UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA – PPGMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LUCAS FERREIRA GOMES

VÍDEOS DIDÁTICOS E ATIVIDADES BASEADAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA EXPLORAR AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DOCENTE

DISSERTAÇÃO

LONDRINA
2017

LUCAS FERREIRA GOMES

VÍDEOS DIDÁTICOS E ATIVIDADES BASEADAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA EXPLORAR AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DOCENTE

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título Mestre em Ensino de Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Profa. Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman

LONDRINA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

G633v Gomes, Lucas Ferreira

Vídeos didáticos e atividades baseadas na história da matemática: uma proposta para explorar as geometrias não Euclidianas na formação docente / Lucas Ferreira Gomes. - Londrina : [s.n.], 2017.

164 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Profª Drª Eliane Maria de Oliveira Araman.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Londrina, 2017.

Bibliografia: f. 140-148.

1. Matemática - História. 2. Geometria não-Euclidiana. 3. Gravações de vídeo 4. Professores - Formação. I. Araman, Eliane Maria de Oliveira, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7

TERMO DE APROVAÇÃO

VÍDEOS DIDÁTICOS E ATIVIDADES BASEADOS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA EXPLORAR AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DOCENTE

Por

LUCAS FERREIRA GOMES

Esta Dissertação foi apresentada em 27 de junho de 2017 como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Eliane Maria de Oliveira Araman
Prof. (a) orientador (a)

Lucieli Maria Trivizoli da Silva
Membro titular

Línlya Natassia Sachs Camerlengo De Barbosa
Membro titular

- A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática -

Dedico este trabalho a Deus, pois nele foram criadas todas as coisas nos céus e na terra, as visíveis e as invisíveis, sejam tronos ou soberanias, poderes ou autoridades; todas as coisas foram criadas por ele e para ele.

(Colossenses 1:16).

AGRADECIMENTOS

Certamente estes parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas elas podem estar certas de que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Ao Mestre Supremo, Deus, dono da sabedoria e de todas as coisas do Universo, que nos guia sempre em nossas decisões, sem o qual nada seria possível.

À Professora Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman, orientadora, amiga, compreensiva que me incentivou e me ajudou com sua orientação competente, incansável, por sempre acreditar na concretização do presente estudo.

Às Professoras Dra. Lucieli Maria Trivizoli da Silva e Dra. Línlya Natassia Sachs Camerlengo de Barbosa que tanto contribuíram para o aprimoramento deste trabalho.

A todos os professores que dispuseram a participar da presente pesquisa, bem como do curso de formação continuada ofertado.

A Elias de Moraes Fernandes que, sob orientação do Prof. Dr. Alexandre Rossi Paschoal, produziu o avatar e a logo que são utilizadas ao longo dos vídeos produzidos.

Ao Prof. Edevaldo da Silva Ferreira, dirigente da Coordenação de Tecnologia na Educação – COTED da UTFPr de Cornélio Procópio, que contribuiu para a gravação dos vídeos.

A todos os professores que passaram, até então, pela minha vida e que de alguma forma me incentivaram a ir além e alcançar grandes realizações.

Aos meus colegas de curso.

À Secretaria do Curso, pela cooperação.

Gostaria de deixar registrado, também, o meu reconhecimento à minha família, pois acredito que sem o apoio dela seria muito difícil vencer esse desafio.

A todos os meus amigos por todo incentivo dado.

Enfim, a todos os que, direta ou indiretamente, contribuíram com palavras de incentivo, estímulo, apoio e compreensão para o prosseguimento dos estudos necessários e primordiais à realização desta dissertação.

É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota.

(Theodore Roosevelt)

GOMES, Lucas Ferreira. **Vídeos didáticos e atividades baseadas na história da matemática: uma proposta para se explorar as geometrias não euclidianas na formação docente.** 2017. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2017.

RESUMO

Por meio da literatura inerente ao tema deste estudo, é possível perceber que as geometrias não euclidianas são pouco exploradas na formação docente; todavia, documentos que norteiam a educação paranaense propõem que esses conceitos sejam explorados nas aulas de Matemática. Para tanto, são necessárias ações que permitam aos professores ampliarem seus saberes sobre elas. Assim, pretendeu-se refletir a respeito da relevância dos conhecimentos advindos da História da Matemática para o processo de formação do professor de Matemática no que diz respeito às geometrias não euclidianas. Investigações desenvolvidas na área defendem que a História da Matemática é um recurso didático que pode contribuir para a formação docente, principalmente no que tange à compreensão dos conceitos matemáticos. Desta forma, o presente trabalho tem como objetivo realizar a produção de vídeos didáticos e atividades baseadas na História da Matemática, sobre tópicos das geometrias não euclidianas que podem ser utilizados na formação continuada de professores. Para alcançar tal objetivo, os referenciais teóricos explorados nesta investigação envolvem as pesquisas a respeito da formação do professor e a História da Matemática, bem como seu uso pedagógico, o uso das tecnologias no ensino, sobretudo dos vídeos didáticos e o ensino das geometrias não euclidianas. A presente investigação é qualitativa e de cunho interpretativo, na qual as etapas principais foram: levantamento bibliográfico relativo aos temas estudados; elaboração da reconstrução histórica das geometrias não euclidianas, investigação, por meio de entrevista semiestruturada sobre os professores que atuam na Educação Básica e suas compreensões a respeito das geometrias não euclidianas, elaboração dos vídeos e de atividades relacionadas a eles e aplicação desses materiais em um curso de formação continuada. A partir do curso ministrado a seis professores que atuam na Educação Básica (anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio) no município de Leópolis-PR, foi possível experimentar os vídeos e as atividades, o que permitiu observar que eles possibilitaram a esses sujeitos ampliar suas compreensões a respeito das geometrias não euclidianas, evidenciando seu potencial.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometrias não euclidianas. História da Matemática. Vídeos didáticos. Formação de professores.

