

# ppgmat

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

LEANDRO CACIOLATO DE SOUZA  
Orientadora: ELAINE CRISTINA FERRUZZI

***HISTÓRIAS DAS MINHAS SALAS DE AULA***

**LEANDRO CACIOLATO DE SOUZA**

**HISTÓRIAS DAS MINHAS SALAS DE AULA**  
**STORIES FROM MY CLASSROOMS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elaine Cristina Ferruzzi

**LONDRINA**

**2021**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

01/03/2021



**Ministério da Educação**  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Câmpus Londrina



LEANDRO CACIOLATO DE SOUZA

## **A COMUNICAÇÃO EM INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 26 de Fevereiro de 2021

Prof.a Elaine Cristina Ferruzzi, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Adriana Helena Borssoi, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Jonei Cerqueira Barbosa, Doutorado - Universidade Federal da Bahia (Ufba)

Prof.a Karina Alessandra Pessoa Da Silva, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 26/02/2021.

## ***HISTÓRIAS DAS MINHAS SALAS DE AULA***

Olá colega, me chamo Leandro Caciolato de Souza, neste material gostaria de compartilhar com você algumas histórias das minhas salas de aula.

Inicialmente falando da minha trajetória educacional, estudei até a 4<sup>o</sup> série do Ensino Fundamental em uma escola particular, onde iniciou meu encanto pela educação. Nos anos finais do Ensino Fundamental, fiz meus estudos em uma escola pública, continuando ali minha admiração pelos professores, admirando o papel e comprometimento que tinham em educar.

Apesar das aulas totalmente tradicionais, prática esta que hoje consigo analisar, pois apresentavam características que abordavam a exposição do conteúdo, seguidas pela resolução de exercícios de repetição, findando com a correção no quadro de giz dos exercícios propostos.

O Ensino Médio, cursei no CEFET<sup>1</sup>, instituição que atualmente é a UTFPR<sup>2</sup>, fui da primeira turma do Ensino Médio regular daquela instituição, foi neste ambiente educacional que veio a verdadeira paixão pelo ensino, tive o contato com profissionais da Educação que me encantavam com suas aulas, em especial os das disciplinas de exatas.

Ali veio a certeza do que eu queria “ser quando crescer”. A decisão estava tomada, queria ser Professor. No Ensino Médio, tive também pouco contato com aulas diferenciadas, que podemos chamar como não tradicionais, mas eram poucas, algo experimental das disciplinas de Física e Química, nas quais me envolviam com afinco nessas práticas.

Fui para a universidade cursar, primeiramente, Licenciatura Plena em Matemática na UENP<sup>3</sup> de Cornélio Procópio, foram quatro anos de realização e mais certeza na minha profissão. Porém, como nas experiências anteriores, a maioria dos professores utilizavam tendências tradicionais em suas disciplinas. Alguns até faziam o uso de metodologias diferenciadas em suas aulas, porém, bem pouco, penso que reproduziam como foram ensinados.

---

<sup>1</sup> Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná.

<sup>2</sup> Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

<sup>3</sup> Universidade Estadual do Norte do Paraná

Ao concluir o curso de Matemática iniciei minha carreira docente no estado como PSS<sup>4</sup> e na escola particular, onde leciono até hoje. Herdando, para minhas aulas, tendências tradicionais, tendo em vista meu histórico acadêmico norteado por essa prática, mas isso me incomodava, queria aulas inovadoras, aulas atrativas em que os alunos se envolvessem com afinco e tivessem uma ação ativa em seu processo de aprendizagem.

Dando continuidade aos estudos, sempre amei e tinha interesse em aperfeiçoar e adquirir conhecimentos. Com esse encorajamento em acreditar em um aprendizado de qualidade e aplicável, fui para a pós-graduação, fiz três especializações, a primeira em Psicopedagogia, a segunda em Educação Profissional de Jovens e Adultos e a terceira em Educação Especial Inclusiva. Estas especializações, além de me despertarem para a pesquisa, me oportunizaram um olhar diferente para as práticas de sala de aula, tendo em vista o contato com professores que apresentaram possibilidades de algumas práticas diferenciadas das tradicionais.

Fui cursar Licenciatura em Física na UEL<sup>5</sup>, onde pude evidenciar que as práticas docentes tradicionais predominavam nas disciplinas. Os professores faziam uso em suas aulas exposição do conteúdo, seguido de exemplos de aplicação, e na sequência, resolvíamos listas de exercícios que seriam corrigidas, para então ser cobrados exercícios similares nas avaliações. Esta prática não era seguida pelos professores que lecionavam disciplinas de laboratório, vi ali um fator motivador e possibilidades de aulas inovadoras.

Após concluir o curso de Física, fiz Gastronomia que também é uma paixão e realização. Com esta graduação também ingressei na docência do curso Técnico em Cozinha.

Minha paixão pela Educação, em especial pelo ensino, é o alicerce para minha carreira. Leciono por amor e por acreditar que a Educação é a arma da transformação, comungando com as palavras de Paulo Freire: “Educação não transforma o mundo. Educação muda as pessoas. Pessoas transformam o mundo.”

---

<sup>4</sup> Processo Seletivo Simplificado – PSS. Destinado a selecionar profissionais para atender ao suprimento temporário de professores e funcionários das escolas na rede pública estadual de ensino.

<sup>5</sup> Universidade Estadual de Londrina.

Com o objetivo de aperfeiçoar e evoluir minha prática docente, fui em busca de programas de Mestrado que oportunizasse o conhecimento de Práticas Pedagógicas que pudessem ser inseridas em minhas aulas e também, contribuir com outros professores, em utilizar práticas diferentes da tradicional, em inovar a forma de ensinar Matemática.

Após várias consultas, encontrei no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT) a caracterização que vinha ao encontro do meu objetivo.

Essa caracterização pode ser evidenciada primeiramente pela área de concentração que é Ensino de Matemática, a qual busca contribuir para a formação de profissionais habilitados para atuar no ensino de Matemática, promovendo a compreensão, a discussão e a atualização dos diversos conhecimentos científicos e tecnológicos e suas implicações e articulações nos processos de ensino e de aprendizagem.

Outro ponto relevante que me chamou a atenção, foi o objetivo geral do programa, que é oportunizar aos professores atuantes nos diversos níveis de escolaridade e aos profissionais interessados no ensino de Matemática, capacitação em nível de mestrado, possibilitando que reflitam e repensem suas práticas docentes, reorientando-as de forma fundamentada nos aspectos que forem necessários, bem como que se desenvolvam enquanto pesquisadores na área.

Finalmente o perfil do profissional formado pelo programa, o qual, ao concluir tem ampliado seus conhecimentos e a aprendizagem de novas alternativas pedagógicas, baseadas em resultados de pesquisa, para aplicá-los em sala de aula, bem como o desenvolvimento da autonomia e da reflexão a respeito da própria prática, na busca de estratégias para resolução de problemas inerentes à profissão docente. Outro aspecto importante neste programa é a elaboração de um Produto Educacional.<sup>6</sup>

Este Produto Educacional tem objetivo de relatar algumas histórias das minhas salas de aula, como fator motivador e deixar algumas sugestões de

---

<sup>6</sup> Essas informações estão disponíveis no site do programa: <http://portal.utfpr.edu.br/cursos/coordenacoes/stricto-sensu/ppg-mat/sobre>

práticas de minhas salas de aula que foram inovadoras em minha docência após ingresso no mestrado.

Este produto também é oportuno para alcançar um dos meus objetivos da pesquisa de mestrado, que é auxiliar outros professores que ainda não tiveram a mesma oportunidade que eu tive de estudar, pesquisar e aperfeiçoar minha prática docente.

Assim, participei do processo seletivo para aluno regular e ingressei no Programa, ansioso por estudar, refletir e aperfeiçoar a minha prática docente e também contribuir com outros professores.

Ao ingressar no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, fui convidado pela minha orientadora a participar de um projeto de pesquisa que possui como objetivo central o estudo do Ensino por Investigação em Matemática e das discussões e estudos no Grupo de Estudos e Pesquisa em Modelagem, Investigação e Tecnologias –GEPMIT – da UTFPR-LD.

Com os estudos realizados no âmbito do GEPMIT, do projeto e de disciplinas do programa, compreendi a necessidade de diversificar minhas aulas, tendo em vista que, em sua maioria (para não dizer todas), os conceitos eram trabalhados de forma expositiva, com a tríade explicação-exercícios-avaliação, fator este que me incomodava.

