

ppgmat

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LEANDRO CACIOLATO DE SOUZA

A COMUNICAÇÃO EM INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

LONDRINA

2021

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

LEANDRO CACIOLATO DE SOUZA

A COMUNICAÇÃO EM INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
COMMUNICATION IN MATHEMATICAL RESEARCH

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elaine Cristina Ferruzzi

LONDRINA

2021



4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

01/03/2021



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Londrina



LEANDRO CACIOLATO DE SOUZA

A COMUNICAÇÃO EM INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 26 de Fevereiro de 2021

Prof.a Elaine Cristina Ferruzzi, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Adriana Helena Borssoi, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Jonei Cerqueira Barbosa, Doutorado - Universidade Federal da Bahia (Ufba)

Prof.a Karina Alessandra Pessoa Da Silva, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 26/02/2021.

Dedicatória

À minha família pelo amor, apoio e incentivo na conclusão de mais esta etapa de minha formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Findando mais uma etapa de minha vida, etapa esta com uma caminhada que necessitou muita dedicação, esforço, perseverança, estudos e aprendizados que para concluir essa caminhada, não caminhei sozinho, estive sempre cercado de pessoas que fizeram a diferença.

Gostaria de agradecer, de forma singela, a todos que contribuíram para a concretização deste projeto, que é a realização de um sonho.

Primeiramente, minha gratidão a Deus, pelo dom da vida, da racionalidade, por me fortalecer e estar sempre ao meu lado guiando e iluminando meus caminhos.

À minha mãe Helena, que a todo momento foi minha amiga, companheira, meu espelho de pessoa, por sua dedicação, motivação e exemplo de superação e símbolo de amor. Ao meu pai, que mesmo não estando mais presente fisicamente em nosso meio, mas que em vida sempre me apoiou e nunca mediu esforços para me mostrar o caminho da honestidade, do carinho e do amor. Sou grato a todos os conselhos, lições de vida e esforços nunca mensurados deste casal, para me proporcionar educação.

Agradeço aos meus irmãos, Leticia e Luiz Gustavo, pela amizade, carinho e apoio, por sempre estarem torcendo e vibrando com as minhas conquistas, bem como ao meu cunhado Leandro e a minha cunhada Jaqueline, que junto dos meus irmãos sempre estiveram ao meu lado, suportaram-me nos momentos de angústia não me deixando desanimar, muito obrigado!

À minha orientadora, Professora Doutora Elaine Cristina Ferruzzi, pela confiança em mim depositada, pela paciência e por não deixar eu desistir e desanimar. Agradeço pelas suas orientações que me fizeram crescer tanto como pessoa quanto pesquisador, o que me fez outro ser humano. Reforço ainda com afinco minha profunda gratidão e admiração à orientadora e professora, como pessoa e como profissional. Agradeço por compartilhar seus conhecimentos

acadêmicos, sua forma de escrita, suas experiências profissionais, pelo incentivo, por acreditar e por fazer sentir-me capaz.

À Banca, Professora Doutora Adriana Helena Borssoi e o Professor Doutor Jonei Cerqueira Barbosa pelas valiosas contribuições no Exame de Qualificação que proporcionaram grande crescimento no meu trabalho, além dos apontamentos no Exame de Defesa que enriqueceram ainda mais minha pesquisa.

Agradeço à Professora Doutora Karina Alessandra Pessoa da Silva, por compartilhar seu riquíssimo conhecimento e por muitas vezes me ouvir, incentivar-me, proporcionando ver a vida acadêmica e docente com um olhar diferente.

À minha diretora Doralice Cicarelli de Moraes e minhas coordenadoras Cláudia Alves Schimidt e Paula Cristina Christovam, da Escola Rui Barbosa e Colégio Águia Master, por me apoiarem e permitirem que eu realizasse a pesquisa nas turmas das referidas escolas.

À amiga Débora Cicarelli Cuani, pela amizade, apoio e contribuição riquíssima na revisão ortográfica e gramatical, que fez toda a diferença e enriqueceu este trabalho.

Aos colegas do grupo GEPMIT, pelo apoio e companheirismo.

Aos professores do PPGMAT da UTFPR e, principalmente aos que tive a honra de ser aluno. Agradeço pelos riquíssimos ensinamentos que oportunizaram conhecimentos para a vida profissional e realização da pesquisa.

Aos amigos de turma que me proporcionaram muitos momentos bons, trocas de conhecimentos e motivação.

Enfim, agradeço aos meus familiares, amigos e todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram com esta pesquisa, que souberam entender minhas

ausências, meus momentos de incertezas e, principalmente, minhas constantes mudanças de humor.

Foi um grande desafio, pelo qual fui vencendo aos poucos. Agora posso dizer, venci, o sonho se tornou realidade! Todos os obstáculos e barreiras que surgiram, fizeram-me superar, tornando-me mais forte, mas isso só foi possível porque estive rodeado de pessoas que me fizeram vencer.

Depois de muitas quedas, eu descobri que, às vezes, quando tudo dá errado, acontecem coisas tão maravilhosas que jamais teriam acontecido se tudo tivesse dado certo.

Eu percebi que quando me amei de verdade, pude compreender que, em qualquer circunstância, eu estava no lugar certo, na hora certa.

Então pude relaxar... pude perceber que o sofrimento emocional é um sinal de que estou indo contra a minha verdade.

Parei de desejar que a minha vida fosse diferente e comecei a ver que tudo o que acontece contribui para o meu crescimento.

Desisti de querer ter sempre razão e com isso errei muito menos vezes. Desisti de ficar revivendo o passado e de me preocupar com o futuro. Isso me mantém no presente, que é onde a vida acontece.

Descobri que na vida a gente tem mais é que se jogar, porque os tombos são inevitáveis.

Percebi que a minha mente pode me atormentar e me decepcionar. Mas quando eu a coloco a serviço do meu coração, ela se torna uma grande e valiosa aliada. Também percebi que sem amor, sem carinho e sem verdadeiros amigos, a vida é vazia e se torna amarga.

Ser feliz é reconhecer que vale a pena viver, apesar de todos os desafios, incompreensões e períodos de crise. É agradecer a Deus a cada manhã pelo milagre da vida. Pedras no caminho? Guardo todas, um dia vou construir um castelo..."

Mário Quintana

CACIOLATO DE SOUZA, Leandro. **A comunicação em Investigação Matemática**. 2021. 137 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

RESUMO

A presente pesquisa, de natureza qualitativa, versa sobre comunicação em atividades de Investigação Matemática. O objetivo principal foi identificar características da comunicação que ocorre em atividades de Investigação Matemática desenvolvidas na sala de aula. Os dados analisados decorem de três contextos diferentes, com a aplicação da mesma atividade nestes três contextos: Ensino Superior, Minicurso do XV EPREM e no Ensino Médio. Para a Investigação Matemática, evidenciamos nas comunicações características de cunho matemático e de encaminhamentos, as quais dividimos em três categorias, sendo a primeira com objetivos de explicações, dúvidas, questionamentos, compreensão de conceitos matemáticos e cálculos numéricos, a segunda com objetivos de apresentar, sugerir ou discutir encaminhamentos para a atividade e na terceira enquadra-se os objetivos de provocar/instigar os interlocutores à reflexão e análise referente ao procedimento adotado. Essas características das falas foram evidenciadas em cada frase emergente no desenvolvimento da atividade nos três contextos pesquisados. Os resultados nos permitiram evidenciar onze características distribuídas nas três categorias as quais classificamos como falas conceituais, falas procedimentais e falas norteadoras. Inferimos que a Investigação Matemática possibilita interações com conceitos, termos e objetos matemáticos. Ainda, nos contextos em que se desenvolveram nossa pesquisa, a análise nos permitiu evidenciar que, a Investigação Matemática oportunizou uma interação e participação ativa dos alunos, emergindo comunicações com características predominantes matemáticas seguida das procedimentais. Assim podemos sugerir que, se o objetivo do professor é o desenvolvimento de conceitos matemáticos, a Investigação Matemática possui potencial para atingir esse objetivo. Como produto educacional, elaboramos um material descrevendo as “histórias das minhas salas de aula”, no qual é relatado os avanços significativos que o programa PPGMAT e esta pesquisa proporcionaram na carreira docente do pesquisador.

Palavras-chave: Comunicação. Ensino de Matemática. Investigação Matemática. Prática Pedagógica.

CACIOLATO DE SOUZA, Leandro. Communication in Mathematical Research. 2021. 137 f. Dissertation (Master in Mathematics Teaching) - Federal Technological University of Paraná, Londrina, 2021.

ABSTRACT

The present research, of qualitative nature, deals with communication in Mathematical Research activities. The main objective was identifying characteristics of the communication that occur in Mathematical Research activities developed in the classroom. The analyzed data come from three different contexts with the application of the same activity in these three contexts: Higher Education, Mini Course of the XV EPREM and in High School. For Mathematical Research, we highlight the communications characteristics of mathematical nature and referrals, which we divide into three categories, the first with the purpose of explanations, doubts, questions, understanding of mathematical concepts and numerical calculations, the second has the purpose of presenting, suggesting or discussing referrals for the activity and the third one fits the objectives of provoking/instigating the interlocutors to reflect and analyze the adopted procedure. These characteristics of the statements were evidenced in each sentence emerging in the development of the activity in the three researched contexts. The results allowed us to highlight eleven characteristics distributed in the three categories which we classified as conceptual statements, procedural statements and guiding statements. We infer that the Mathematical Research provides an opportunity for interaction with mathematical concepts, terms and objects. Yet, in the contexts in which our research was developed, the analysis allowed us to highlight that Mathematical Research provided opportunity for active participation of students, emerging communications with predominant mathematical characteristics followed by procedural ones. So, we can suggest that if the teacher's objective is the development of mathematical concepts, Mathematical Research has the potential to achieve this objective. As an educational product, we prepared material describing the "stories from my classrooms", in which it is reported the significant advances that the program PPGMAT and this research have provided in the researcher's teaching career.

Keywords: Communication. Mathematics teaching. Mathematical Research. Pedagogical Practice.

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.01 – Momentos do processo de Investigação Matemática realizados pelo aluno.....	28
Quadro 2.02 - Questionamentos do professor no ambiente de Investigação Matemática.	35
Quadro 2.03 – Ação do docente no desenvolvimento da Investigação Matemática.....	35
Quadro 3.01: Atividade entregue aos alunos envolvendo operações com números naturais.....	56
Quadro 3.02: Atividade investigativa sobre funções.....	58
Quadro 3.03: Atividade investigativa sobre noções de vetores.....	59
Quadro 3.04: Atividade investigativa de soma de números naturais.....	61
Quadro 3.05: Atividade investigativa referente a diagonais dos polígonos regulares.....	62
Quadro 4.01: Segunda parte da atividade 3.....	66
Quadro 4.02: Questão 1 da atividade 3.....	67
Quadro 4.03: Falas do episódio 1 do primeiro contexto com seus respectivos objetivos.....	68
Quadro 4.04: Falas do episódio 2 do primeiro contexto com seus respectivos objetivos.....	71
Quadro 4.05: Questões da atividade.....	72
Quadro 4.06: Falas do episódio 3 do primeiro contexto com seus respectivos objetivos.....	73
Quadro 4.07: Falas do episódio 4 do primeiro contexto com seus respectivos objetivos.....	76
Quadro 4.08: Falas do episódio 5 do segundo contexto com seus respectivos objetivos.....	80
Quadro 4.09: Falas do episódio 6 do segundo contexto com seus respectivos objetivos.....	82
Quadro 4.10: Falas do episódio 7 do terceiro contexto com seus respectivos objetivos.....	86

Quadro 4.11: Falas do episódio 8 do terceiro contexto com seus respectivos objetivos.....	89
Quadro 4.12: Falas do episódio 1 classificadas como pertencentes à categoria 1.....	91
Quadro 4.13: Falas do episódio 2 classificadas como pertencentes à categoria 1.....	92
Quadro 4.14: Falas do episódio 3 classificadas como pertencentes à categoria 1.....	93
Quadro 4.15: Falas do episódio 4 classificadas como pertencentes à categoria 1.....	94
Quadro 4.16: Falas do episódio 5 classificadas como pertencentes à categoria 1.....	95
Quadro 4.17: Falas do episódio 6 classificadas como pertencentes à categoria 1.....	96
Quadro 4.18: Falas do episódio 7 classificadas como pertencentes à categoria 1.....	97
Quadro 4.19: Falas do episódio 8 classificadas como pertencentes à categoria 1.....	98
Quadro 4.20: Falas do episódio 1 classificadas como pertencentes à categoria 2.....	99
Quadro 4.21: Falas do episódio 2 classificadas como pertencentes à categoria 2.....	99
Quadro 4.22: Falas do episódio 3 classificadas como pertencentes à categoria 2.....	100
Quadro 4.23: Falas do episódio 4 classificadas como pertencentes à categoria 2.....	100
Quadro 4.24: Falas do episódio 5 classificadas como pertencentes à categoria 2.....	100
Quadro 4.25: Falas do episódio 6 classificadas como pertencentes à categoria 2.....	100
Quadro 4.26: Falas do episódio 7 classificadas como pertencentes à categoria 2.....	101

Quadro 4.27: Falas do episódio 8 classificadas como pertencentes à categoria 2.....	101
Quadro 4.28: Falas do episódio 6 classificadas como pertencentes à categoria 3.....	102
Quadro 4.29: Falas do episódio 7 classificadas como pertencentes à categoria 3.....	102
Quadro 4.30: Falas do episódio 8 classificadas como pertencentes à categoria 3.....	102
Quadro 4.31: Características das falas pertencentes à categoria 1.....	104
Quadro 4.32: Características das falas pertencentes à categoria 2.....	111
Quadro 4.33: Características das falas pertencentes à categoria 3.....	114

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.01 – Dando forma à atividade investigativa.....	38
---	----

SUMÁRIO

1 COMO TUDO COMEÇOU.....	17
1.1 A construção do problema de pesquisa.....	19
1.2 Estrutura do texto	23
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	25
2.1 Ensino por Investigação.....	25
2.2 Investigação Matemática como Prática Pedagógica	28
2.2.1 Porque utilizar a Investigação Matemática em sala de aula.....	29
2.2.2 Papel do professor nas aulas com abordagem Investigativa.....	32
2.2.3 Elaboração da atividade investigativa.....	36
2.2.4 O que dizem as publicações atuais sobre Investigação Matemática.....	39
2.3 Comunicação em sala de aula.....	47
3 METODOLOGIA DA PESQUISA.....	51
3.1 Problema e objetivo da pesquisa.....	51
3.2 Procedimentos metodológicos	51
3.3 O contexto e o registro dos dados da pesquisa	52
3.4 Descrição das atividades	55
3.5 A condução das análises	63
4 ANÁLISE DA COMUNICAÇÃO EM ATIVIDADES INVESTIGATIVAS	65
4.1 Primeira análise: as falas e seus objetivos	66
4.1.1 Contexto 1: Ensino Superior	66
4.1.2 Contexto 2: Minicurso	78
4.1.3 Contexto 3: Ensino Médio	83
4.2 Segunda análise: à procura de agrupamento em categorias.....	91
4.3 Resultado da terceira análise: características das falas de acordo com sua categoria	103
4.4 Algumas palavras sobre o resultado da análise dos dados	115
5 ENCERRANDO UM CICLO.....	117
REFERÊNCIAS.....	119

Apêndice 1 - Atividade Investigativa 1: Noção de vetores.....	127
Apêndice 2 - Termo de consentimento e termo de consentimento para uso do som de voz.....	129
Apêndice 3 - Contrato assinado pelos pais na escola particular contendo autorização para a pesquisa.....	131
Apêndice 4 - Atividade sobre operações com números naturais.....	135
Apêndice 5 - Atividade sobre diagonais dos polígonos.....	136
Apêndice 6 - Atividade sobre introdução ao estudo de funções.....	137
Anexo 1 - Ficha de Avaliação do Produto Educacional.....	138
Anexo 2 - Produto Educacional	

1 COMO TUDO COMEÇOU

Estudei¹ até a 4^o série do Ensino Fundamental em uma escola particular, onde iniciei meu encanto pela educação. Nos anos finais do Ensino Fundamental, fui estudar na escola pública, continuando minha admiração pelo ato de ensinar. Apesar das aulas totalmente tradicionais, com exposição do conteúdo, resoluções de exercícios e correção no quadro de giz, ficava cada vez mais encantado com o processo de ensino.

O Ensino Médio, cursei no CEFET², instituição que atualmente é a UTFPR³. Fui da primeira turma do Ensino Médio regular da Instituição e neste contexto veio a verdadeira paixão pelo ensino. Tive contato com profissionais da Educação que me encantavam com suas aulas, em especial os das disciplinas de exatas. Ali tive a certeza do que queria “ser quando crescer”, a decisão estava tomada, queria ser Professor. No Ensino Médio, tive também pouco contato com aulas diferenciadas, não tradicionais, algo experimental das disciplinas de Física e Química, nas quais me envolviam com afinco nessas práticas.

Fui para a universidade cursar Licenciatura Plena em Matemática, na UENP⁴ de Cornélio Procópio. Foram quatro anos de realização e certeza na minha profissão. Assim como nas experiências anteriores que tive como aluno, a maioria dos professores desta graduação, também utilizavam tendências tradicionais em suas aulas. Alguns faziam o uso de metodologias diferenciadas, porém bem poucos.

Ao concluir o curso de Matemática, iniciei minha carreira docente no estado como PSS⁵ e também na escola particular, onde leciono até hoje, herdando para minhas aulas tendências tradicionais, tendo em vista meu histórico acadêmico norteado por essas práticas.

¹ Estamos redigindo este primeiro capítulo no passado tendo em vista que esta dissertação apresenta o resultado da pesquisa realizada no âmbito do mestrado, ou seja, o que fizemos e como fizemos.

² Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná.

³ Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

⁴ Universidade Estadual do Norte do Paraná

⁵ Processo Seletivo Simplificado – PSS. Destinado a selecionar profissionais para atender ao suprimento temporário de professores e funcionários das escolas na rede pública estadual de ensino.

Fiz três especializações, a primeira em Psicopedagogia, a segunda em Educação Profissional de Jovens e Adultos e a terceira em Educação Especial Inclusiva. Estas especializações, além de me despertarem para a pesquisa, oportunizaram-me um olhar diferente para as práticas de sala de aula, tendo em vista o contato com professores que apresentaram possibilidades de práticas diferenciadas das tradicionais.

Fui cursar, posteriormente, Licenciatura em Física na UEL⁶, onde pude constatar que as práticas docentes tradicionais predominavam, ou seja, os professores faziam uso em suas aulas da exposição dos conteúdos, seguidos de exemplos de aplicação, para então resolvermos listas de exercícios que seriam corrigidas e cobradas nas avaliações.

Após concluir o curso de Física, fiz Gastronomia, que também é uma paixão e realização. Com essa graduação também ingressei na docência do curso Técnico em Cozinha.

Minha paixão pela Educação, em especial pelo ensino, é o alicerce para minha carreira. Leciono por amor e por acreditar que a Educação é a arma da transformação, comungando com as palavras de Paulo Freire: “Educação não transforma o mundo. Educação muda as pessoas. Pessoas transformam o mundo” (FREIRE, 1996, p. 74).

Com o objetivo de aperfeiçoar e evoluir minha prática docente, fui em busca de programas de Mestrado que oportunizassem o conhecimento de diferentes Práticas Pedagógicas. Almejava que essas práticas pudessem ser inseridas em minhas aulas e também, com o resultado da minha pesquisa, contribuir para que outros professores não utilizassem o ensino de forma tradicional⁷ como prática predominante em sala de aula.

Após várias consultas, encontrei no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT) as características que vinham ao encontro do meu objetivo. Essas características puderam ser evidenciadas primeiramente

⁶ Universidade Estadual de Londrina.

⁷ Entendemos, para este trabalho, ensino de Matemática tradicional, de acordo com Alro e Skovsmose (2010) que este tipo de ensino é caracterizado por certas formas de organização da sala de aula. Por exemplo, nesse modelo, as aulas costumam ser divididas em duas partes: primeiro, o professor apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas, geralmente em conformidade com um livro-texto. Em seguida, os alunos fazem alguns exercícios pela aplicação direta das técnicas apresentadas. O professor confere as respostas.

pela área de concentração que é o Ensino de Matemática, a qual busca contribuir para a formação de profissionais habilitados para atuar no Ensino de Matemática, promovendo a compreensão, a discussão e a atualização dos diversos conhecimentos científicos e tecnológicos e suas implicações e articulações nos processos de ensino e de aprendizagem.

Outro ponto relevante que me chamou a atenção, foi o objetivo geral do programa, que é oportunizar aos professores atuantes nos diversos níveis de escolaridade e aos profissionais interessados no Ensino de Matemática, capacitação em nível de mestrado, possibilitando que reflitam e repensem suas práticas docentes, reorientando-as de forma fundamentada nos aspectos que forem necessários, bem como, que se desenvolvam enquanto pesquisadores na área. Finalmente, o perfil do profissional formado pelo programa, o qual, ao concluir, tem ampliado seus conhecimentos e a aprendizagem de novas alternativas pedagógicas, baseadas em resultados de pesquisa, para aplicá-los em sala de aula, bem como o desenvolvimento da autonomia e da reflexão a respeito da própria prática, na busca de estratégias para resolução de problemas inerentes à profissão docente. Outro aspecto importante neste programa é a elaboração do Produto Educacional.⁸

Assim, participei do processo seletivo para aluno regular e ingressei no Programa, ansioso por estudar, refletir e aperfeiçoar a minha prática docente e também contribuir com outros professores.

1.1 A construção do problema de pesquisa

Ao ingressar no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, fui convidado pela minha orientadora a participar de um projeto de pesquisa que possui como objetivo central o estudo do Ensino por Investigação em Matemática e das discussões e estudos no Grupo de Estudos e Pesquisa em Modelagem, Investigação e Tecnologias –GEPMIT – da UTFPR-LD.

Com os estudos realizados no âmbito do GEPMIT, do projeto e de disciplinas do programa, compreendi a necessidade de diversificar minhas aulas,

⁸ Essas informações estão disponíveis no site do programa:
<http://portal.utfpr.edu.br/cursos/coordenacoes/stricto-sensu/ppg-mat/sobre>

tendo em vista que, em sua maioria (para não dizer todas), os conceitos eram trabalhados de forma expositiva, com a tríade explicação-exercícios-avaliação.

Essa metodologia, conhecida como *tradicional*⁹, é chamada por Paulo Freire (1996) de Educação Bancária, e caracteriza-se pela transmissão de informações por parte dos professores e por repetições mecânicas por parte dos alunos. Entretanto, como inúmeras pesquisas afirmam, ao resolver exercícios de forma mecânica, os alunos desenvolvem uma “atividade de adestramento” (RAMOS et al., 2002, p. 4), pois “a mera resolução de exercícios é uma atividade muito mais limitante para o aluno do que qualquer tipo de investigação” (ALRO e SKOVSMOSE, 2006, p. 52).

De acordo com Alro e Skovsmose (2006), aulas tradicionais são caracterizadas pelo ‘paradigma do exercício’, ou seja, a repetição de uma série de exercícios, os quais geralmente são oriundos de livros textos e por padrões de interações do tipo triádicas I-R-A (Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação ou Feedback do professor). Minha constatação, após leituras, estudo e discussões: minhas aulas estavam bem enquadradas neste modelo.

Propus-me a estudar com afinco diferentes Práticas Pedagógicas, entendendo-as como aquelas que envolvem “um assunto ou conteúdo, uma metodologia de ensino, materiais, alguma perspectiva teórica que norteia o desenvolvimento da prática e, claro, o professor e os alunos” (ARAÚJO, 2019, p. 24). Estes estudos me conduziram a mudanças significativas em minha sala de aula, e parte destas mudanças será apresentada no decorrer deste texto e também no meu Produto Educacional.

Além do aperfeiçoamento docente, meu intuito ao ingressar no mestrado profissional era de contribuir com o avanço teórico da Educação Matemática e ainda colaborar, na medida do possível, para que os estudos realizados no mestrado proporcionassem apoio em sala de aula e a outros docentes de matemática que não tiveram a mesma oportunidade que eu. Esta colaboração poderia se concretizar com a disponibilização de um material de apoio contendo exemplos de tarefas de cunho investigativo e ainda algumas propostas de

⁹O termo ‘aulas tradicionais’ será entendido nesta dissertação como caracterizado por Alro e Skovsmose (2006): “ambiente escolar em que os livros-texto ocupam papel central, onde o professor atua trazendo novos conteúdos, onde aos alunos cabe resolver exercícios e onde o ato de corrigir e encontrar erros caracteriza a estrutura geral da aula” (p. 16).

implementação da Investigação Matemática em sala de aula. Esse material foi elaborado e tornou-se o produto educacional desta pesquisa: *Histórias das minhas salas de aula*¹⁰.

A fim de atingir meus objetivos, debruçei-me no estudo da Investigação Matemática como Prática Pedagógica, tendo em vista que um dos objetivos específicos do projeto de pesquisa que participo consiste em: *esboçar um quadro teórico conceitual sobre Investigação Matemática*. Dentre os elementos que se pretende investigar para este quadro teórico estão: ações docentes para a implementação da Investigação Matemática em sala de aula; caracterização da Investigação Matemática como um processo; contribuições das interações durante o desenvolvimento da Investigação Matemática; tipos de pensamento matemático que podem ser observados neste processo, investigar como ocorre o desenvolvimento da atividade de investigação matemática, entre outros.

Com vistas a colaborar com a construção deste quadro teórico, Jéssica Concentino (CONCENTINO, 2019), que também participa deste projeto, desenvolveu sua pesquisa de mestrado focando sua atenção nas ações docentes. Após constatar que a Investigação Matemática, de um modo geral, é pouco utilizada pelos professores em sala de aula, Concentino (2019) produziu, como produto educacional, um manual composto por orientações e roteiros que podem servir de apoio ao docente iniciante no desenvolvimento da Investigação Matemática.

Costa (2018) que também participa do mesmo projeto, deu sua contribuição na construção deste quadro teórico, focando sua pesquisa nos diálogos produzidos em atividades de Investigação Matemática e como produto final do mestrado produziu uma sequência de atividades investigativas que podem oportunizar o diálogo.

Após a leitura da dissertação de Costa (2018), ponderei com minha orientadora a possibilidade de investigar o discurso¹¹ produzido pelos alunos no desenvolvimento da Investigação Matemática, com vistas a interpretar como se dá esta comunicação. Esta pesquisa seria uma continuação do trabalho

¹⁰ Ver Apêndice 7.

¹¹ Entendemos nesta dissertação o termo discurso como: "comunicação oral ou escrita que pressupõe um locutor e um interlocutor" (MICHAELIS, 2020).

desenvolvido por Costa (2018) que identificou atos dialógicos, caracterizando o diálogo na perspectiva de Alro e Skovsmose (2006) quando tratam de *cenários para investigação*.

Meu interesse na comunicação dos alunos em atividades de Investigação veio do fato de que, praticamente em todas as publicações que tratam da Investigação Matemática, e apresentam algum desenvolvimento, os alunos trabalham em equipe¹². O incentivo para que o desenvolvimento da Investigação Matemática seja realizado em grupos de alunos possui embasamento teórico nas teorias de Vygotsky (1993, 2007) para quem o conhecimento é construído na, e pela interação.

Concordando com essa teoria, Ferruzzi (2011, p. 27) defende que “a interação oportuniza o confronto de ideias”, e este confronto, de acordo com Carvalho e César (2002), permite o desenvolvimento cognitivo.

Diante disso coloquei-me na busca por referencial sobre discussões em atividades de Investigação Matemática. Em minha pesquisa encontrei as publicações de Jonei Cerqueira Barbosa e colaboradores (BARBOSA, 2006a; BARBOSA, 2006b; BARBOSA, 2007; BARBOSA, 2008; BARBOSA e SANTOS, 2007; BARBOSA e SILVA, 2011), que caracterizam tipos de discussões que ocorrem em um ambiente de Modelagem Matemática. Com base na leitura de suas produções, idealizamos¹³ investigar a presença destas discussões no ambiente de Investigação Matemática, com vistas a analisar sua contribuição para o aprendizado.

Entretanto, no decorrer da pesquisa, compreendemos a impossibilidade de articular as discussões caracterizadas por Barbosa e colaboradores na Investigação Matemática, tendo em vista que as mesmas foram cunhadas para ambientes de Modelagem Matemática, os quais possuem características diferentes da Investigação Matemática.

Assim, modificamos nosso objeto de pesquisa e consideramos então investigar que características, além das já elencadas por Costa (2018), poderiam

¹² Costa (2018); Concenterino (2019); Costa (2020); Pereira, Munhoz e Quartieri (2016); Galvão, Costa e Prado (2017); Guerra e Bisognin (2016); Brum e Pereira (2018); Mariani e Quartieri (2019); Júnior, Rocha e Moraes (2017); Ramo (2019); Baur e Fioreze (2017); Cardoso e Possamai (2019);

¹³A partir deste momento a pesquisa já não é mais minha e sim, nossa, justificando a mudança do pronome pessoal da primeira pessoa do singular para primeira pessoa do plural.

ser evidenciadas na comunicação em atividades de Investigação Matemática. A comunicação continuou sendo objeto de análise, pois como enfatizam Alro e Skovsmose (2006),

Aprender é uma experiência pessoal, mas ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais. E por conseguinte a aprendizagem depende da qualidade do contato nas relações interpessoais que se manifesta durante a comunicação entre os participantes. Em outras palavras, o contexto em que se dá a comunicação afeta a aprendizagem dos envolvidos no processo (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 12).

Assim, percebendo a atividade de Investigação Matemática como um contexto diferente do tradicional, ou de outras Práticas Pedagógicas, procuramos identificar características da comunicação em atividades de Investigação Matemática, com vistas a contribuir com a construção do quadro teórico sobre Investigação Matemática.

Deste modo temos como problema de pesquisa: *Que características evidenciamos na comunicação em atividades de Investigação Matemática?*

Para responder essa questão, o nosso objetivo geral foi identificar características da comunicação que ocorrem em atividades de Investigação Matemática em sala de aula.

Este problema de pesquisa procura ir além das pesquisas que tratam da importância atribuída à comunicação em sala de aula e/ou em atividades desenvolvidas por meio da Investigação Matemática. Procuramos, para além desta importância, investigar características da comunicação que podem contribuir para a construção de um quadro teórico para a Investigação Matemática.

1.2 Estrutura do texto

A estrutura do texto compreende 5 capítulos.

No capítulo 1, apresentamos minha trajetória acadêmica e profissional, como ocorreu a construção do problema de pesquisa e finalmente como este texto está estruturado.

No segundo capítulo, apresentamos a fundamentação teórica, abordando uma breve discussão sobre o Ensino por Investigação, a Investigação

Matemática como Prática Pedagógica, um resumo das publicações mais recentes da Investigação Matemática e finalmente abordamos a comunicação em sala de aula.

No terceiro capítulo, descrevemos a metodologia da pesquisa, o nosso problema de pesquisa, o objetivo geral, os contextos, os procedimentos metodológicos, o contexto e o registro dos dados da pesquisa e a descrição das atividades desenvolvidas.

No quarto capítulo, fizemos análise e discussão das atividades desenvolvidas nos três contextos: Ensino Superior, Minicurso do XV EPREM e Ensino Médio, além de classificar e caracterizar as falas dos alunos nas interações.

No capítulo cinco, elaboramos nossas considerações finais sobre o encerramento deste ciclo e, finalmente apresentamos as referências bibliográficas utilizadas para o desenvolvimento da pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentamos uma breve discussão sobre o Ensino por Investigação e sobre a Investigação Matemática, considerando-a uma Prática Pedagógica própria do Ensino por Investigação. No que se refere a Investigação Matemática, embasamo-nos em argumentos sustentados por autores que a defendem e apresentam pontos positivos para o Ensino da Matemática. Abordamos algumas de suas características, nosso entendimento, o porquê inseri-la em sala de aula, como utilizar, o papel do professor, a elaboração da atividade de cunho investigativo, suas potencialidades para a inserção em sala de aula e o que dizem as publicações atuais. Finalmente, trataremos da comunicação em sala de aula.

2.1 Ensino por Investigação

Quando nos referimos ao termo “Investigação”, estamos considerando a realização de um estudo minucioso, uma pesquisa com grande empenho e rigor. Isso significa que a Investigação, ao ser inserida na Educação, pode possibilitar que o aluno, com mediação do professor, desenvolva encaminhamentos detalhados, minuciosos e profundos sobre a situação problema proposta. Estes encaminhamentos permitem levar o aluno à construção do seu conhecimento, pois como salienta Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 10), o ato de “investigar” na educação, é “uma poderosa forma de construir conhecimento.”

Considerando que “investigar não é mais do que conhecer, procurar, compreender, encontrar soluções para os problemas com que nos deparamos” (PONTE et al., 2003, p. 2), o Ensino por Investigação permite que o aluno utilize conhecimentos para compreender situações, analisar problemas, indagar e investigar, por meio de interações. Estas interações geram falas que podem conduzir à construção de novos conhecimentos.

Para Ferruzzi, Borssoi e Silva (2018) o processo de investigação “não é uma atividade qualquer, e sim, uma pesquisa com dedicação, interesse, insistência, persistência, afincos e atenção”, é a busca por algo até então inexplorado, desconhecido para o aluno.

No mesmo sentido, Ponte (2003), pondera que

Realizamos uma investigação quando formulamos as nossas próprias questões e procuramos responder-lhes, de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Em contextos de ensino, aprendizagem ou formação, investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir de questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado (PONTE, 2003, p. 2).