GOMES, Lucas Ferreira. **Didactic videos and activities based on the history of mathematics:** a proposal to explore non-Euclidean geometries in teacher education**.** 2017. 164 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2017.

ABSTRACT

By means of the literature inherent in the subject of this study, it is possible to notice that non-Euclidean geometries are little explored in teacher education, however documents that guide education in the state of Paraná propose that these concepts are explored in Mathematics classes. Therefore, some actions are necessary to allow teachers to enlarge their knowledge about them. Thus, it was intended to ponder the relevance of the Mathematics History knowledge to the process of Mathematics teacher training concerning the non - Euclidean geometries. Developed researches plead that Mathematics History is a didactic resource that can contribute to teacher training, mainly related to non-Euclidean geometries. In this manner, the present work intends to investigate the production of didactic videos and activities based on the Mathematics History, about topics of non-Euclidean geometries that can be used in teacher training. To reach it, the theoretical references explored in this study involve researches on teacher education and Mathematics History, in addition its pedagogical use, teaching technologies, especially didactic videos, and the teaching of non-Euclidean geometries. The present investigation is qualitative and interpretive, in which the main steps were: a bibliographical research on the subjects studied; elaboration of the historical reconstruction of non-Euclidean geometries, investigation, through semi-structured interviews, about teachers who work in Basic Education and their understandings about non-Euclidean geometries, elaboration of videos and activities related to them and application of these materials in a training course. From the course that was taught to six teachers who work in Basic Education (Final Years of Elementary and Secondary Education) in the city of Leópolis-PR, it was possible to try the videos and activities that allowed to observe that they enabled them to increase their understanding of Non-Euclidean geometries showing their potential.

Keywords: Mathematics Education. Non-Euclidean geometry. History of mathematics. Instructional videos. Training of teachers.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

> Toda criação equivale a utilizar de maneira original elementos preexistentes. Todo uso criativo, ao descobrir novas possibilidades, atinge o plano da criação... Criação e uso são, na verdade, dimensões complementares de uma mesma operação elementar de conexão, com seus efeitos de reinterpretação e construção de novos significados.
>
> Pierre Lévy (1993, p. 58)

Ao longo de vivências do pesquisador no contexto escolar, bem como de algumas pesquisas realizadas com os professores que atuam na Educação Básica no decorrer da graduação, identificou-se uma carência na formação dos professores que atuam nesses níveis de ensino. Em uma dessas pesquisas, realizou-se uma investigação que foi intitulada *Algumas Percepções de Matemática e de Ensino de Matemática Apresentadas por Professores que Atuam na Educação Básica*[1], sobre as compreensões que os professores tinham em relação à Matemática, a partir de dessa pesquisa, percebeu-se que muitos docentes apresentam saberes limitados em relação a ela, até mesmo no que diz respeito à compreensão do que é esta ciência.

Em busca de contribuir para a formação docente, sobretudo na ampliação dos saberes docentes, discutidos e apresentados por Tardif (2013), encontrou-se na História da Matemática um caminho pelo qual os professores podem ampliar esses saberes, como defende Araman (2011), o que nos impulsionou a pesquisar sobre a temática.

De acordo com Brito e Carvalho (2009), Miguel e Brito (1996), Miguel e Miorim (2008), e outros pesquisadores que se voltaram ao tema, a História da Matemática é um recurso didático que pode contribuir tanto para o desenvolvimento da Educação Matemática, quanto para a formação do professor que ensina Matemática, visto que ela possibilita uma compreensão substantiva e epistemológica dos aspectos conceituais e das regras, intrinsicamente, ligadas ao conteúdo.

---

[1] O artigo que apresenta os resultados obtidos com esta pesquisa está disponível na revista *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 9, n. 19, disponível em: http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/865.

Esse pensamento começa a ganhar força na década de 1990, a partir de então diversas pesquisas passam a ser desenvolvidas, apresentando resultados na perspectiva de contribuir para uma melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis, como uma possibilidade para se explorar diversos conceitos que, certamente, podem auxiliar o professor de Matemática no seu trabalho diário em sala de aula. Nas últimas décadas, esta área de estudo da Educação Matemática vem conquistando espaço e destaque, consolidando-se como um campo de investigação didática e científica (MENDES, 2006).