Essa metodologia, conhecida como *tradicional*<sup>7</sup>, é chamada por Paulo Freire (1996) de Educação Bancária, e caracteriza-se pela transmissão de informações por parte dos professores e por repetições mecânicas por parte dos alunos. Entretanto, como inúmeras pesquisas afirmam, ao resolver exercícios de forma mecânica, os alunos desenvolvem uma “atividade de adestramento” (RAMOS et al., 2002, p. 4), pois “a mera resolução de exercícios é uma atividade muito mais limitante para o aluno do que qualquer tipo de investigação” (ALRO e SKOVSMOSE, 2006, p. 52), eu não queria que minhas aulas tivessem, em sua totalidade, essa característica.

De acordo com Alro e Skovsmose (2006) aulas tradicionais são caracterizadas pelo ‘paradigma do exercício’, ou seja, a repetição de uma série

---

<sup>7</sup>O termo ‘aulas tradicionais’ é entendido como caracterizado por Alro e Skovsmose (2006): “ambiente escolar em que os livros-texto ocupam papel central, onde o professor atua trazendo novos conteúdos, onde aos alunos cabe resolver exercícios e onde o ato de corrigir e encontrar erros caracteriza a estrutura geral da aula” (p. 16).

de exercícios, os quais geralmente são oriundos de livros textos e por padrões de interações do tipo triádicas I-R-A (Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação ou Feedback do professor). Minha constatação, após leituras, estudo e discussões: minhas aulas estavam bem enquadradas neste modelo.

Assim, me propus a estudar com afinco diferentes Práticas Pedagógicas, entendendo-as como aquelas que envolvem “um assunto ou conteúdo, uma metodologia de ensino, materiais, alguma perspectiva teórica que norteia o desenvolvimento da prática e, claro, o professor e os alunos” (ARAÚJO, 2019, p. 24). Estes estudos me conduziram a mudanças significativas em minha sala de aula, sendo um marco histórico na minha vida de professor.

A seguir farei descrições de algumas “**histórias das minhas salas de aula**”, histórias essas de minhas experiências de inserção nas minhas aulas de Práticas Pedagógicas não tradicionais.

## **CHURRASCO DO 9º ANO**

Uma das minhas primeiras disciplinas a ser cursada no Mestrado, foi Modelagem Matemática na Perspectiva do Ensino, como proposta da professora, foi solicitado que desenvolvesse uma atividade em sala de aula com seus alunos, encaminhando-a por meio da Modelagem Matemática como Prática Pedagógica.

Foi minha primeira experiência como uma Prática Pedagógica não tradicional, em minhas aulas, tornando-se o marco histórico para a inovação da minha prática em sala de aula, tive uma sensação prazerosa e ainda mais certa em estar no “lugar certo”, o mestrado que faria a diferença na minha profissão professor.

Com esta primeira atividade de cunho não tradicional em minhas aulas, pude verificar que Práticas Pedagógicas diferenciadas, são possíveis nas aulas de Matemática, pois ao apresentar significado para o aluno, possibilita uma construção de conhecimentos por meio das reflexões em situações do seu cotidiano, aguçando o interesse dos educandos nos conceitos matemáticos e suas aplicações na resolução de situações problemas reais.



Como primeira atividade, pude ter certeza ser o marco histórico para uma constante mudança e evolução das minhas aulas, afinal contribuiu para a minha reflexão, interessando-me em sempre estar aberto e implementar práticas não tradicionais em minhas turmas.

## **INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA, TANGRAM E ÁREA DE FIGURAS PLANAS**

O desenvolvimento desta atividade ocorreu após minha primeira experiência com uma prática não tradicional em minhas aulas, como já mencionada anteriormente. Motivado em continuar inovando de forma positiva minha prática docente, incluindo práticas não tradicionais, juntamente com o apoio da minha orientadora, elaboramos uma atividade relacionando a Investigação Matemática, Tangram e área das figuras planas.

Estava acostumado a sempre utilizar o Tangram, no entanto entregava aos alunos a impressão do quebra cabeça, o qual eles tinham que colorir, recortar e montar figuras utilizando as peças, tornando essa uma atividade mais lúdica, sem muita possibilidade de construção de conhecimentos matemáticos por parte do aluno, a não ser identificar formas geométricas.

O mestrado me fez abrir os olhos a possibilidades de implementações em sala de aula, fazendo com que despertasse um certo incomodo com essa aula que realizava nos anos anteriores. Fazendo estudos mais profundo de potencialidades e características que a Investigação Matemática, prática que fez parte da minha pesquisa de mestrado, percebi a oportunidade de utilizar a Investigação Matemática associada ao Tangram, de forma com que o meu aluno se envolvesse e pudesse ser o ator principal na construção do conhecimento, assim debrucei-me em elaborar uma atividade que viesse ao encontro dessa potencialidade.

Tinha duas turmas de 6° anos, resolvi então elaborar uma atividade que pudesse ser implementada nessa série, mais um desafio a ser vencido, como fazer isso de forma positiva e com potencialidade.

Elaborei então, com apoio da minha orientadora, uma atividade investigativa, que partisse de uma folha de papel A4, para chegar as sete peças do Tangram identificando relações entre elas.

O primeiro passo foi elaborar o roteiro para me nortear (professor da turma) no desenvolvimento desta aula com cunho investigativa, mais uma vez saindo da minha zona de conforto e entrando numa zona de risco, que para isso eu tive que ser o primeiro a “aceitar o convite” em migrar para uma prática não tradicional, que desta vez voltada para a Investigação Matemática.

Objetivei nesta atividade uma exploração dos conceitos de área das figuras planas, por meio da manipulação das peças do Tangram.

Foi uma atividade investigativa que classificamos como estruturada, optamos por esse tipo de atividade ser a mais recomendada, por se tratar da primeira experiência tanto do professor quanto dos alunos, a qual seria direcionado os problemas a serem investigados, o professor ia conduzindo, de forma oral o processo investigativo a ser desenvolvido pelos alunos, essa condução foi direcionada pelo roteiro elaborado previamente, conforme Figura 1.

**Figura 1: Roteiro elaborado para o desenvolvimento da atividade**

1. Entregar uma folha de papel A4 para cada aluno e pedir para, utilizando dobradura nessa folha corte um quadrado com a maior área possível, medir seus lados com a régua e registrar no papel como etapa.
2. Com o quadrado recortado, pedir para determinar a área desse quadrado, em  $\text{cm}^2$ , registrar a medida da sua área como etapa.
3. Dividir o quadrado em dois triângulos de áreas iguais, recortar perguntar por que os triângulos tem a mesma área, medir suas dimensões (lados e altura) com a régua, classificar o triângulo de acordo com as medidas dos lados e as medidas dos ângulos internos e determinar a área de cada triângulo, registrar os dados como etapa.
4. Dividir um dos triângulos em dois triângulos com áreas iguais, perguntar por que eles têm a mesma área, medir suas dimensões (lados e altura) com a régua, classificar os triângulos de acordo com as medidas dos lados e dos ângulos internos e determinar a área de cada triângulo, registrar como etapa.
5. Reservar os dois triângulos obtidos e nomeá-los como 1 e 2. O outro triângulo marcar o ponto médio do maior lado dele como dobradura, registrar a distância do ponto médio a cada vértice como etapa.
6. Dobrar o vértice oposto até o ponto marcado, dobrar, recortar as duas figuras e classificar, registrar a classificação como etapa.
7. Medir as dimensões do triângulo classifica-lo de acordo com as medidas dos lados e dos ângulos internos, calcular sua área, nomeá-lo com figura 3, reservar e registrar as dimensões, as classificações e a área como etapa.
8. Classificar a outra figura, medir suas dimensões (base maior, base menor, altura e os outros dois lados não paralelos), calcular a área do trapézio e registrar as informações como etapa.
9. Dividir o trapézio em dois trapézios de mesma área que contenham dois ângulos de  $90^\circ$ , medir suas dimensões, calcular suas áreas e registrar como etapa
10. Dividir um dos trapézios em duas figuras de forma que uma delas tenha o dobro da área da outra.
11. Recortar as figuras, perguntar como chegou a conclusão que um o dobro da área do outro, classificar suas formas e registrar como etapa 12.
12. Medir as dimensões do triângulo, classifica-lo de acordo com os lados e os ângulos internos, calcular sua área, nomeá-lo como figura 4 e registrar as informações como etapa 13.
13. Medir as dimensões do quadrado, calcular sua área, nomeá-lo como figura 5 e registrar as informações como etapa 14.
14. Pegar o trapézio que estava reservado, pedir para formar duas figuras, um triângulo que sejam um triângulo e um paralelogramo de forma que o paralelogramo tenha o dobro da área do triângulo, recortar as figuras.
15. Medir os lados e a altura do triângulo, classifica-lo de acordo com as medidas dos lados e dos ângulos, calcular sua área, nomeá-lo como figura 6 e registrar as informações com etapa 16, reservar a figura.
16. Medir os lados e a altura do paralelogramo, calcular sua área, nomeá-lo como figura 7 registrar suas informações como etapa 17.
17. Pedir para os alunos, juntando todas as peças formem o quadrado inicial.
18. Em grupo separar as figuras iguais de acordo com sua nomeação.
19. Perguntar quantas vezes a figura 1 cabe na 2? Registrar como etapa 19.
20. Perguntar quantas vezes a figura 4 cabe na 6? Registrar como etapa 20.
21. Perguntar quantas vezes a figura 6 cabe na 5? Registrar como etapa 21.
22. Perguntar quantas vezes a figura 4 cabe na 3? Registrar como etapa 22.
23. Perguntar quantas vezes a figura 4 cabe na 1? Registrar como etapa 23.
24. Perguntar quantas vezes a figura 4 cabe na 7? Registrar como etapa 24.
25. Perguntar quais figuras são necessárias para formar exatamente a figura 2, registrar como etapa 24.
26. Pedir para que cada aluno pegue um jogo de peças (do 1 ao 7).
27. Mostrar algumas figuras e pedir para que utilizando todas as peças forme cada figura mostrada.
28. Entregar uma folha de papel sulfite branca para cada aluno, para que forme uma figura utilizando todas as peças, colando-as.
29. Montar um painel com as figuras formadas por cada aluno e perguntar qual delas tem a maior área.