Isto significa que muitas vezes, as situações-problemas propostas parecem ser incompreensíveis, porém, ao serem analisadas atentamente e com persistência, podem ser clareadas, despertando o interesse e o envolvimento dos alunos. Uma vez compreendidas, estas situações podem ser estudadas e desenvolvidas de forma organizada, investigativa e profunda, conduzindo a descobertas que emergem durante o processo investigativo.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), após vários ensaios na área de Educação Matemática, afirmam que o Ensino por Investigação possibilita uma rica Prática Pedagógica, pois proporciona um envolvimento ativo do aluno na construção do seu conhecimento, implicando diretamente na sua aprendizagem.

Para caracterizar o Ensino por Investigação, recorreremos ainda à Borssoi, Silva e Ferruzzi (2020). Para essas pesquisadoras, o Ensino por Investigação abarca três características fundamentais, sendo o aceite do convite para a Investigação tanto por parte do aluno quanto do professor, a primeira destas características. Na visão destas autoras, aceitar o convite significa que estes devem estar dispostos a pesquisar com afinco, indagar, elaborar hipóteses e testá-las.

Consideramos que esta característica é essencial para o sucesso da atividade investigativa, pois somente com este aceite, os alunos se envolverão ativamente no processo. Esse envolvimento poderá proporcionar que investiguem intensamente e com comprometimento a situação proposta.

A segunda característica elencada por Borssoi, Silva e Ferruzzi (2020) está relacionada com a proposta da atividade. Para as autoras, a atividade não deve ser do tipo que permita uma resolução imediata, de forma mecânica, mas que ela seja um problema para o aluno. Deste modo, “o problema não precisa necessariamente estar definido. A situação é que deve gerar um problema ao

estudante. O problema é *do* aluno” (BORSSOI; SILVA; FERRUZZI, 2020, p. 299).

Já a terceira característica é que a atividade deve proporcionar aos alunos a elaboração de testes e conjecturas. De acordo com Borssoi, Silva e Ferruzzi (2020), esta elaboração conduz o aluno a procurar por provas, generalizações, argumentações e conclusões, desenvolvendo sua capacidade cognitiva, auxiliando-o na construção do conhecimento.

Com essas características, Ferruzzi, Borssoi e Silva (2018) consideram que várias Práticas Pedagógicas podem ser consideradas de cunho investigativos, entre elas destacamos a Modelagem Matemática, a Resolução de Problemas e a Investigação Matemática. Nosso interesse nesta pesquisa volta-se para Investigação Matemática, que, de acordo com Concentino (2019), é uma Prática Pedagógica ainda pouco utilizada no Ensino de Matemática de um modo geral.

Na busca por publicações sobre o Ensino por Investigação, encontramos na literatura a expressão Cenários para a Investigação, cunhada por Ole Skovsmose como sendo o ambiente que proporciona a base para o trabalho investigativo, convidando “os alunos a formularem questões e procurarem explicações” (SKOVSMOSE, 2000, p. 3).

Para Skovsmose, os alunos são responsáveis pelo processo de exploração e explicação do problema proposto, criando assim um novo ambiente de aprendizagem. Para ele, esse ambiente pode conduzir os alunos a assumirem um papel ativo na construção do conhecimento, possibilitando “produzirem significados para os conceitos e atividades matemáticas” (SKOVSMOSE, 2000, p. 7).

Para esses pesquisadores, no Cenário para Investigação, as práticas da sala de aula podem remeter a três tipos de referências: matemática pura, semi-realidade e realidade. Na primeira delas, referência à matemática pura, a proposta tem cunho matemático, envolvendo conceitos e teorias exclusivamente matemáticos. A segunda aborda uma semi-realidade, ou seja, uma realidade construída, não tratando de uma situação real do cotidiano, e sim uma situação criada. A terceira trata da realidade do aluno, nesta é abordada uma situação do cotidiano do aluno (SKOVSMOSE, 2000).

De acordo com nosso referencial teórico, ao desenvolver tarefas de Investigação Matemática, têm-se foco em evidenciar conhecimentos puramente matemáticos, assim, a Investigação Matemática como Prática Pedagógica enquadra-se na primeira referência do Cenário para Investigação, por abordar encaminhamentos da Matemática pura.

2.2 Investigação Matemática como Prática Pedagógica

Com base em Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), compreendemos que o processo de realização da Investigação Matemática em sala de aula, engloba quatro momentos a serem realizados pelos alunos, os quais organizamos no Quadro 2.01.

Quadro 2.01 – Momentos do processo de Investigação Matemática realizados pelo aluno

1º momento	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecimento da situação. • Elaboração de questões sobre o problema.
2º momento	<ul style="list-style-type: none"> • Organização dos dados. • Formulação de conjecturas.
3º momento	<ul style="list-style-type: none"> • Tratamento dos dados. • Realização de testes. • Refinamento de conjecturas.
4º momento	<ul style="list-style-type: none"> • Socialização das conclusões. • Elaboração do relatório.

Fonte: O autor, baseado em Ponte, Brocardo e Oliveira (2009)

Esses momentos organizam uma sequência para o desenvolvimento da Investigação Matemática por parte do aluno, entretanto, não são necessariamente lineares.

Os momentos citados no Quadro 2.01, evidenciam que a Investigação Matemática é uma Prática Pedagógica que oportuniza aos alunos um envolvimento ativo no processo, pois este tem oportunidade de elaborar questões, formular conjecturas, organizar dados, realizar testes, fazendo o papel de matemático, e por meio de testes construir argumentações, conjecturas e provas, chegando a conclusões matematicamente adequadas.

A Investigação Matemática convida o aluno a se retirar da passividade, dando-lhe a oportunidade de participar ativamente do processo, explorando, interpretando, experimentando e argumentando, contrapondo-se ao ensino transmissivo (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016)

Neste sentido, Caciolato de Souza e Ferruzzi (2018) consideram que a Investigação Matemática é uma possibilidade pedagógica de ensinar Matemática de forma não tradicional, sendo uma prática diferenciada que estimula o aluno na construção do conhecimento. Esses autores entendem que

Esta alternativa é uma mudança no processo, e para tanto, faz-se necessário que o professor seja criativo e inovador, atraindo a atenção dos alunos, motivando-os em despertar o interesse pelo aprendizado, buscando a construção do conhecimento, tornando assim o processo de ensino e aprendizagem da Matemática mais ativo, atrativo e significativo para o educando (CACIOLATO DE SOUZA, FERRUZZI, 2018, p. 2).

A caracterização de Investigação Matemática que utilizamos nesta pesquisa considera três etapas propostas por Ponte, Oliveira e Brocardo (2016, p. 25) como sendo:

(i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

O percurso dessas etapas torna possível o êxito da atividade investigativa em sala de aula, tratando-se assim de um caminho que envolve tentativas que conduzem a acertos e erros, por meio da formulação e testagem de conjecturas, análises, reflexões e sistematizações, podendo levar os alunos a conclusões ou novas conjecturas. Esse caminho é trilhado por interações que geram discussões durante todo o processo.

2.2.1 Por que utilizar Investigação Matemática em sala de aula

Santos et al. (2002) e Braumann (2002) defendem que para aprender Matemática é necessário “fazer matemática”, ou seja

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na

compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo (BRAUMANN, 2002, p. 5).

O aprendizado é resultado do efeito de uma ação, de um fazer, e para aprender Matemática, o aluno deve ser um sujeito ativo, descobrindo e explorando regularidades, padrões e ordens (VAN DE WALLE, 2009), desenvolvendo ações do tipo experimentar, visualizar, argumentar, duvidar, sondar, inferir, explorar, interpretar, abstrair, procurar, etc. Para que essas ações sejam desenvolvidas, o aluno deve realizar uma investigação com afinco, por meio de testes e trocas de ideias.

Na busca por esse “aprender matemática” é que pesquisadores têm apresentado argumentos favoráveis a inserção da Investigação Matemática em sala de aula. São alguns desses argumentos que apresentaremos na sequência.

Sobre o desenvolvimento de competências e habilidades, Ponte (2003) considera que, por proporcionar momentos de experimentar, conjecturar, avaliar e comunicar, a Investigação Matemática contribui significativamente com a construção do conhecimento matemático.

Mendes (1997) também defende que o trabalho com Investigação Matemática cria um ambiente de aprendizagem estimulante, promovendo novas aprendizagens com “soluções pessoais para problemas novos, o desenvolvimento do espírito crítico e um sentido de uma maior cooperação” (MENDES, 1997, p. 221).

Para Corradi (2013), a inserção de atividades investigativas nos currículos escolares pode proporcionar aos alunos o desenvolvimento de habilidades como pensar matematicamente, tomar decisões e atribuir novos sentidos ao que se estuda em sala de aula.

Lamonato e Passos (2011) e Brocardo (2001) também incentivam a inserção da Investigação Matemática em sala de aula. Para esse último, a Investigação Matemática possibilita a compreensão do processo de matematização, enquanto os primeiros consideram que a Investigação Matemática é

um meio pelo qual pode ocorrer a aprendizagem da Matemática em um processo que busca possibilitar ao estudante momentos de produção/criação de seus conhecimentos matemáticos, respeitando o nível de desenvolvimento em que ele se encontra (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 62).

Encontramos ainda vários pesquisadores que salientam a importância da apresentação e discussão dos resultados em Investigação Matemática. Concentino (2019), por exemplo, considera este processo como o mais enriquecedor da Investigação Matemática, em consonância com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 41) quando atentam que “sem a discussão final, se ocorre o risco de perder o sentido da investigação”, pois é nesse momento que encaminhamentos são demonstrados e argumentos são construídos com o propósito de “convencer” os demais. Na mesma linha de pensamento, Tudella et al. (1999, p. 95) consideram que “realizar uma atividade de investigação e não refletir sobre ela é perder uma das suas potencialidades”.

Sobre a participação do aluno, Braumann (2002) considera a necessidade de colocar o aluno no ponto central do seu aprendizado, possibilitando que o mesmo seja ativo no desenvolvimento da sua atividade e conseqüentemente participante na construção do seu conhecimento. De acordo com o autor, para o aluno realizar esse processo deve fazer uma Investigação com afinco e, por meio da interação com os colegas, elaborar conjecturas, testá-las e justificar suas escolhas e conclusões.

Essa troca de ideias ocorre, na maioria das vezes, de forma verbal, e a verbalização para o encaminhamento da atividade ou a verbalização de conceitos e dúvidas, favorece o entendimento da situação e o rumo a ser tomado para sua solução. Geralmente, nesta verbalização, os alunos procuram “convencer” os colegas sobre o seu raciocínio, gerando discussões, com argumentações que vão clareando e norteando para a solução do problema, tendo conseqüência a construção do conhecimento coletivo, tornando esse processo ativo por parte do aluno devido ao seu envolvimento.

Diante do exposto, consideramos que ao oportunizar aos estudantes práticas de Investigação Matemática em aulas de Matemática, possibilitamos a quebra de paradigmas quanto ao Ensino da Matemática, dando uma nova visão a respeito dessa área de conhecimento, revelando assim uma Matemática que avança como o “processo humano e criativo de geração de ideias e subseqüente processo social de negociação de significados, simbolização, refutação e formalização” (D’AMBRÓSIO, 1993, p. 35).

Como se observa, a inserção da Investigação Matemática em sala de aula possibilita que o professor deixe de atuar como o “transmissor de informações” e passe a ser um orientador, permitindo que o aluno participe ativamente do processo. Sobre esse papel importantíssimo do professor é que dissertaremos na sequência.

2.2.2 Papel do Professor nas aulas com abordagem Investigativa

O professor tem um papel primordial no processo de ensino utilizando a Investigação Matemática. A ação do docente deve oportunizar a aprendizagem investigativa, tendo intervenções positivas e atentas que instiguem os alunos a investigarem (CONCENTINO, 2019).

A ação docente na Investigação Matemática não deve mais ser aquela que o professor exerce uma “dinâmica de ensino em que os alunos devem acumular conhecimentos” (D’AMBRÓSIO, 1993, p. 36), pois ao agir dessa forma, não estará oportunizando aos alunos uma construção do conhecimento, e sim uma repetição de informações. Esse processo mecânico, nem sempre permite que o aluno matematize o problema, deixando de utilizar a linguagem e os conceitos matemáticos para sua construção do conhecimento.

É comum que os alunos utilizem a linguagem natural para tratar do problema proposto, não utilizando uma linguagem Matemática. Neste sentido, o professor tem o papel de inserir uma linguagem Matemática, de forma que oportunize ao aluno construir o conhecimento matemático com uma linguagem adequada. Muitas vezes as explicitações utilizadas pelos alunos para o desenvolvimento do problema dificultam a verbalização, devido

a linguagem utilizada é pouco clara, competindo ao professor ajudar a clarificar essas ideias por meio das questões orientadoras que deve colocar, ajudando a elucidar o próprio aluno e os outros sobre o pensamento e raciocínio elaborados, para que a validação desse raciocínio surja desta discussão e não da autoridade do professor, que habitualmente é quem diz o que está certo ou errado. (SERRAZINA et al., 2005, p. 21).

Concentino (2019, p. 22) afirma que “é fundamental que os professores se disponham a agir de modo diferente diante da realidade imposta”. Esse agir

diferente, de acordo com Roldão (2007), deve ser feito utilizando dinâmicas diferenciadas que potencializem o desenvolvimento crítico do aluno, de forma que proporcione situações que instiguem e agucem a Investigação.

O professor, na Investigação Matemática, pode realizar intervenções que conduzam a “experiências que encorajam e permitam aos alunos dar valor à Matemática, ganhar confiança nas suas capacidades matemáticas” (VASCONCELOS, 1996, p. 42), de forma que se tornem “solucionadores de problemas matemáticos” (Ibidem, p. 42).

As intervenções feitas pelo professor devem ser dosadas, permitindo “que os alunos criem seus caminhos e tirem suas próprias conclusões” (CUNHA, 2009, p. 23).

Para Fonseca (2000), Oliveira (1998), Brunheiras (2000), Brocardo (2001) e Varandas (2000), nas aulas ministradas por meio da Investigação Matemática, o professor oportuniza aos alunos um novo olhar para a Matemática, visto que uma aula de cunho investigativo possibilita uma mudança de atitude mútua.

Essa assertiva feita pelos autores acima, referente às aulas que utilizam a Investigação Matemática como Prática Pedagógica, permite uma reflexão para o professor da sua prática de ensino, e para os alunos, uma possibilidade de participar ativamente da construção de conhecimentos.

Dependendo do nível de familiarização com a Investigação Matemática, pode gerar um desconforto tanto para o aluno quanto para o professor, assim, o professor é desafiado a “gerenciar os grupos nos momentos iniciais” (CONCENTINO, 2019, p, 36).

Nesse desafio, o professor deve assumir o papel de mediador do conhecimento ao inserir atividade de Investigação Matemática em suas aulas. Para isso, deve adaptar sua Prática Pedagógica, de forma que desperte o espírito investigativo nos alunos (GOLDENBERG, 1999).

Para que a ação de estimulador e mediador do professor seja positiva, ele deve estar atento para a singularidade da turma, suas especificidades (individuais e coletivas) e o tempo necessário para o desenvolvimento da atividade por parte do aluno.

Para isso faz-se necessário que o professor leve em conta que:

[...]a tarefa deverá proporcionar uma actividade de investigação para todos os alunos e também ter em conta a sua realidade cognitiva e cultural, de modo a despertar-lhes a curiosidade e o entusiasmo, proporcionando-lhes experiências diversificadas e desafiantes, fazendo apelo aos seus conhecimentos prévios e intuições (TUDELLA et al, 1999, p. 88).

Outro ponto em que o professor deve ficar atento, é a flexibilização do tempo para o desenvolvimento da atividade investigativa, pois cada aluno tem seu tempo, seu ritmo cognitivo, atentando para que não prolongue muito, afim de evitar desmotivação e dispersão por parte dos alunos (BAPTISTA, 2010).

Ainda sobre o papel do professor na Prática Pedagógica investigativa, esse tem suma importância, pois sua interação com os alunos não deve ser a mesma das aulas tradicionais, deve agir de forma motivadora e estimuladora, com o objetivo de que o aluno não desista.

Muitas vezes, o aluno não chegará a conclusão ou até mesmo não conseguirá de imediato desencadear o processo investigativo, visto que, atividades desse cunho abrangem um maior nível de raciocínio, análise, teste de conjecturas, discussões, experimentos e registros, encaminhamentos estes que os alunos, podem não estar acostumados.

Essa adaptação da Prática Pedagógica por parte do professor deve incluir a ação de “saber ouvir o que o aluno tem a dizer, considerar as concepções e o ponto de vista do estudante, para assim elaborar questionamentos de forma a direcioná-lo em suas próprias descobertas”, (CONCENTINO, 2019, p. 37).

Os questionamentos feitos pelo professor para estimular os alunos durante o desenvolvimento da atividade investigativa, não devem ser com perguntas diretas, que já tem uma resposta pronta, mas sim, com indagações que os levem a pensar, refletir e testar, oportunizando a construção do conhecimento que levará à aprendizagem (CONCENTINO, 2019).

Dependendo da intenção do professor ao questionar o aluno, esse questionamento pode provocar o raciocínio, instigar, incentivar, validar, auxiliar na administração de conflitos, estimular o confronto de pontos de vistas e promover reflexões e argumentações.

Sintetizando essas intenções, Concentino (2019) elaborou o Quadro 2.02, que auxilia o docente nos questionamentos que o professor deve promover no desenvolvimento da Investigação Matemática em sala de aula.

Quadro 2.02 - Questionamentos do professor no ambiente de Investigação Matemática
Questionamentos que o professor orientador pode promover

Provocando o raciocínio	Por quê? Como? Me expliquem...
Instigando	Têm certeza disso?
Incentivando	Muito bem! Mas e se...
Validando	Continuem assim! Estão no caminho certo...
Auxiliando na administração de conflitos	Vocês levaram em consideração o que o colega falou? Por quê?
Estimulando o confronto de pontos de vistas	Discutam as duas opiniões, por que não concorda com o que ele disse?
Promovendo a reflexão e argumentação	Explique como você chegou a esta conclusão?

Fonte: Concentino (2019, p. 38)

Como já dito, tanto professor quanto aluno devem aceitar o convite para a Investigação, no entanto, o professor tem um papel fundamental nesse processo, desde a elaboração da atividade, durante sua execução nos pequenos grupos, estimulando as discussões entre eles, bem como na sua finalização por meio da socialização na discussão coletiva.

O professor deve ter suas ações definidas para serem encaminhadas de forma positiva durante o desenvolvimento da Investigação Matemática. Essas ações foram organizadas por Concentino (2019) no Quadro 2.03, com o objetivo de orientar o professor durante todas as etapas da Investigação Matemática.

Quadro 2.03 – Ação do docente no desenvolvimento da Investigação Matemática

Etapas da Investigação Matemática	Ações do Professor
Arranque da aula	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentar as atividades aos alunos que, dependendo do grau de familiaridade, pode proporcionar mais ou menos informações. • As informações podem ser apresentadas de forma escrita, oral ou mista.
Desenvolvimento do trabalho	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar a turma em pequenos grupos. • Convidar e estimular o aluno a envolver-se. • Despertar a curiosidade, usando as ideias dos alunos como propulsoras do conhecimento. • Provocar o raciocínio dos alunos, encorajando-os a elaborar explicações e relacionar as ideias com

	<p>experiências anteriores, nunca desestimulando diante de uma explicação equivocada.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Auxiliar com questões orientadoras para estruturar o pensamento, dosando o apoio e as intervenções. ● Incentivar os alunos perante as dificuldades para adquirir confiança no trabalho que estão elaborando. ● Compartilhar ideias entre professor e aluno num ambiente em que ambos são aprendizes. ● Colocar os alunos em ação e responsáveis em desempenhar um “papel ativo” no processo de aprendizagem. ● Desafiar os alunos, conduzindo-os a buscar em sua estrutura cognitiva relações e conceitos, exercitando seu poder de observação e generalização. ● Gerenciar o tempo com flexibilidade, oportunizando aos alunos o tempo de maturação, para observar, conjecturar (levantar hipóteses), abstrair, formular questões, testar conjecturas, etc. ● Dar oportunidade para compreenderem que resposta não é algo pronto, há um processo a ser desenvolvido para obterem suas conclusões, desenvolvendo a compreensão e autonomia dos envolvidos. ● Desenvolver a atitude de construtores do próprio conhecimento, observando que a matemática não é um simples conjunto de técnicas.
<p>Discussão da investigação e conclusão final</p>	<p>Criar um ambiente com o “grupo maior” propício a:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Verbalizar: expor e explicar o pensamento e raciocínio elaborados, assim como suas conclusões. ● Troca de ideias. ● Confrontar opiniões e argumentos, onde o receio de “arriscar” conjecturas é relativamente reduzido. ● Validar o raciocínio obtido por meio da discussão. ● Elaborar relatórios finais. Esse momento faz com que os alunos reflitam sobre o trabalho realizado estruturando as ideias e ao professor recolhe o registro de informações sobre o nível de desenvolvimento da atividade. <p>Esse ambiente conta com orientações e auxílio do professor em busca do fechamento da atividade.</p>

Fonte: Concentino (2019, p. 40)

Finalmente, exprimimos que o professor deve estar ciente do seu papel para o sucesso de uma atividade de Investigação Matemática, para assim executá-la de forma positiva. Não deixando de lado a importância da elaboração da atividade a qual deve oportunizar o aprendizado.

2.2.3 Elaboração da atividade investigativa

De acordo com Concentino (2019), as atividades investigativas não são atividades triviais, devendo proporcionar ao estudante a oportunidade de construir seu conhecimento por meio de suas ações. Neste sentido, essa pesquisadora, fundamentada em Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), considera que o professor deve fazer grande investimento na preparação das atividades, refletindo na sua elaboração.

A importância dada a esse preparo é também salientada por Caciolato de Souza e Ferruzzi (2019, p. 4) ao afirmarem que “todas as etapas são igualmente importantes, porém, consideramos que a elaboração merece muita atenção, tendo em vista que dependendo de como for planejada pode ou não configurar uma atividade investigativa”.

A mesma preocupação é ponderada por Oliveira et al. (1999) quando consideram que a elaboração da atividade de Investigação Matemática não é uma tarefa fácil, envolvendo “um trabalho criativo para o qual não há receitas” (p. 100).

No mesmo sentido, Corradi (2011, p. 170) considera que o professor deve ter em mente seus objetivos, recorrendo “a sua criatividade para dar forma à tarefa, adaptando situações, reconstruindo as questões da maneira que melhor servir aos seus objetivos”.

Concentino (2019, p. 33) concorda com Corradi (2011) ao afirmar que, durante o processo de elaboração da atividade, “o professor pode optar por desenvolver atividades já elaboradas, adaptar ou construir algo novo, sempre considerando as características de sua turma, o objetivo e o grau de familiaridade”.

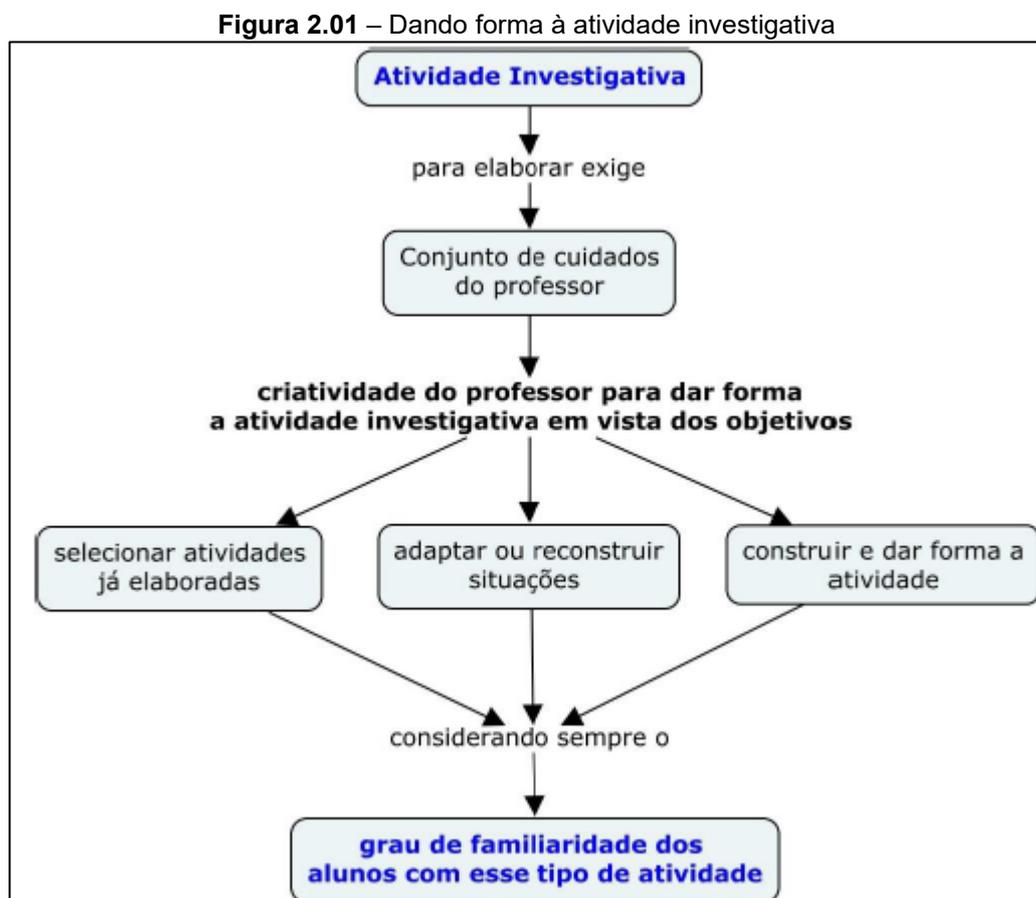
Durante a elaboração da atividade, deve-se sempre levar em consideração que a mesma não pode ser de tal forma, que o aluno tenha imediatamente a resposta.

O aluno deve envolver-se no processo, investigando possibilidades, testando conjecturas, inferindo possibilidades e validando conclusões, sempre sendo indagados e estimulados em pensar e raciocinar para construir o conhecimento (CACIOLATO DE SOUZA; FERRUZZI, 2019, p. 4).

Para oportunizar o envolvimento citado por Caciolato de Souza e Ferruzzi (2019), as atividades devem ser preferencialmente realizadas em pequenos

grupos (ANTONIUS et al., 2007) e proporcionarem a exploração de diferentes caminhos (CONCENTINO, 2019).

Para o processo de elaboração de uma atividade investigativa, Concentino (2019) ilustrou na Figura 2.01 um encaminhamento a ser tomado, dando assim forma a atividade investigativa.



Fonte: Concentino (2019, p. 34)

Com base em Baptista (2010) e Tudella et al., (1999), Concentino (2019) considera que as atividades de Investigação Matemática podem ser classificadas conforme o nível de complexidade, podendo ser 'estruturadas', 'menos estruturadas' ou 'abertas'.

Atividades 'estruturadas' são aquelas que contêm roteiros de encaminhamentos a serem tomados. Essas apresentam questões que direcionam o processo de investigação a soluções previamente definidas pelo professor.

Atividades 'menos estruturadas' são as que apresentam uma questão que norteia a investigação. Esse tipo de atividade pode oportunizar o surgimento de

outros questionamentos por parte dos alunos, levando a procedimentos distintos para solucionar o problema. Os alunos formulam conjecturas testando hipóteses, discutindo os resultados obtidos.

Atividades ‘abertas’ não apresentam nenhum direcionamento para os alunos, eles são os responsáveis por todo o processo. Agem ativamente no desenvolvimento da investigação, formulando questões, tomando encaminhamentos distintos, de acordo com o(s) problema(s) que propõe(m) investigar, podendo chegar a soluções diferentes uns dos outros. Essas atividades geralmente são do tipo que os alunos não estão habituados, pois permitem que cheguem em soluções diferentes, dependendo do direcionamento que levam.

Podemos observar, pela descrição de cada tipo de atividade, que a utilização em sala de aula depende do objetivo do professor e da familiaridade com a Investigação Matemática, por parte tanto do professor quanto dos alunos. Vale salientar que, “uma mesma situação pode ter mais de um desenvolvimento e, conseqüentemente, resultados diferentes; porém todos satisfazendo a situação” (CONCENTINO, 2019, p. 25).

Concentino (2019) defende que o professor deve estar preparado para essas situações que venham a surgir, pois no primeiro momento, as atividades demonstram serem confusas, até que as ideias sejam organizadas para dar início à investigação, surgindo assim descobertas, que levam a hipóteses e testes de conjecturas, para a construção de “argumentação e legitimação de suas respostas” (CUNHA, 2009, p. 1).

2.2.4 O que dizem as publicações atuais sobre Investigação Matemática

Com o objetivo de fazer uma análise das pesquisas acadêmicas atuais sobre Investigação Matemática no Brasil, realizamos uma busca no Google Acadêmico em 10/05/2020, utilizando o termo “Investigação Matemática”, com data a partir do ano de 2016. Nesta pesquisa encontramos 58 registros, desses, selecionamos aqueles que possuíam o termo “Investigação Matemática” nas palavras-chave, reduzindo para 22 artigos. Na sequência apresentamos um resumo do que trata cada um desses artigos.

O artigo “A Investigação Matemática, como Prática Pedagógica, favorece a ocorrência do diálogo no ensino de Matemática?”, escrito por Juliana Aparecida Alves da Costa e Elaine Cristina Ferruzzi, (COSTA; FERRUZZI, 2020), traz um estudo teórico da Investigação Matemática como Prática Pedagógica, investigando a ocorrência do diálogo como um facilitador do processo de aprendizagem de Matemática. As autoras inferiram nessa pesquisa que a Investigação Matemática oportunizou a ocorrência de diálogos, conforme preconizado por Alro e Skovsmose (2010) e esse diálogo contribuiu para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

O artigo “A pesquisa em investigação matemática: sobre a formação de professores nas produções brasileiras”, escrito por Paulo Wichnoski e Tiago Emanuel Klüber, (WICHNOSKI; KLÜBER, 2016), realiza um metaestudo a fim de compreender o que se mostra das produções sobre a Investigação Matemática, no que tange à formação de professores. Nesse artigo, evidenciaram que tem ocorrido um esforço quanto à inserção da Investigação Matemática na formação de professores, no entanto os autores consideram necessário superar os estudos de casos e engendrar estudos pormenorizados que explicitem meios possíveis de integrar teoria e prática ao longo de todo o processo de formação do professor.

O artigo “A (re)formulação de Tarefas de Investigação Matemática”, escrito por Paulo Wichnoski e Tiago Emanuel Klüber, (WICHNOSKI; KLÜBER, 2018), trata das possibilidades de reformular tarefas, presentes nos livros didáticos, para que venham a ter um cunho Investigativo, oferecendo ao professor um aporte teórico para que possa elaborar ou reformular tarefas na perspectiva da Investigação Matemática. Este artigo finaliza oferecendo uma visão ao professor de como (re)formular tarefas para Investigação Matemática.

O artigo “Atividades investigativas: possibilidade de ensino de conceitos trigonométricos no triângulo retângulo na Licenciatura em Matemática”, escrito por Ademar Barros Pereira, Angélica Vier Munhoz e Marli Teresinha Quartieri, (PEREIRA; MUNHOZ; QUARTIERI, 2016), faz uma análise das conjecturas que emergiram de atividades investigativas realizadas por alunos da Licenciatura em Matemática, envolvendo conceitos de trigonometria no triângulo retângulo. Analisando os dados dessa pesquisa, os autores puderam observar que, a

atividade possibilitou que os alunos criassem conhecimentos matemáticos e também compreendessem conceitos trigonométricos no triângulo retângulo. Observaram ainda, que a discussão ocorrida na interação oportunizou elaboração de argumentos, por meio de conjecturas para justificar e demonstrar os procedimentos adotados, afim de defender os resultados.

O artigo “Construção de funções a partir de problemas geométricos: uma abordagem investigativa”, escrito por Maria Elisa Esteves Lopes Galvão, Nielce Meneguelo Lobo da Costa e Maria Elisabette Brisola Brito Prado, (GALVÃO; COSTA; PRADO, 2017), teve o objetivo de identificar possibilidades da abordagem investigativa para o ensino de funções, a partir de problemas geométricos. Para o processo investigativo utilizaram um quadro geométrico, material concreto e o Geogebra. As autoras concluíram que as atividades investigativas desenvolvidas possibilitaram uma relação, por parte dos alunos, entre Geometria e Funções.

O artigo “Phillips: 66 possibilidades de uma intervenção pedagógica”, escrito por Sabrina Monteiro, Luís Felipe Pissaia, Juliana Thomas e Juliana Coelho Araújo Nunes (MONTEIRO et al.; 2019), trata de um relato de experiência, que refletiu acerca da aplicação da estratégia de ensino Phillips 66, a qual possibilitou desafiar os alunos a defenderem suas ideias, argumentarem, julgarem e tomarem decisões. Os autores perceberam que os alunos estavam acostumados com uma aula tradicional rotineira, sendo esta estratégia pedagógica uma possibilidade rica para ocorrer diálogos, discussões e debates.

O artigo “Educação Estatística e desenvolvimento do sentido de número: uma inter-relação possível”, escrito por Sandra Gonçalves Vilas Bôas Campos e Maria Lúcia Lorenzetti Wodewotzki (CAMPOS; WODEWOTZKI, 2018), analisa como a Educação Estatística pode contribuir para que crianças do 1º ano do ciclo de alfabetização desenvolvam o Sentido de Número, utilizando tarefas de Investigação Matemática. As autoras inferiram que o Ensino de Estatística desenvolvido com atividades investigativas possibilitou que as crianças desenvolvessem o Sentido de Número.