Assim, na perspectiva de construir reflexões acerca da inclusão da História da Matemática e seus contributos para a formação de professores que ensinam Matemática na Educação Básica, é que se propôs este trabalho. A proposta é aliar a História da Matemática e a utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC)[2] por meio de vídeos didáticos.

Leva-se em consideração o uso das TIC pelo fato de que a lousa e o giz, sobretudo na era atual, já não são as únicas tecnologias disponíveis para o professor de Matemática ou de qualquer outra disciplina. Com o advento de diversos recursos tecnológicos, como computadores, calculadoras, televisão, celulares e muitos outros, entende-se que é necessário que estes sujeitos despertem para o uso desses recursos em sala de aula (MACHADO, 2011); porém, para que isso aconteça torna-se indispensável que os recursos tecnológicos também permeiem a formação docente.

Dentre os muitos conteúdos matemáticos, que são propostos pelos documentos que norteiam a Educação Básica no Brasil e que poderiam ser explorados nos vídeos didáticos, optou-se pelas geometrias não euclidianas, tópico proposto pelas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná - Matemática[3] (PARANÁ, 2008), cujo estudo justifica-se em especial pelo fato de que "muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas geometrias não euclidianas" (PARANÁ, 2008, p. 56).

---

[2] Atualmente, a terminologia empregada é Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), todavia as fontes utilizadas utilizam o termo TIC, por isso se optou por utilizá-la.

[3] Será utilizada a sigla DCE para esse documento.

Mesmo com tais orientações, é possível identificar que muitos docentes não abordam este tópico em suas aulas. Para alguns pesquisadores que versam sobre a temática, isso acontece pelo fato de que muitos docentes não possuem uma boa formação para o ensino das geometrias, euclidiana e não euclidianas (LORENZATO, 1995; ALMOULOUD et al., 2004). Assim sendo, cabe aos pesquisadores da área refletir sobre essa problemática e propor alternativas para mudar esse quadro, a fim de preparar esses sujeitos para o ensino dessas geometrias, de modo que eles tenham subsídios para explorá-las em suas aulas.

Com efeito, a intenção desta pesquisa é fazer com que os professores tenham um contato com noções básicas das geometrias não euclidianas, especificamente com as geometrias hiperbólica e elíptica, numa perspectiva histórica, no intuito de que esses sujeitos possam explorar, *a posteriori*, esses conceitos em suas aulas.

Cabe ressaltar que as seções estão estruturadas de modo a apresentar os elementos que possibilitaram a realização do presente trabalho, tendo como foco principal a inserção e o uso de vídeos didáticos, baseados na História da Matemática na formação de professores.

O trabalho está dividido em sete seções. Na primeira (Considerações iniciais sobre o estudo), apresenta-se a situação problema, a justificativa para a realização da presente pesquisa, os objetivos e os aspectos metodológicos que permitiram realizar o presente trabalho, isto é, os passos seguidos ao longo de seu desenvolvimento.

Na segunda seção (Os saberes docentes), é apresentada uma discussão a respeito dos saberes docentes, suas tipologias e as suas influências nas ações docentes.

Já a terceira seção (Um elo entre a História da Matemática e as TIC no contexto da Educação Matemática: o vídeo didático como sugestão para formação docente) traz uma reflexão sobre a História da Matemática na Educação Matemática, as contribuições da História da Matemática para a formação de professores e de alunos, as possibilidades de inserção da História da Matemática nas aulas de Matemática, as TIC no contexto da Educação Matemática, dando ênfase ao uso de vídeos didáticos e, por fim, a relação entre os vídeos didáticos e a História da Matemática.

Na quarta seção (Geometrias não euclidianas: do contexto histórico à inserção na Educação Básica), são exploradas as geometrias não euclidianas. Desenvolveu-se uma reflexão histórica sobre a criação destas geometrias, uma discussão sobre a inserção dessas na Educação Básica, no que diz respeito a propostas curriculares e o que dizem pesquisadores da área sobre o ensino desse tópico e traz os resultados obtidos com uma pesquisa desenvolvida com professores que atuam na Educação Básica sobre suas compressões a respeito dessas geometrias.

A quinta seção (Elaboração dos vídeos e das atividades) mostra os passos e elementos que possibilitaram a elaboração dos vídeos didáticos e atividades baseadas na História da Matemática, sobre as geometrias não euclidianas: seleção dos episódios históricos, transformação dos episódios históricos em vídeos, construção das atividades e dos materiais que permitam a realização das atividades.

Já na sexta seção (A aplicação dos vídeos didáticos e atividades em um curso de formação continuada), são apresentados os resultados obtidos com a aplicação dos vídeos e atividades em um curso de formação continuada fornecido a professores que atuam na Educação Básica (anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Na sétima e última seção (Considerações Finais), é feita uma reflexão sobre os resultados obtidos com a pesquisa, destacando as contribuições do trabalho para a formação docente e para o campo da Educação Matemática.