**Fonte:** professor

Na elaboração deste roteiro, foi levado em consideração os conceitos matemáticos que gostaria de ser investigado.

A aplicação foi realizada em duas aulas geminadas, onde optei em deixar os alunos trabalhando individualmente, mas tinham a liberdade de colaborarem mutualmente, discutindo conceitos, encaminhamentos, formas de execução e resultados.

Enfatizei aos alunos no início da atividade, que seria uma “aula diferente”, isso causou aceitação e empolgação dos alunos, e que para o bom andamento a participação, envolvimento e atenção de cada um era muito importante para serem os investigadores.

Após a explanação do objetivo e encaminhamentos, distribuí uma folha de papel A4 colorida para cada aluno, com sete cores diferentes, solicitando que a observassem e não executassem nenhuma atividade até serem instruídos.

Dando início à atividade, perguntamos aos alunos qual era o formato da folha que receberam. Rapidamente a maioria respondeu “retângulo”, entretanto alguns alunos disseram que era um quadrado. Tendo observado o erro de alguns, questionamos quais as razões que os levaram a considerar que era um quadrado, auxiliando-os assim na identificação das características de um quadrado e um retângulo.

Indagados sobre o que seria a área dessa folha, rapidamente responderam “*é toda a parte marrom, laranja, amarela, vermelho, lilás, rosa, azul, verde, preto*”, ou seja, cada um respondeu a respectiva cor de seu papel, sendo que alguns utilizaram a palavra “*superfície*” acompanhada da cor de seu papel – “*é a superfície azul*”, denotando assim, o conhecimento sobre área e superfície.

Na sequência solicitei aos alunos que, utilizando dobradura e tesoura para recortar o que fosse necessário, fizessem um quadrado com a maior área possível. Após muita discussão, dobras, medições, conjecturas, perceberam que a melhor forma possível seria sobrepor o lado menor da folha A4 sobre o lado maior, cortando o excesso de papel que não foi sobreposto, obtendo assim um quadrado, conforme pode ser identificado nas Figuras 3 e 4.

**Figura 3:** Dobradura para construção do quadrado de maior área



Fonte: Professor

**Figura 4:** Quadrado recortado e identificado sua diagonal por dobradura



Fonte: Professor

Dando prosseguimento à atividade, solicitamos aos alunos que efetuassem as seguintes ações:

- 1- Dividir o quadrado em dois triângulos de áreas iguais justificando o motivo de terem as mesmas áreas;
- 2- Dividir um dos triângulos em dois menores com áreas iguais, justificando;
- 3- Nomear estes triângulos em peça 1 e peça 2 e reserva-los para utilizar mais tarde;
- 4- Dividir o triângulo restante (obtido em 1) em um trapézio e um triângulo menor, de forma que a área do trapézio seja o triplo da área do triângulo. Marcar este novo triângulo como peça 3.
- 5- Dividir o trapézio em dois menores de mesma área, de forma que tenham dois ângulos de  $90^\circ$ ;
- 6- Dividir um dos trapézios em duas figuras de forma que uma delas tenha o dobro da área da outra. Identificar estas figuras como peça 4 (triângulo) e peça 5 (quadrado);
- 7- Dividir o outro trapézio em um triângulo e um paralelogramo de forma que o paralelogramo tenha o dobro da área do triângulo. Nomear o triângulo como peça 6 e o paralelogramo como peça 7.

O resultado destas ações está apresentado nas figuras 5 à 13.

**Figura 5.** Formação dos dois triângulos de mesma área a partir da diagonal do quadrado



Fonte: professor

**Figura 6.** Triângulos 1 e 2 construídos e identificados



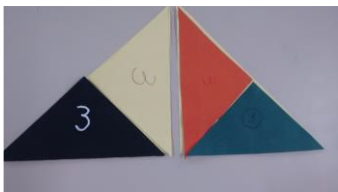
Fonte: professor

**Figura 7.** Triângulo dividido em um trapézio e triângulo menor.



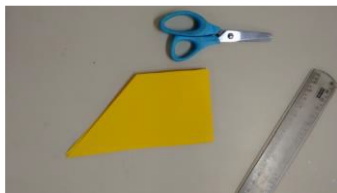
Fonte: professor

**Figura 8.** Sobreposição das figuras para relacionar suas áreas.



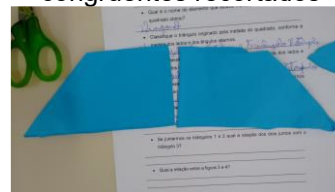
Fonte: professor

**Figura 9.** Dobradura para marcar a altura do trapézio e dividi-lo em dois com mesma área.



Fonte: professor

**Figura 10.** Trapézios congruentes recortados



Fonte: professor

**Figura 11.** Dobradura para formar o triângulo com metade da área do paralelogramo.



Fonte: professor

**Figura 12.** Dobradura do trapézio para formar um quadrado e um triângulo, tendo o quadrado o dobro da área do triângulo.



Fonte: professor

**Figura 13.** Paralelogramo e triângulo recortados após a dobradura.



Fonte: professor

Nesta primeira etapa, além da construção e identificação das figuras, aproveitei para trabalhar com os alunos diversos conceitos de geometria, como por exemplo, a classificação dos triângulos em relação aos seus lados e em relação aos seus ângulos, identificação da diagonal do quadrado, figuras congruentes, ponto médio e altura das formas geométricas, todos estes conceitos puderam ser identificados pelos alunos, no desenvolvimento investigativo, eles puderem agir como matemáticos.

A ação 4 (dividir um triângulo em um trapézio e um triângulo menor de forma que a área do trapézio fosse o triplo da área do triângulo) foi mais difícil de ser executada por parte dos alunos, necessitando de raciocínio e investigação mais demorada, um discutindo com o outro a fim de chegarem a execução, até que conseguiram chegar na resolução do comando. O mesmo ocorreu com a ação 7, onde os alunos demoraram mais tempo para encontrar a solução.

Tendo estas figuras geométricas em mãos e todas nomeadas, iniciei uma outra etapa de investigação, momento de exploração da relação entre as figuras. Nesta fase, os alunos também não possuem respostas prontas às questões e devem buscar conhecimentos anteriores, questionar, elaborar hipóteses e testá-las. Assim, solicitei que os alunos comparassem as figuras e respondessem:

- 1- Qual é a relação entre a área da peça 3 e da peça 2?
- 2- Juntando as peças 1 e 2, qual é a relação desta figura com a peça 3?
- 3- Qual a relação entre a peça 3 e 4?
- 4- Qual a relação entre a peça 5 e a peça 3?
- 5- Qual a relação entre a peça 5 e a peça 1?
- 6- Qual a relação entre a figura 6 e 4?
- 7- Qual a relação entre a figura 7 e a figura 5?
- 8- Qual a relação entre as figuras 1 e 7?

