

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ — UTFPR
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL — PROFMAT

DJONES ALDIVO BONI

ENSINANDO PROBABILIDADE COM
O JOGO DE DADOS DE MOZART

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TOLEDO

2021

DJONES ALDIVO BONI

ENSINANDO PROBABILIDADE COM
O JOGO DE DADOS DE MOZART

TEACHING PROBABILITY WITH
MOZART'S DICE GAME

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) da UTFPR (Universidade Tecnológica Federal do Paraná), Campus Toledo, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade

Coorientador: Prof. Dr. Andrés Eduardo Coca Salazar

TOLEDO

2021



4.0 Internacional

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es).

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Toledo**



DJONES ALDIVO BONI

ENSINANDO PROBABILIDADE COM O JOGO DE DADOS DE MOZART.

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 18 de Fevereiro de 2021

Prof Rodrigo Manoel Dias Andrade, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Leandro Da Silva Tavares, Doutorado - Universidade Federal do Cariri

Prof Rodolfo Eduardo Vertuan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 18/02/2021.

Dedico aos professores que sempre
buscam ser melhores para seus alunos.

AGRADECIMENTOS

Com a conclusão deste trabalho, gostaria de agradecer a todos que nele contribuíram e às pessoas que fizeram a diferença em todos os dias de minha vida. De perto ou de longe, recebam meu sincero obrigado!

À minha família e aos meus amigos, por todo amparo e motivação que me deram.

Aos meus professores e colegas, com os quais muito aprendi nessa jornada.

Aos professores que cederam seu tempo e suas turmas. Com muito profissionalismo contribuíram nesta pesquisa.

Aos meus orientadores, pela sabedoria, disponibilidade, paciência, correções e sugestões.

Também desejo transmitir meus agradecimentos à Universidade Tecnológica Federal do Paraná, pelo ensino de qualidade que supre aos seus acadêmicos e pela concessão de uma bolsa de estudos.

RESUMO

BONI, Djones Aldivo. **Ensinando Probabilidade com o Jogo de Dados de Mozart**. 143 f. Dissertação de mestrado: PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo, 2021.

O objetivo do presente trabalho é elaborar uma proposta de ensino do conteúdo de probabilidade, baseada no Jogo de Dados de Mozart. A pesquisa apresenta-se com caráter exploratório-descritivo, desenvolvendo uma proposta que faz uso de atividades em grupo e discussões direcionadas, de forma que os alunos realizem o levantamento de hipóteses, discutem métodos para testá-las e, a partir disso, cheguem à resolução dos problemas sugeridos. Nela, são abordados conceitos de combinatória, de probabilidade, de distribuição de probabilidades e o uso da experimentação para testar hipóteses probabilísticas. Como suplemento à proposta foram elaborados: um produto educacional (em formato de *website*), materiais de ensino e uma seleção de recursos tecnológicos disponíveis na *internet*. Além disso, foi realizada uma pesquisa de campo, aplicando a proposta de ensino com alunos de Ensino Médio e de primeiro período de cursos de Graduação, seguida por um questionário de avaliação. Para tanto, a proposta foi adaptada para o formato de uma videoconferência e foi aplicada com alunos de Ensino Médio, além de uma aplicação suplementar em modelo de videoaula com alunos de Ensino Médio e de primeiro período de cursos de Graduação. O questionário aplicado aos alunos buscou identificar o público alvo, averiguar aspectos de interesse e identificar atributos de aprendizado dos alunos. Na avaliação das respostas ao questionário foram identificadas as seguintes impressões: reação positiva dos alunos, interesse no assunto e aprendizado do conteúdo, o que pode ter sido influenciado positivamente por motivações pessoais dos alunos, como gostar de música, tocar instrumentos musicais ou apreciar a matemática.

Palavras-chave: Matemática e música. Probabilidade. Jogos didáticos. Didática de ensino.

ABSTRACT

BONI, Djones Aldivo. **Teaching Probability with Mozart's Dice Game**. 143 p. Master's dissertation: PROFMAT, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo, 2021.

The present work's objective is to elaborate a proposal to teach probabilities, based on Mozart's Dice Game. The research presents itself with an exploratory-descriptive characteristic, developing a proposal that uses group activities with targeted discussions, so that students raise hypotheses, discuss methods to test them and, thereby, solve the suggested problems. Within the proposal are addressed: concepts of combinatorics, probabilities, probability distributions and the use of experimentation to test probabilistic hypotheses. Additional content was prepared as a supplement to the proposal: an educational product (in the form of a website), teaching materials and a selection of technological resources available on the internet. In addition, it was carried out a field research, applying the teaching proposal with high school and first undergraduate students, followed by an evaluation questionnaire. For this, the proposal was adapted to the format of a videoconference and it was applied to high school students, as well as a supplementary application with a video class with high school and first undergraduate students. The questionnaire applied to students sought to identify the target audience, ascertain aspects of interest and identify learning attributes about them. In the evaluation of the responses to the questionnaire the following impressions were identified: positive reaction of the students, interest in the subject and learning of the content, which positively may have been influenced by personal motivations of the students, such as liking music, playing musical instruments or enjoying math.

Key-words: Mathematics and music. Probability. Didactic games. Teaching didactics.

LISTA DE FIGURAS

1	Triângulo de Pascal.	26
2	Diagrama de Venn dos eventos E e F no espaço amostral S	31
3	Probabilidades dos resultados de um dado (distribuição uniforme).	42
4	Probabilidades dos resultados da soma de dois dados (distribuição triangular).	43
5	Distribuição de Bernoulli.	44
6	Distribuição binomial.	46
7	Distribuição geométrica.	47
8	Pauta musical.	48
9	Pauta musical com notas simultâneas.	49
10	Teclado do piano: tons, semitons e nomes das notas.	50
11	Pauta musical com acidentes: \sharp , \flat e \natural	51
12	Figuras rítmicas: valores das notas e dos silêncios.	52
13	Ligações de figuras rítmicas por barras.	52
14	Exemplo de abreviatura de repetição de um trecho.	53
15	Pauta musical para piano.	54
16	Minueto gerado usando o Jogo de Dados de Mozart, com destaque às seções A , A' e B do minueto.	55
17	Partitura em branco do Jogo de Dados de Mozart.	59
18	Minueto gerado usando o Jogo de Dados de Mozart.	59
19	Distribuição de probabilidades e frequência do lançamento de um dado.	72
20	Exemplos de desenvolvimento das distribuições no quadro: distribuição uniforme e distribuição triangular	73
21	Distribuição de probabilidades e frequência da soma de dois dados.	76
22	Primeiro minueto com menor probabilidade de ser sorteado no Jogo de Dados de Mozart.	81
23	Segundo minueto com menor probabilidade de ser sorteado no Jogo de Dados de Mozart.	81
24	Minueto com maior probabilidade de ser sorteado no Jogo de Dados de Mozart.	82
25	Distribuições de probabilidades para dados de 12 e de 20 lados.	84
26	Distribuições de probabilidades para soma de dois dados, descartando pares.	87
27	Distribuições de probabilidades para soma de dois dados modificados.	88
28	Comparação do lançamento de dados com o lançamento de moedas.	89

29	Produto educacional: Captura de tela do <i>website</i> com diversos recursos tecnológicos disponíveis para o professor.	95
30	Captura de tela da apresentação “O Jogo de Dados de Mozart e a Probabilidade”.	96
31	Panfleto eletrônico enviado aos alunos.	99
32	Gráfico da Questão 1: Indicação ao vídeo.	104
33	Gráfico da Questão 2: Público alvo.	105
34	Gráfico da Questão 3: Reação ao vídeo.	106
35	Gráfico da Questão 4: Aprendeu algo novo?	107
36	Gráfico da Questão 5: Gosta de quais estilos musicais?	109
37	Gráficos da Questão 6: Toca quais instrumentos musicais?	111
38	Gráfico da Questão 7: Qualidades dos alunos.	112
39	Gráfico da Questão 8: A matemática no mundo.	113
40	Gráfico da Questão 9: Onde se usa a matemática.	114
41	Gráficos da Questão 10: Experimentos aleatórios.	117
42	Gráfico da Questão 11: Na falta de um dado.	118
43	Gráfico da Questão 12: Dados modificados.	119
A.1	Dado planejado.	131
A.2	Partituras em branco para minuetos do Jogo de Dados de Mozart.	133
A.3	Fragmentos melódicos do Jogo de Dados de Mozart.	134
C.1	Comunicação oral apresentada no II EPPROFMAT: “Ensino de Probabilidade com o Jogo de Dados de Mozart”.	141
C.2	Artigo publicado na Revista Transmutare: “Ensino de Probabilidade com o Jogo de Dados de Mozart”.	142

LISTA DE TABELAS

1	Tabela de compassos do Jogo de Dados de Mozart.	58
2	Soma dos dados e fragmentos melódicos que geram o minueto da Figura 18.	59
3	Tabela com cálculos do número de composições com uma dada probabilidade de ser sorteada.	92
A.1	Múltiplas tabelas de compassos do Jogo de Dados de Mozart.	132

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
I	REFERENCIAL TEÓRICO	18
2	O ENSINO DE MATEMÁTICA E DE PROBABILIDADE	19
2.1	O OBJETIVO DE SE ENSINAR MATEMÁTICA	19
2.2	O OBJETIVO DE SE ENSINAR PROBABILIDADE	20
2.3	A CONTEXTUALIZAÇÃO NO ENSINO	21
2.4	OS JOGOS COMO MEIO DE CONTEXTUALIZAÇÃO	22
3	CONCEITOS DE COMBINATÓRIA	24
3.1	PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO	24
3.2	PERMUTAÇÃO	24
3.3	ARRANJO	25
3.4	COMBINAÇÃO	25
3.4.1	Triângulo de Pascal	26
3.4.2	Relação de Stifel	26
3.4.3	Combinações complementares	26
3.4.4	Teorema das linhas	27
4	CONCEITOS DE PROBABILIDADE	28
4.1	EXPERIMENTOS E EVENTOS	28
4.2	PROBABILIDADES DEFINIDAS EM EVENTOS	29
4.3	DEFINIÇÕES CLÁSSICA E FREQUENCIAL DE PROBABILIDADE	32
4.3.1	Definição clássica de probabilidade	32
4.3.2	Definição frequencial de probabilidade	33
4.4	EXEMPLOS DE EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS	33
4.4.1	Probabilidades no lançamento de uma moeda	33
4.4.2	Probabilidades no lançamento de um dado comum	34
4.4.3	Probabilidades da soma de dois dados comuns	35
4.4.4	Probabilidades relacionadas à extração de cartas de um baralho	37
4.5	VARIÁVEIS ALEATÓRIAS	38
4.6	EXPECTATIVA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA	40
4.7	FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES	40
4.7.1	Distribuição uniforme	41
4.7.2	Distribuição triangular	42

4.7.3	Distribuição de Bernoulli	43
4.7.4	Distribuição binomial	44
4.7.5	Distribuição geométrica	45
4.8	COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE NA PROPOSTA DE ENSINO .	47
5	INTRODUÇÃO À TEORIA MUSICAL	48
5.1	NOTAÇÃO MUSICAL	48
5.1.1	A pauta e a notação da altura	48
5.1.2	Notas simultâneas	49
5.1.3	Tom, semitom e acidentes	49
5.1.4	A notação do ritmo	51
5.1.5	Compasso	52
5.1.6	Símbolos de repetição	53
5.1.7	Notação musical para o piano	53
5.2	O MINUETO	54
6	O JOGO DE DADOS DE MOZART	56
6.1	WOLFGANG AMADEUS MOZART	56
6.2	A HISTÓRIA DO JOGO	56
6.3	INSTRUÇÕES DO JOGO	57
II	METODOLOGIA	60
7	PESQUISA BIBLIOGRÁFICA	61
8	PROPOSTA DE ENSINO	63
8.1	ORGANIZAÇÃO DA AULA	63
8.1.1	Materiais para os alunos	63
8.2	EXPLICANDO O JOGO DE DADOS DE MOZART	64
8.3	EXPLICAÇÃO SOBRE AS PARTITURAS	65
8.4	CONTAGEM DO NÚMERO DE COMPOSIÇÕES	66
8.5	INTRODUÇÃO DE CONCEITOS DE PROBABILIDADE	67
8.6	MONTANDO OS DADOS COM OS ALUNOS	69
8.7	UM DADO E A DISTRIBUIÇÃO UNIFORME	71
8.8	EVENTOS INDEPENDENTES	74
8.9	FINALIZANDO A COMPOSIÇÃO	74
8.10	SOMA DE DOIS DADOS E A DISTRIBUIÇÃO TRIANGULAR	75
8.11	ATIVIDADES	77
8.11.1	Trechos melódicos iguais	79
8.11.2	Distribuições de outras fontes de aleatoriedade	82

8.11.3 Atividades avançadas	90
9 PRODUTO EDUCACIONAL	93
III IMPRESSÕES DOS ALUNOS	97
10 APLICAÇÃO DA PROPOSTA	98
10.1 AULA POR VIDEOCONFERÊNCIA	98
10.1.1 Sequência da apresentação	98
10.2 VIDEOAULA	100
10.3 QUESTIONÁRIO	101
11 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO	104
11.1 QUESTÃO 1: INDICAÇÃO AO VÍDEO	104
11.2 QUESTÃO 2: PÚBLICO ALVO	105
11.3 QUESTÃO 3: REAÇÃO AO VÍDEO	106
11.4 QUESTÃO 4: APRENDEU ALGO NOVO	107
11.5 QUESTÃO 5: ESTILOS MUSICAIS	109
11.6 QUESTÃO 6: INSTRUMENTOS MUSICAIS	110
11.7 QUESTÃO 7: QUALIDADES DOS ALUNOS	112
11.8 QUESTÃO 8: A MATEMÁTICA NO MUNDO	113
11.9 QUESTÃO 9: ONDE USA A MATEMÁTICA	114
11.10 QUESTÃO 10: EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS	116
11.11 QUESTÃO 11: FALTA UM DADO	118
11.12 QUESTÃO 12: DADOS MODIFICADOS	119
11.13 RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO	121
12 DISCUSSÕES ADICIONAIS	122
12.1 DISCUSSÃO SOBRE AUTORIA DAS COMPOSIÇÕES	122
12.2 TAXA DE RESPOSTA AO QUESTIONÁRIO	122
12.3 A ESCOLA COMO AMBIENTE SOCIAL	123
12.4 PERSUADINDO OS ALUNOS	124
13 CONSIDERAÇÕES FINAIS	126
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	127
IV APÊNDICES	129
A MATERIAIS PARA OS ALUNOS	130

B RECURSOS TECNOLÓGICOS EXTERNOS	138
C PRODUÇÕES ACADÊMICAS	140

1 INTRODUÇÃO

Os alunos de hoje são os profissionais de amanhã. As suas famílias e a sociedade como um todo precisam que sejam capazes de realizar suas tarefas, ensinar e contribuir para o mundo. Este é um dos motivos que constantemente move os professores na busca de melhorar seus métodos de ensino, empenhando-se para o melhor aprendizado de seus alunos, o que vai acarretar em melhorias na sociedade e, conseqüentemente, na vida de todos.

Apesar disso, os resultados de avaliações do ensino brasileiro, realizadas pelo Ministério da Educação (MEC) em conjunto com a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), apontam um déficit dos alunos brasileiros nos conteúdos de matemática. Os dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) 2018 mostram que a média dos estudantes brasileiros se encontra abaixo da média dos países da OCDE e ainda revelam que nos últimos anos não houve melhora significativa nos resultados (BRASIL, 2019).

Embora sejam muitas as possibilidades de justificativas para os resultados obtidos na avaliação por estudantes brasileiros, como a falta de investimento em educação e as diferenças de oportunidade que assolam o país, por exemplo, considera-se que também é necessário pensar em novas estratégias de ensino da matemática como uma forma de melhorar a qualidade do ensino para os alunos. Para suprir essa necessidade, a academia se esforça criando novos métodos de ensino para os professores poderem avaliar, modificar, ampliar e aplicar na sala de aula em conjunto com os métodos já estabelecidos.

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) exprime o currículo mínimo, que deve ser trabalhado pelas instituições de ensino. A matemática e suas tecnologias são áreas cujo ensino é exigido pelo currículo e, entre as competências dessas, estão as áreas de conhecimento de probabilidade e de estatística. Sua presença no currículo vem da importância de “interpretar estatísticas divulgadas pela mídia”, de “planejar e executar pesquisa amostral” e de “comunicar os resultados obtidos” (BRASIL, 2017, p. 528).

Entre os motivos dessas subáreas da matemática estarem inclusas nos currículos de muitos países, estão sua utilidade na vida cotidiana e seu papel no desenvolvimento do pensamento crítico (BATANERO et al., 2004, p. 1). Dessa forma, “aprender probabilidade permite o posicionamento mais adequado perante questões do cotidiano” (ADÃO, 2013, p. 12).

No entanto, Batanero et al. (2004, p. 1) alertam que é comum que professores tenham dificuldades ao trabalhar o conteúdo de probabilidade, por ser um assunto difícil de se ensinar, com conceitos iniciais contraintuitivos, combinado com falta de preparo para lecionar a matéria.

Com essas dificuldades, e apesar delas, a beleza e importância do conteúdo de pro-

babilidade conduz o professor a se diferenciar, aprimorar seu método de ensino, estimular o aprendizado e despertar o interesse do aluno.

Em contrapartida, o tema “matemática e música” provoca muito interesse na academia, nos professores e nos alunos. Esse interesse é despertado em especial naqueles que estão aprendendo ou já tocam algum instrumento musical ou têm outras motivações quanto à música, como é suportado por Carrillo (2019).

Lluis-Puebla (2002, p. 130) expõe que é comum escutar que há matemática na música, porque há muitos números dentro de uma partitura. Em sua opinião, esta é uma observação simples. Além disso, matemática e música compartilham muitas características similares e estão conectados de várias maneiras, por exemplo:

- A notação musical possui a matemática na notação das alturas, do ritmo, no agrupamento dos compassos, dentre outros;
- As notas musicais têm frequências fundamentais matematicamente relacionadas;
- As vibrações do ar, que formam o timbre do instrumento, são compostas por diversas frequências relacionadas e podem ser descritas por uma soma de funções senoidais; e
- Ambas fazem uso constante de símbolos, possuem definições e regras precisas.

Nesse contexto é que surgiu a intenção de investigar o ensino do conteúdo matemático de probabilidade a partir da música. Desse modo, surge a interrogação de pesquisa: de que forma é possível utilizar a música como contexto para a discussão de conceitos de probabilidade?

Visando responder isso, será feito uso do Jogo de Dados de Mozart (MOZART, 1793), atribuído ao grande compositor clássico Wolfgang Amadeus Mozart. Este jogo é um método probabilístico de composição musical que utiliza a aleatoriedade do lançamento de dois dados para sortear a melodia da peça musical. Por conseguinte, existe um rico sistema combinatório e probabilístico inerente ao processo de criação musical desse jogo, que pode ser explorado e estudado em conjunto com essas áreas da matemática.

Foi sugerido por García et al. (2013) utilizar o Jogo de Dados de Mozart em conjunto com recursos tecnológicos, como um recurso didático para dar suporte e contexto ao processo de ensino-aprendizagem de probabilidade.

Neste sentido, Carrillo (2019), por sua vez, aplicou com 30 alunos de Ensino Médio uma oficina sobre probabilidade, tratando de métodos algorítmicos de composição de músicas. Um dos métodos expostos foi o Jogo de Dados de Mozart.

Consequentemente, em vez de utilizar o Jogo de Dados de Mozart como uma atividade ou um recurso para se ensinar probabilidade, no presente trabalho, é apresentada uma proposta de ensino que faz uso do Jogo de Dados de Mozart como o tema central para

no ensino de probabilidade, partindo do estudo e da aplicação da aleatoriedade presente no jogo.

Como encaminhamentos metodológicos desta pesquisa, foram realizadas: uma pesquisa bibliográfica; a elaboração de uma proposta de ensino; a aplicação desta com alunos de Ensino Médio e de primeiro período de cursos de Graduação; a análise quantitativa-qualitativa das respostas desses alunos a um questionário de avaliação. Ademais, para auxiliar o professor na aplicação da proposta de ensino, foi desenvolvido um produto educacional em formato de *website*.

Além da importância da contextualização, também se dá valor aos trabalhos interdisciplinares, como sugerem García et al. (2013). Dessa forma, esta proposta também poderia ser aplicada em um ambiente interdisciplinar, de forma conjunta entre os professores de matemática e de artes.

Com respeito aos objetivos, a presente pesquisa contempla elaborar uma proposta de ensino do conteúdo de probabilidade, contextualizada a partir da composição musical do Jogo de Dados de Mozart. Citam-se os objetivos específicos a seguir:

- Abordar os diversos conteúdos de probabilidade de experimentos aleatórios discretos, de forma a atender ao currículo da BNCC;
- Fazer uso da interdisciplinaridade, para dar ao aluno uma compreensão mais ampla do conteúdo a partir da diversificação;
- Desenvolver a proposta de ensino, composta por atividades diversificadas no contexto do Jogo de Dados de Mozart; e
- Construir um produto educacional, composto por materiais multimídia relacionados ao Jogo de Dados de Mozart.

O presente trabalho foi exposto em forma de comunicação oral no evento II EP-PROFMAT, além de publicado pela Revista Transmutare um artigo no memorial de tal evento (BONI et al., 2019). Ademais, com esta pesquisa, dois artigos foram submetidos à publicação, para os quais se aguarda o resultado da avaliação.

A proposta de ensino foi aplicada com alunos de Ensino Médio e alunos de primeiro período de cursos de Graduação através de uma videoconferência e de uma videoaula. Para avaliar a impressão que a proposta causou nos alunos, estes responderam à um questionário de avaliação após a aplicação, cuja análise revela pontos interessantes sobre o interesse e o aprendizado dos alunos.

A seguir será explicada brevemente a organização deste trabalho. Primeiramente, tem-se esta introdução e, avante, se desenvolve o referencial teórico. No Capítulo 2 é discutido o ensino da matemática, do conteúdo de probabilidade e outros assuntos pertinentes ao ensino. A seguir, no Capítulo 3 são expostos conceitos de combinatória e no Capítulo 4

são desenvolvidos conceitos de probabilidade, ambos importantes no decorrer deste trabalho e também para o professor aplicar com seus alunos a proposta de ensino. Adiante, no Capítulo 5 são explicadas noções básicas sobre teoria musical, necessárias para leitura das partituras do Jogo de Dados de Mozart. No Capítulo 6, por sua vez, lê-se brevemente sobre a história de Mozart, sobre o Jogo de Dados de Mozart e são dadas as instruções do jogo. Em seguida, expõe-se a metodologia desta pesquisa. No Capítulo 7 é delineada a pesquisa bibliográfica realizada. Dando continuidade, o Capítulo 8 contém a proposta de ensino de probabilidade para o Ensino Médio. O produto educacional criado no desenvolver deste trabalho é mostrado no Capítulo 9. A partir disso, inicia-se a avaliação das impressões dos alunos quanto a aplicação, ou seja, a apresentação dos resultados da aplicação e as respectivas discussões. A aplicação da proposta de ensino com alunos de Ensino Médio é descrita no Capítulo 10. No Capítulo 11 é apresentada a análise do questionário aplicado aos alunos de Ensino Médio e primeiro período de cursos de Graduação, além de suas respectivas discussões. Ainda são desenvolvidas discussões adicionais no Capítulo 12 e as considerações finais são dadas no Capítulo 13. Por fim, chega-se aos apêndices. O Apêndice A e o Apêndice B contêm materiais e recursos tecnológicos, respectivamente, os quais o professor pode utilizar no desenvolvimento da proposta de ensino com seus alunos. O Apêndice C mostra as produções acadêmicas relacionadas ao desenvolvimento desta pesquisa.

PARTE I
REFERENCIAL TEÓRICO

2 O ENSINO DE MATEMÁTICA E DE PROBABILIDADE

Neste capítulo serão discutidos os objetivos de se ensinar aos alunos a matemática, o porquê de lhes ensinar o conteúdo de probabilidade, uma exposição sobre a interdisciplinaridade e a contextualização do ensino, os quais podem ser utilizados pelo professor como ferramentas benéficas à aprendizagem.

2.1 O OBJETIVO DE SE ENSINAR MATEMÁTICA

O objetivo da matemática e suas áreas de conhecimento estarem na grade curricular é ser “parte da educação geral, preparando o indivíduo para a cidadania, e servir de base para uma carreira em ciência e tecnologia”, ou seja, fornecer ferramentas aos alunos, as quais podem ser utilizadas por eles no presente e no futuro, de forma a “contemplar o conhecimento matemático atual, como ele se manifesta no dia-a-dia e na ciência e tecnologia do momento” (D’AMBROSIO, 2003, p. 1).

A BNCC do Ensino Fundamental cita uma competência alinhada a esta visão: o aluno deve ser capaz de “utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2017, p. 267).

Assim, ensinar matemática não é apenas expor o aluno aos conteúdos da disciplina, mas prepará-lo para utilizar, na prática, conhecimentos matemáticos relevantes para a atualidade: percebê-los e valer-se destes no seu cotidiano.

Prosseguindo com seu raciocínio, D’Ambrosio (2003, p. 1-2) levanta a questão: “Qual a diferença entre um professor e um educador?” O autor escreve que o “professor é aquele que professa ou ensina [...] uma disciplina. Educador é aquele que promove a educação integral do ser humano”, isto é, o professor deve agir como um educador que subordina a sua disciplina, e conseqüentemente o currículo e os conteúdos, “a objetivos maiores”.

Com isso o professor é capaz de contribuir com o aluno no objetivo de atingir a competência de “reconhecer que a matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções” (BRASIL, 2017, p. 267).

Pode-se observar estas ideias como alinhadas a tornar a matemática, e seus conteúdos, pertinentes ao dia-a-dia do aluno e à sua rotina. Isso facilita sua percepção da matemática como relevante, interessante e importante.

2.2 O OBJETIVO DE SE ENSINAR PROBABILIDADE

Probabilidade é apenas uma das áreas da matemática cobertas pelo currículo da BNCC. No âmbito do Ensino Fundamental, este descreve os objetivos do estudo de probabilidade:

No que concerne ao estudo de noções de probabilidade, a finalidade [...] é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. [...]

O estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica [...] (BRASIL, 2017, p. 274).

Dessa forma, ao fim do Ensino Fundamental, o aluno deve compreender que existem fenômenos cujos resultados não podem ser previstos, denominados aleatórios. Os alunos também devem ser capazes de realizar experimentos aleatórios a fim de avaliar se estão de acordo com as hipóteses probabilísticas por eles levantadas. Assim, mesmo imprevisíveis, os eventos aleatórios podem seguir algum padrão governado pela aleatoriedade, que pode ser usado para determinar como esses eventos se comportam de um modo geral.

Adiante, sobre o Ensino Médio, a BNCC apresenta as competências relacionadas à probabilidade:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

[...]

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2017, p. 535-540).

Portanto, no fim do Ensino Médio, o aluno deve ser capaz de escolher estratégias e procedimentos, criar modelos e experimentos, analisar, confrontar e avaliar os resultados, amparado por sua argumentação. Em outras palavras, o aluno deve ser capaz de levantar hipóteses relacionadas à probabilidades, de testá-las e, a partir de argumentos, aceitá-las ou rejeitá-las. Não basta apenas explicar, é preciso experimentar, verificar e comunicar. Com a promoção do confronto entre teoria e prática, ou seja, entre hipóteses e realidade, o aluno é capaz de desenvolver o seu senso crítico.

2.3 A CONTEXTUALIZAÇÃO NO ENSINO

D'Ambrosio (2003, p. 7) aponta que os alunos não estão “aprendendo coisas realmente importantes nos cursos de matemática” com as práticas de ensino tradicionais. Isso pode ser o motivo de alguns professores não terem resposta quando questionados pelos alunos “Pra que serve isso, professor?”, como relata Adão (2013, p. 10). Para se definir a importância, o objeto de estudo e como contextualizar o ensino da matemática, D'Ambrosio (2003, p. 2) sugere considerar o uso do trinômio “porque ensinar, o que ensinar, como ensinar”, de forma que os alunos sejam expostos ao “aprendizado de coisas úteis, interessante e modernas, essenciais para viver na sociedade moderna” (D'AMBROSIO, 2003, p. 8).

Algo similar é relatado por Ogliari (2008, p. 5), que escreve: “a dissociação entre a matemática do Ensino Médio e a matemática do dia-a-dia está presente na formação escolar desses alunos, na medida em que não encontram uma justificativa que os convençam da necessidade e da importância da disciplina em suas vidas”.

Ainda é complementado que a maior dificuldade dos alunos em obter um bom rendimento na escola, ou seja, o maior empecilho para uma boa aprendizagem, vem do desencanto dos alunos com as disciplinas (D'AMBROSIO, 2003, p. 8).

Essa dificuldade pode estar relacionada, inclusive, às diversas mudanças que ocorreram nas últimas décadas, ou mesmo nos últimos anos, com respeito à sociedade e como ela tem sido influenciada pela tecnologia. Isso se reflete no âmbito da educação e do ensino: “Torna-se cada vez mais difícil despertar nos alunos, os quais vivem numa sociedade amplamente tecnológica e em constante transformação, o interesse por aulas [...]” tradicionais. Além disso, “em geral, os professores não estão preparados para trabalhar nesta nova realidade” (TERRADAS, 2011, p. 96).

Resumindo, o ensino da matemática está longe do contexto em que vive o aluno. Este não consegue associar os conteúdos estudados com algo importante em sua vida. Aprender por aprender não é interessante, fazendo-o perder a curiosidade e o gosto pelo estudo.

Com isso, encontra-se a necessidade de se sair do ensino fragmentado e descontextualizado, partindo em busca de uma integração interdisciplinar dos conhecimentos (GARCÍA et al., 2013, p. 677). Como exemplo, Batanero et al. (2004, p. 1) expressam que outras disciplinas usam a probabilidade como um instrumento e que estas relações interdisciplinares podem ser utilizadas em nome de um aprendizado mais profundo e abrangente.

Baseado nisso, aponta-se que os trabalhos interdisciplinares podem ser benéficos para o aprendizado dos alunos, pois os ajudam a perceber ligações entre as várias disciplinas, que podem ser estudadas em conjunto, relacionando umas com as outras, em vez de estudá-las e entendê-las de forma completamente separadas.

No entanto, apesar da sua importância no ensino, o currículo da BNCC aborda raramente a possibilidade interdisciplinar: a palavra ‘interdisciplinar’ é encontrada apenas três vezes no texto, enquanto ‘multidisciplinar’ não é encontrada. Nas seções de matemática, apenas no Ensino Fundamental é citada uma ligação entre educação financeira e história (BRASIL, 2017, p. 269).

No que se refere à possibilidade de contextualização, o currículo da BNCC faz, também, uma abordagem superficial: apesar da palavra ‘contextualização’ ser encontrada diversas vezes no texto, ela não tem aparição dentro das seções de matemática, seja do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. Apesar disso, as competências definidas para a matemática exigem uma visão contextualizada do ensino, como foi descrito acima (BRASIL, 2017).

2.4 OS JOGOS COMO MEIO DE CONTEXTUALIZAÇÃO

Em paralelo com a interdisciplinaridade, existem outros métodos de contextualização no ensino: por exemplo as atividades cotidianas e os jogos. Na primeira ideia, referente às atividades cotidianas, compete ao professor afastar-se do ensino compartimentado, fazendo uso de ocupações do dia-a-dia do aluno, explorando a matemática que se revela dentro do contexto escolhido, automaticamente expressando ao aluno a importância do conteúdo.

Já na segunda ideia de contextualização, referente a jogos, tem-se o objetivo de trazer o lúdico, algo divertido, para a sala de aula e, partindo disso, criar um ambiente criativo e intrigante, onde os alunos são direcionados ao conhecimento pelo professor, porém aprendendo por conta própria através de discussões e argumentações que fazem entre si.

Desse ponto de vista, ensinar matemática é “desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, desenvolver a criatividade, desenvolver a capacidade de manejar situações reais e resolver diferentes tipos de problemas.” Isso só só é possível “se nos propusermos a realizar um trabalho que vá ao encontro da realidade do nosso aluno onde seja possível, por meio de diferentes recursos, propiciarmos um ambiente de construção do conhecimento”. Dessa forma, com o uso dos jogos, o aluno é levado “a enfrentar situações conflitantes [sic] relacionadas com o seu cotidiano” (LARA, 2004, p. 1).

Em consonância, entra novamente a discussão de qual é o papel do professor, agora quando se trabalha com jogos:

O uso de jogos para o ensino, representa, em sua essência, uma mudança de postura do professor em relação ao o que é ensinar matemática, ou seja, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da

aprendizagem, do processo de construção do saber pelo aluno, e só irá interferir, quando isso se faz necessário, através de questionamentos, por exemplo, que levem os alunos a mudanças de hipóteses, apresentando situações que forcem a reflexão ou para a socialização das descobertas dos grupos, mas nunca para dar a resposta certa. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. Leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários (SILVA; KODAMA, 2004, p. 5).

Dessa forma, o professor promove um ambiente que favorece o estudo, dotado de curiosidade, direciona as discussões entre os alunos e ajuda a compartilhar suas hipóteses e descobertas. O professor apenas aponta o grupo na direção, sem dar a resposta certa, criando as possibilidades de descoberta da qual o grupo todo participou.

3 CONCEITOS DE COMBINATÓRIA

O estudo da combinatória é usado para resolver problemas de contagem, já que muitas vezes enumerar as opções uma por uma é, no mínimo, tedioso, podendo até exigir um tempo excessivo, possivelmente mais do que uma vida, até mais do que a idade do universo. Em consequência disso, visando acelerar o processo de contagem, foram desenvolvidos os diferentes métodos combinatoriais para se obter o número de objetos ou de possibilidades rapidamente (LIMA et al., 2006).

Alguns problemas comuns de contagem são: De quantas formas pode-se organizar os livros de uma estante? Quantas são as possibilidades de apostas que podem ser feitos na loteria? Quantas cartelas de bingo podem existir?

Conhecimentos de combinatória são importantes para o estudo da probabilidade, onde é recorrente a necessidade de contar objetos e possibilidades.

Neste capítulo, serão expostos conceitos básicos de combinatória, importantes para contagem de eventos. Primeiramente será descrito o princípio da multiplicação, base de toda a teoria da contagem e combinatória. A partir disso, se explicarão as noções de permutação, arranjo e combinação. Por fim, também será explicado o triângulo de Pascal, sua origem e suas propriedades (LIMA et al., 2006).

3.1 PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO

O princípio da multiplicação exprime que havendo x opções para realizar a escolha A , e y opções para realizar a escolha B , então o número de opções para realizar ambas as escolhas A e B em sucessão é xy . Por exemplo: Havendo duas calças e três camisetas para serem vestidas, é possível vestir-se de $2 \cdot 3 = 6$ formas diferentes.

3.2 PERMUTAÇÃO

Uma permutação ocorre quando se tem uma série de objetos e se deseja determinar de quantas formas eles podem ser organizados. A permutação de n objetos é denotada por P_n :

$$P_n = n!, \quad (1)$$

onde $n!$ é o fatorial do número natural n , dado por:

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 1.$$

A Equação (1) é interpretada como: ao escolher o primeiro objeto, tem-se n opções, ao escolher o segundo objeto, tem-se $n-1$ opções, pois um já foi retirado, e assim

por diante, até que só reste o último objeto, quando se tem apenas uma opção.

Em uma permutação a ordem importa, ou seja, é como fazer um par ordenado onde $(a, b) \neq (b, a)$, por exemplo, existem 24 permutações da palavra ‘AMOR’, na qual há quatro objetos (as letras da palavra) para serem permutados, portanto o total de permutações é $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

3.3 ARRANJO

Um arranjo ocorre quando se tem uma série de objetos e se deseja determinar de quantas formas eles podem ser organizados quando se toma apenas uma certa quantidade deles. O arranjo de n elementos tomados m a m , com $n \geq m$, é denotado por $A_{n,m}$ e é determinado pela razão entre as permutações P_n e P_{n-m} , isto é:

$$A_{n,m} = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (2)$$

Similarmente à permutação, toma-se um objeto por vez, o que deixa um objeto a menos para a iteração seguinte. No entanto, em vez de prosseguir até escolher o último objeto, pára-se quando o m -ésimo objeto é selecionado, restando $n - m$ objetos não-selecionados. Assim, as permutações destes $n - m$ objetos são desconsideradas pelo denominador P_{n-m} .

Como em uma permutação, a ordem importa, ou seja, é como fazer um par ordenado onde $(a, b) \neq (b, a)$.

Nota-se que $A_{n,n} = P_n$, pois o fatorial de zero é igual a um ($0! = 1$).

Por exemplo: É possível criar 120 arranjos diferentes escolhendo três palavras da frase ‘Faça um arranjo com esta frase’. Tem-se $n = 6$ (número de palavras) e $m = 3$ (palavras selecionadas para o arranjo), portanto $A_{6,3} = 6!/(6-3)! = 6!/3! = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

3.4 COMBINAÇÃO

Uma combinação ocorre quando se tem uma série de objetos e se deseja determinar em quantos conjuntos diferentes eles podem ser organizados quando se toma apenas uma certa quantidade deles. A combinação de n elementos tomados m a m , com $n \geq m$, é denotado por $C_{n,m}$ e é determinado pela razão entre o arranjo $A_{n,m}$ pela permutação desse arranjo P_m

$$C_{n,m} = \frac{A_{n,m}}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)! m!}. \quad (3)$$

Criar uma combinação é semelhante a criar um arranjo, com a exceção da condição de que a ordem em que os elementos são tomados não importa, ou seja, apenas os

elementos importam e não a sua ordem. É como fazer um conjunto onde $\{a, b\} = \{b, a\}$. Pode-se então realizar o arranjo dos elementos nas posições e, em seguida, desconsiderar as permutações dessas posições através do denominador P_m .