O artigo “Investigação Matemática na sala de aula: ensino de conceitos de estatística para o 8º ano do Ensino Fundamental”, escrito por Sheila Heydt Réquia Guerra e Vanilde Bisognin, (GUERRA; BISOGNIN, 2016), analisa se a

Investigação Matemática apoiada nas TIC's, contribui para o ensino e a aprendizagem dos conceitos de Estatística, em uma turma de 8º ano. As autoras puderam evidenciar que a Investigação Matemática contribuiu para o ensino e a aprendizagem dos conceitos da Estatística, além do envolvimento ativo e colaborativo dos alunos, propondo conjecturas e questionamentos, respondendo aos problemas propostos e também refletindo sobre as respostas obtidas.

O artigo “Implicações da Investigação Matemática no espaço educacional com a inserção das Tecnologias Digitais”, escrito por Aline de Lima Brum, Elaine Corrêa Pereira (BRUM; PEREIRA, 2018), fez uma análise do potencial de uma Prática Pedagógica que inseriu Smartphones, Facebook, WhatsApp e Geogebra nas aulas de Matemáticas. As autoras inferiram neste artigo que, para desenvolver uma nova Prática Pedagógica, é preciso abandonar velhas concepções e lançar ações que priorizem não só a alfabetização tecnológica, mas também permitam expandir os conhecimentos em atividades de investigação.

O artigo “Interpretação cartográfica associada à Investigação Matemática: possibilidade de fomentar a escrita e o ensino de conceitos matemáticos” escrito por Mateus Mariani e Marli Teresinha Quartieri (MARIANI; QUARTIERI, 2019), analisou o desenvolvimento de atividades de Cartografia utilizando a Investigação Matemática. As pesquisadoras concluíram que a utilização de Investigação Matemática como uma metodologia de ensino, pode despertar o interesse dos alunos, o avanço na construção do conhecimento por meio das atividades investigativas, possibilitando aos alunos a aplicação de conteúdos matemáticos em outro contexto, à cartografia, além da necessidade de incentivo à escrita argumentativa nas aulas de Matemática.

O artigo “Invenção e descoberta na aula de Matemática: um projeto de ensino, no 6º ano do Ensino Fundamental”, escrito por Marcos Antônio Gonçalves Júnior, Luciana Parente Rocha e Moema Gomes Moraes (JÚNIOR; ROCHA; MORAES, 2017), relata a experiência de um projeto de ensino desenvolvido por um grupo de professores na turma do 6º ano, utilizando a Resolução de Problemas e a Investigação Matemática. Esse artigo propõe modos de estruturar aulas de Matemática, utilizando a Resolução de Problemas

e a Investigação Matemática, colaborando assim, no enquadramento das novas ordens institucionais e curriculares.

O artigo “Investigação e o Ensino de Matemática: uma proposta didática no desenvolvimento do conteúdo de estatística”, escrito por Luciano Bernardo Ramo (RAMO, 2019), faz uma avaliação de uma proposta didática utilizando a Investigação como Prática Pedagógica aplicada ao conteúdo de estatística. O autor considera que a proposta, de acordo com a fala dos alunos, mostrou-se eficiente por contribuir com a aprendizagem. Também observou que os debates oportunizaram o desenvolvimento do senso crítico e a formação da cidadania dos alunos. Concluiu que as Práticas Pedagógicas, quando utilizadas de forma correta em sala de aula, são capazes de atrair a atenção dos alunos, promovendo uma aprendizagem significativa.

O artigo “Investigação Matemática, Geogebra e Produção de Vídeos no Ensino e Aprendizagem de quadriláteros e triângulos”, escrito por Anelise Pereira Baur e Leandra Anversa Fioreze (BAUR; FIOREZE, 2017), faz uma análise do processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos relacionados a quadriláteros e triângulos, numa turma de 6º ano. Nessa pesquisa foi utilizado o Geogebra como ferramenta para a investigação. Na análise da aprendizagem, utilizou os níveis de Van Hiele para classificar os níveis de pensamento geométrico. As autoras concluíram que ocorreu progresso dos níveis de pensamento dos estudantes, quanto a aprendizagem de quadriláteros e triângulos.

O artigo “Investigando múltiplos e divisores”, escrito por Clarissa Gonçalves Lira, Bianca Bitencourt da Silva, Fabielli Vieira de July, Jéssica Marilda Gomes Mendes, Jussara Aparecida da Fonseca e Maurício Ramos Lutz (LIRA; et al., 2016), faz um relato de experiência desenvolvido em oficinas pelos integrantes do PIBID¹⁴. Para a atividade foi utilizada a Investigação Matemática envolvendo múltiplos e divisores. Os autores observaram a relevância da utilização de métodos diferenciados para trabalhar matemática em sala de aula. Essa observação se deu por meio do interesse dos alunos em aprender.

¹⁴ PIBID - Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

O artigo “O construir-se professor ao estar-com a Investigação Matemática”, escrito por Paulo Wichnoski e Tânia Stella Bassoi (WICHNOSKI; BASSOI, 2019), faz uma análise sobre a relevância significativa no processo de estar-com e constituir-se professor no contexto da Investigação Matemática, respondendo a indagação sobre quais aspectos se revelaram significativos no processo de constituir-se professor ao estar-com a Investigação Matemática, no contexto de um grupo de formação. Os pesquisadores inferiram que a experiência e a relação eu-outro se mostraram relevantes na formação, podendo observar também que a formação ocorreu na esfera subjetiva do eu e também na esfera intersubjetiva do eu-outro-mundo, aspectos esses revelados como significativos à constituição do ser professor com a Investigação Matemática.

O artigo “Resolução de Problemas e Investigação Matemática: um processo de intervenção formativa para licenciandos em Matemática”, escrito por Ricardo Gonçalves e Norma Suely Gomes Allevato (GONÇALVES; ALLEVATO, 2018), faz uma resenha crítica da tese “Resolução de problemas e investigação matemática: um processo de intervenção para licenciandos em Matemática”, cuja autora é Gabriela Casto Silva Cavalheiro, sob orientação da professora doutora Renata Cristina Geromel Meneghetti. A tese tem como problemática: Quais as contribuições, para licenciandos em Matemática, de um processo de intervenção formativa que envolve teoria, prática e análise da resolução de problemas e da Investigação Matemática como metodologias de ensino e aprendizagem da Matemática? Analisaram que a autora apresenta a importância da Investigação Matemática e da Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem, evidenciando a aprendizagem significativa de acordo com David Ausubel e Marcos Antônio Moreira. Os autores concluem que a tese é bem estruturada e propicia para o ensino de Matemática uma análise e discussão de dados favoráveis ao trabalho do professor, fornecendo reflexões acerca da teoria e prática das duas metodologias.

O artigo “Resolver e Investigar: possibilidades para o ensino de funções exponenciais”, escrito por Dinei Cardoso e Janaína Poffo Possamai (CARDOSO; POSSAMAI, 2019), faz a análise de uma prática de resolução de problemas na perspectiva de uma abordagem investigativa, para o ensino de funções exponenciais em uma turma do Ensino Médio. Para análise,

desenvolveram uma prática de plantio de sementes de feijão, buscando uma função que representasse esse fenômeno. Os autores verificaram que os alunos foram ativos no processo de construção do conhecimento, fazendo matemática, explorando padrões, testando hipóteses, validando resultados e procurando caminhos para resolver o problema proposto. Inferiram também que os alunos aumentaram sua confiança em relação à matemática, pois tiveram a possibilidade de expor suas ideias para serem discutidas com os demais colegas. Finalmente, os pesquisadores inferiram que, mesmo apresentando diferenças quanto a implementação em sala de aula, as duas práticas possibilitaram ao estudante assumir o papel de protagonista da sua aprendizagem.

O artigo “Educação Matemática Crítica: possibilidade de uma Investigação Matemática”, escrito por Vanessa Scheeren, Débora Sudatti Guimarães e Sonia Maria da Silva Junqueira (SCHEEREN; GUIMARÃES; JUNQUEIRA, 2017), faz uma análise documental dos Projetos Políticos Pedagógicos (PPP) de duas instituições de ensino de Educação Básica, com o objetivo de verificar a possibilidade do desenvolvimento do trabalho, na perspectiva da Educação Matemática Crítica, casar com o objetivo do PPP das instituições, nas perspectivas filosóficas e pedagógicas para o desenvolvimento deste trabalho. Os autores, após análise dos documentos, constataram que há a possibilidade do desenvolvimento da pesquisa, pois os PPP apresentam pontos favoráveis à Educação Matemática Crítica.

O artigo “Uma proposta didática para abordagem de problemas de otimização em diferentes níveis de ensino”, escrito por Reginaldo Fabiano da Silva Afonso, José Carlos Pinto Leivas (AFONSO; LEIVAS, 2018), faz a análise da atividade cuja questão aplicada é “Dado um octógono regular, construir o quadrado inscrito de maior área e o quadrado circunscrito de menor área”. Essa proposta foi sugerida a ser implementada tanto da Educação Básica quanto na Superior, com a utilização do Geogebra. Verificaram que essa atividade proporcionou a participação ativa dos alunos, com o fomento do professor, possibilitando que o aluno elaborasse interações envolvendo saberes matemáticos para resolver o problema.

O artigo “Tarefas de Investigação Matemática em livros didáticos do 8º ano aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático”, escrito por Maiara Aline Junkerfeurbom e Tiago Emanuel Klüber (JUNKERFEURBOM; KLÜBER, 2017), faz uma análise dos livros didáticos de Matemática, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD, 2014), averiguando se há presença de tarefas com características de Investigação Matemática, quais são essas tarefas, com que frequência aparecem e o que isso revela. Os autores concluíram que os livros didáticos analisados não apresentam potencial de atividades investigativas em seu contexto, inferindo que esses materiais estão propensos a perspectivas baseadas no paradigma do exercício.

O artigo “Um olhar Lakatosiano sobre a tendência investigação matemática”, escrito por Paulo Wichnoski e Tiago Emanuel Klüber (WICHNOSKI; KLÜBER, 2015), faz uma análise dos aspectos que caracterizam a Investigação Matemática no contexto da Educação Matemática, como um programa de pesquisa na perspectiva Lakatosiana. Os autores concluíram que pelas atividades investigativas possuírem naturezas diversas e estilos variados, apresentam um estilo multifacetado, podendo afirmar que caminha em um processo inicial para um status de pesquisa bem sucedido. Inferiram também que a pesquisa em Investigação Matemática assume um núcleo firme: a matemática, o ensino, a aprendizagem, a comunicação e as atividades investigativas. Finalmente notam que a pesquisa em Investigação Matemática é destacada em análises de experiências pedagógicas com pouca teorização, sugerindo que a comunidade acadêmica se volte para pesquisas teóricas nessa área.

Finalmente, o artigo “Utilizando a Investigação Matemática para o ensino de frações”, escrito por Jéssica Marilda Gomes Mendes, Bianca Bitencourt da Silva, Bruno Santana do Prado, Clarissa Gonçalves Lira, Mauricio Ramos Lutz e Jussara Aparecida da Fonseca (MENDES; et al., 2016), analisam uma oficina, aplicada a alunos do Ensino Fundamental, com uma metodologia diferenciada, coordenada por bolsistas do PIBID. A oficina foi norteada a luz da Investigação Matemática, abordando o conceito de fração. Os autores puderam observar nessa pesquisa a importância dos alunos estarem envolvidos em momentos que

os levem a pensar, questionar e serem questionados, tornando às aulas mais agradáveis e prazerosas.

A leitura dessas publicações nos indicam que diversas pesquisas sobre/com Investigação Matemática têm sido realizadas nos últimos anos, entretanto, como bem salientam Wichnoski e Klüber (2015), apresentam um estilo multifacetado, e ainda, em sua maioria, analisam experiências pedagógicas, validando (ou não) os argumentos que sustentam sua implementação em sala de aula.

Logicamente, por se tratar de um campo ainda pouco explorado no Brasil, (WICHNOSKI; KLÜBER, 2015), é natural que as pesquisas, e conseqüentemente as publicações tomem este norte. Esta constatação nos indica que estamos no caminho certo ao investigar que características podem ser evidenciadas na comunicação em atividades de Investigação Matemática, com o objetivo de contribuir para o desenho de um quadro teórico conceitual.

2.3 Comunicação em sala de aula

Para falar de comunicação em sala de aula é importante primeiramente fazermos uma definição geral sobre esse termo. Dicio (2019) define comunicação como a “ação ou efeito de comunicar, de transmitir ou de receber ideias, conhecimentos, mensagens etc., buscando compartilhar informações.” Esse mesmo dicionário descreve que o ato de comunicar “agrega conhecimentos, técnicas ou métodos acerca da transmissão e da recepção de ideias, mensagens”. Michaelis (2019), por sua vez, define comunicação como sendo o “ato que envolve a transmissão e a recepção de mensagens entre o transmissor e o receptor através da linguagem oral, escrita ou gestual, por meio de sistemas convencionados de signos e símbolos”. Desse modo, entendemos comunicação como sendo uma ação que envolve troca de informações entre duas ou mais pessoas, sendo ela oral, escrita ou gestual.

Reestruturando essa definição, Araújo e Borralho (2018), baseados em Bitti e Zani (1997), consideram que a comunicação humana ocorre por meio de dois aspectos: a verbal e a não-verbal. Esses autores definem que a comunicação verbal é a “que consiste em transmitir ou fazer circular informações

através da fala”, e a não-verbal se baseia “nas informações que provêm da observação do comportamento do interlocutor, seu estado emotivo ou as atitudes interpessoais”. Este tipo de comunicação presta “atenção não só ao que ele diz, como também ao seu tom de voz e aos seus movimentos gestuais” (ARAÚJO; BORRALHO, 2018, p. 216).

Neste trabalho, trataremos a comunicação no aspecto verbal, pois investigaremos as falas dos alunos em atividades de Investigação Matemática em sala de aula.

Nas aulas de matemática, a comunicação esperada é aquela em que os alunos falem e conjecturem entre eles, com o intermédio do professor, como forma de desenvolver o conhecimento e construir ideias matemáticas, devendo essa comunicação ser bilateral, onde cada aluno deve respeitar o outro e saber o seu momento de falar (ARAÚJO; BORRALHO, 2018).

Não podemos falar de comunicação em sala de aula sem referenciar aos trabalhos de Helle Alro e Ole Skovsmose. Esses pesquisadores propõem um modelo que trata da relação entre a qualidade da comunicação e a aprendizagem, denotado por modelo de Cooperação Investigativa (ALRO; SKOVSMOSE, 2010). O modelo fundamenta-se na premissa de que a qualidade de comunicação na sala de aula influencia na qualidade de aprendizagem da matemática. Para eles, a comunicação mútua gera uma ‘cooperação investigativa’, e nesta cooperação, a comunicação possui como característica básica a ‘escuta ativa’. Nessa escuta, o ouvinte não é passivo na recepção das palavras, mas, atento para compreender, com vistas a agir ativamente na solução do problema, estabelecendo contato (ALRO; SKOVSMOSE, 2010).

Esse tipo de comunicação busca incitar práticas de comunicação investigativas, apresentando como elementos, “estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar”, (ALRO; SKOVSMOSE, 2010, p. 69).

De acordo com esses autores, apesar da aprendizagem ser uma experiência pessoal, a mesma “depende da qualidade do contato nas relações interpessoais que se manifesta durante a comunicação entre os participantes”, (ALRO; SKOVSMOSE, 2010, p. 12), ou seja, uma comunicação de qualidade pode influenciar positivamente na aprendizagem do indivíduo.

Neste sentido, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) considera que a interação, que é mediada pela comunicação, proporciona a elaboração de conjecturas e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Da mesma forma, Araújo e Borralho (2018) enfatizam a importância da comunicação em sala de aula, pois de acordo com essas pesquisadoras, a comunicação tem o papel de transformar a sala de aula em um ambiente onde os alunos tenham voz e participem ativamente do processo. Para que isso ocorra, o professor deve envolver os alunos no discurso do grupo (NCTM, 1991), mediando e provocando as discussões na sala de aula (ARAÚJO; BORRALHO, 2018).

Esse envolvimento por parte dos alunos, faz com que se interessem e participem das discussões desencadeadas em sala de aula, “comunicando suas ideias matemáticas, fazendo conjecturas, tirando dúvidas coletivamente e formulando soluções” (ARAÚJO; BORRALHO, 2018, p. 219), oportunizando assim, que se tornem o principal ator no processo. Essa comunicação, de acordo com esses mesmos autores, é uma forma de promover a aprendizagem, compartilhando informações que objetivam uma construção do conhecimento matemático de forma coletiva.

Para que ocorra um compartilhamento de informações produtiva, os alunos devem confiar uns nos outros, estando sempre abertos para discussões produtivas, com uma relação de equilíbrio e respeito (ALRO; SKOVSMOSE, 2010). Os referidos autores, defendem que “se os participantes da comunicação não entendem ou não aceitam as perspectivas dos demais ou não compartilham uma perspectiva, então a comunicação não acontece”, (ALRO; SKOVSMOSE, 2010, p, 29).

Não podemos deixar de salientar que, para a comunicação ser eficaz, o professor tem um papel importante, mantendo sempre um “ambiente harmonioso entre os participantes da sala de aula, onde a comunicação possa ocorrer de forma natural” (ARAÚJO; BORRALHO, 2018, p. 224).

Neste ambiente harmonioso, o professor é o facilitador, providenciando os recursos para a aprendizagem, e os alunos, por sua vez, assumem um novo papel, saindo do comodismo tradicional e participando ativamente do processo,

o que possibilita o surgimento de novos padrões de comunicação (ALRO; SKOVSMOSE, 2010).

Ao oportunizar ao aluno esse ambiente, cria-se a possibilidade de “estabelecer ‘cultura’ de sala de aula na qual os alunos realmente desejem realizar aproximações” (ALRO; SKOVSMOSE, 2010, p. 49), permitindo um ambiente não tradicional e investigativo para as aulas de Matemática.

Nesse ambiente “os alunos podem formular questões e planejar linhas de investigação de forma diversificada. Eles podem participar do processo de investigação” (ALRO; SKOVSMOSE, 2010, p. 55). Com isso, os alunos saem da zona de conforto e entram na zona de risco, permitindo o surgimento de diferentes padrões de comunicação, tendo como consequência a possibilidade de “novas qualidades de aprendizagem” (ALRO; SKOVSMOSE, 2010, p. 55).

Assim, os padrões da comunicação que existem nas aulas de cunho expositivo podem mudar desencadeando novos discursos, novos tipos de cooperação e conseqüentemente novas formas de aprendizagem (ALRO; SKOVSMOSE, 2010).

Vale ressaltar que o propósito de Skovsmose (2000) ao preconizar os cenários para investigação, preocupa-se com a Educação Matemática Crítica, a qual, atenta para o desenvolvimento da ‘materia’ que, além das habilidades matemáticas, também se refere à “competência para interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática (SKOVSMOSE, 2000, p.68). Desse modo, o modelo proposto por Alro e Skovsmose (2010) favorece questionamentos sobre o papel da matemática na sociedade e ainda sobre a natureza da matemática. Por outro lado, o modo como entendemos a Investigação Matemática não se preocupa com esta dimensão social da matemática, mas sim, com o desenvolvimento de conceitos puramente matemáticos. Entretanto, o modo como esses autores pensam à comunicação em sala de aula assemelha-se ao nosso entendimento, portanto é passível de ser objeto de investigação nesta pesquisa.

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

3.1 Problema e objetivo da pesquisa

Conforme enunciado na introdução deste trabalho, nossa pesquisa versa sobre a comunicação em atividades de Investigação Matemática. Após estudos e discussões, nosso problema de pesquisa ficou definido assim: *Que características evidenciamos na comunicação em atividades de Investigação Matemática?*

Para responder essa questão, nosso objetivo geral foi identificar características da comunicação que ocorrem em atividades de Investigação Matemática desenvolvidas em sala de aula.

3.2 Procedimentos metodológicos

Esta pesquisa é metodologicamente classificada como qualitativa e investigativa. A opção em relação a ser investigativa está fundamentada em Denzin e Lincoln (2005), que a indicam quando se trata de pesquisa cujo interesse é analisar, interpretar e entender determinado fenômeno em seu ambiente natural. Em nossa pesquisa, entendemos que a sala de aula é o ambiente natural para o aluno.

Em relação à pesquisa qualitativa, Alves-Mazzotti (1998, p.131) considera que sua principal característica reside no fato de “que estas seguem a tradição ‘compreensiva’ ou interpretativa”. Assim, quando o pesquisador pretende compreender o modo como os indivíduos pensam ou agem em determinada situação, que é nosso caso nesta investigação, é aconselhável que se utilize a pesquisa qualitativa.

Por sua vez, Bogdan e Biklen (1994) salientam que em uma investigação qualitativa, o pesquisador é o principal instrumento de pesquisa e sua presença no ambiente propicia melhor compreensão da ação dos indivíduos. Para esses pesquisadores, neste tipo de pesquisa os dados possuem a forma de palavras e imagens, incluindo transcrições de imagens, entrevistas, falas e notas de campo. De fato, em nossa investigação, os dados foram obtidos por meio de gravação

de áudios e foram transcritos, respeitando-se o máximo possível a sua autenticidade.

Diversos pesquisadores da área de Educação utilizam análises qualitativas em suas pesquisas, visto que essa possibilita a compreensão dos processos educacionais em um cenário escolar específico, possibilitando uma visualização “por dentro” (LUDKE; ANDRÉ, 1986), que no caso da nossa pesquisa é a sala de aula, com as interações e abordagens dos alunos.

Godoy (1995) considera que para melhor compreensão da situação, o pesquisador deve estar inserido no espaço onde ocorre a interação, no campo da pesquisa para coletar todos os dados possíveis, com a finalidade de um melhor entendimento do ocorrido. Bogdan e Biklen (1994) por sua vez, afirmam que nesse tipo de pesquisa, o pesquisador mantém um contato direto com o ambiente e com a situação a ser pesquisada, pois é inserido no contexto, permitindo profunda compreensão do objeto e do sujeito a ser analisado. Assim, visando nosso objetivo, justifica-se a adoção qualitativa.

3.3 O contexto e o registro dos dados da pesquisa

Esta pesquisa foi realizada em quatro contextos diferentes: no Ensino Fundamental, no Ensino Médio, no Ensino Superior e em um Evento Educação Matemática.

O primeiro contexto foi uma turma de Engenharia de uma Universidade Pública do Norte do Paraná, turma em que a orientadora desta pesquisa era professora da disciplina. Essa turma era composta por 50 alunos, que foram convidados para serem os sujeitos da pesquisa. A professora da turma possui autorização do comitê de ética da Universidade para realizar pesquisas em suas aulas.

O desenvolvimento da atividade de coleta de dados ocorreu no primeiro semestre de 2019, com duração de 3h/aula. Para o registro dos dados foram realizadas gravações de áudios, registros escritos pelos alunos e observação do pesquisador.

Os alunos foram organizados em grupos, de no máximo 5 membros, e receberam uma folha impressa (Apêndice 1) contendo a atividade a ser

investigada. Ficou acordado que devolveriam as folhas com as anotações ao final da aula e também a gravação dos áudios. Os áudios foram transcritos para a análise. Para o desenvolvimento da atividade os alunos fizeram o uso do *software* Geogebra, acessando-o pelo celular ou pelo notebook pessoal de pelo menos um membro de cada grupo.

O segundo contexto da coleta de dados foi realizado no minicurso “Praticando a Investigação Matemática”, do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática – EPREM, em outubro de 2019, realizado em Londrina – PR.

O minicurso foi desenvolvido pelo pesquisador, que norteou seu andamento, com o apoio da orientadora e de outra aluna do mestrado. Teve a duração de três horas consecutivas, contando com quatro participantes, sendo dois deles professores de Matemática, uma acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática e uma professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental, com formação em Pedagogia. Os participantes assinaram o termo de consentimento, (Apêndice 2) para utilização dos áudios gravados das interações entre eles.

Para o desenvolvimento da atividade, esse grupo foi dividido em duplas. O registro dos dados também foi realizado por meio da gravação dos áudios, registros escritos pelos participantes e observação do pesquisador. Como a ferramenta tecnológica utilizada para o desenvolvimento da atividade foi o Geogebra, no ato da inscrição para o minicurso, foi solicitado aos participantes que estivessem de posse do celular ou notebook para acessarem o *software*.

Foi entregue uma folha impressa (Apêndice 1) com a atividade a ser investigada para cada dupla, e solicitado que ao final devolvessem com as anotações realizadas pelo grupo, juntamente com as gravações dos áudios. Essas gravações foram transcritas para a análise.

O terceiro contexto foi realizado com duas turmas de 2° série do Ensino Médio, com total de 63 alunos, turmas em que o pesquisador era professor. Essas turmas pertenciam a uma escola particular do Norte do Paraná.

O consentimento para a pesquisa com as turmas dessa escola foi dado pelos pais ou responsáveis aos alunos, ao assinarem o contrato com a escola, (Apêndice 3). Esses contratos assinados estão arquivados na secretaria da escola.

Para o desenvolvimento das atividades foram divididos em grupos de no máximo 3 alunos. Para o registro dos dados foram realizados, a gravação dos áudios, registros escritos pelos alunos e observação do pesquisador.

Foi entregue uma folha impressa (Apêndice 1) com a atividade a ser investigada para cada grupo, e solicitado que, ao final, devolvessem com as anotações realizadas pelo grupo, juntamente com as gravações dos áudios. Essas gravações foram transcritas para a análise.

O quarto contexto foram 2 turmas do 8º ano e duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola privada, turmas em que o pesquisador era professor. As turmas de 8º anos totalizavam 62 alunos e as turmas de 9º anos 67 alunos.

O consentimento para a pesquisa com as turmas dessa escola, foi dado pelos pais ou responsáveis aos alunos, ao assinarem o contrato com a escola (Apêndice 3). Esses contratos assinados estão arquivados na secretaria da escola.

O desenvolvimento das atividades de coleta de dados no quarto contexto, ocorreu no primeiro semestre de 2019, com duração de 2h/aula. Para o registro dos dados foram realizados a gravação de áudios, registros escritos pelos alunos e observação do pesquisador.

Os alunos foram organizados em grupos, de no máximo 4 membros, e receberam uma folha impressa para realizarem a investigação. As turmas de 8º anos receberam a folha do Apêndice 4. A segunda atividade desenvolvida como os 8º anos, foi de forma coletiva, a qual foi reproduzida (Apêndice 5) na lousa. As turmas dos 9º anos receberam as folhas do Apêndice 6.

Como o foco de estudo é a comunicação em um ambiente de Investigação Matemática, fez-se necessário o registro da mesma. Como já mencionado, esse registro foi feito por meio de áudios gravados pelos grupos durante o desenvolvimento das atividades, registros escritos pelos alunos na folha impressa entregue a cada grupo, bem como observações do pesquisador.

A observação, de acordo com Adler e Adler (1994) permite analisar e coletar impressões gerais do mundo circunvizinho, por meio de todas as ações e interações humanas que ocorrem no ambiente, possibilitando também um

contato direto com o fenômeno pesquisado (AGROSINO, 2005), objetivando a compreensão de como a comunicação ocorre em um ambiente de investigação.

Para a presente pesquisa, utilizamos uma observação de natureza não-estruturada. De acordo com Alves-Mazzotti (1998), este tipo de observação não se determina previamente os componentes a serem analisados, na medida que ocorrem o processo a ser pesquisado, os dados evidenciados são registrados e observados, permitindo assim uma análise real da situação.

Devido ao objetivo principal da pesquisa ser a comunicação em atividades de Investigação Matemática, a observação teve foco nas interações verbais realizadas durante o processo de investigação.

Nesta pesquisa, de cunho qualitativo interpretativo, tratamos a comunicação em seu aspecto verbal como caracterizado por Araújo e Borralho (2018, p. 216), “que consiste em transmitir ou fazer circular informações através da fala”.

3.4 Descrição das atividades

As atividades de Investigação Matemática, fonte de dados da nossa pesquisa, as quais compõem o Produto Educacional, foram desenvolvidas com turmas dos Anos Finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio, Ensino Superior e em um Evento de Educação Matemática. No entanto, optamos por apresentar neste texto a análise da atividade 3 (vetores), por ter sido desenvolvida em três contextos distintos, com o objetivo de abranger diferentes graus de desenvolvimento.

Considerando que o trabalho em grupo é “de fundamental importância devido às possibilidades de os alunos exteriorizarem ideias, confrontarem opiniões e discutirem as estratégias e os resultados” (VERTUAN, 2007, p. 52), todas as atividades foram desenvolvidas com as turmas divididas em grupos de no máximo 5 alunos. A formação dos grupos ficou a critério dos alunos.

Durante o desenvolvimento das atividades, os alunos fizeram a gravação dos áudios, desde o início até a finalização das mesmas, bem como anotações nas folhas impressas entregues aos grupos. Essas anotações norteavam cada grupo no processo de investigação, com testes e conjecturas, cálculos

matemáticos e validação dos resultados por meio de substituição de valores nas generalizações.

i) Atividade 1

A primeira atividade desenvolvida foi elaborada pelo pesquisador, e se enquadra em “atividade de investigação estruturada”. Neste tipo de atividade, “o professor apresenta a questão e propõe o procedimento a utilizar, caracterizando ainda uma atividade em que o professor sabe aonde irá chegar” (CONCENTINO, 2019, p. 29).

Essa atividade, conforme Quadro 3.01, é composta por 16 questões abordando a investigação das quatro operações entre números naturais. Foi desenvolvida em abril de 2019 em duas turmas de 8° anos em que o pesquisador era professor.

Quadro 3.01: Atividade entregue aos alunos envolvendo operações com números naturais.

1. Investiguem o que ocorre ao somar dois números naturais.
2. Investiguem o que ocorre ao subtrair dois números naturais.
3. E quanto a multiplicação e divisão de dois números naturais, investiguem.
4. O que você pôde observar ao somar dois números naturais?
5. O que você pôde observar ao subtrair dois números naturais?
6. O que você pôde observar ao multiplicar dois números naturais?
7. O que você pôde observar ao dividir dois números naturais?
8. O que você observa ao somar dois números naturais ímpares?
9. O que você observa ao somar dois números naturais pares?
10. O que você observa ao subtrair dois números naturais ímpares?
11. O que você observa ao subtrair dois números naturais pares?
12. O que você observa ao multiplicar dois números naturais ímpares?
13. O que você observa ao multiplicar dois números naturais pares?
14. O que você observa ao dividir dois números naturais ímpares?
15. O que você observa ao dividir dois números naturais pares?
16. E se realizarmos essas operações com três ou mais números, o que acontece?

Fonte: Pesquisador

Esses questionamentos tinham o objetivo de que os alunos testassem conjecturas, investigassem os resultados e chegassem a conclusões referentes aos resultados.

Após o desenvolvimento da atividade foi constatado que as questões 4, 5, 6 e 7 tinham praticamente o mesmo significado das questões 1, 2 e 3, assim, para futuras aplicações e para o produto educacional, foram retiradas as questões 4, 5, 6 e 7.

ii) Atividade 2

A segunda atividade, elaborada pelo pesquisador, também se enquadra em “atividade de investigação estruturada”.

Essa atividade aborda a investigação de três tabelas que relacionam as linhas entre si. Teve o objetivo de investigar a função entre linhas e colunas, isto é, cada tabela era composta por duas colunas, denominada como “valor de x” e “valor de y”, as quais tinham uma lei de formação, lei essa que os alunos, por meio de investigações, testes e conjecturas, deveriam concluir.

Os alunos foram instigados a investigar a relação entre as duas colunas em cada situação, fazendo testes e cálculos que permitiam chegar a conclusões de funcionalidade entre as duas colunas de cada tabela.

Essa atividade foi desenvolvida em três turmas de 9º anos, em agosto de 2019, turmas essas que o pesquisador era professor da disciplina de Matemática.

Foi proposta essa atividade como introdutória do conteúdo de funções, sabendo que os alunos não tinham conhecimento dos conceitos de função, permitindo assim, agirem como matemáticos e participar ativamente da construção do conhecimento acerca desse conteúdo. Foi entregue a atividade impressa, conforme Quadro 3.02, para os grupos realizarem a investigação das tabelas.

Quadro 3.02: Atividade Investigativa sobre funções

Observe as tabelas:					
Tabela 01		Tabela 02		Tabela 03	
x	y	x	y	x	y
1	2	1	5	1	1
2	4	2	7	2	4
3	6	3	9	3	9
4	8	4	11	4	16
5	10	5	13	5	25
10	20	10	23	10	100
12	24	12	27	12	144
15		15		15	
	76		73		900

Após analisar as tabelas 01, 02 e 03, responda:

Investigue a tabela 01 e escreva, com suas palavras, qual a relação entre os valores de x e y.
Investigue a tabela 02 e escreva, com suas palavras, qual a relação entre os valores de x e y.
Investigue a tabela 03 e escreva, com suas palavras, qual a relação entre os valores de x e y.
Qual a expressão algébrica que relaciona os valores de x e y na tabela 01?
Qual a expressão algébrica que relaciona os valores de x e y na tabela 02?
Qual a expressão algébrica que relaciona os valores de x e y na tabela 03?
Qual a diferença entre as relações que determina os valores de x e y em cada tabela?
As diferenças entre as relações das tabelas 01, 02 e 03 influenciam em que?

Fonte: Pesquisador

iii) Atividade 3

A terceira atividade foi elaborada pela orientadora do pesquisador e se enquadra em atividade ‘menos estruturadas’, que de acordo com Concentino (2018), são as que apresentam uma questão que norteia a investigação. Esse tipo de atividade pode oportunizar o surgimento de outros questionamentos por parte dos alunos, levando a procedimentos distintos para solucionar o problema. Através dessa atividade, os alunos formulam conjecturas, testam hipóteses e discutem os resultados obtidos.