Para responder estas questões os alunos se uniram, discutiram, colocaram uma figura sobre a outra e, com ajuda mútua, concluíram que:

- 1) *“cabem 2 triângulos da peça 3 no triângulo 2”, “a área do triângulo 2 é o dobro da área do triângulo 3”, “isso significa ainda que o triângulo 3 tem a metade da superfície da figura 2”,*
- 2) *“como os triângulos 1 e 2 são iguais, será o dobro”, “como no triângulo 2 cabem 2 triângulos 3, no triângulo 1 cabe 2 triângulos 3, assim juntando os triângulos 1 e 2 serão necessários 4 triângulos 3 para completar”.*
- 3) *“triângulo 3 é o dobro da 4”*
- 4) *“possuem a mesma área”*
- 5) *“a peça 1 tem o dobro da peça 5”.*
- 6) *“possuem a mesma área”*
- 7) *“possuem a mesma área”*
- 8) *“a figura 1 tem o dobro da área da 7”*

As figuras 14 e 15 apresentam algumas figuras sobrepostas que auxiliaram os alunos na investigação.

**Figura 14.** Sobreposição de figuras para comparar as áreas



Fonte: professor

**Figura 15.** Sobreposição de figuras para relacionar as áreas.



Fonte: professor

Prosseguindo a investigação, solicitei aos alunos que trocassem peças entre si de forma que cada uma tivesse as sete peças de cores diferentes. De posse das sete peças diferentes solicitei aos alunos que montassem qualquer figura sobre uma folha de papel sulfite branca, colassem, apresentassem para a turma o que haviam montado e colassem no quadro para a análise final. O resultado está apresentado nas figuras 16 à 20.

**Figura 16.** Vela montada com as sete peças do Tangram.



Fonte: professor

**Figura 17.** Menino correndo montado com as sete peças do Tangram.



Fonte: professor

**Figura 18.** Canguru montado com as sete peças do Tangram.



Fonte: professor

**Figura 19.** Casinha montada com as sete peças do Tangram.



Fonte: professor

**Figura 20.** Peixe montado com as sete peças do Tangram.



Fonte: professor

Para concluir questioneei: qual das figuras montadas tem a maior e a menor área? Esta questão conduziu a turma a uma discussão e investigação profunda e produtiva entre os alunos, até que chegaram à conclusão que todas as figuras tinham a mesma área, pois no início todas partiram do mesmo quadrado, e todas são formadas pelas 7 figuras geométricas iguais, concluíram assim que todas as figuras são congruentes.

Esta minha primeira experiência com a Investigação Matemática, pode me motivar e proporcionar uma prática não tradicional, que teve o envolvimento ativo e interação dos alunos.

Pude observar também que o processo de elaboração da atividade deve ser cuidadoso, para que o seu desenvolvimento seja investigativo. Estava acostumado em agir com professor transmissor de conhecimentos, esta atividade me fez assumir o papel de orientador e motivador, deixando os alunos agirem ativamente, questionando quando necessário, não demonstrando respostas e procedimentos acabados, mas direcionando e indagando os alunos para que assumam o papel principal como sujeito do processo de construção do conhecimento.

Foi uma experiência muito gratificante que possibilitou subir mais um degrau na transformação da minha ação docente com Práticas Pedagógicas não tradicionais.

## **OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS**

Compreendendo e aceitando que a Prática Pedagógica de um professor de matemática não deve ser apenas tradicional, com aulas expositivas, tendo esta compreensão e aceite despertada após as experiências que tive em minhas salas de aula, fiquei motivado em utilizar encaminhamentos não tradicionais em minhas aulas, em sua maioria a Investigação Matemática, devido ser minha área de pesquisa.

Após trabalhar o conteúdo de conjuntos numéricos, nas minhas três turmas do 8º ano, elaborei uma atividade investigativa que envolvia operações com números naturais.



Esta atividade foi também classificada como estruturada<sup>8</sup>, principalmente pelo motivo de ser a primeira experiência dos alunos que este tipo de abordagem nas aulas de Matemática, envolvendo Investigação Matemática.

Como ocorreu nas experiências anteriores, deu aquele “friozinho na barriga”, pois seria uma nova prática a ser introduzida em minhas aulas, não sabendo a reação e o aceite dos alunos, mas fui em frente.

Elaborei uma atividade que abordava a investigação das quatro operações com números naturais, na forma de onze questionamentos escritos aos alunos, conforme quadro 1. É importante ressaltar que, a primeira atividade elaborada e desenvolvida com os alunos, apresentaram dezesseis questões, as quais foram reestruturadas para essas onze, devido a duplicidade e um questionamento muito amplo que ocorreu na pergunta “E se realizarmos essas operações com três ou mais números, o que acontece?”, essa questão o tempo não seria oportuno para investigar.

**Quadro 1:** Questionamentos entregues aos alunos para investigarem

- |     |   |
|-----|---|
| 1.  | Investiguem o que ocorre ao somar dois números naturais.                  |
| 2.  | Investiguem o que ocorre ao subtrair dois números naturais.               |
| 3.  | E quanto a multiplicação e divisão de dois números naturais, investiguem. |
| 4.  | O que você observa ao somar dois números naturais ímpares?                |
| 5.  | O que você observa ao somar dois números naturais pares?                  |
| 6.  | O que você observa ao subtrair dois números naturais ímpares?             |
| 7.  | O que você observa ao subtrair dois números naturais pares?               |
| 8.  | O que você observa ao multiplicar dois números naturais ímpares?          |
| 9.  | O que você observa ao multiplicar dois números naturais pares?            |
| 10. | O que você observa ao dividir dois números naturais ímpares?              |
| 11. | O que você observa ao dividir dois números naturais pares?                |

**Fonte:** professor

Para o desenvolvimento desta atividade, foi organizado grupos, de no máximo 5 alunos. Os grupos tiveram o tempo de duas aulas geminadas (100 minutos) para desenvolverem.

Foi muito interessante o encaminhamento da aula, num primeiro momento os alunos, tiveram um pouco de receio, e fizeram vários questionamentos do tipo, “*mas professor, como que faz?*”, “*você não vai explicar?*”, “*vamos fazer*”

---

<sup>8</sup> O aporte teórico encontra-se descrito na dissertação “A comunicação em Investigação Matemática”

sozinhos?”, esses questionamentos já eram esperados, visto ser o primeiro contato dos alunos com atividades deste tipo.

Logo se familiarizaram e fluiu de forma positiva, testaram conjecturas, analisaram, discutiram, argumentaram um para com o outro, até que chegaram a conclusões das quatro operações com números naturais.

Os alunos concluíram que:

A soma de dois números naturais, resulta em um número natural.

A subtração de dois números naturais, resulta em um número inteiro.

A multiplicação de dois números naturais, resulta em um número natural.

A divisão entre dois números naturais, resulta em um número racional.

A soma de dois números naturais ímpares, resulta em um número natural par.

A soma de dois números naturais pares, resulta em um número natural par.

A diferença entre dois números naturais ímpares, resulta em um número inteiro par.

A diferença entre dois números naturais pares, resulta em um número inteiro par.

O produto entre dois números naturais ímpares, resulta em um número natural ímpar.

O produto entre dois números naturais pares, resulta em um número natural par.

O quociente entre dois números naturais ímpares, resulta em um número racional.

O quociente entre dois números naturais pares, resulta em um número racional.

Esta aula norteada pela Investigação Matemática, envolvendo operações com números naturais, saiu daquela aula tradicional, em que era passado aos alunos o conceito e eles tinham que memorizar a informação. Com esta prática os alunos puderem, por meio de testes e conjecturas, chegar à conclusão destes conceitos matemáticos.


Envolveram-se com afinco na aula, com motivação e discussões produtivas entre eles, onde a interação e a liberdade de terem suas opiniões

aceitas e testadas, proporcionou uma interação e participação ativa no processo de construção do conhecimento, característica essa vista como principal na Investigação Matemática.

Esta atividade me norteou em elaborar outra atividade que nomeie como “investigue as tabelas”, conforme demonstrada no quadro 2.

Ela enquadra-se em uma atividade aberta, que de acordo com Concentino (2019) não apresentam nenhum direcionamento para os alunos, eles são os responsáveis por todo o processo. Agem ativamente no desenvolvimento da investigação, formulando questões, tomando encaminhamentos distintos, de acordo com o(s) problema(s) que propõe(m) investigar, podendo chegar a soluções diferentes uns dos outros. Essas atividades geralmente são do tipo que os alunos não estão habituados, pois permite que cheguem em soluções diferentes, dependendo do direcionamento que levam.

**Quadro 2:** Atividade “Investigue as tabelas”



Olá, querido e querida aluno e aluna!!!