Por exemplo: Entre oito alunos de uma turma de música, deseja-se formar um grupo de três para uma apresentação. Pode-se criar 56 trios diferentes, pois $C_{8,3} = 8! / [(8-3)! \cdot 3!] = 8! / (5! \cdot 3!) = (8 \cdot 7 \cdot 6) / (3 \cdot 2 \cdot 1) = 56$.

3.4.1 Triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal, mostrado na Figura 1, é também conhecido como triângulo aritmético. Este exprime todas as possíveis combinações: a linha n corresponde a todas as combinações de n elementos; a coluna m da linha n corresponde à combinação $C_{n,m}$. Observa-se que cada linha possui uma coluna adicional, formando um triângulo, e que as numerações de n e m iniciam em zero.

$C_{0,0}$										1
$C_{1,0}$	$C_{1,1}$									1 1
$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$								1 2 1
$C_{3,0}$	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$							1 3 3 1
$C_{4,0}$	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$	$C_{4,3}$	$C_{4,4}$						1 4 6 4 1
$C_{5,0}$	$C_{5,1}$	$C_{5,2}$	$C_{5,3}$	$C_{5,4}$	$C_{5,5}$					1 5 10 10 5 1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots				$\vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \ddots$

Figura 1: Triângulo de Pascal.
Fonte: Adaptado de Lima et al. (2006).

3.4.2 Relação de Stifel

A relação de Stifel, dada pela Equação (4), permite construir o triângulo de Pascal sem a necessidade de realizar cálculos a partir da Equação (3). Para determinar o valor de um elemento, basta somar os elementos da linha acima na mesma coluna e na coluna à esquerda. Por exemplo, destacado na Figura 1, tem-se $C_{5,2} = C_{4,2} + C_{4,1}$, o que é equivalente a $10 = 6 + 4$.

$$C_{n,m} = C_{n-1,m} + C_{n-1,m-1}. \quad (4)$$

3.4.3 Combinações complementares

O triângulo de Pascal possui uma simetria, que se percebe desenhando uma linha que atravessa os elementos centrais das linhas pares. Os elementos à esquerda da linha são iguais aos elementos à direita dela, isto é:

$$C_{n,m} = C_{n,n-m}. \quad (5)$$

3.4.4 Teorema das linhas

O teorema das linhas permite determinar a soma de todas as combinações possíveis de n elementos, isto é, a soma dos elementos da n -ésima linha do triângulo de Pascal. Este teorema se expressa da seguinte forma:

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \cdots + C_{n,n} = 2^n. \quad (6)$$

Por exemplo: De dez alunos de uma turma, deseja-se criar apenas um grupo, com no mínimo uma pessoa. Quantos grupos diferentes podem ser formados? Pode-se formar $2^{10} - 1 = 1023$ grupos, pois existem $C_{10,1}$ grupos de uma pessoa, $C_{10,2}$ grupos de duas pessoas, $C_{10,3}$ grupos de três pessoas, e assim por diante, até $C_{10,10}$ grupo de dez pessoas. Assim, podem ser criados $C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + \cdots + C_{10,10} = 2^{10} - C_{10,0} = 2^{10} - 1 = 1023$ grupos diferentes, com no mínimo uma pessoa.

4 CONCEITOS DE PROBABILIDADE

A probabilidade é a área da matemática que estuda as chances de algum evento ocorrer. Quando se analisa um experimento aleatório, dentre todas as possibilidades, um resultado específico tem uma certa chance de ocorrer.

Nesta seção serão definidos conceitos de probabilidade para experimentos aleatórios discretos. Experimentos aleatórios e eventos serão definidos, para então serem discutidas as probabilidades definidas em eventos, bem como suas propriedades. A seguir serão analisadas as variáveis aleatórias discretas e diversas distribuições de probabilidades. Por fim, serão explicadas as definições clássica (equiprovável) e experimental (frequencial) de probabilidade, em contraste com o método axiomático das probabilidades definidas em eventos. Ademais serão apresentados exemplos de experimentos aleatórios discretos e a respectiva análise de suas características probabilísticas.

Como referências para os conceitos de probabilidade são sugeridos Lima et al. (2006), Ross (2014), Amorim e Mozer (2020).

4.1 EXPERIMENTOS E EVENTOS

Conceitos importantes para o desenvolvimento da teoria de probabilidade são: o experimento aleatório e os eventos. A seguir serão definidos alguns conceitos básicos, utilizados para a definição formal de probabilidade.

Experimento aleatório: é um experimento onde não é possível saber o resultado antes de sua realização. Experimentos aleatórios podem ser contínuos ou discretos, de acordo com os valores possíveis para os resultados. Os resultados de experimentos aleatórios contínuos podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo dos números reais. Exemplos de experimentos aleatórios contínuos são: a temperatura mais alta de cada dia ou a distância do salto de um atleta. Os resultados assumem valores contínuos (incontáveis), por exemplo, podem ter qualquer valor em um intervalo dos números reais.

Por sua vez, nos experimentos aleatórios discretos, os resultados assumem valores discretos, ou seja, podem assumir apenas determinados valores, sem a possibilidade de valores intermediários, por exemplo os números naturais ou inteiros. Apesar de discretos, ainda se pode ter infinitos resultados diferentes, desde que sejam contáveis. Exemplos de experimentos aleatórios discretos são: jogar uma moeda, jogar um dado e retirar uma carta do baralho.

Espaço amostral: geralmente denotado por S , o espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento. Apesar de não ser possível saber o resultado de um experimento aleatório, em geral se conhecem todos os resultados possíveis.

Evento: geralmente denotado por E , um evento é um conjunto de resultados possíveis do experimento aleatório, ou seja, é um subconjunto do espaço amostral $E \subset S$. O espaço amostral é também um evento, nesse contexto chamado de evento certo. O evento impossível \emptyset nunca ocorre.

Evento elementar: são eventos com apenas um resultado do espaço amostral.

União de eventos: permite criar, a partir de dois eventos, um terceiro evento. O evento $E \cup F$, formado pela união dos eventos E e F , é o conjunto dos resultados que pertencem a qualquer um dos eventos E ou F , podendo pertencer simultaneamente a ambos ou a apenas um deles.

Intersecção de eventos: permite criar, a partir de dois eventos, um terceiro evento. O evento $E \cap F$, formado pela intersecção dos eventos E e F , é o conjunto dos resultados que pertencem simultaneamente a ambos eventos E e F .

Diferença entre eventos: permite criar, a partir de dois eventos, um terceiro evento. O evento $E - F$, formado pela diferença dos eventos E e F , é o conjunto dos resultados que pertencem ao evento E , mas não pertencem ao evento F .

Eventos mutuamente exclusivos: são eventos que nunca ocorrem simultaneamente, ou seja, sua intersecção é o conjunto vazio \emptyset , e portanto, não possuem resultados em comum. Assim, os eventos E e F são mutuamente exclusivos se, e somente se, $E \cap F = \emptyset$.

Exclusão mútua é um conceito importante para a probabilidade, sendo utilizada em uma das propriedades base (axiomas) da probabilidade, a partir das quais se demonstram outras propriedades.

Evento complementar: permite criar um evento a partir de outro. O evento complementar de E é denotado por E^C , sendo formado pelo conjunto de todos os resultados do espaço amostral S que não pertencem ao evento E .

Dois propriedades do evento complementar são:

1. Um evento em união com seu complementar formam o espaço amostral, ou seja:

$$E \cup E^C = S; \text{ e}$$

2. Um evento é mutuamente exclusivo com seu complementar, ou seja:

$$E \cap E^C = \emptyset.$$

4.2 PROBABILIDADES DEFINIDAS EM EVENTOS

Considera-se um experimento com espaço amostral S e dois eventos quaisquer E e F . A probabilidade do evento E é denotada por $P(E)$ e se definem os seguintes axiomas (propriedades base) para a probabilidade:

1. A probabilidade do evento E é um número real no intervalo fechado entre zero e a unidade:

$$0 \leq P(E) \leq 1;$$

2. A probabilidade do espaço amostral S é a unidade:

$$P(S) = 1; \text{ e} \tag{7}$$

3. Tomando n eventos mutuamente exclusivos E_1, E_2, \dots, E_n , a probabilidade da união destes eventos é igual a soma das probabilidades individuais dos n eventos:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i). \tag{8}$$

A partir destes três axiomas se demonstram as propriedades a seguir.

Probabilidade do evento complementar: é a unidade menos a probabilidade do evento, isto é:

$$P(E^C) = P(S) - P(E) = 1 - P(E).$$

Para demonstrar, utiliza-se o terceiro axioma, sabendo que o evento e seu complementar são mutuamente exclusivos.

Probabilidade da diferença de eventos: é a diferença das probabilidades do primeiro evento e da intersecção dos eventos.

$$P(E - F) = P(E) - P(E \cap F) \tag{9}$$

Visualiza-se esta propriedade a partir do diagrama de Venn, mostrado na Figura 2a. Deve-se descontar a parte de E que está em F , ou seja, deve-se subtrair $P(E \cap F)$ de $P(E)$.

Probabilidade da união de eventos: é a soma das probabilidades dos eventos menos a probabilidade da intersecção dos eventos.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \tag{10}$$

Para demonstrar, separam-se estes dois eventos em três partes: Probabilidade da intersecção $P(E \cap F)$, probabilidade de E apenas $P(E - F) = P(E) - P(E \cap F)$ e probabilidade de F apenas $P(F - E) = P(F) - P(E \cap F)$. A probabilidade da união é igual a soma dessas três probabilidades $P(E \cup F) = P(E - F) + P(F - E) + P(E \cap F)$. Por fim, substituem-se as probabilidades das diferenças dos eventos.

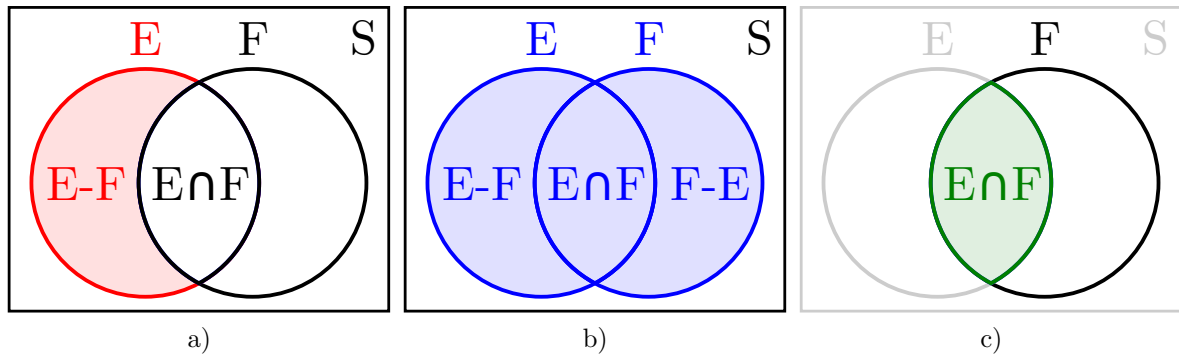


Figura 2: Diagrama de Venn dos eventos E e F no espaço amostral S . As três imagens destacam diferentes relações entre os eventos E e F : a) destaca a diferença $E - F$ (em vermelho), b) destaca a união $E \cup F$ (em azul) e c) destaca a parte de E possível de ocorrer, dado que F ocorreu, (em verde).

Fonte: Autoria própria (2021).

Nota-se que somando as probabilidades $P(E)$ e $P(F)$ a probabilidade da intersecção é contabilizada duas vezes, sendo necessário subtraí-la uma vez. Visualiza-se esta propriedade a partir do diagrama de Venn, mostrado na Figura 2b.

Probabilidade condicional: a probabilidade do evento E ocorrer dado que F ocorreu é denotada por $P(E|F)$ e definida como:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \quad (11)$$

com $F \neq \emptyset$, ou seja, $P(F) > 0$.

Dado que o evento F ocorreu, todo o restante do espaço amostral F^C não pode ter ocorrido e é desconsiderado. Assim, a probabilidade da intersecção $E \cap F$ é normalizada pela probabilidade de F , o qual sabe-se que ocorreu, resultando na probabilidade condicional. Visualiza-se esta propriedade a partir do diagrama de Venn, mostrado na Figura 2c.

A probabilidade condicional é pouco utilizada na forma da Equação (11). Em geral é utilizada na forma a seguir para se calcular a probabilidade da intersecção de eventos dependentes:

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= P(F) P(E|F) \\ &= P(E) P(F|E). \end{aligned} \quad (12)$$

Eventos independentes: são eventos cuja ocorrência não influenciam na probabilidade de outro ocorrer. Os eventos E e F são independentes se:

$$P(E \cap F) = P(E) P(F). \quad (13)$$

Eventos independentes E e F têm probabilidades condicionais dadas por:

$$P(E|F) = P(E) \quad \text{e} \quad P(F|E) = P(F).$$

Deve-se tomar o cuidado de não confundir eventos independentes com eventos mutuamente exclusivos. Eventos mutuamente exclusivos são dependentes: com E e F mutuamente exclusivos tem-se que $P(E|F) = P(F|E) = 0$, que obviamente contraria a definição de independência. Para exemplificar isto, considera-se o lançamento de um dado e os eventos $E_1 = \{1, 3, 5\}$ e $F_1 = \{2, 4, 6\}$: estes são mutuamente exclusivos e consequentemente dependentes. Portanto, não podem ser eventos independentes pois, sabendo que um número é par, ele não tem chance alguma de ser ímpar. No entanto, ao considerar os eventos $E_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $F_2 = \{2, 4, 6\}$, pode-se ver que são independentes, pois as probabilidades condicionais são iguais às probabilidades dos próprios eventos.

4.3 DEFINIÇÕES CLÁSSICA E FREQUENCIAL DE PROBABILIDADE

A probabilidade definida em eventos, ou seja, a definição a partir de axiomas, é uma definição rigorosa das probabilidades. Essa definição formal é utilizada para o desenvolvimento da teoria desse tema, com a qual é possível realizar demonstrações de propriedades e de teoremas a ele relacionados (ROSS, 2014).

Na prática, a definição axiomática não é utilizada de forma solitária, pois ela define as regras de como as probabilidades funcionam, sem indicar como determinar o valor numérico das probabilidades dos resultados.

Para suprir este déficit e determinar valores para as probabilidades, utiliza-se a definição clássica ou a definição frequencial de probabilidade. Estas são casos particulares da definição axiomática, herdando todas as propriedades desta, porém fazem uso de hipóteses de apelo intuitivo com respeito às características dos resultados aleatórios, como será descrito a seguir (AMORIM; MOZER, 2020).

4.3.1 Definição clássica de probabilidade

A definição clássica de probabilidade, também chamada de equiprobabilística, faz uso da hipótese de que todos os resultados do experimento aleatório são equiprováveis, ou seja, têm mesma probabilidade de ocorrer.

Dessa forma, dado um experimento aleatório que possui resultados igualmente prováveis, a probabilidade do evento E é igual ao número $N(E)$ de resultados correspondentes ao evento dividido pelo total $N(S)$ de resultados possíveis, assim (LIMA et al., 2006):

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(S)}.$$

4.3.2 Definição frequencial de probabilidade

Outra definição possível para a probabilidade é a definição frequencial, a qual é utilizada quando não é possível aplicar a definição clássica para determinar as probabilidades de um experimento aleatório.

Na definição frequencial de probabilidade, faz-se uso da hipótese de que a frequência dos resultados corresponde à probabilidade desses e, com a repetição do experimento, são registrados os resultados ou eventos ocorridos. A partir disso, é possível aproximar as probabilidades de acordo com as informações coletadas sobre o experimento.

Assim, dado um experimento com espaço amostral S com um total de $N(S)$ resultados possíveis, deseja-se determinar as probabilidades dos resultados E_j , com $1 \leq j \leq N(S)$, dados os números de ocorrências $C(E_j)$ de cada resultado, obtém-se a probabilidade:

$$P(E_j) \approx \frac{C(E_j)}{n},$$

onde $n = \sum_{i=1}^{N(S)} C(E_i)$ é o número de experimentos realizados (LIMA et al., 2006).

4.4 EXEMPLOS DE EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS

Com o intuito de revisar os conceitos anteriores, nesta seção serão descritos alguns experimentos aleatórios, seu espaço amostral, bem como exemplos interessantes e suas características probabilísticas.

4.4.1 Probabilidades no lançamento de uma moeda

O lançar de uma moeda é um dos experimentos aleatórios mais simples. Ela pode cair de duas formas: cara (K) ou coroa (C). Dependendo das características geométricas da moeda, ela também pode cair de lado (L), o que geralmente é desconsiderado na prática devido à baixíssima probabilidade. O espaço amostral é, portanto:

$$S = \{K, C\}.$$

Além do evento certo S e do evento impossível \emptyset , é possível definir dois eventos mutuamente exclusivos: $E = \{K\}$ (cair cara) e $F = \{C\}$ (cair coroa). Além disso, os eventos E e F são complementares, ou seja, $E^C = F$.

Uma moeda pode ser considerada viciada ou justa (não-viciada). Quando há razão para se crer que a moeda é justa, considerando-se o modelo equiprovável, então cada face possui probabilidade $P(E) = P(F) = 1/2$ de cair. No entanto, para uma moeda viciada com probabilidade $P(E) = p$ de cair cara, com $0 \leq p \leq 1$, a probabilidade de cair coroa é $P(F) = 1 - p$.

4.4.2 Probabilidades no lançamento de um dado comum

Um dado comum pode cair com qualquer uma de suas faces para cima, portanto o espaço amostral é:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Dentre vários, pode-se definir dois eventos: E do número ser menor que quatro e F do número ser ímpar:

$$E = \{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad F = \{1, 3, 5\}.$$

A união e a intersecção dos eventos E e F são, respectivamente:

$$E \cup F = \{1, 2, 3, 5\} \quad \text{e} \quad E \cap F = \{1, 3\}.$$

Observa-se que os eventos E e F não são mutuamente exclusivos, pois os resultados 1 e 3 pertencem a ambos os eventos.

Os eventos complementares de E e F são, respectivamente:

$$E^C = \{4, 5, 6\} \quad \text{e} \quad F^C = \{2, 4, 6\}.$$

Geralmente considera-se o lançamento de um dado comum como equiprovável, ou seja, considera-se que cada face tem a mesma probabilidade de ocorrer que as outras. Portanto, para que a probabilidade do espaço amostral seja unitária $P(S) = 1$ é necessário que:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Considerando os eventos E e F acima, estes podem ser representados pela união de eventos com apenas um resultado, da seguinte forma:

$$E = \{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \quad \text{e} \quad F = \{1, 3, 5\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\},$$

visando determinar suas probabilidades pelo terceiro axioma da probabilidade (união de eventos mutuamente exclusivos), estas são calculadas da seguinte forma:

$$P(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Além do mais, é possível calcular a probabilidade da união $P(E \cup F)$ de duas formas, a saber:

1. Através do conjunto união: neste caso a probabilidade é calculada pela união de

eventos mutuamente exclusivos, isto é:

$$\begin{aligned} E \cup F &= \{1, 2, 3, 5\} \\ P(E \cup F) &= P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3}; \end{aligned}$$

2. Através da união dos eventos: neste caso se determina as probabilidades dos eventos, de sua interseção e se calcula a probabilidade através da união de eventos, ou seja:

$$\begin{aligned} E \cap F &= \{1, 3\} \\ P(E \cap F) &= P(\{1\}) + P(\{3\}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} \\ P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Outro problema relacionado é: “Após o lançamento de um dado, sabe-se que a face que caiu foi ímpar (evento F). Qual é a probabilidade da face ser menor ou igual a três (evento E)?” A solução é dada pela probabilidade condicional $P(E|F)$, calculada como:

$$\begin{aligned} P(E|F) &= \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{1/3}{1/2} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

4.4.3 Probabilidades da soma de dois dados comuns

Ao lançar dois dados, cada um deles pode cair com qualquer uma de suas faces voltadas para cima. Então, ao somar os possíveis valores delas, obtemos o espaço amostral, o qual é igual a:

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Dentre vários, é possível definir dois eventos: E do número ser menor que sete e F do número ser maior ou igual a sete:

$$E = \{2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{e} \quad F = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

A união dos dois eventos E e F e a intersecção destes são, respectivamente:

$$E \cup F = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \quad \text{e} \quad E \cap F = \emptyset.$$

Observa-se que os eventos E e F são mutuamente exclusivos, pois quando um evento ocorre o outro não pode ocorrer (intersecção vazia). Os eventos E e F são complementares um do outro, ou seja:

$$E^C = F \quad \text{e} \quad F^C = E.$$

A partir da equiprobabilidade considerada para as faces dos dois dados, cada um dos pares ordenados a seguir corresponde a uma das 36 possibilidades dos dados 1 e 2, que conformam o espaço amostral S_1 :

$$S_1 = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}.$$

Cada um desses pares ordenados são equiprováveis, com probabilidades iguais a $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$ de ocorrer, e mutuamente exclusivos. Ainda mais, cada um deles está associado a um valor de soma dos dois dados, ou seja, está associado com um valor do espaço amostral S :

$$S = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, \\ 3, 4, 5, 6, 7, 8, \\ 4, 5, 6, 7, 8, 9, \\ 5, 6, 7, 8, 9, 10, \\ 6, 7, 8, 9, 10, 11, \\ 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}.$$

Dessa forma, analisando os valores repetidos no espaço amostral S , conclui-se que os resultados não têm a mesma chance de ocorrer, já que das 36 opções de pares ordenados, apenas uma dá resultado 2, duas dão resultado 3, três dão resultado 4, quatro dão resultado 5, cinco dão resultado 6, seis dão resultado 7, cinco dão resultado 8, quatro

dão resultado 9, três dão resultado 10, duas dão resultado 11 e apenas uma dá resultado 12. As respectivas probabilidades são:

$$\begin{aligned} P(\{2\}) &= P(\{12\}) = \frac{1}{36} \\ P(\{3\}) &= P(\{11\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \\ P(\{4\}) &= P(\{10\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \\ P(\{5\}) &= P(\{9\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \\ P(\{6\}) &= P(\{8\}) = \frac{5}{36} \\ P(\{7\}) &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4.4.4 Probabilidades relacionadas à extração de cartas de um baralho

Nos aspectos combinatório e probabilístico, os jogos com cartas de baralho são bastante complexos, devido ao número considerável de cartas, que sem contar coringas, pode chegar a 52. É possível, no entanto, explorar alguns exemplos simples e interessantes sobre probabilidades envolvendo as cartas de um baralho.

Ao retirar uma carta de um baralho, o espaço amostral é o conjunto de pares ordenados do valor V e naipe N :

$$\begin{aligned} S &= \{(V, N); V \in \{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\}, N \in \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}\} \\ &= \{A\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, J\clubsuit, Q\clubsuit, K\clubsuit, \\ &\quad A\heartsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, 5\heartsuit, 6\heartsuit, 7\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit, J\heartsuit, Q\heartsuit, K\heartsuit, \\ &\quad A\spadesuit, 2\spadesuit, 3\spadesuit, 4\spadesuit, 5\spadesuit, 6\spadesuit, 7\spadesuit, 8\spadesuit, 9\spadesuit, 10\spadesuit, J\spadesuit, Q\spadesuit, K\spadesuit, \\ &\quad A\diamondsuit, 2\diamondsuit, 3\diamondsuit, 4\diamondsuit, 5\diamondsuit, 6\diamondsuit, 7\diamondsuit, 8\diamondsuit, 9\diamondsuit, 10\diamondsuit, J\diamondsuit, Q\diamondsuit, K\diamondsuit\}, \end{aligned}$$

onde A , J , Q e K representam os valores Ás, Valete, Dama e Rei, respectivamente, e \clubsuit , \heartsuit , \spadesuit e \diamondsuit representam os naipes Paus, Copas, Espadas e Ouros, respectivamente.

Dois problemas que podem ser resolvidos com probabilidade condicional são:

1. “Ao retirar uma carta do baralho, revelou-se um rei de paus $A = \{K\clubsuit\}$. Sem devolver a carta à pilha, qual é a probabilidade de se retirar outro rei $B = \{K\} = \{K\heartsuit, K\spadesuit, K\diamondsuit\}$ ”
2. “E qual é a probabilidade de se retirar uma dama $C = \{Q\} = \{Q\clubsuit, Q\heartsuit, Q\spadesuit, Q\diamondsuit\}$?”

Considerando todas as cartas como equiprováveis, a probabilidade de se retirar um rei de paus $K♣$ como a primeira carta do baralho é:

$$P(A) = \frac{1}{52}.$$

Assim, a probabilidade de retirar um rei K após a retirada de um rei de paus $K♣$ é:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{3/51 \cdot 1/52}{1/52} \\ &= \frac{3}{51}, \end{aligned}$$

já a probabilidade de retirar a primeira carta $K♣$ e da segunda carta ser uma dama Q é:

$$\begin{aligned} P(C|A) &= \frac{P(C \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{4/51 \cdot 1/52}{1/52} \\ &= \frac{4}{51}. \end{aligned}$$

4.5 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Quando se trata de experimentos aleatórios, frequentemente há interesse em uma função do resultado, em vez do resultado em si. Estas quantidades de interesse, chamadas variáveis aleatórias, são funções reais definidas no espaço amostral (ROSS, 2014).

Dado um experimento aleatório com espaço amostral S , para se definir uma variável aleatória X , dispõe-se uma função $f_X : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Em um mesmo experimento aleatório, pode-se estar interessado não apenas em uma variável aleatória, mas em diversas delas.

Por exemplo: Supõe-se o experimento aleatório como sendo o par ordenado do lançamento de dois dados distinguíveis. O espaço amostral é:

$$S = \left\{ (D_1, D_2); \quad D_1, D_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \right\}.$$

Considera-se a variável aleatória X definida como a soma dos dois dados e a variável Y como assumindo o valor 1 se ambos os dados são iguais, senão 0.

Portanto, as funções f_X e f_Y podem ser definidas como:

$$f_X((D_1, D_2)) = D_1 + D_2,$$

$$f_Y((D_1, D_2)) = \begin{cases} 1, & \text{se } D_1 = D_2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, determina-se que $X \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e $Y \in \{0, 1\}$.

Cada valor que a variável aleatória X assume representa, através de f_X , um ou mais resultados do espaço amostral S , ou seja, representa um evento $E \subset S$.

Da mesma forma que se determina a probabilidade de um evento $E \subset S$ ocorrer, dada uma variável aleatória X , determina-se a probabilidade $P(X = a)$ dela assumir o valor $a \in \mathbb{R}$.

Existem também as notações para quando X assume valores menores que a $P(X < a)$, menores ou iguais a a $P(X \leq a)$, maiores que a $P(X > a)$ e maiores ou iguais a a $P(X \geq a)$.

Continuando o exemplo anterior: Observam-se as probabilidades da variável aleatória X assumir valores inteiros de 1 a 12:

$$\begin{array}{ll} P(X = 1) = 0, & P(X = 7) = 6/36, \\ P(X = 2) = 1/36, & P(X = 8) = 5/36, \\ P(X = 3) = 2/36, & P(X = 9) = 4/36, \\ P(X = 4) = 3/36, & P(X = 10) = 3/36, \\ P(X = 5) = 4/36, & P(X = 11) = 2/36, \\ P(X = 6) = 5/36, & P(X = 12) = 1/36, \end{array}$$

e as probabilidades de Y assumir os valores 0, 0,5 e 1:

$$P(Y = 0) = 5/6, \quad P(Y = 0,5) = 0, \quad P(Y = 1) = 1/6.$$

As probabilidades $P(X = 1)$ e $P(Y = 0,5)$ são nulas porque nunca ocorrem. Nenhum resultado do experimento aleatório gera este valor através das funções f_X e f_Y , respectivamente.

Assim como há experimentos aleatórios discretos e contínuos, existem também variáveis aleatórias discretas e contínuas. Uma variável aleatória contínua pode assumir um número incontável de valores. Por exemplo, um intervalo dos números reais.

Uma variável aleatória discreta, no entanto, pode assumir um número finito ou contável de valores. Neste caso, portanto, apesar do contradomínio de f_X ser formado pelos os incontáveis números reais \mathbb{R} , a imagem de f_X é contável. Para se referir à imagem de f_X , geralmente se utiliza um subconjunto dos números naturais \mathbb{N} ou dos números inteiros \mathbb{Z} . O espaço amostral S , domínio de f_X , pode ser um conjunto finito,

contável ou incontável, ou seja, o experimento aleatório pode ser discreto ou contínuo e ainda assim a variável aleatória pode ser discreta.

4.6 EXPECTATIVA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

A expectativa de uma variável aleatória, ou sua média, é um conceito muito utilizado para realizar sua modelagem a partir de dados empíricos. A seguir serão definidos a expectativa e outros conceitos relacionados, tomando Ross (2014) como referência.

A média μ , ou expectativa $E[X]$, de uma variável aleatória discreta X é definida como:

$$\mu = E[X] = \sum_{x; p_X(x) > 0} x p_X(x), \quad (14)$$

onde x são os valores discretos que a variável aleatória pode assumir e $p_X(x)$ é a probabilidade da variável aleatória ter valor x .

Muitas vezes há interesse na expectativa de uma função da variável aleatória. Denotada por $E[g(X)]$, a expectativa de uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de uma variável aleatória discreta X é dada por:

$$E[g(X)] = \sum_{x; p(x) > 0} g(x) p_X(x). \quad (15)$$

Isto implica que o valor esperado de uma função afim de uma variável aleatória tem a seguinte propriedade:

$$E[aX + b] = a E[X] + b, \quad (16)$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

A variância σ^2 de uma variável aleatória discreta X é definida como:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]. \quad (17)$$

A variância é o quadrado do desvio padrão, medindo a expectativa do quadrado do desvio de X com respeito à sua expectativa. Um resultado muito útil para se calcular a variância de uma variável aleatória X é:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2. \quad (18)$$

4.7 FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES

De antemão, não se conhece o resultado de um experimento aleatório antes de realizá-lo, ou seja, não se pode prever o valor de uma variável aleatória. Apesar disso, é possível tirar muitas conclusões sobre a sua tendência ou o seu comportamento.

Uma das formas de modelar o comportamento ou as tendências de uma variável

aleatória é através de sua função de distribuição de probabilidades, muitas vezes chamada apenas de distribuição.

A variável aleatória X possui uma função de distribuição de probabilidades p_X . Esta função determina a probabilidade com que a variável aleatória assume o valor real a . Eis as duas notações para o valor desta probabilidade:

$$p_X(a) = P(X = a),$$

onde na primeira este é denotado através da função de distribuição de probabilidades, enquanto na segunda se faz uso de uma notação mais flexível.

A seguir são apresentadas algumas distribuições discretas comumente utilizadas para modelar variáveis aleatórias (ROSS, 2014).

4.7.1 Distribuição uniforme

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição uniforme se ela assume $n \in \mathbb{N}$ valores com probabilidades idênticas:

$$p_X(a) = P(X = a) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } a \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (19)$$

Esta distribuição é parametrizada por n , o número de valores possíveis que a variável aleatória pode assumir. A média desta distribuição é $\mu = (n + 1)/2$ e variância $\sigma^2 = (n^2 - 1)/12$.

Exemplos de variáveis aleatórias com esta distribuição são: o lançamento de uma moeda ($n = 2$) ou o lançamento de um dado ($n = 6$).

A Figura 3 mostra uma distribuição uniforme com parâmetro $n = 6$, equivalente ao lançamento de um dado¹.

¹As probabilidades são números reais no intervalo entre 0 e 1, inclusive ambos. Para simplificar a notação, nos gráficos deste documento são utilizadas porcentagens para representar as probabilidades, ou seja, valores de 0 % a 100 %.

Lançamento de um dado:
Distribuição uniforme, parâmetro $n = 6$.

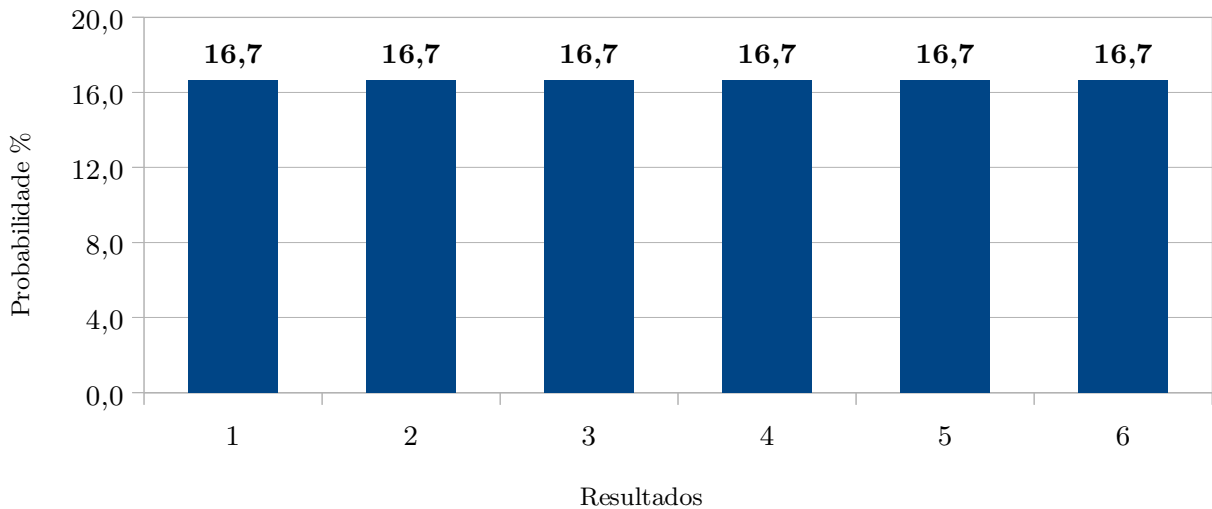


Figura 3: Probabilidades dos resultados de um dado (distribuição uniforme).
Fonte: Autoria própria (2021).

4.7.2 Distribuição triangular

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição triangular quando, dado o parâmetro $n \in \mathbb{N}$, ela pode assumir $2n - 1$ valores, cujas probabilidades são:

$$p_X(a) = P(X = a) = \begin{cases} \frac{a-1}{n^2}, & \text{se } a \in \{2, 3, \dots, n\} \\ \frac{2n - (a-1)}{n^2}, & \text{se } a \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (20)$$

Esta distribuição é parametrizada por n . A média desta distribuição é $\mu = n + 1$ e variância $\sigma^2 = (n^2 - 1)/6$.

Uma forma simples de criar uma variável aleatória de distribuição triangular é compor ela através da soma de duas variáveis aleatórias independentes Y_1, Y_2 , ambas com distribuições uniformes e mesmo parâmetro n :

$$p_X(a) = P(X = a) = P(Y_1 + Y_2 = a). \quad (21)$$

Neste caso, o parâmetro n é equivalente ao número de valores possíveis que as variáveis aleatórias Y_1, Y_2 , que compõem X , podem assumir.

Estendendo o exemplo em distribuições uniformes, exemplos de variáveis aleatórias

com a distribuição triangular são: o número de caras no lançamento de duas moedas ($n = 2$) ou a soma de dois dados ($n = 6$).

A Figura 4 mostra uma distribuição triangular com parâmetro $n = 6$, equivalente à soma de dois dados.

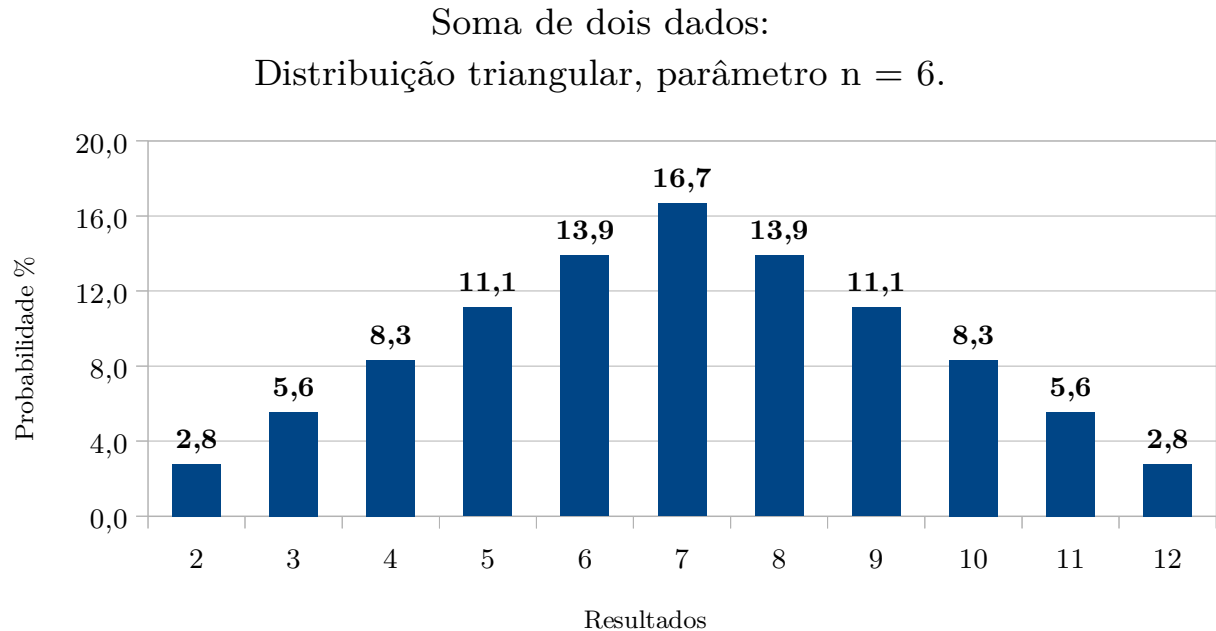


Figura 4: Probabilidades dos resultados da soma de dois dados (distribuição triangular).
Fonte: Autoria própria (2021).