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE O ESTUDO

> É fundamental diminuir a distância entre o que se diz e o que se faz, de tal maneira que, num dado momento, a tua fala seja a tua prática.
>
> Paulo Freire (1996)

Na presente seção, apresentam-se os elementos que nortearam o desenvolvimento da pesquisa, dentre eles a problemática que motivou o estudo, os objetivos que se pretendia alcançar e os aspectos metodológicos empregados ao longo do processo.

1.1 O PROBLEMA EM QUESTÃO

Há algumas décadas que as geometrias não euclidianas aparecem nas propostas curriculares brasileiras, como no Currículo Básico da Prefeitura Municipal de Curitiba (CURITIBA, 1988) que fazia referência à geometria projetiva, à topologia e à geometria esférica entre os conteúdos do Ensino Fundamental, e, também, na Proposta Curricular para a Matemática do Ensino Fundamental do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 1991) que propunha o ensino da geometria esférica. Além desses, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática[4] (BRASIL, 1998, p. 24) destacam que:

> [...] a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. (...) uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para a aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico.

[4] Será empregada a sigla PCN para esse documento.

Em um período mais recente, as DCE (PARANÁ, 2008) incluem entre os conteúdos básicos para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio as geometrias não euclidianas, especificamente noções básicas das geometrias topológica, projetiva, fractal, elíptica e hiperbólica.

Além desses documentos, diversos são os pesquisadores, a exemplo de Reis (2006), Marqueze (2006), Nascimento (2013), que têm defendido a inclusão de conteúdos relacionados a essas geometrias na Educação Básica, já que, segundo eles, elas podem contribuir para formação do aluno, visto que:

> A partir das grandes descobertas e invenções o homem tem buscado nos meios científicos, respostas para problemas concernentes às medidas geométricas. A partir dessa busca, tem constatado que, para algumas medidas, os conceitos da geometria euclidiana respondem satisfatoriamente, para os problemas que envolvam as pequenas medidas, mas para as medidas de grande escala, são necessários os conceitos de geometrias não euclidianas (MARTOS, 2002, p.212).

Dentre outras justificativas para a exploração desses conceitos na Educação Básica, pode-se citar que ela possibilita uma maior compreensão da geometria euclidiana plana (MARTOS, 2002); contribui para o entendimento de que a Matemática não é algo pronto e acabado, mas está aberta para a criação de novas ideias e conceitos (BONETE, 2000); contribui para a ampliação dos conhecimentos geométricos e da própria realidade (CHAVICHIOLO, 2011), entre outras.

A esse respeito, Bonete (2000), Martos (2002), Reis (2006) e Marqueze (2006) apresentam em seus trabalhos experiências bem-sucedidas com a exploração das geometrias não euclidianas em públicos escolares.

Todavia, mesmo com tais orientações e evidências, é possível identificar que muitos docentes não exploram esses conceitos em suas aulas e, segundo Chavichiolo (2011), um dos principais motivos pelos quais isso acontece é que seus conceitos ainda são pouco explorados na formação dos professores, o que leva ao seguinte questionamento: é possível ensinar algo para o qual não se tem formação?

Chavichiolo (2011) e Ribeiro (2012) apontam algumas pesquisas que foram realizadas sobre a formação de professores em relação a esse tópico, e os resultados obtidos indicam que a maioria dos cursos de formação inicial não aborda os conceitos relacionados às geometrias não euclidianas e, por conseguinte, muitos docentes diziam desconhecê-las.

A partir desses apontamentos e ponderações, propôs-se realizar uma investigação[5] com professores de Matemática que atuam na Educação Básica sobre as compreensões e saberes que eles têm em relação às geometrias não euclidianas. A pesquisa foi desenvolvida com sete professores de algumas cidades localizadas no estado do Paraná (Cornélio Procópio, Leópolis, Cambé, Londrina, Apucarana e Toledo) por meio de entrevistas semiestruturadas. A análise das respostas permitiu identificar que os professores necessitam ampliar seus saberes relacionados a estas geometrias. Destaca-se que alguns docentes não sabiam do que se tratava, além do fato de que todos os sujeitos investigados mencionaram que nunca exploraram tais conceitos em suas aulas, corroborando as pesquisas anteriormente destacadas, o que evidencia a necessidade de se explorar esses conceitos na formação dos professores.

De acordo com Bonete (2000, p. 230), isso deveria acontecer desde a formação inicial, visto que "o conhecimento das Geometrias não euclidianas pode proporcionar aos futuros professores um melhor preparo para que possam atuar no ensino fundamental e médio com a disciplina de Matemática e, em especial, com o ensino de geometria". Tais aspectos também são evidenciados por Brito (1995, p. 23), o qual enfatiza a importância do estudo desse tema para "ampliar a visão histórico-filosófica do professor de Matemática sobre os fundamentos do conhecimento geométrico que cabe a ele preparar para o ensino na Escola Básica".