A atividade foi desenvolvida em uma turma de Engenharia, no minicurso do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática, realizado em Londrina – PR e em turmas de 2° série do Ensino Médio. Os alunos/participantes eram instigados a investigar, com a utilização do *software* Geogebra, os conceitos de vetores.

Nos três contextos, os alunos/participantes foram orientados a utilizar o celular ou notebook, com o *software* Geogebra já baixado ou na versão online.

Na turma de Engenharia, a referida atividade foi desenvolvida no primeiro

semestre de 2019, como introdutória ao conteúdo da disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear.

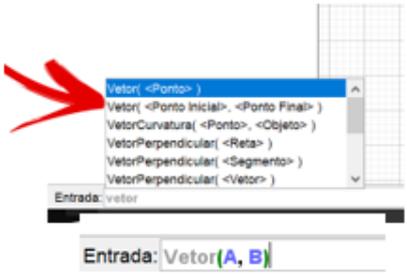
Foi entregue a atividade impressa aos alunos, conforme Quadro 3.03, que continha os encaminhamentos a serem investigados.

Quadro 3.03: Atividade investigativa sobre noções de vetores

ATIVIDADE: Noção de vetores

No GEOGEBRA:

- 1- Insira o ponto A (1,3).
- 2- Insira o ponto B (2, -5)
- 3- Solicite ao Geogebra que apresente o vetor \vec{AB}



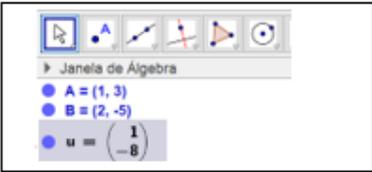
Entrada: Vetor(A, B)

Entrada: A=(1,3)

Entrada: B=(2,-5)

Entrada: Vetor(<Ponto Inicial>, <Ponto Final>)

Aparecerá a seguinte informação na janela de álgebra:



Investigue:

- 1- Como o GEOGEBRA determinou estes valores 1 e -8 para o vetor u?
 - a. DICAS:
 - i. coloquem outros pontos e analisem os vetores representados;
 - ii. movam a representação do vetor e veja o que acontece na janela de álgebra
- 2- O que significa graficamente estes valores?
- 3- O que estes valores dizem sobre o vetor?
- 4- Como posso representar graficamente o vetor $\vec{v} = (3, -5)$?
- 5- Dados dois pontos quaisquer $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, como determinar o vetor $\vec{v} = (x, y)$?

Fonte: Material produzido pela orientadora

Esta mesma atividade, conforme já mencionado, foi desenvolvida também no minicurso “Praticando a Investigação Matemática”, do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática – EPREM, realizado em outubro de 2019. O minicurso teve quatro participantes, sendo duas professores de Matemática, uma estudante do curso de Licenciatura em Matemática e uma professora dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, com formação em Pedagogia.

As duas professoras de Matemática já tinham conhecimento sobre os conceitos de vetores, já as outras duas participantes não conheciam estes conceitos. Deste modo, focamos nossa observação nestas últimas, com o

objetivo de analisar o processo de investigação e de construção do conhecimento. As outras participantes também realizaram a atividade, com o foco principal de conhecerem os encaminhamentos de uma atividade investigativa, visto ser o primeiro contato de ambas com esta Prática Pedagógica.

Finalmente o terceiro contexto em que foi desenvolvida essa mesma atividade foram em duas turmas de 2º série do Ensino Médio, de uma escola privada no Norte do Paraná. Nestas turmas, o conteúdo de vetores seria iniciado na disciplina de Física, assim os alunos não tinham conhecimento dos conceitos de vetores e foi desenvolvida como introdutória.

iv) Atividade 4

A quarta atividade foi elaborada pelo pesquisador, e se enquadra em “atividade aberta” que, de acordo com Concentino (2019), permite que os alunos percorram caminhos diferentes, chegando em variadas soluções para as situações propostas. Esse tipo de atividade não tem uma conclusão esperada, permite várias conclusões e encaminhamentos, dependendo cada uma da análise e interpretação dos alunos.

Essa atividade abordava a investigação de três tabelas que envolviam adição de números pares e/ou ímpares.

Foi desenvolvida, em outubro 2019, também no minicurso “Praticando a Investigação Matemática”, do XV EPREM. Vemos como uma atividade com possibilidades de ser desenvolvida nos vários níveis de ensino, desde dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Superior. Temos a intenção de desenvolvê-la em outros contextos.

Após entregue uma folha impressa contendo a atividade, conforme Quadro 3.04, os participantes foram instigados a investigar a relação entre as tabelas. Os testes, análises e investigações, realizados por cada grupo, tiveram encaminhamentos diferentes que conduziram a conclusões diferentes, sendo todas aceitas. Um grupo abordou a soma de pares e ímpares, outro tomou o encaminhamento para os conceitos de progressão aritmética e função,

encaminhamentos esses, que são oportunizados no desenvolvimento de atividades classificadas como ‘abertas’.

Quadro 3.04: Atividade investigativa de soma de números naturais



Olá, querido e querida aluno e aluna!!!

Hoje você vai assumir o papel de um matemático. Usando seus pensamentos, seu raciocínio, suas observações e seus encaminhamentos para **INVESTIGAR AS TABELAS ABAIXO.**

INVESTIGUE, TESTE, OBSERVE, ESCREVA E CONCLUA O QUE VOCÊ OBSERVA NAS TABELAS ABAIXO.

Elaborada por: CACIOLATO DE SOUZA, L.;

TABELA 01	TABELA 02	TABELA 03
$0 + 0 = 0$	$1 + 1 = 2$	$0 + 1 = 1$
$0 + 2 = 2$	$1 + 3 = 4$	$1 + 2 = 3$
$2 + 2 = 4$	$3 + 3 = 6$	$2 + 3 = 5$
$2 + 4 = 6$	$3 + 5 = 8$	$3 + 4 = 7$
$4 + 4 = 8$	$5 + 5 = 10$	$4 + 5 = 9$
$4 + 6 = 10$	$5 + 7 = 12$	$5 + 6 = 11$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$102 + 104 = 206$	$101 + 103 = 204$	$101 + 102 = 203$

Fonte: Autor

v) Atividade 5

A quinta atividade foi elaborada pelo pesquisador, baseada em Concentino (2019) e, assim como a primeira atividade, enquadra-se em “atividade de investigação estruturada”.

Essa atividade aborda a investigação das diagonais dos polígonos regulares de acordo com o número de lados e de vértices.

Os alunos investigaram o número de diagonais que sai de cada vértice do polígono, relacionando ao número total de diagonais dos polígonos, que os

possibilitou chegar à generalização. A atividade foi organizada conforme Quadro 3.05.

Esta atividade foi desenvolvida em novembro de 2019 nas duas turmas dos 8º anos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, turmas essas que o pesquisador era professor.

Para o desenvolvimento dessa atividade, foi realizado um grande grupo, onde a tabela foi transcrita na lousa e o professor/pesquisador foi instigando os alunos a desenvolverem a investigação das diagonais de polígonos até chegarem à generalização para o polígono de n lados.

Quadro 3.05: Atividade investigativa referente a diagonais dos polígonos regulares



Olá, alunos!!!

Agora, novamente você vai assumir o papel de um matemático. Usando seus pensamentos, seu raciocínio, suas observações e seus encaminhamentos para **INVESTIGAR AS FIGURAS ABAIXO E SUAS DIAGONAIS.**

INVESTIGUE, TESTE, OBSERVE, ESCREVA E CONCLUA O QUE VOCÊ OBSERVA NO NÚMERO DE DIAGONAIS DOS POLÍGONOS.

POLÍGONO	NÚMERO DE LADOS E DE VÉRTICES	NÚMERO DE DIAGONAIS QUE SAI DE CADA VÉRTICE	NÚMERO TOTAL DE DIAGONAIS
Triângulo 			
Quadrilátero 			
Pentágono 			
Hexágono 			
Heptágono 			
Octógono 			
Polígono de "n" lados			

Fonte: Autor, baseado em Concentino (2019)

Ao todo foram desenvolvidas cinco atividades, no entanto para esta pesquisa, analisamos os dados de apenas uma atividade, referente aos conceitos de vetores (Atividade 3), a qual foi desenvolvida em três contextos diferentes.

3.5 A condução das análises

Sendo nosso objetivo geral identificar características da comunicação em atividades de Investigação Matemática, nossa observação teve foco nas interações verbais, as quais foram registradas em áudio e posteriormente transcritas, respeitando-se o máximo possível sua autenticidade conforme recomendam Bogdan e Biklen (1994). Neste sentido, analisamos a comunicação em seu aspecto verbal, conforme caracterizado por Araújo e Borralho (2018).

Assim, tomamos como objeto de análise as interações e mais especificamente as frases enunciadas por cada aluno/interlocutor em sua interação com os demais membros do grupo. Com vistas a organizar nossa análise, chamaremos cada frase enunciada nestas interações de 'fala'.

Primeiramente realizamos uma análise específica dos dados, em que procuramos elementos que pudessem subsidiar uma caracterização para a comunicação em Investigação Matemática. Com isso em mente, analisamos 213 falas referentes ao desenvolvimento da Atividade 3, procurando compreender seu conteúdo no contexto em que se apresentavam, e inferimos seus objetivos. A escolha pela análise das interações que se desenvolveram na Atividade 3 deu-se por esta ter sido aplicada em três contextos diferentes: no ensino superior, em um minicurso e no ensino médio. As interações que serão apresentadas neste texto foram escolhidas aleatoriamente, sem nenhum critério, com o intuito de preservar a autenticidade dos dados.

De posse desses objetivos, realizamos uma segunda análise, procurando agrupar falas com objetivos semelhantes e inferimos que a comunicação nesse contexto é composta de falas que se preocupam com três aspectos:

1. Em desenvolver a atividade matematicamente;
2. Em *como* desenvolver a atividade ou quais procedimentos adotar
3. Em provocar o outro à atenção, análise e reflexão.

Este terceiro aspecto geralmente ocorreu quando o professor era um dos interlocutores.

Deste modo, agrupamos as falas de cada episódio¹⁵ em 3 categorias, as quais nomeamos de Categoria 1, Categoria 2 e Categoria 3, respectivamente.

Vale ressaltar que a classificação das falas em três categorias ocorreu após a identificação dos objetivos, ou seja, não procuramos identificar objetivos de falas de uma determinada categoria, mas sim, uma categoria para falas com objetivos semelhantes.

Após essa classificação e categorização, procuramos identificar características das falas de cada categoria. Esta análise nos permitiu inferir algumas características presentes na comunicação em Investigação Matemática, as quais serão apresentadas no Capítulo 4.

¹⁵ Consideramos episódio como sendo um grupo de falas pertencentes a interação do grupo ao desenvolverem parte da atividade.

4 ANÁLISE DA COMUNICAÇÃO EM ATIVIDADES INVESTIGATIVAS

Neste capítulo apresentamos a análise e discussão de algumas interações desenvolvidas em atividades de Investigação Matemática com vistas a responder nossa questão de pesquisa. Em uma primeira análise, procuramos identificar os objetivos das falas enunciadas nas interações. Essa identificação nos permitiu classificar estas falas em três categorias. Na Categoria 1 os objetivos consistiam em explicações, dúvidas, questionamentos ou compreensão de conceitos matemáticos, ou ainda, apresentação de cálculos numéricos com vistas a desenvolverem a atividade matematicamente. Já na segunda categoria, a qual designamos por Categoria 2, os objetivos consistiam em apresentar, sugerir ou discutir encaminhamentos para a atividade. Na terceira categoria (Categoria 3), as falas evidenciavam objetivos de provocar/instigar os interlocutores à reflexão e análise a respeito do que estavam fazendo.

Tendo em vista que, no que se refere à classificação das falas, as interações apresentam um padrão semelhante, optamos por apresentar neste capítulo apenas algumas interações referentes ao desenvolvimento da Atividade 3. O desenvolvimento dessa atividade seguiu as três etapas propostas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2016): i) introdução feita pelo professor; ii) realização da investigação e iii) discussão dos resultados. Nesta pesquisa focamos nosso olhar na segunda etapa, mais especificamente nas Interações que ali foram desencadeadas. Pelo mesmo motivo (padrão semelhante) não utilizamos nenhum critério para escolha dos grupos a serem apresentados neste capítulo, sendo a escolha arbitrária.

A Atividade 3 aborda o conteúdo de vetores e nela os alunos foram estimulados a investigar utilizando o *software* Geogebra. O quadro 3.03 apresenta a tarefa entregue aos alunos para o desenvolvimento da atividade, sendo que a primeira parte apresenta uma familiarização do *software* e a segunda parte, em destaque no Quadro 4.01, apresenta a situação a ser investigada.

Quadro 4.01: Segunda parte da Atividade 3

Investigue:

- 1- Como o GEOGEBRA determinou estes valores (1 e -8) para o vetor u ?
 - a. DICAS:
 - i. coloquem outros pontos e analisem os vetores representados;
 - ii. movam a representação do vetor e veja o que acontece na janela de álgebra
- 2- O que significa graficamente estes valores?
- 3- O que estes valores dizem sobre o vetor?
- 4- Como posso representar graficamente o vetor $\vec{v} = (3, -5)$?
- 5- Dados dois pontos quaisquer $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, como determinar o vetor $\vec{v} = (x, y)$?

Fonte: Material produzido pela orientadora

As interações apresentadas neste capítulo são nomeadas de ‘Episódios’, por não apresentarem a ordem cronológica em que aconteceram em cada contexto. As falas dos episódios estão redigidas em itálico e foram transcritas literalmente, apresentando muitas vezes falas coloquiais.

4.1 Primeira análise: as falas e seus objetivos

Neste item apresentamos a transcrição de oito episódios desenvolvidos durante o desenvolvimento da Atividade 3 nos três contextos diferentes. Na sequência de cada transcrição, apresentamos um quadro em que relacionamos cada fala do respectivo episódio com o que inferimos ser o objetivo da mensagem emitida. Os episódios foram transcritos na íntegra, enquanto nos quadros, suprimimos algumas palavras de modo a não deixar o texto poluído. Optamos por colocar nos quadros apenas parte das falas que nos levou a identificar seus objetivos.

4.1.1 Contexto 1: Ensino Superior

No primeiro semestre do ano letivo de 2019, em uma turma de Engenharia de uma Universidade Pública do Paraná, na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear com 50 alunos, a professora da disciplina desenvolveu esta atividade como introdutória ao conteúdo de vetores.

Os alunos foram organizados em duplas e trios. Foi solicitado que gravassem o áudio da interação ocorrida no desenvolvimento da atividade no celular e entregassem para a professora por email, WattsApp ou baixando diretamente no notebook. Todas as gravações foram transcritas, entretanto apresentamos neste capítulo somente as interações de um dos grupos, o qual

designamos por Grupo 1, composto pelos alunos A1, A2 e A3. O conteúdo de vetores seria iniciado nessa turma, e o objetivo dessa atividade foi a compreensão de algumas propriedades dos vetores e a determinação de um vetor a partir de dois pontos quaisquer.

Episódio 1 do primeiro contexto: Ensino Superior

Nesta interação, o grupo estava iniciando sua atividade e buscando compreender qual a operação realizada pelo *software* Geogebra para determinar as coordenadas do vetor, conforme solicitado na questão 1 (Quadro 4.02).

Quadro 4.02: Questão 1 da atividade 3

<p>Investigue:</p> <p>1- Como o GEOGEBRA determinou estes valores (1 e -8) para o vetor u?</p> <p>a. DICAS:</p> <p>i. coloquem outros pontos e analisem os vetores representados;</p> <p>ii. movam a representação do vetor e veja o que acontece na janela de álgebra</p>

Fonte: Material produzido pela orientadora

1. A1: *Tá, me empresta, deixa eu tentar entender.*
2. A2: *Então, aí já tá os pontos A e o B e o vetor.*
3. A1: *Repete, repete, repete, calma (risos).*
4. A2: *Que você tá fazendo?*
5. A1: *Ah, eu estou tentando, espera aí. ABC, A em “casa” alta, ok, é igual... valores são as coordenadas do...*
6. A2: *Sim, aí tipo que você tinha falado àquela hora, tipo aqui, foi esse menos esse e esse menos esse, aí no caso por exemplo desse 5 utilizar o $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ aí no caso $(x_2 - x_1)$ e $(y_2 - y_1)$.*
7. A1: *Tá, aí você consegue vetor.*
8. A2: *Aí você consegue o vetor.*
9. A2: *Aí no caso da o vetor e você faz o inverso.*
10. A1: *Exatamente. Só o que acontece, só que através disso aqui você consegue outros valores, então você consegue colocar esse vetor em qualquer lugar. Entendeu?*
11. A1: *Ele vai mudar o ponto aqui só que mantém a razão.*

12. A1: *Porque tipo assim, pra eu conseguir 1 aqui pode ser 2 e 3, 4 e 3, entendeu? Se quiser trocar ele, posso colocar este vetor aonde que quiser, entendeu?*
13. A1: *Posso posicionar ele em qualquer outro lugar, só que aquilo lá né o vetor possui direção e sentido, tipo ele tá do ponto A para o ponto B, então isso você não pode mudar, entendeu?*
14. A1: *Então o que acontece, vamos supor que ele tá aqui assim, então você não pode fazer isso com ele, sempre tem que manter assim.*
15. A2: *Tá certo, nossa!*

Neste episódio analisamos cada uma das 15 falas, inferindo seus objetivos. O Quadro 4.03 apresenta estas falas com seus respectivos objetivos.

Quadro 4.03: Falas do episódio 1 do primeiro contexto com seus respectivos objetivos

Número da fala	Fala	Objetivo
1	Tá, me empresta deixa eu tentar entender.	Compreender o que o enunciado solicita.
2	Aí tá os pontos A e B e o vetor.	Identificar objetos matemáticos.
3	Repete, repete, repete, calma (risos).	Sem relevância para o desenvolvimento da atividade.
4	Que você tá fazendo?	Compreender o procedimento adotado pelo colega.
5	Estou tentando. ABC, A em caixa alta, é igual...(inserindo pontos no Geogebra)	Deixar o colega informado sobre o que está fazendo
6	Foi esse menos esse e esse menos esse	Explicar como determinar as coordenadas de um vetor a partir de dois pontos.
7	Tá, aí você consegue vetor;	Indicar que compreendeu a explicação do colega.
8	Aí você consegue vetor;	Continuidade da fala 6, indicando compreensão de como determinar um vetor a partir de dois pontos.
9	Aí no caso dá o vetor e você faz o inverso.	Sugerir a possibilidade de encontrar dois pontos a partir das coordenadas de um vetor dado.
10	Através disso aqui você consegue outros valores, então você consegue colocar esse vetor em qualquer lugar.	Explicar que, a partir das coordenadas de um vetor, pode-se determinar diferentes pontos que o determinam, e conseqüentemente, vetores equivalentes, colocados em outra posição no plano cartesiano

11	Ele vai mudar o ponto aqui, só que mantém a razão.	Reforçar que é possível alterar a posição da imagem de um vetor sem alterá-lo.
12	Pra conseguir 1, aqui pode ser 2 e 3 ou 4 e 3. Se quiser trocar posso colocar aonde quiser.	Reforçar que é possível alterar a posição da imagem de um vetor sem alterá-lo.
13	Posso posicionar ele em qualquer outro lugar, só que aquilo lá né, o vetor possui direção e sentido, tipo ele tá do ponto A para o ponto B, então isso você não pode mudar, entendeu?	Reforçar que é possível alterar a posição da imagem de um vetor sem alterá-lo.
14	Vamos supor que ele tá aqui assim, então você não pode fazer isso com ele, sempre tem que manter assim.	Explicar que, a partir das coordenadas de um vetor pode-se determinar diferentes pontos que o determinam, e conseqüentemente, a imagem do vetor pode ser colocada em outra posição no plano cartesiano.
15	Tá certo, nossa!	Aceitar a compreensão expressa pelo colega.

Fonte: arquivo do pesquisador

De acordo com Alro e Skovsmose (2010), para que ocorra a comunicação produtiva, os participantes da interação devem confiar uns nos outros, aceitando perspectivas diferentes em uma relação de equilíbrio e respeito. Observamos neste episódio que da fala 10 a 14 o aluno A1 explica ao colega sua compreensão do objeto matemático, a qual é aceita por A2 na fala 15, indicando que a comunicação aconteceu conforme os pressupostos de Alro e Skovsmose (2010).

O Episódio 2, apresentado na sequência, ocorreu em continuidade ao Episódio 1, o qual esse grupo de alunos continua mobilizando-se para compreender e responder a questão 1: Como o Geogebra determinou as coordenadas do vetor u ?

Episódio 2 do primeiro contexto: Ensino superior

1. A2: *Tô mexendo no ponto aqui.*
2. A1: *Não, beleza. Como determinar esses valores 1 e -8?*

3. A1: *Vamos lá, descontou, aí ele subtrai, o primeiro menos o primeiro e o segundo menos o segundo, o primeiro aqui ó, vai ficar 1 e - 8, vai ficar 2 e -1, -5 e -3, 2 menos 1 dá 1.*
4. A3: *Aham.*
5. A1: *-5 e -3 dá -8.*
6. A3: *Mas por que ele fez isso?*
7. A1: *Porque tipo assim, é padrão. É um padrão, tipo assim, é...o primeiro...tipo assim você tem um ponto A e você tem o ponto B, então o que acontece, ele mantém esse aqui como o segundo, aí sempre vai fazer isso, sempre vai descontar o primeiro aqui, vai descontar esse segundo de lá que é o y.*
8. A3: *Entendi, é como se ele fizesse o caminho reverso né? Faz esse caminho e o que ele mostra é o reverso.*
9. A1: *Isso, isso, aí a setinha vai para lá.*
10. A3: *Então, ah valeu, nossa valeu!*
11. A1: *Então, graficamente significa isso é o que a gente falou né? Coloquei outros pontos ali.*
12. A1: *O corpo do vetor é isso aqui, é os dois pontos, não importa onde esses dois pontos está, ele vai ter essa forma, esse tamanho, ele não muda o tamanho dele, ele vai ser 1 e -8, entendeu?*
13. A1: *Tipo se subir um aqui e um aqui, um aqui e um aqui, ele vai manter a mesma coisa, você não pode tirar o padrão dele.*
14. A3: *Ah, tá.*
15. A1: *Exato, se eu vario um aqui, eu vario a mesma coisa em todos, então o que acontece na geometria, poderá colocar ele em qualquer lugar, ele vai ser o mesmo vetor.*
16. A3: *Entendi.*
17. A1: *Porque tem o mesmo sentido, mesma direção e mesmo tamanho.*

Apesar de A1 ter respondido a questão 1 na fala 3, o aluno A3 demonstra não ter compreendido (fala 6), fazendo com que a interação continuasse, com explicações de A1 até A3 indicar ter compreendido a situação. Mais uma vez, inferimos uma comunicação produtiva, nos termos de Alro e Skovsmose (2010).

O Quadro 4.04 apresenta as falas deste episódio com os objetivos por nós inferidos.

Quadro 4.04: Falas do episódio 2 do primeiro contexto com seus respectivos objetivos

Número da fala	Fala	Objetivo
1	Tô mexendo no ponto aqui.	Comentar o que está fazendo.
2	Como determinar esse 1 e -8?	Ler em voz alta o enunciado.
3	Vamos lá, descontou, aí ele subtrai, o primeiro menos o primeiro e o segundo menos o segundo.	Efetuar operações matemáticas.
4	Aham.	Concordar com a fala do colega.
5	-5 e -3 dá -8.	Efetuar operações matemáticas.
6	Mas por que ele fez isso?	Questionar sobre os conceitos matemáticos utilizados pelo Geogebra.
7	Você tem um ponto A e você tem o ponto B, então ele mantém esse aqui como o segundo, aí, sempre vai descontar o primeiro aqui, vai descontar esse segundo de lá que é o y.	Explicar ao colega como determinar o vetor.
8	Entendi, é como se ele fizesse o caminho reverso, né?	Indicar que compreendeu o procedimento.
9	Isso, isso, aí a setinha vai para lá.	Explicar conceitos
10	Então, ah valeu, nossa valeu!	Concordar com a fala do colega.
11	Então, graficamente significa isso é o que a gente falou né? (em referência à questão 2)	Indicar relação entre as coordenadas do vetor e sua representação gráfica.
12	O corpo do vetor é isso aqui, é os dois pontos, não importa onde esses dois pontos está, ele vai ter essa forma, esse tamanho, ele não muda.	Explicar que mesmo mudando o vetor de lugar sua forma não se altera.
13	Tipo se subir um aqui e um aqui, um aqui e um aqui, ele vai manter a mesma coisa.	Idem 12
14	Ah, tá.	Concordar com a fala do colega.
15	Exato, se eu vario um aqui, eu vario a mesma coisa em todos, então na geometria poderá colocar em qualquer lugar, ele vai ser o mesmo vetor.	Idem 12
16	Entendi.	Concordar com a fala do colega.
17	Porque tem o mesmo sentido, mesma direção e mesmo tamanho.	Idem 12.

Fonte: arquivo do pesquisador

No Episódio 3, apresentado na sequência, esse grupo de alunos procura responder as questões 2,3, 4 e 5 (Quadro 4.05).

Quadro 4.05: Questões da atividade

Investigue:

- 1- Como o GEOGEBRA determinou estes valores (1 e -8) para o vetor u ?
 - a. DICAS:
 - i. coloquem outros pontos e analisem os vetores representados;
 - ii. movam a representação do vetor e veja o que acontece na janela de álgebra
- 2- O que significa graficamente estes valores?
- 3- O que estes valores dizem sobre o vetor?
- 4- Como posso representar graficamente o vetor $\vec{v} = (3, -5)$?
- 5- Dados dois pontos quaisquer $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, como determinar o vetor $\vec{v} = (x, y)$?

Fonte: arquivo do pesquisador

Episódio 3 do primeiro contexto: Ensino Superior

1. A1: *O que esses valores dizem sobre o vetor?*
2. A3: *Onde ele está posicionado, que posição que ele ocupa, óh tipo ali, ele vai perto do eixo.*
3. A1: *Ah, os valores que falam são esses aqui né? (1, 3) é o ponto.*
4. A3: *Isso.*
5. A1: *São as coordenadas, onde que ele está localizado. Entendi!*
6. A1: *Ai, me empresta o celular que eu vou fazer esse daqui.*
7. A1: *Como posso representar graficamente?*
8. A2: *Por que você não muda?*
9. A3: *Você pode acrescenta aqui ó, dois pontos, colocar 4 no y_1 .*
10. A1: *Aí fica 4 menos 1 dá 3, e aqui pra ficar -5 eu colocaria -2 e -3.*
11. A3: *Isso, isso, ou no caso...*
12. A1: *Ah, tá, no caso eu só vou mudar o ponto B, tá... eu não vou nem fazer no Geogebra*
13. A3: *Se vai ver, isso aí vai fazer todo sentido.*
14. A3: *Porque mais pra frente vai ter que alterar alguns valores.*
15. A1: *Dois pontos quaisquer $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$.*
16. A3: *Só fazer $(x_2 - x_1)$ e $(y_2 - y_1)$.*
17. A1: *Isso, exato...já rabiscou aí? Ah, o resto aqui vai ser oficial, porque eu não rabisquei nada ainda, não confia nas minhas canetas?*
18. A2: *Não!*
19. A2: *Por que você não comprou a Bic, é barato.*

20. A1: *Não, não é ruim essa caneta, fui eu que estraguei, quebrei a pontinha dela e a tinta desceu, só que eu ignorei...eu estava com sono e estava fazendo uma lista de compras.*

Desse episódio podemos inferir uma comunicação produtiva, nos termos de Alro e Skovsmose (2010), pois da fala 2 a fala 5, A1 e A3 apresentam suas compreensões e as aceitam mutuamente, construindo uma resposta satisfatória. Na fala 7 A1 realiza a leitura do enunciado e iniciam uma discussão testando uma hipótese e apresentando uma resposta à questão, sugerindo dois pontos para representar o vetor.

Apresentamos no Quadro 4.06 as falas deste episódio com seus respectivos objetivos.

Quadro 4.06: Falas do episódio 3 do primeiro contexto com seus respectivos objetivos

Número da fala	Fala	Objetivo
1	O que esses valores dizem sobre o vetor?	Leitura do enunciado
2	Onde ele está posicionado, que posição que ele ocupa?	Responder ao colega indicando compreensão do objeto matemático.
3	Ah, os valores que falam são esses aqui, né? (1, 3) é o ponto.	Identificar reconhecimento dos elementos de um vetor.
4	Isso.	Concordar com o colega.
5	São as coordenadas onde que ele está localizado. Entendi!	Indicar que compreendeu o que as coordenadas dizem sobre o vetor.
6	Ai, me empresta o celular que eu vou fazer esse daqui.	Realizar um procedimento no celular.
7	Como posso representar graficamente?	Leitura do enunciado
8	Porque você não muda?	Sugerir, analisar outros pontos para testar a hipótese.
9	Você pode acrescenta aqui ó, dois pontos, colocar 4 no y_1 .	Sugerir um ponto para testar uma conjectura.
10	Aí fica 4 menos 1 dá 3, e aqui pra ficar -5, eu colocaria -2 e -3.	Aceitar a sugestão do colega e realizar cálculo matemático de verificação.
11	Isso, isso, ou no caso.	Concordar com o colega.
12	Ah tá, no caso eu só vou mudar o ponto B.	Indicar o procedimento a ser realizado.
13	Se vai ver, isso aí vai fazer todo sentido.	Comentário aleatório.
14	Porque mais pra frente vai ter que alterar alguns valores.	Explicar procedimentos a serem realizados na sequência.
15	Dois pontos quaisquer A $(x_1; y_1)$ e B $(x_2; y_2)$.	Leitura do enunciado.
16	Só fazer $(x_2 - x_1)$ e $(y_2 - y_1)$.	Sugerir uma solução (hipótese)
17	Isso, exato...já rabiscou aí? Ah, o resto aqui vai ser oficial, porque eu não rabisquei nada	Sem relevância para o desenvolvimento da atividade.

	ainda, não confia nas minhas canetas?	
18	Não!	Sem relevância para o desenvolvimento da atividade.
19	Por que você não comprou a Bic, é barato.	Sem relevância para o desenvolvimento da atividade.
20	Não, não é ruim essa caneta, fui eu que estraguei, quebrei a pontinha dela e a tinta desceu, só que eu ignorei...eu estava com sono e estava fazendo uma lista de compras.	Sem relevância para o desenvolvimento da atividade.

Fonte: arquivo do pesquisador

Em continuidade, quanto a interação observada nesse primeiro contexto, apresentamos na sequência o Episódio 4, em que onde inferimos que os alunos estão “passando a limpo” suas repostas.

Episódio 4 do primeiro contexto: Ensino Superior

1. A1: *O que significa graficamente esses valores?*
2. A1: *Não, como o Geogebra determina esses valores?*
3. A3: *Ele descontou, né?*
4. A2: *Como o Geogebra determinou esses valores?*
5. A1: *Diferença não, né?*
6. A2: *É sim, é a diferença.*
7. A1: *Por meio da diferença de x de A e x de B , não, x de B e x de A , e o y de B e o y de A , é isso né?*
8. A1: *É isso né? Tá. E o que significa graficamente esses valores? A distância entre os pontos? Seria isso exatamente?*
9. A2: *A distância entre os pontos você vê pelo vetor. Que a distância entre esses pontos é o vetor.*
10. A2: *Então, espera aí, éh, ele veio pra B .*
11. A1: *Calma, é o tanto que ele se movimentou em y e em x , é o quanto ele se movimentou em x e y , já que é a diferença. Se ele foi de 2 para 1... não, se ele foi do 1 para o 2, ele se movimentou positivamente em 1, ou seja, ele fez esse movimento assim, peraí, x pertence a esse movimento, aí o B no caso em y , né?*

12. A1: *Seria, aí ele se movimentou para cima ou para baixo né? Então dá para dizer o que significa graficamente esses valores.*
13. A3: *É a coordenada.*
14. A1: *O quanto se movimentou em x e y, é a coordenada do vetor também né?*
15. A1: *A coordenada deve ter o vetor pra localizar.*
16. A1: *Tá, o que esses valores dizem sobre vetor?*
17. A3: *Direção e sentido.*
18. A1: *Pera aí, sentido, pera aí, direção, direção é x e y, sentido seria positivo e negativo, por exemplo, direção y, sentido positivo e negativo, essa é a diferença.*
19. A3: *É o tamanho do vetor.*
20. A2: *O que esses valores dizem sobre vetor?*
21. A1: *Ele dá tipo assim, as características do vetor.*
22. A3: *Sim, mas o que especificamente?*
23. A1: *Ah, o tamanho dele, tá vendo ali ó, sentido e direção.*
24. A2: *Tá ali, olha o vetor.*
25. A1: *É, tipo assim, é ele, o vetor.*
26. A1: *Tá beleza, a distância e o sentido basicamente. Distância em x, distância em y, e o sentido que ele percorre conforme o sinal, aí o sentido é basicamente A e B onde ele está limitado ali, seria positivo e negativo nos eixos, mas no caso é entre A e B, então, por exemplo, se B está aqui e A está aqui, o sentido vai ser negativo, 8 aqui não é negativo, porém não é um valor maior.*
27. A3: *Sim, como representar graficamente o vetor (-3, -5)?*
28. A1: *Eu vou fazer algo assim, bem genérico, é só os pontos que a gente precisa, você coloca um 4 aqui no ponto B e -2 no ponto A.*
29. A1: *O outro é 1 e 3, e o outro é 4 e -2.*
30. A2: *(4, - 2) é o A?*
31. A3: *Não, é o B.*
32. A1: *Aí você diminui do 3 e - 5.*
33. A1: *Então o ponto A é aqui gente, eu sou péssimo para gráfico, eu vou imprimir umas folhas assim quadriculadas para essa matéria.*

34. A1: *Era (- 2, - 4) que a gente definiu, né?*
35. A1: *Não era (4, -2).*
36. A2: *É, esse era o B.*
37. A1: *E o outro é o (1, 3).*
38. A1: *A (1, 3) e B (4 e - 2), aí você pega 1 - 4 é - 3, e -2 -3, dá -5.*
39. A2: *Não, espera aí, 4 - 1, 3.*
40. A1: *Aí fica 4 -1 que dá 3.*
41. A3: *Beleza, aí agora é só ligar os pontos, aí você faz o vetor, é só falar o vetor (x, y) é dado por $x(x_2 - x_1)$ e $y(y_2 - y_1)$.*
42. A3: *x é igual a $(x_2 - x_1)$ e y é igual a $(y_2 - y_1)$ pronto está respondido.*

Apresentamos no quadro 4.07 as falas deste episódio com seus respectivos objetivos.