4.7.3 Distribuição de Bernoulli

Uma variável aleatória X possui distribuição de Bernoulli de parâmetro $p \in [0, 1]$, quando ela pode assumir os valores 0 e 1 com probabilidades $1 - p$ e p , respectivamente. A função de distribuição de probabilidades é dada por:

$$p_X(a) = P(X = a) = \begin{cases} 1 - p, & \text{se } a = 0 \\ p, & \text{se } a = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (22)$$

Os dois valores possíveis da variável aleatória podem ser considerados como a ocorrência e a não ocorrência de um evento aleatório ou o sucesso e a falha de um teste aleatório.

Esta distribuição é parametrizada por p , a probabilidade de ocorrência ou de sucesso. A média desta distribuição é $\mu = p$ e variância $\sigma^2 = p(1 - p)$.

Exemplos de variáveis aleatórias com esta distribuição são: o lançamento de uma moeda ($p = 1/2$), o lançamento de uma moeda viciada ($p \neq 1/2$) ou a chance de cair um múltiplo de 3 no lançamento de um dado ($p = 1/3$).

A Figura 5 mostra três distribuições de Bernoulli, com parâmetros $3/10$, $1/2$ e

7/10. Note que as distribuições 3/10 e 7/10 são simétricas.

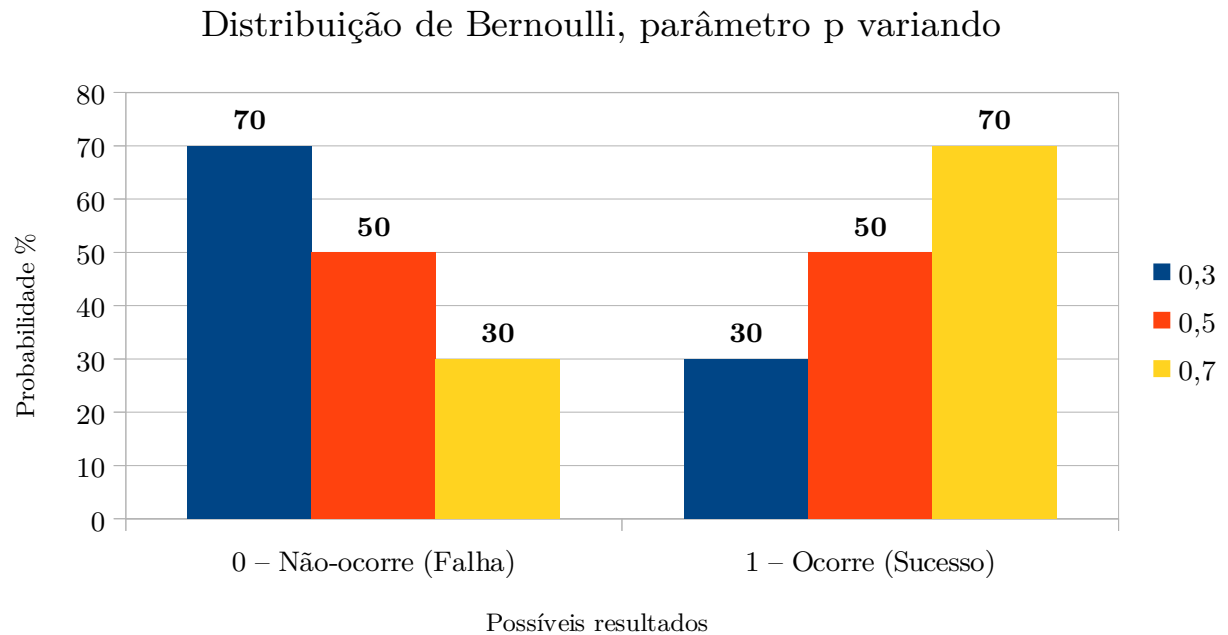


Figura 5: Distribuição de Bernoulli.
Fonte: Autoria própria (2021).

4.7.4 Distribuição binomial

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição binomial quando, dados os parâmetros $p \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$, ela pode assumir $n + 1$ valores com probabilidades:

$$p_X(a) = P(X = a) = \begin{cases} C_{n,a} p^a (1-p)^{n-a}, & \text{se } a \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (23)$$

Esta distribuição é parametrizada por p e n . A média desta distribuição é $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = np(1-p)$.

É utilizada para modelar a contagem de ocorrências de um número finito de eventos independentes com probabilidades fixas de ocorrência.

Uma forma simples de criar uma variável aleatória de distribuição binomial é compor ela através da soma de n variáveis aleatórias independentes Y_1, Y_2, \dots, Y_n , todas com distribuições de Bernoulli e mesmo parâmetro p :

$$p_X(a) = P(X = a) = P(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = a). \quad (24)$$

Neste caso, o parâmetro n é equivalente ao número de variáveis aleatórias Y_1, Y_2, \dots, Y_n que compõem a variável aleatória X .

Exemplos de variáveis aleatórias com esta distribuição são: o número de caras

no lançamento de n moedas ($p = 1/2$), o número de caras no lançamento de n moedas viciadas ($p \neq 1/2$).

A Figura 6a mostra três distribuições binomiais com parâmetro $p = 3/10$, com n variando nos valores 2, 5 e 10. Como $p < 1/2$, as chances do evento não ocorrer são maiores do que dele ocorrer. Com isso, há tendência das probabilidades serem maiores ao lado esquerdo da distribuição.

Uma observação adicional é que, à medida que o parâmetro n aumenta, o número de ocorrências máximo eleva-se de acordo.

Note que as figuras apresentadas expressam distribuições discretas. Apenas os valores marcados pelos símbolos quadrado, losango e triângulo devem ser considerados. As retas que ligam os símbolos foram inseridas apenas para facilitar a visualização e não devem ser consideradas como parte das funções de distribuição de probabilidades.

Por sua vez, a Figura 6b mostra três distribuições binomiais com parâmetro $p = 1/2$, com n variando nos valores 2, 5 e 10. Como $p = 1/2$, as chances do evento ocorrer são iguais às chances dele não ocorrer. Com isso, as probabilidades são simétricas com respeito ao centro da distribuição.

Ademais, a Figura 6c mostra três distribuições binomiais com parâmetro $p = 7/10$, com n variando nos valores 2, 5 e 10. Como $p > 1/2$, as chances do evento ocorrer são maiores do que dele não ocorrer. Com isso, há tendência das probabilidades serem maiores ao lado direito da distribuição.

Assim, comparando as distribuições binomiais de mesmo parâmetro n da Figura 6a, da Figura 6b e da Figura 6c, vê-se os efeitos das tendências à esquerda, de simetria e à direita causadas pelas diferentes probabilidades p .

4.7.5 Distribuição geométrica

Uma variável aleatória X é dita ter distribuição geométrica quando, dado o parâmetro $p \in [0, \infty)$, ela pode assumir valores inteiros positivos com probabilidades:

$$p_X(a) = P(X = a) = \begin{cases} p(1-p)^{a-1}, & \text{se } a \in \{1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (25)$$

Esta distribuição é parametrizada por p . A média dessa distribuição é $\mu = 1/p$ e variância $\sigma^2 = (1-p)/p^2$.

É utilizada para modelar a contagem de repetições de um experimento até que um certo evento ocorra.

A definição acima é equivalente a uma variável aleatória de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p , falhar $a - 1$ vezes e em seguida ter sucesso:

$$p_X(a) = P(X = a) = P(Y_1 = 0) P(Y_2 = 0) \cdots P(Y_a = 1). \quad (26)$$

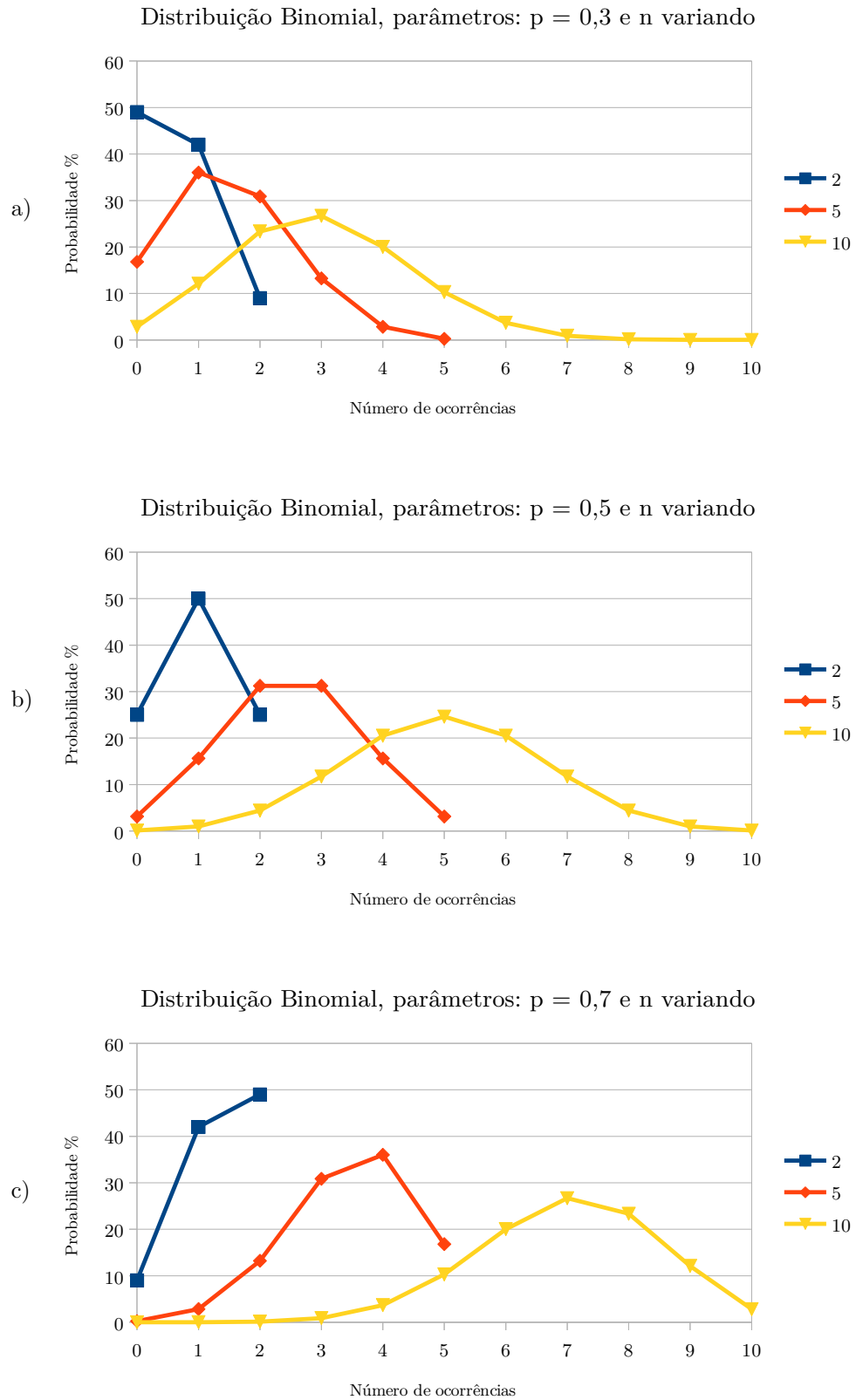


Figura 6: Distribuição binomial.
Fonte: Autoria própria (2021).

Exemplos de variáveis aleatórias com esta distribuição são: contar o número de lançamentos de uma moeda até cair cara e contar o número de cartas do baralho até encontrar um valete de ouros $J\heartsuit$, sendo cada carta retirada e em seguida devolvida ao baralho.

A Figura 7 mostra três distribuições geométricas com parâmetros p diferentes. Note que, a medida que o valor do parâmetro aumenta, o pico diminui e as probabilidades se deslocam cada vez mais para a direita.

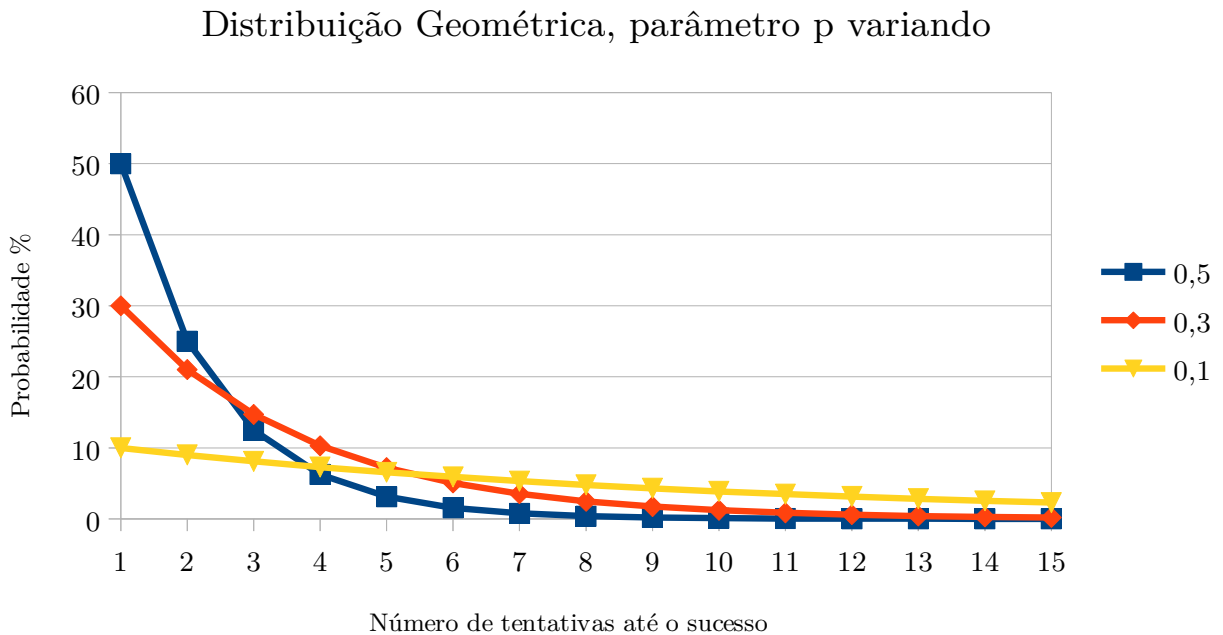


Figura 7: Distribuição geométrica.
Fonte: Autoria própria (2021).

4.8 COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE NA PROPOSTA DE ENSINO

Na proposta de ensino desenvolvida neste trabalho, a qual será descrita no Capítulo 8, são utilizados diversos dos conceitos detalhados neste referencial teórico. Os princípios de combinatória, delineados no Capítulo 3, são necessários para a contagem de elementos de um conjunto, do número de possibilidades ou da quantidade de combinações, competências essenciais para determinação de probabilidades de eventos aleatórios discretos. Para isso, faz-se uso do princípio da multiplicação, da permutação, de arranjos, combinações e, conseqüentemente, do triângulo de Pascal e suas propriedades. Por sua vez, os conhecimentos sobre teoria da probabilidade, dispostos no Capítulo 4, são utilizados como objeto principal no desenvolvimento da proposta de ensino, onde se faz uso dos conceitos de experimentos aleatórios discretos, das definições de probabilidade, das suas propriedades e de uma porção das distribuições de probabilidades.

5 INTRODUÇÃO À TEORIA MUSICAL

A partitura é o método consagrado de se registrar músicas. O estudo da teoria musical é importante para se realizar a leitura e o registro de obras musicais.

Esta é uma breve e simplificada introdução à teoria musical, onde se foca apenas nos conceitos necessários para ler as partituras utilizadas no Jogo de Dados de Mozart.

Como referência mais generosa sobre teoria musical, recomenda-se Med (1996).

5.1 NOTAÇÃO MUSICAL

Uma partitura é composta por diversos símbolos que seguem uma estrutura lógica para representar as músicas, os quais serão descritos a seguir.

5.1.1 A pauta e a notação da altura

A pauta, ou pentagrama, consiste de cinco linhas horizontais onde as notas musicais e os silêncios são escritos. As notas musicais são representadas por sinais de forma oval (a cabeça) desenhados sobre a pauta, podendo ter decorações como hastes e colchetes (bandeirolas). A posição da cabeça define qual é a altura da nota (Dó, Ré, Mi...) e as suas decorações (hastes e colchetes) definem o seu tempo de duração.

Na Figura 8 é mostrada uma pauta com doze notas musicais divididas em quatro compassos. O primeiro símbolo na pauta é a clave de Sol, que indica que na segunda linha (de baixo para cima) é o lugar da nota Sol. O segundo símbolo é composto por dois números (3 e 8), que identificam o compasso da partitura². Então tem-se as notas: Dó, Ré, Mi, uma barra que indica o final do compasso, Fá, Sol³, Lá, fim de compasso, Si, Dó, Ré, fim de compasso, e Mi, Fá e Sol. Por fim, o último símbolo (barra grossa) indica o fim da partitura.



Figura 8: Pauta musical.
Fonte: Autoria própria (2021).

As sete notas musicais formam uma sequência composta pelas notas: ...Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó... que continuam se repetindo em ambos os sentidos.

² O significado de compasso e a razão para os números 3 e 8 são apresentados no decorrer deste capítulo.

³ Esta é a nota Sol indicada pela clave de Sol.

A posição das notas na pauta é definida relativamente à clave. Com a clave de Sol, a nota Sol fica na segunda linha, a nota Lá fica entre a segunda e a terceira linha, a nota Si fica na terceira linha, e assim por diante.

Quanto mais agudas as notas, mais acima elas ficam na pauta e, quanto mais graves, mais abaixo ficam na pauta.

Se a nota desejada não pode ser desenhada em nenhuma das cinco linhas da pauta é possível grafar linhas adicionais superiores ou inferiores para representar a nota, como é o caso da primeira nota musical da Figura 8. Se a nota for muito grave e ficar abaixo da primeira linha da pauta, esta é estendida com linhas adicionais inferiores, apenas as estritamente necessárias. O mesmo vale para notas muito agudas, que ficam acima da quinta linha da pauta, em linhas adicionais superiores.

5.1.2 Notas simultâneas

Notas que são tocadas simultaneamente são escritas na pauta uma sobre a outra, compartilhando a mesma haste, se ela existir. O primeiro grupo de notas da Figura 9 é composto pelas notas Sol, Si e Ré, sem haste.

No caso de duas notas muito próximas, por exemplo Sol e Lá, onde uma fica na linha e outra entre duas linhas, escreve-se as notas que se sobreporiam deslocadas para o lado, mas ainda formando um grupo, com a haste centralizada. O segundo grupo de notas da Figura 9 é composto pelas notas Sol, Lá, Si e Ré, com haste.

O terceiro grupo de notas da Figura 9, por sua vez, é composto pelas notas Sol e Ré, com haste.



Figura 9: Pauta musical com notas simultâneas.

Fonte: Autoria própria (2021).

5.1.3 Tom, semitom e acidentes

Tomando como base um piano, as notas que aparecem na pauta são as teclas brancas. Entre algumas das teclas brancas existem teclas pretas, que não aparecem na pauta. Estas são chamados de acidentes.

Tocando todas as notas em sequência, branca, preta (se existir), branca, preta (se existir), e assim por diante, é seguida uma sequência de semitons, conforme pode ser visto na Figura 10. De acordo com Med (1996, p. 30), “semitom ou meio tom é o menor intervalo adotado entre duas notas na música ocidental (no sistema temperado)”.

O sistema temperado faz uso de doze semitons igualmente espaçados em cada oitava⁴, de forma a simplificar as projeções harmônicas e permitir que os instrumentos de som fixo possam ser usados em qualquer tonalidade, por exemplo os instrumentos: piano, teclado, violão, flauta, etc. Tocando em sequência apenas as teclas brancas, em alguns casos o intervalo é semitom e em outros o intervalo é tom (inteiro).

Tocando as teclas brancas em sequência (que corresponde à escala Dó maior), tem-se a sequência de tons (T) e semitons (S) mostrada na Figura 10.

Nota-se que, de uma nota Dó até a próxima nota Dó, existem doze semitons ou cinco tons e dois semitons. Estes cinco tons e dois semitons formam as “sete notas musicais”, de Dó até Si.

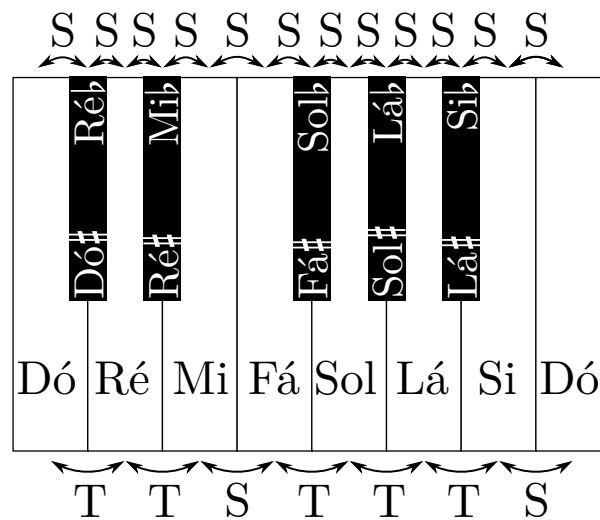


Figura 10: Teclado do piano: todas as teclas (sequência de semitons: S); teclas brancas (sequência de tons e semitons: T, S); e nomes das notas brancas e pretas.

Fonte: Autoria própria (2021).

As notas correspondentes às teclas pretas do piano não possuem um nome específico, mas são nomeadas a partir das outras notas com o uso dos acidentes. O primeiro tipo de acidente é o sustenido, cujo símbolo é \sharp , que pode ser visto na Figura 11a. O sustenido aumenta um semitom na nota. Por exemplo, a tecla preta à direita do Dó é chamada de Dó sustenido. Para escrever esta nota na pauta se desenha a cabeça na posição Dó e, logo à esquerda dela, se desenha o símbolo sustenido. Todas as teclas pretas podem ser nomeadas através do sustenido: Dó sustenido, Ré sustenido, Fá sustenido, Sol sustenido e Lá sustenido.

O segundo tipo de acidente é o bemol, cujo símbolo é \flat . Este diminui um semitom na nota e pode ser visto na Figura 11b. Por exemplo, a tecla preta à esquerda do Ré (a mesma à direita do Dó, ou seja, Dó sustenido) também é chamada de Ré bemol. Para escrevê-lo na pauta se desenha a cabeça na posição Ré e, logo à esquerda, se desenha o

⁴ Uma oitava é o intervalo sonoro de uma nota até a próxima de mesmo nome, por exemplo, de Dó até o próximo Dó, de Ré até o próximo Ré, etc.

a) Dó Dó# Ré Ré# Mi Fá Fá# Sol Sol# Lá Lá# Si Dó

b) Dó Si Sib Lá Láb Sol Solb Fá Mi Mib Ré Réb Dó

c) Sol Sol# Sol Solb Sol

Figura 11: Pauta musical com acidentes: a) sustenido #, b) bemol b e c) bequadro ♮.
Fonte: Aatoria própria (2021).

símbolo bemol. Todas as teclas pretas podem ser nomeadas através do bemol: Ré bemol, Mi bemol, Sol bemol, Lá bemol e Si bemol.

As notas Dó sustenido e Ré bemol, por exemplo, são notas enarmônicas, pois apesar de terem nomes diferentes, elas têm o mesmo som. Na Figura 10 também são mostrados os nomes das teclas pretas do piano, utilizando ambos os acidentes sustenido e bemol.

Quando se deseja desfazer um acidente, por exemplo, para tocar a nota sustenido e em seguida a nota natural ou para tocar a nota bemol e em seguida ela natural, utiliza-se o bequadro, cujo símbolo é ♮. Analogamente, basta colocá-lo logo antes da nota na qual se deseja desfazer o acidente, como pode ser visto na Figura 11c.

5.1.4 A notação do ritmo

Além da altura (agudo ou grave), as notas musicais possuem valor, ou tempo de duração (MED, 1996). Os valores das notas são: semibreve (valor: 1), mínima (valor: 1/2), semínima (valor: 1/4), colcheia (valor: 1/8), semicolcheia (valor: 1/16), fusa (valor: 1/32) e semifusa (valor: 1/64). Os respectivos símbolos são mostrados na Figura 12a. O tempo de duração das notas segue uma progressão geométrica. Duas notas mínimas duram o tempo equivalente à uma semibreve, duas notas semínimas duram o mesmo que uma mínima, e assim por diante.

Os silêncios (ausência de notas), também chamados de pausas, são tão importantes na música quanto as notas em si. Cada valor de nota possui um valor correspondente de silêncio. Vê-se os símbolos dos valores dos silêncios na Figura 12b.

Para uma notação mais leve e bonita, é possível ligar duas ou mais notas musicais dos tipos colcheias, semicolcheias, fusas ou semifusas. Para isso, faz-se uso de barras de ligação. A Figura 13a mostra exemplos de como ligar figuras rítmicas de valores iguais

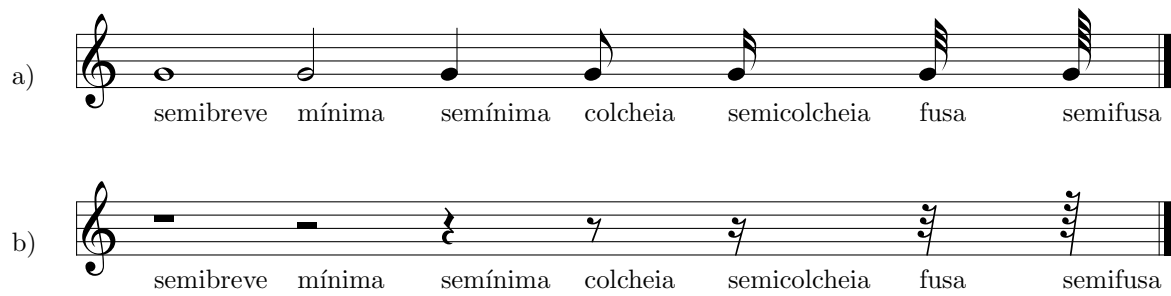


Figura 12: Figuras rítmicas: a) valores das notas e b) valores dos silêncios.
Fonte: Autoria própria (2021).

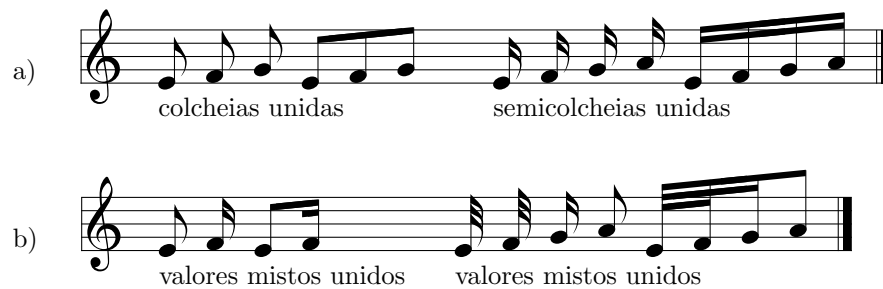


Figura 13: Ligação das figuras rítmicas por barras: a) valores iguais e b) valores mistos.
Fonte: Autoria própria (2021).

e a Figura 13b mostra exemplos de como ligar figuras rítmicas de valores mistos. Não existem ligações para os símbolos de silêncio.

5.1.5 Compasso

De acordo com Med (1996), “Compasso é a divisão de um trecho musical em séries regulares de tempos.” O compasso é definido no início da partitura, de acordo com dois números ali especificados. O número de baixo indica o valor base que corresponde a um intervalo de tempo. O número de cima identifica o número destes intervalos base que compõem cada compasso. Por exemplo, nas partituras do Jogo de Dados de Mozart (Capítulo 6) e nas composições geradas pelo jogo (por exemplo, Figura 16 e Figura 18) o compasso é 3 por 8 (três por oito ou três oitavos), o que significa que cada compasso possui três notas de comprimento um oitavo, ou seja, três colcheias por compasso. Outro exemplo de compasso é 4 por 4, ou quatro quartos, onde cada compasso possui quatro notas de comprimento um quarto, ou seja, quatro semínimas por compasso.

Na partitura, o início de um compasso é indicado por uma barra vertical, como se pode ver na Figura 8 e nas composições presentes nas duas figuras supracitadas. Observa-se que os acidentes (sustenido \sharp , bemol \flat e bequadro \natural) perdem seu efeito no fim do compasso.

5.1.6 Símbolos de repetição

Algo comum na música é a repetição de trechos. Para evitar repetir a escrita na notação musical, são utilizados os símbolos de repetição. No início do primeiro compasso do trecho a ser repetido são inseridas uma barra vertical grossa, uma barra vertical fina e dois pontos à direita ($\|:$) e no fim do último compasso do trecho são inseridos dois pontos, uma barra vertical fina e uma barra vertical grossa ($:||$). Executa-se a composição até serem encontrados os dois-pontos-e-barras (fim de repetição), continuando a executar desde a última barra-e-dois-pontos (início de repetição).

Na Figura 14a, por exemplo, toca-se “Dó Ré Mi, Fá Sol Lá, Sol Fá Mi, Fá Sol Lá, Sol Fá Mi, Si Lá Dó”, ou seja, executam-se os compassos nesta sequência: 1, 2, 3, 2, 3 e 4, havendo a repetição dos compassos 2 e 3.

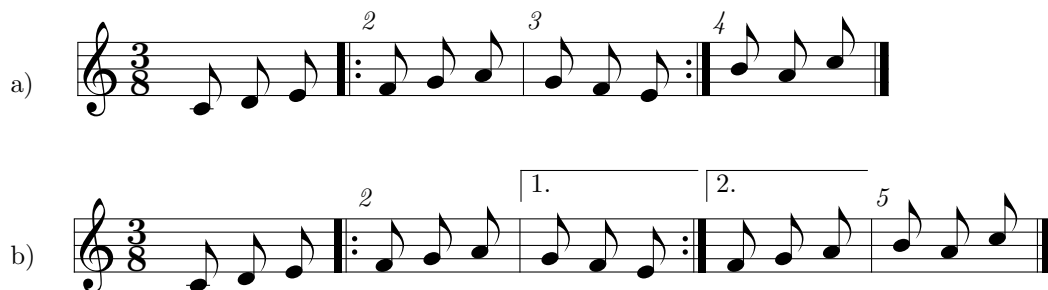


Figura 14: Exemplo de abreviatura de repetição de um trecho: a) Repetição e b) repetição com variação.
Fonte: Autoria própria (2021).

É possível inserir diversos compassos entre os símbolos de repetição, sendo também possível uma variação no fim da melodia na segunda execução, como se pode ver na Figura 14b, onde as melodias variadas são escritas em compassos diferentes (compassos 3 e 4, numerais omitidos na figura) e marcadas com o número da repetição em que devem ser executadas (símbolos numéricos “1.” e “2.”). Dessa forma, os compassos desta partitura são executados na sequência: 1, 2, 3, 2, 4 e 5, havendo uma repetição com variação no compasso final.

5.1.7 Notação musical para o piano

Duas ou mais pautas podem ser unidas, de forma que sejam tocadas simultaneamente. Na Figura 15, por exemplo, existem duas pautas: para a mão esquerda e para a mão direita no piano. Observa-se que a pauta de cima possui uma clave de Sol e a pauta de baixo possui uma clave de Fá. Esta nova clave indica que na quarta linha (de baixo para cima) é o lugar da nota Fá.

Uma partitura deve ter suas notas sincronizadas nas múltiplas pautas: as notas que iniciam juntas devem ser ilustradas em uma mesma linha vertical imaginária.

Um detalhe adicional é que, na pauta da clave de Sol, a primeira linha adicional inferior tem a mesma altura que a primeira linha adicional superior da pauta da clave de Fá. Portanto, a última nota das pautas da Figura 15 têm a mesma altura, ou seja, ambas são a mesma tecla Dó do piano.

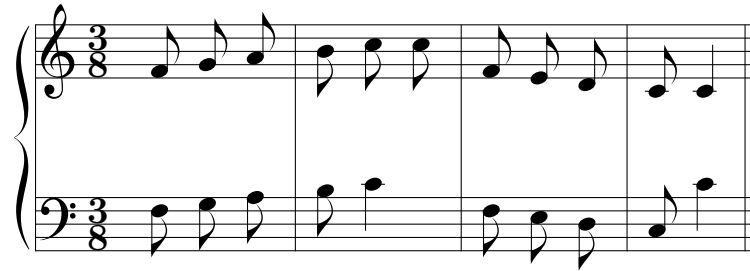


Figura 15: Pauta musical para piano.
Fonte: Autoria própria (2021).

5.2 O MINUETO

O minuetto foi o primeiro tipo de dança do período clássico. Como uma forma musical, existem vários tipos de minuetto, cuja estrutura musical e sonoridade foram incorporadas dentro de outros estilos na música clássica, como sonatas e sinfonias, sobrevivendo à grande mudança de estilo que ocorreu em meados do século XVIII. Executado em ritmo de valsa, um minuetto é composto por três seções: exposição *A*, contraste *B* e recapitulação *A'* (CAPLIN, 1998, p. 219-220).

Neste trabalho, no entanto, refere-se ao minuetto no formato *AA'BB*, que é utilizado no Jogo de Dados de Mozart. Neste jogo, os minuetos compostos possuem dezesseis compassos, que são executados da seguinte forma: primeiro se executa a seção *A*, com oito compassos; em seguida uma variação *A'*, cujo último compasso tem melodia diferenciada; e então se executa duas vezes a seção *B*, também com oito compassos (MOZART, 1793).

A Figura 16 mostra um exemplo de minuetto que foi gerado usando o Jogo de Dados de Mozart. Nessa figura estão destacadas as partes *A*, *A'* e *B* que compõem o minuetto.

The image shows a musical score for a Minuet in G major, 3/8 time. The score is divided into two systems. The first system (measures 1-7) is labeled 'A' and 'A'' with arrows. The second system (measures 8-16) is labeled 'A'' and 'B' with arrows. Measure 1 has a tempo marking '♩ = 111'. Measure 8 has a first ending bracket labeled '8.1'. Measure 9 has a second ending bracket labeled '8.2'. Measure 10 has a trill marking 'tr'. Measure 11 has a slur. Measure 12 has a fermata. Measure 16 ends with a repeat sign.

Figura 16: Minueto gerado usando o Jogo de Dados de Mozart, com destaque às seções A, A' e B do minueto.

Fonte: Autoria própria (2021).

Nota: Este minueto pode ser ouvido acessando o *link* <<https://youtu.be/hc3-d6MPrj0>>.

6 O JOGO DE DADOS DE MOZART

O Jogo de Dados de Mozart, muito conhecido como *Musikalisches Würfelspiel* (alemão para jogo de dados musical), atribuído ao grande compositor clássico Wolfgang Amadeus Mozart, é um método probabilístico de composição musical que utiliza a aleatoriedade do lançamento de dois dados (MOZART, 1793). Nesta seção será apresentada a história de Mozart e a história do Jogo de Dados de Mozart. Em seguida serão explicadas as instruções para criar uma composição com o jogo.

6.1 WOLFGANG AMADEUS MOZART

Wolfgang Amadeus Mozart (1756 – 1791) foi um compositor austríaco do período clássico. A música sempre esteve ao seu lado: Leopold Mozart, seu pai, era músico e regente substituto na corte de Salzburgo. O pai assumiu o papel de mestre e ensinou-lhe as “artes do ofício”, como na tradição dos ofícios artesanais, “talvez até mesmo desejando que algum dia o filho excedesse sua própria perícia” (ELIAS, 1994, p. 26).

Ensinando música aos seus filhos, Leopold percebeu desde muito cedo que Wolfgang demonstrava o dom para tal arte e levou o menino prodígio, ainda em sua infância, em diversas turnês pela Europa (CAVINI, 2012, p. 28).

O pai Mozart era bastante rígido com respeito à educação de seus filhos, especialmente no que tangia à música, como expõe Elias (1994):

A estrita disciplina imposta por seu pai deu frutos. Converteu-se em autodisciplina, capacitando o jovem a trabalhar, depurando e transformando em música as fantasias que nele fervilhavam, sem que perdessem a espontaneidade ou a inventividade (ELIAS, 1994, p. 13).

Assim se criou Mozart, considerado um dos maiores compositores de todos os tempos. Entre as mais de 600 obras que compôs, existem “missas; obras sacras; oratórios; 23 óperas; várias obras vocais seculares; mais de 45 sinfonias; 25 concertos para piano; 6 concertos para violino; 24 quartetos e 6 quintetos de cordas; várias obras de câmara; [e] várias obras para piano (CAVINI, 2012, p. 28-29).”

6.2 A HISTÓRIA DO JOGO

Com seu talento para a música, Mozart acabou por criar não apenas uma obra, mas um método para compor uma grande quantidade de minuetos chamado de Jogo de Dados de Mozart (LLUIS-PUEBLA, 2002).