Hoje você vai assumir o papel de um matemático. Usando seus pensamentos, seu raciocínio, suas observações e seus encaminhamentos para **INVESTIGAR AS TABELAS ABAIXO.**

**INVESTIGUE, TESTE, OBSERVE, ESCREVA E CONCLUA O QUE VOCÊ OBSERVA NAS TABELAS ABAIXO**

*Elaborada por: CACIOLATO DE SOUZA, L.;*

<b>TABELA 01</b>	<b>TABELA 02</b>	<b>TABELA 03</b>
<b>0 + 2 = 0</b>	<b>1 + 3 = 4</b>	<b>0 + 1 = 1</b>
<b>2 + 2 = 4</b>	<b>3 + 3 = 6</b>	<b>1 + 2 = 3</b>
<b>2 + 4 = 6</b>	<b>3 + 5 = 8</b>	<b>2 + 3 = 5</b>
<b>4 + 4 = 8</b>	<b>5 + 5 = 10</b>	<b>3 + 4 = 7</b>
<b>4 + 6 = 10</b>	<b>5 + 7 = 12</b>	<b>4 + 5 = 9</b>
<b>6 + 6 = 12</b>	<b>7 + 7 = 14</b>	<b>5 + 6 = 11</b>
.	.	.
.	.	.
.	.	.
<b>102 + 104 = 206</b>	<b>101 + 103 = 204</b>	<b>101 + 102 = 203</b>

Fonte: professor

Esta atividade permite vários encaminhamentos e questionamentos por parte dos alunos.

Outros professores de Matemática, meus colegas de trabalho, de diferentes níveis de ensino, motivados com os relatos, meu e de alunos, pediram para desenvolver em suas turmas. Assim ofereci um momento para discutirmos e relatar minhas experiências com práticas não tradicionais em minhas aulas.

## **A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA DO MEIO FIO**

Esta experiência foi desenvolvida com turmas de 4º anos do Ensino Fundamental, turmas esta que pertencem a mesma escola particular onde realizei minhas experiências já relatadas. A professora das turmas, motivada por ter visto a empolgação dos alunos e meu relato positivo na sala dos professores, como minhas aplicações de práticas não tradicionais em minhas aulas de matemática, demonstrou interesse em utilizar práticas não tradicionais em suas aulas. Marcamos um momento de conversas e discussões para então abordarmos juntos o que são práticas não tradicionais e as possibilidades de inserir nas aulas de matemática.

Fizemos uma breve discussão sobre algumas práticas que caracterizo como não tradicionais, especificando as que se enquadram no Ensino por Investigação, as quais citei a professora Investigação Matemática, Modelagem Matemática e Resolução de Problemas.

Questionei então a professora sobre seu conhecimento em Investigação Matemática e sobre seu uso em sala de aula. Ela não tinha nenhum conhecimento sobre esta prática. Resolvemos então, em um novo momento, fazer um breve estudo abordando as principais características, o papel do professor e a elaboração de uma atividade com cunho investigativo.

Após este breve estudo, definimos que o conceito matemático a ser abordado seria Geometria Plana, mais especificamente unidades de medida e perímetro.

Elaboramos então a atividade intitulada Investigação Matemática do meio fio, conforme Quadro 3.

**Quadro 3:** Atividade entregue aos alunos**Terminal Turístico Cristo Rei****Figura 1:** Praça do Monumento Cristo Rei em Cornélio Procópio - PR

**Fonte:**

[https://www.google.com.br/search?q=CRISTO+CORNELIO&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjXgo2PhbPeAhWLkZAKHextAs4Q\\_AUIDigB&biw=1366&bih=657#imgrc=CKmVygq1cizk-M](https://www.google.com.br/search?q=CRISTO+CORNELIO&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjXgo2PhbPeAhWLkZAKHextAs4Q_AUIDigB&biw=1366&bih=657#imgrc=CKmVygq1cizk-M)

É o cartão de visitas da cidade. Com uma excepcional vista panorâmica da região, abriga a maior **ESTÁTUA SACRA DE BRONZE DA AMÉRICA LATINA**.

A construção do Monumento iniciou-se em 1957 e terminou em 1958, na Gestão do Prefeito Dr. Reinaldo Carazzai, sendo escultor o Sr. Arlindo Castelani de Carli (SP). O Monumento "Cristo Rei" possui altura total de 23,80m, sendo:

<p><b>Imagem:</b>            Altura: 8,90m            Envergadura: 8,00m            Cabeça: 1,32m            Braço: 2,95m            Mão: 1,10m            Peso: 3.000Kg</p>	<p><b>Pedestal:</b>            Altura: 14,90m            Grade protetora: 0,75m            Largura Superior: 5,85m            Largura Inferior: 7,69m            Altura escada base: 1,30m</p>
--	--

Localiza-se no centro de uma praça para pedestres, equipada com jardins, bancos, iluminação, parque infantil, lanchonetes, pista de skate e via para veículos com estacionamentos.

Localização: Alto da Av. XV de Novembro - Centro da cidade

**Fonte:**

[http://www.cornelioprocopio.pr.gov.br/portal/index.php?option=com\\_content&view=article&id=170&Itemid=108](http://www.cornelioprocopio.pr.gov.br/portal/index.php?option=com_content&view=article&id=170&Itemid=108).

**A praça onde se localiza o monumento Cristo Rei tem em seu contorno meio fio que necessita de remodelamento. Investigue qual a dimensão que deve ser realizada essa renovação?**

**Fonte:** professor

Como a professora tinha pouco conhecimento sobre esta prática e ainda não tinha desenvolvido com seus alunos, sugeri que desenvolvêssemos juntos, com o intuito de que ela vivenciasse as potencialidades desta Prática Pedagógica.

A professora aceitou o convite, mesmo não conhecendo profundamente a prática proposta, pois como bem salienta “apesar de não conhecer muito bem sobre o assunto... eu sabia que seria algo muito bom para as crianças e para mim também”<sup>9</sup>. Assim, conversamos com a direção da escola, com os pais dos alunos e, tendo suas autorizações, agendamos o dia para o desenvolvimento da atividade.

Ao iniciar nossa aula, como provocação aos alunos fizemos o seguinte questionamento: *Vocês conseguiriam determinar a medida do meio fio do Cristo?*

O “Cristo” como comumente é chamado, é o Monumento Cristo Rei, ponto turístico de Cornélio Procópio - Pr, e por este motivo muito familiar a todos os alunos.

Percebo que este desafio se configurou uma provocação aos alunos e, assim como a professora aceitou o convite, seus alunos também aceitaram e demonstraram empolgação: “as crianças ficaram muito eufóricas, eles gostam... tem sede desta aprendizagem” (fala de P).

Diante do desafio e da resposta afirmativa dos alunos, iniciou-se o processo de investigação. Continuamos a provocação: *Como podemos obter esta medida?* Observamos neste questionamento que não foi explicitado aos alunos como deveriam proceder. Muito pelo contrário. Deixou-se nas mãos deles traçar estratégias de soluções e “eles mesmos foram falando... dizendo que era o perímetro... observando que poderiam colocar em prática o que aprenderam em sala. Mas como faríamos isso? Eles não sabiam... até chegarmos lá e descobrir... as crianças mesmo foram tendo ideias” (fala de P.).

Com o problema definido, entregamos aos alunos um folheto com algumas informações sobre o local, como forma de expandir o conhecimento a respeito do objeto, conforme já demonstrado no quadro 3. Na sequência, dirigimos à praça Cristo Rei. Com os alunos divididos em grupos reforcei aos alunos que eles deveriam decidir como proceder.

Os alunos estavam de posse de um caderno para anotações, lápis, borracha e caneta, a partir deste momento assumiram o papel principal no

---

<sup>9</sup> Neste texto utilizaremos algumas palavras da professora, gravadas em um depoimento. A gravação encontra-se em posse do pesquisador e da professora. Em suas falas representaremos a professora por P.

processo de investigação, utilizando diversas estratégias para solucionar o problema: mediram a dimensão do contorno, em partes ou no total, com passos, palmos e pés (Figuras 21, 22 e 23), registrando as informações para posteriormente analisarem os dados.

**Figura 21:** Alunos investigando



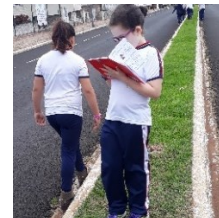
Fonte: professor

**Figura 22:** Alunos investigando



Fonte: professor

**Figura 23:** Alunos investigando



Fonte: professor

Deste modo, cada grupo optou por realizar a atividade de uma maneira. Um grupo optou por medir com passos todo o contorno, alegando que, por ser uma dimensão grande, essa estratégia seria a mais viável. Outros grupos optaram por medir com os pés, pois daria um resultado mais próximo do real. Enquanto outro grupo optou por utilizar palmos para o contorno, por ser uma medida pequena, e passos para o restante da medição por ser uma dimensão maior.

Observei que cada grupo teve uma estratégia de resolução, realizando registros para a execução que resultariam em modelos matemáticos diferentes, no entanto com conclusões próximas umas das outras.