Quadro 4.07: Falas do episódio 4 do primeiro contexto com seus respectivos objetivos

Número da fala	Fala	Objetivo
1	O que significa graficamente esses valores?	Leitura do enunciado
2	Não, como o Geogebra determina esses valores?	Leitura do enunciado
3	Ele descontou, né?	Apresentar seu entendimento com vistas a construir uma resposta à questão.
4	Como o Geogebra determina esses valores?	Leitura do enunciado
5	Diferença não, né?	Apresentar seu entendimento com vistas a construir uma resposta à questão.
6	É sim, é a diferença.	Apresentar seu entendimento com vistas a construir uma resposta à questão.
7	Por meio da diferença de x de A e x de B, não, x de B e x de A, e o y de B e o y de A, é isso né?	Apresentar seu entendimento com vistas a construir uma resposta à questão.
8	E o que significa graficamente esses valores? A distância entre os pontos? Seria isso exatamente.	Apresentar sua compreensão sobre o que significa graficamente as coordenadas de um vetor.
9	A distância entre os pontos você vê pelo vetor.	Argumentar negativamente sobre a compreensão do colega
10	Então, espera aí, é ele veio pra B.	Analisar o procedimento matemático realizado.
11	Calma, é o tanto que ele se movimentou em y e em x, é o quanto ele se movimentou em x e y, já que é a diferença. Se ele foi de 2 para 1, não, se ele foi do 1 para o 2, ele se movimentou positivamente em 1, ou seja, ele fez esse movimento assim, pera	Apresentar sua compreensão sobre o significado gráfico das coordenadas de um vetor.

	aí, x pertence a esse movimento aí o B no caso em y, né?	
12	Seria, aí ele se movimentou para cima ou para baixo, né? Então dá para dizer o que significa graficamente esses valores.	Apresentar sua compreensão sobre o significado gráfico das coordenadas de um vetor.
13	É a coordenada.	Contribuir para a elaboração conceitual da resposta.
14	O quanto se movimentou em x e y, é a coordenada do vetor também, né?	Contribuir para a elaboração conceitual da resposta.
15	A coordenada para localizar	Contribuir para a elaboração conceitual da resposta.
16	O que estes valores dizem sobre o vetor?	Leitura do enunciado
17	Direção e sentido.	Explicitar sua compreensão sobre o que as coordenadas dizem sobre o vetor.
18	Pera aí, sentido, pera aí, direção, direção é x e y, sentido seria positivo e negativo, por exemplo, direção y, sentido positivo e negativo, essa é a diferença.	Explicitar sua compreensão sobre o que as coordenadas dizem sobre o vetor.
19	É o tamanho do vetor.	Explicitar sua compreensão sobre o que as coordenadas dizem sobre o vetor.
20	Como representar graficamente o vetor?	Leitura do enunciado
21	Ele dá tipo assim, as características do vetor.	Explicitar sua compreensão sobre o que as coordenadas dizem sobre o vetor.
22	Sim, mas o que especificamente?	Questionar o que as coordenadas dizem sobre o vetor.
23	O tamanho dele, sentido e direção.	Explicitar sua compreensão sobre o que as coordenadas dizem sobre o vetor.
24	Tá ali, olha o vetor.	Explicitar sua compreensão sobre o que as coordenadas dizem sobre o vetor.
25	É tipo assim, é ele, o vetor.	Explicitar sua compreensão sobre o que as coordenadas dizem sobre o vetor.
26	Tá beleza, a distância e o sentido basicamente. Distância em x, distância em y, e o sentido que ele percorre conforme o sinal, aí o sentido é basicamente A e B onde ele está limitado ali, seria positivo e negativo nos eixos, mas no caso é entre A e B, então, por exemplo, se B está aqui e A está aqui, o sentido vai ser negativo, 8 aqui não é negativo, porém não é um valor maior.	Explicitar sua compreensão sobre o que as coordenadas dizem sobre o vetor.

27	Sim, como representar graficamente o vetor (3, -5)?	Leitura do enunciado
28	Eu vou fazer algo assim, bem genérico, é só os pontos que a gente precisa, você coloca um 4 aqui no ponto B e -2 no ponto A.	Sugerir pontos que tenham como resultado o vetor (-3, -5).
29	O outro é 1 e 3, e o outro é 4 e -2.	Sugerir pontos que tenham como resultado o vetor (-3, -5).
30	(4, -2) é o A?	Sugerir pontos que tenham como resultado o vetor (-3, -5).
31	Não, é o B.	Sugerir pontos que tenham como resultado o vetor (-3, -5).
32	Aí você diminui do 3 e -5.	Indicar a operação a ser realizada.
33	Então o ponto A é aqui.	Indicar a localização do ponto A no plano cartesiano.
34	Era (-2, -4) que a gente definiu, ne?	Apresentar pontos que satisfazem a hipótese e efetuar operações matemáticas.
35	Não era (4, -2).	Apresentar pontos que satisfazem a hipótese e efetuar operações matemáticas.
36	É, esse era o B.	Apresentar pontos que satisfazem a hipótese e efetuar operações matemáticas.
37	E o outro é o (1, 3).	Apresentar pontos que satisfazem a hipótese e efetuar operações matemáticas.
38	A (1, 3) e B (4 e -2), aí você pega 1 - 4 é -3, e -2 -3, dá -5.	Apresentar pontos que satisfazem a hipótese e efetuar operações matemáticas.
39	Não, espera aí, 4 - 1, 3.	Apresentar pontos que satisfazem a hipótese e efetuar operações matemáticas.
40	Aí fica 4 - 1 que dá 3.	Apresentar pontos que satisfazem a hipótese e efetuar operações matemáticas.
41	Beleza, aí agora é só ligar os pontos, aí você faz o vetor, é só falar o vetor (x, y) é dado por $(x_2 - x_1)$ e $(y_2 - y_1)$.	Explicar como determinar o vetor
42	x é igual a $(x_2 - x_1)$ e y é igual a $(y_2 - y_1)$.	Responder à questão proposta

Fonte: arquivo do pesquisador

Apresentamos na sequência o resultado da análise das falas enunciadas durante o desenvolvimento da atividade no segundo contexto.

4.1.2 Contexto 2: Minicurso

No segundo semestre do ano letivo de 2019, no XV Encontro Paranaense de Educação Matemática, realizado em Londrina – PR, foi ministrado, por este pesquisador, com o auxílio da orientadora e mais uma pesquisadora, um minicurso com a mesma atividade de introdução ao estudo de vetores. Esse

minicurso teve quatro participantes, sendo dois deles professores de Matemática, uma acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática e uma professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental, com formação em Pedagogia. Apesar de estarem presentes professores de matemática, a atividade configurou-se uma investigação, tendo em vista que tanto o aluno em formação quanto a professora dos anos iniciais possuíam muitas dúvidas em relação ao tema.

Os participantes, identificados nesta dissertação por P1, P2, P3 e P4 foram organizados em duplas para o desenvolvimento da atividade. Os monitores (pesquisadores) são indicados por M1 e M2. Foi solicitado aos participantes, que gravassem no celular, o áudio da interação entre os membros durante o desenvolvimento da atividade. As gravações foram transcritas. Tendo em vista que os episódios apresentam um padrão, com vistas a minimizar a repetição, apresentamos apenas dois episódios desse contexto.

Episódio 5 do segundo contexto: Minicurso

Este episódio é um recorte da interação entre os participantes P1 e P2. Nesse momento estavam focados em responder a segunda questão: 'O que significa graficamente esses valores?'. Vale ressaltar que P1 é formada em Pedagogia.

1. P1: *O que significa graficamente estes valores? Essa distância?*
2. P2: *Aham.*
3. P1: *No caso, aqui seria a distância ao eixo x?*
4. P2: *É a distância do ponto ao eixo.*
5. P1: *O que significa graficamente este zero, além de ficar perpendicular ao eixo y?*
6. P2: *São os pontos de encontro, quando eu coloco uma coordenada eu estou falando de um ponto, então quando estão colocando esses dois pontos ali, vai gerar mais pra frente a distância de dois pontos. Ah, você não é da área da matemática, né?*
7. P1: *Não sou não!*
8. P2: *Então $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$ resulta no vetor.*

9. P1: *Então por exemplo o CD, então você fez o 2 – 1.*

10. P2: *Aí você calculou a distância, tá certo da maneira que você pensou.*

11. P1: *Tá, eu entendi, mas eu ainda não conseguiria explicar para meu aluno o que é um vetor.*

Apresentamos no Quadro 4.08 os objetivos que inferimos de cada uma das falas deste episódio.

Quadro 4.08: Falas do episódio 5 do segundo contexto com seus respectivos objetivos

Número da fala	Fala	Objetivo
1	Essa distância?	Questionar se sua compreensão está correta.
2	Aham.	Sem relevância para o desenvolvimento da atividade.
3	No caso aqui seria a distância ao eixo x?	Questionar se sua compreensão está correta.
4	É a distância do ponto ao eixo.	Apresentar sua compreensão sobre as coordenadas de um vetor.
5	O que significa graficamente este zero?	Questionar o significado das coordenadas do vetor.
6	São os pontos de encontro, quando eu coloco uma coordenada eu estou falando de um ponto, então quando estão colocando esses dois pontos ali, vai gerar mais pra frente a distância de dois pontos.	Apresentar sua compreensão sobre as coordenadas de um vetor.
7	Não sou não.	Sem relevância para o desenvolvimento da atividade.
8	Então $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ resulta no vetor.	Explicar como determinar as coordenadas do vetor
9	Por exemplo o CD, então você fez o 2 – 1.	Apresentar sua compreensão sobre como determinar as coordenadas do vetor
10	Tá certo da maneira que você pensou.	Validar o entendimento do colega
11	Tá eu entendi.	Indicar compreensão sobre a definição de vetor.

Fonte: arquivo do pesquisador

Episódio 6 do segundo contexto: minicurso

1. P3: *Vamos mudar o sentido?*

2. M1: *Como?*

3. P3: *Mudando o sinal.*

4. M1: *Aquele momento que você estava deslizando, pra frente, pra trás, modificou algo? Movimentem novamente e investiguem.*

5. P3: *Vai implicando no ângulo, na direção e no sentido.*

6. P1: *Isso mostra o comportamento dos vetores.*
7. P4: *O módulo, a direção e o sentido.*
8. P3: *Interfere no módulo, na direção e no sentido.*
9. P1: *O que interfere?*
10. P3: *Aqui, nós mexemos aqui, muda o sinal.*
11. P1: *Sim, eu estou tentando enxergar aqui também.*
12. M2: *Está vendo o sinal lá embaixo?*
13. P1: *Sim, quando criamos o primeiro ponto.*
14. P3: *Eu tinha feito assim óh, só que daí eu não conseguia ver nada.*
15. P1: *Aí quando você mudou o sentido, aí mudou o sinal?*
16. P3: *Aham, aí depois de muito tempo eu percebi que também mudava o valor do ponto.*
17. P1: *O ponto do vetor.*
18. P3: *E as coordenadas do ponto aqui também.*
19. P1: *É que você está tirando o ponto do lugar.*
20. M1: *Conseguiu ver, P1?*
21. P1: *O que eu não consegui ainda enxergar é o que ela contou àquela hora aqui os quadradinhos.*
22. P2: *Porque ela estava fazendo a diferença, somando eles, na realidade calculando a distância, daí eu mostrei o que ela estava fazendo, aí eu mostrei os quadradinhos.*
23. M1: *Observem o que tem em comum em todos esses vetores que você traçou.*
24. P1: *Todas estão decrescentes.*
25. P1: *Indo para o negativo.*
26. M1: *Olha agora nos valores, o que que você consegue observar?*
27. P1: *X sempre está positivo e y sempre está negativo.*
28. P1: *Positivo x e negativo y.*
29. P2: *Você está vendo a direção?*
30. P1: *Quando ele está crescente o y ficou positivo e quando está decrescente o y ficou negativo.*
31. P1: *Então o x é em relação a essa angulação, vamos dizer assim.*
32. M1: *Isso, muito bem!*

33. P1: *E o y seria a direção.*

34. M1: *Consegue concluir o quê, então?*

35. P1: *Cada valor refere-se a uma coisa diferente, um é o módulo, outro e a direção e outro o sentido.*

Apresentamos no Quadro 4.09 as falas deste episódio e os objetivos por nós inferidos.

Quadro 4.09: Falas do episódio 6 do segundo contexto com seus respectivos objetivos

Número da fala	Fala	Objetivo
1	Vamos mudar o sentido?	Sugerir utilização de um conceito matemático.
2	Como?	Questionar o participante do curso sobre conceitos envolvidos na alteração do sentido de um vetor.
3	Mudando o sinal.	Responder ao questionamento do mediador sobre como alterar o sentido do vetor
4	Aquele momento que você estava deslizando, pra frente, pra trás, modificou algo? Movimentem novamente e investiguem.	Incentivar os participantes a realizarem procedimentos para teste de conjectura.
5	Vai implicando no ângulo, na direção e no sentido.	Responder ao questionamento do monitor sobre o que implica a movimentação dos vetores.
6	Isso mostra o comportamento dos vetores.	Apresentar uma síntese do que o aluno falou.
7	O módulo, a direção e o sentido.	Apresentar entendimento sobre elementos conceituais
8	Interfere no módulo, na direção e no sentido.	Apresentar entendimento sobre elementos conceituais
9	O que interfere?	Questionar o que interfere no módulo, na direção e no sentido de um vetor.
10	Nós mexemos aqui, muda o sinal.	Indicar o que interfere na mudança do sinal.
11	Eu estou tentando enxergar aqui.	Indicar a realização do procedimento
12	Está vendo o sinal lá embaixo?	Instigar o aluno a analisar visualmente
13	Sim, quando criamos o primeiro ponto.	Responder ao moderador, indicando entendimento
14	Eu tinha feito assim óh, só que daí eu não conseguia ver nada.	Indicar que tentou fazer, porém não conseguiu enxergar nenhum padrão.
15	Aí quando você mudou o sentido, aí mudou o sinal?	Questionar a relação que ocorreu entre o sinal e o sentido do vetor.
16	Percebi que também mudava o valor do ponto.	Apresentar sua compreensão sobre o que se altera quando inverte o sentido do vetor.
17	O ponto do vetor.	Apresentar sua compreensão sobre o que se altera quando inverte o sentido do vetor.

18	E as coordenadas do ponto aqui também.	Apresentar sua compreensão sobre o que se altera quando inverte o sentido do vetor.
19	É que você está tirando o ponto do lugar.	Explicar o motivo pelo qual ocorreu a mudança dos valores durante a realização do procedimento.
20	Conseguiu ver P1?	Questionar se o colega entendeu o procedimento realizado.
21	O que eu não consegui ainda enxergar é o que ela contou aqui os quadradinhos.	Apresentar sua dúvida.
22	Ela estava fazendo a diferença, somando-os, calculando a distância, aí eu mostrei os quadradinhos.	Explicar como observou as coordenadas do vetor.
23	Observem o que tem em comum em todos esses vetores que você traçou.	Provocar os alunos a investigarem padrões
24	Todas estão decrescentes.	Apresentar a identificação de padrões e construir hipóteses.
25	Indo para o negativo.	Apresentar a identificação de padrões e construir hipóteses.
26	Olha agora nos valores, o que que você consegue observar?	Provocar para uma análise do procedimento.
27	x sempre está positivo e y sempre está negativo.	Apresentar a identificação de padrões e construir hipóteses.
28	Positivo x e negativo y.	Apresentar a identificação de padrões e construir hipóteses.
29	Você está vendo a direção?	Questionar sobre qual elemento matemático está sendo observado.
30	Quando ele está crescente o y ficou positivo e quando está decrescente o y ficou negativo.	Apresentar a identificação de padrões e construir hipóteses.
31	Então o x é em relação a essa angulação, vamos dizer assim.	Apresentar a identificação de padrões e construir hipóteses.
32	Isso, muito bem!	Concordar com a conclusão.
33	E o y seria a direção.	Apresentar a identificação de padrões e construir hipóteses.
34	Consegue concluir o quê, então?	Questionar sobre a conclusão do procedimento realizado.
35	Cada valor refere-se a uma coisa diferente, um é o módulo, outro e a direção e outro o sentido.	Apresentar a identificação de padrões e construir hipóteses.

Fonte: arquivo do pesquisador

Apresentamos na sequência o resultado da análise das falas do terceiro contexto em relação aos seus objetivos.

4.1.3 Contexto 3: Ensino Médio

No primeiro semestre do ano letivo de 2019, foi desenvolvida a atividade 3, Quadro 3.03, com uma turma de segunda série do Ensino Médio, de uma

escola privada do Norte do Paraná. A turma era composta por 32 alunos e o professor era o pesquisador.

A atividade foi desenvolvida como introdutória ao conteúdo de vetores, conteúdo este que seria iniciado na disciplina de Física. O objetivo dessa atividade foi a compreensão de algumas propriedades dos vetores e a determinação de um vetor a partir de dois pontos quaisquer.

Como já mencionado, a atividade necessitava do *software* Geogebra como ferramenta para o seu desenvolvimento, assim os alunos foram levados até o laboratório de informática para utilizarem na versão online.

Organizados em grupos, foi solicitado aos alunos que gravassem o áudio da interação ocorrida no desenvolvimento da atividade no celular, posteriormente entregues ao professor via WattsApp. Todas as gravações foram transcritas, entretanto, como já comentado, apresentamos neste capítulo somente as interações de um dos grupos, o qual designamos por Grupo 1, composto pelos alunos A1, A2 e A3.

Apresentamos na sequência dois episódios referentes a este contexto. Nele representamos o professor (pesquisador) por P. No Episódio 7 os alunos estavam procurando responder às três primeiras questões da Atividade 3.

Episódio 7. Terceiro contexto – Ensino Médio

1. A1: *Investigue como que determinou os valores (1, -8) para o vetor, esse foi o vetor que a gente ligou o ponto A no ponto B.*
2. A1: *Se colocarmos outros pontos e analisar os vetores gerados, a gente vai vendo o que acontece.*
3. A2: *Coloca (4, 8)*
4. A1: *Ah, mas (4, 8) é muito longe, vai ter que ficar diminuindo.*
5. A3: *(4,-3)*
6. A1: *(4,-3) é um ponto C e agora fala um ponto D.*
7. A4: *(3, 6)*
8. P: *O que significa esse vetor U que vocês acabaram de criar? Olha nele e olha lá nos valores.*
9. P: *Óh, observe aqui óh, o que que significa um vetor? Quando uma flechinha aqui óh, a setinha significa direção e sentido em que ele está*

trabalhando, não é? Nesse caso, o vetor tá indo pra onde? Pra baixo... Tá, então da onde que ele está começando?

10. A1: *Do ponto A*

11. P: *E terminando?*

12. A1: *No ponto B*

13. P: *Tá, então o que que significa isso? Olha, analisa esses dois pontos e verifique que relação que você consegue ver entre esses dois pontos e esses dois números.*

14. P: *Analistem, observem o que que faz com 1, ou 2, ou 3, ou os 4 números desses pontos, as coordenadas pra chegar no 1 e resultar em -8.*

15. A1: *Pro -8, vai somar o -5 e o -3.*

16. A1: *Pro -8, pro 1 eu não sei, por causa que teria que diminuir o 2 e o 1.*

17. A2: *É subtração, porque daí vai ficar negativo, do eixo x e do eixo y.*

18. P: *Tá, e pra chegar no 1?*

19. A1: *Aí é 2-1.*

20. P: *Aham. Então que conclusão que vocês chegam com isso? Pra você achar a primeira coordenada aqui, você faz o quê?*

21. A1: *Que seria B - A*

22. A2: *Primeiro é x, a segundo é y*

23. A1: *$x_b - x_a$ vai dar 1*

24. A1: *E $y_b - y_a$ vai dar -8.*

25. P: *-8, agora óh, só pra vocês analisarem e descobrirem sozinhos... insere mais alguns pontos, só que insere pontos com valores pequenos que fica mais fácil de vocês analisarem.*

26. A2: *Dá pra gente inserir 2*

27. A2: *Qual que você tinha falado, mesmo?*

28. A3: *(4,-1)*

29. A1: *(3,-2)*

30. A1: *Vai ser o $x_d - x_c$, pra ficar 1 negativo, aí vai ficar 3 - 4.*

31. A1: *Aí, fica -1, e aqui vai ficar -2-(-1), que vai dar -1 também. Que aí vai ficar $y_d - y_c$.*

32. A2: *Isso.*

33. A1: *A gente tem que ver o que esses valores significam.*

34. A4: *É a análise de 3 - 4, -2 e - (-1).*
35. A3: *Mova a representação do vetor e veja o que acontece na janela de álgebra.*
36. A2: *Isso, isso, a gente já viu.*
37. A3: *Aí eu acho que o que eles significam são coordenadas, tipo aquelas coordenadas de lugar, tipo de navio, essas coisas. Mas eu não tenho certeza.*
38. A1: *O que esses valores dizem sobre o vetor? Sobre esse negócio de sobre o que dizem sobre o vetor, não é? Quando tem 2 vetores e você soma, sabe? A soma dos vetores.*

O Quadro 4.10 apresenta as falas deste episódio com os seus objetivos.

Quadro 4.10: Falas do episódio 7 do terceiro contexto com seus respectivos objetivos

Número da fala	Fala	Objetivo
1	Investigue como que determinou os valores 1 e -8 para o vetor.	Leitura do enunciado
2	Se colocarmos outros pontos e analisar os vetores gerados, a gente vai vendo o que acontece.	Sugerir estratégia a ser utilizada.
3	Coloca 4 e 8.	Sugerir um ponto gerador de um vetor
4	Ah, mas (4, 8) é muito longe, vai ter que ficar diminuindo.	Apresentar argumentação para mudança de ponto.
5	(4, -3)	Sugerir um ponto gerador de um vetor
6	(4,-3) é um ponto C e agora fala um ponto D.	Aceitar a ponto sugerido e solicitar outro.
7	(3, 6)	Sugerir um ponto gerador de um vetor
8	O que significa esse vetor U que vocês acabaram de criar? Olha nele e olha lá nos valores.	Provocar os alunos para analisarem matematicamente a situação
9	Óh, observe aqui óh, o que que significa um vetor? Nesse caso, o vetor tá indo pra onde? Onde que ele está começando?	Provocar os alunos para analisarem matematicamente a situação
10	Do ponto A	Indicar onde inicia e onde termina o vetor.
11	E terminando?	Provocar os alunos para analisarem matematicamente a situação
12	No ponto B	Indicar onde inicia e onde termina o vetor.
13	Tá, então o que que significa isso? Olha, analisa esses dois pontos e verifique que relação	Provocar os alunos para analisarem matematicamente a situação

	que você consegue ver entre esses dois pontos e esses dois números.	
14	Analisem, observem as coordenadas pra chegar no 1 e resultar em -8.	Provocar os alunos para analisarem matematicamente a situação
15	Pro - 8, vai somar o - 5 e o - 3.	Indicar como determinar uma coordenada do vetor.
16	Pro 1 eu não sei, por causa que teria que diminuir o 2 e o 1.	Apresentar suas dúvidas em determinar outra coordenada.
17	É subtração! Porque daí vai ficar negativo, do eixo x e do eixo y.	Apresentar sua compreensão quanto à definição de vetor.
18	E para chegar no 1?	Provocar os alunos para analisarem matematicamente a situação
19	Aí é 2-1.	Indicar como determinar uma coordenada do vetor
20	Que conclusão chegaram?	Provocar os alunos para analisarem matematicamente a situação
21	Que seria B-A.	Apresentar sua conclusão sobre a definição de vetores
22	Primeiro é x, a segundo é y.	Apresentar sua conclusão sobre a definição de vetores
23	$x_B - x_A$ vai dar 1	Indicar como determinar uma coordenada do vetor
24	$y_B - y_A$ vai dar -8	Indicar como determinar uma coordenada do vetor
25	Agora óh, só pra vocês analisarem e descobrirem sozinhos, insere mais alguns pontos.	Sugerir estratégia a ser utilizada.
26	Dá pra gente inserir 2.	Sugerir dois pontos como estratégia.
27	Qual você tinha falado, mesmo?	Solicitar repetição de pontos sugeridos.
28	(4,-1)	Sugerir um ponto gerador de um vetor
29	(3,2)	Sugerir um ponto gerador de um vetor
30	Vai ser o $x_d - x$, pra ficar 1 negativo, aí vai ficar 3 - 4.	Realizar um cálculo matemático, utilizando as coordenadas sugeridas e a indicação de como determinar as coordenadas de um vetor.
31	Aí, fica - 1, e aqui vai ficar - 2-(-1), que vai dar -1 também. Que aí vai ficar $y_d - y_c$.	Realizar um cálculo matemático, utilizando as coordenadas sugeridas e a indicação de como determinar as coordenadas de um vetor.
32	Isso	Sem relevância para o desenvolvimento da atividade.
33	A gente tem que ver o que esses valores significam	Sugerir estratégia a ser utilizada.
34	É a análise de 3-4, -2 e -(-1).	Indicar como determinar as coordenadas de um vetor.

35	Mova a representação do vetor e veja o que acontece na janela de álgebra.	Leitura do enunciado
36	Isso, isso, a gente já viu.	Indicar que a questão já tinha sido respondida.
37	Aí eu acho que o que eles significam são coordenadas, tipo aquelas coordenadas de lugar, tipo de navio, essas coisas.	Apresentar sua compreensão sobre o que significam as coordenadas de um vetor.
38	O que esses valores dizem sobre o vetor	Leitura do enunciado

Fonte: arquivo do pesquisador

No episódio 8, apresentado na sequência, os alunos se mobilizam para responder à questão 4.

Episódio 8. Terceiro contexto – Ensino Médio

1. A2: *Então, como posso representar graficamente um vetor (3, -5), então a gente tem que achar um número que esse número menos esse, dê 3*
2. A3: *5 – 2, pode ser? Então pera, o ponto que agora vai ser o ponto E tem que ser 2 que aí o de baixo menos o de cima...*
3. A3: *2 e o outro tem que ser o quê?*
4. A1: *(1, 5)*
5. A1: *(2, 1), aí o outro como era 5 né, que eu tinha falado.*
6. A4: *5 e 5, o que vai dar?*
7. A1: *É que eu tinha falado 5 e 2 vai dar 3.*
8. A3: *Dá pra gente pegar 2 números negativos também.*
9. A1: *Aí então a gente muda esse pra menos 3.*
10. A1: *Calma, 5 menos 2 vai dar 3.*
11. A1: *Vamos ver se vai dar certo*
12. A2: *- 2 - (+3), -2 – 3*
13. A1: *Que número -3 tem que dar - 5 certo? Vai dar -2 de novo. Será que não tá certo? Vamos ligar os pontos.*
14. A1: *Deu 3 e 1, não deu certo, vou apagar esse.*
15. A2: *Tá, 5-2 vai dar 3, então esse aqui pode ser 2.*
16. A3: *(-1, 4)*
17. A2: *A gente estava fazendo errado, era $x - (-3)$ pra dar -5, -1 e 4.*

18.A2: $(-1, 4)$ pra não ficar muito grande.

19.A1: Tudo bem! Tá, esse era $(2, 4)$ que você tinha falado.

20.A3: Aqui tem que ser $(5, -1)$.

21.A1: É que o de baixo vai ser $5 - 1$, porque é o de baixo menos o de cima.

Ele deu esse ponto e aí agora você tinha falado 5 e -4

22.A2: -1

23.A3: $5 - 2 = 3$, $-1 - 4 = -5$

24.A2: $(2, 4)$ né? Pontos F e G.

25.A3: $3 - 5$, a gente conseguiu.

26.A4: Tá, aqui na perguntinha 4, tá assim: Como posso representar graficamente o vetor $(3, -5)$, a gente representou um ponto F com as coordenadas $(2, 4)$ e o ponto G com as coordenadas $(5, -1)$, aí a gente ligou os pontos com o vetor, né? E deu o vetor $(3, -5)$.

27.A2: União de pontos.

28.A1: A união de 2 pontos forma um vetor

29.P: O que concluíram?

30.A3: O ponto B - A é igual ao vetor

31.A2: É igual ao vetor (x, y) .

32.A3: $x_2 - x_1$ é igual a x , $y_2 - y_1$ é igual a y , assim B - A é igual o vetor, isso é nossa conclusão.

O Quadro 4.11 apresenta as falas e os objetivos por nós inferidos referentes ao episódio 8.

Quadro 4.11: Falas do episódio 8 do terceiro contexto com seus respectivos objetivos

Número da fala	Fala	Objetivo
1	A gente pode pular pro ponto A? Então, como posso representar graficamente um vetor $(3, -5)$, então a gente tem que achar um número que esse número menos esse, dê 3.	Ler o enunciado e sugerir um encaminhamento
2	$5 - 2$, pode ser? Então pera, o ponto que agora vai ser o ponto E tem que ser 2 que aí o de baixo menos o de cima	Sugerir um procedimento; Particularizar o ponto para construir uma conjectura.
3	2 e o outro tem que ser o quê?	Solicitar coordenadas do ponto E.
4	$(1, 5)$.	Sugerir coordenadas para pontos geradores de um vetor.
5	$(2, 1)$, aí o outro como era 5 né, que eu tinha falado.	Sugerir coordenadas para pontos geradores de um vetor.

6	5 e 5, o que vai dar?	Solicitar solução para uma operação matemática.
7	Eu tinha falado 5 e 2 vai dar 3.	Realizar operações matemáticas.
8	Dá pra gente pegar 2 números negativos também.	Sugerir pontos geradores.
9	Aí então a gente muda esse pra menos 3.	Sugerir pontos geradores.
10	Calma, 5 menos 2 vai dar 3.	Realizar operações matemáticas.
11	Vamos ver se vai dar certo.	Testar conjecturas.
12	$-2-(+3)$, $-2 - 3$.	Realizar operações matemáticas.
13	Que número -3 tem que dar -5 , certo? Vai dar -2 de novo. Será que não tá certo? Vamos ligar os pontos.	Testar conjecturas.
14	Deu (3, 1), não deu certo, vou apagar esse.	Testar conjecturas.
15	Tá, $5 - 2$ vai dar 3, então esse aqui pode ser 2.	Testar conjecturas.
16	(-1, 4).	Sugerir pontos geradores.
17	A gente estava fazendo errado, era $x - (-3)$ pra dar -5, -1 e 4.	Informar equívoco na operação realizada.
18	(-1, 4) pra não ficar muito grande.	Sugerir pontos geradores.
19	Tudo bem. Tá, esse era, (2, 4) que você tinha falado.	Confirmar valores sugeridos para a coordenadas do ponto.
20	Aqui tem que ser (5, -1).	Sugerir pontos geradores.
21	É que o de baixo vai ser 5 -1, porque é o de baixo menos o de cima. Ele deu esse ponto e aí agora você tinha falado 5 e -4.	Explicar como determinar as coordenadas do vetor
22	-1.	Realizar operações matemáticas.
23	$5 - 2=3$, $-1 - 4= - 5$.	Realizar operações matemáticas.
24	(2, 4) né? Pontos F e G.	Identificar coordenadas do ponto.
25	$3 - 5$ a gente conseguiu.	Realizar operações matemáticas.
26	Aqui na perguntinha 4, tá assim: Como posso representar graficamente o vetor (3, -5) a gente representou um ponto F com as coordenadas (2, 4) e o ponto G com as coordenadas (5, -1), aí a gente ligou os pontos com o vetor, né? E deu o vetor (3, -5).	Indicar como determinar o vetor a partir de dois pontos.
27	União de pontos.	Indicar como determinar o vetor a partir de dois pontos.
28	A união de 2 pontos forma um vetor.	Indicar como determinar o vetor a partir de dois pontos.
29	O que concluíram?	Incentivar os alunos a escreverem uma conclusão.
30	O ponto B - A é igual ao vetor.	Indicar como determinar o vetor a partir de dois pontos.
31	É igual ao vetor (x, y).	Indicar como determinar o vetor a partir de dois pontos.
32	$x_2 - x_1$ é igual a x, $y_2 - y_1$ é igual a y, assim B - A é igual o vetor, isso é nossa conclusão.	Indicar como determinar o vetor a partir de dois pontos.

Fonte: arquivo do pesquisador

4.2 Segunda análise: à procura de agrupamento em categorias

Esta segunda análise teve como objeto os objetivos de cada fala. Procuramos identificar falas que possuíam objetivos semelhantes, com a intenção de realizar um agrupamento em categorias, de modo a nos permitir fazer inferências sobre características dessas categorias. Isso se mostrou necessário tendo em vista que não visualizamos características que pudessem estar presentes em todas as falas de cada episódio.