De acordo com Uro (2017), o jogo é baseado no manuscrito K. 516f, datado do

ano 1787. Este, comumente referido por “*Musikalisches Würfelspiel* K. 516f (1787)”, consiste em diversos fragmentos melódicos, semelhante a um tipo de jogo musical popular na Europa Ocidental no século XVIII, contudo sem instruções ou menção ao uso de dados.

Noguchi (1990) confirma que foi encontrado um jogo musical com um autógrafo genuíno de Mozart, designado K. Anh. 294d/516f, entretanto este não aparece em sua “lista de todos os meus trabalhos”.

No entanto, Lluís-Puebla (2002) escreve que Mozart criou o jogo em 1777, aos 21 anos de idade. Noguchi (1990) manifesta que vários tipos de jogos musicais foram publicados em nome de Mozart. Todavia, a autoria do jogo não foi autenticada por Mozart, mas atribuída a ele pelo seu editor Nikolaus Simrock.

O jogo permite compor mais de 750 trilhões ($750 \cdot 10^{12}$) de minuetos, um número tão grande que, se for considerado 50 segundos para executar cada minuetto, demoraria cerca de 1,2 bilhões de anos para se executar todos eles sem parar.

Para ser exato, o Jogo de Dados de Mozart permite criar $2 \cdot 11^{14}$ minuetos. O compasso VIII tem sempre a mesma melodia (inclusive na variação). O compasso XVI pode ter duas melodias diferentes. Os outros 14 compassos podem ter 11 melodias diferentes.

6.3 INSTRUÇÕES DO JOGO

Para compor um minuetto com o Jogo de Dados de Mozart, deve-se fazer uso de dois dados comuns, a Tabela 1, que relaciona o valor da soma dos dados com o fragmento melódico sorteado, e a partitura da Figura A.3, com os 176 fragmentos melódicos. Para criar uma composição se utilizam as seguintes instruções:

1. Os dois dados comuns são lançados 16 vezes, registrando as somas dos dois dados. Dessa forma são sorteados 16 números de 2 a 12, um para cada compasso do minuetto. Exemplo de sorteio da soma dos dados:

2 – 2 – 5 – 4 – 10 – 12 – 11 – 9 – 2 – 10 – 9 – 5 – 10 – 11 – 3 – 11.

2. Cada um dos 16 compassos do minuetto possui uma coluna na Tabela 1. Localizando a célula cuja coluna é o compasso (de I a XVI) e cuja linha é a soma dos dados (de 2 a 12), determinam-se os fragmentos melódicos sorteados para a composição. Por exemplo, com as somas dos dados acima são sorteados os fragmentos melódicos a seguir:

96 – 22 – 113 – 13 – 75 – 37 – 147 – 94 – 70 – 77 – 48 – 34 – 137 – 59 – 116 – 78.

Isso se deve ao compasso I ter na linha 2 o número 96, ao compasso II ter na linha 2 o número 22, ao compasso III ter na linha 5 o número 113, e assim por diante, até o compasso XVI ter na linha 11 o número 78.

A Tabela 2 mostra os fragmentos melódicos para cada um dos lançamentos.

3. Os 16 fragmentos melódicos sorteados para os compassos da composição são copiados para a pauta em branco, mostrada na Figura 17. Leva-se em conta que o compasso VIII possui duas variações, copiando cada uma delas separadamente, nos espaços denotados por 1 e 2, os números das variações.

A Figura 18 mostra um exemplo de minueto gerado pelo Jogo de Dados de Mozart, com os lançamentos supracitados.

Tabela 1: Tabela de compassos do Jogo de Dados de Mozart.

Soma dos Dados	Compassos							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

Soma dos Dados	Compassos							
	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Fonte: Adaptado de Mozart (1793).

Tabela 2: Soma dos dados e fragmentos melódicos que geram o minueto da Figura 18.

Compasso	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Soma dos dados	2	2	5	4	10	12	11	9
Fragmento melódico	96	22	113	13	75	37	147	94

Compasso	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
Soma dos dados	2	10	9	5	10	11	3	11
Fragmento melódico	70	77	48	34	137	59	116	78

Fonte: Autoria própria (2021).

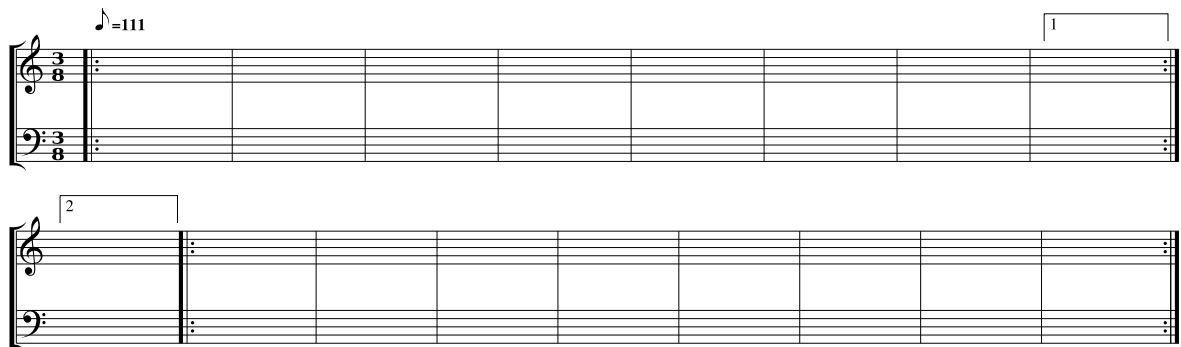


Figura 17: Partitura em branco do Jogo de Dados de Mozart.

Fonte: Autoria própria (2021).

2-2-5-4-10-12-11-9-2-10-9-5-10-11-3-11

Figura 18: Minueto gerado usando o Jogo de Dados de Mozart, composto a partir das somas dos dados e fragmentos melódicos mostrados na Tabela 2.

Fonte: Autoria própria (2021).

Nota: Este minueto pode ser ouvido acessando o *link* (<https://youtu.be/4M4meYjkCKM>).

PARTE II
METODOLOGIA

7 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

O presente trabalho se caracteriza como um estudo de caso da aplicação de uma proposta de ensino, enquadrando-se na categoria de pesquisa de campo de caráter exploratório-descritivo (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 188).

Neste trabalho foram realizadas: a pesquisa bibliográfica, a elaboração de uma proposta de ensino, a criação de um produto educacional, a aplicação da proposta com alunos de Ensino Médio, além de alunos de primeiro período de cursos de Graduação, e a análise quantitativa-qualitativa das respostas desses alunos a um questionário de avaliação. Neste capítulo e nos capítulos seguintes serão descritos com detalhe cada um destes pontos.

De acordo com Marconi e Lakatos (2003, p. 183), a finalidade da pesquisa bibliográfica é colocar o pesquisador em contato com o assunto. A seguir será descrita a pesquisa bibliográfica realizada para o desenvolvimento deste trabalho.

Dada a forte relação da proposta didática com o trabalho contextualizado e interdisciplinar, analisaram-se referências que expõem o ensino da matemática e da probabilidade nesse foco. A importância, o objetivo e a necessidade da contextualização do ensino da matemática e da probabilidade são defendidos por D'Ambrosio (2003), Ogliari (2008) e Terradas (2011). Por sua vez, Batanero et al. (2004) explicam diversos desafios sobre o ensino da probabilidade e apontam para a importância de se instruir os professores de matemática para ensinarem este conteúdo.

Havendo diversas formas de realizar a contextualização de um conteúdo, um método muito utilizado é a partir de jogos, como defendem Lara (2004) e Silva e Kodama (2004). De acordo com esta visão, García et al. (2013) expressam a possibilidade de se ensinar probabilidade a alunos de Ensino Médio com o uso do Jogo de Dados de Mozart, a qual foi utilizada como parte de uma oficina aplicada por Carrillo (2019). Além disso, Adão (2013) e Campos (2018) demonstram diversas formas de se trabalhar probabilidade com esses alunos.

Tais discussões, aliadas ao ensino de probabilidade e de matemática, foram descritas no Capítulo 2.

Com o objetivo de se conhecer o currículo exigido e as competências nele definidas, foram pesquisados na BNCC, dentro das seções do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, os conteúdos da área de matemática aliados à combinatória, à probabilidade e à estatística (BRASIL, 2017).

Conteúdos de combinatória, importantes para se realizarem contagens e para a resolução de problemas de probabilidade, foram explicados no Capítulo 3 (LIMA et al., 2006).

Em seguida, foi desenvolvida uma pesquisa sobre conteúdos iniciais, intermediá-

rios e avançados de probabilidade, com foco nos experimentos aleatórios discretos, a qual foi apresentada no Capítulo 4 (LIMA et al., 2006; ROSS, 2014; AMORIM; MOZER, 2020).

Destacou-se os conteúdos de probabilidade e as competências curriculares da área de matemática, dirigidas a experimentos aleatórios discretos. Foram selecionados os seguintes conteúdos: espaço amostral, eventos e operações, probabilidades de eventos, probabilidade condicional, variáveis aleatórias e funções de distribuição de probabilidades.

Além disso, fez-se estudos sobre a teoria musical (MED, 1996), a forma musical (CAPLIN, 1998), a história e sociologia do compositor Wolfgang Amadeus Mozart (ELIAS, 1994; CAVINI, 2012) e a história do Jogo de Dados de Mozart (MOZART, 1793; URO, 2017; NOGUCHI, 1990; LLUIS-PUEBLA, 2002). Essa revisão relacionada à música foi exposta no Capítulo 5 e no Capítulo 6.

Foram estudadas também referências correspondentes à criação de produtos de natureza educacional em mestrados profissionais em ensino (MOREIRA, 2004; LEODORO; BALKINS, 2010), como será descrito no Capítulo 9, onde será exposto o produto educacional criado nesta pesquisa.

8 PROPOSTA DE ENSINO: ENSINANDO PROBABILIDADE COM O JOGO DE DADOS DE MOZART

A partir da pesquisa bibliográfica, elaborou-se esta proposta didática para o ensino de probabilidade no Ensino Médio, incluindo diversos exemplos e atividades.

Em posse das competências e dos conteúdos selecionados, uma série de atividades foram criadas e organizadas, incluindo atividades contextualizadas no Jogo de Dados de Mozart, na aleatoriedade de dados comuns (de seis lados), de outros tipos de dados (de 12 e de 20 lados) e de moedas.

As atividades foram explicadas, resolvidas e, para embasar as resoluções, foram apontados os conteúdos de probabilidade necessários.

O produto educacional, os materiais educativos e os recursos tecnológicos foram incorporados à proposta, de forma que sejam utilizados no desenvolvimento das atividades.

Dessa forma, apoiado no currículo, na literatura e metodologia supracitados, foi elaborada a proposta didática presente neste capítulo, complementada pelos produtos educacionais presentes no Capítulo 9, pelos materiais auxiliares dispostos no Apêndice A e pelos recursos tecnológicos expostos no Apêndice B.

8.1 ORGANIZAÇÃO DA AULA

Recomenda-se que os alunos se organizem em grupos pequenos, de até quatro indivíduos. Trabalhar em grupo tem o objetivo de tornar a sala um ambiente mais agradável às discussões entre os alunos. O limite de quatro pessoas no grupo se dá pela distribuição dos fragmentos melódicos, de forma que cada aluno possa sempre ter em mãos alguma das quatro partituras.

No desenvolvimento da proposta, o professor resolve os exemplos, deixa os alunos resolverem as perguntas e então as corrige. Ao resolver os exemplos e ao corrigir as perguntas, recomenda-se usar apenas as ideias expressas pelos alunos, ou seja, o professor os conduz à solução.

8.1.1 Materiais para os alunos

- Cada aluno recebe:
 - Um dado planificado (Figura A.1);
 - Uma tabela de compassos (Tabela A.1);
 - Uma partitura em branco (Figura A.2); e

- Cada grupo recebe uma cópia das quatro folhas com os fragmentos melódicos (Figura A.3, partes 1 a 4).

8.2 EXPLICANDO O JOGO DE DADOS DE MOZART

O professor pede que os alunos se organizem em grupos de até quatro pessoas e lhes entrega os materiais.

Explica para os alunos como funciona o Jogo de Dados de Mozart.

Recomendação de discurso:

Este é o Jogo de Dados de Mozart.

Com ele é possível compor músicas usando dados.

As músicas criadas têm 16 compassos, ou seja, 16 partes, que são sorteadas com o lançamento de dois dados.

Cada compasso é escolhido em uma coluna da tabela, de acordo com a soma dos dois dados.

O número sorteado indica o fragmento melódico que compõe a música.

Por exemplo, no primeiro compasso, lançando os valores 5 e 1 nos dados, a soma é 6. Na tabela, localiza-se o número na primeira coluna e na linha 6, de forma a se obter o número 148. Então é localizado o compasso com esse número nos trechos melódicos.

O mesmo é feito para os outros 15 compassos.

Atividade 1: Com o auxílio de dois dados, o professor sorteia dois números para cada grupo, para que identifiquem os compassos na tabela e escrevam os trechos melódicos na partitura em branco. Os outros compassos serão preenchidos no decorrer das atividades.

Pergunta 2: No Jogo de Dados de Mozart, qual é o motivo de terem sido consideradas 11 possibilidades para cada compasso?

Resposta: Foram consideradas 11 possibilidades para cada compasso de forma que exista um trecho melódico para cada resultado da soma dos dados.

Pergunta 3: Por que o Jogo de Dados de Mozart possui um total de 176 trechos melódicos?

Resposta: Porque o jogo é formado por 16 compassos, cada um com 11 possibilidades, estas referentes às somas dos dados. Dessa forma, para se escolher 16 vezes (compassos) entre 11 possibilidades dos dados (somas), são necessários $16 \times 11 = 176$ trechos melódicos.

8.3 EXPLICAÇÃO SOBRE AS PARTITURAS

O professor pode explicar brevemente os conceitos básicos de como ler as partituras. Com um instrumento musical disponível, é possível fazer pequenas demonstrações para os alunos.

Recomendação de discurso:

As notas são compostas por duas partes: a altura e o valor.

A altura, ou seja, a altura do círculo na partitura, diz qual é a nota que deve ser tocada.

Na clave de Sol (primeiro pentagrama, mão direita no piano) as cinco linhas identificam as notas Mi, Sol, Si, Ré e Fá. Os quatro espaços entre essas linhas identificam as notas Fá, Lá, Dó e Mi.

Seguindo as linhas e os espaços em sequência, de baixo para cima, estão as notas musicais na ordem normal: Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó, Ré, Mi e Fá.

Na clave de Fá (segundo pentagrama, mão esquerda no piano) as linhas e os espaços em sequência, de baixo para cima, estão as notas: Sol, Lá, Si, Dó, Ré, Mi, Fá, Sol e Lá.

Linhas podem ser adicionadas se a nota não couber no pentagrama. Por exemplo, nos trechos melódicos 7, 45, 116 e 139 foram necessárias linhas adicionais.

O valor, ou seja, o tempo que a nota é tocada é identificado pelo desenho que a nota tem.

Uma nota semínima (círculo com haste), por exemplo a primeira nota (clave de Sol) nos compassos 8, 79, 93 e 131, tem duração de dois tempos.

Uma nota colcheia (círculo com haste e uma bandeirola), por exemplo a primeira nota (clave de Fá) nos compassos 9, 44, 90 e 141, tem duração de um tempo.

Colcheias podem ser ligadas por uma barra, por exemplo as notas nos compassos 1, 54, 114 e 130 são colcheias.

Uma nota semicolcheia (círculo com haste e duas bandeirolas) tem duração de meio tempo, ou seja, duas semicolcheias duram o mesmo tempo que uma colcheia. Semicolcheias também podem ser ligadas por barras, por exemplo nos compassos 7, 45, 90 e 136.

Os silêncios são denotados por símbolos específicos definindo seu valor, ou seja, seu tempo de duração. No Jogo de Dados de Mozart só são utilizados os silêncios com valor de uma colcheia, por exemplo na clave de Fá dos compassos 2, 41, 95 e 131.

O compasso define o ritmo da música. As músicas do Jogo de Dados de Mozart tem compasso três por oito, como pode-se ver no início da partitura. Isso significa que cada compasso dura o tempo de três colcheias.

8.4 CONTAGEM DO NÚMERO DE COMPOSIÇÕES

O número de composições possíveis é um tópico que os próprios alunos podem levantar. Nesses casos, recomenda-se ao professor explicar e discutir o assunto com os alunos, aproveitando a sua curiosidade.

Atividade 4: O professor pede aos alunos para estimarem o número de composições.

“Quantas composições diferentes vocês pensam que é possível se obter com o Jogo de Dados de Mozart? O que significa ser diferente?”

Alguns alunos podem se sentir apreensivos em expor suas estimativas. O professor pode aliviar a tensão desses alunos falando “Pessoal, é só uma estimativa. É para vermos as respostas.”

A partir de exemplos, o professor revisa os conceitos de combinatória necessários para calcular o número de composições.

Pergunta 5: No Jogo de Dados de Mozart, quantas composições se pode criar?

Resposta: Cada um dos 16 compassos pode ser sorteado com 11 resultados diferentes. Assim, há cerca de 46 quatrilhões de composições possíveis no Jogo de Dados de Mozart, que pode ser calculado da seguinte forma:

$$\underbrace{11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11}_{16 \text{ compassos}}$$

$$= 11^{16} = 45.949.729.863.572.161$$

$$\approx 46 \times 10^{15} \quad (46 \text{ quatrilhões}).$$

Para dar uma noção do tamanho do número: há aproximadamente 5,9 milhões de composições para cada uma das 7,8 bilhões de pessoas no mundo.

Atividade 6: O professor retoma a atividade anterior, onde os alunos estimaram o número de composições e pede que estimem o tempo necessário para executá-las.

“Mais uma estimativa: Quem acha que é possível uma pessoa tocar todas as composições durante sua vida. Quem acha que é impossível? Por que?”

Pergunta 7: Quanto tempo demora para tocar todas as composições do Jogo de Dados de Mozart, uma por vez?

Resposta: Uma composição demora cerca de 50 segundos para ser executada⁵. Então basta multiplicar o número de composições pelo tempo de execução e converter segundos para anos:

$$46 \times 10^{15} \text{ composições} \times \frac{50 \text{ segundos}}{1 \text{ composição}} \times \frac{1 \text{ minuto}}{60 \text{ segundos}} \times \frac{1 \text{ hora}}{60 \text{ minutos}} \times \frac{1 \text{ dia}}{24 \text{ horas}} \times \frac{1 \text{ ano}}{365 \text{ dias}}$$

$$\approx 73 \times 10^9 \text{ anos} \quad (73 \text{ bilhões de anos}).$$

Assim, são necessários cerca de 73 bilhões de anos para se executarem todas as composições, uma por vez, quando são tomados 50 segundos para cada. Isso demora mais do que uma vida humana. De fato é um tempo maior que a idade estimada do universo, que é de 13,8 bilhões de anos.

8.5 INTRODUÇÃO DE CONCEITOS DE PROBABILIDADE

Prosseguindo com as atividades, o professor expõe conceitos básicos de probabilidade para os alunos.

Recomendação de discurso:

Experimento aleatório: é um experimento cujo resultado não pode ser determinado antes de sua realização.

Espaço amostral: é o conjunto que possui **todos** os possíveis resultados do experimento aleatório. Para ser o espaço amostral é preciso conter todos os resultados possíveis.

A seguir seguem alguns exemplos de experimentos aleatórios e seus espaços amostrais:

- O lançamento de uma moeda, que pode cair cara ou coroa, $S = \{K, C\}$;
- O lançamento de um dado, que pode cair cada uma das seis faces $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- Os sorteios, como o bingo $S = \{1, 2, \dots, 75\}$ e a mega-sena $S = \{1, 2, \dots, 60\}$;
- A distância do salto de um atleta, que pode ser representado por um número positivo, $S = \mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$;
- A temperatura mais alta do dia, que pode ser representada por um número real, $S = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$; e
- O lugar no alvo onde um atirador acerta, que pode ser representado por um ponto no plano, $S = \mathbb{R}^2$.
- Continuar com os exemplos que os alunos dão.

⁵A execução é realizada a 111 bpm (batimentos por minuto ou colcheias por minuto), como é denotado nas partituras do jogo. Há 16 compassos com o tempo de 3 colcheias cada, os quais são executados duas vezes. São $16 \times 2 \times 3 = 96$ colcheias por composição, o que dá $96/111 \approx 0,865$ minutos, ou seja, aproximadamente 51,9 segundos por composição.

Pergunta 8: O Jogo de Dados de Mozart utiliza a soma de dois dados. Qual é o espaço amostral utilizado? Justifique.

Resposta: Um dado, quando lançado, pode resultar em valores de 1 a 6. Somando um segundo dado, o valor mínimo que se obtém é $1+1 = 2$ e o valor máximo é $6+6 = 12$, abrangendo todos os números inteiros entre eles. Dessa forma, o espaço amostral da soma de dois dados é:

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Recomendação de discurso:

Evento: é um subconjunto do espaço amostral. Portanto, também contém resultados do experimento aleatório, porém não é necessário conter todos os resultados possíveis.

Outros conceitos, como o evento elementar, o complementar, a união, a intersecção, diferença de eventos e eventos mutuamente exclusivos, podem ser explicados a medida que são necessários.

É importante não sobrecarregar os alunos com muitos conceitos ou com muitas informações. Recomenda-se dar tempo e oportunidade (atividades e, possivelmente, exercícios adicionais) para concretizá-los e apenas então prosseguir.

Recomendação de discurso:

As probabilidades dos eventos: alguns eventos têm mais chances de ocorrer do que outros. Por exemplo, ao lançar um dado há mais chances de cair um número par (evento $E = \{2, 4, 6\}$) do que há chances de cair o número dois (evento $F = \{2\}$). As probabilidades dos eventos são utilizadas para representar estas chances, denotando a probabilidade do evento E como $P(E)$. Quanto aos eventos E e F , correspondentes ao lançamento de um dado, considere as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} S &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ P(E) &= P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6}, \\ P(F) &= P(\{2\}) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

De onde vêm os valores dessas probabilidades?

Propriedade 1 das probabilidades: a probabilidade de um evento é um número real (decimal) entre zero e um:

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

Algumas vezes as probabilidades são dadas em porcentagem, com valores de 0 % a 100 %.

Propriedade 2 das probabilidades: a probabilidade do espaço amostral é igual a unidade:

$$P(S) = 1.$$

Um evento cuja probabilidade é zero não tem chance alguma de ocorrer. Já um evento cuja probabilidade é unitária, ou seja, igual a um (100 %), é obrigatório que ocorra.

Outras propriedades, como a probabilidade da união de eventos mutuamente exclusivos, da união, da intersecção, da diferença, do complementar, da probabilidade condicional e eventos independentes, podem ser explicados a medida que são necessários.

Pergunta 9: No Jogo de Dados de Mozart se faz uso de dois dados. No entanto, qual é a probabilidade de cada uma das faces de um dado? Justifique.

Resposta: Considerando que o dado é justo, ele deve ser equiprovável e cada uma das seis faces tem probabilidade $1/6$, de forma que a soma das probabilidades dos resultados produza a unidade, que é a probabilidade do espaço amostral.

8.6 MONTANDO OS DADOS COM OS ALUNOS

O professor pode fornecer um dado planificado para cada aluno, para que sejam montados e utilizados para criar composições com o Jogo de Dados de Mozart. A Figura A.1 mostra um dado planificado, que os alunos podem utilizar para montar um dado. Eis os materiais e as instruções para a montagem:

- Material necessário: Impressão dos dados planificados, tesoura, e cola;
- Material opcional: Preenchimento para o dado, como isopor ou algodão;
- Crie uma cópia dos dados planificados na escala que desejar. Os dados da Figura A.1 têm lados de aproximadamente 3,75 cm, quando impressos em tamanho real (folha A4);
- Recorte o contorno;
- Faça as dobras das abas e faces, para obter arestas bem definidas;
- Em cada uma das abas passe uma fina camada de cola no lado destacado e cole no lado interno da face adjacente;
- Recomenda-se iniciar colando as abas das faces 2 e 5 na face 4, em seguida as abas da face 6 nas faces 2 e 5;
- Neste momento é possível preencher o dado com algum material, como isopor ou algodão, antes de fechá-lo;

- Então, feche o dado. Cole as abas dos lados 2 e 5 na face 3, ao mesmo tempo que cola a aba da face 3 no lado 6. Neste passo não há acesso dentro do dado para grudar a aba na face interna. Então, para facilitar o contato delas, deixe as abas levemente mais abertas que um ângulo reto; e
- Por fim, aguarde a cola secar.

Atividade 10: Cada aluno monta seu dado. Este será utilizado para criar composições com o Jogo de Dados de Mozart.

Ao montarem os dados, os alunos estão naturalmente abertos para uma discussão interessante, relacionada ao trabalho manual que estão realizando. Então o professor direciona a conversa para esse tópico. Enquanto conversam, ensinam uns aos outros o que já conhecem sobre o conteúdo. O professor pode usar isso para identificar o nível de conhecimento dos alunos sobre o assunto de probabilidade.

Assim que começarem com o recorte, o professor pergunta:

Pergunta 11: Enquanto vocês montam os dados: com base na sua construção, quais são as faces que vocês imaginam serem as mais prováveis?

Resposta: As faces com maior peso, ou seja, aquelas com mais material (abas e cola), tendem a cair viradas para baixo. Exemplos de raciocínio:

a) As faces terão frequências aproximadamente uniformes, com pouco desvio devido à construção.

b) Contando o número de abas em cada aresta das faces 1 a 6 obtém-se 0, 3, 3, 2, 3 e 3, respectivamente. Com isso, pode-se pensar que a face 1 caia para cima com maior frequência, seguido pela face 4, com frequência intermediária, e então as faces 2, 3, 5 e 6, com frequências menores e semelhantes.

c) O dado não está colado de maneira uniforme, ou seja, está deformado. Não se pode dizer qual é o lado que cairá com maior frequência.

Enquanto os alunos trabalham na construção dos dados, o professor anota no quadro as hipóteses levantadas pelos alunos, ou seja, as suas opiniões, mesmo que incorretas. Quando essas estão registradas, o professor pode pedir para cada um votar na que pensa ser a melhor.

Quando estiverem exaustas as hipóteses dos alunos, outra discussão que o professor pode encaminhar é a seguinte, relacionada ao método que se pode usar para testar tais hipóteses:

Pergunta 12: Como vocês fariam para testar quais são as faces mais prováveis?

Resposta: Lançar o dado diversas vezes e verificar as frequências das faces.

8.7 UM DADO E A DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

Neste ponto, o professor já levantou duas questões importantes:

- Qual é a distribuição do lançamento de um dado?
- Como testar qual é a distribuição?

Agora, com os dados finalizados, é possível realizar o teste para verificar as hipóteses.

O professor pode recapitular sobre o espaço amostral do lançamento de um dado $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e iniciar a atividade:

Atividade 13: Por um tempo determinado (por exemplo, de 3 a 5 minutos), cada aluno lança o seu dado e registra os resultados. O aluno deve contar a frequência dos resultados.

O professor pode criar uma pequena disputa entre os grupos: “Qual será o grupo que consegue mais lançamentos?”

A Figura 19 mostra a distribuição de quatro dados, obtidos por 50 lançamentos de cada um. Enquanto mais lançamentos mais próxima a frequência se torna da distribuição real.

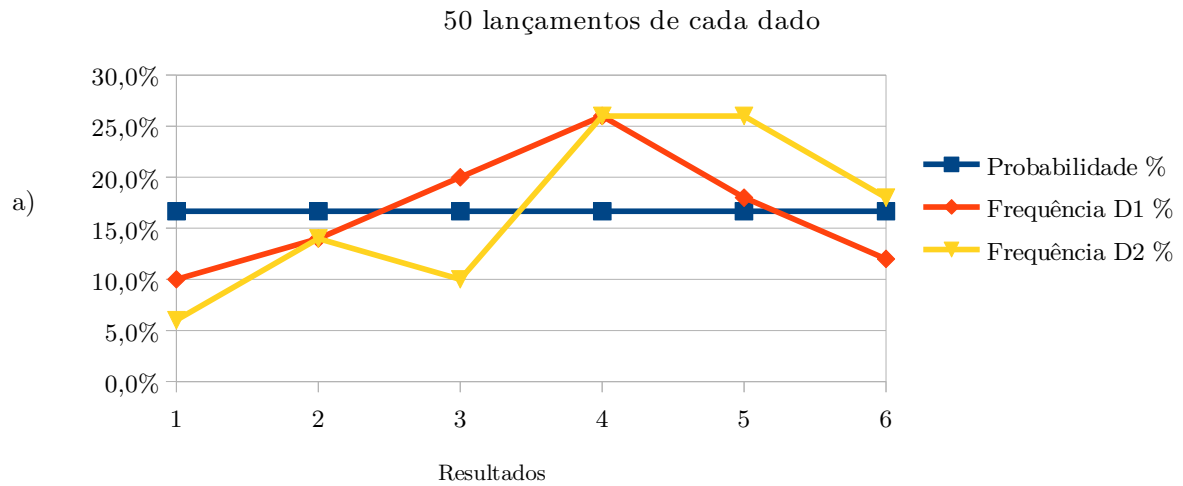
Atividade 14: O grupo faz a soma dos resultados: a contagem das frequências de cada uma das faces. O professor coleta os dados dos grupos, formando uma tabela (Resultados, Grupo 1, Grupo 2, ..., Total).

O professor pode criar outra pequena disputa, agora entre os alunos do próprio grupo: “E quem foi o campeão de cada grupo?”

Então o professor cria um histograma com os resultados coletivos, como mostra a Figura 20a e, a seguir, discute com os alunos sobre qual das hipóteses levantadas é a mais adequada.

O professor então multiplica as probabilidades pelo número de amostras realizadas e cria as barras para a situação com dados ideais ao lado dos valores experimentais, como mostra a Figura 20a.

Probabilidades e frequências dos resultados de um dado



Probabilidades e frequências dos resultados de um dado

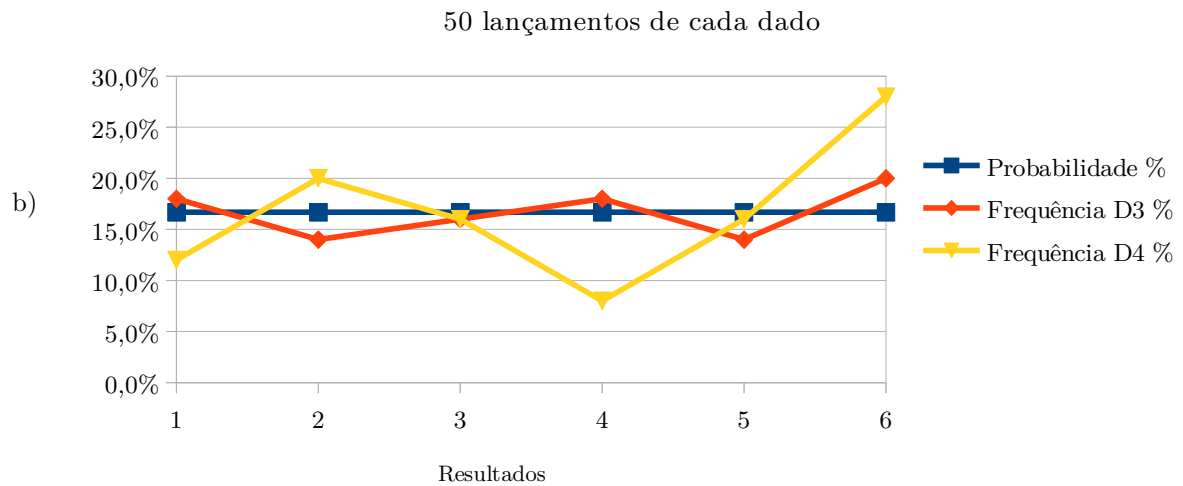


Figura 19: Distribuição de probabilidades (teórico) e frequência (experimental) do lançamento de um dado. a) Dados 1 e 2. b) Dados 3 e 4.
 Fonte: Boni et al. (2021a).

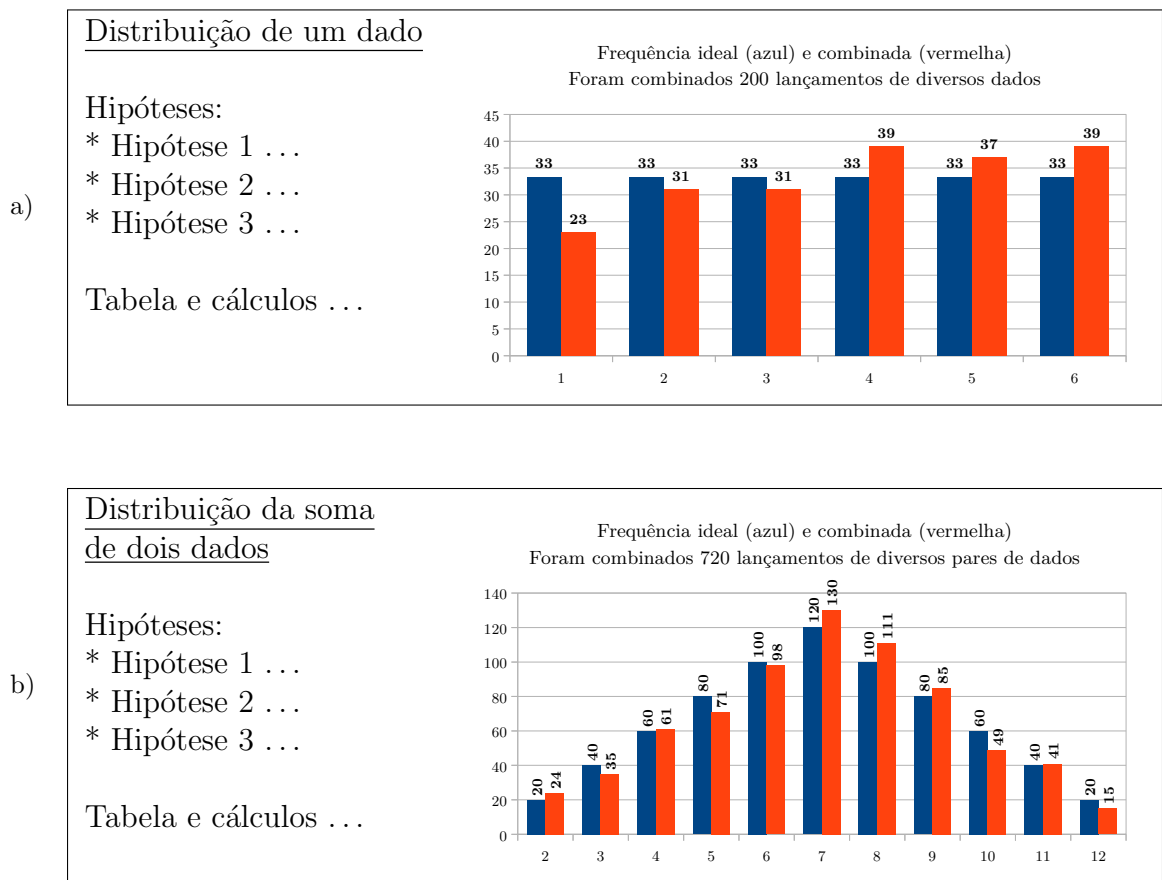


Figura 20: Exemplos de desenvolvimento das distribuições no quadro: a) distribuição uniforme e b) distribuição triangular.
 Fonte: Boni et al. (2021a).

É importante lembrar aos alunos que todos os dados da turma estão sendo “misturados” nessa estatística. Dessa forma, os resultados não são específicos de um dado, mas uma média ou combinação deles.

8.8 EVENTOS INDEPENDENTES

O professor então lembra aos alunos sobre o Jogo de Dados de Mozart e que este usa a soma de dois dados para sortear os compassos.

Pergunta 15: Você só tem um dado. Como é possível criar uma composição com o Jogo de Dados de Mozart com apenas esse dado? Justifique a resposta.

Resposta: Ao invés de jogar dois dados para sortear um número de 2 a 12, pode-se jogar o mesmo dado duas vezes e somar os valores dos dois lançamentos. Ao lançar dois dados de uma vez, ambos os dados são eventos independentes. Ao lançar um único dado duas vezes, também se dispõem dois eventos independentes.

Depois de deixar os alunos responderem, o professor discute com eles as possibilidades que levantaram. Os alunos podem dar diversas respostas, por exemplo:

- Jogar duas vezes o mesmo dado e somar os valores (resposta esperada);
- Usar apenas seis linhas da tabela;
- Emprestar um dado do colega; e
- Fazer mais um dado (demorado).

A resposta esperada, permite a discussão sobre eventos independentes, pois o lançamento de cada dado é um evento independente com probabilidades aproximadamente uniformes. Tendo apenas um dado, é possível lançá-lo duas vezes, também resultando em dois eventos independentes de características semelhantes.

8.9 FINALIZANDO A COMPOSIÇÃO

Então os alunos finalizam a composição que iniciaram. Podem utilizar o método que desejarem, exceto algum que exija muito tempo. Novamente o professor utiliza a atividade para direcionar a conversa dos grupos para uma discussão relacionada ao tema da aula.

Atividade 16: Os alunos finalizam a composição do Jogo de Dados de Mozart, lançando os dados e copiando os trechos melódicos.