Uma vez que esse trabalho se concentra no campo da Educação Matemática, leva-se em consideração que:

> A Educação Matemática é considerada uma atividade essencialmente pluri e interdisciplinar, constituindo-se de estudos e pesquisas dos mais diferentes tipos, cujas finalidades principais são desenvolver, testar e divulgar métodos inovadores de ensino; elaborar e implementar mudanças curriculares, além de desenvolver e testar materiais de apoio para o ensino da Matemática. Seu objetivo fundamental é tornar esse ensino o mais eficaz e proveitoso possível (MENDES, 2001, p. 16).

Diante disso, valer-se da História da Matemática justifica-se no fato de que seu uso, aliado à construção do conhecimento matemático dos professores, pode contribuir para que estes sujeitos ampliem suas percepções a respeito dos conceitos

[5] Tal investigação é melhor detalhada na subseção 4.3.

matemáticos, o que pode possibilitar uma melhora da prática em sala de aula (MIGUEL; BRITO, 1996; ARAMAN, 2011).

Além da História da Matemática, os vídeos didáticos também podem contribuir para a compreensão dos conceitos matemáticos, visto que esse recurso:

> [...] enfatiza o componente visual da matemática, mudando o status da visualização em educação matemática. (...) A mídia usada para comunicar, representar e produzir ideias matemáticas condiciona o tipo de matemática que é feita e o tipo do pensamento que está sendo desenvolvido neste processo. Ao mesmo tempo, o processo de visualização atinge uma nova dimensão se considerar um ambiente computacional de aprendizagem com um coletivo pensante particular, onde estudantes, professores/pesquisadores, mídia e conteúdos matemáticos residem juntos. (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 96, apud MACHADO; MENDES, 2013, p.82)

Tendo em vista tais especificidades, considera-se que é possível explorar informações históricas de conceitos matemáticos por meio de vídeos didáticos. Como destaca Machado (2011), a História da Matemática pode propiciar a escolha de estratégias pedagogicamente adequadas e interessantes para se abordar determinados tópicos, e o vídeo pode ser uma delas.

Neste contexto, é que a presente pesquisa se insere, com o intuito de desenvolver um material baseado na História da Matemática, vídeos[6] e atividades, sobre as geometrias não euclidianas que possam ser exploradas na formação continuada de professores que atuam na Educação Básica.

1.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

Este trabalho teve como *objetivo geral* realizar a produção de vídeos didáticos e atividades, baseados na História da Matemática, sobre tópicos das

---

[6] Os vídeos estão disponíveis nos seguintes links:
Vídeo 1: https://www.youtube.com/watch?v=eqjKgzx7fLk&t=4s
Vídeo 2: https://www.youtube.com/watch?v=ZvuzbE0FP3E
Vídeo 3: https://www.youtube.com/watch?v=YIW-q11QNhY
Vídeo 4: https://www.youtube.com/watch?v=ia9pzMeVUEU

geometrias não euclidianas que podem ser utilizados na formação continuada de professores.

Além disso, os objetivos específicos estabelecidos foram: a) realizar uma reflexão teórica a respeito da História da Matemática, das Tecnologias da Informação e da Comunicação e dos saberes docentes que auxiliaram o desenvolvimento da pesquisa realizada; b) desenvolver uma investigação com professores que atuam na Educação Básica sobre as compreensões desses sujeitos em relação às geometrias não euclidianas; c) apresentar uma discussão histórica, a partir do estudo de materiais históricos já produzidos por outros pesquisadores, a respeito das geometrias não euclidianas; d) elaborar vídeos didáticos que abordam esta temática, bem como atividades relacionadas a estes vídeos que podem ser aplicadas na formação docente; e) estruturar e ofertar um curso de formação continuada para professores da Educação Básica, no intuito de avaliar os vídeos e as atividades produzidas no decorrer da pesquisa e f) analisar dos resultados obtidos por meio dos dados coletados no respectivo curso.

1.3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa desenvolvida no campo da Educação Matemática caracteriza-se pela abordagem qualitativa, pois, como propõe Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2001, p. 163), “as pesquisas qualitativas são caracteristicamente multimetodológicas, usam uma grande variedade de procedimentos e instrumentos de construção de dados”. Além disso, Bogdan e Biklen (1994) destacam que nesse tipo de pesquisa nada deve ser considerado como trivial, haja vista que “tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 43).

Com a finalidade de alcançar o objetivo proposto, desenvolveu-se a pesquisa seguindo as seguintes etapas: pesquisa bibliográfica, investigação com professores que atuam na Educação Básica a respeito de seus saberes em relação às geometrias não euclidianas, estudo de materiais históricos que versam sobre as geometrias não euclidianas, elaboração dos vídeos e das atividades aliadas a eles, estruturação e execução de um curso de formação continuada para professores da Educação Básica e análise dos resultados com a execução.