Essa análise (a qual foi realizada em cada episódio separadamente) permitiu-nos inferir que as falas analisadas poderiam ser separadas em 3 Categorias:

Categoria 1: Falas cujo objetivo consistia em *desenvolver* a atividade matematicamente;

Categoria 2: Falas cujo objetivo consistia em discutir *como* desenvolver a atividade ou quais procedimentos/direcionamentos seriam pertinentes para o desenvolvimento da atividade;

Categoria 3: Falas que tinham como objetivo provocar o interlocutor à análise e reflexão tanto em relação à situação matemática, quando ao direcionamento tomado.

Vale ressaltar que este terceiro grupo ocorreu apenas nos segundo e terceiro contextos, quando um dos interlocutores era o professor ou monitor da atividade.

Assim, classificamos todas as falas de cada episódio em uma das três categorias. Os quadros 4.12 a 4.19 apresentam as falas (de todos os episódios) classificadas como pertencentes à Categoria 1 cujo objetivo consiste em *desenvolver* a atividade matematicamente.

Quadro 4.12: Falas do Episódio 1 classificadas como pertencentes à Categoria 1

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
2/1/1	Aí já tá os pontos A e o B e o vetor.	Identificar objetos matemáticos.

6/1/1	Foi esse menos esse e esse menos esse, aí no caso por exemplo desse 5 utilizar o A(x_1, y_1) e B (x_2, y_2) aí no caso ($x_2 - x_1$) e ($y_2 - y_1$).	Explicar como determinar as coordenadas de um vetor a partir de dois pontos.
7/1/1	Tá, aí você consegue vetor;	Indicar que compreendeu a explicação do colega.
8 /1/1	Aí você consegue vetor;	Continuidade da fala 6, indicando compreensão de como determinar um vetor a partir de dois pontos.
9/1/1	Aí no caso dá o vetor e você faz o inverso.	Sugerir a possibilidade de encontrar dois pontos a partir das coordenadas de um vetor dado.
10/1/1 e 14/1/1	Através disso aqui, você consegue outros valores, então você consegue colocar esse vetor em qualquer lugar. Vamos supor que ele tá aqui assim, então você não pode fazer isso com ele, sempre tem que manter assim.	Explicar que, a partir das coordenadas de um vetor, pode-se determinar diferentes pontos que o determinam, e conseqüentemente, a imagem do vetor pode ser colocada em outra posição no plano cartesiano.
11, 12 e 13 /1/1	Ele vai mudar o ponto aqui, só que mantém a razão. Porque tipo assim, pra eu conseguir 1, aqui pode ser 2 e 3 ou 4 e 3, entendeu? Se quiser trocar ele, posso colocar este vetor aonde que quiser, entendeu? Posso posicionar ele em qualquer outro lugar, só que aquilo lá né, o vetor possui direção e sentido, tipo ele tá do ponto A para o ponto B, então isso você não pode mudar, entendeu?	Reforçar que é possível alterar a posição da imagem de um vetor sem alterá-lo.

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.13: Falas do Episódio 2 classificadas como pertencentes à Categoria 1

Número da fala / número do episódio / número de contexto	Fala	Objetivo
3/2/1	Vamos lá, descontou, aí ele subtrai, o primeiro menos o primeiro e o segundo menos o segundo, o primeiro aqui óh, vai ficar 1 e - 8, vai ficar 2 e -1, -5 e -3, 2 menos 1 dá 1.	Efetuar operações matemáticas.
5/2/1	-5 e -3 dá -8.	Efetuar operações matemáticas.
6/2/1	Mas por que ele fez isso?	Questionar sobre os conceitos matemáticos utilizados pelo Geogebra.
7/2/1	Você tem um ponto A e você tem o ponto B então ele mantém esse aqui como o segundo, aí,	Explicar ao colega como determinar o vetor.

	sempre vai descontar o primeiro aqui vai descontar esse segundo de lá que é o y.	
8/2/1	Entendi, é como se ele fizesse o caminho reverso, né?	Indicar que compreendeu o procedimento.
9/2/1	Isso, isso, aí a setinha vai para lá.	Explicar conceitos
11/2/1	Então graficamente significa isso é o que a gente falou, né? (em referência à questão 2)	Indicar relação entre as coordenadas do vetor e sua representação gráfica.
12/2/1	O corpo do vetor é isso aqui, é os dois pontos, não importa onde esses dois pontos esta ele vai ter essa forma, esse tamanho, ele não muda o tamanho dele, ele vai ser 1 e -8. Entendeu?	Explicar que mesmo mudando o vetor de lugar sua forma não se altera.
13/2/1	Tipo se subir um aqui e um aqui, um aqui e um aqui, ele vai manter a mesma coisa, você não pode tirar o padrão dele.	Idem 12/2/1
15/2/1	Exato, se eu vario um aqui, eu vario a mesma coisa em todos, então o que acontece na geometria poderá colocar ele em qualquer lugar, ele vai ser o mesmo vetor.	Idem 12/2/1
17/2/1	Porque tem o mesmo sentido, mesma direção e mesmo tamanho.	Idem 12/2/1

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.14: Falas do Episódio 3 classificadas como pertencentes à Categoria 1

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
2/3/1	Onde ele está posicionado, que posição que ele ocupa.	Responder ao colega indicando compreensão do objeto matemático.
3/3/1	Ah, os valores que falam são esses aqui, né? (1, 3) é o ponto.	Identificar reconhecimento dos elementos de um vetor.
5/3/1	São as coordenadas, onde que ele está localizado. Entendi.	Indicar que compreendeu o que as coordenadas dizem sobre o vetor.
9/3/1	Você pode acrescenta aqui óh, dois pontos, colocar 4 no y_1 .	Sugerir um ponto para testar uma conjectura.
10/3/1	Aí fica 4 menos 1 dá 3, e aqui pra ficar -5, eu colocaria -2 e -3.	Aceitar a sugestão do colega e realizar cálculo matemático de verificação.
15/3/1	Dois pontos quaisquer $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Indica compreensão conceitual. ✓ Realiza generalização de conceitos matemáticos. ✓ Utiliza termos matemáticos. ✓ Indica reconhecimento matemático da situação.
16/3/1	Só fazer $(x_2 - x_1)$ e $(y_2 - y_1)$.	Sugerir uma solução (hipótese)

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.15: Falas do Episódio 4 classificadas como pertencentes à Categoria 1

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
3, 5, 6, e 7/4/1	Ele descontou né? Diferença, não né? É sim, é a diferença. Por meio da diferença de x de A e x de B, não, x de B e x de A, e o y de B e o y de A, é isso né?	Apresentar seu entendimento com vistas a construir uma resposta à questão.
8/4/1	É isso, né? Tá e o que significa graficamente esses valores? A distância entre os pontos? Seria isso exatamente.	Apresentar sua compreensão sobre o que significa graficamente as coordenadas de um vetor.
9/4/1	A distância entre os pontos você vê pelo vetor. Que a distância entre esses pontos é o vetor.	Argumentar negativamente sobre a compreensão do colega
10/4/1	Então, espera aí, é ele veio pra B.	Analisar o procedimento matemático realizado.
11 e 12/4/1	Calma, é o tanto que ele se movimentou em y e em x, é o quanto ele se movimentou em x e y, já que é a diferença. Se ele foi de 2 para 1, não, se ele foi do 1 para o 2, ele se movimentou positivamente em 1, ou seja, ele fez esse movimento assim, peraí, x pertence a esse movimento aí o B no caso em y né? Seria, aí ele se movimentou para cima ou para baixo né, então dá para dizer o que significa graficamente esses valores.	Apresentar sua compreensão sobre o significado gráfico das coordenadas de um vetor.
13, 14 e 15 /4/1	É a coordenada. O quanto se movimentou em x e y, é a coordenada do vetor também né? A coordenada para localizar	Contribuir para a elaboração conceitual da resposta.
17, 18, 19, 21, 23, 24, 25 e 26 /4/1	Direção e sentido. Pera aí, sentido, pera aí, direção, direção é x e y, sentido seria positivo e negativo, por exemplo, direção y, sentido positivo e negativo, essa é a diferença. É o tamanho do vetor. Ele dá tipo assim, as características do vetor. O tamanho dele, sentido e direção. Tá ali, olha o vetor. É tipo assim, é ele, o vetor. Tá beleza, a distância e o sentido basicamente. Distância em x, distância em y, e o sentido que ele percorre conforme o sinal, aí	Explicitar sua compreensão sobre o que as coordenadas dizem sobre o vetor.

	o sentido é basicamente A e B onde ele está limitado ali, seria positivo e negativo nos eixos, mas no caso é entre A e B, então, por exemplo, se B está aqui e A está aqui, o sentido vai ser negativo, 8 aqui não é negativo, porém não é um valor maior.	
28, 29, 30 e 31/4/1	Eu vou fazer algo assim, bem genérico, é só os pontos que a gente precisa, você coloca um 4 aqui no ponto B e -2 no ponto A. O outro é 1 e 3, e o outro é 4 e -2. (4, -2) é o A? Não, é o B.	Sugerir pontos que tenham como resultado o vetor (-3, -5).
32/4/1	Aí você diminui do 3 e -5.	Indicar a operação a ser realizada
33/4/1	Então o ponto A é aqui.	Indicar a localização do ponto A no plano cartesiano.
34 até 40/4/1	Era (-2, -4) que a gente definiu ne? Não era (4, -2). É, esse era o B. E o outro é o (1, 3). A (1, 3) e B (4 e -2), aí você pega 1 - 4 é -3, e -2 -3, dá -5. Não, espera aí, 4 - 1, 3. Aí fica 4 - 1 que dá 3.	Apresentar pontos que satisfazem a hipótese e efetuar operações matemáticas.
41/4/1	Beleza, aí agora é só ligar os pontos, aí você faz o vetor, é só falar o vetor (x, y) é dado por $(x_2 - x_1)$ e $(y_2 - y_1)$.	Explicar como determinar o vetor
42/4/1	x é igual a $(x_2 - x_1)$ e y é igual a $(y_2 - y_1)$.	Responder à questão proposta

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.16: Falas do Episódio 5 classificadas como pertencentes à Categoria 1

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
1 e 3/5/2	Essa distância? No caso aqui seria a distância ao eixo x?	Questionar se sua compreensão está correta.
4 e 6/5/2	É a distância do ponto ao eixo. São os pontos de encontro, quando eu coloco uma coordenada eu estou falando de um ponto, então quando estão colocando esses dois pontos ali, vai gerar mais pra frente a distância de dois pontos.	Apresentar sua compreensão sobre as coordenadas de um vetor.
5/5/2	O que significa graficamente este zero?	Questionar o significado das coordenadas do vetor
8/5/2	Então $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ resulta no vetor.	Explicar como determinar as coordenadas do vetor

9/5/2	Por exemplo o CD, então você fez o 2 – 1	Apresentar sua compreensão sobre como determinar as coordenadas do vetor
10/5/2	Tá certo da maneira que você pensou.	Validar o entendimento do colega
11/5/2	Tá! eu entendi!	Indicar compreensão sobre a definição de vetor.

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.17: Falas do Episódio 6 classificadas como pertencentes à Categoria 1

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
1/6/2	Vamos mudar o sentido?	Sugerir utilização de um conceito matemático.
2/6/2	Como?	Questionar o participante do curso sobre conceitos envolvidos na alteração do sentido de um vetor.
3/6/2	Mudando o sinal.	Responder ao questionamento do mediador sobre como alterar o sentido do vetor
5/6/2	Vai implicando no ângulo, na direção e no sentido.	Responder ao questionamento do monitor sobre o que implica a movimentação dos vetores.
6/6/2	Isso mostra o comportamento dos vetores.	Apresentar uma síntese do que o aluno falou.
7 e 8/6/2	O módulo, a direção e o sentido. Interfere no módulo, na direção e no sentido.	Apresentar entendimento sobre elementos conceituais
9/6/2	O que interfere?	Questionar o que interfere no módulo, na direção e no sentido de um vetor.
10/6/2	Nós mexemos aqui, muda o sinal.	Indicar o que interfere na mudança do sinal.
12/6/2	Está vendo o sinal lá embaixo?	Instigar o aluno a analisar visualmente
13/6/2	Sim, quando criamos o primeiro ponto.	Responder ao moderador, indicando entendimento
15/6/2	Aí quando você mudou o sentido, aí mudou o sinal?	Questionar a relação que ocorreu entre o sinal e o sentido do vetor.
16, 17, 18/6/2	Percebi que também mudava o valor do ponto. O ponto do vetor. E as coordenadas do ponto.	Apresentar sua compreensão sobre o que se altera quando inverte o sentido do vetor.
21/6/2	O que eu não consegui ainda enxergar é o que ela contou aqui os quadradinhos.	Apresentar sua dúvida.
22/6/2	Ela estava fazendo a diferença, somando-os, calculando a distância, aí eu mostrei os quadradinhos.	Explicar como observou as coordenadas do vetor.
24, 25, 27, 28, 30, 31, 33 e 35/6/2	Todas estão decrescentes. Indo para o negativo. x sempre está positivo e y sempre está negativo. Positivo x e negativo y.	Apresentar a identificação de padrões e construir hipóteses.

	Quando ele está crescente o y ficou positivo e quando está decrescente o y ficou negativo. Então o x é em relação a essa angulação, vamos dizer assim. E o y seria a direção. Cada valor refere-se a uma coisa diferente, um é o módulo, outro e a direção e outro o sentido.	
29/6/2	Você está vendo a direção?	Questionar sobre qual elemento matemático está sendo observado.

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.18: Falas do Episódio 7 classificadas como pertencentes à Categoria 1

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
3, 5, 7, 28, 29/7/3	Coloca 4 e 8 (4,-3) (3,6) (4,-1) (3,2)	Sugerir um ponto gerador de um vetor.
4/7/3	Ah, mas (4, 8) é muito longe, vai ter que ficar diminuindo.	Apresentar argumentação para mudança de ponto.
6/7/3	(4,-3) é um ponto C e agora fala um ponto D.	Aceitar a ponto sugerido e solicitar outro.
10 e 12/7/3	Do ponto A No ponto B	Indicar onde inicia e onde termina o vetor.
15/7/3	Pro -8, vai somar o -5 e o -3.	Indicar como determinar uma coordenada do vetor.
16/7/3	Pro 1 eu não sei, por causa que teria que diminuir o 2 e o 1.	Apresentar suas dúvidas em determinar outra coordenada.
17/7/3	É subtração! Porque daí vai ficar negativo, do eixo x e do eixo y.	Apresentar sua compreensão quanto à definição de vetor.
19, 23 e 24/7/3	Aí é 2-1. $x_B - x_A$ vai dar 1 $y_B - y_A$ vai dar -8	Indicar como determinar uma coordenada do vetor
21 e 22/7/3	Que seria B-A. Primeiro é x, a segundo é y.	Apresentar sua conclusão sobre a definição de vetores
30 e 31/7/3	Vai ser o $x_d - x$, pra ficar 1 negativo, aí vai ficar 3 - 4. Aí, fica - 1, e aqui vai ficar -2-(-1), que vai dar -1 também. Que aí vai ficar $y_d - y_c$.	Realizar um cálculo matemático, utilizando as coordenadas sugeridas e a indicação de como determinar as coordenadas de um vetor.
34/7/3	É a análise de 3-4, -2 e -(-1).	Indicar como determinar as coordenadas de um vetor.
37/7/3	Aí eu acho que o que eles significam são coordenadas, tipo aquelas coordenadas de lugar, tipo de navio, essas coisas.	Apresentar sua compreensão sobre o que significam as coordenadas de um vetor.

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.19: Falas do Episódio 8 classificadas como pertencentes à Categoria 1

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
2/8/3	5 - 2, pode ser? Então pera, o ponto que agora vai ser o ponto E tem que ser 2 que aí o de baixo menos o de cima.	Sugerir um procedimento; Particularizar o ponto para construir uma conjectura.
3/8/3	2 e o outro tem que ser o que?	Solicitar coordenadas do ponto E.
4 e 5/8/3	(1, 5). (2, 1), aí o outro como era 5 né, que eu tinha falado.	Sugerir coordenadas para pontos geradores de um vetor.
6/8/3	5 e 5, o que vai dar?	Solicitar solução para uma operação matemática.
7, 10, 12, 22, 23 e 25/8/3	Eu tinha falado 5 e 2 vai dar 3. Calma, 5 menos 2 vai dar 3. -2-(+3), -2 - 3. -1. 5 - 2=3, -1- 4= - 5. 3 - 5 a gente conseguiu.	Realizar operações matemáticas.
8, 9, 16, 18, e 20/8/3	Dá pra gente pegar 2 números negativos também. Aí então, a gente muda esse pra menos 3. (-1, 4). (-1, 4) pra não ficar muito grande. Aqui tem que ser (5, -1).	Sugerir pontos geradores.
11, 13, 14 e 15/8/3	Vamos ver se vai dar certo. Que número -3 tem que dar - 5 certo? Vai dar -2 de novo. Será que não tá certo? Vamos ligar os pontos. Deu (3, 1) não deu certo, vou apagar esse. Tá, 5 - 2 vai dar 3, então esse aqui pode ser 2.	Testar conjecturas.
17/8/3	A gente estava fazendo errado, era x - (-3) pra dar -5, -1 e 4.	Informar equívoco na operação realizada.
19/8/3	Tudo bem. Tá, esse era, (2, 4) que você tinha falado.	Confirmar valores sugeridos para a coordenadas do ponto.
21/8/3	É que o de baixo vai ser 5 -1, porque é o de baixo menos o de cima. Ele deu esse ponto e aí agora você tinha falado 5 e -4.	Explicar como determinar as coordenadas do vetor
24/8/3	(2, 4) né, pontos F e G.	Identificar coordenadas do ponto.
26, 27, 28, 30, 31 e 32/8/3	Aqui na perguntinha 4, tá assim: Como posso representar graficamente o vetor (3, -5) a gente representou um ponto F com as coordenadas (2, 4) e o ponto G com as coordenadas (5, -1), aí a gente ligou os pontos com o vetor né? E deu o vetor (3, -5). União de pontos. A união de 2 pontos forma um vetor.	Indicar como determinar o vetor a partir de dois pontos.

	<p>O ponto B - A é igual ao vetor. É igual ao vetor (x, y). $x_2 - x_1$ é igual a x, $y_2 - y_1$ é igual a y, assim B - A é igual o vetor, isso é nossa conclusão.</p>	
--	---	--

Fonte: arquivo do pesquisador

Podemos observar que as falas pertencentes a esta Categoria 1 possuem objetivos claros para o desenvolvimento da atividade, quais sejam: identificação/compreensão de objetos matemáticos, explicação de procedimentos matemáticos, explicação/sugestão/aplicação de conceitos matemáticos, identificação de elementos, representação genérica de conceitos, apresentação de padrões, construção de hipóteses e execução de operações matemáticas.

Do mesmo modo, apresentamos nos quadros 4.20 à 4.27 as falas (de todos os episódios) classificadas como pertencentes à Categoria 2, cujo objetivo consiste em discutir *como* desenvolver a atividade ou quais procedimentos/direcionamentos seriam pertinentes para o desenvolvimento da atividade.

Quadro 4.20: Falas do Episódio 1 classificadas como pertencentes à Categoria 2

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
1/1/1	Tá, me empresta deixa eu tentar entender.	Compreender o que o enunciado solicita.
4/1/1	Que você tá fazendo?	Compreender o procedimento adotado pelo colega.
5/1/1	Estou tentando, espera aí. ABC, A em caixa alta, ok, é igual... (pensando em voz alta, inserindo pontos no geogebra)	Deixar o colega informado sobre o que está fazendo

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.21: Falas do Episódio 2 classificadas como pertencentes à Categoria 2

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
1/2/1	Tô mexendo no ponto aqui.	Comentar o que está fazendo para caminharem juntos
2/2/1	Não, beleza. Como determinar esses valores 1 e -8?	Ler em voz alta o enunciado

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.22: Falas do Episódio 3 classificadas como pertencentes à Categoria 2

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
1/3/1	O que esses valores dizem sobre o vetor?	Leitura do enunciado
6/3/1	Aí, me empresta o celular que eu vou fazer esse daqui.	Realizar um procedimento no celular.
7/3/1	Como posso representar graficamente?	Leitura do enunciado
8/3/1	Por que você não muda?	Sugerir analisar outros pontos para testar a hipótese.
12/3/1	Ah tá, no caso eu só vou mudar o ponto B.	Indicar o procedimento a ser realizado.
14/3/1	Porque mais pra frente vai ter que alterar alguns valores.	Explicar procedimentos a serem realizados na sequência.
27/3/1	Sim, como representar graficamente o vetor (3, -5)?	Leitura do enunciado

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.23: Falas do Episódio 4 classificadas como pertencentes à Categoria 2

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
1, 2, 4, 16, 20 e 27/4/1	O que significa graficamente esses valores? Não, como o Geogebra determina esses valores? Como o Geogebra determina esses valores? O que estes valores dizem sobre o vetor? Como representar graficamente o vetor?	Leitura do enunciado

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.24: Falas do Episódio 5 classificadas como pertencentes à Categoria 2

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
1/5/2	O que significa graficamente esses valores?	Leitura do enunciado

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.25: Falas do Episódio 6 classificadas como pertencentes à Categoria 2

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
11/6/2	Eu estou tentando enxergar aqui.	Indicar a realização do procedimento
14/6/2	Eu tinha feito assim óh, só que daí eu não conseguia ver nada.	Indicar que tentou fazer, porém não conseguiu enxergar nenhum padrão.

19/6/2	É que você está tirando o ponto do lugar.	Explicar o motivo pelo qual ocorreu a mudança dos valores durante a realização do procedimento.
20/6/2	Conseguiu ver, P1?	Questionar se o colega entendeu o procedimento realizado.

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.26: Falas do Episódio 7 classificadas como pertencentes à Categoria 2

Número da fala/número do episódio	Fala	Objetivo
1, 35 e 38/7/3	Investigue como que determinou os valores 1 e -8 para o vetor. Mova a representação do vetor e veja o que acontece na janela de álgebra. O que esses valores dizem sobre o vetor?	Leitura do enunciado
2 e 33/7/3	Se colocarmos outros pontos e analisar os vetores gerados, a gente vai vendo o que acontece. A gente tem que ver o que esses valores significam	Sugerir estratégia a ser utilizada.
26/7/3	Dá pra gente inserir 2.	Sugerir dois pontos como estratégia.
27/7/3	Qual você tinha falado, mesmo?	Solicitar repetição de pontos sugeridos.
36/7/3	Isso, isso, a gente já viu.	Indicar que a questão já tinha sido respondida.

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.27: Falas do Episódio 8 classificadas como pertencentes à Categoria 2

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
1/8/3	A gente pode pular pro ponto A? Então, como posso representar graficamente um vetor (3,-5), então a gente tem que achar um número que esse número menos esse, dê 3.	Ler o enunciado e sugerir um encaminhamento

Fonte: arquivo do pesquisador

Esses quadros evidenciam que as falas classificadas na Categoria 2 são direcionadas a estratégias e procedimentos adotados pelos alunos para o desenvolvimento da atividade investigativa.

Quanto às falas classificadas na Categoria 3, ou seja, aquelas cujos objetivos consistem em provocar o interlocutor à análise e reflexão tanto em relação à situação matemática, quando ao direcionamento tomado, inferimos que as mesmas só aconteceram nos episódios 6, 7 e 8, como apresentamos nos Quadros 4.28 a 4.30.

Quadro 4.28: Falas do Episódio 6 classificadas como pertencentes à Categoria 3

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
4/6/2	Aquele momento que você estava deslizando, pra frente, pra trás, modificou algo? Movimentem novamente e investiguem.	Incentivar os participantes a realizarem procedimentos para teste de conjectura.
23/6/2	Observem o que tem em comum em todos esses vetores que você traçou.	Provocar os alunos a investigarem padrões.
26/6/2	Olha agora nos valores. O que que você consegue observar?	Provocar para uma análise do procedimento.
32/6/2	Isso, muito bem.	Avaliar e incentivar.
34/6/2	Consegue concluir o quê então?	Instigar à análise.

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.29: Falas do Episódio 7 classificadas como pertencentes à Categoria 3

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
8, 9, 11, 13, 14, 18, 20 e 25/7/3	O que significa esse vetor U que vocês acabaram de criar? Olha nele e olha lá nos valores. Óh, observe aqui óh, o que que significa um vetor? Nesse caso, o vetor tá indo pra onde? onde que ele está começando? E terminando? Tá, então o que que significa isso. Olha, analisa esses dois pontos e verifique que relação que você consegue ver entre esses dois pontos e esses dois números. Analisem, observem as coordenadas pra chegar no 1 e resultar em -8. E para chegar no 1? Que conclusão chegaram? Agora ó, só pra vocês analisarem e descobrirem sozinhos, insere mais alguns pontos.	Provocar os alunos a analisarem matematicamente a situação.

Fonte: arquivo do pesquisador

Quadro 4.30: Falas do Episódio 8 classificadas como pertencentes à Categoria 3

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Objetivo
29/8/3	O que concluíram?	Incentivar os alunos a escreverem uma conclusão.

Fonte: arquivo do pesquisador

Enfatizamos que as falas classificadas na Categoria 3 apresentam o professor/mediador instigando os alunos/participantes do curso, permitindo que

direcionem seus encaminhamentos e construam suas conclusões (CUNHA, 2009). Ao atuar com intervenções positivas e atentas, o mediador conduziu os alunos a investigarem (CONCENTINO, 2019), assumindo o papel de orientador (D'AMBRÓSIO, 1993), e isso permitiu ao aluno atuar ativamente no processo de construção do conhecimento.

Ao agir desta forma, o mediador (professor/pesquisador) teve uma ação pedagógica diferente da prática tradicional de ensinar, tendo assim uma mudança de atitude (FONSECA, 2000), (OLIVEIRA, 1998), (BRUNHEIRA, 2000), (BROCARD, 2001), (VARANDAS, 2000) e (ALRO; SKOVSMOSE, 2010) despertando o espírito investigativo do aluno (GOLDENBERG, 1999).

De posse dessa classificação, realizamos uma terceira análise, procurando identificar características presentes nas falas de cada categoria.

4.3 Resultado da terceira análise: características das falas de acordo com sua categoria

Após a classificação anterior feita em relação aos objetivos, procuramos identificar características das falas de cada Categoria. Nesta análise realizamos a leitura/releitura de cada fala com vistas a procurar particularidades que fossem indicativas para a classificação. Obviamente, por terem sido classificadas de acordo com seus objetivos, as falas pertencentes à mesma categoria apresentaram particularidades comuns. Desse modo, não poderíamos falar de particularidade de cada fala, e sim, do conjunto de falas pertencentes à mesma categoria.

Assim, nossa análise pautou-se em procurar identificar o que indicava ou apresentava cada frase, por exemplo:

- Indica conhecimento matemático da situação;
- Indica compreensão;
- Indica dúvidas em relação ao objeto matemático;
- Indica procedimentos a serem adotados;
- Indica técnicas de resolução;
- Apresenta conceitos matemáticos;

- Apresenta operações matemáticas, etc.

Desse modo, elaboramos três tabelas, sendo uma com todas as falas pertencentes à Categoria 1, outra com todas as falas da Categoria 2 e a terceira com todas as falas classificadas na Categoria 3. Analisamos cada uma destas falas e elencamos características. Apresentamos no Quadro 4.31 as características inferidas nas falas pertencentes à Categoria 1.

Quadro 4.31: Características das falas pertencentes à Categoria 1

Número da fala / número do episódio/ número do contexto	Fala	Características
2/1/1 3/3/1 5/3/1 13/4/1 15/4/1 4/5/2 6/5/2 37/7/3	Então, aí já tá os pontos A e o B e o vetor. Ah, os valores que falam são esses aqui, né? (1, 3) é o ponto. São as coordenadas, onde que ele está localizado. Entendi! É a coordenada. A coordenada para localizar. É a distância do ponto ao eixo. São os pontos de encontro, quando eu coloco uma coordenada eu estou falando de um ponto, então quando estão colocando esses dois pontos ali, vai gerar mais pra frente a distância de dois pontos Aí eu acho que o que eles significam são coordenadas, tipo aquelas coordenadas de lugar, tipo de navio, essas coisas. Mas eu não tenho certeza	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Indica reconhecimento de objetos matemáticos. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos.
6/1/1	Sim, aí tipo, foi esse menos esse e esse menos esse, aí no caso por exemplo desse 5 utilizar o $A(x_1, y_1)$ e B (x_2, y_2) aí no caso $(x_2 - x_1)$ e $(y_2 - y_1)$.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Apresenta operações, termos e conceitos matemáticos. ✓ Indica compreensão sobre a definição de vetores a partir de dois pontos.
7/1/1 8/1/1 9/1/1 12/1/1	Tá, aí você consegue vetor. Aí você consegue vetor. Aí no caso da o vetor e você faz o inverso. Porque tipo assim pra eu conseguir 1, aqui pode ser 2 e 3 ou 4 e 3, entendeu? Se quiser trocar ele, posso colocar este vetor aonde que quiser, entendeu?	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Indica compreensão sobre a definição de vetores. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos;
10/1/1 11/1/1 13/1/1	Através disso aqui você consegue outros valores, então você	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Indica compreensão em relação ao módulo, direção e sentido de um vetor.

<p>14/1/1 12/2/1 13/2/1 15/2/1 17/2/1 17/4/1 18/4/1 19/4/1 21/4/1 23/4/1 24/4/1 25/4/1 26/4/1 5/6/2 6/6/2 7/6/2 8/6/2</p>	<p>consegue colocar esse vetor em qualquer lugar.</p> <p>Ele vai mudar o ponto aqui só que mantém a razão.</p> <p>Posso posicionar ele em qualquer outro lugar, só que aquilo lá né o vetor possui direção e sentido, tipo ele tá do ponto A para o ponto B, então isso você não pode mudar, entendeu?</p> <p>Vamos supor que ele tá aqui assim, então você não pode fazer isso com ele, sempre tem que manter assim.</p> <p>O corpo do vetor é isso aqui, é os dois pontos, não importa onde esses dois pontos está ele vai ter essa forma, esse tamanho, ele não muda o tamanho dele, ele vai ser 1 e -8, entendeu?</p> <p>Tipo se subir um aqui e um aqui, um aqui e um aqui, ele vai manter a mesma coisa, você não pode tirar o padrão dele.</p> <p>Exato, se eu vario um aqui, eu vario a mesma coisa em todos, então o que acontece na geometria poderá colocar ele em qualquer lugar, ele vai ser o mesmo vetor.</p> <p>Porque tem o mesmo sentido, mesma direção e mesmo tamanho.</p> <p>Direção e sentido.</p> <p>Pera aí, sentido, pera aí, direção, direção é x e y, sentido seria positivo e negativo, por exemplo, direção y, sentido positivo e negativo, essa é a diferença.</p> <p>É o tamanho do vetor.</p> <p>Ele dá tipo assim, as características do vetor.</p> <p>O tamanho dele, sentido e direção.</p> <p>Tá ali, olha o vetor</p> <p>É tipo assim, é ele, o vetor.</p> <p>Tá beleza, a distância e o sentido basicamente. Distância em x, distância em y, e o sentido que ele percorre conforme o sinal, aí o sentido é basicamente...</p> <p>Vai implicando no ângulo, na direção e no sentido.</p> <p>Isso mostra o comportamento dos vetores.</p> <p>O módulo, a direção e o sentido.</p> <p>Interfere no módulo, na direção e no sentido.</p>	<p>✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos.</p> <p>✓ Apresenta compreensão matemática sobre elementos dos vetores.</p>
<p>3/2/1</p>	<p>Vamos lá, descontou, aí ele subtrai, o primeiro menos o primeiro e o segundo menos o segundo, o primeiro aqui ó, vai ficar 1 e - 8, vai ficar 2 e -1, -5 e -3, 2 menos 1 dá 1.</p>	<p>✓ Apresenta operações matemáticas.</p> <p>✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos.</p>

		✓ Indica compreensão sobre a definição de vetores.
5/2/1	-5 e -3 dá -8.	✓ Efetua operações matemáticas. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos.
6/2/1	Mas por que ele fez isso?	✓ Indica dúvidas em relação à definição de vetores.
7/2/1	Porque tipo assim, você tem um ponto A e você tem o ponto B, então ele mantém esse aqui como o segundo, aí sempre vai fazer isso, sempre vai descontar o primeiro aqui vai descontar esse segundo de lá que é o y.	✓ Apresenta explicação matemática sobre a definição de vetores. ✓ Apresenta reconhecimento matemático da situação. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos.
8/2/1	Entendi, é como se ele fizesse o caminho reverso, né? Faz esse caminho e o que ele mostra é o reverso.	✓ Indica compreensão dos conceitos envolvidos. ✓ Utiliza termos e ideias matemáticas.
9/2/1	Isso, isso, aí a setinha vai para lá.	✓ Indica compreensão dos conceitos envolvidos; ✓ Utiliza termos matemáticos.
11/2/1	Então, graficamente significa isso, é o que a gente falou, né?	✓ Apresenta reconhecimento matemático da situação. ✓ Analisa matematicamente a situação.
2/3/1	Onde ele está posicionado, que posição que ele ocupa, óh tipo ali, ele vai perto do eixo.	✓ Indica explicação do conceito matemático. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos.
9/3/1	Você pode acrescenta aqui óh, dois pontos, colocar 4 no y_1 .	✓ Utilizar termos e conceitos matemáticos. ✓ Apresenta ideias matemáticas.
10/3/1	Aí fica 4 menos 1 dá 3, e aqui pra ficar -5, eu colocaria -2 e -3.	✓ Realiza operações matemáticas. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos. ✓ Apresenta compreensão matemática da situação.
15/3/1	Dois pontos quaisquer $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$	✓ Indica compreensão conceitual. ✓ Realiza generalização de conceitos matemáticos. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos.
16/3/1	Só fazer $(x_2 - x_1)$ e $(y_2 - y_1)$.	✓ Indica compreensão conceitual. ✓ Apresenta generalização de conceitos. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos.
3/4/1 5/4/1 7/4/1	Ele descontou, né? Diferença não, né? Por meio da diferença de x de A e x de B, não, x de B e x de A, e o y de B e o y de A, é isso né?	✓ Solicita avaliação quanto ao seu entendimento em relação à operação realizada. ✓ Utiliza termos matemáticos.