Pergunta 17: Enquanto vocês escrevem a partitura: vocês acham que existe algum valor das somas que cai mais do que os outros?

Resposta: Levantamento de hipóteses. Exemplos de hipótese:

- a) Mesma chance para todos.
- b) Chances diferentes para cada um.

Pergunta 18: Como vocês fariam para testar se as probabilidades das somas são iguais ou quais são as mais prováveis?

Resposta: Lançar os dados diversas vezes e verificar as frequências de cada soma, comparando com o valor esperado, o qual é igual ao produto da probabilidade pelo número de lançamentos.

8.10 SOMA DE DOIS DADOS E A DISTRIBUIÇÃO TRIANGULAR

O professor recapitula com os alunos sobre o espaço amostral da soma de dois dados:

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

e inicia a atividade:

Atividade 19: Por um tempo determinado (por exemplo, de 3 a 5 minutos), cada aluno lança o seu dado duas vezes, somando os valores e registrando os resultados. O aluno deve contar a frequência dos resultados.

Novamente o professor pode criar pequenas disputas entre os grupos e dentro destes.

A Figura 21 mostra a distribuição de dois pares de dados, obtidos por 360 lançamentos de cada par. Novamente, quanto mais lançamentos, mais próxima a frequência se torna da distribuição real da soma dos dados.

Atividade 20: O grupo faz a soma dos resultados: a contagem das frequências de cada uma das faces. O professor coleta os dados dos grupos, formando uma tabela (Resultados, Grupo 1, Grupo 2, ..., Total).

Probabilidades e frequências das somas de dois dados

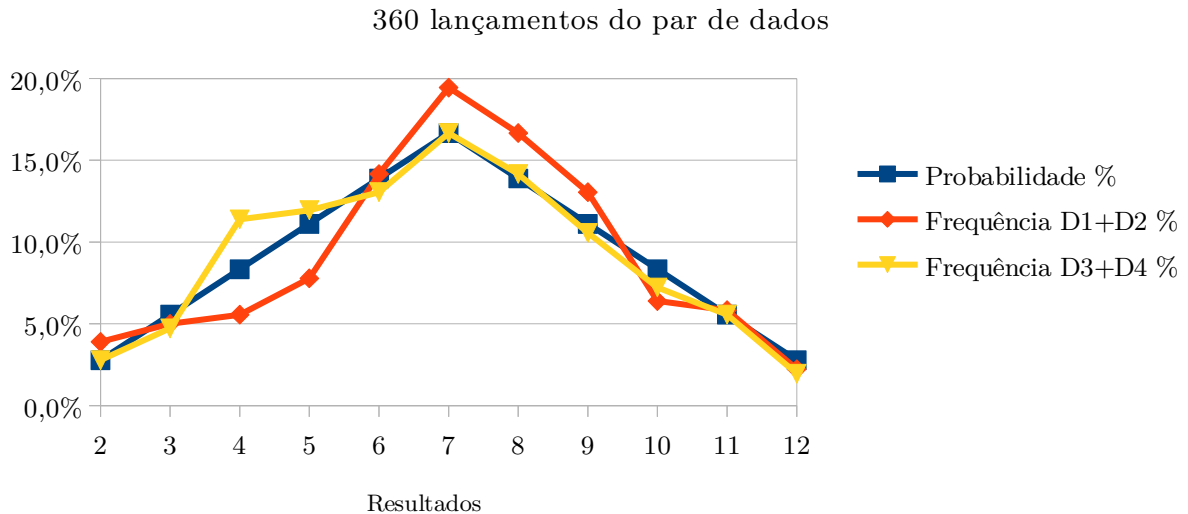


Figura 21: Distribuição de probabilidades e frequência da soma de dois dados.
Fonte: Boni et al. (2021a).

Então o professor cria um histograma com os resultados coletivos, como mostra a Figura 20b e, a seguir, discute com os alunos sobre qual das hipóteses levantadas é a mais adequada. Além disso, discute a impossibilidade do uso da distribuição uniforme para modelar a soma de dois dados. A distribuição uniforme não modela bem este experimento aleatório.

Pergunta 21: Por que a distribuição uniforme não modela bem a soma de dois dados? Qual é o formato da distribuição de probabilidades?

Resposta: Porque os resultados não têm probabilidades iguais. O formato da distribuição de probabilidades é triangular.

Pergunta 22: Qual é a explicação probabilística para a distribuição não ser uniforme?

Resposta: Explicar porque os resultados não têm probabilidades iguais: Determinar o espaço amostral do lançamento de dois dados distinguíveis [pares ordenados (D_1, D_2)]:

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{array} \right\}.$$

Explicar como cada uma dessas 36 opções são equiprováveis (probabilidade $1/36$). Somando os valores dos dados, há uma forma de se obter 2 ou 12, duas formas de se obter 3 ou 11, assim por diante, e seis formas de se obter 7:

$$\begin{aligned}
 S &= \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, \\
 &\quad 3, 4, 5, 6, 7, 8, \\
 &\quad 4, 5, 6, 7, 8, 9, \\
 &\quad 5, 6, 7, 8, 9, 10, \\
 &\quad 6, 7, 8, 9, 10, 11, \\
 &\quad 7, 8, 9, 10, 11, 12 \} \\
 &= \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}.
 \end{aligned}$$

Assim, para os resultados 2 a 12, as probabilidades são $1/36$, $2/36$, $3/36$, $4/36$, $5/36$, $6/36$, $5/36$, $4/36$, $3/36$, $2/36$ e $1/36$, respectivamente, como é mostrado na Figura 21.

O professor então multiplica as probabilidades pelo número de amostras realizadas e cria as barras para a situação com dados ideais ao lado dos valores experimentais, como mostra a Figura 20b.

Novamente, lembrar aos alunos que todos os dados da turma estão sendo “misturados” nesta estatística.

8.11 ATIVIDADES

Nesta seção serão enunciadas e resolvidas atividades para os alunos.

Pergunta 23: Quando se cria uma música com o Jogo de Dados de Mozart, qual é a probabilidade de se escolher o trecho melódico 3 para o compasso I?

Resposta: O trecho melódico 3, compasso I, está associado à soma 11 nos dados. Essa soma pode ser gerada de duas formas diferentes: $5+6$ e $6+5$. Assim, das 36 possibilidades, duas dão a soma desejada, resultando na probabilidade de $2/36$.

Pergunta 24: Considerando a composição musical do Jogo de Dados de Mozart, qual é a probabilidade de se escolher o trecho melódico 60 para o compasso II? E o trecho melódico 42 para o compasso III?

Resposta: Seguindo um raciocínio semelhante ao utilizado na questão anterior, o trecho melódico 60, compasso II, está associado com a soma 8 nos dados, que pode ser produzida de cinco formas diferentes: $2+6$, $3+5$, $4+4$, $5+3$ e $6+2$, resultando na probabilidade $5/36$. Analogamente, para o trecho melódico 42, compasso III, associado à

soma 10, a probabilidade é $3/36$.

Pergunta 25: Ao sortear uma melodia com o Jogo de Dados de Mozart, qual é a chance do primeiro compasso ter número maior que 100?

Resposta: Esta questão exige conhecer a soma da união de eventos mutuamente exclusivos.

A chance do primeiro compasso ser maior que 100 é $5/9$. No primeiro compasso os números maiores que 100 são: 148, 104, 152 e 119, correspondentes às somas dos dados 6, 7, 8 e 9. $P(c > 100) = P(c = 148) + P(c = 104) + P(c = 152) + P(c = 119) = P(d = 6) + P(d = 7) + P(d = 8) + P(d = 9) = 5/36 + 6/36 + 5/36 + 4/36 = 20/36 = 5/9 = 0,555\dots$

Pergunta 26: Foi deixado como tarefa para um aluno de música que ele compo- nha uma peça com o Jogo de Dados de Mozart. No entanto, ele perdeu a terceira folha das partituras (que inclui os trechos melódicos de 89 a 128 [deixar os alunos consultarem]). Qual é a chance dele conseguir compor o compasso II sem usar a folha que falta?

Resposta: Conhecer a probabilidade do evento complementar simplifica a re- solução.

No compasso II, o único trecho melódico dentro do intervalo que não está dis- ponível é o de número 95. A probabilidade dele ocorrer é $P(c = 95) = P(d = 4) = 3/36 = 1/12 = 0,08333\dots$. Assim, a probabilidade de não ser necessária a folha faltante ao ser sorteado o compasso II, é igual a $P(c \neq 95) = 1 - P(c = 95) = 0,91666\dots$

Pergunta 27: Qual é a probabilidade da linha 2 não ser sorteada em uma composição do Jogo de Dados de Mozart? E da linha 7?

Resposta: A probabilidade da linha 2 não ser sorteada uma vez é $1 - 1/36 = 35/36 \approx 97\%$. Portanto, para ela não ser sorteada 16 vezes em sequência, a probabilidade é $(1 - 1/36)^{16} = (35/36)^{16} \approx 64\%$.

A probabilidade da linha 7 não ser sorteada uma vez é $1 - 6/36 = 30/36 \approx 83\%$. Portanto, para ela não ser sorteada 16 vezes em sequência, a probabilidade é $(1 - 6/36)^{16} = (30/36)^{16} \approx 5,4\%$.

Pergunta 28: Qual é a chance de uma certa música ser sorteada no Jogo de Dados de Mozart? Considere os compassos a seguir:

40 – 157 – 42 – 53 – 99 – 55 – 36 – 107 – 25 – 71 – 64 – 34 – 67 – 115 – 52 – 93.

Resposta: Esta questão exige que se conheça a probabilidade de eventos inde- pendententes.

A chance destes compassos serem sorteados é de aproximadamente $3,26 \times 10^{-15}$.

Estes compassos correspondem às somas:

$$5 - 7 - 10 - 8 - 8 - 4 - 6 - 6 - 6 - 7 - 6 - 5 - 5 - 9 - 5 - 6.$$

Como o sorteio de cada um dos compassos (cada uma das somas) é independente, é possível multiplicá-las:

$$\begin{aligned} P(\text{compassos}) &= P(d=5) \cdot P(d=7) \cdot P(d=10) \cdot P(d=8) \cdot P(d=8) \cdot P(d=4) \cdot \\ &P(d=6) \cdot P(d=6) \cdot P(d=6) \cdot P(d=7) \cdot P(d=6) \cdot P(d=5) \cdot \\ &P(d=5) \cdot P(d=9) \cdot P(d=5) \cdot P(d=6) \\ &= \frac{4}{36} \frac{6}{36} \frac{3}{36} \frac{5}{36} \frac{5}{36} \frac{3}{36} \frac{5}{36} \frac{5}{36} \frac{5}{36} \frac{6}{36} \frac{5}{36} \frac{4}{36} \frac{4}{36} \frac{4}{36} \frac{5}{36} \\ &= \frac{3^2 \cdot 4^5 \cdot 5^7 \cdot 6^2}{36^{16}} \\ &\approx 3,26 \times 10^{-15}. \end{aligned}$$

Pergunta 29: Quais são as composições de **menor** probabilidade de serem sorteadas no Jogo de Dados de Mozart? E qual é essa probabilidade? Justifique.

Resposta: São $2^{16} = 65536$ as combinações de menor probabilidade: 2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2, 12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12 e qualquer combinação formadas pelas somas 2 e 12. A probabilidade de cada uma delas é $1/36^{16}$. As somas dos dados 2 e 12 possuem a menor probabilidade de ocorrer, sendo o valor destas probabilidades igual a $1/36$. Assim, a probabilidade de cada uma destas composições é $1/36^{16} \approx 1,3 \cdot 10^{-25}$.

Pergunta 30: Quais são as composições de **maior** probabilidade de serem sorteadas no Jogo de Dados de Mozart? E qual é essa probabilidade? Justifique.

Resposta: Apenas uma combinação tem a maior probabilidade: 7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7. A probabilidade é $(6/36)^{16} = 1/6^{16}$. A soma dos dados 7 possui a maior probabilidade de ocorrer, sendo o valor desta probabilidade igual a $6/36 = 1/6$. Assim, a probabilidade dessa composição é $1/6^{16} \approx 3,5 \cdot 10^{-13}$.

8.11.1 Trechos melódicos iguais

O Jogo de Dados de Mozart apresenta algumas peculiaridades quanto a melodias repetidas em um mesmo compasso:

- O compasso VIII tem sempre a mesma melodia; e
- O compasso XVI tem duas melodias. Uma delas está associada apenas com a

soma 11 e a outra está associada com as outras 10 somas.

Os alunos podem grifar a coluna do compasso VIII toda e a coluna do compasso XVI, exceto a linha 11, para indicar os trechos melódicos idênticos.

A informação acima foi omitida até este momento com o objetivo de simplificar o raciocínio nas atividades anteriores. Agora, conhecendo esta particularidade do Jogo de Dados de Mozart, os alunos podem rever algumas das questões anteriores, o que pode ser deixado como tarefa de casa. As questões abaixo são idênticas a questões anteriores, porém a seguir consideram-se os fragmentos melódicos repetidos em um mesmo compasso.

Pergunta 31: No Jogo de Dados de Mozart, quantas composições se pode criar?

Resposta: Dos compassos, 14 deles têm 11 resultados com melodias diferentes, um tem apenas uma melodia, independente do resultado do dado, e o último tem duas melodias diferentes. Assim, há cerca de 759 trilhões de possibilidades de composições no Jogo de Dados de Mozart, que pode ser calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \underbrace{11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 1 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 2}_{16 \text{ compassos}} \\ &= 2 \times 11^{14} = 759.499.667.166.482 \\ &\approx 759 \times 10^{12} \quad (759 \text{ trilhões}). \end{aligned}$$

Para dar uma noção do tamanho do número: há aproximadamente 97.400 composições para cada uma das 7,8 bilhões de pessoas no mundo.

Pergunta 32: Quanto tempo demora para tocar todas as composições do Jogo de Dados de Mozart, uma por vez?

Resposta: Uma composição demora cerca de 50 segundos para ser executada. Então, basta multiplicar o número de composições pelo tempo de execução e converter segundos para anos:

$$\begin{aligned} & 759 \times 10^{12} \text{ composições} \times \frac{50 \text{ segundos}}{1 \text{ composição}} \times \frac{1 \text{ minuto}}{60 \text{ segundos}} \times \frac{1 \text{ hora}}{60 \text{ minutos}} \times \frac{1 \text{ dia}}{24 \text{ horas}} \times \frac{1 \text{ ano}}{365 \text{ dias}} \\ &\approx 1,2 \times 10^9 \text{ anos} \quad (1,2 \text{ bilhões de anos}). \end{aligned}$$

Assim, são necessários cerca de 1,2 bilhões de anos para se executarem todas as composições, uma por vez, quando são tomados 50 segundos para cada.

Pergunta 33: Quais são as composições de **menor** probabilidade de serem sorteadas no Jogo de Dados de Mozart? E qual é essa probabilidade? Justifique.

Resposta: São $2^{14} = 16384$ as composições de menor probabilidade: 2-2-2-2-2-2- x -2-2-2-2-2-2-11, 12-12-12-12-12-12-12- x -12-12-12-12-12-12-11, onde x varia de 2 a 12, e qualquer combinação das somas 2 e 12 nos compassos I a VII e IX a XV. Cada uma dessas composições pode ser sorteadas de 11 formas diferentes, devido às possibilidades equivalentes do compasso VIII. A probabilidade de cada uma das composições é $1/36^{14} \cdot 1/1 \cdot 2/36 = 2/36^{15} \approx 9,0 \cdot 10^{-24}$. Duas dessas composições são mostradas na Figura 22 e na Figura 23.

2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-2-11

Figura 22: Primeiro minuetto com menor probabilidade de ser sorteado no Jogo de Dados de Mozart.

Fonte: Autoria própria (2021).

Nota: Este minuetto pode ser ouvido acessando o *link* (<https://youtu.be/pDRBpPjWmr0>).

12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-11

Figura 23: Segundo minuetto com menor probabilidade de ser sorteado no Jogo de Dados de Mozart.

Fonte: Autoria própria (2021).

Nota: Este minuetto pode ser ouvido acessando o *link* (<https://youtu.be/zVCrVBj4Iz4>).

Pergunta 34: Quais são as composições de **maior** probabilidade de serem sorteadas no Jogo de Dados de Mozart? E qual é essa probabilidade? Justifique.

Resposta: Existe apenas uma composição de maior probabilidade: 7-7-7-7-7-7-7- x -7-7-7-7-7-7- y , onde x varia de 2 a 12 e y varia de 2 a 12 exceto 11, podendo ser sorteada de 110 formas diferentes. A probabilidade é $(6/36)^{14} \cdot 1/1 \cdot 34/36 = 34/6^{16} \approx 1,2 \cdot 10^{-11}$. Esta composição é mostrada na Figura 24.



Figura 24: Minueto com maior probabilidade de ser sorteado no Jogo de Dados de Mozart. Fonte: Autoria própria (2021).

Nota: Este minueto pode ser ouvido acessando o *link* (https://youtu.be/AhqM99P_kKs).

8.11.2 Distribuições de outras fontes de aleatoriedade

Pergunta 35: Existem dados de 12 e de 20 lados, os quais também possuem números iniciando em um. Como você faria para usar um desses dados para sortear os compassos do Jogo de Dados de Mozart?

Resposta: No Jogo de Dados de Mozart se utilizam os números de 2 a 12. Basta lançar um desses dados até ser sorteado um número nesse intervalo, descartando outros valores.

Pergunta 36: Ao usar um dado de 12 ou de 20 lados no Jogo de Dados de Mozart, podemos desconsiderar os lançamentos que estão fora dos valores utilizados na tabela. Com dados de 12 ou de 20 lados, qual é a probabilidade de sair um lançamento no intervalo utilizado pelo jogo?

Resposta: O intervalo utilizado pelo Jogo de Dados de Mozart são os números de 2 a 12. Para o dado de 12 lados, a probabilidade de sucesso é de $11/12 \approx 92\%$. Para o dado de 20 lados, a probabilidade de sucesso é $11/20 = 55\%$. Estas distribuições são

mostradas na Figura 25a.

O professor complementa com uma curiosidade: “Existem diversas distribuições de probabilidades. Por exemplo, a uniforme e a triangular, as quais já vimos. A distribuição que possui dois resultados (0 ou 1, falha ou sucesso, evento ocorre ou não) é chamada de distribuição de Bernoulli. Se a probabilidade de sucesso é p ($0 \leq p \leq 1$) a probabilidade de falha é $1 - p$.”

Pergunta 37: Quando se usa um dado de 12 ou de 20 lados no Jogo de Dados de Mozart, descartando os resultados fora do intervalo de 2 a 12, quantas vezes é preciso jogar o dado até sair um resultado dentro desse intervalo? Qual é a probabilidade do resultado estar nesse intervalo já no primeiro lançamento? Qual é a probabilidade disso ocorrer no segundo lançamento? E no terceiro? E no lançamento número n ?

Resposta: Os lançamentos são eventos independentes e sempre há possibilidade de, no próximo lançamento, cair um valor fora do intervalo desejado. Dessa forma, não se sabe quantos lançamentos serão necessários.

Para o dado de 12 lados, a probabilidade de sucesso já na primeira tentativa é de 92 %, sucesso apenas na segunda é de 7 %, sucesso apenas na terceira é de 1 % e sucesso apenas na tentativa número n é de $(11/12) \cdot (1/12)^{n-1}$. Para o dado de 20 lados, a probabilidade de sucesso já na primeira tentativa é de 55 %, sucesso apenas na segunda é de 25 %, sucesso apenas na terceira é de 11 % e sucesso apenas na tentativa número n é de $(11/20) \cdot (9/20)^{n-1}$. Estas distribuições são mostradas na Figura 25b.

O professor complementa com uma curiosidade: “Estas são distribuições geométricas. São chamadas assim pelas probabilidades seguirem uma PG (progressão geométrica). Quando se repete um experimento até se obter sucesso, o número de tentativas até o sucesso segue uma distribuição geométrica. Para um experimento com probabilidade p de sucesso, a probabilidade de se repetir n vezes até se obter sucesso é $P(\text{repetições} = n) = p(1 - p)^{n-1}$.”

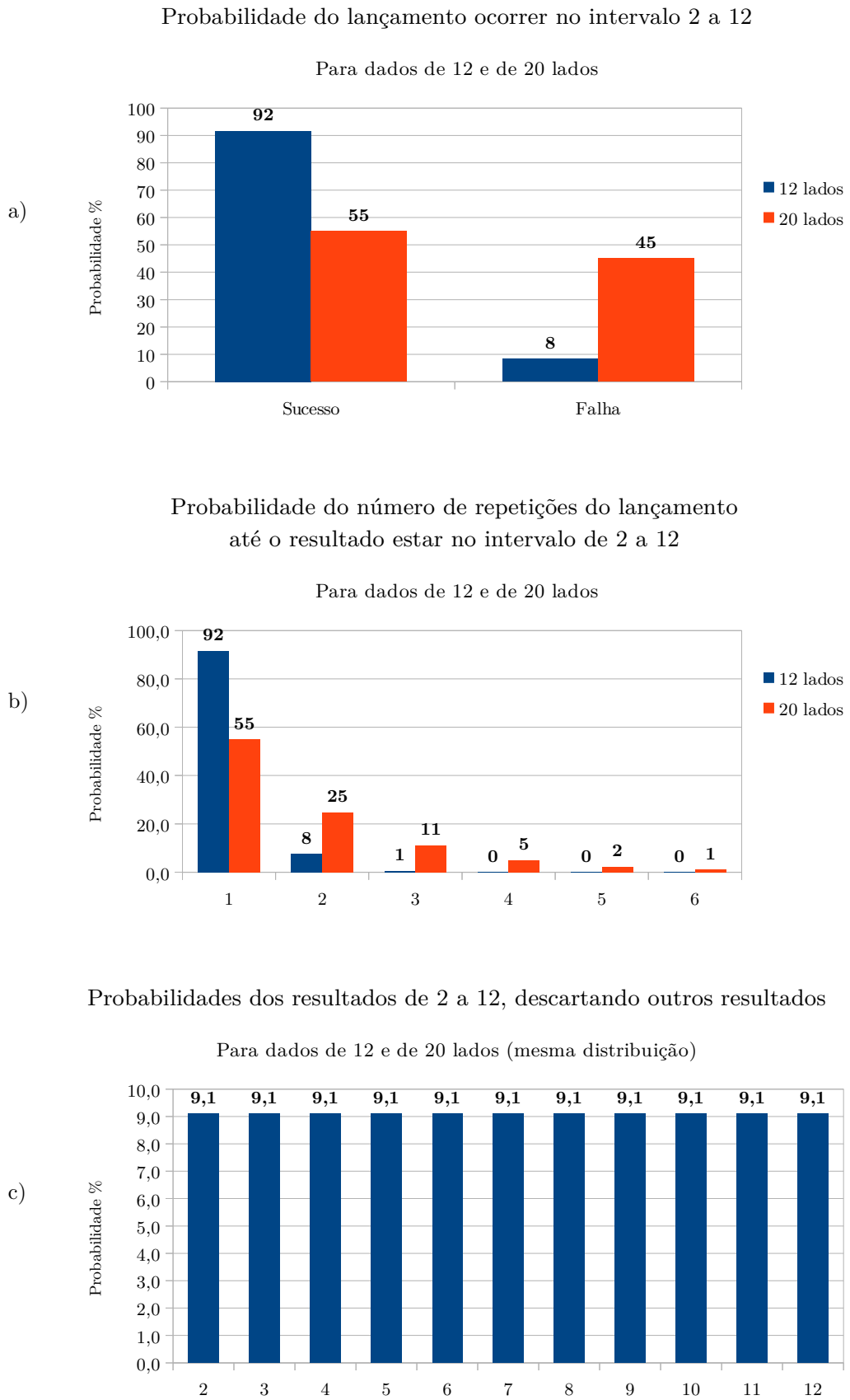


Figura 25: Distribuições de probabilidades para dados de 12 e de 20 lados.
 Fonte: Autoria própria (2021).

Pergunta 38: No Jogo de Dados de Mozart, ao usar um dado de 12 ou de 20 lados, descartando valores fora do intervalo de 2 a 12, qual é a distribuição que seguem os valores aceitos?

Resposta: Considerando dados ideais de 12 ou de 20 lados, estes têm um total de 12 ou 20 resultados equiprováveis, respectivamente, sendo que os resultados fora do intervalo de 2 a 12 são descartados. Dessa forma, os resultados de 2 a 12 continuam sendo equiprováveis, porém não se permite que ocorram os outros valores. Assim, independentemente de ser um dado de 12 ou de 20 lados, há 11 resultados equiprováveis, cada um com probabilidade $1/11 \approx 9\%$, seguindo uma distribuição uniforme, como mostra a Figura 25c.

Pode-se demonstrar isso utilizando a probabilidade condicional: Sendo A o evento onde o resultado se encontra no intervalo de 2 a 12 e B o evento onde o resultado é um valor específico nesse intervalo, por exemplo o número 3. Deseja-se calcular a probabilidade de B ocorrer, dado que A ocorreu, ou seja, é necessário calcular $P(B|A)$:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{N}}{\frac{11}{N}} = \frac{1}{11},$$

onde N é o número de lados do dado.

Pergunta 39: Para mudar um pouco o Jogo de Dados de Mozart, decidiu-se ignorar o lançamento dos dados quando cai algum par, por exemplo, quando ambos os dados lançados têm resultados iguais a 1. a) Qual é a probabilidade de cair um par? b) Qual é a probabilidade de precisar repetir o lançamento n vezes até cair um par? c) Seguindo esta lógica para criar uma composição, qual é a distribuição de probabilidades dos resultados de 2 a 12 serem sorteados no jogo?

Resposta: a) Ao lançar dois dados, a probabilidade de cair um par é de $6/36 = 1/6$, ou seja, ela segue a distribuição de Bernoulli com $p = 1/6$. Essa distribuição pode ser vista na Figura 26a.

b) A probabilidade de ser necessário repetir o lançamento n vezes até cair um par é de $P(\text{repetições} = n) = p(1-p)^{n-1}$, ou seja, esta segue uma distribuição geométrica com $p = 1/6$. Essa distribuição pode ser vista na Figura 26b.

c) Dos 36 pares ordenados equiprováveis, os seis correspondentes aos pares são descartados, restando 30 resultados equiprováveis, cada um com probabilidade $1/30$. Assim, considerando as somas de cada um destes resultados, obtêm-se os seguintes valores

para as probabilidades:

$$\begin{array}{ll}
 P(\{2\}) = 0/30, & P(\{8\}) = 4/30, \\
 P(\{3\}) = 2/30, & P(\{9\}) = 4/30, \\
 P(\{4\}) = 2/30, & P(\{10\}) = 2/30, \\
 P(\{5\}) = 4/30, & P(\{11\}) = 2/30, \\
 P(\{6\}) = 4/30, & P(\{12\}) = 0/30, \\
 P(\{7\}) = 6/30.
 \end{array}$$

Essa distribuição pode ser vista na Figura 26c.

Pergunta 40: Para criar uma composição musical com o Jogo de Dados de Mozart, o professor te dá dois dados modificados, onde os dois números 4 foram apagados e substituídos pelo número 3. Como fica a distribuição das probabilidades das somas desses dois dados? Ou seja, ambos os dados têm faces 1, 2, 3, 3, 5 e 6. Quais são os valores das probabilidades dos resultados de 2 a 12?

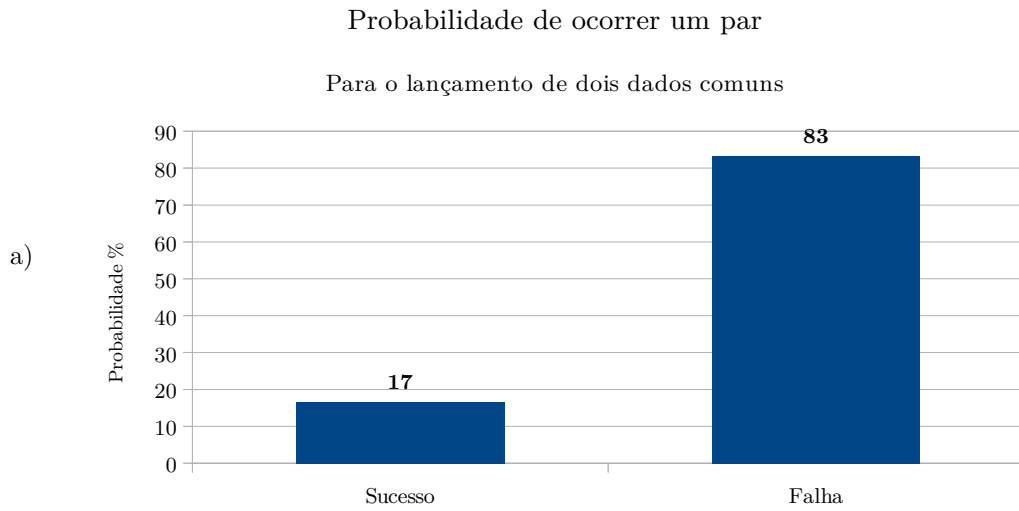
Resposta: A partir dos 36 pares ordenados equiprováveis, basta contar o número destes que correspondem à cada uma das somas de 2 a 12, resultando nos valores a seguir:

$$\begin{array}{ll}
 P(\{2\}) = 1/36, & P(\{8\}) = 6/36, \\
 P(\{3\}) = 2/36, & P(\{9\}) = 4/36, \\
 P(\{4\}) = 5/36, & P(\{10\}) = 1/36, \\
 P(\{5\}) = 4/36, & P(\{11\}) = 2/36, \\
 P(\{6\}) = 6/36, & P(\{12\}) = 1/36, \\
 P(\{7\}) = 4/36.
 \end{array}$$

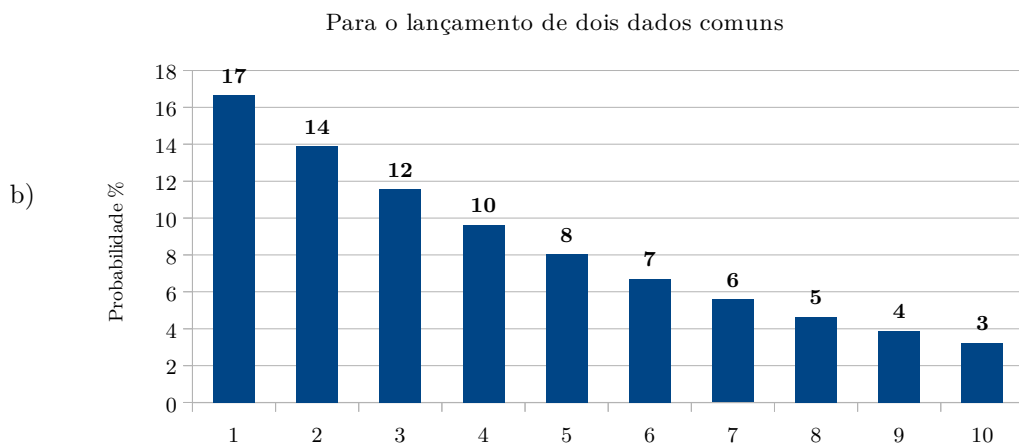
Essa distribuição pode ser vista na Figura 27.

Pergunta 41: Ao criar uma composição do Jogo de Dados de Mozart com uma moeda, escolhendo entre as linhas 2 e 3, quais são as probabilidades de cada uma das linhas? Qual é a distribuição correspondente?

Resposta: As probabilidades do lançamento de uma moeda são: 50 % cara (K) e 50 % coroa (C). Dessa forma, as linhas 2 e 3 têm probabilidades de 50 % de serem escolhidas, enquanto as outras 9 linhas não têm chance alguma. Esta é uma distribuição de Bernoulli com parâmetro $p = 0,5$, que é mostrada na Figura 28a.



Probabilidade do número de repetições do lançamento até ocorrer um par



Probabilidades dos resultados de 2 a 12, descartando pares

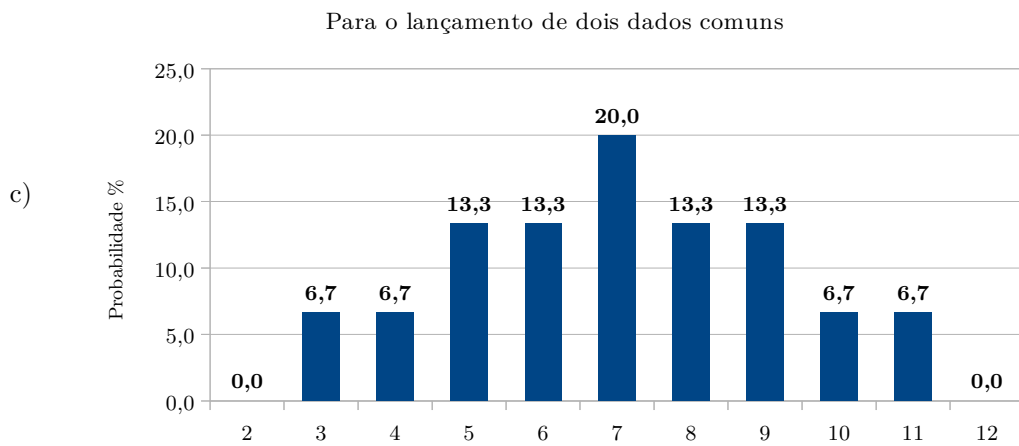


Figura 26: Distribuições de probabilidades para soma de dois dados, descartando pares.
 Fonte: Autoria própria (2021).

Probabilidades dos resultados de 2 a 12

Dados modificados: faces de número 4 substituídas pelo número 3

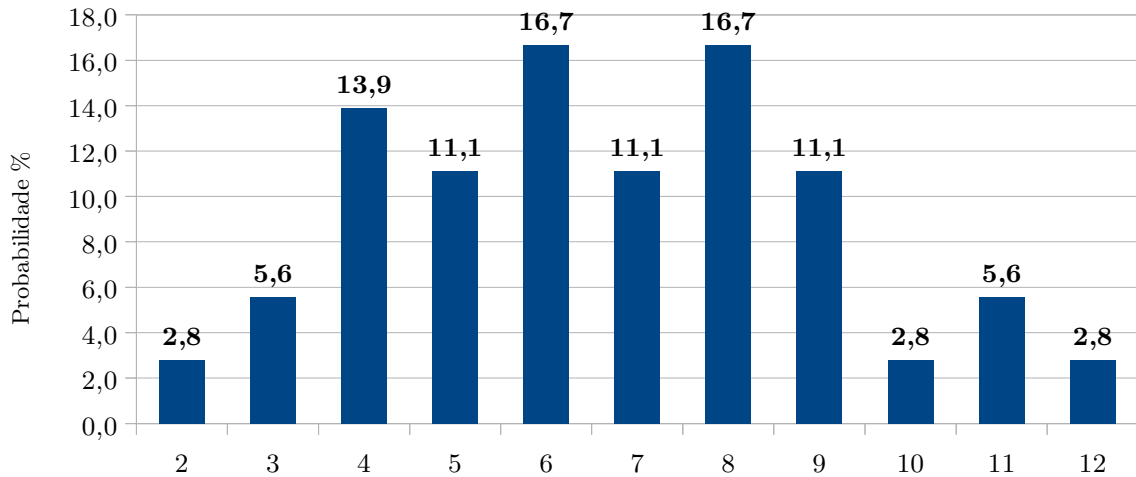


Figura 27: Distribuições de probabilidades para soma de dois dados modificados.
Fonte: Autoria própria (2021).

Pergunta 42: Sabe-se que no Jogo de Dados de Mozart, pode-se utilizar um dado em vez de dois. No entanto, na ausência de dados, quantas moedas seriam necessárias para substituir um dado, de forma que todas as faces tenham resultados correspondentes? Quais são as probabilidades dos resultados?

Resposta: São necessárias cinco moedas para substituir um dado, de forma que, quando são lançadas, possam gerar seis resultados diferentes: 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 caras. Para se obterem resultados de 1 a 6, como nos dados, basta somar o número 1 ao número de caras no lançamento das moedas.

Para se determinarem as probabilidades, basta considerar os $2^5 = 32$ quintetos ordenados formados pelo lançamento de moedas, os quais são equiprováveis, e contar quantos têm números de caras de 0 até 5. Há apenas uma forma de haver nenhuma cara, há cinco formas de formar uma cara e assim por diante, realizando combinações. Dessa forma se obtêm as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned}
 P(\{0\}) &= C_{5,0}/32 = 1/32, & P(\{3\}) &= C_{5,3}/32 = 10/32, \\
 P(\{1\}) &= C_{5,1}/32 = 5/32, & P(\{4\}) &= C_{5,4}/32 = 5/32, \\
 P(\{2\}) &= C_{5,2}/32 = 10/32, & P(\{5\}) &= C_{5,5}/32 = 1/32,
 \end{aligned}$$

que são mostradas na Figura 28b. Na figura, no entanto, os resultados das moedas têm o valor 1 somado, como foi explicado acima.