No próprio “Cenário de Investigação” que para esta atividade entendo ser a praça do Cristo, local onde foi realizado processo de investigação, se enquadrando no ambiente de aprendizagem denominado por Skovsmose (2000) “Cenário para Investigação de Referência à realidade”. Este cenário é considerado por nós como sendo um ambiente real da sociedade, onde o aluno pode estar presente para realizar o processo de Investigação, utilizando para isso conhecimentos prévios ou desenvolvendo estratégias que oportunizem a construção do conhecimento e a aplicabilidade da Matemática na sua realidade.

Os alunos, após investigarem a situação com suas estratégias, reuniram os dados coletados e foram investigando e criando modelos matemáticos para chegarem à conclusão.

Durante todo o desenvolvimento, eu juntamente com a professora da turma motivei os alunos, norteando os alunos por meios de indagações e questionamentos, para que desenvolvessem estratégias para a solução do problema. Assim, os primeiros resultados encontrados foram apresentados em função de “partes do corpo”.

Com estes resultados em mãos começaram a discutir como encontrar o resultado em metros ou centímetros. Foi então que lhes foi entregue uma trena de 100cm e solicitado que investigassem como encontrar o resultado em centímetros.

Como utilizaram partes do próprio corpo para o processo de investigação, resolveram neste momento, medir as dimensões dos membros utilizados na situação proposta (Figuras 24 e 25), para então determinarem a medida do entorno da praça. Como a trena estava em centímetros, além de determinarem a dimensão, transformaram as medidas em metros, visto que concluíram que era a unidade ideal para a medida.

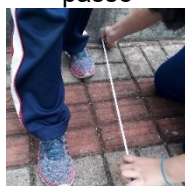
Foram realizados registros pelos grupos, para concluírem o processo de Investigação por meio de cálculos e direcionamentos que os levasse a finalização (Figuras 26 e 27).

**Figura 24:** Alunos medindo o comprimento do pé



Fonte: Professor

**Figura 25:** Alunos medindo o comprimento do passo



Fonte: Professor

**Figura 26:** Alunos desenvolvendo os modelos matemáticos



Fonte: Professor

**Figura 27:** Alunos desenvolvendo os modelos matemáticos



Fonte: Professor

Um aluno, argumentou que deveriam saber a medida real do contorno da praça, para então compararem com as medidas que encontraram, ele foi questionado em como poderiam ter essa medida. Rapidamente responderam que poderiam fazer a volta de carro e medir com o medidor de quilometragem do carro. Assim, um aluno se propôs a realizar essa medição com o auxílio dos pais, utilizando esse dado para a validação dos resultados.



Finalmente, na aula seguinte, os grupos fizeram a socialização e discussão dos resultados obtidos por cada grupo, explanando a estratégia e o motivo que os levaram a utilizá-la no processo investigativo, comparando seus resultados, discutindo-os e comparando com a medida trazida pelo aluno que fez a medição de carro com os pais.

*Para minha surpresa, após as conversões, os resultados foram muito parecidos. Eu achei que não fosse dar este resultado, mas deu resultado sim. Eles puderam notar que ... apesar de cada um fazer de um jeito, estavam no caminho certo (Fala de P.).*

O desenvolvimento desta atividade não tradicional, permitiu que evidenciasse algumas potencialidades de cunho investigativo, que entendo ser uma prática não tradicional, para as aulas de matemática, sendo este um dos meus objetivos como aluno do mestrado.

Após a finalização e estudos mais profundos para minha pesquisa, sobre Ensino por Investigação, conclui esta atividade não se enquadra na Prática Pedagógica Investigação Matemática, e sim em Modelagem Matemática, devido a principal característica evidenciada ser estar em um contexto real.

A parceria feita com a uma professora das turmas oportunizou aos alunos, tornarem-se agentes ativos no processo de construção do seu conhecimento.

*O que eu vejo é que esta atividade... (...) foi uma atividade dinâmica, inclusiva, todos participaram, participaram em equipe... esta atividade extraiu o melhor do aluno, que é sua participação ativa no processo (Fala de P.).*

Ou seja, a integração durante o processo investigativo gerou benefícios para coletividade da turma, por meio do desenvolvimento do pensamento matemático e da oportunidade de o aluno trabalhar de forma autônoma, atribuindo novos significados e relações ao conhecimento matemático.

Conforme relato da professora, o desenvolvimento desta atividade trouxe uma Prática Pedagógica positiva para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pois,

*Eu percebi que é possível trabalhar de forma que o aluno seja o participante da sua aprendizagem. Foi muito enriquecedora esta situação. Isso me deu uma nova visão a respeito do que os alunos são capazes de fazer e que muitas vezes não acreditamos ou ... na potencialidade que eles têm e também não acreditamos que isso seja possível. Estamos acostumados a chegar na sala de aula,*

*aplicar o que nos é proposto e os alunos resolverem os exercícios (Fala de P).*

Além dos benefícios em relação à participação do aluno na busca de estratégias e soluções para o problema, o incentivo à criatividade e a emissão de opiniões, observamos que esta Prática Pedagógica possibilitou maior familiaridade com a disciplina e sua relação com a realidade. Assim, inferimos que, para este grupo de alunos e professora, o objetivo do desenvolvimento da atividade foi alcançado com louvor, como podemos observar na seguinte fala da professora:

*Aquela insegurança que eu senti na abordagem inicial ... hoje eu vejo quanto tempo eu perdi e que poderia ter trabalhado de uma forma diferenciada que levasse os alunos a serem participantes da sua aprendizagem. Quero dizer que as crianças aprenderam muito, eu também aprendi e quero dizer que esta atividade colaborou muito no nosso conhecimento, quero aprender mais sobre essas práticas para mudar minhas aulas. As crianças ficaram motivadas e viram que são capazes de dar suas opiniões e elas foram aceitas. As opiniões delas foram levadas em conta e elas viram que deu muito resultado. E deste projeto eu posso dizer que a Práticas Pedagógicas não tradicionais, podem trazer para o professor e para o aluno, uma visão diferente de que se pode trabalhar não somente a transmissão do conhecimento, mas a transmissão com motivação, participação e que leva ao autoconhecimento. Isto foi muito enriquecedor. Quero agradecer ao professor por me proporcionar este aprendizado, porque não foram só as crianças que aprenderam. Eu aprendi muito também. E esta atividade vai ficar gravada na cabecinha deles para sempre. Jamais vão esquecer. E é assim que deveria ser o processo mesmo... o aluno tomasse gosto por aquilo, que fosse participante deste processo e que isso com certeza traria muito mais benefícios do que apenas transmissão de conteúdo (Fala de P).*

Acredito que o desenvolvimento desta atividade e o depoimento da professora revelou algumas contribuições positivas possíveis para a inserção de práticas não tradicionais nas aulas de Matemática, alcançando o objetivo de envolvimento e construção do conhecimento de forma ativa por parte do aluno.

Não posso deixar de relatar, que esta parceria gerou frutos, a professora da turma no ano seguinte (2019) fez o processo de seleção para ingressar no PPGMAT e hoje é aluna regular do programa, estando encantando e estudando com afinco para o ensino de Matemática.

## VETORES

Dando sequência as minhas experiências de sala de aula com Práticas Pedagógicas não tradicionais, fui convidado pela minha orientadora em participar da sua aula, em uma turma de engenharia, onde seria desenvolvida uma atividade com características da Investigação Matemática, abordando o conceito matemático de vetores.

Ao ser convidado pela minha orientadora para mais esta experiência, senti novamente um desafio a ser superado, afinal seria a primeira vez que entraria em uma turma de nível superior, e ainda com uma Prática Pedagógica que eu estava estudando. Não hesitei e aceitei o convite.

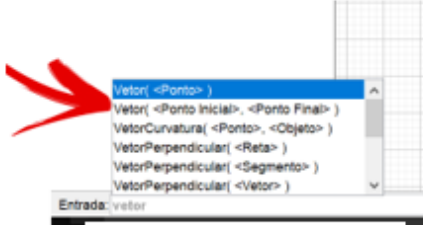
A atividade já tinha sido elaborada por ela, conforme quadro 4.

