **Problem solving, modeling, and local conceptual development**. Mathematical thinking and learning, v. 5, n.2, 2003, p. 157-189.

LESH, R.; HOOVER, M.; HOLE, B.; KELLY, A.; POST, T. Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. In: KELLY, A. E.; LESH, R. A.(Eds.). **Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.** Mahwah: Routledge, 2000. p.591-646.

LESH, R.; LAMON, S. Assessing authentic mathematical performance. In LESH, R. S.; LAMON, S. J. (Eds.), **Assessment of authentic performance in school mathematics**. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science, p.17–62, 1992.

LINCHEVSKI, L.; LIVNEH, D. Structure sense: the relationship between algebraic and numerical context. **Educational Studies in Mathematics**, n. 40, p. 173-196, 1999.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas, SP, Papirus, 1997.

LINS, R., KAPUT, J. The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), **The Future of Teaching and Learning of Algebra**. The 12th ICMI Study. Boston: Kluwer, p.73-96, 2004.

MAAß, K.; GURLITT, J. Designing a teacher-questionnaire to evaluate professional development about modelling. In: DURAND-GUERRIER. V.; SOURY-LAVERGNE. S.; ARZARELLO. F. (Eds.), **Proceedings of 6th congress of European society for Research in Mathematics Education**. Lyon: University of Lyon, 2009, p. 2056–2065.

MASON, J.; STEPHENS, M.; WATSON, A. Appreciating mathematical structure for all. **Mathematics Education Research Journal**, v.21, n.2, p.10-32, 2009. DOI: 10.1007/BF03217543.

MESTRE, C. **O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino**. Tese (Doutoramento em Educação na especialidade de Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, 2014.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, A. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? **Pró-Posições**, v.3, n.1, p.39-54, 1992.

MOLINA, M.; CASTRO, E.; AMBROSE, R. Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. **PNA: Revista de Investigacíon en Didáctica de la Matemática,** v.1, n.1, p. 33-46, 2006.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathmatics**. Reston, VA: NCTM, 2000.
NISS, M., BLUM, W.; GALBRAITH, P. Introduction to modelling and applications in mathematics education. In BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H. W.; NISS, M. (eds). **Modelling and Applications in Mathematics Education**. **14th ICMI Study**. New York, USA: Springer. p. 3-32, 2007.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica Matemática.** Curitiba, 2008.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**, Lisboa: DGIDC, 2009.

PRENZEL, M. The selective persistence of interest. In: RENNINGER. K. A.; HIDI. S.; KRAPP. A. (Eds.), **The role of interest and development**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum & Associates, 1992, p. 71–98.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: **North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME**. Bergen University College. v. 1, 2006.

RADFORD, L. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.). **Early algebraization**, Berlin: Springer, p. 303-322, 2011.

RIBEIRO, W. G.; CRAVEIRO, C. B. Precisamos de uma Base Nacional Comum Curricular?. **Linhas Críticas**, Brasília, DF, v. 23, n.50, p. 51-69, fev. 2017 a mai. 2017.

RUSSELL, S.; SCHIFTER, D.; BASTABLE, V. Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.), **Early algebraization**. Berlin: Springer, p. 43-69, 2011.

SCARLASSARI, N. T.; MOURA, A. R. L. de. **Dificuldades dos alunos do ensino fundamental, em álgebra, e suas possíveis origens**. Disponível em: http://alb.com.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais15/Sem04/nathaliascarlassari.htm>. Acesso em: 20 de jan. de 2021.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M. **Bringing out the algebraic character of arithmetic**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2007.

SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D. Atividades de Modelagem Matemática: diferentes abordagens para diferentes níveis de escolaridade. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, EPMEM, 4, 2010, Maringá. **Anais**... Maringá: UEM, 2010. v. 1. p. 1-11.

SMITH, E. Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In: KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (Eds.), **Algebra in the early years**. Reston, VA: NCTM, p. 133-160, 2008.

STEINER, G. F.; STOECKLIN, M. Fraction calculation: A didactic approach to constructing mathematical networks. **Learning & Instruction**, v. 7, 1997, p. 211–233.

STEPHENS, M; WANG, X. Probing some key junctures in relational thinking: A study of Year 6 and Year 7 students from Australia and China. In: HUNTER, R.; BRICKNELL, B.; BURGESS, T. (Eds.), **Proceeding of the 32nd Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia: Crossing Divides**. Wellington, New Zealand: MERGA, v.2, p. 499-506, 2009.

STILLMAN, G. Problem Finding and Problem Posing for Mathematical Modelling. In: HOE, L. N.; DAWN, N. K. E. (Edts.). **Mathematical Modelling**: from theory to practice. Singapore: World Scientific Publishing, 2015. p. 41-56.