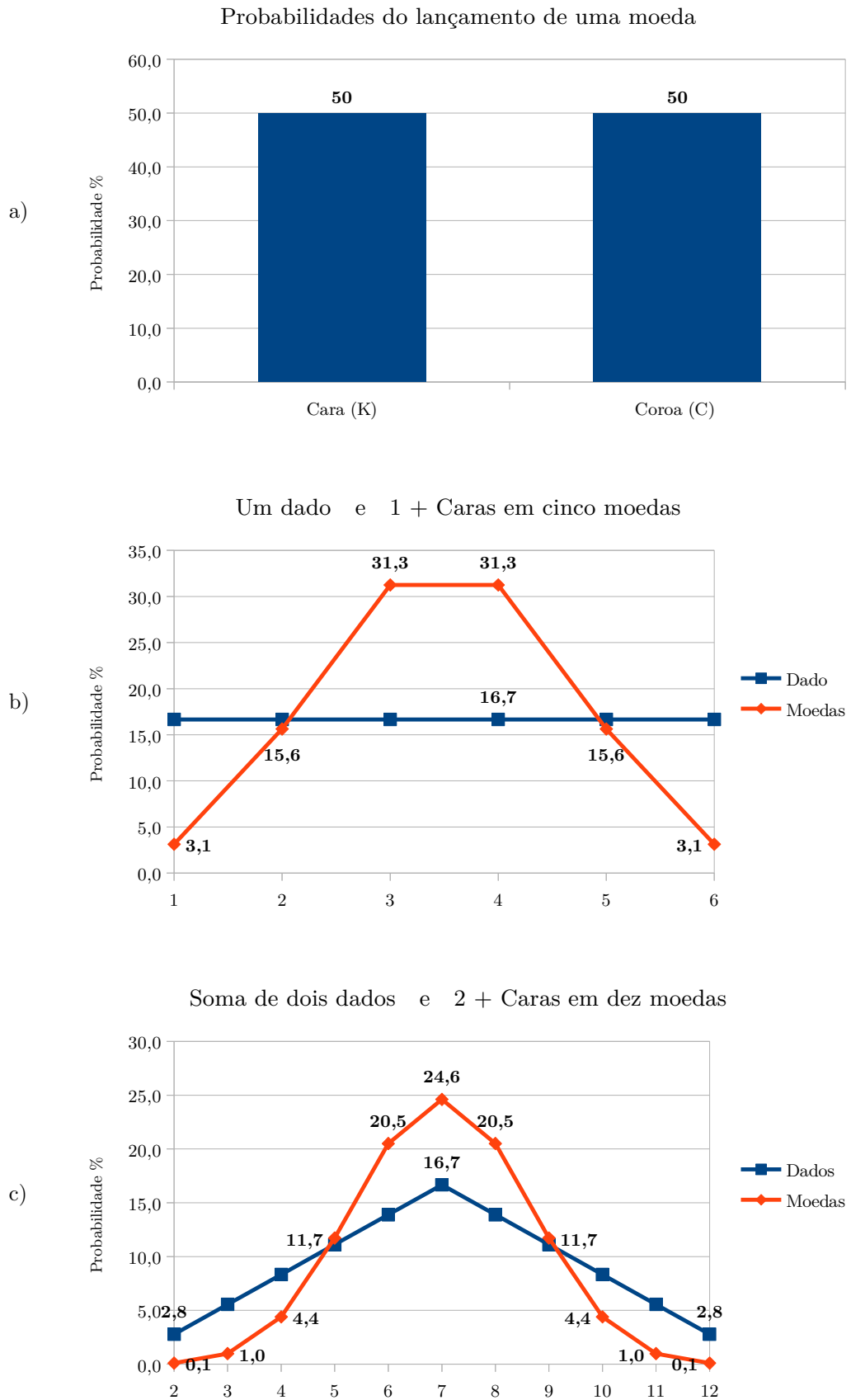


Figura 28: Comparação do lançamento de dados com o lançamento de moedas.
Fonte: Autoria própria (2021).

O professor complementa com uma curiosidade: “A distribuição das moedas é chamada de distribuição binomial. Esta distribuição é formada ao somar o número de sucessos em n experimentos com probabilidade p de sucesso. A probabilidade de x sucessos é igual a $P(\text{sucessos} = x) = C_{n,x} p^x (1 - p)^{n-x}$.”

Pergunta 43: Como você faria para usar moedas, ao invés de dados, para sortear os compassos do Jogo de Dados de Mozart? Ou seja, quantas moedas são necessárias para substituir um par de dados? Como é essa distribuição?

Resposta: Podem ser utilizadas 10 moedas e contar o número de caras, o que dá um número de 0 a 10. Em seguida, é somado o valor 2, para se obter números de 2 a 12. Isso é equivalente a sortear dois valores de 1 a 6, cada um com cinco moedas, como foi feito na pergunta anterior, e somá-los.

Esta é uma distribuição binomial, onde se conta o número de sucessos (cara na moeda) em 10 experimentos. São um total de $2^{10} = 1024$ dezenas ordenadas, onde múltiplas delas podem somar o mesmo número de caras. As probabilidades para o lançamento de 10 moedas são:

$$\begin{aligned} P(\{0\}) &= C_{10,0}/1024 = 1/1024, & P(\{6\}) &= C_{10,6}/1024 = 210/1024, \\ P(\{1\}) &= C_{10,1}/1024 = 10/1024, & P(\{7\}) &= C_{10,7}/1024 = 120/1024, \\ P(\{2\}) &= C_{10,2}/1024 = 45/1024, & P(\{8\}) &= C_{10,8}/1024 = 45/1024, \\ P(\{3\}) &= C_{10,3}/1024 = 120/1024, & P(\{9\}) &= C_{10,9}/1024 = 10/1024, \\ P(\{4\}) &= C_{10,4}/1024 = 210/1024, & P(\{10\}) &= C_{10,10}/1024 = 1/1024, \\ P(\{5\}) &= C_{10,5}/1024 = 252/1024, \end{aligned}$$

que são mostradas na Figura 28c. Na figura, no entanto, os resultados das moedas têm o valor 2 somado, como foi explicado acima.

8.11.3 Atividades avançadas

Pergunta 44: Para compor um minueto com o Jogo de Dados de Mozart, um aluno usa 32 dados. Ele os lança, organizando-os em ordem crescente. Então pega os dados, dois a dois, primeiro os menores, para escolher os compassos. Qual é a chance de ser sorteado o trecho número 96 no compasso I?

Resposta: O fragmento musical número 96, está associado à soma dos dados igual a 2 do compasso I. Assim, para os menores valores nos dados sortearmos esse compasso, é preciso de no mínimo duas faces iguais a 1. Qual é a chance de cair no máximo uma face igual a 1 em todos os dados lançados? A chance de nenhum dado cair um é $(5/6)^{32}$. A chance de apenas um dado cair um é $(1/6) \cdot (5/6)^{31}$. Assim, a chance de cair

zero ou uma face igual a 1 nos dados é a soma dessas duas probabilidades, calculando-se o valor $(5/6)^{31}$. Portanto, a probabilidade disso não acontecer é de $1 - (5/6)^{31} \approx 99,6\%$.

Pergunta 45: Obtenha uma composição do Jogo de Dados de Mozart cuja probabilidade de ser sorteada é igual a $9.765.625/36^{14}$.

Resposta: As probabilidades das somas dos dados podem ser escritas na forma $a/36$ com $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Assim, multiplique o numerador e o denominador pelo número que faz o denominador se tornar 36^{16} . A seguir, reescreva o numerador em potências de números primos e agrupe as potências de números primos em 16 números de 1 a 6:

$$\frac{9.765.625}{36^{14}} = \frac{5^{10}}{36^{14}} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^{10}}{36^{16}}.$$

Com os números primos 2, 3 e 5, juntos à unidade, é possível multiplicá-los para compor os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, os quais devem ser divididos em 16 partes, limitadas entre os valores 1 e 6, sem exceder a quantidade de cada número primo. O número 5 não pode ser multiplicado por nenhum outro, portanto 10 compassos têm probabilidade $5/36$. Os seis compassos restantes devem ter valores 1, 2, 3, 4, ou 6 (exceto 5). Por exemplo, quatro dos outros compassos podem ser formados com probabilidade $6/36$ e os dois últimos compassos podem ter probabilidades $1/36$. Então, cria-se um minueto composto pelas probabilidades:

$$\frac{1}{36} \frac{1}{36} \frac{5}{36} \frac{5}{36} \frac{5}{36} \frac{5}{36} \frac{5}{36} \frac{5}{36} \frac{5}{36} \frac{5}{36} \frac{5}{36} \frac{5}{36} \frac{6}{36} \frac{6}{36} \frac{6}{36} \frac{6}{36},$$

que podem ser obtidas pelos lançamentos

$$2 - 2 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 7 - 7 - 7 - 7.$$

Pergunta 46: Quantas são as composições do Jogo de Dados de Mozart cuja probabilidade de serem sorteadas é igual a $9.765.625/36^{14}$?

Resposta: Considerando os denominadores das probabilidades das somas dos dados como 36.

As probabilidades com numerador 1, 2 e 3 podem ser multiplicadas por outros números e as probabilidades com numerador 4, 5 e $6=3 \cdot 2$ não podem ser multiplicadas. Os numeradores $4=2 \cdot 2$ e $6=3 \cdot 2$, no entanto, podem ser divididos pelos primos que os compõem.

Consideram-se todos os números agrupados com os de mesmo valor, pois as permutações são consideradas a seguir. Os numeradores iguais a 5 já estão fixos, pois não podem ser multiplicados ou divididos. De quantas formas é possível reorganizar o restante do numerador $2^4 \cdot 3^4$ em seis partes? Estas são mostradas na Tabela 3 na coluna

“Numeradores das Prob.”, em conjunto com os cálculos descritos abaixo.

As probabilidades podem ser permutadas entre qualquer um dos 16 compassos. Assim, cada uma dessas organizações dos fatores primos oferece $16!$ permutações (o fatorial de 16). No entanto, permutações dos numeradores repetidos não devem ser consideradas e, portanto, divide-se pelo fatorial das quantidades dos números repetidos.

As probabilidades com numerador 1, 2, 3, 4 e 5 (exceto 6) podem ser sorteadas por duas somas diferentes. Portanto, cada probabilidade com numerador diferente de 6 implica em dobrar o número de composições possíveis com tal probabilidade. Assim, eleva-se o número dois à potência do número de compassos cujo numerador da probabilidade é diferente de 6.

Somando todas as permutações possíveis para esta probabilidade, obtém-se o número $83.149.946.880 \approx 83$ bilhões de composições com tal probabilidade de ser sorteada.

Tabela 3: Tabela com cálculos do número de composições com uma dada probabilidade de ser sorteada.

Forma	Numeradores das Prob.	Permutações
1.	5 ... 5 3 3 3 3 4 4	$\frac{16! \cdot 2^{16}}{10! \cdot 4! \cdot 2!}$ 7.872.184.320
2.	5 ... 5 6 3 3 3 4 2	$\frac{16! \cdot 2^{15}}{10! \cdot 3!}$ 31.488.737.280
3.	5 ... 5 6 6 3 3 4 1	$\frac{16! \cdot 2^{14}}{10! \cdot 2! \cdot 2!}$ 23.616.552.960
4.	5 ... 5 6 6 3 3 2 2	$\frac{16! \cdot 2^{14}}{10! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$ 11.808.276.480
5.	5 ... 5 6 6 6 3 2 1	$\frac{16! \cdot 2^{13}}{10! \cdot 3!}$ 7.872.184.320
6.	5 ... 5 6 6 6 6 1 1	$\frac{16! \cdot 2^{12}}{10! \cdot 4! \cdot 2!}$ 492.011.520
Total		83.149.946.880

Fonte: Autoria própria (2021).

9 PRODUTO EDUCACIONAL

Os produtos educacionais são ferramentas dispostas ao professor, de forma ele possa fazer seu uso de imediato, para serem aplicadas em conjunto com o método de ensino.

Isso pode ser percebido na proposta de criação de mestrados profissionais em ensino, onde Moreira (2004) aponta que, em um mestrado profissional, o mestrando deve contemplar a:

[...] elaboração de um trabalho final de pesquisa profissional, aplicada, descrevendo o desenvolvimento de processos ou produtos de natureza educacional, visando à melhoria do ensino na área específica, sugerindo-se fortemente que, em forma e conteúdo, este trabalho se constitua em material que possa ser utilizado por outros profissionais (MOREIRA, 2004, p. 134).

Dessa forma, foi defendido que em um mestrado profissional em ensino é pertinente levantar esforços para a criação de produtos de natureza educacional, ou seja, o professor mestrando deve organizar ferramentas de ensino, possibilitando que seus colegas profissionais façam seu uso.

No entanto, como citam Leodoro e Balkins (2010), com a regulamentação dos mestrados profissionais pela CAPES, o trabalho final de pesquisa exclusivo nesse formato foi abrandado, colocando-o ao lado de outras possibilidades, como pode ser visto no Diário Oficial da União (DOU) do dia 23 de junho de 2009, que considera que:

O trabalho de conclusão final do curso [de mestrado profissional] poderá ser apresentado em diferentes formatos, tais como dissertação, revisão sistemática e aprofundada da literatura, artigo, patente, registros de propriedade intelectual, projetos técnicos, publicações tecnológicas; desenvolvimento de aplicativos, de materiais didáticos e instrucionais e de produtos, processos e técnicas; produção de programas de mídia, editoria, composições, concertos, relatórios finais de pesquisa, softwares, estudos de caso, relatório técnico com regras de sigilo, manual de operação técnica, protocolo experimental ou de aplicação em serviços, proposta de intervenção em procedimentos clínicos ou de serviço pertinente, projeto de aplicação ou adequação tecnológica, protótipos para desenvolvimento ou produção de instrumentos, equipamentos e kits, projetos de inovação tecnológica, produção artística; sem prejuízo de outros formatos, de acordo com a natureza da área e a finalidade do curso, desde que previamente propostos e aprovados pela CAPES (DOU N° 117, 23 de junho de 2009, s. 1, p. 31).

Uma prática que se pode aplicar, portanto, é a criação de um produto educacional alinhado com o conceito de ensino contextualizado ou interdisciplinar da matemática, que faz uso desses materiais de ensino em conjunto com métodos que favorecem o aprendizado, a criatividade e o interesse do aluno.

Com base nisso, criou-se um produto educacional em formato de *website*⁶, contemplando diversos recursos tecnológicos, cujo objetivo é auxiliar o professor na aplicação da proposta de ensino. Uma captura de tela desse *website* é mostrada na Figura 29.

Entre os recursos tecnológicos disponíveis no *website*, encontram-se:

- O vídeo da apresentação “O Jogo de Dados de Mozart e a Probabilidade”, cuja captura de tela é mostrada na Figura 30, o qual fez parte da aplicação da proposta de ensino e será descrito no Capítulo 10;
- Um vídeo explicativo sobre como criar uma composição do Jogo de Dados de Mozart;
- Diversos vídeos contendo animações de minuetos gerados pelo Jogo de Dados de Mozart sendo executados;
- *Links* para baixar vídeos, áudios e partituras de uma seleção de minuetos;
- *Links* para recursos tecnológicos externos, disponíveis na internet;
- Materiais de ensino, em formato PDF, prontos para impressão, para facilitar o uso da proposta pelo professor; e
- Instruções sobre como criar animações, áudios e partituras de minuetos, utilizando o sistema operacional de código aberto Ubuntu Linux⁷.

Enquanto os vídeos hospedados no YouTube e o próprio *website* exigem uma conexão com a internet para serem utilizados, existem arquivos presentes no *website* que, por sua vez, podem ser baixados (*download*) e utilizados sem uma conexão com a rede mundial de computadores.

Para complementar a atividade de ensino, o professor pode ainda utilizar outros recursos tecnológicos, como os exemplos sugeridos no Apêndice B.

⁶O produto educacional (*website*) pode ser encontrado através do *link* de acesso: <https://djboni.github.io/mozart/>.

⁷O sistema operacional Ubuntu Linux pode ser executado diretamente de uma mídia removível (*flash-drive*) ou de um CD-ROM, sem modificar o sistema presente no computador. Dessa forma, as animações e outros recursos tecnológicos citados podem ser criados e armazenados em mídias removíveis sem interferir nos programas do computador.

O Jogo de Dados de Mozart

https://djboni.github.io/mozart/

Minueto com maior probabilidade de ser sorteado

Somas dos dados: 7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7

7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7-7

K.516f::104:157:37:167:154:68:118:91:138:71:150:29:101:162:23:151::

♩ = 111

Downloads: [MP3](#) - [PNG](#) - [MIDI](#) - [PDF](#)

Figura 29: Produto educacional: Captura de tela do *website* com diversos recursos tecnológicos disponíveis para o professor.

Fonte: Autoria própria (2021).

Nota: Este *website* pode ser acessado pelo *link* <<https://djboni.github.io/mozart/>>.

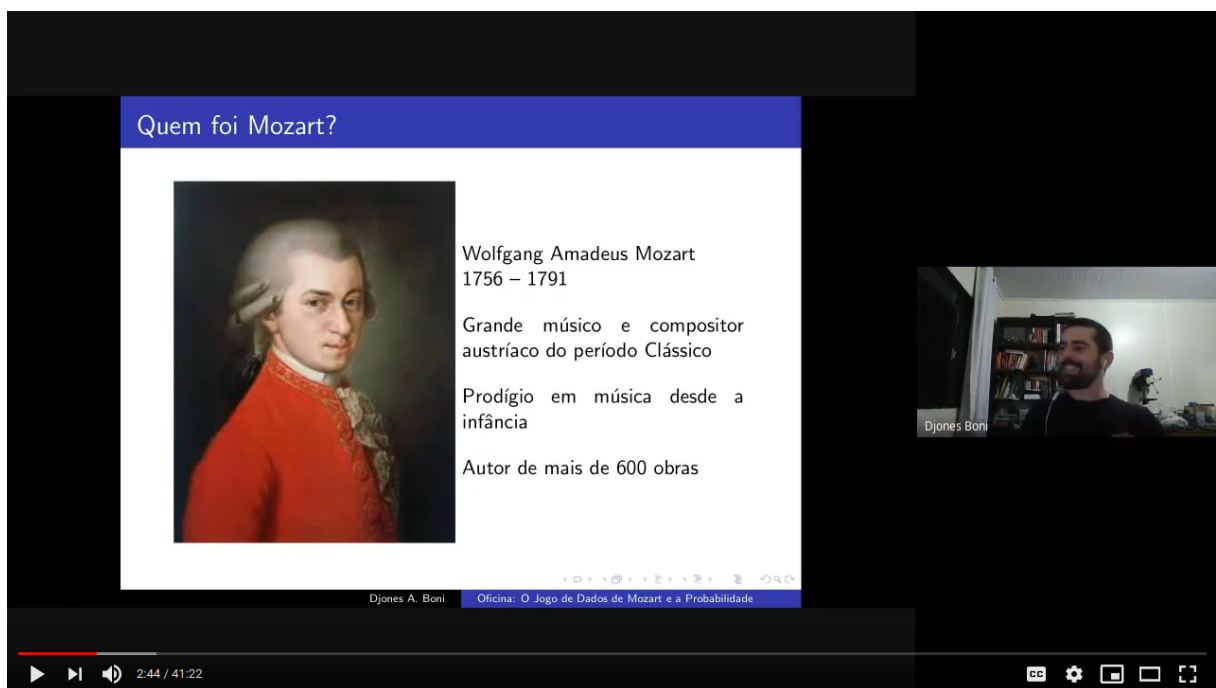


Figura 30: Captura de tela da apresentação “O Jogo de Dados de Mozart e a Probabilidade”.

Fonte: Autoria própria (2021).

Nota: Este vídeo pode ser assistido acessando o *link* (<https://youtu.be/J1G0zlWTWcc>).

PARTE III
IMPRESSÕES DOS ALUNOS

10 APLICAÇÃO DA PROPOSTA

Neste capítulo será exposta a metodologia utilizada para a aplicação da proposta de ensino supracitada. O capítulo é dividido em três seções que descrevem cada uma das partes da aplicação: a aula por videoconferência, a videoaula e o questionário.

10.1 AULA POR VIDEOCONFERÊNCIA

Para aplicar a proposta didática, devido às condições em que o mundo se encontra e a forma como o sistema de ensino está funcionando⁸, restringiu-se a uma apresentação por videoconferência de cerca de 40 minutos. Assim, com tempo restrito, foi abordada parte do conteúdo da proposta de ensino presente no Capítulo 8, estando disponível para o professor o restante da proposta.

Entrou-se em contato com um professor de Ensino Médio, que gentilmente cedeu tempo de sua aula por videoconferência para que se realizasse a aplicação. Por sugestão do professor, foi criado o panfleto eletrônico mostrado na Figura 31, enviado por ele aos alunos, de forma a estimulá-los a comparecerem na videoconferência.

Foi aplicada a proposta com os alunos de Ensino Médio, através da plataforma Google Meet, a partir da apresentação intitulada “O Jogo de Dados de Mozart e a Probabilidade”.

A apresentação, o interesse dos alunos nela e, conseqüentemente, a proposta didática foram avaliados pelos alunos a partir de suas respostas a um questionário na plataforma Google Forms. O questionário será descrito adiante na Seção 10.3.

Segundo o professor, a turma possui mais de 30 alunos matriculados. No entanto, havia poucos alunos presentes durante a videoconferência, acarretando em apenas quatro respostas ao questionário.

10.1.1 Sequência da apresentação

A apresentação da videoconferência ocorreu na seguinte ordem:

- Introdução ao tema da apresentação: Jogo de Dados de Mozart;
- Introdução do apresentador e da pesquisa;
- História do compositor Wolfgang Amadeus Mozart;
- Instruções do Jogo de Dados de Mozart;

⁸No presente, o mundo está em meio à pandemia de COVID-19. As aulas presenciais nas instituições de ensino estão impossibilitadas, sendo essas realizadas à distância através de plataformas *online* e videoconferências.



Figura 31: Panfleto eletrônico enviado aos alunos.
Fonte: Autoria própria (2021).

- A matemática que aparece no jogo:
 - Quantas músicas diferentes podem ser criadas?
 Usar conceitos de combinatória.
 Com o intuito de simplificar os exemplos e as soluções, propositalmente foram omitidas as peculiaridades dos compassos VIII e XVI, relacionadas a trechos melódicos idênticos;
 - Qual é a probabilidade de certos trechos melódicos serem sorteados em um compasso?
 Exemplificar que nem todos os experimentos aleatórios têm resultados equiprováveis.
 De acordo com a definição clássica de probabilidade, o lançamento de um dado tem resultados equiprováveis e, a partir disso, mostra-se que a soma de dois dados não tem resultados equiprováveis;
 - Qual é a probabilidade de uma dada composição ser sorteada?
 Aplicar o conceito da multiplicação das probabilidades de experimentos aleatórios independentes;

– Como dados reais ou dados viciados podem influenciar nos sorteios?

Obter uma aproximação das probabilidades dos resultados, a partir da definição frequencial de probabilidade, e comparar com as probabilidades teóricas de um dado ideal;

- *Links* relevantes;
- *Link* do questionário;
- Referências; e
- Agradecimentos.

10.2 VIDEOAULA

Devido aos poucos alunos presentes durante a videoconferência e, consequentemente, às poucas respostas ao questionário, decidiu-se ampliar o público atingido pela apresentação para obter um número mínimo de quinze respostas ao questionário.

Para atingir este objetivo, explorou-se outra alternativa de apresentação: foi criado um vídeo a partir da gravação da apresentação, o qual foi hospedado na plataforma YouTube⁹. Uma captura de tela desse vídeo pode ser encontrada na Figura 30.

A videoaula manteve a mesma organização da apresentação. No entanto, devido à questão de direitos de imagem, foram removidas as partes onde ocorreram interações com os alunos.

O questionário aplicado aos alunos presentes durante a videoconferência foi adaptado para a nova situação (videoaula), requisitando informações adicionais necessárias para identificar as respostas do público de interesse. Reiterando, o questionário será descrito adiante na Seção 10.3.

Decidiu-se enviar o *link* do vídeo por mensagens de texto, a professores de matemática, juntamente com um pedido para encaminharem aos seus alunos de Ensino Médio, para assistirem ao vídeo e responderem ao questionário.

Além de alunos cursando o Ensino Médio, foram realizados esforços para atingir alunos que acabaram de finalizá-lo. Para isso, optou-se por enviar *e-mails* a coordenadores de cursos de Graduação, com um pedido para encaminharem os *links* do vídeo e do questionário para os alunos do primeiro período.

Os pedidos foram enviados a nove professores de Ensino Médio e cinco coordenadores de cursos de Graduação. Com isso, o questionário obteve mais 19 respostas de alunos de Ensino Médio e mais três respostas de alunos de cursos de Graduação, totalizando 26 respostas ao questionário.

⁹*Link* de acesso ao vídeo: (<https://youtu.be/J1G0zIWTWCc>).

10.3 QUESTIONÁRIO

Como instrumento de coleta de dados foi escolhido o questionário. Este permite o uso de variadas formas para as respostas, incluindo perguntas abertas (textuais) e fechadas (alternativas fixas), permitindo a realização de ambas análises quantitativa e qualitativa (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 201).

O questionário aplicado aos alunos será mostrado a seguir, complementado pelas possíveis respostas (textuais ou alternativas fixas) e pelos objetivos de cada pergunta. Quando necessário, serão explicadas as diferenças no questionário para os alunos que assistiram à apresentação (aula por videoconferência) e para os alunos que assistiram ao vídeo (videoaula).

1. **“Quem te indicou para assistir ao vídeo?”**

Alternativas fixas: Professor, Amigo ou Outro (preencher).

Pergunta exclusiva ao questionário do vídeo.

Objetivo: Identificar a fonte das respostas ao questionário.

2. **“Você é estudante do ...”**

Alternativas fixas: Ensino Médio, Ensino Superior ou Outro (preencher).

Pergunta exclusiva ao questionário do vídeo.

Objetivo: Identificar os alunos de Ensino Médio e de cursos de Graduação, público de interesse. Isso é necessário porque não é possível controlar quem compartilha ou acessa os *links* do vídeo e do questionário.

3. **“Você gostou da apresentação/do vídeo ‘O Jogo de Dados de Mozart e a Probabilidade’?”**

Alternativas fixas: Sim, muito; Sim; Mais ou menos; Não; ou Não estava presente/Não assisti.

Pergunta adaptada no questionário do vídeo.

Objetivo: Avaliar se foi positiva, neutra ou negativa a reação dos alunos à apresentação ou ao vídeo.

4. **“Você aprendeu alguma coisa nova nesta apresentação/neste vídeo? O que?”**

Resposta textual.

Pergunta adaptada no questionário do vídeo.

Objetivo: Verificar se o aluno, logo após a apresentação ou o vídeo, é capaz de recordar de algo que aprendeu. Espera-se que os alunos tenham aprendido algo sobre probabilidade ou matemática, além do Jogo de Dados de Mozart.

5. **“Que estilos de música você gosta?”**

Resposta textual.

Objetivo: Pergunta de transição, para adentrar-se no assunto musical, verificando a variedade de gostos entre os alunos.

6. **“Sabe tocar algum instrumento musical? Quais?”**

Resposta textual.

Objetivo: Avaliar se há alguma motivação musical no público alvo atingido pela apresentação e pelo vídeo. Com essa pergunta é possível identificar se o aluno toca algum instrumento, quantos instrumentos e quais são estes. Considerou-se que tocar algum instrumento reflete em uma motivação pessoal com respeito a música.

7. **“Mozart era muito bom em música. No que você é bom?”**

Resposta textual.

Objetivo: Verificar qualidades que os alunos percebem em si. Identificar interesses e hábitos que podem ser utilizados como contextualização.

8. **“Com que frequência você percebe a matemática no mundo?”**

Alternativas fixas: Todo dia, Toda semana, Dificilmente ou Nunca.

Objetivo: Pergunta de transição, para adentrar-se no assunto da matemática. Verificar se os alunos percebem a matemática no mundo.

9. **“Em quais situações do dia-a-dia você percebe que usa a matemática?”**

Resposta textual.

Objetivo: Verificar se o aluno é capaz de reconhecer a matemática no seu cotidiano, complementando a questão anterior com exemplos. Identificar interesses e hábitos que podem ser utilizados como contextualização.

10. **“Dê dois exemplos de experimentos aleatórios. Por exemplo: lançar dados é um experimento aleatório.”**

Resposta textual.

Objetivo: Verificar se o aluno é capaz de reconhecer experimentos aleatórios em seu cotidiano. Identificar eventos aleatórios em situações cotidianas que podem ser utilizadas para contextualização.

11. **“Se seu colega não tiver dois dados, mas apenas um. Como ele pode fazer para criar uma melodia com O Jogo de Dados de Mozart?”**

Resposta textual.

Objetivo: Verificar se o aluno compreende o conceito de eventos independentes e se ele reconhece que, no lançamento de dois dados, cada um destes é independente, assim como lançar o mesmo dado duas vezes.

12. **“OPCIONAL: Quer resolver um desafio? Se eu te der dois dados modificados, onde eu apaguei os dois números 4 e coloquei 3 no lugar. Como fica a distribuição das probabilidades das somas desses dois dados? Ou seja, ambos os dados têm faces 1, 2, 3, 3, 5 e 6. Quais são os valores das probabilidades $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, $P(9)$, $P(10)$, $P(11)$ e $P(12)$?”**

Resposta textual.

Esta é uma pergunta complicada e extensa de se resolver, deixada como opcional.

Objetivo: Verificar se o aluno sentiu-se estimulado a resolver uma pergunta mais complicada e extensa.

Propositalmente foi utilizada a notação $P(x)$ em vez de $P(\{x\})$. Por não haver risco de confusão, optou-se pela notação mais simples.

As respostas ao questionário foram analisadas quantitativa e qualitativamente. Os resultados da análise serão mostrados no Capítulo 11.

11 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

Um total de 26 alunos respondeu ao questionário da aplicação. Neste capítulo serão expostas, analisadas e discutidas as respostas das 12 questões de avaliação.

11.1 QUESTÃO 1: INDICAÇÃO AO VÍDEO

“Quem te indicou para assistir ao vídeo?”

Alternativas fixas: Professor, Amigo ou Outro (preencher).

Questão 1: Quem te indicou para assistir ao vídeo?

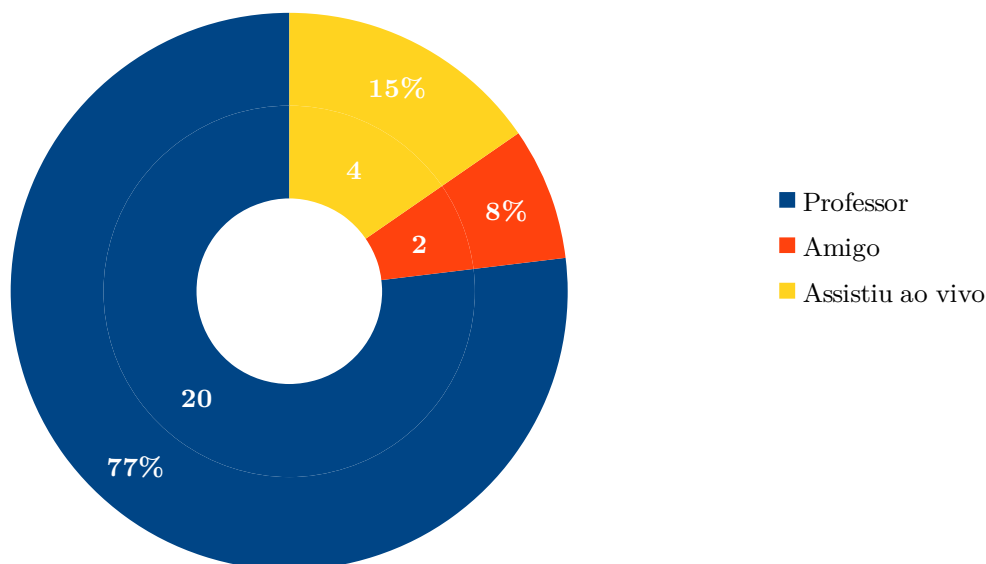


Figura 32: Gráfico da Questão 1: Indicação ao vídeo.
Fonte: Autoria própria (2021).

Esta pergunta foi feita exclusivamente no questionário do vídeo. Os quatro alunos que assistiram à apresentação durante a videoconferência foram considerados no grupo “Assistiu ao vivo”.

Como se vê na Figura 32, dos 26 alunos que responderam ao questionário, 20 (77 %) foram indicados ao vídeo por seu professor, 4 (15 %) assistiram à apresentação ao vivo e 2 (8 %) foram indicados por algum amigo.

11.2 QUESTÃO 2: PÚBLICO ALVO

“Você é estudante do ...”

Alternativas fixas: Ensino Médio, Ensino Superior ou Outro (preencher).

Questão 2: Você é estudante do ...

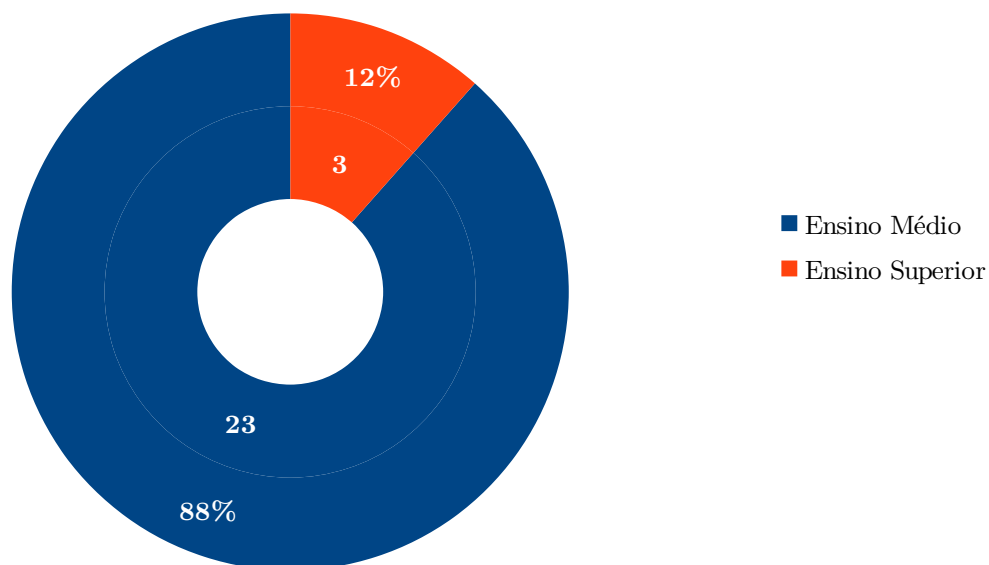


Figura 33: Gráfico da Questão 2: Público alvo.
Fonte: Autoria própria (2021).

Esta pergunta foi feita exclusivamente no questionário do vídeo. Os quatro alunos que assistiram à apresentação durante a videoconferência foram considerados no grupo “Ensino Médio”.

Como se vê na Figura 33, dos 26 alunos que responderam ao questionário, 23 (88 %) são alunos de Ensino Médio e 3 (12 %) são alunos de cursos de Graduação.

11.3 QUESTÃO 3: REAÇÃO AO VÍDEO

“Você gostou da apresentação/do vídeo ‘O Jogo de Dados de Mozart e a Probabilidade’?”

Alternativas fixas: Sim, muito; Sim; Mais ou menos; Não; ou Não estava presente/Não assisti.

Pergunta adaptada no questionário do vídeo.

Questão 3: Você gostou da apresentação/do vídeo?

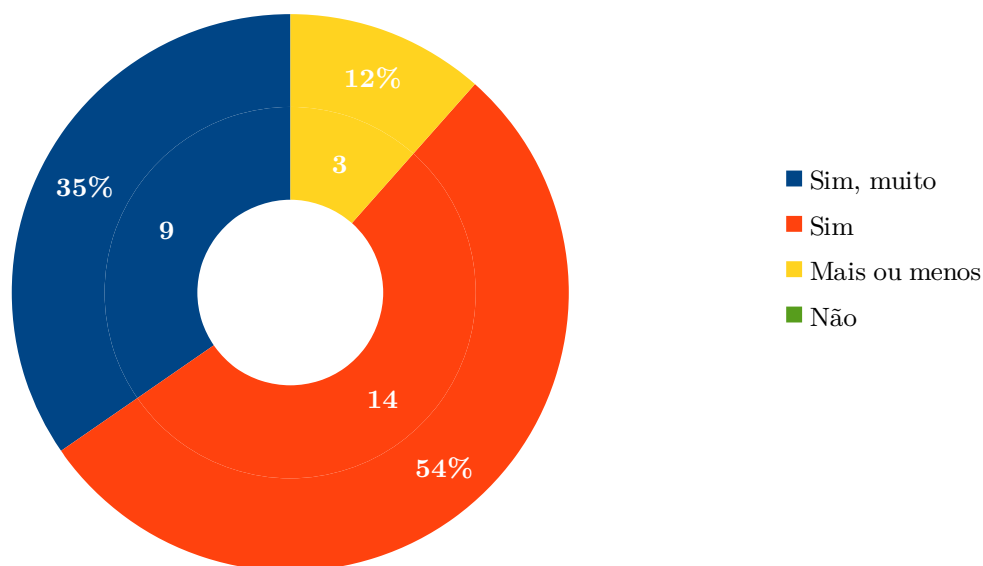


Figura 34: Gráfico da Questão 3: Reação ao vídeo.
Fonte: Autoria própria (2021).

Como se vê na Figura 34, dos 26 alunos que responderam ao questionário, 9 (35 %) responderam “Sim, muito”, 14 (54 %) responderam “Sim”, 3 (12 %) responderam “Mais ou menos” e nenhuma resposta para as demais alternativas.

Portanto houve 23 (88 %) respostas positivas, 3 (12 %) respostas neutras e nenhuma (0 %) resposta negativa. Todas as respostas neutras vieram de estudantes de Ensino Médio.