No primeiro momento, realizou-se uma pesquisa bibliográfica sobre a História da Matemática e sua relação com a Educação Matemática, sobretudo no que diz respeito à formação de professores, ao uso das TIC, com o enfoque na produção e uso dos vídeos didáticos, aos saberes docentes e ao ensino das geometrias não euclidianas na Educação Básica. De acordo com Lakatos e Marconi (2010), a pesquisa bibliográfica exige organização e foco naquilo que deve ser pesquisado. Para tanto, trata-se do levantamento de informações, seleção e documentação do que for relevante ao assunto e que subsidia cientificamente a pesquisa realizada.

Ao longo desta etapa, também houve a necessidade de pesquisar sobre os aspectos relacionados à produção dos vídeos, como linguagem, ferramentas, equipamentos, tipos, *softwares*, entre outros.

Terminada esta etapa, inicia-se o segundo momento: a investigação com os professores sobre suas compreensões a respeito das geometrias não euclidianas. Etapa que foi realizada por meio de entrevistas semiestruturadas[7] com sete professores que atuam na Educação Básica no estado do Paraná (Cornélio Procópio, Leópolis, Cambé, Londrina, Apucarana e Toledo). Esses professores eram alunos do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da UTFPR (multicamp Londrina e Cornélio Procópio) que se voluntariaram a participar da pesquisa. Sobre eles, é possível destacar que eram licenciados em Matemática, dos quais seis deles contam com especialização nas áreas de Educação e Educação Matemática e estavam ingressando no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática[8].

Nos questionamentos feitos aos docentes, é possível explicitar: “O que são as geometrias não euclidianas?”, “Quais as diferenças entre a geometria euclidiana

---

[7] Na entrevista semiestruturada o informante tem como possibilidade de discorrer sobre as experiências, a partir do foco principal proposto pelo pesquisador; ao mesmo tempo que permite repostas livres e espontâneas do informante, valoriza a atuação do entrevistador (LIMA; ALMEIDA, 1999).

[8] Cabe destacar que essa investigação aconteceu ao longo da disciplina “Saberes docentes e formação profissional” ministrada pela Professora Doutora Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha em meados de 2015.

e as geometrias não euclidianas?", "Quais documentos curriculares defendem o ensino das geometrias não euclidianas na educação básica?" e "Qual a importância de se trabalhar com as geometrias não euclidianas em sala de aula?".

Feitas as entrevistas e suas transcrições, deu-se início à análise das respostas, baseando-se nos saberes docentes propostos por Tardif (2013) e nos pressupostos teóricos e metodológicos da Análise do Conteúdo, proposta por Laurence Bardin (1979), que apresenta um "leque de apetrechos; ou, com maior rigor, um único instrumento, mas marcado por uma grande disparidade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto: as comunicações" (BARDIN, 1979, p.31).

Essa análise desdobrou-se nas três fases expressas por Bardin (1979): a) Pré-análise: leitura flutuante das transcrições, com o intuito de perceber relações e conhecer o material de análise; b) Exploração do material: aconteceu após a pré-análise, nela foi desenvolvida a codificação, classificação e agregação, a partir dos significados. Tal processo é aquele em que dados brutos são transformados sistematicamente e agregados em unidades, as quais permitem uma descrição das características pertinentes do conteúdo. Por isso, organizou-se a análise a partir do recorte (escolha das unidades de significação), a classificação e agregação (categorização), levando em consideração as perspectivas da análise temática, que pressupõe que o tema é a unidade de significação, que emerge naturalmente das ideias expressas. Desta forma, essa análise constitui-se em descobrir os temas, que são as unidades de registro que corresponde à regra para o recorte. Feito isso, deu-se início à classificação e à agregação das categorias; c) Tratamento dos resultados obtidos, a inferência e a interpretação: nesta fase, de forma qualitativa, confrontaram-se as categorias com as ideias expressas pela literatura que versa sobre a temática e que embasa a pesquisa, possibilitando, assim, uma reflexão sobre os dados.

Os resultados obtidos com essa investigação são apresentados na subseção 4.3.

O terceiro momento deste trabalho foi uma reflexão histórica a partir de textos historiográficos sobre o surgimento das geometrias não euclidianas que subsidiaram a elaboração das sequências para os vídeos e atividades. Tal levantamento foi realizado a partir de livros de História da Matemática, dissertações que versavam sobre a temática, revistas, entre outras fontes (fontes secundárias – textos historiográficos).

No quarto momento, elaboração dos vídeos e das atividades, foi desenvolvido o recorte dos episódios históricos[9] a partir do levantamento feito. Tal recorte se deu buscando-se conexões com os saberes docentes apresentados por Tardif (2013). Toda estratégia e justificativa para esses recortes serão apresentadas detalhadamente na subseção 5.1.