STOHLMANN, M.; ALBARRACIN, L. What is known about elementary grades mathematical modelling. **Education Research International**, London, v. 1, n. 9, 2016. http://dx.doi.org/10.1155/2016/5240683

TORTOLA, E. **Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2016. 306 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

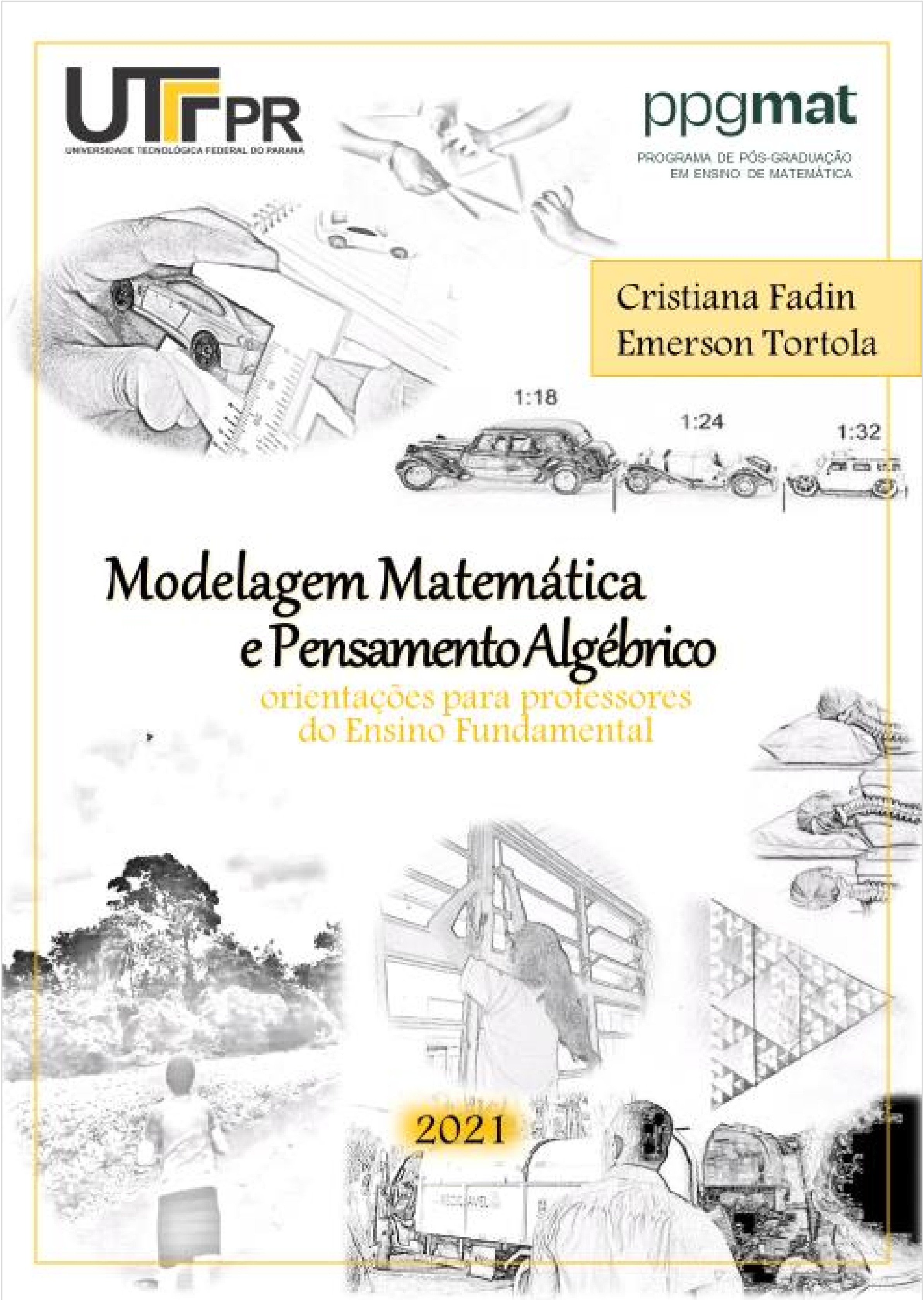
TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** Dissertação. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

VAN DE WALLE, J. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WARREN, E.; COOPER, T. Young children's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. **Mathematics education research journal**, v.17, n.1, p. 58-72, 2005.

WOOD, T.; MERKEL, G.; UERKWITZ, J. Creating a context for talking about mathematical thinking. **Educação e matemática**, v. 4, 1996, 39–43.

APÊNDICE A – CAPA DO PRODUTO EDUCACIONAL



ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

ppgmat PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Modelagem Matemática e Pensamento Algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental
Título do Produto/Processo Educacional	Modelagem Matemática e Pensamento Algébrico: orientações para professores do Ensino Fundamental
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Cristiana Fadin
	Orientador/Orientadora: Emerson Tortola
	Outros (se houver):
Data da Defesa	24/03/2021

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); *L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática* (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *<u>Apenas um item pode ser marcado</u>. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	( ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *<u>Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória</u>.	( ) Local ( ) Regional (X) Nacional ( ) Internacional Justificativa (*obrigatória*): Consideramos que a abrangência do PE é nacional por conta das temáticas envolvidas nas atividades de Modelagem Matemática e por estarem descritas em língua portuguesa.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática	( ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou

profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). *Apenas um item pode ser marcado.	aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada *Apenas um item pode ser marcado.	( ) Econômica; ( ) Saúde; (X) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; ( ) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.	(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (X) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (X) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. (X) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	**Instituição**
Emerson Tortola	UTFPR – Toledo
Magna Natalia Marin Pires	UEL
Rodolfo Eduardo Vertuan	UTFPR – Toledo