Com respeito à Questão 3, que pergunta sobre a reação dos alunos à apresentação ou ao vídeo, pode-se perceber que houve um alto nível de interesse dos alunos.

É possível determinar um valor médio para o nível de interesse a partir do número de alunos em cada grupo (quantitativo mas ainda assim subjetivo). Utilizando uma escala de nível de interesse de 0 % (desinteressado) até 100 % (completamente interessado) e considerando níveis de interesse em 100 %, 66,7 %, 33,3 % e 0 % para os grupos ‘Sim, muito’, ‘Sim’, ‘Mais ou menos’ e ‘Não’, respectivamente, obtém-se uma média ponderada do nível de interesse de 74,4 %.

11.4 QUESTÃO 4: APRENDEU ALGO NOVO

“Você aprendeu alguma coisa nova nesta apresentação/neste vídeo? O que?”

Resposta textual.

Pergunta adaptada no questionário do vídeo.

Questão 4: Você aprendeu alguma coisa nova
nesta apresentação/neste vídeo? O que?

Aprendeu algo relacionado relacionado a:

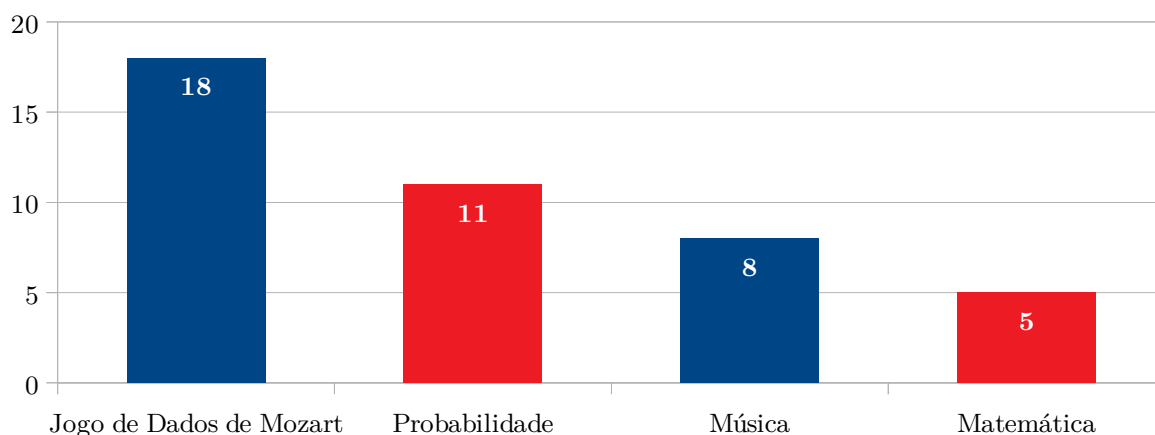


Figura 35: Gráfico da Questão 4: Aprendeu algo novo?
Fonte: Autoria própria (2021).

Por seu caráter textual, esta questão teve uma diversidade de respostas muito grande.

Todos os alunos responderam à esta questão. Exceto por um deles, todos os alunos afirmaram ter aprendido alguma coisa nova.

Para analisar as variadas respostas, utilizou-se o seguinte método: contar o uso dos contextos relacionados e das palavras utilizadas. Por exemplo, as respostas “Aprendi sobre Jogo de Dados de Mozart” e “Aprendi a criar músicas jogando dados”, ambas contam para a categoria “Jogo de Dados de Mozart” (por conter as palavras e o contexto, respectivamente) e apenas a segunda conta para a categoria “música” (por conter a palavra).

Como se vê na Figura 35, dos 26 alunos que responderam ao questionário, 18 (69 %) deles de alguma forma citaram o Jogo de Dados de Mozart, 11 (42 %) citaram de alguma forma a probabilidade, 8 (31 %) citaram de alguma forma a música e 5 (19 %) citaram de alguma forma a matemática ou alguma de suas áreas, como a combinatória ou a estatística.

Acerca dessa questão, que pergunta se os alunos aprenderam algo novo durante a apresentação ou o vídeo, pode-se inferir que, na opinião dos alunos, houve aprendizagem.

Todos os alunos afirmaram ter aprendido algo e 12 (46 %) deles afirmaram ter aprendido algo relacionado à probabilidade ou à matemática. Os outros 14 (54 %) alunos, afirmaram terem aprendido outras coisas, por exemplo sobre o Jogo de Dados de Mozart ou música.

Nota-se que a questão pergunta se ‘aprenderam algo novo’, portanto os alunos que já sabiam probabilidade não incluíam tal conteúdo nos aprendizados.

Dessa forma, pode-se entender que os alunos são capazes de aprender probabilidade e matemática fazendo uso da música, especificamente com o uso do Jogo de Dados de Mozart, o que está diretamente ligado ao objetivo deste trabalho: usar a música para ensinar probabilidade e matemática.

11.5 QUESTÃO 5: ESTILOS MUSICAIS

“Que estilos de música você gosta?”

Resposta textual.



Figura 36: Gráfico da Questão 5: Gosta de quais estilos musicais?
Fonte: Autoria própria (2021).

Todos os alunos responderam à esta questão. Alguns deles citaram que gostam de todos os estilos (ou que são ecléticos), a maioria citou um ou mais estilos e alguns destes completaram com “e outros”.

Como se vê na Figura 36, dos 26 alunos que responderam, 5 (19 %) gostam de todos os estilos, 8 (31 %) gostam de Rock, 7 (27 %) gostam de Pop, 4 (15 %) Música Eletrônica, 4 (15 %) Pagode ou Samba, 4 (15 %) RAP, 3 (12 %) Música Clássica, 3 (12 %) Funk, 2 (8 %) MPB, 2 (8 %) Sertanejo e 1 (4 %) Jazz.

Todos gostam de algum estilo de música e possuem gostos variados.

11.6 QUESTÃO 6: INSTRUMENTOS MUSICAIS

“Sabe tocar algum instrumento musical? Quais?”

Resposta textual.

Todos os alunos responderam à esta questão, vários responderam que não tocam nenhum instrumento, alguns responderam que tocam um instrumento e poucos citaram a lista de instrumentos que sabem tocar.

Como se vê na Figura 37a, dos alunos, 13 (50 %) não tocam nenhum instrumento, 9 (35 %) tocam um instrumento e 4 (15 %) tocam dois ou mais instrumentos. Destes últimos, 2 (8 %) tocam dois instrumentos, 1 (4 %) toca três e 1 (4 %) toca cinco.

Na Figura 37b, pode-se ver os instrumentos que os alunos sabem tocar. Dos 13 alunos que tocam algum instrumento, 5 (38 %) tocam violão ou guitarra, 4 (31 %) tocam flauta, 3 (23 %) piano ou teclado, 3 (23 %) ukulele, 2 (15 %) bateria, 1 (8 %) contrabaixo, 1 (8 %) viola e 1 (8 %) pandeiro.

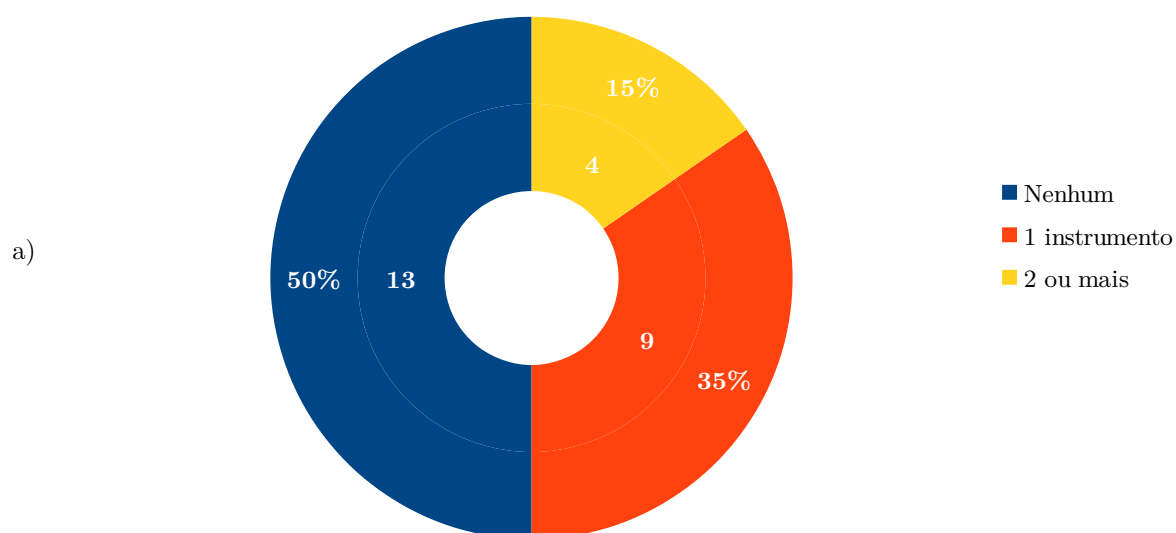
Os alunos tocam vários tipos de instrumentos, sendo mais comuns os instrumentos de corda (violão, guitarra, ukulele, contrabaixo e viola), os quais, dos 13 instrumentistas, 8 (62 %) tocam algum.

Metade dos alunos, 13 (50 %), afirmou tocar um ou mais instrumentos. Isso demonstra alto interesse em música por parte dos alunos, o que pode tê-los instigado a assistir à apresentação ou ao vídeo. Os demais alunos, que não tocam instrumentos, podem ainda ter interesse em aprender algum instrumento ou ter alguma outra motivação pessoal relacionada à música.

Cantar (usar a voz como um instrumento musical) não foi citado por nenhum aluno. Acredita-se que se a voz fosse exposta como instrumento durante a apresentação, ou citada na pergunta, teria sido considerada por muitos dos instrumentistas e por uma parte dos não-instrumentistas.

Na Questão 3, que questionava os alunos sobre terem gostado da apresentação ou do vídeo, dos alunos que tocam algum instrumento, quatro responderam ‘Sim, muito’ e um respondeu ‘Mais ou menos’; dos que não tocam instrumento algum, cinco responderam ‘Sim, muito’ e dois responderam ‘Mais ou menos’.

Questão 6: Quantos instrumentos sabe tocar?



Questão 6: Sabe tocar algum instrumento musical? Quais?

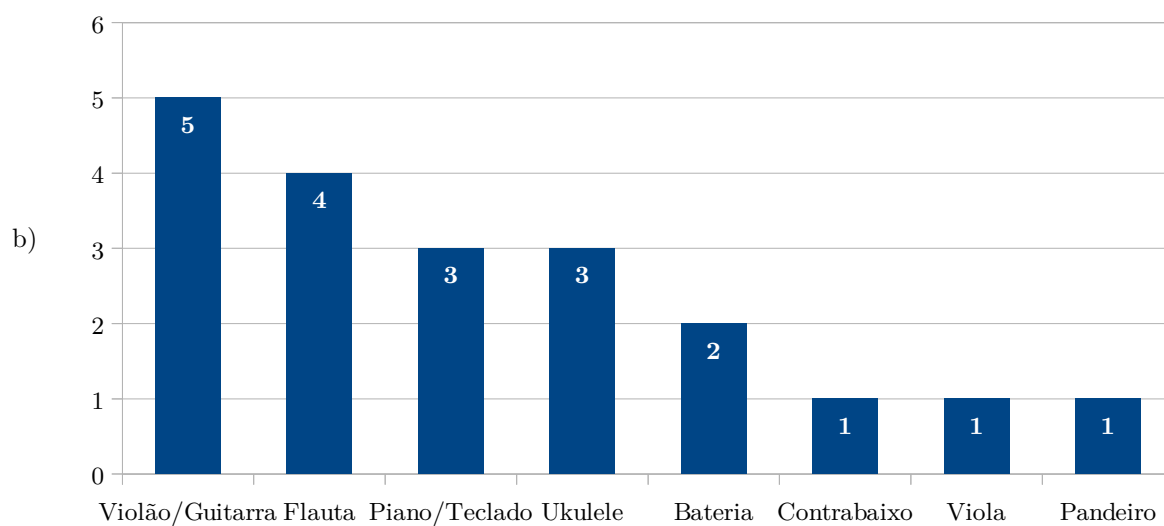


Figura 37: Gráficos da Questão 6: Instrumentos musicais. a) Quantos instrumentos tocam e b) quais instrumentos tocam. Fonte: Autoria própria (2021).

11.7 QUESTÃO 7: QUALIDADES DOS ALUNOS

“Mozart era muito bom em música. No que você é bom?”

Resposta textual.

Questão 7: Mozart era muito bom em música. No que você é bom?

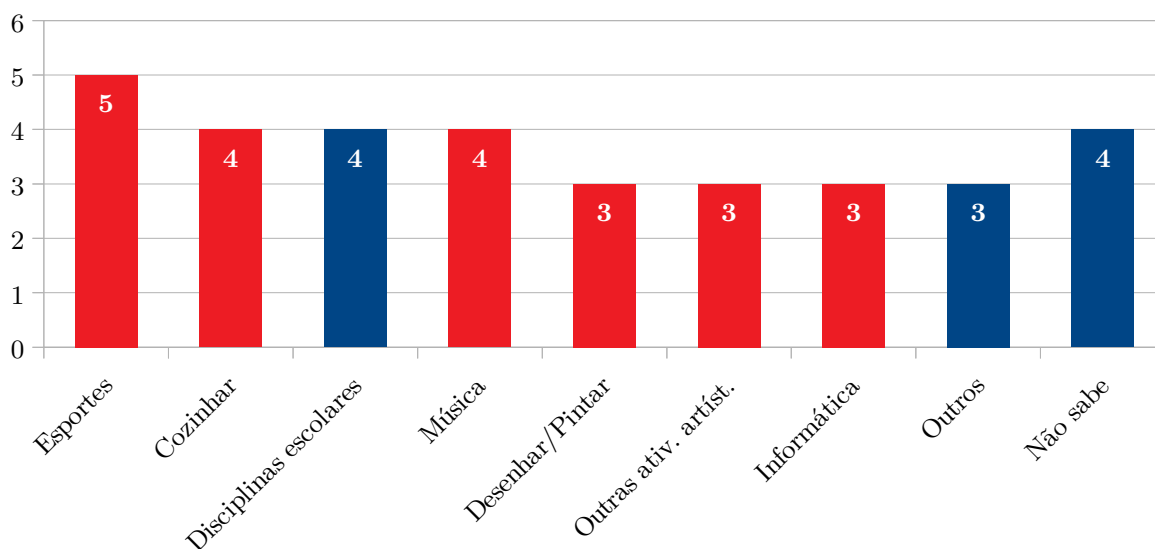


Figura 38: Gráfico da Questão 7: Qualidades dos alunos.
Fonte: Autoria própria (2021).

Todos os alunos responderam à esta questão. Houve respostas bem variadas, que foram agrupadas. Por exemplo: esportes, disciplinas escolares, atividades artísticas e informática.

Como se vê na Figura 38, 5 (19 %) alunos afirmam ser bons em algum esporte, 4 (15 %) em cozinhar, 4 (15 %) em alguma disciplina escolar, 4 (15 %) em música, 3 (12 %) em desenhar ou pintar, 3 (12 %) em outras atividades artísticas, 3 (12 %) em informática e 4 (15 %) não sabem no que são bons. Os outros 3 (12 %) afirmaram ser bons em raciocínio lógico, em organizar e em ajudar as pessoas, respectivamente.

Dos 13 alunos que tocam algum instrumento, 4 (31 %) afirmam serem bons em música.

Algumas das respostas, como ‘disciplinas escolares’ e ‘não sabe’ são genéricas e não são bons exemplos para contextualização. No entanto, também surgiram alguns exemplos interessantes: ‘esportes’, ‘cozinhar’, diversas ‘atividades artísticas’ e ‘informática’.

11.8 QUESTÃO 8: A MATEMÁTICA NO MUNDO

“Com que frequência você percebe a matemática no mundo?”

Alternativas fixas: Todo dia, Toda semana, Dificilmente ou Nunca.

Questão 8: Com que frequência você percebe a matemática no mundo?

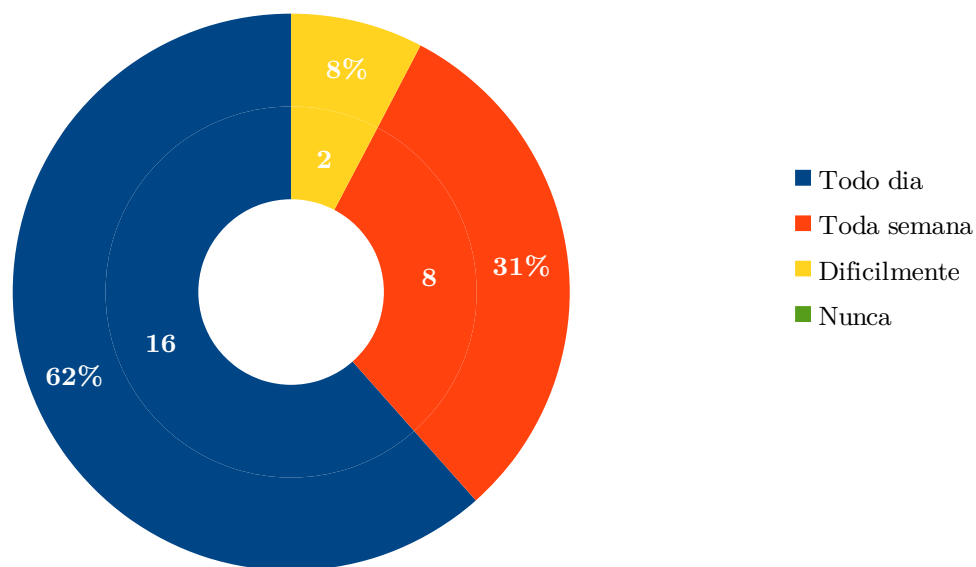


Figura 39: Gráfico da Questão 8: A matemática no mundo.
Fonte: Autoria própria (2021).

Como se observa na Figura 39, a maioria dos alunos vê a matemática no mundo todo dia (16, 62 %), alguns a veem semanalmente (8, 31 %), poucos dificilmente a veem (2, 8 %) e nenhum nunca a vê (0, 0 %).

Isso indica que os alunos são capazes de ver a matemática presente no mundo que os rodeia. Porém onde o aluno vê a matemática? Onde ele a usa? E como se pode introduzir isso ao se ensinar matemática?

11.9 QUESTÃO 9: ONDE USA A MATEMÁTICA

“Em quais situações do dia-a-dia você percebe que usa a matemática?”

Resposta textual.

Questão 9: Em quais situações do dia-a-dia você percebe que usa a matemática?

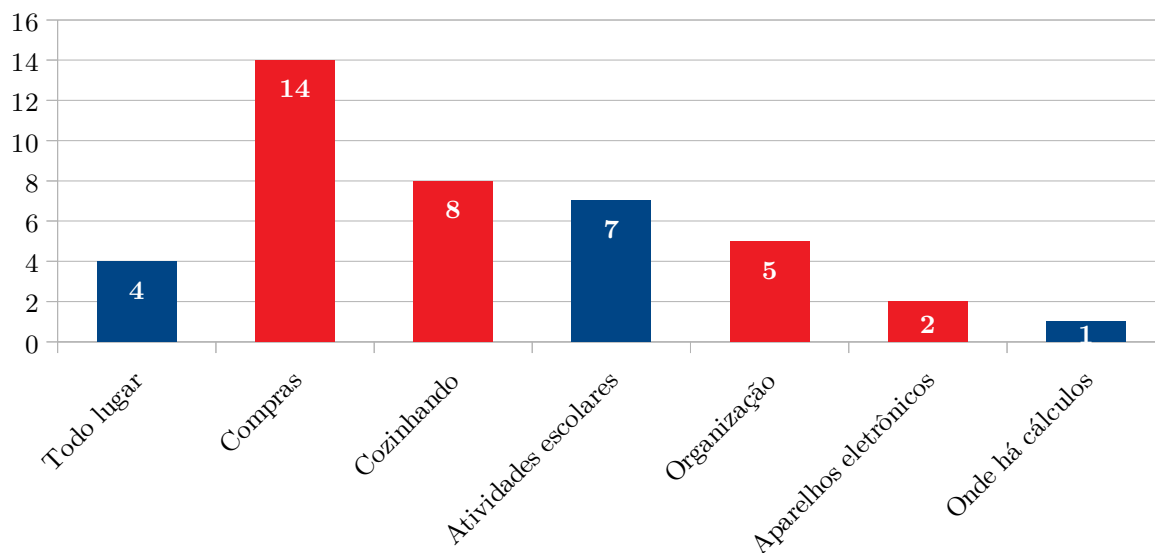


Figura 40: Gráfico da Questão 9: Onde se usa a matemática.

Fonte: Autoria própria (2021).

Todos os alunos responderam à esta questão, alguns apenas responderam que percebem a matemática em todo lugar, ou algo similar, e os demais deram um ou mais exemplos.

Como se vê na Figura 40, dos 26 alunos, 4 (15 %) apenas responderam que percebem a matemática em todo lugar, 14 (54 %) responderam que a percebem em situações relacionadas à compras, 8 (31 %) citaram algo relacionado à cozinhar ou à alimentação, 7 (27 %) citaram atividades escolares, 5 (19 %) citaram algo relacionado à organização (de objetos, de atividades, do tempo), 2 (8 %) citaram que a veem no uso e configuração de aparelhos eletrônicos e 1 (4 %) afirmou que percebe a matemática ‘onde há cálculos’.

Algumas das respostas, como ‘todo lugar’, ‘atividades escolares’ e ‘onde há cálculos’ são genéricas e não são bons exemplos para contextualização. No entanto, também surgiram alguns exemplos interessantes: ‘compras’, ‘cozinhando’, ‘organização’ e ‘aparelhos eletrônicos’.

Todos os alunos responderam à Questão 9, que pergunta quais são as situações do dia-a-dia em que o aluno percebe a matemática, o que indica interesse. No entanto, 22 (85 %) deram exemplos específicos e 4 (15 %) não deram exemplos.

Considerando os quatro alunos que não deram exemplos, ou seja, os que não responderam à esta questão: quando questionados se gostaram da apresentação ou do

vídeo (Questão 3), três deles responderam ‘Sim’ e um respondeu ‘Mais ou menos’.

No entanto, apesar da maioria dos alunos apontarem alguma situação específica do dia-a-dia onde se usa a matemática, pode-se interpretar uma certa ingenuidade dos estudantes acerca delas, por exemplificarem atividades comumente utilizadas como contextualização nas aulas de matemática. Assim, pode-se formar a ideia de que, na prática, não usam ou não veem o uso da matemática nas situações do seu dia-a-dia.

11.10 QUESTÃO 10: EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS

“Dê dois exemplos de experimentos aleatórios. Por exemplo: lançar dados é um experimento aleatório.”

Resposta textual.

Dos 24 alunos que responderam, a maioria deu dois exemplos e alguns deram apenas um exemplo. Uma parte destes alunos respondeu citando experimentos que não são aleatórios, como ‘troco do mercado’. Foram considerados apenas o número de respostas que realmente são experimentos aleatórios. Dois alunos não responderam à esta questão e foram considerados no grupo ‘nenhum exemplo’. Um aluno respondeu com três exemplos e foi considerado no grupo ‘dois exemplos’.

Como se vê na Figura 41a, dos 26 alunos, 17 (65 %) corretamente deram dois exemplos, 5 (19 %) deram um exemplo correto e 4 (15 %) não deram exemplos.

Os alunos deram várias respostas, como se pode ver na Figura 41b, os alunos citaram: 10 (38 %) moedas, 7 (27 %) sorteio ou loteria, 6 (23 %) baralho, 6 (23 %) dados (exemplo dado na questão), 4 (15 %) roleta, 3 (12 %) urna com bolas, 2 (8 %) bingo, 1 (4 %) chutar uma bola, pois ‘não se sabe onde ela vai parar’ e 1 (4 %) previsão do tempo.

A maioria citou exemplos comuns de contextualização dentro do conteúdo de probabilidade. A maioria também citou apenas exemplos de experimentos discretos.

É possível que, tenham estudado probabilidade apenas com experimentos aleatórios discretos ou foram induzidos pela natureza discreta do assunto trabalhado na apresentação.

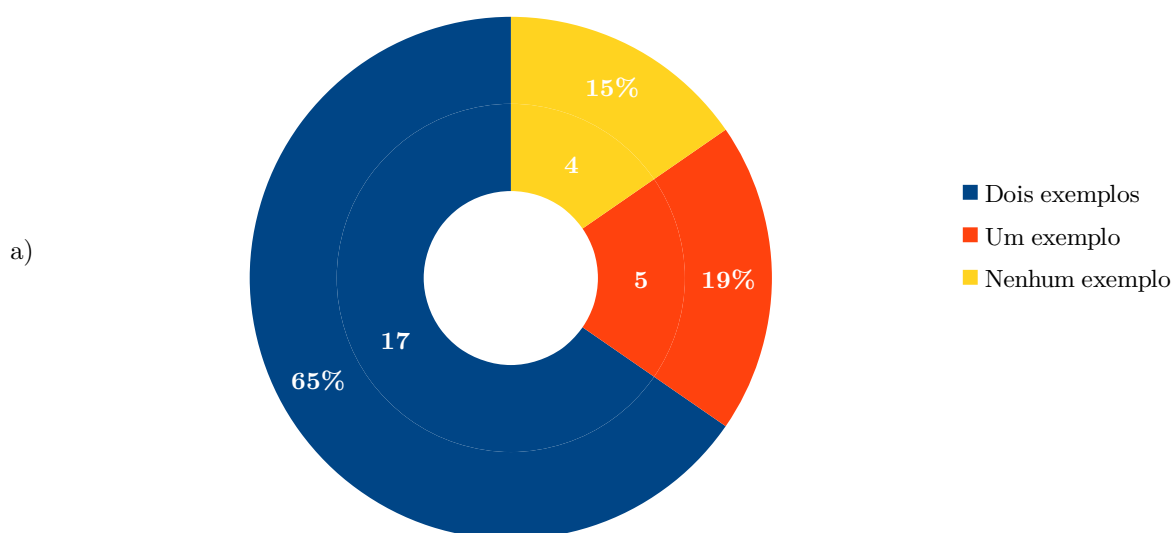
Vinte e quatro (92 %) alunos tentaram responder à questão e 2 (8 %) não responderam.

Dos dois que não tentaram responder à esta questão, quando questionados se gostaram da apresentação ou do vídeo (Questão 3), um respondeu ‘Sim, muito’ e um respondeu ‘Sim’.

Dezessete (65 %) foram capazes de responder corretamente com dois ou mais exemplos de experimentos aleatórios, 5 (19 %) responderam corretamente com apenas um exemplo e 4 (15 %) não responderam com exemplos corretos.

Quanto aos 4 alunos que não responderam com exemplos corretos, na Questão 4, a qual pergunta sobre o que aprenderam, um citou ter aprendido sobre o Jogo de Dados de Mozart, dois citaram ter aprendido sobre probabilidade, três sobre música e dois sobre matemática.

Questão 10: Dê dois exemplos de experimentos aleatórios.



Questão 10: Dê dois exemplos de experimentos aleatórios.

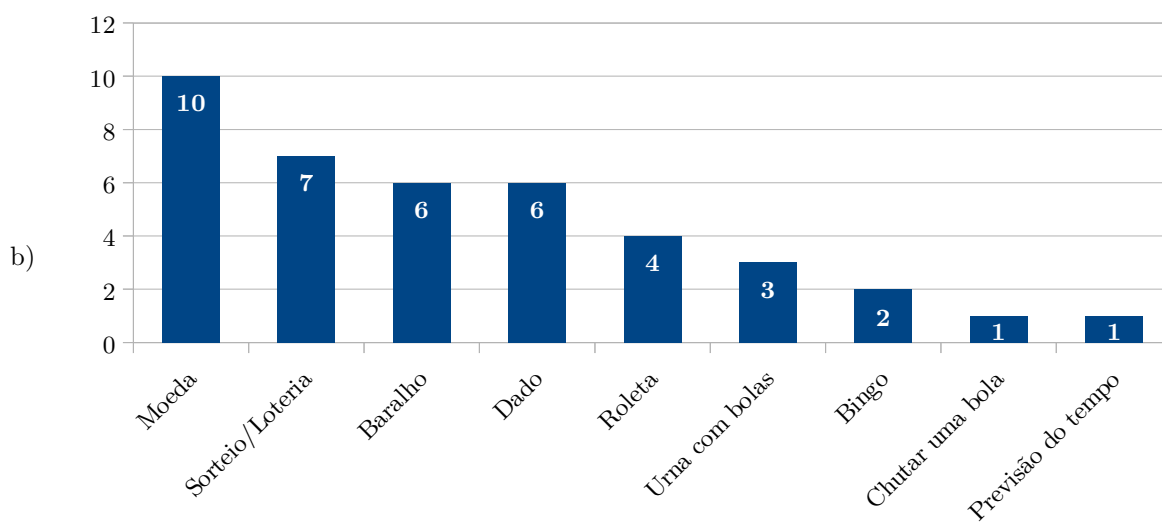


Figura 41: Gráficos da Questão 10: Experimentos aleatórios: a) número de exemplos do aluno e b) os exemplos fornecidos.
Fonte: Autoria própria (2021).

11.11 QUESTÃO 11: FALTA UM DADO

“Se seu colega não tiver dois dados, mas apenas um. Como ele pode fazer para criar uma melodia com O Jogo de Dados de Mozart?”

Resposta textual.

Questão 11: Seu colega tem apenas um dado. ...

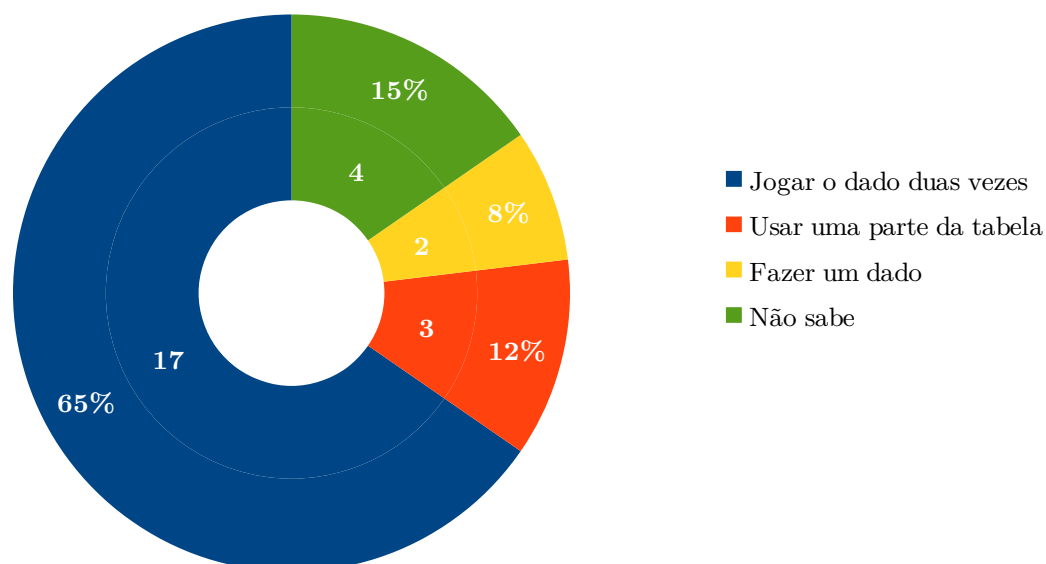


Figura 42: Gráfico da Questão 11: Na falta de um dado.

Fonte: Autoria própria (2021).

Vinte e quatro alunos responderam à esta questão. Dois não responderam e foram considerados no grupo ‘não sabe’.

Como se vê na Figura 42, a maioria dos alunos deu a sugestão correta (17, 65 %), outros sugeriram utilizar apenas parte da tabela (3, 12 %), outros sugeriram fazer o segundo dado (2, 8 %) e alguns não sabiam ou não responderam (4, 15 %).

Assim, pode-se observar uma solução envolvendo teoria da probabilidade e duas soluções criativas que não envolvem probabilidade.

Vinte e dois (85 %) tentaram responder à questão e 4 (15 %) não a responderam.

Dos quatro que não tentaram responder à esta questão, quando questionados se gostaram da apresentação ou do vídeo (Questão 3), um respondeu ‘Sim, muito’ e três responderam ‘Sim’.

Dezessete (65 %) responderam corretamente, utilizando conceitos de probabilidade, 5 (19 %) deram respostas criativas e 4 (15 %) não responderam.

11.12 QUESTÃO 12: DADOS MODIFICADOS

“OPCIONAL: Quer resolver um desafio? Se eu te der dois dados modificados, onde eu apaguei os dois números 4 e coloquei 3 no lugar. Como fica a distribuição das probabilidades das somas desses dois dados? Ou seja, ambos os dados têm faces 1, 2, 3, 3, 5 e 6. Quais são os valores das probabilidades $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, $P(9)$, $P(10)$, $P(11)$ e $P(12)$?”

Resposta textual.

Questão 12: Desafio opcional. Dados modificados ...

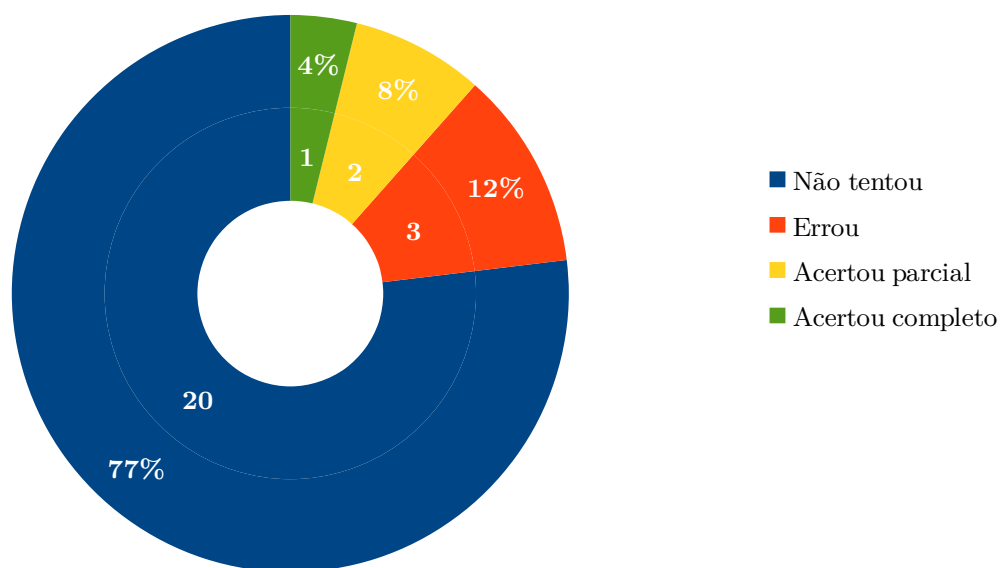


Figura 43: Gráfico da Questão 12: Dados modificados.

Fonte: Autoria própria (2021).

Como se vê na Figura 43, apenas seis (23 %) alunos tentaram responder à esta questão opcional. Destes seis alunos, três erraram (erros conceituais), dois acertaram parcialmente (ambos erraram a probabilidade de um dos resultados) e um conseguiu acertar a questão por completo.

O único aluno que acertou a questão por completo é estudante de curso de Graduação. Os outros alunos que tentaram responder são estudantes de Ensino Médio.

A questão foi dada com opcional, é trabalhosa, extensa e razoavelmente difícil. É possível que alguns dos alunos que não responderam iniciaram e desistiram.

Seis alunos (23 %) tentaram responder e 20 (77 %) não responderam. Dos seis que tentaram responder à esta pergunta, na Questão 3, dois responderam ‘Sim, muito’, três responderam ‘Sim’ e um respondeu ‘Mais ou menos’.

Dos seis que tentaram responder, 1 (17 %) respondem corretamente, 2 (33 %) responderam parcialmente correto¹⁰ e 3 (50 %) responderam incorretamente.

Entre os três alunos que responderam corretamente ou parcialmente correto, quando questionados sobre o que aprenderam de novo (Questão 4), dois afirmaram ter aprendido sobre o Jogo de Dados de Mozart, três afirmaram ter aprendido sobre probabilidade, um afirmou ter aprendido sobre matemática e nenhum citou ter aprendido sobre música.

Entre os três alunos que responderam incorretamente, quando questionados sobre o que aprenderam de novo (Questão 4), três afirmaram ter aprendido sobre o Jogo de Dados de Mozart, um afirmou ter aprendido sobre probabilidade, dois afirmaram ter aprendido sobre música e um afirmou ter aprendido sobre matemática.

¹⁰Cada um errou apenas um dos numeradores da resposta, o que indica que utilizaram os conceitos corretamente, porém se descuidaram ao realizar um cálculo ou ao copiar a resposta das suas anotações para o questionário.

11.13 RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO

A maioria dos alunos que responderam ao questionário é composta por alunos de Ensino Médio e assistiu à videoaula por indicação de seu professor. De forma geral, os alunos reagiram de forma positiva à aula por videoconferência e à videoaula. Além disso, quase a metade deles afirmou ter aprendido alguma coisa nova relacionada à matemática ou à probabilidade.

Analisando as questões 9, 10 e 11, observa-se interesse considerável nos alunos: a maioria deles deu exemplos específicos de situações cotidianas nas quais eles percebem a matemática. Além disso, os alunos, deram exemplos de experimentos aleatórios e propuseram alguma solução ao problema da falta de um dado.