Os episódios foram transformados em *scripts*, que possibilitaram a elaboração das animações e que culminaram na produção dos vídeos[10]. Para tanto, baseou-se nas técnicas de elaboração de vídeo, bem como nas orientações apresentadas por Machado (2011), Machado e Mendes (2013) e Mendes e Chaquian (2016) para elaboração de vídeos didáticos fundamentados na História da Matemática.

A gravação dos vídeos foi realizada na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – câmpus de Cornélio Procópio, no Núcleo de Educação a Distância da instituição com os equipamentos que neles estão disponibilizados, além da contribuição dos funcionários e estagiários que se disponibilizaram a ajudar na sua gravação e edição.

Finalizados os vídeos, deu-se início à produção das atividades que foram baseadas nos recortes dos episódios históricos, ou seja, as atividades exploravam as informações históricas e os conceitos expostos nos vídeos. Para cada vídeo foi construído um conjunto de atividades que exploravam os conceitos matemáticos a partir de informações históricas e que possibilitavam a reflexão e a verificação das propriedades e conceitos explorados.

Já na quinta etapa, estruturação e aplicação de um curso de formação continuada para professores da Educação Básica, desenvolveu-se um curso a partir do material produzido. Este foi organizado a partir de sequências, quatro especificamente, em que, para cada uma delas, propôs-se um vídeo e um conjunto de atividades. Feito isso, foi proposta a aplicação desse material em um curso de

[9] Entendemos episódios históricos como sendo um conjunto de acontecimentos históricos relacionados ao surgimento de algum conceito (MACHADO; MENDES, 2013).

[10] Todo esse processo será explorado na seção 5.2.

formação continuada para professores que atuam na Educação Básica (anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio) na cidade de Leópolis-PR.

Tal curso foi realizado em três encontros em um colégio público da cidade, e aconteceu em meados de abril de 2017, com duração total de doze horas, no qual participaram seis professoras.

A sexta e última etapa, a análise dos resultados, foi desenvolvida a partir dos dados obtidos com o curso, isto é, dos registros das professoras na realização das atividades, das gravações em áudio, da avaliação do material e do curso realizado pelas professoras no final e das observações feitas pelo pesquisador no decorrer do mesmo, isto é, da observação participante, que:

> [...] é uma das técnicas muito utilizada pelos pesquisadores que adotam a abordagem qualitativa e consiste na inserção do pesquisador no interior do grupo observado, tornando-se parte dele, interagindo por longos períodos com os sujeitos, buscando partilhar o seu cotidiano para sentir o que significa estar naquela situação (QUEIROZ et al., 2007, p. 276).

A análise desses dados buscou compreender de que forma o contato com os conceitos e propriedades das geometrias não euclidianas, possibilitados pelo uso de vídeos e atividades baseadas na História da Matemática, contribuiu para a ampliação do entendimento que as docentes participantes tinham a respeito dessa temática, bem como compreender a possibilidade de inserção desse material na Educação Básica.

2 OS SABERES DOCENTES

> [...] a chave para distinguir a base do conhecimento repousa sobre a interseção de conteúdos e pedagogia, na capacidade que um professor tem em transformar o conhecimento do conteúdo que ele possui em formas que sejam pedagogicamente eficazes e possíveis de adaptação às variações de habilidades e contexto apresentados pelos alunos.
>
> Almeida e Biajone (2007, p. 288)

Nesta seção, apresenta-se uma reflexão sobre os saberes docentes, um dos elementos que possibilitaram o desenvolvimento da presente pesquisa. Dessa maneira, são explorados tais saberes, bem como suas tipologias e a suas origens.

Considera-se neste trabalho que o professor é um profissional portador de um vasto saber, já que, no decorrer de sua prática, desempenha inúmeras ações, tais como, preparar aulas, propor atividades, escolher estratégias de ensino, administrar a sala de aula, lidar com as dificuldades dos alunos, avaliar, entre tantas outras ações, exigindo que esse profissional proceda de forma diferenciada em momentos diversos, empregando assim habilidades, pensamentos e conhecimentos diversificados.

Considerando isso, é possível compreender que os saberes dos professores se caracterizam pela multiplicidade, como apontam Tardif e Gauthier (1996, p. 11) ao mencionarem que “o saber docente é um saber composto de vários saberes oriundos de fontes diferentes e produzidos em contextos institucionais e profissionais variados”. Ainda, Tardif e Raymond (2000, p. 213) explicitam que:

> Os saberes profissionais dos professores parecem ser, portanto, plurais, compósitos, heterogêneos, pois trazem à tona, no próprio exercício do trabalho, conhecimentos e manifestações do saber-fazer e do saber-ser bastante diversificados, provenientes de fontes variadas, as quais podemos supor que sejam também de natureza diferente.

Nesse sentido, pode-se dizer que os saberes dos professores são plurais e diversificados. Além disso, são oriundos de fontes diferentes, como da formação inicial, do contexto social, das experiências de sala de aula, dentre outros ambientes de formação, os quais possibilitam aos professores os desenvolverem.