6/4/1	É sim, é a diferença.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Apresenta explicação e resposta ao questionamento realizado quanto a operação realizada. ✓ Apresenta compreensão em relação à definição de vetores. ✓ Utiliza termos matemáticos.
8/4/1	A distância entre os pontos? Seria isso exatamente.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Indica dúvidas e questionamentos em relação a conceitos matemáticos. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos.
10/4/1	Então, espera aí, é ele veio pra B.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Analisa matematicamente a situação.
11/4/1	Calma, é o tanto que ele se movimentou em y e em x, é o quanto ele se movimentou em x e y, já que é a diferença. Se ele foi de 2 para 1, não, se ele foi do 1 para o 2, ele se movimentou positivamente em 1.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos. ✓ Apresenta compreensão de conceitos matemáticos. ✓ Indica reconhecimento de definição matemática. ✓ Efetua operações matemáticas.
12/4/1	Seria, aí ele se movimentou para cima ou para baixo, né? Então dá para dizer o que significa graficamente esses valores.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Indica reconhecimento de uma definição matemática. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos. ✓ Apresenta entendimento matemático da situação.
14/4/1	O quanto se movimentou em x e y, é a coordenada do vetor também, né?	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos. ✓ Apresenta questionamento em relação ao conceito matemático envolvido.
28/4/1 29/4/1 30/4/1 31/4/1 33/4/1 34/4/1 35/4/1 36/4/1 37/4/1 3/7/3 4/7/3 5/7/3 6/7/3 7/7/3 28/7/3 29/7/3 2/8/3 3/8/3 4/8/3 5/8/3 6/8/3 7/8/3 8/8/3 9/8/3 16/8/3 18/8/3	<p>Você coloca um 4 aqui no ponto B e -2 no ponto A.</p> <p>O outro é 1 e 3, e o outro é 4 e -2.</p> <p>(4, -2) é o A?</p> <p>Não, é o B.</p> <p>Então o ponto A é aqui.</p> <p>Era (-2, -4) que a gente definiu né?</p> <p>Não era (4, -2).</p> <p>É, esse era o B.</p> <p>E o outro é o (1, 3).</p> <p>Coloca 4 e 8</p> <p>Ah, mas (4, 8) é muito longe, vai ter que ficar diminuindo.</p> <p>(4,-3)</p> <p>(4,-3) é um ponto C e agora fala um ponto D.</p> <p>(3, 6)</p> <p>(4,-1)</p> <p>(3,-2)</p> <p>5 - 2, pode ser? Então pera, o ponto que agora vai ser o ponto E tem que ser 2 que aí o de baixo menos o de cima.</p> <p>2 e o outro tem que ser o quê?</p> <p>(1, 5).</p>	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos. ✓ Indica reconhecimento de objetos matemáticos. ✓ Atribui pontos para testar a hipótese.

19/8/3 20/8/3 24/8/3	(2, 1), aí o outro como era 5 né, que eu tinha falado. 5 e 5, o que vai dar? É que eu tinha falado 5 e 2 vai dar 3. Dá pra gente pegar 2 números negativos também. Aí então a gente muda esse pra menos 3. (-1,4). (-1, 4) pra não ficar muito grande. Tudo bem. Tá esse era, (2, 4) que você tinha falado. Aqui tem que ser (5, -1). (2, 4) né? Pontos F e G.	
32/4/1 38/4/1 39/4/1 40/4/1	Aí você diminui do 3 e - 5. A (1, 3) e B (4 e - 2), aí você pega 1 - 4 é - 3, e -2 -3, dá -5. Não, espera aí, 4 - 1, 3. Aí fica 4 -1 que dá 3.	✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos. ✓ Efetua operações testando a hipótese.
41/4/1 42/4/1 8/5/2	Beleza, aí agora é só ligar os pontos, aí você faz o vetor, é só falar o vetor (x, y) é dado por $(x_2 - x_1)$ e $(y_2 - y_1)$. x é igual a $(x_2 - x_1)$ e y é igual a $(y_2 - y_1)$. Então $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$ resulta no vetor.	✓ Indica conhecimento sobre a definição de vetores a partir de dois pontos. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos. ✓ Apresenta generalização de conceitos.
1/5/2 3/5/2 5/5/2	Essa distância? No caso aqui seria a distância ao eixo x ? O que significa graficamente este zero?	✓ Apresenta questionamento conceitual. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos.
9/5/2	Por exemplo o CD, então você fez o 2 - 1	✓ Efetua operações matemáticas.
10/5/2 11/5/2	Tá certo da maneira que você pensou. Tá, eu entendi!	✓ Apresenta compreensão conceitual. ✓ Apresenta estar de acordo com os colegas.
1/6/2 3/6/2	Vamos mudar o sentido? Mudando o sinal.	✓ Apresenta compreensão sobre elementos dos vetores.
2/6/2	Como?	✓ Apresenta questionamento sobre elementos dos vetores. ✓
9/6/2	O que interfere?	✓ Apresenta dúvidas em relação aos elementos dos vetores.
10/6/2 12/6/2 13/6/2 15/6/2 16/6/2 17/6/2 18/6/2	Nós mexemos aqui, muda o sinal. Está vendo o sinal lá embaixo? Sim, quando criamos o primeiro ponto. Aí quando você mudou o sentido, aí mudou o sinal? Percebi que também mudava o valor do ponto. O ponto do vetor. E as coordenadas do ponto.	✓ Apresenta compreensão em relação a elementos vetoriais ✓ Apresenta identificação de objetos matemáticos.

21/6/2	O que eu não consegui ainda enxergar é o que ela contou aqui os quadradinhos.	✓ Indica dúvidas conceituais.
22/6/2 24/6/2 25/6/2 27/6/2 28/6/2 29/6/2 30/6/2 31/6/2 33/6/2 35/6/2	Ela estava fazendo a diferença, somando-os, calculando a distância, aí eu mostrei os quadradinhos. Todas estão decrescentes. Indo para o negativo. x sempre está positivo e y sempre está negativo. Positivo x e negativo y. Você está vendo a direção? Quando ele está crescente o y ficou positivo e quando está decrescente o y ficou negativo. Então o x é em relação a essa angulação, vamos dizer assim. E o y seria a direção. Cada valor refere-se a uma coisa diferente, um é o módulo, outro e a direção e outro o sentido.	✓ Indica compreensão conceitual.
10/7/3 12/7/3	Do ponto A No ponto B	✓ Utilização de termos matemáticos. ✓ Indica compreensão matemática.
15/7/3 16/7/3 17/7/3 19/7/3	Pro -8, vai somar o -5 e o -3. Pro -8, pro 1 eu não sei, por causa que teria que diminuir o 2 e o 1. É subtração. Porque daí vai ficar negativo, do eixo x e do eixo y. Aí é 2-1.	✓ Efetua operações matemáticas. ✓ Utiliza termos matemáticos.
21/7/3 22/7/3	Que seria B-A Primeiro é x, a segundo é y	✓ Indica compreensão de definição matemática. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos.
23/7/3 24/7/3 30/7/3 31/7/3 34/7/3	$x_B - x_A$ vai dar 1 $y_B - y_A$ vai dar -8 Vai ser o $x_d - x_c$, pra ficar 1 negativo, aí vai ficar 3 - 4. Aí, fica - 1, e aqui vai ficar -2-(-1), que vai dar -1 também. Que aí vai ficar $y_d - y_c$. É a análise de 3-4, -2 e -(-1).	✓ Utiliza termos matemáticos. ✓ Efetua operações matemáticas. ✓ Apresenta generalização.
32/7/3	Isso.	✓ Indica concordância com conceito matemático. ✓ Apresenta compreensão matemática da situação.
10/8/3	Calma, 5 menos 2 vai dar 3.	✓ Realização de operações matemáticas. ✓ Utiliza termos matemáticos. ✓ Expressa cálculo matemáticos.
12/8/3	-2-(+3), -2 - 3.	✓ Realização de operações matemáticas. ✓ Utiliza termos matemáticos.

13/8/3 14/8/3 15/8/3 17/8/3	Que número -3 tem que dar - 5 certo? Vai dar -2 de novo. Será que não tá certo? Vamos ligar os pontos. Deu (3, 1) não deu certo, vou apagar esse. Tá, 5 - 2 vai dar 3, então esse aqui pode ser 2. A gente estava fazendo errado, era $x - (-3)$ pra dar -5, -1 e 4.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos. ✓ Apresenta análise matemática da situação. ✓ Apresenta interpretação e compreensão matemática. ✓ Efetua operações matemáticas.
21/8/3 25/8/3	É que o de baixo vai ser 5 -1, porque é o de baixo menos o de cima. Ele deu esse ponto e aí agora você tinha falado 5 e -4. 3 - 5 a gente conseguiu.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos. ✓ Indica análise matemática da situação.
22/8/3 23/8/3	-1. $5 - 2 = 3$, $-1 - 4 = -5$.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Efetua operações matemáticas.
26/8/3 27/8/3 28/8/3 30/8/3	Aqui na perguntinha 4, tá assim: Como posso representar graficamente o vetor (3, -5) a gente representou um ponto F com as coordenadas (2, 4) e o ponto G com as coordenadas (5, -1), aí a gente ligou os pontos com o vetor né? E deu o vetor (3, -5). União de pontos. A união de 2 pontos forma um vetor. O ponto B - A é igual ao vetor.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Indica análise matemática da situação, reconhecendo os conceitos envolvidos. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos. ✓ Apresenta entendimento matemático da situação.
31/8/3 32/8/3	É igual ao vetor (x, y). $x_2 - x_1$ é igual a x, $y_2 - y_1$ é igual a y, assim B - A é igual o vetor, isso é nossa conclusão.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Indica reconhecimento de uma definição matemática. ✓ Utiliza termos e conceitos matemáticos. ✓ Expressa generalização de conceitos.

Fonte: arquivo do pesquisador

Agrupando as características consideradas semelhantes e eliminando as repetições, observamos que nesta categoria temos:

- Falas que indicam compreensão, interpretação, reconhecimento e/ou concordância em relação a conceitos, objetos e elementos matemáticos. Designamos esta característica por C_1 : Compreensão conceitual;
- Falas que apresentam termos, conceitos e/ou ideias matemáticas, a qual designamos por C_2 ; Presença de termos ou conceitos matemáticos;
- Falas que apresentam sugestões e/ou realizações de operações matemáticas, designada por C_3 ; Operações matemáticas;
- Falas que sugerem reconhecimento de objetos matemáticos, designada por C_4 : Reconhecimento de objetos matemáticos;

- Falas que indicam análise matemática da situação. Esta característica foi designada por C_5 : Análise conceitual.
- Falas que apresentam dúvidas, questionamentos e/ou explicações de conceitos, objetos e elementos matemáticos. Designamos esta característica por C_6 : Dúvidas ou explicação conceitual.
- Falas que apresentam solicitação de avaliação/parecer/concordância do outro. Designamos esta característica por C_7 : Solicitação de aprovação.

Com estas características, observamos a possibilidade de renomear essa categoria como 'Falas Conceituais', pois possuem como objetivo fornecer explicações, apresentar questionamentos ou compreensão de conceitos matemáticos com vistas a solucionar o problema em questão.

Assim, considerando que as características definem uma categoria, inferimos em nossa pesquisa que as Falas Conceituais analisadas e apresentadas nesse texto apresentam as seguintes características, não necessariamente cumulativas:

- C_1 : Compreensão conceitual;
- C_2 : Presença de termos ou conceitos matemáticos;
- C_3 : Operações matemáticas;
- C_4 : Reconhecimento de objetos matemáticos;
- C_5 : Análise conceitual.
- C_6 : Dúvidas ou explicação conceitual.
- C_7 : Solicitação de aprovação.

Quanto às falas pertencentes à Categoria 2, realizamos o mesmo procedimento adotado anteriormente, e apresentamos no Quadro 4.32 as características evidenciadas nesta categoria.

Quadro 4.32: Características das falas pertencentes à Categoria 2

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	✓ Características
1/1/1	Tá, me empresta, deixa eu tentar entender.	✓ Indica tentativa de compreensão do enunciado;

4/1/1	Que você tá fazendo?	✓ Indica interesse em compreender o procedimento adotado pelo colega;
5/1/1 1/2/1 6/3/1 12/3/1 14/3/1 11/6/2 14/6/2 19/6/2	Estou tentando, espera aí. ABC, A em caixa alta, ok, é igual... (pensando em voz alta, inserindo pontos no Geogebra) Tô mexendo no ponto aqui. Aí me empresta o celular que eu vou fazer esse daqui. Ah, tá, no caso eu só vou mudar o ponto B. Ta, eu não vou nem fazer no Geogebra. Porque mais pra frente vai ter que alterar alguns valores. Eu estou tentando enxergar aqui. Eu tinha feito assim óh, só que daí eu não conseguia ver nada. É que você está tirando o ponto do lugar.	✓ Apresenta informações sobre procedimentos adotados ou a serem adotados.
2/2/1 1/3/1 7/3/1 27/3/1 1/4/1 2/4/1 4/4/1 16/4/1 20/4/1 27/4/1 1/5/2 1/7/3 35/7/3 38/7/3 1/8/3	Não beleza. Como determinar esses valores 1 e -8? O que esses valores dizem sobre o vetor? Como posso representar graficamente? Sim, como representar graficamente o vetor- 3 e -5? O que significa graficamente esses valores? Não, como o Geogebra determina esses valores? Como o Geogebra determina esses valores? O que estes valores dizem sobre o vetor? Como representar graficamente o vetor? O que significa graficamente esses valores? Investigue como que determinou os valores 1 e -8 para o vetor, esse foi o vetor que a gente ligou o ponto A no ponto B. Mova a representação do vetor e veja o que acontece na janela de álgebra. O que estes valores dizem sobre o vetor? A gente pode pular pro ponto A? Então, como posso representar graficamente um vetor (3,-5), então a gente tem que achar um número que esse número menos esse, dê 3.	✓ Indica leitura de enunciado.
8/3/1	Porque você não muda?	✓ Indica sugestão de encaminhamento.
20/6/2	Conseguiu ver P1?	Indica oferecimento de auxílio

2/7/3	Se colocarmos outros pontos e analisar os vetores gerados, a gente vai vendo o que acontece.	✓ Indica sugestão de estratégias para o desenvolvimento da atividade;
26/7/3	Dá pra gente inserir 2.	✓ Sugere uma estratégia para realização da atividade;
33/7/3	A gente tem que ver o que esses valores significam.	✓ Indica releitura (interpretação) do enunciado.

Fonte: arquivo do pesquisador

Agrupando as características consideradas semelhantes e eliminando as repetições, observamos que nesta categoria temos:

- Falas que indicam o direcionamento dado ao desenvolvimento da situação e posterior resolução do problema. Essas falas indicam explicações, sugestões e/ou informações sobre as estratégias/procedimentos a serem utilizados. Ainda podemos observar falas que indicam a compreensão ou aceite de um aluno em relação ao procedimento que outro aluno está sugerindo. Esta característica nomeamos de C_8 : Direcionamento/encaminhamento técnico.
- Falas que indicam a leitura de enunciados. Esta leitura algumas vezes é feita para o colega e em outras vezes é uma leitura para si mesmo, com a intenção de compreender o que deve ser realizado. Esta característica nomeamos de C_9 : Leitura de enunciados.
- No geral não apresenta termos nem conceitos matemáticos, com exceção de momentos de leitura de enunciados, explicações sobre o procedimento, sugestões de encaminhamento. Esta característica nomeamos de C_{10} : Ausência de conceitos matemáticos.

Diante do exposto, inferimos em nossa pesquisa que as falas pertencentes à Categoria 2 apresentam as seguintes características, não necessariamente cumulativas:

- C_8 : Direcionamento/encaminhamento técnico.
- C_9 : Leitura de enunciados.
- C_{10} : Ausência de termos e conceitos matemáticos.

Observando essas características podemos, reconhecer que esta categoria pode ser nomeada como 'Falas procedimentais', pois possui como objetivo apresentar/sugerir encaminhamentos para a atividade e suas características envolvem leitura de enunciado, direcionamento técnico e questões que norteiam os encaminhamentos, ou seja, procedimentos adotados para solucionar o problema.

Assim como as categorias anteriores, apresentamos no Quadro 4.33 as características inferidas nas falas classificadas na Categoria 3.

Quadro 4.33: Características das falas pertencentes à Categoria 3

Número da fala / número do episódio / número do contexto	Fala	Características
26/6/2 34/6/2 8/7/3 9/7/3 11/7/3 18/7/3 20/7/3 29/8/3	Olha agora nos valores, o que que você consegue observar? Consegue concluir o quê, então? O que significa esse vetor U que vocês acabaram de criar? Olha nele e olha lá nos valores. Óh, observe aqui óh, o que que significa um vetor? Nesse caso, o vetor tá indo pra onde? Onde que ele está começando? E terminando? E para chegar no 1? Que conclusão chegaram? O que concluíram?	Indica questionamento provocativo para análise, atenção e conclusão.
4/6/2 23/6/2 13/7/3 14/7/3 25/7/3	Aquele momento que você estava deslizando pra frente, pra trás, modificou algo? Movimentem novamente e investiguem. Observem o que tem em comum em todos esses vetores que você traçou. Tá, então o que que significa isso. Olha, analisa esses dois pontos e verifique que relação que você consegue ver entre esses dois pontos e esses dois números. Analisem, observem as coordenadas pra chegar no 1 e resultar em -8. Agora óh, só pra vocês analisarem e descobrirem sozinhos, insere mais alguns pontos.	Indica sugestão provocativa para análise, atenção e conclusão.
32/6/2	Isso, muito bem.	Indica incentivo/avaliação/retorno.

Fonte: arquivo do pesquisador

Observamos que nesta categoria temos falas dos professores/monitores caracterizadas por perguntas que direcionam os alunos em relação ao encaminhamento ou a continuidade da investigação. Essa intervenção do professor/monitor, por meio de questões norteadoras, oportuniza momentos de reflexão e análise. Esta característica nomeamos de C_{11} : Questões norteadoras. Em virtude dessa característica, nomeamos esta categoria por 'Falas norteadoras'.

4.4 Algumas palavras sobre o resultado da análise dos dados

As análises realizadas nesta pesquisa e aqui apresentadas tiveram como foco responder nossa questão de pesquisa: "*Que características evidenciamos na comunicação em atividades de Investigação Matemática?*". Inferimos a partir destes dados que, para o contexto em que foi aplicada a pesquisa e as interações por nós analisadas, podemos evidenciar 11 características distribuídas em três categorias.

A categoria 1, a qual chamamos de Falas conceituais, sugeriu sete características, as quais designamos por:

- C_1 : Compreensão conceitual;
- C_2 : Presença de termos ou conceitos matemáticos;
- C_3 : Operações matemáticas;
- C_4 : Reconhecimento de objetos matemáticos;
- C_5 : Análise conceitual;
- C_6 : Dúvidas ou explicação conceitual;
- C_7 : Solicitação de aprovação.

Categoria 2, a qual chamamos de Falas procedimentais apresentou três características, as quais designamos por:

- C_8 : Direcionamento/encaminhamento técnico;
- C_9 : Leitura de enunciados;
- C_{10} : Ausência de termos e conceitos matemáticos.

E a categoria 3, a qual nomeamos de Falas norteadoras, sugeriu apenas uma característica, a C_{11} : Questões norteadoras. Apesar de ser apenas uma característica, possui um papel de extrema importância na investigação matemática.

Esta característica vai ao encontro das recomendações de alguns pesquisadores, quando afirmam que o professor deve realizar intervenções positivas e atentas que instiguem os alunos a investigarem (CONCENTINO, 2018) e ainda, que sejam dosadas, permitindo “que os alunos criem seus caminhos e tirem suas próprias conclusões” (CUNHA, 2009, p. 23).

De fato, os questionamentos realizados pelos professores/monitores os quais geraram a C_{11} tiveram o efeito de estimular/incentivar os alunos na busca por respostas, refletindo, testando e procurando respostas, assumindo o papel principal no processo de construção do conhecimento (NCTM, 1991), (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016), (SKOVSMOSE, 2000). Lembramos que este é um dos objetivos da Investigação Matemática. As ações desencadeadas pelos professores proporcionaram a Cooperação Investigativa proposta por Alro e Skovsmose (2010), permitindo que a comunicação oportunizada em sala de aula interferisse diretamente na qualidade de aprendizagem da Matemática.

Apesar de esta não ser uma pesquisa quantitativa sublinhamos que as características de 1 a 7, observadas nas falas conceituais foram em maior número, o que mais uma vez, vai de encontro com um dos objetivos da Investigação Matemática que consiste em desenvolver conceitos matemáticos.

Podemos inferir ainda que, para este conjunto de dados, falas que remetem à análise crítica da Matemática na sociedade ou ao seu papel no cotidiano não foram visualizadas.

Assim, se o objetivo do professor é o desenvolvimento de conceitos matemáticos, esses dados indicam que a Investigação Matemática possui potencial para desencadear este desenvolvimento por meio da comunicação ali estabelecida, pois as atividades de cunho investigativo, ao serem desenvolvidas, têm como base entidades matemáticas, isto é, fazem referência a assuntos puramente matemático, (ALRO; SKOVSMOSE, 2010).

5 ENCERRANDO UM CICLO

Chegando ao fim desta pesquisa, lembramos de nossos objetivos enquanto pesquisador e educador. Após estudos na literatura da área, identificamos características da Investigação Matemática, conhecendo essas características elaboramos e desenvolvemos algumas atividades de cunho investigativo em sala de aula. Com o desenvolvimento dessas atividades podemos identificar e classificar características da comunicação em Investigação Matemática. Como educador posso afirmar que minhas ações docentes tiveram um avanço significativo, minhas aulas que antes do PPGMAT eram totalmente transmissivas, foram inovadas. Podemos dizer que os objetivos foram alcançados.

Ao buscar este programa de mestrado tinha o objetivo de crescer e aperfeiçoar minha prática docente. Com o findar desta pesquisa, posso afirmar que minha ação como professor e conseqüentemente minhas aulas não são mais como eram antes.

Esta pesquisa levou a uma reflexão da minha ação de professor. Antes eu utilizava em minhas aulas somente práticas tradicionais, norteadas sempre por aulas expositivas, exercícios e correções. Após pesquisar e estudar novas tendências e possibilidades, percebi que a utilização de práticas não tradicionais torna as aulas mais dinâmicas e atrativas, tanto para os alunos quanto para o professor, oportunizando uma construção do conhecimento de forma ativa por parte do aluno.

A pesquisa oportunizou-me uma visão diferente de Práticas Pedagógicas não transmissivas, práticas essas que oportunizam aulas diferentes e atrativas, com o envolvimento ativo dos alunos no processo de construção do conhecimento, transformando minhas aulas com essas características.

Meu caminhar pelo PPGMAT foi um marco histórico na minha carreira de professor, pois abriu minha mente, meus conhecimentos e minhas ações docentes em sala de aula. Essas histórias de mudanças estão relatadas no meu produto educacional, no qual descrevo algumas *“HISTÓRIAS DAS MINHAS SALAS DE AULA”*.

Outra característica marcante que esta pesquisa me oportunizou, foi o amadurecimento enquanto pesquisador. Tive a visão e o aprendizado do que é pesquisar, como desenvolver pesquisas científicas que tenham potencial para contribuir com o meio acadêmico e profissional.

Finalmente acredito que esta pesquisa pode contribuir com a construção de quadro teórico acerca da Investigação Matemática, além de oportunizar que outros professores tenham acesso ao conhecimento da Investigação Matemática, para assim inserir em suas salas de aula, contribuindo para o avanço do Ensino da Matemática.

Portanto, a pesquisa abre o leque para que futuramente possa ser realizada novas pesquisas, com o desenvolvimento de outras atividades de cunho investigativo nos diversos contextos possíveis, possibilitando novas análises das comunicações que emergem em atividades de Investigação Matemática.

Para pesquisas futuras, pretendemos pesquisar que contribuições de cada uma dessas características pode oferecer no desenvolvimento de atividades investigativas e o que essas características permitem desencadear durante o desenvolvimento de atividades investigativas.

6 REFERÊNCIAS

- ADLER, P. A.; ADLER, P. **Observational Techniques**. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (ed.). *Handbook of Qualitative Research*. California: Sage Publications, 1994. p. 377-392.
- AFONSO, R. F. S.; LEIVAS, J. C. P. **Uma proposta didática para abordagem de problemas de otimização em diferentes níveis de ensino**. In: Anais do 10º SIEPE - SALÃO INTERNACIONAL DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO, Universidade Federal do Pampa, Santana do Livramento, 2018.
- AGROSINO, M. V. **Recontextualizing observation: ethnography, pedagogy and the Prospects for a Progressive Political Agenda**. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. *The Sage Handbook of Qualitative Research*. Third Edition. Sage Publications: Thousand Oaks: London, 2005. p. 729-745.
- ALRO, H. E SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Tradução de Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Tradução: Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autentica, 2010.
- ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNADEJER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Pioneira, 1998.
- ANTONIUS, S., HAINES, C., JENSEN, T. H., & NISS, M. (with Burkhardt, H.). BAPTISTA, M. C. **Alfabetização e letramento em classes de crianças menores de sete anos**. In: Ângela Dalben et al (org). *Convergências e tensões no campo da formação e do trabalho docente: alfabetização e letramento*. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.
- ARAUJO, R. V. **Implementação de metodologias ativas: aprendizagem baseada em projetos em aulas de Física sobre Acústica no Ensino Médio à Luz dos Campos Conceituais**. Dissertação do Programa de Pós-Graduação - MNPEF da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Tramandaí, 2019.
- ARAÚJO, A. F.; BORRALHO, A. M. A. **Comunicação Matemática: uma contribuição nas práticas letivas**. In: VII EEMAT – Encontro de Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro, 2018. Disponível em <<http://www.rdpc.uevora.pt/handle/10174/24746>>, acesso em 20/12/2020.
- BARBOSA, J. C. (2006a) **Students discussions in Mathematical Modelling**. In: International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level, 3., 2006a, Istanbul. Proceedings... Istanbul: Turkish Mathematical Society, 2006. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J. C. (2007). **A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework**. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p.161-174.

BARBOSA, J. C. **“contextualização” e a Modelagem na educação matemática do ensino médio**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. Anais... Recife: SBEM, 2004a. 1 CD- ROM.

BARBOSA, J. C. **As discussões paralelas no ambiente de aprendizagem modelagem matemática**. In. Revista eletrônica Acta Scientiae. Canoas. V. 10 n. 1 p. 47–58 jan/jun.2008.

BARBOSA, J. C. **Mathematical modelling in classroom: a critical and discursive perspective**. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, v.38, n.3, p.293-301, 2006.

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática e a perspectiva sócio-crítica**. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos. Anais... São Paulo: SBEM, 2003. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J. C. **Teacher-student interactions in mathematical modelling**. In: HAINES, C. et al. (Org.). Mathematical Modelling: education, engineering and economics. 1 ed. Chichester: Horwood Publishing, 2007a, v. único, p.232-240.

BARBOSA, J. C.; SANTOS, M. A. **Modelagem matemática, perspectivas e discussões**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, Belo Horizonte. Anais... Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007.

BARBOSA, J. C.; SILVA, J. N. D. **Modelagem matemática e as discussões técnicas nas interações entre professor e alunos**. Boletim GEPEM, v. 59, p. 35-51, 2011.

BAUR, A. P.; FIOREZE, L. A. **Investigação matemática, Geogebra e produção de vídeos no ensino e aprendizagem de quadriláteros e triângulos**. In: VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática. ULBRA, Canoas, 2017.

BITTI, P. R. e ZANI, B. **A comunicação como processo social**. Coleção temas de sociologia. Editora Estampa: Lisboa, 1997.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. (1994) **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto. Portugal: Porto.

BORSSOI, A. SILVA, K. P. FERRUZZI, E.C. **Ensino por Investigação mediado por tecnologias digitais em aulas de matemática**. VIDYA, v. 40, n. 1, p. 297-313, jan./jun., 2020 - Santa Maria, 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática**. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. p. 5-24. Lisboa: SEM-SPCE, 2002. Brocardo (2001).

BROCARD, J. **Investigações na aula de matemática: A história da Rita**. In I. C. Lopes, J. Silva, P. Figueiredo (Eds.), *Actas ProfMat*. p. 155-161. Lisboa: APM, 2001.

BRUM, A. L.; PEREIRA, E. C. **Implicações da investigação matemática no espaço educacional com a inserção das tecnologias digitais**. *REVEMAT. Revista Eletrônica de Educação Matemática*. v.13, n.2, p.132-148, 2018.

BRUNHEIRA, L. **O conhecimento e as atitudes de três professores estagiárias face à realização de actividades de investigação na aula de matemática**. (Tese de mestrado, Univ. de Lisboa). Lisboa: APM, 2000.

CACIOLATO DE SOUZA, L.; FERRUZZI, E. C. **A Investigação Matemática do meio fio**. In. II Congresso Internacional de Ensino (CONIEN). Cornélio Procópio, 2019. *Anais...*(on-line). Cornélio Procópio. 2019. Disponível: <http://eventos.uerp.edu.br/conien/wp-content/uploads/2017/04/3.-EnsinoMatematica.pdf>. Acesso em 30/01/2019

CACIOLATO DE SOUZA, L.; FERRUZZI, E. C. **Investigação matemática, tangram e área das figuras planas**. In. Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia (SINECT), VI. 2018. Ponta Grossa. *Anais...*(on-line). Ponta Grossa. 2018. Disponível: <http://www.sinect.com.br/2018/selecionados.php>. Acesso em 30/01/2019.

CAMPOS, S. G. V. B.; WODEWOTZKI, M. L. L. **Educação estatística e desenvolvimento do sentido de número: uma inter-relação possível**. *REnCiMa. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*. v.9, n.2, p. 88-106, 2018.

CARDOSO, D.; POSSAMAI, J. P. **Resolver e investigar: possibilidades para o ensino de funções exponenciais**. *REnCiMa. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v.10, n.1, p. 164-183, 2019.

CARVALHO, C.; CÉSAR, M. (2002). **Interacções sociais, desenvolvimento cognitivo e matemática**. In M. Fernandes, J. A. Gonçalves, M. Bolina, T. Salvado e T. Vitorino (Ed.), *O particular e o global no virar do milénio: Cruzar saberes em educação*. Actas do 5º Congresso da SPCE (pp. 407-416). Porto: Colibri/SPCE. Disponível em http://cie.fc.ul.pt/membrosCIE/mcesar/textos%202002/Interaccoessociais_desenvolvi%20mentocognitivo.pdf. Acessado em março de 2008.

CONCENTINO, J. **Caminhos a percorrer: desafios no processo de investigação matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

CORRADI, D. K. S. **Investigações Matemáticas**. Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011. ISSN 2237-809X. p. 162-175. Corradi (2013).

COSTA, J. A. **Diálogo em sala de aula: interações mediadas pela investigação matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018.

COSTA, J. A. A.; FERRUZZI, E. **A Investigação Matemática, como prática pedagógica, favorece a ocorrência do diálogo no ensino de matemática?** REnCiMa. Revista de Ensino de Ciências e Matemática. v. 11, n.3, p. 303-314, 2020.

CUNHA, D. S. I. **Investigações geométricas: desde a formação do professor até a sala de aula de matemática**. Dissertação (mestrado) 98f. – UFRJ/IM. Rio de Janeiro, 2009.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática: um programa a educação matemática**. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. 1, n. 1, p. 5- 11, 1993.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.

Denzin, N. K.; Lincoln, YS (2005) **Introdução: A Disciplina e a Prática da Pesquisa Qualitativa**. Em: Denzin, NK e Lincoln, YS, Eds., Manual de Pesquisa Qualitativa, 3ª Edição, Sage, Thousand Oaks, 1-32.

Dicio, Dicionário Online de Português. Página inicial. Disponível e; <<https://www.dicio.com.br/>>. Acesso em: 20/12/2019.

FERRUZZI, E. C. BORSSOI, A. H. SILVA, K. P. **Investigação Matemática em foco: evidenciando possibilidades para a sala de aula**. In. Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia (SINECT), VI. 2018. Ponta Grossa. *Anais...*(on-line). Ponta Grossa. 2018. Disponível: <http://www.sinect.com.br/2018/selecionados.php> Acesso em 30/01/2019.

FERRUZZI, E. C. **Interações Discursivas e Aprendizagem em Modelagem Matemática**. 2011. 225 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

FONSECA, H. **Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula**. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM. 2000.

FONSECA, H., BRUNHEIRA, L., PONTE, J. P. **As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática**. Actas do ProfMat. Lisboa: APM, 1999.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. São Paulo: Paz e Terra. 1996.

GALVÃO, M. E. E. L.; COSTA, N. M. L; PRADO, M. E. B. B. **Construção de funções a partir de problemas geométricos: uma abordagem investigativa**. REnCiMa. Revista de Ensino de Ciências e Matemática. v.8, n.2, p.39-57, 2017.

GODOY, A. S. **Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais**. Revista de Administração de Empresas, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

GOLDENBERG, E. P. **Quatro funções da investigação na aula de Matemática**. In: ABRANTES, P., PONTE, J. P., FONSECA, H., BRUNHEIRA, L. Investigações matemáticas na aula e no currículo (pp. 35-49). Lisboa, 1999. HENRIQUES; PONTE, 2014, p. 277)

GONÇALVES, R.; ALLEVATO, N. S. G. **Resolução de problemas e investigação matemática: um processo de intervenção formativa para licenciandos em matemática**. Ensino da Matemática em Debate, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 215-220, 2018.