**Quadro 04:** Atividade investigativa sobre noções de vetores

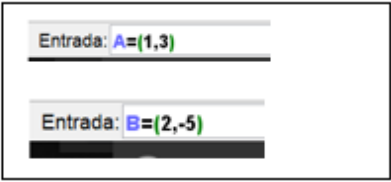
**ATIVIDADE: Noção de vetores**

No GEOGEBRA:

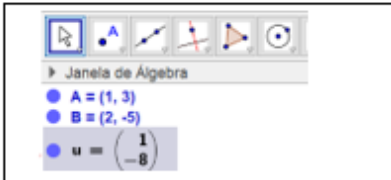
- 1- Insira o ponto A (1,3).
- 2- Insira o ponto B (2, -5)
- 3- Solicite ao Geogebra que apresente o vetor  $\overrightarrow{AB}$



Entrada: Vetor(A, B)



Aparecerá a seguinte informação na janela de álgebra:



Investigue:

- 1- Como o GEOGEBRA determinou estes valores  $\underline{1}$  e  $-8$  para o vetor  $u$ ?
  - a. DICAS:
    - i. coloquem outros pontos e analisem os vetores representados;
    - ii. movam a representação do vetor e veja o que acontece na janela de álgebra
- 2- O que significa graficamente estes valores?
- 3- O que estes valores dizem sobre o vetor?
- 4- Como posso representar graficamente o vetor  $\vec{v} = (3, -5)$ ?
- 5- Dados dois pontos quaisquer  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ , como determinar o vetor  $\vec{v} = (x, y)$ ?

Fonte: Material produzido pela orientadora

Após marcar a data da aula, fui estudar a atividade juntamente com minha orientadora para ver os encaminhamentos. Verifiquei que fariam o uso do *software* Geogebra para mediar o processo investigativo.

Com a aula planejada, ficou definido que teria o papel no desenvolvimento da atividade de um professor colaborador, norteando minha ação no desenvolvimento da atividade com as características da Investigação Matemática, sendo um motivador e questionador do processo investigativo, deixando os alunos agir e assumirem o papel ativo no processo de construção do conhecimento.

Os alunos já tinham sido orientados em estarem nesta aula, portando celular ou notebook, para acesso ao *software*.

Para dar início a aula, os alunos foram organizados em grupos, de no máximo 5 alunos.

Como os grupos organizados, foi entregue a atividade impressa aos alunos, que continham os encaminhamentos a serem investigados, conforme Quadro 04.

Pelos alunos não estarem habituados com a periodicidade dessa prática, no início ficaram com um pouco de receio, devida a muitos não terem conhecimento do conteúdo abordado e também por ter sido feita nenhuma explanação do conteúdo.

Fui circulando pelos grupos, estimulando em realizarem, observarem, formularem e testarem as hipóteses, com essa motivação foram se familiarizando com a atividade e iniciaram o processo de investigação.

A todo momento passava pelos grupos e fazia questionamentos estimulativos aos alunos, muitas vezes eu era respondido com a seguinte indagação “está certo?”. Acostumado com minha prática tradicional, tinha que me segurar para não responder “está certo ou está errado”, fazia questionamentos com o objetivo de estimular os alunos, não com perguntas diretas, que tem uma resposta pronta por parte do receptor, mas sim, com indagações que levem os alunos a pensar, refletir e testar, oportunizando assim a construção do conhecimento (CONCENTINO, 2019).

Os questionamentos eram os definidos por Concentino (2019), sendo: Por quê? Como? Me expliquem..., têm certeza disso? Muito bem! Mas e se...

Continuem assim! Estão no caminho certo... Vocês levaram em consideração o que o colega falou? Por quê? Discutam as duas opiniões, por que não concorda com o que ele disse? Explique como você chegou a esta conclusão?

Com esses questionamentos os alunos eram desafiados e investigar com afinco a situação proposta, podendo assim assumir o papel de matemáticos, que os levariam a construção do conhecimento de noções de vetores.

Aleatoriamente os grupos iam finalizando a atividade, e pude observar que após a realização do processo investigativo, chegaram à conclusão dos conceitos básicos de vetores, direção, sentido e módulo.

Esta foi mais uma experiência gratificante na história da minha docência, com práticas não tradicionais, nesta, norteadas pela Investigação Matemática.

Pude evidenciar, mais uma vez, que para ensinar Matemática, não é apenas usando quadro, giz e exposição de conteúdo, há possibilidades riquíssimas com a Investigação Matemática para o ensino na Matemática.

Vendo a potencialidade desta atividade para o ensino de noções de vetores, após pedir autorização a minha orientadora desenvolvi a mesma atividade em minhas turmas do Ensino Médio, turmas essas que não tinham o conhecimento prévios dos conceitos de vetores.

Sem avisá-los previamente, ao chegar na sala, levei-os ao laboratório de informática, solicitei que dividissem em grupos de máximo três alunos, devido ser a quantidade que comporta cada computador.

Após divididos em grupos, apresentei o *software* Geogebra na versão online aos alunos, e estimei com que fizessem o desenvolvimento da atividade.

Assim como ocorreu na turma de engenharia, ficaram meio perdidos de início, afinal nunca tiveram contato com esse tipo de Prática Pedagógica em suas aulas.

Após se familiarizarem com a proposta, foram se envolvendo profundamente no desenvolvimento da atividade. Foi evidente a participação ativa dos alunos, pois eles tinham o direito de argumentar e defender suas ideias, assumindo o papel principal na construção do conhecimento.

Os grupos também foram finalizando cada um no seu tempo, sendo evidente a satisfação e principalmente a construção dos conceitos iniciais de vetores, sentido, direção e módulo.

Mais uma prática da minha sala de aula, prazerosa e estimuladora, que com certeza fez toda a diferença nas “histórias das minhas salas de aula.

Esta mesma atividade foi desenvolvida pela terceira vez no EPREM – 2019. Neste evento os responsáveis pelo desenvolvimento foi eu uma colega que também pesquisa Investigação Matemática, orientados pela minha orientadora.

A atividade foi desenvolvida no minicurso do evento, onde intitulamos como “vivenciando a Investigação Matemática”.

Acostumados com a organização de minicurso abordarem no primeiro momento uma explanação teórica, seguida por aplicação de atividades e concluídos com considerações finais, optamos em não seguir esse padrão.

Iniciamos o minicurso solicitando que formassem grupos, em seguida entregamos a atividade impressa, conforme quadro 4, e solicitamos que os participantes investigassem o problema propostos.

A maioria dos participantes eram formados em Matemática, assim já tinham o conhecimento de vetores, o que fez uma alteração no processo de investigação, indo esses participantes direto a definição do conceito de vetores.

No entanto, neste minicurso tinha uma participante que era formada em pedagogia e outra acadêmica do curso de matemática, ambas não tinham o conhecimento prévio do conceito de vetores, sendo nessas participantes meu foco, afinal queria observar a potencialidade da Investigação Matemática para o ensino de conceitos matemáticos, que neste caso vetores.

As participantes de posse do notebook, utilizaram o *software* Geogebra na versão online, e iniciaram o processo investigativo.

Vários momentos perguntavam se estava certo como estavam fazendo, eu respondia com as indagações propositivas que as levavam em investigar, testando, analisando, inferindo e tirando as conclusões, sempre com muito envolvimento.

Conclusões essas que ao final foram também os conceitos matemáticos de vetores: direção, sentido e módulo.

Novamente tive a experiência muito positiva das potencialidades de inserção de Práticas Pedagógicas não tradicionais para o ensino da Matemática,

evidenciando que quando o objetivo é ensino conceitos matemáticos a Investigação Matemática é uma prática com potencial.

## **DIAGONAIS DOS POLÍGONOS**

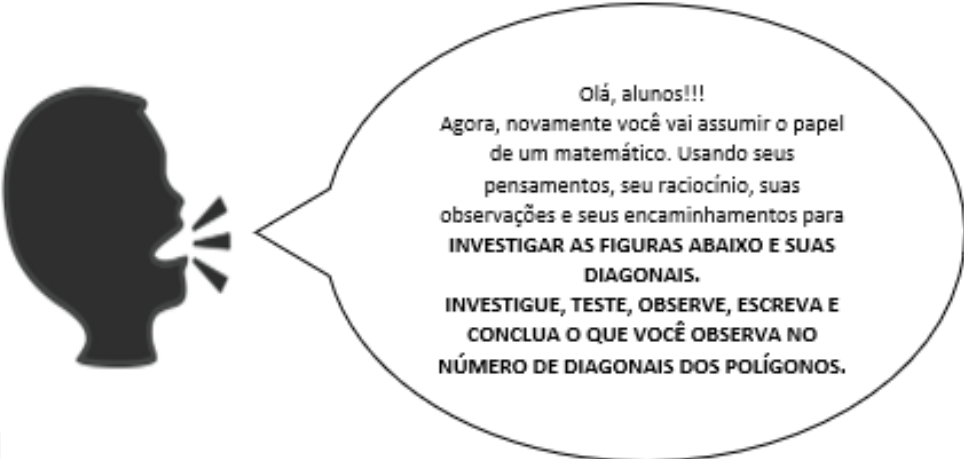
Mais uma experiência marcante em “minhas salas de aula” com práticas não tradicionais, foi o desenvolvimento de uma atividade que envolvia o conceito de diagonais dos polígonos.