De forma semelhante, analisando as questões 10 e 11, também se observa um nível de aprendizagem promissor nos alunos: a maioria deles deu exemplos de experimentos aleatórios corretamente e respondeu impecavelmente como contornar o problema da falta de um dado.

Poucos alunos tentaram responder à questão opcional, o que pode indicar baixo interesse ou baixa aprendizagem. No entanto, esta é uma questão extensa e tem um nível de dificuldade mais alto. Era esperado um número reduzido de respostas, estas vindo apenas de alunos com interesse muito alto, alta aprendizagem e auto-confiança. Praticamente um quarto dos alunos teve interesse, aprendizado e autoconfiança para tentar resolver e responder à esta questão.

Metade dos alunos afirmou saber tocar algum instrumento musical, o que pode indicar a existência de motivações pessoais quanto ao tema musical, podendo tê-los atraído à aula por videoconferência ou à videoaula e influenciado positivamente no seu interesse.

12 DISCUSSÕES ADICIONAIS

Neste capítulo serão realizadas algumas discussões adicionais, que podem ser de interesse para trabalhos futuros.

12.1 DISCUSSÃO SOBRE AUTORIA DAS COMPOSIÇÕES

Durante a aula por videoconferência, ou seja, durante a aplicação com a turma de Ensino Médio, uma das discussões que os alunos levantaram foi sobre de quem é a autoria da composição: foi Mozart ou foi quem jogou os dados? Entrou-se em duas vertentes paralelas: legalmente e filosoficamente.

A obra está em domínio público e pode ser utilizada livremente, desde que dada a respectiva autoria. No entanto, Mozart escreveu os fragmentos melódicos, mas não escreveu, nem executou, todas as possíveis combinações.

Pode-se dizer que quem joga os dados compõe, a partir do Jogo de Dados de Mozart. Também é possível afirmar que quem joga os dados traz à realidade uma das múltiplas composições de Mozart.

Certamente Mozart tem parte na composição. Porém, como se pode definir qual é o nível de participação de quem joga os dados?

12.2 TAXA DE RESPOSTA AO QUESTIONÁRIO

Considerando que os nove professores de Ensino Médio tenham enviado o vídeo e o questionário para uma turma e que estas tenham 30 alunos cada, haveria um total de 270 alunos atingidos pela pesquisa. Dessa forma, resulta em uma taxa de resposta ao questionário de 7,0 % (aproximadamente um em cada 14 alunos de Ensino Médio). A maioria dos professores, no entanto, dava aulas para diversas turmas de Ensino Médio, acarretando em uma taxa de resposta ainda menor.

Marconi e Lakatos (2003), expressam que a taxa de resposta a questionários é cerca de 25 %, o que caracteriza a taxa obtida como baixa. Assim, levanta-se a seguinte pergunta: “Como elevar a taxa de resposta dos alunos nos questionários?”

Com respeito a isso, a direção de uma escola comentou que mandar o *link* para um questionário por mensagem de texto não tem tanta interação (respostas) dos pais dos alunos quanto mandar um *QR code* para eles escanear.

Uma explicação possível é que, por não ser possível lê-lo diretamente, o *QR code* estimula a curiosidade, sendo necessário escaneá-lo para ver o que será aberto. Então, estando aberta a página, basta os pais responderem ao questionário, havendo consistentemente mais respostas.

O que é válido para os pais, pode também ser válido para os alunos. Assim, uma possibilidade para melhorar a interação dos alunos com questionários e ferramentas de ensino *online* é, ao invés de pedir para encontrarem um *link* e clicarem nele, enviar um *QR code* para escanear. Isso também pode ser feito em vídeos ou apresentações.

12.3 A ESCOLA COMO AMBIENTE SOCIAL

Ao enviar as mensagens de texto para os professores, alguns deles desejavam saber mais sobre o tema ou sobre a pesquisa. Nesses casos, foi feita uma ligação telefônica, na qual houve uma conversa com cada um deles. Metodologicamente, estas conversas, podem ser consideradas como entrevistas não-estruturadas e não-dirigidas (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 197).

Os professores relataram como estão sendo desenvolvidas as aulas por videoconferência e quais são as dificuldades que estão tendo com respeito à participação, ao interesse e à interação dos alunos.

Em conversas com os professores, foi percebido que eles têm enfrentado dia após dia dificuldades de presença, de interesse e de interação por parte dos alunos. Estes têm resistência em participar de aulas por videoconferência, quando estão acostumados com as aulas presenciais.

Além disso, alguns professores declararam que, no início das aulas por videoconferência, havia maior participação dos alunos, tanto nas aulas quanto nas atividades sugeridas, o que foi decaindo com o tempo.

Isso pode ter acontecido pelo motivo dos alunos sentirem falta do ambiente social fornecido pela escola. De início estavam animados com o retorno às aulas. Porém, como as aulas à distância não fornecem um ambiente social onde há contato e conversa com seus amigos, muitos acabaram por deixar de participar das videoconferências com os professores.

Para aliviar essa condição, o professor pode criar atividades que devem ser realizadas pelos alunos em grupos, nas quais cada grupo faz sua própria videoconferência, podendo, assim, conversarem entre amigos e ter um ambiente de estudos também social. O momento da videoconferência com o professor, por sua vez, é utilizado para expor e discutir os resultados, para revisar o conteúdo estudado em grupo e para organizar as próximas atividades.

Dessa forma, o encontro com os professores se torna um meio para a socialização entre os alunos, atraindo-os para a sala de aula virtual.

12.4 PERSUADINDO OS ALUNOS

Além da falta de participação, os professores também são desafiados pela falta de interação: é difícil persuadir os alunos a realizarem as atividades.

Em condições normais, a presença física do professor, a autoridade da sala de aula, eleva o seu poder de persuasão, junto com seu estímulo, sua insistência e sua argumentação, de forma que se desperte nos alunos o desejo de realizarem suas tarefas. Nas condições atuais, no entanto, só resta ao professor a porção verbal de sua persuasividade.

Técnicas para aumentar a participação e interação dos alunos, citadas por professores, foram:

- Conversar por mensagem de texto com cada aluno individualmente, depois de enviar para o grupo todo;
- Pedir captura de tela (*screenshot*) da atividade;
- Entregar atividade em papel, requerendo devolução dela completa;
- Realizar a atividade durante a videoconferência; e
- Fazer a atividade valer presença ou nota.

Estas táticas, no entanto, são trabalhosas ou desvirtuam a videoconferência de seu objetivo: de reunir alunos e professores para tirar dúvidas e introduzir novos conteúdos.

Cialdini (2012) elabora que a autoridade é um fator muito importante na persuasão. Além disso, explica que “ao pedirmos um favor a alguém, teremos mais sucesso se fornecermos um motivo” e complementa que o mero fato de usar na frase a palavra “porque” aumenta as chances do pedido ser aceito, mesmo se o motivo que a segue seja fraco.

Com base nisso, levanta-se a hipótese de que, ao fazer um pedido aos alunos, o professor deve ser direto e, polidamente, dar comandos e um motivo.

Exemplos de mensagens de texto que o professor pode enviar para uma turma de alunos:

- Boa noite. Se possível para vocês, assistir ao vídeo e responder ao questionário. É de um aluno nosso que está fazendo mestrado.
- Olá. Para amanhã, façam os exercícios 1 a 4 da página 75, porque os iremos corrigir.
- Pessoal, tudo bem? Lembrem-se de enviar o trabalho porque amanhã vai fechar a entrega.

- Bom dia. Leiam as páginas 9 a 15 e façam um resumo, porque esta é a atividade desta semana.
- Boa tarde! Já estudaram matemática hoje? Porque semana que vem haverá prova.
- E ai pessoal, como vai? Já formaram os seus grupos de estudo? Lembrem-se que na semana que vem teremos a nossa gincana de trigonometria!

Estes podem ser utilizados tanto em mensagens de texto quanto adaptados para uso durante e ao fim da aula, instigando os alunos a fazerem as tarefas.

É interessante que o motivo citado pelo professor, pelo qual os alunos devem seguir seus comandos, seja atraente e estimulante. No entanto, como defende Cialdini (2012), a mera presença de *algum* motivo já aumenta a eficácia do pedido¹¹.

¹¹ Este comportamento irracional, de se aceitar pedidos com maior frequência quando há *algum* motivo, é comum e sua existência respaldada por pesquisas científicas. Recomenda-se a referência Cialdini (2012) para maiores detalhes.

13 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho é oferecido ao professor de matemática do Ensino Médio uma proposta de ensino do conteúdo de probabilidade, fazendo uso do Jogo de Dados de Mozart como a contextualização da atividade de ensino. Conteúdos básicos estão dispostos de forma a atender ao currículo da BNCC, no que tange aos experimentos aleatórios discretos, abrangendo também conteúdos avançados relevantes.

De forma a auxiliar o professor na tarefa de ensino, foram criados produtos educacionais e disponibilizados em um *website*, além da seleção de recursos tecnológicos disponíveis na *internet*.

No estudo de caso da aplicação da proposta, verificou-se que os alunos reagiram de forma positiva à aula por videoconferência e à videoaula, e afirmaram ter aprendido alguma coisa nova relacionada à matemática ou à probabilidade. Dessa forma, verifica-se que houve interesse e motivação por parte dos alunos e também nota-se um alto nível de aprendizagem e compreensão.

Para alguns alunos, no entanto, o interesse, a motivação, o aprendizado e a compreensão podem ter sido influenciados por ímpetos pessoais. Uma possível fonte desta disposição é quanto ao tema musical, já que metade dos alunos afirmou saber tocar algum instrumento musical. Outras possibilidades podem ser os próprios temas da probabilidade e da matemática.

Portanto, ao avaliar a reação primariamente positiva dos alunos, é importante considerar que aqueles que responderam ao questionário possam ter motivações pessoais quanto aos temas musical e matemático, e isto pode ter aumentado seu interesse e sua motivação a ponto de desejarem participar da atividade e responderem ao questionário.

Para trabalhos futuros, são sugeridos:

- Aplicar a proposta de ensino, ou parte dela, com uma turma inteira, de forma que haja menor possibilidade do “viés do sobrevivente” ocorrer, ou seja, que haja menor possibilidade de que os alunos tenham interesse e motivação inflados por atividades e gostos pessoais, como a música e a matemática;
- Estender os problemas sugeridos aos alunos: adicionar questões sobre combinatória; expandir as noções de estatística utilizadas; fazer uso de conteúdos adicionais, como o teorema de Bayes, a distribuição de Poisson e as cadeias de Markov;
- Dar continuidade ao trabalho com outros contextos relacionando probabilidade, matemática e música; e
- Explorar as discussões levantadas no Capítulo 12 (Discussões adicionais), com respeito à sua validade e à sua eficácia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADÃO, T. da S. **Ensino de Probabilidade através de Jogos com Dados e Moedas**. Juiz de Fora: UFJF, 2013. Dissertação do PROFMAT.
- AMORIM, V.; MOZER, G. **Probabilidade além da combinatória: Tópicos e problemas reais com foco no raciocínio probabilístico**. 1. ed. Rio de Janeiro: ANPMat, 2020. ISBN: 978-65-88013-10-6.
- BATANERO, C.; GODINO, J. D.; ROA, R. Training teachers to teach probability. **Journal of Statistics Education**, University of Granada, 2004. v. 12, n. 1.
- BONI, D. A.; COCA, A. E.; ANDRADE, R. M. D. Ensino de probabilidade com o jogo de dados de Mozart. **Anais do II EPPROFMAT – Encontro Paranaense do PROFMAT, Revista Transmutare**, Curitiba, v. 4, p. 50–51, 2019. ISSN 2525-6475.
- BONI, D. A.; COCA, A. E.; ANDRADE, R. M. D. O jogo de dados de Mozart e a probabilidade no Ensino Médio. **Submetido à publicação**, 2021.
- BONI, D. A.; COCA, A. E.; ANDRADE, R. M. D. Os desafios do ensino à distância: Curiosidade, ambiente social escolar e persuasão. **Submetido à publicação**, 2021.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Brasília: Ministério da Educação, 2017.
- BRASIL. **Relatório Brasil no PISA 2018**. Brasília: Ministério da Educação, 2019. Versão preliminar.
- CAMPOS, P. A. **O ensino de probabilidade no contexto do jogo de truco**. São Paulo: IFSP, 2018. Dissertação do PROFMAT.
- CAPLIN, W. E. **Classical Form: A theory of formal functions for the instrumental music of Haydn, Mozart, and Beethoven**. New York: Oxford University Press, 1998. ISBN: 0-19-510480-3.
- CARRILLO, A. M. da S. **A Matemática e a Música: O ensino de conceitos de probabilidade através de uma contextualização com a composição musical**. Juazeiro: UNIVASF, 2019. Dissertação do PROFMAT.
- CAVINI, M. P. **História da Música Ocidental: Uma breve trajetória desde o século XVIII até os dias atuais**. São Carlos: EdUFSCar, 2012. v. 2. ISBN: 978-85-7600-200-0.
- CIALDINI, R. B. **As armas da persuasão**. Rio de Janeiro: Sextante, 2012. ISBN: 978-85-7542-809-2.
- D'AMBROSIO, U. **Por que se ensina Matemática**. s.l.: SBEM, 2003. Texto de disciplina à distância.
- ELIAS, N. **Mozart: Sociologia de um gênio**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1994. ISBN: 978-8571103023.

- GARCÍA, Y. R.; SALAMANCA, P. R.; MORA, D. C. El juego de dados de Mozart: Un recurso didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad. **VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM)**, Montevideo, 2013.
- LARA, I. C. M. de. O jogo como estratégia de ensino de 5^a a 8^a série. **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Recife, 2004. Minicurso.
- LEODORO, M. P.; BALKINS, M. A. A. d. S. Problematizar e participar: Elaboração do produto educacional no mestrado profissional em ensino. **Anais II Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, 2010.
- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2. ISBN: 85-85818-11-5.
- LLUIS-PUEBLA, E. La matemática en la música. **Pro Mathematica**, Universidad Nacional Autónoma de México, 2002. Vol. XVI, Nos. 31-32.
- MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003. ISBN: 978-85-7542-809-2.
- MED, B. **Teoria da Música**. 4. ed. Brasília: Musimed, 1996. ISBN: 978-85-85886-02-1.
- MOREIRA, M. A. O mestrado (profissional) em ensino. **Revista Brasileira de Pós-Graduação**, Brasília, n. 1, p. 131–142, 2004.
- MOZART, W. A. **Musikalisches Würfelspiel, K.516f**. Bonn: Nikolaus Simrock, 1793.
- NOGUCHI, H. Mozart – Musical Game in C K. 516f. **Mitteilungen der ISM 38**, 1990. Heft 1-4, p. 89-101.
- OGLIARI, L. N. **A matemática no cotidiano e na sociedade: perspectivas do aluno do Ensino Médio**. Porto Alegre: PUC-RS, 2008. Dissertação.
- ROSS, S. M. **Introduction to Probability Models**. 11. ed. San Diego: Academic Press, 2014. ISBN: 978-0-12-407948-9.
- SILVA, A. F. da; KODAMA, H. M. Y. Jogos no ensino da matemática. **II Biental da Sociedade Brasileira de Matemática**, UFBA, p. 1–19, 2004.
- TERRADAS, R. D. A importância da interdisciplinaridade na educação matemática. **Revista da Faculdade de Educação**, n. 16, p. 95–114, 2011.
- URO, J. L. A. **Musical Dice Game Minuets I**. Philippines: Libre Edition Press, 2017.

PARTE IV
APÊNDICES

APÊNDICE A – MATERIAIS PARA OS ALUNOS

Este apêndice contém materiais que o professor pode utilizar com seus alunos no desenvolvimento da proposta de ensino do Capítulo 8.

A Figura A.1 mostra dois dados planejados. Estes podem ser recortados e montados pelos alunos. Materiais e instruções de montagem são descritos na Seção 8.6.

A Tabela A.1 mostra uma folha com duas cópias da tabela de compassos do Jogo de Dados de Mozart. Estas podem ser recortadas e entregues aos alunos, que podem grifar nelas as partes de interesse nas atividades.

A Figura A.2 mostra uma folha com duas cópias de uma partitura em branco. Estas podem ser recortadas e entregues aos alunos, que nelas podem escrever os fragmentos melódicos sorteados.

A Figura A.3 mostra os fragmentos melódicos do Jogo de Dados de Mozart. Estas podem ser entregues para os grupos, de forma que criem suas composições.

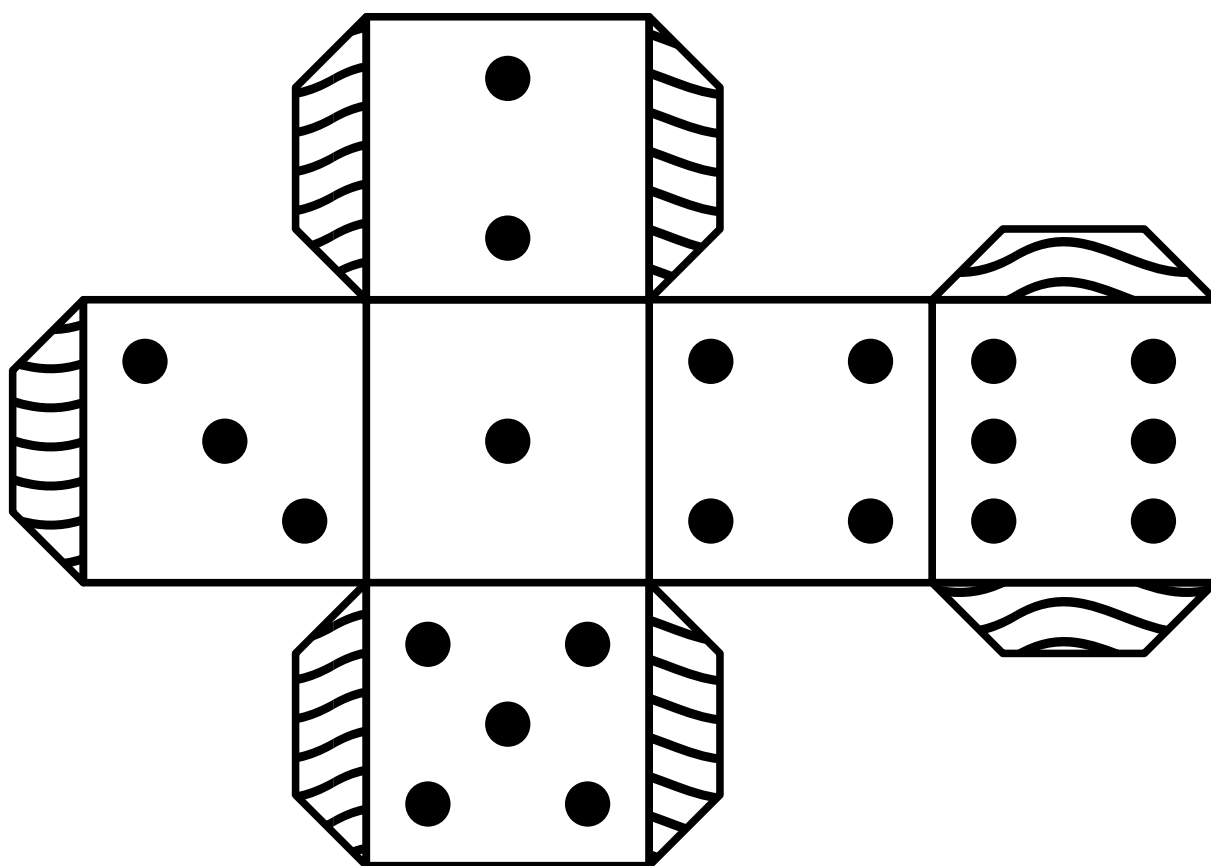
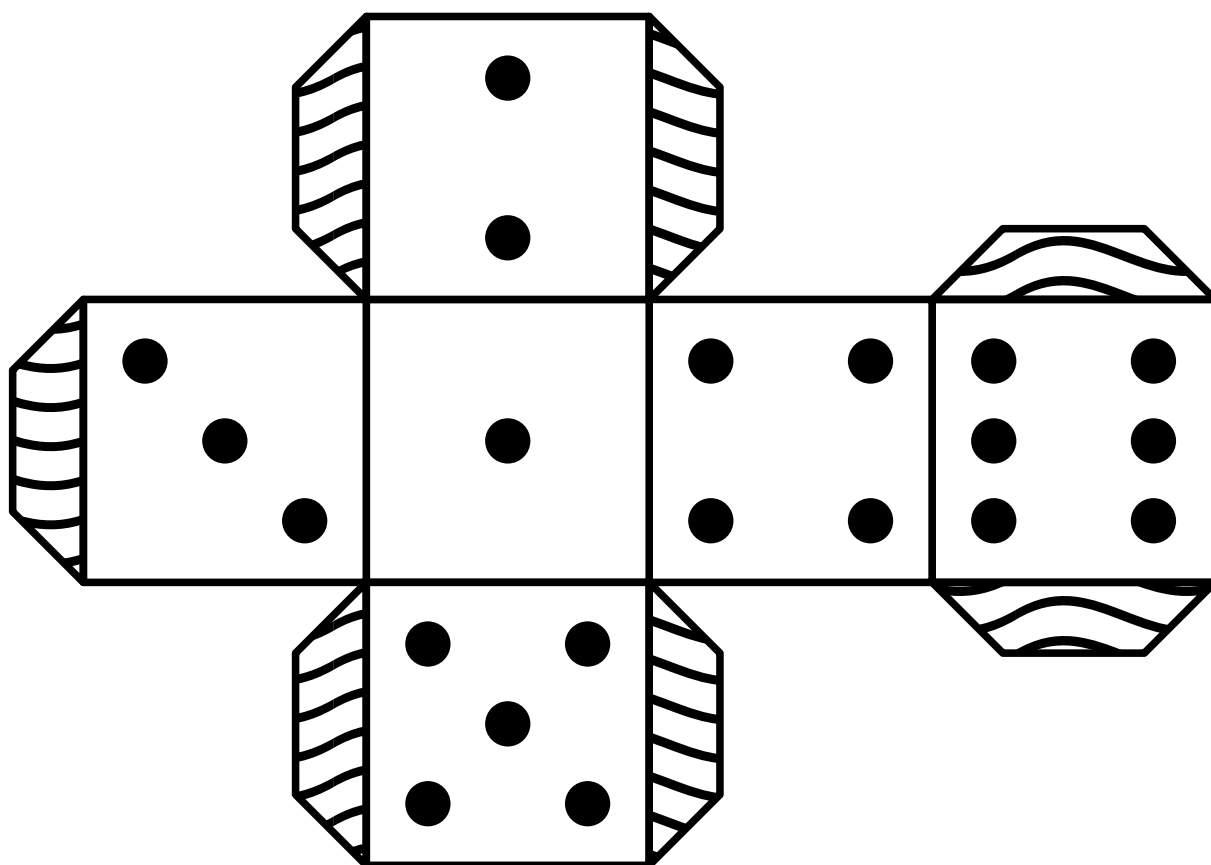


Figura A.1: Dado planejado para recorte e colagem.
Fonte: Autoria própria (2021).

Tabela A.1: Múltiplas tabelas de compassos do Jogo de Dados de Mozart.

Compassos																
Soma dos Dados	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Compassos																
Soma dos Dados	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Fonte: Adaptado de Mozart (1793).

The first system of the musical score consists of two staves. The top staff is in treble clef and the bottom staff is in bass clef. The time signature is 3/8. A tempo marking of quarter note = 111 is placed above the first staff. A first ending bracket labeled '1' spans the final two measures of the system. A second ending bracket labeled '2' spans the final two measures of the system, positioned below the bass staff.

.....

The second system of the musical score consists of two staves. The top staff is in treble clef and the bottom staff is in bass clef. The time signature is 3/8. A tempo marking of quarter note = 111 is placed above the first staff. A first ending bracket labeled '1' spans the final two measures of the system, positioned above the treble staff. A second ending bracket labeled '2' spans the final two measures of the system, positioned below the bass staff.

Figura A.2: Partituras em branco para minuetos do Jogo de Dados de Mozart.
 Fonte: Autoria própria (2021).

O Jogo de Dados de Mozart
Musikalisches Würfelspiel, K.516f

atribuído a W. A. Mozart

The musical score is presented in five systems, each containing a treble and bass staff. The tempo is indicated as quarter note = 111. The score includes various musical notations such as slurs, trills (tr), and first/second endings. The key signature has one sharp (F#).

Figura A.3: Fragmentos melódicos do Jogo de Dados de Mozart.
Fonte: Adaptado de Mozart (1793), transcrito por Uro (2017).
Nota: Parte 1/4. Continua na próxima página.

The image displays a musical score for the piece 'Jogo de Dados' by Wolfgang Amadeus Mozart. The score is presented in two systems, each with a treble and bass staff. The measures are numbered from 41 to 88. The key signature is one sharp (F#), and the time signature is 2/4. The melody in the treble staff is characterized by eighth-note patterns, often with slurs and ties. The bass staff provides a harmonic accompaniment with chords and single notes. The score concludes with a first ending (marked '1.') and a second ending (marked '2.').

Figura A.3: Fragmentos melódicos do Jogo de Dados de Mozart.

Fonte: Adaptado de Mozart (1793), transcrito por Uro (2017).

Nota: Parte 2/4. Continua na próxima página.

89 90 91 92 93 94 95 96

97 98 99 100 101 102 103 104

105 106 107 108 109 110 111 112

113 114 115 116 117 118 119 120

121 122 123 124 125 126 127 128

Figura A.3: Fragmentos melódicos do Jogo de Damos de Mozart.

Fonte: Adaptado de Mozart (1793), transcrito por Uro (2017).

Nota: Parte 3/4. Continua na próxima página.

The image displays a musical score for the piece 'Jogo de Dados' by Wolfgang Amadeus Mozart. The score is presented in a grand staff format, consisting of a treble clef on the upper staff and a bass clef on the lower staff. The music is written in 4/4 time and features a key signature of one sharp (F#). The score is divided into six systems, each containing two staves. The measures are numbered sequentially from 129 to 176. The notation includes various rhythmic values such as eighth and sixteenth notes, as well as rests. Trills are indicated by the abbreviation 'tr' above certain notes in measures 138 and 150. The bass line provides a steady accompaniment with chords and single notes, while the treble line features more complex melodic patterns, including runs and trills.

Figura A.3: Fragmentos melódicos do Jogo de Dados de Mozart.
Fonte: Adaptado de Mozart (1793), transcrito por Uro (2017).
Nota: Parte 4/4.

APÊNDICE B – RECURSOS TECNOLÓGICOS EXTERNOS

Ao desenvolver com seus alunos a proposta de ensino disposta no Capítulo 8, além dos produtos educacionais mostrados no Capítulo 9 e dos materiais apresentados no Apêndice A, o professor pode fazer uso de outros recursos tecnológicos, como os exemplos abaixo:

- O Jogo de Dados de Mozart (Português)

Página: [〈https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1122〉](https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1122)

Vídeo: [〈https://youtu.be/Ubp0MzAhezM〉](https://youtu.be/Ubp0MzAhezM)

Esse *website* permite baixar o vídeo acima e um guia do professor, em formato PDF, para utilizar tal vídeo e o Jogo de Dados de Mozart em sala de aula.

Acesso: dezembro/2020.

- O Jogo de Dados de Mozart — *Musikalisches Würfelspiel* (Português)

Página: [〈http://reginaoliveiramusicista.blogspot.com/2018/06/o-jogo-de-dados-de-mozart-musikalisches.html〉](http://reginaoliveiramusicista.blogspot.com/2018/06/o-jogo-de-dados-de-mozart-musikalisches.html)

Acesso: dezembro/2020.

- *Musikalisches Würfelspiel* (Inglês)

Página: [〈https://dice.humdrum.org/〉](https://dice.humdrum.org/)

Neste *website* é possível montar a partitura do Jogo de Dados de Mozart e ouvi-la no navegador.

Para montar a partitura, clique nos números dos trechos melódicos.

Para ouvi-la, clique no *link* inferior-direito “*Listen to or print the score*”, aguarde carregar e então clique no botão tocar (▷) no canto superior-direito.

Note que ao ouvir, o programa toca os compassos mostrados em sequência, sem respeitar os símbolos de repetição.

Acesso: dezembro/2020.

- *W. A. Mozart’s Musical Dice Game* (Alemão e Inglês)

Página em alemão: [〈https://mozart.qvwx.de/〉](https://mozart.qvwx.de/)

Página em inglês: [〈https://mozart.qvwx.de/index.en.html〉](https://mozart.qvwx.de/index.en.html)

Neste *website* é possível baixar a partitura do minueto composto e o seu áudio.

Para montar a partitura clique em “*Roll!*” e em seguida em “*Compose!*”; então será possível baixar a partitura do minueto composto em formatos PDF ou PNG e baixar o áudio em formatos WAV e MIDI.

Acesso: dezembro/2020.

- *Marian Aldenhövel — Mozart* (Alemão)

Página: <https://marian-aldenhoevel.de/mozart/>

Este *website* aponta para o recurso supra-citado.

Acesso: dezembro/2020.

- *Mozart Dice Game Online* (Inglês)

Página: <http://www.playonlinedicegames.com/mozart>

Neste *website* é possível ouvir composições no navegador.

Clique nos números dos trechos melódicos para ouvi-los;

Para tocar uma música, clique em “*Play song...*”;

Para parar a música, clique em “*Stop song*”;

Para tocar indefinidamente, clique em “*Play loop*”; e

Para gerar uma nova música, clique em “*Generate another song*”.

Acesso: dezembro/2020.

- *Mozart Musical Dice Game* (Inglês)

Página: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.voody.mmdg>

Neste aplicativo para *smartphones* Android é possível sortear e ouvir composições.

Para sortear e ouvir, clique em “*ROLL THE DICE!*”.

Acesso: dezembro/2020.

- *Musikalisches Würfelspiel (Musical Dice Game)* (Inglês)

Página: <http://www.amarantypublishing.com/MozartDiceGame.htm>

Este *website* contém um programa para o sistema operacional Windows, o qual permite criar minuetos, além de tocar e exportar os arquivos MIDI.

Basta baixar o arquivo <http://www.amarantypublishing.com/mozart.zip>, extrair os arquivos compactados e executar *Mozart.exe*.

Acesso: dezembro/2020.

APÊNDICE C – PRODUÇÕES ACADÊMICAS

Este apêndice contém as produções acadêmicas relacionadas a esta pesquisa.

Nos dias 11 e 12 de outubro de 2019, na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba, ocorreu o evento II EPPROFMAT (II Encontro Paranaense do PROFMAT). Neste evento, o autor apresentou a comunicação oral intitulada “Ensino de Probabilidade com o Jogo de Dados de Mozart”. A Figura C.1 mostra uma porção dos *slides* utilizados nessa apresentação.

Artigos referentes aos trabalhos apresentados no II EPPROFMAT, foram publicados na Revista Transmutare, como um memorial do evento. A Figura C.2 contém o artigo publicado em tal memorial (BONI et al., 2019).

Além disso, esta pesquisa resultou na produção de dois artigos, os quais estão submetidos à publicação, aguardando o resultado da avaliação. Estes estão descritos a seguir.

O primeiro artigo divulga um resumo da proposta de ensino presente nesta dissertação de mestrado (BONI et al., 2021a).

O segundo artigo divulga um relato e discussão sobre a situação atual de ensino, com respeito à pandemia de COVID-19 (BONI et al., 2021b).

Ensino de Probabilidade com O Jogo de Dados de Mozart

Djones A. Boni
 Andrés E. C. Salazar
 Rodrigo M. D. Andrade
 PROFMAT – UTFPR Toledo
 12/Out/2019

O Jogo de Dados de Mozart

Minueto gerado pelo lançamento de “2-6-3-7-7-6-10-11-11-8-11-6-7-6-3-10”

2-6-3-7-7-6-10-11-11-8-11-6-7-6-3-10

Problemas probabilísticos relacionados ao jogo

Qual a chance do primeiro compasso ter número maior que 100?

Dados	Compassos		
	I	II	III
2	96	22	141
3	32	6	128
4	69	95	158
5	40	17	113
6	148	74	163
7	104	157	27
8	152	60	171
9	119	84	114
10	98	142	42
11	3	87	165
12	54	130	10

São 4 opções das 11:
148, 104, 152 e 119.

Probabilidade é $4/117$

Não! Cada um dos números tem uma probabilidade diferente!

Qual a chance do primeiro compasso ter número maior que 100?

Dados	Compassos		
	I	II	III
2	96	22	141
3	32	6	128
4	69	95	158
5	40	17	113
6	148	74	163
7	104	157	27
8	152	60	171
9	119	84	114
10	98	142	42
11	3	87	165
12	54	130	10

$P(x > 100) =$
 $P(x = 148) + P(x = 104) + P(x = 152) + P(x = 119) =$
 $5/36 + 6/36 + 5/36 + 4/36 =$
 $20/36 = 5/9 = 0,555...$

Distribuição de probabilidade do dado viciado

Distribuição de probabilidade dos dados viciados

Figura C.1: Comunicação oral apresentada no II EPPROFMAT: “Ensino de Probabilidade com o Jogo de Dados de Mozart”.
 Fonte: Autoria própria (2021).
 Nota: Apenas 6 dos 21 slides da apresentação são exibidos.

Ensino de probabilidade com o jogo de dados de Mozart

RESUMO

Neste trabalho é revisado um dos jogos musicais com dados mais comuns, o jogo de dados de Mozart. O jogo consiste em compor melodias por meio do lançamento de dois dados comuns. A partir deste jogo musical é possível desenvolver conceitos de probabilidade, podendo ser utilizado pelo professor como ferramenta de ensino e aprendizagem deste conteúdo. É descrito o funcionamento do jogo e, em seguida, é analisado um dos aspectos probabilísticos do jogo.

PALAVRAS-CHAVE: Probabilidade. Jogos musicais. Metodologia de ensino de probabilidade.

Djones A. Boni
 djboni@gmail.com
 UTFPR, Toledo, Paraná, Brasil

Andrés E. C. Salazar
 andressalazar@utfpr.edu.br
 UTFPR, Toledo, Paraná, Brasil

Rodrigo M. D. Andrade
 rodrigomandrade@utfpr.edu.br
 UTFPR, Toledo, Paraná, Brasil

INTRODUÇÃO

O ensino de probabilidade, e também de outros conteúdos, coloca frente ao professor o desafio de instigar nos alunos o desejo de aprender. Utiliza-se para esse fim brincadeiras e jogos. Neste trabalho revisamos o funcionamento do jogo de dados de Mozart e analisamos um dos aspectos probabilísticos do jogo.

O JOGO DE DADOS DE MOZART

O jogo de dados de Mozart consiste em lançar dois dados comuns para compor uma melodia de valsa (minueto) baseada na aleatoriedade do lançamento dos dados. Mozart compôs 16 grupos de 11 compassos, totalizando 176 compassos. A composição é realizada selecionando um compasso de cada um dos 16 grupos a partir do resultado da soma de dois dados (MOZART, 1793).

A Figura 1 mostra em suas colunas cada um dos 16 grupos de 11 compassos. Os números de 1 a 176 nas células expressam o número do compasso a ser extraído da partitura. Para compor uma melodia, lançamos um par de dados 16 vezes, selecionando o compasso correspondente à soma dos dois dados em cada uma das colunas. Então basta tocar os compassos na sequência.

Por exemplo, suponhamos que lancemos um par de dados comuns 16 vezes, obtendo as seguintes somas: 5, 7, 10, 8, 8, 4, 6, 6, 7, 6, 5, 9, 5 e 6. A melodia é então composta pela seguinte sequência de compassos: 40, 157, 42, 53, 99, 55, 36, 107, 25, 71, 64, 34, 67, 115, 52 e 93.

Figura C.2: Artigo publicado na Revista Transmutare: “Ensino de Probabilidade com o Jogo de Dados de Mozart”.

Fonte: Boni et al. (2019).

Nota: Parte 1/2. Continua na próxima página.

Figura 1 - Tabela de lançamentos dos dados do jogo de dados de Mozart. Colunas correspondem aos compassos e linhas à soma dos dados

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Fonte: García et al. (2013).

ENSINO DE PROBABILIDADE ATRAVÉS DO JOGO

Pergunta: Qual a probabilidade do primeiro compasso ter numeração maior que 100?

Resposta: O espaço amostral é formado pelos números da primeira coluna da tabela e o evento do qual queremos determinar a probabilidade é $E = \{104, 119, 148, 152\}$. Cada um dos elementos de E é mutuamente exclusivo, portanto podemos calcular $P(E) = P(104) + P(119) + P(148) + P(152)$. Temos as seguintes probabilidades: $P(104) = 1/6$; $P(119) = 4/36$; $P(148) = P(152) = 5/36$. Assim, a probabilidade do primeiro compasso ter numeração maior que 100 é $P(E) = 5/9$.

CONCLUSÃO

A partir do jogo de dados de Mozart o professor pode desenvolver com alunos diversos conceitos de probabilidade. Por exemplo: resultados equiprováveis para o lançamento de um dado; resultados não equiprováveis para a soma de dois dados; probabilidade condicional; eventos mutuamente exclusivos. Também é possível trabalhar conceitos simples de combinatória, podendo servir como introdução a este segundo conteúdo.

REFERÊNCIAS

GARCÍA, Y. R.; SALAMANCA, P. R.; MORA, D. C. **El juego de dados de Mozart: Un recurso didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad**. VII CIBEM, 2013.

MOZART, W. A. **Musikalisches Würfelspiel, K.516f**. Bonn: Editor N. Simrock, 1793.