GUERRA, S. H. R.; BISOGNIN, V. **Investigação Matemática na sala de aula: ensino de conceitos de estatística para 8º anos do ensino fundamental**. VIDYA. Periódicos da Universidade Franciscana. v. 36, n. 2, p. 275-292, 2016.

JÚNIOR, M. A. G.; ROCHA, L. P.; MORAES, M. G. **Invenção e descoberta na aula de matemática: um projeto de ensino, no 6º ano do ensino fundamental**. REnCiMa. Revista de Ensino de Ciências e Matemática. v. 8, n. 4, p. 194-213, 2017.

JUNKERFEURBOM, M. A.; KLÜBER, T. E. **Tarefas de investigação matemática em livros didáticos do 8º ano aprovados pelo programa nacional do livro didático – PNLD (2014)**. Educação Matemática em Revista, n. 55, set. 2017.

LIRA, C. G. et al. **Investigando múltiplos e divisores**. In: Anais do 8º Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão, Universidade Federal do Pampa, 2016.

LAMONATO, Maiza.; PASSOS, Carmem L. B. **Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática**. Zetetiké, FE/Unicamp – v. 19, n. 36 – jul/dez 2011.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MARIANI, M.; QUARTIERI, M. T. **Interpretação cartográfica associada a investigação matemática: possibilidade de fomentar a escrita e o ensino de**

conceitos matemáticos. REnCiMa. Revista de Ensino de Ciências e Matemática. v. 10, n.5, p. 151-170, 2019.

MENDES, E. **Actividade matemática escolar numa perspectiva investigativa e exploratória na sala de aula: Implicações para a aprendizagem.** (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM, 1997.

MENDES, J. M. G et al. **Utilizando a investigação matemática para o ensino de frações.** In: Anais do 8º Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão, Universidade Federal do Pampa, 2016.

MICHAELIS. Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. Disponível em <<https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-rasileiro/matem%C3%A1tica/>> Acesso em: 20/12/2019.

MONTEIRO, S.; PISSAIA, L. F.; THOMAS, J.; NUNES, J. C. A. **Phillips 66: possibilidade de uma intervenção pedagógica.** Research, Society and Development. v. 8, n. 4, 2019.

OLIVEIRA, H. M. **Actividades de Investigação na Aula de Matemática: aspectos da prática do professor.** Lisboa, 1998.

OLIVEIRA, H.; PONTE, J. P.; SANTOS, L.; BRUNHEIRA, L. **Os professores e as atividades de investigação.** In: In Abrantes, P.; Ponte, J. P.; Fonseca, H.; Brunheira, L. (Orgs.), Investigações matemáticas na aula e no currículo. (pp. 97-110), Lisboa: APM, 1999.

Origem da palavra. Disponível em: <<https://origemdapalavra.com.br/?s=matem%C3%A1tica>> Acesso em: 20/12/2019.

PEREIRA, A. B.; MUNHOZ, A. V.; QUARTIERI, M. T. **Atividades investigativas: possibilidade de ensino de conceitos trigonométricos no triângulo retângulo na Licenciatura em Matemática.** REVEMAT. Revista Eletrônica de Educação Matemática. v.11, n. 1, p. 131-147, 2016.

PONTE, J. P. **Investigar, ensinar e aprender.** In: Actas do ProfMat, (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM, 2003. Disponível em: <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte\(Profmat\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf)> Acesso em: 20 jan. 2017. PONTE et al. 2003, p. 2).

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). **Ações do professor na condução de discussões matemáticas.** Quadrante, 22(2), 55-81.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemáticas na Sala de Aula.** 2ª ed. 160 p. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

RAMO, L. B. **Investigação e ensino de matemática: uma proposta didática no desenvolvimento do conteúdo de estatística.** REnCiMa. Revista de Ensino de Ciências e Matemática. v. 10, n.6, p. 235-254, 2019.

RAMOS, A. P. et al. **Problemas matemáticos: caracterização, importância e estratégias de resolução.** USP - Seminários de Resolução de Problemas, 2002. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-seminario-8resolucao_problemas.pdf> Acesso em: 30/11/2019.

RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P.(2014). **Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra.** In: MARTINHO, M. H. et al. (Ed.). Actas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM. (p. 65–78). DOI: 10.13140/2.1.3828.6406.

ROLDÃO, M. C. **Função docente: natureza e construção do conhecimento profissional.** Revista Brasileira de Educação v. 12 n. 34 jan./abr. 2007.

SANTOS, M. A. dos; BARBOSA, J. C. **As oportunidades de produção das discussões reflexivas num ambiente de Modelagem Matemática.** In: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM MATEMÁTICA, 5, Ouro Preto. Anais... Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. Santos et al (2002).

SCHEEREN, V.; GUIMARÃES, D. S.; JUNQUEIRA, S. M. S. **Educação matemática crítica: possibilidades de uma investigação matemática.** In: Abais do 9º SIEPE – Salão Internacional de Ensino Pesquisa e Extensão, Universidade Federal do Pampa, Santana do Livramento, 2017.

SERRAZINA, L., CANAVARRO, A., GUERREIRO, A., ROCHA, I., PORTELA, J., e GOUVEIA, M. J. (2005). **Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo.** Documento não publicado.

SILVA, J. N. **As discussões técnicas num ambiente de Modelagem Matemática.** 2009. 77 f. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2009.

SKOVSMOVSE, O. **Cenários para Investigação.** In: Bolema, ano 13, n.14, 2000, pp.66-91.

TUDELLA, A. et al; **A dinâmica de uma aula de investigação.** In: ABRANTES, P.; PONTE, J. P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. (Eds.). Investigações matemáticas na aula e no currículo (p. 87- 96). Lisboa: APM e Projecto MPT, 1999.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Porto Alegre: Artmed, 2009.

VARANDAS, J. M. **Avaliação de investigações matemáticas. Uma experiência.** (tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM, 2000.

VASCONCELOS, C. C. **Aprender a Investigar- Investigar para Aprender: As atividades de Investigação no Processo de Ensino-Aprendizagem.** In : do Instituto Superior Politécnico de Viseu- Junho de 1996 - nº 3. 2ª ed. pp. 41- 58.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** 2007. Dissertação (Mestrado) — Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

VYGOTSKY, L. (2007). **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores.** SP, Martins Fontes, 2007. 7ª. Ed.

VYGOTSKY, L.S. (1993). **Obras escogidas II.** Madrid: Visor. (Coletânea publicada originalmente em russo entre os anos de 1924 e 1934).

VYGOTSKY, L.S. (1993). **Pensamento e Linguagem.** Versão digital. Disponível em <http://www.ebooksbrasil.org/adobeebook/vigo.pdf>. Edição eletrônica: Ed. Ridendo Castigat Mores. 159 pgs. Acesso em 15/01/2020.

WICHNOSKI, P.; BASSOI, T. S. **O construir-se professor ao estar-com a investigação matemática.** REVMAT. Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 14, n. 2, p. 01-21, 2019.

WICHNOSKI, P.; KLÜBER, T. E. **A (re)formulação de Tarefas de Investigação Matemática.** REVMAT. Revista Eletrônica de Educação Matemática. v.13, n.1, p.59-75, 2018.

WICHNOSKI, P.; KLÜBER, T. E. **A pesquisa em investigação matemática: sobre a formação de professores nas produções brasileiras.** REVMAT. Revista Eletrônica de Educação Matemática. v.11, n. 1, p. 1-15, 2016.

WICHNOSKI, P.; KLÜBER, T. E. **Um olhar Lakatosiano sobre a tendência investigação matemática.** REVMAT. Revista Eletrônica de Educação Matemática, v.10, n. 1, p. 65-80, 2015.

Apêndices

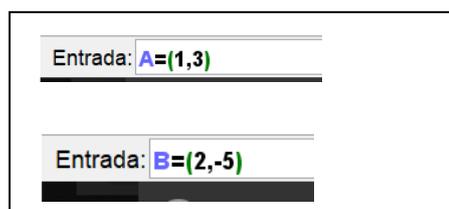
Apêndice 1 – Folha entregue aos alunos com a atividade sobre vetores a ser desenvolvida

ATIVIDADE INVESTIGATIVA 1: NOÇÃO DE VETOR

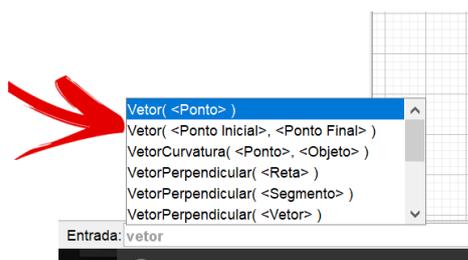
No GEOGEBRA:

1- Insira o ponto A (1,3).

2- Insira o ponto B (2, -5)

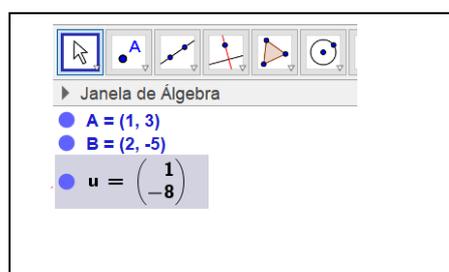


3- Solicite ao Geogebra que apresente o vetor \overrightarrow{AB}



Entrada: **Vetor(A, B)**

Aparecerá a seguinte informação na janela de álgebra:



Investigue:

1- Como o GEOGEBRA determinou estes valores (1 e -8) para o vetor u?

a. DICAS:

- i. coloquem outros pontos e analisem os vetores representados;
- ii. movam a representação do vetor e veja o que acontece na janela de álgebra

- 2- O que significa graficamente estes valores?
- 3- O que estes valores dizem sobre o vetor?
- 4- Como posso representar graficamente o vetor $\vec{v} = (3, -5)$?
- 5- Dados dois pontos quaisquer $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, como determinar o vetor $\vec{v} = (x, y)$?

TERMO DE CONSENTIMENTO E
TERMO DE CONSENTIMENTO PARA USO DE SOM DE VOZ
TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO LIVRE E ESCLARECIDO

Título da Pesquisa: A Comunicação em Investigação Matemática

Investigadores: Leandro Caciolato de Souza e Elaine Cristina Ferruzzi

Local da Pesquisa: XV Encontro Paranaense de Educação Matemática - EPREM

O que significa o consentimento?

O consentimento significa que você concorda em participar como sujeito da pesquisa, com o intuito de contribuir para a construção na pesquisa sobre as características da comunicação em atividades de investigação matemática. Serão respeitados seus direitos e você receberá todas as informações, por mais simples que possam parecer.

Informação ao participante da pesquisa:

a) Apresentação da pesquisa

Ao desenvolver atividades de investigação matemática, essas permitem que versem comunicações entre os envolvidos nessa prática pedagógica. As características dessas falas ainda não foram definidas, assim essa pesquisa tem o objetivo identificar as características da comunicação em atividades de Investigação Matemática. Para análise será desenvolvida atividades de cunho investigativos, sendo gravado o áudio da interação verbal entre os envolvidos, e transcritas para análise e caracterização dessas falas.

b) Desconfortos, Riscos e Benefícios

Conforme aponta o inciso V da Resolução nº 466 de 12 de dezembro de 2012, do Conselho Nacional de Saúde, “toda pesquisa com seres humanos envolve risco em tipos e gradações variados”, já que envolve questões de caráter pessoal e coletivo. O pesquisador responsável suspenderá a pesquisa imediatamente ao perceber algum risco ou danos à saúde física ou psíquica, ou ainda à dimensão moral do sujeito participante da pesquisa, decorrente da mesma, não previsto no(s) termo(s) de assentimento e/ou consentimento. Os participantes não pagarão e não serão remunerados por sua participação e poderão, sem qualquer

ônus, desistir em qualquer momento da disponibilização dos áudios ou das atividades desenvolvidas para a pesquisa. A presente pesquisa visa contribuir para o desenvolvimento do processo de ensino, versando na Investigação Matemática como uma prática pedagógica favorável para o ensino da matemática. Espera-se que os resultados obtidos por meio deste trabalho auxiliem a comunidade de professores de matemática a discutir e repensar sua prática pedagógica.

c) Confidencialidade

A pesquisa não divulgará nomes, garantindo o anonimato.

d) Ressarcimento e indenização.

Estão assegurados o ressarcimento e a indenização provenientes de custos ou danos gerados ao participar dessa pesquisa.

e) Contato para dúvidas

Se tiver(em) dúvidas com relação ao estudo, direitos do participante, ou no caso de riscos relacionados ao estudo, você pode contatar o investigador do estudo ou membro de sua equipe: LEANDRO CACIOLATO DE SOUZA, Av. Takeo Atomya, 432. CEP 86300-000, Cornélio Procópio-PR, celular (43) 99921 5989. Se você tiver dúvidas sobre seus direitos como um paciente de pesquisa, você pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O CEP é constituído por um grupo de profissionais de diversas áreas, com conhecimentos científicos e não científicos que realizam a revisão ética inicial e continuada da pesquisa para mantê-lo seguro e proteger seus direitos.

DECLARAÇÃO DE CONSENTIMENTO DO PARTICIPANTE DA PESQUISA:

Eu li e discuti com o investigador responsável pelo presente estudo os detalhes descritos neste documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar a participar da entrevista e dos encontros. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Eu entendi a informação apresentada neste TERMO DE CONSENTIMENTO E TERMO DE CONSENTIMENTO PARA USO DE IMAGEM E SOM DE VOZ. Eu tive oportunidade para fazer perguntas e todas as minhas perguntas foram respondidas.

Eu receberei uma cópia assinada e datada deste DOCUMENTO DE CONSENTIMENTO INFORMADO.

NOME

ASSINATURA DATA

NOME DO INVESTIGADOR

ASSINATURA DATA

Endereço do Comitê de Ética em Pesquisa para recurso ou reclamações do sujeito pesquisado
 Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR) REITORIA: Av. Sete de Setembro, 3165, Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, telefone: 3310-4943, e-mail: coep@utfpr.edu.br

Apêndice 3 – Contrato assinado pelos pais na escola particular contendo autorização para pesquisa.



ESCOLA RUI BARBOSA - Educação Infantil e Ensino Fundamental
RUA PERNAMBUCO, 25 - CENTRO - CEP: 86300-000 - FONE/FAX: (43) 3524-2102
CNPJ: 78.305.018/0001-99
CORNÉLIO PROCÓPIO - PR

CONTRATO DE PRESTAÇÃO DE SERVIÇOS EDUCACIONAIS

BENEFICIÁRIO DO SERVIÇO EDUCACIONAL (Aluno)					
Nome:					
Naturalidade:				Estado:	
Data de Nascimento:			RG nº:		
Curso:		ENSINO FUNDAMENTAL I - 9		Série/Ano:	
				Ano Letivo: 2020	
CONTRATANTES					
Nome:					
Naturalidade:				Estado:	
Data de Nascimento:			RG nº:		
CPF nº:		Telefone Residencial:		() - Celular: ()	
Endereço - Rua:					
Cidade:		Estado:		Bairro: CEP:	
Nome:					
Naturalidade:				Estado:	
Data de Nascimento:			RG nº:		
CPF nº:		Telefone Residência:		() - Celular: ()	
Endereço - Rua:					
Cidade:		Estado:		Bairro: CEP:	
CONTRATADA:					
Razão Social: ESCOLA RUI BARBOSA					
CNPJ: 78.305.018/0001-99		Endereço Rua: RUA PERNAMBUCO 25			
Cidade: CORNÉLIO PROCÓPIO		Estado: PR		Bairro: CENTRO CEP: 86300-000	

CLÁUSULA PRIMEIRA

Através deste instrumento de prestação de serviços educacionais a CONTRATADA obriga-se a fornecer ao BENEFICIÁRIO DO SERVIÇO EDUCACIONAL (NOME DO ALUNO (A)), durante o ano letivo de 2020 e de acordo com o Calendário Escolar, aprovado pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná, através de aulas e demais atividades escolares e formativas, consoantes ao Plano de Estudos, Programas e Currículos dispostos no Regimento Escolar, que ficam fazendo, assim como o Requerimento de Matrícula previamente deferido, partes integrantes deste contrato.

Parágrafo primeiro

O requerimento de matrícula deverá ser dirigido ao Diretor do Estabelecimento de Ensino da CONTRATADA, que poderá indeferi-lo, nos termos do Regimento Interno da mesma.

Parágrafo segundo

Fica expressamente estabelecido que o indeferimento, de que trata o parágrafo anterior, não gera para o(s) CONTRATANTE(S) o direito de devolução de quaisquer importâncias já pagas.

CLÁUSULA SEGUNDA

O presente contrato está amparado pelos artigos primeiro, inciso IV, 206, incisos II e III e 209 da Constituição Federal, assim como do artigo 39, inciso VI da Lei nº 8078/90 (Código de defesa do consumidor.), sendo certo que o preço estabelecido para o período de Janeiro a Dezembro de 2020, é de (VALOR POR EXTENSO), que representa a necessidade mínima e indispensável

para o equilíbrio econômico e financeiro da CONTRATADA e que o(s) CONTRATANTE(S) concorda(m) incondicionalmente.

Parágrafo primeiro

A CONTRATADA poderá conceder ao(s) CONTRATANTE(S) um desconto especial, a título de pontualidade de pagamentos, sobre o valor de cada uma das parcelas definidas no Parágrafo segundo, desta cláusula.

Parágrafo segundo

O valor da anuidade fixada no caput da CLÁUSULA SEGUNDA poderá, a critério da CONTRATADA, ser dividida em 12 (doze) parcelas de valor igual, sendo que a primeira deverá ser paga no ato da matrícula, referente a Janeiro de 2020 e as demais 11 (onze) parcelas deverão ser pagas até o dia 6 (seis) dos meses seguintes até Dezembro do ano de 2020.

Parágrafo terceiro O(s) CONTRATANTE(S) concorda(m), neste ato, que o preço estabelecido no caput da CLÁUSULA SEGUNDA corresponde exclusivamente à contraprestação dos serviços educacionais decorrentes da carga horária constante no Calendário Escolar, e que não estão incluídos neste “Contrato de Prestação de Serviços Educacionais”, desobrigando o fornecimento pela Contratada, os serviços especiais de: a) recuperação de estudos e/ou de carga horária; b) reforço; c) taxa de material escolar; d) segundas chamadas de provas ou de recuperação de estudos; e) segundas vias de documentos; f) assistência individual ao aluno; g) transporte escolar; h) estacionamento; i) impressão de trabalhos escolares e outros; j) brindes ou lembranças; k) fotocópias; l) utilização de dependências da escola para atividades particulares; m) uniforme; n) merenda e alimentação; o) material didático; p) taxas para certidões; q) declarações; r) certificados; s) diplomas e outros expedientes de secretarias; t) Seguro Escolar.

Parágrafo quarto: Os serviços e materiais não incluídos neste Contrato, quando prestados ou fornecidos pela CONTRATADA, serão devidos pelo(s) CONTRATANTE(S) na forma do ajuste à parte e cobrados juntamente com as parcelas mensais e sofrerão, desde que haja impontualidade no seu pagamento, a incidência de correção monetária, juros de mora e multa, estabelecidos no parágrafo sexto da cláusula segunda, deste contrato.

Parágrafo quinto: Caso seja concedido parcelamento para o pagamento da anuidade estabelecida e fixada no caput da CLÁUSULA SEGUNDA, a CONTRATADA poderá optar pela cobrança via carnê, na Tesouraria da Escola, ou realizar a cobrança por intermédio de Bloqueto Bancário a ser pago em agência bancária a ser informada.

Parágrafo sexto: O(s) CONTRIBUINTE(S) se compromete(m), neste ato, a realizar os pagamentos do parcelamento concedido pela CONTRATADA impreterivelmente até as datas pré-determinadas no carnê ou bloqueto bancário, e declaram ainda ter ciência que os não pagamentos até os vencimentos determinarão o entendimento de impontualidade, ocasionando a perda compulsória do DESCONTO DE PONTUALIDADE citado no parágrafo 1º, devendo desta forma efetuar(em) o pagamento pelo preço original fixado no caput da Cláusula 2ª, acrescido de multa no valor de 2% (dois por cento) e mais juros de 1% (um por cento) ao mês e todas as demais despesas que a CONTRATADA venha a ter para o recebimento das parcelas, seja de forma judicial ou extra-judicial, inclusive honorários advocatícios.

Parágrafo sétimo: A CONTRATADA, poderá, a seu critério, entregar para o Cartório de Protestos os carnês ou bloquetos bancários, em atraso e devidos pelo(s) CONTRATANTE(S), convertendo-os em DUPLICATA DE PRESTAÇÃO DE SERVIÇOS ou LETRA(S) DE CÂMBIO e com os valores devidos, já acrescidos de multa e juros previstos no Parágrafo 6º e/ou ajuizar AÇÃO DE EXECUÇÃO ou AÇÃO DE COBRANÇA, em uma das Varas Cíveis ou do Juizado Especial Cível, da Comarca de Cornélio Procópio, Estado do Paraná.

Parágrafo oitavo: Na hipótese de alteração nas condições econômicas fundamentais que prevalecem no alto da assinatura deste contrato, inclusive as decorrentes de elevação substancial dos índices de inflação, e/ou decorrentes de decisão judicial ou sentença normativa de trabalho, e/ou da instituição ou aumento da carga tributária paga pela CONTRATADA atualmente, fica estabelecido que as partes ajustarão as Cláusulas econômicas, a fim de assegurar a recuperação dos valores efetivamente ora contratados, objetivando a manutenção do equilíbrio econômico-financeiro do contrato.

Parágrafo nono: No caso de ocorrer inadimplência em qualquer das parcelas de pagamento, no decorrer do ano letivo vigente, o(s) CONTRATANTE(S) perderão o direito a preferência na reserva de vaga para o ano letivo seguinte, ficando exclusivamente a critério da CONTRATADA a realização da matrícula do BENEFICIÁRIO DO SERVIÇO EDUCACIONAL (ALUNO) citado no preâmbulo do presente contrato.

CLÁUSULA TERCEIRA

A orientação técnica sobre a prestação dos serviços educacionais, relacionados com a designação de datas para as provas de aproveitamento, fixação da carga horária, indicação de professores orientação pedagógica, além de outras providências que as atividades docentes exigirem, é de responsabilidade da CONTRATADA.

Parágrafo Primeiro: Ocorrendo a hipótese do BENEFICIÁRIO DO SERVIÇO EDUCACIONAL (ALUNO) faltar à(s) prova(s) marcadas(s), o(s) CONTRATANTE(S) poderá(ao) requerer a 2ª chamada desta(s) prova(s), mediante comprovação por atestado médico, de óbito ou que compareceu perante a um Juiz, num prazo de 2 (dois) dias úteis, pagando uma taxa a ser estipulada pela CONTRATADA.

CLÁUSULA QUARTA:

Ao firmar o presente instrumento, o BENEFICIÁRIO DO SERVIÇO EDUCACIONAL (ALUNO) e o(s) CONTRATANTE(S) submetem-se ao Regimento Escolar e as demais obrigações constantes da

Legislação aplicável à área de ensino, e, ainda às emanadas de outras fontes legais, desde que regulem, supletivamente a matéria, inclusive o Calendário Escolar aprovado.

CLÁUSULA QUINTA

O presente instrumento poderá ser rescindido, a qualquer tempo, por ambas as partes e em especial pela CONTRATADA, ficando desta forma acordado que esta terá o direito de cobrar as mensalidades até o mês da rescisão, inclusive. Fica também acordado que se a rescisão ocorrer por solicitação do(s) CONTRATANTE(S), antes do término do ano letivo contratado, este(s) ficará(ão) obrigado(s) ao pagamento de multa em favor da CONTRATADA, no valor equivalente a 01 (uma) parcela da anuidade prevista na CLÁUSULA SEGUNDA.

CLÁUSULA SEXTA

Os motivos para a rescisão unilateral do presente instrumento, por parte da CONTRATADA estão detalhados nos parágrafos a seguir:

Parágrafo Primeiro: Se as declarações prestadas no REQUERIMENTO DE MATRÍCULA, pelo(s) CONTRATANTE(S), relativas à aptidão legal do BENEFICIÁRIO DO SERVIÇO EDUCACIONAL (ALUNO) para a frequência na série indicada, não forem verdadeiras;

Parágrafo Segundo: os CONTRATANTE (S) não entregarem, na secretaria da CONTRATADA, todos os documentos necessários à comprovação das declarações referidas no PARÁGRAFO PRIMEIRO, acima, até 60 (sessenta) dias a partir do início das aulas.

Parágrafo Terceiro: Se o(s) CONTRATANTE(S) inadimplirem no pagamento de mensalidades pelo prazo estipulado na legislação em vigor.

Parágrafo Quarto: Se o BENEFICIÁRIO DO SERVIÇO EDUCACIONAL (ALUNO), mesmo após ser advertido e suspenso, formalmente, tornar a praticar atos de indisciplina ou insubordinação, atos que coloquem em risco a integridade física de Alunos e Funcionários da CONTRATADA ou ainda promover danos ao patrimônio e equipamentos da CONTRATADA ou cometer infrações previstas nos dispositivos constantes do REGIMENTO ESCOLAR.

CLÁUSULA SÉTIMA

O (s) CONTRATANTE(S) autorizam a CONTRATADA a utilizar-se da imagem e sons do Beneficiário do Serviço Educacional (Aluno) de acordo com as seguintes especificações:

Parágrafo primeiro: as imagens e sons cedidas poderão ser veiculadas através de folheto, folder, outdoor, mala direta, anúncio em jornais, revistas, televisão, internet e nos demais meios de informação e comunicação.

Parágrafo segundo: a captação das imagens e sons, bem como a sua veiculação, poderá ser realizada em qualquer período letivo do aluno ou enquanto estiver vigente o Contrato de Prestação de Serviços Educacionais.

Parágrafo terceiro: a utilização da imagem e sons do Beneficiário dos Serviços Educacionais (aluno), quando ocorrer, será realizada a título gratuito, não cabendo ao (s) CONTRATANTE (S) qualquer tipo de remuneração, ou indenização pelo seu uso.

Parágrafo quarto: a CONTRATADA obriga-se a respeitar as imagens e sons cedidas, vinculando-as tão somente, a propagandas que visem divulgar informações a respeito de suas atividades educacionais, estando expressamente proibido de utilizar as mesmas em campanhas publicitárias que infrinjam a lei, a moral e os bons costumes, sob pena de indenização por perdas e danos.

CLÁUSULA OITAVA

O(s) CONTRATANTE(S) declaram, expressamente, assumir todo e qualquer dano causado pelo BENEFICIÁRIO DO SERVIÇO EDUCACIONAL (ALUNO) ao patrimônio da CONTRATADA, sem

motivos plausíveis, acarretando além da indenização e/ou reposição dos bens danificados, todas as demais sanções disciplinares desde advertência até a transferência compulsória do mesmo.

CLÁUSULA NONA

Ao CONTRATANTE fica facultado as REMATRÍCULAS dos anos subsequentes de forma digital (online), diretamente no Portal digital da Instituição, com acesso mediante o nome de usuário e senha do CONTRATANTE. Neste caso, não haverá mais a emissão do contrato principal em papel, vigorando a rematrícula online como um aditivo contratual, com os valores ajustados a cada ano, em percentuais a serem apurados e publicizados na forma legal vigente, remanescendo, portanto, a EXECUTIVIDADE do presente instrumento para todos os fins legais.

Parágrafo primeiro: O CONTRATANTE assume o compromisso de não fornecer seu nome de usuário e sua senha a qualquer outra pessoa, sendo o único responsável pelo acesso e confirmação da rematrícula online.

Parágrafo segundo: Também será revalidado de forma online nos anos subsequentes, o Contrato para autorização de uso de imagem, de forma não onerosa, do Beneficiário.

Parágrafo terceiro: Fica certo e ajustado entre as partes que o contrato somente se perfectibilizará com o pagamento e quitação do título referente à primeira mensalidade, o que, não havendo, não efetivar-se-á a matrícula e conseqüentemente, o Contrato de Prestação de Serviços Educacionais.

E, por estarem de acordo com as normas e condições estipuladas neste instrumento, assinam em duas vias, de igual teor, na presença de duas Testemunhas, abaixo dominadas, elegendo o foro da Comarca de Cornélio Procópio para dirimir as dúvidas originárias do mesmo.

Cornélio Procópio, _____ de _____ de _____

ESCOLA RUI BARBOSA S/S LTDA

CONTRATANTE

CONTRATANTE

TESTEMUNHAS

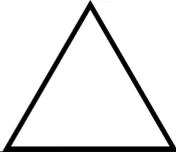
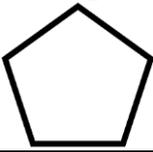
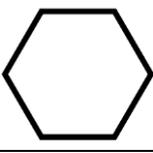
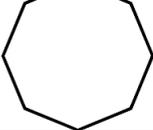
Nome: Giseli Aparecida Lopes Gobbe
RG: 8.738.942-1

Nome: Tereza Aparecida Ferreira
RG: 3.528.701-9

Apêndice 4 – Atividade sobre operações com números naturais

1. Investiguem o que ocorre ao somar dois números naturais.
2. Investiguem o que ocorre ao subtrair dois números naturais.
3. E quanto a multiplicação e divisão de dois números naturais, investiguem.
4. O que você pôde observar ao somar dois números naturais?
5. O que você pôde observar ao subtrair dois números naturais?
6. O que você pôde observar ao multiplicar dois números naturais?
7. O que você pôde observar ao dividir dois números naturais?
8. O que você observa ao somar dois números naturais ímpares?
9. O que você observa ao somar dois números naturais pares?
10. O que você observa ao subtrair dois números naturais ímpares?
11. O que você observa ao subtrair dois números naturais pares?
12. O que você observa ao multiplicar dois números naturais ímpares?
13. O que você observa ao multiplicar dois números naturais pares?
14. O que você observa ao dividir dois números naturais ímpares?
15. O que você observa ao dividir dois números naturais pares?
16. E se realizarmos essas operações com três ou mais números, o que acontece?

Apêndice 5 – Atividade sobre diagonais dos polígonos

POLÍGONO	NÚMERO DE LADOS E DE VÉRTICES	NÚMERO DE DIAGONAIS QUE SAI DE CADA VÉRTICE	NÚMERO TOTAL DE DIAGONAIS
Triângulo 			
Quadrilátero 			
Pentágono 			
Hexágono 			
Heptágono 			
Octógono 			
Polígono de "n" lados			

Apêndice 6 – Atividade sobre introdução ao estudo de funções

Observe as tabelas:

Tabela 01		Tabela 02		Tabela 03	
x	y	x	y	x	y
1	2	1	5	1	1
2	4	2	7	2	4
3	6	3	9	3	9
4	8	4	11	4	16
5	10	5	13	5	25
10	20	10	23	10	100
12	24	12	27	12	144
15		15		15	
	76		73		900

Após analisar as tabelas 01, 02 e 03, responda:

Investigue a tabela 01 e escreva, com suas palavras, qual a relação entre os valores de x e y.

Investigue a tabela 02 e escreva, com suas palavras, qual a relação entre os valores de x e y.

Investigue a tabela 03 e escreva, com suas palavras, qual a relação entre os valores de x e y.

Qual a expressão algébrica que relaciona os valores de x e y na tabela 01?

Qual a expressão algébrica que relaciona os valores de x e y na tabela 02?

Qual a expressão algébrica que relaciona os valores de x e y na tabela 03?

Qual a diferenças entre as relações que determina os valores de x e y em cada tabela?

As diferenças entre as relações das tabelas 01, 02 e 03 influenciam em que?

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. *ACTIO*, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	A Comunicação Em Investigação Matemática
Título do Produto/Processo Educacional	HISTÓRIAS DAS MINHAS SALAS DE AULA
Autores do Produto/Processo Educacional	Discente: Leandro Caciolato De Souza
	Orientador/Orientadora: Elaine Cristina Ferruzzi
	Outros (se houver):
Data da Defesa	26/02/2021

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)

Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.

Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação.

*Apenas um item pode ser marcado.

Linhas de Pesquisa do PPGMAT:

(x) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

() Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

<p><i>L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático</i> (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);</p> <p><i>L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).</p>	
<p>Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p> <p>A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis:</p> <p>1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado;</p> <p>2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo;</p> <p>3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação.</p> <p>Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.</p>	<p>() PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa.</p> <p>() PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade.</p> <p>() PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p> <p>(x) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p>
<p>Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u></p>	<p>() Local</p> <p>() Regional</p> <p>(x) Nacional</p> <p>() Internacional</p> <p>Justificativa (<i>obrigatória</i>): ____</p> <p>A aplicação do PE não está restrita ao contexto em que foi desenvolvida, podendo ser utilizada para o ensino de Matemática em escolas de diferentes regiões do Brasil.</p>

<p>Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho).</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p>() PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto).</p> <p>(x) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.</p>
<p>Área impactada</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p>() Econômica;</p> <p>() Saúde;</p> <p>(x) Ensino;</p> <p>() Cultural;</p> <p>() Ambiental;</p> <p>() Científica;</p> <p>() Aprendizagem.</p>
<p>Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE.</p> <p><u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u></p>	<p>(x) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação.</p> <p>() A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE.</p> <p>() Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação.</p> <p>() Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.</p>
<p>Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.</p>	<p>() PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito).</p> <p>() PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos).</p> <p>(x) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).</p>
<p>Membros da banca examinadora de defesa</p>	
<p>Nome</p>	<p>Instituição</p>
<p>Adriana Helena Borssoi</p>	<p>UTFPR</p>
<p>Elaine Cristina Ferruzzi</p>	<p>UTFPR</p>
<p>Jonei Cerqueira Barbosa</p>	<p>UFBA</p>