Este conteúdo é inserido geralmente nos 8 anos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, no decorrer da minha docência, com tendência predominantemente tradicional, como já relatado, sempre tive a prática de falar aos alunos a definição de diagonais dos polígonos e de imediato passar a fórmula de relaciona o número de diagonais com o número de lados, seguido de exemplos de aplicações e exercícios de fixação.







Muitas vezes me incomodou esse tipo abordagem, mas como estava acostumado a sempre trabalhar assim, todo ano usava essa mesma prática tradicional.

Em 2019, já com outras experiências de sala de aula, com práticas não tradicionais, e como estudos acerca da Investigação Matemática, resolvi então planejar uma aula, que envolvia esse conceito, norteadas pela investigação.

Baseado então em Concentino (2019), que já tinha realizado algo com essa temática, elaborei uma atividade abordava a investigação das diagonais dos polígonos regulares de acordo com o número de lados e de vértices. Sendo essa atividade organizada conforme Quadro 05.

**Quadro 05:** Atividade investigativa referente a diagonais dos polígonos regulares


Olá, alunos!!!  
Agora, novamente você vai assumir o papel de um matemático. Usando seus pensamentos, seu raciocínio, suas observações e seus encaminhamentos para **INVESTIGAR AS FIGURAS ABAIXO E SUAS DIAGONAIS.**  
**INVESTIGUE, TESTE, OBSERVE, ESCREVA E CONCLUA O QUE VOCÊ OBSERVA NO NÚMERO DE DIAGONAIS DOS POLÍGONOS.**

POLÍGONO	NÚMERO DE LADOS E DE VÉRTICES	NÚMERO DE DIAGONAIS QUE SAI DE CADA VÉRTICE	NÚMERO TOTAL DE DIAGONAIS
Triângulo 			
Quadrilátero 			
Pentágono 			
Hexágono 			
Heptágono 			
Octógono 			
Polígono de "n" lados			

**Fonte:** Autor, baseado em Concentino (2019)

Esta atividade, tem o objetivo da investigação, por parte dos alunos, do número de diagonais que sai de cada vértice do polígono, do número total de diagonais dos polígonos, até chegarem a sua generalização.

Após elaborada, desenvolvi ela nas minhas duas turmas de 8° Anos Finais do Ensino Fundamental.

Optei em desenvolver em grande grupo, isto é, sem formação de grupos, no entanto todos os alunos tinham a liberdade de se comunicarem um com o outro, de forma mútua ao processo de investigação.



Nesta mesma turma, já havia desenvolvido outra atividade de cunho investigativo, assim os alunos já tinham uma certa familiaridade com esse tipo de Prática Pedagógica.

Ao invés de entregar uma folha impressa com a atividade para cada aluno, reproduzi a atividade na lousa, e o fui instigando os alunos em desenvolverem a investigação.

A maioria dos alunos desenharam os polígonos no caderno e iam traçando as diagonais para investigarem os números de diagonal que sai de cada vértice, bem como o número total de diagonais do polígono.

Percebi um envolvimento ativo de todos os alunos, pois mais uma vez estavam tendo a liberdade de participarem ativamente do processo de construção do conhecimento. Ação bem diferente do que a que eu estava acostumado quando trabalhava esse conteúdo nas turmas anteriores. Dessa vez os alunos não estavam reproduzindo de forma mecânica, com substituição em fórmulas, estavam assumindo o papel de matemáticos.

Até o hexágono fluíram perfeitamente sem dificuldades, até perceberem a partir daí somente desenhos seria uma forma muito trabalhosa. No entanto, um aluno argumentou “professor, não tem uma fórmula para todas?”, me contive para não dizer que sim, respondi com outra indagação que objetivava a investigação por parte dos alunos, “será que existe uma fórmula? Será que há uma regularidade?”.

Isso desafiou os alunos, que me responderam “vamos tentar, analisar e vamos ver!”

Essa resposta que obtive foi fantástica, pude observar que o aceite ao convite para a investigação tinha sido aceito pelos alunos. Neste momento os alunos iniciaram uma discussão entre eles, com argumentos e testes, houve uma grande interação entre a turma. Toda vez que um aluno fala uma fórmula que relacionava o número de diagonais com o número de lados, os demais iam testar com alguns polígonos para verem se dar certo, com o objetivo de validar.

Foram 2h/aulas de uma total interação entre os alunos, com um envolvimento e motivação mútua deles, até que um aluno disse: “acho que matei a charada, olha aqui, primeiro percebi que a diagonal que sai de um vértice, vai

e volta, isso significa que é a mesma, não podemos assim contar ela duas vezes.”

Eu questionei então: “mas como podemos fazer para não contar duas vezes?”

O aluno de imediato respondeu: “só dividir por dois o resultado.”

Os demais alunos todos comungaram com essa primeira ideia desse aluno.

Dando sequência em motiva-los, questionei: “então pessoal, e agora o que mais podemos fazer?”

Houve um breve silêncio, até que outro aluno falou: “temos que relacionar com o número de diagonais que sai de cada vértice.”

Continuei a indagar: “mas será que tem alguma coisa a ver?”

O aluno respondeu: “claro que tem professor, olha lá conta no desenho, de cada vértice sai sempre três diagonais a menos do que o número de lados.”

Motivando o aluno, respondi: “muito bem, você tem razão.”

Instigando-os, falei: “mas é só isso então?”

Mais um momento de silêncio, observei que faziam análise, observação e testes, até que um aluno falou: “professor é só subtrair três do número de lados do polígono, depois divide por dois e o resultado multiplica pelo número de lados.”

Questionei “será?”

Ele respondeu “pode testar, dá certinho.”

A turma então fez os testes como os polígonos que já tinham traçado as diagonais e super empolgados, vários disseram: “é isso mesmo, descobrimos uma fórmula para calcular o número de diagonais de qualquer polígono”

Parabenizei a toda a turma, que se envolveu ativamente na atividade proposta, pude perceber que mais uma vez Práticas Pedagógicas não tradicionais, neste caso a Investigação Matemática, tem potencial para o ensino da Matemática.

Ainda vale salientar, que se esse conteúdo fosse abordado na vertente tradicional, o tempo gasto seria menor, pois daria a fórmula pronta ao aluno e ele só teria que fazer substituições de forma mecânica, não oportunizando um envolvimento ativo na construção do conhecimento. No entanto ao ser utilizar

Práticas Pedagógicas não tradicionais, tinha a consciência de que o tempo utilizado seria maior, mas com uma grande potencialidade de construção do conhecimento por parte dos alunos, tornando uma aula mais atrativa, participativa e com grande potencial de aprendizagem e entendimento da Matemática.

## **UM NOVO PROFESSOR**

Posso afirmar com afinco, que hoje minhas aulas são totalmente diferentes, aquele professor que era dominado pelo tradicionalismo com aulas, sempre organizadas com a exposição de conteúdo, resolução de exercícios e correção, sofreu uma transformação.

O anseio e o desejo de inovar minhas aulas, com aulas mais dinâmicas, interativas e motivadoras, foi possibilitado, hoje eu sei que é possível utilizar Práticas Pedagógicas não tradicionais, tanto eu quanto meus alunos saímos outros das aulas norteados desta forma.

Eu com a sensação de dever cumprido em poder oportunizar ao meu aluno um ambiente de ensino prazeroso e interativo, oportunizando uma voz ativa dos meus alunos, além de possibilitar uma construção de conhecimentos de forma participativa.

Os alunos, por sua vez, se sentem valorizados e motivados em participar das aulas de matemática, sendo uma possibilidade de quebrar a visão, que na maioria das vezes as aulas de matemática não apresentam atrativos.

Com essas “histórias das minhas salas de aula”, oportunizadas pelo PPGMAT, tive a certeza que sou outro professor e isso faz com que inflame outros professores em também se oportunizarem a mudar a história das suas salas de aula.

## REFERÊNCIAS

ALRO, H. E SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Tradução de Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ARAUJO, R. V. **Implementação de metodologias ativas: aprendizagem baseada em projetos em aulas de Física sobre Acústica no Ensino Médio à Luz dos Campos Conceituais**. Dissertação do Programa de Pós-Graduação - MNPEF da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Tramandaí, 2019.

CONCENTINO, J. **Caminhos a percorrer: desafios no processo de investigação matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. São Paulo: Paz e Terra. 1996.

RAMOS, A. P. et al. **Problemas matemáticos: caracterização, importância e estratégias de resolução**. USP - Seminários de Resolução de Problemas, 2002. Disponível em:  
<[http://www.ime.usp.br/~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-seminario-8resolucao\\_problemas.pdf](http://www.ime.usp.br/~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-seminario-8resolucao_problemas.pdf).> Acesso em: 30/11/2019.