Para Gauthier et al. (2006), cabe conceber o ensino como uma mobilização de vários saberes, como se fosse um “reservatório” que é completo pelos professores para suprir as exigências das práticas pedagógicas. Seguindo esse pensamento, Silva (2009, p. 107), baseado nas ideias de Tardif (2013), Gauthier (2006), entre outros, elabora uma reflexão sobre as tipologias dos saberes que os professores apresentam, bem como as origens desses saberes. O Quadro 1, a seguir, apresenta as tipologias dos saberes docentes, a definição destes e os contextos nos quais eles são elaborados:

Quadro 1 - Saberes docentes: tipologia, definição e origem

Tipologia	Definição	Origem
Saberes da formação profissional e das ciências da educação	“Conjunto de saberes transmitidos pelas instituições de formação de professores” (TARDIF, 2013, p. 36). Carregados de saberes teórico-culturais, subjetivos e intersubjetivos, não menos importantes para o desenvolvimento da prática docente.	Adquiridos durante a formação inicial ou desenvolvidos na profissão, pelas instituições de formação de professores (GAUTHIER et al., 2006). Obtidos durante o desenvolvimento do trabalho prático do professor, ou seja, os relativos à profissão e, embora não sejam específicos para a prática, norteiam e dão sentido a ela (TARDIF, 2013).
Saberes disciplinares (matéria/conteúdo)	Resumem-se ao domínio da matéria a ensinar. São sociais, produzidos pelas agências formadoras, em diversas áreas do conhecimento ou disciplinas.	Elaborados no mundo acadêmico e destinados a um grupo em fase de formação inicial ou continuada. Eles são culturais, científicos.
Saberes curriculares (programa)	Compreensão do conjunto das áreas disciplinares e não disciplinares que integram a organização das atividades formativas de um determinado nível de ensino, bem como o conhecimento da estrutura e seus programas.	Correspondem aos discursos, os objetivos, conteúdos e métodos a partir dos quais a instituição escolar categoriza e apresenta os saberes sociais por ela definidos, e selecionados como modelos da cultura erudita e de formação para essa cultura (TARDIF, 2013).
Saberes da experiência ou práticos	Emergem da experiência docente, nas ações práticas, cotidianas do professore em seu meio social. Validados por um processo de reflexão e troca com os pares. Constituem os fundamentos da competência.	A legitimidade se daria através de uma reflexão crítica com todos os envolvidos no interior da escola, nos momentos de diálogo entre docentes e na formação continuada. Trata-se, pois, de uma aprendizagem que une e integra sabedoria, conhecimento implícito, valores, crenças, ideias, radicados na experiência.
Saberes da tradição pedagógica (o uso) – saber dar aula	É a compreensão da escola enquanto lugar essencialmente destinado ao ensino que cada pessoa tem antes mesmo da sua formação inicial/acadêmica.	Oriundos das experiências dos professores enquanto alunos, originados da vivência adquirida através do contato com diferentes professoras em toda sua vida

		escolar (PIMENTA, 2005).
Saberes da ação Pedagógica	Emergem da experiência; originados da ação pedagógica a partir do momento em que tornam públicos e que são testados através das pesquisas realizadas em sala de aula.	Com sua divulgação ficaram explícitos os elementos, as teorias, as crenças e atitudes que os professores utilizam em sua prática.

Fonte: Adaptado de Silva (2009, p. 107)

A partir desse quadro, torna-se possível entender e identificar as tipologias dos saberes apresentadas pelos professores. Além disso, percebe-se que os saberes não são desenvolvidos apenas no processo de formação inicial ou continuada, mas também são adquiridos a partir de diversas fontes e, muitas vezes, são indissociáveis ao ofício de ensinar. Outro aspecto a ser ponderado é que eles podem provir, até mesmo, de situações anteriores à formação inicial ou do início da carreira, isto é, muitos dos saberes que os professores possuem, relacionados ao ofício de ensinar, começam a ser desenvolvidos desde a Educação Básica, pois no decorrer da vida acadêmica eles observam seus professores, fazem julgamentos, reflexões, conjecturas etc., que, em alguns casos, poderão influenciar em suas práticas.

Além disso, os saberes dos professores não se restringem apenas aos relacionados aos conteúdos que eles devem abordar, vão muito além, pois, para Silva (2009, p. 109):

> Os saberes que servem de base para o ensino, tais como são vistos pelos professores, não se limitam a conteúdos bem circunscritos que dependeriam de um conhecimento especializado. Eles abrangem uma grande diversidade de objetos, de questões, de problemas que estão todos relacionados com seu trabalho. Além disso, não correspondem, ou pelo menos muito pouco, aos conhecimentos teóricos obtidos na universidade e produzidos pela pesquisa na área da Educação. Parece apropriado afirmar que, para os professores em exercício da profissão, a experiência de trabalho denota ser a fonte privilegiada de seu saber-ensinar.

Diante disso, é possível entender que os saberes apresentados pelos docentes são diversificados, cada um com a sua especificidade, mas todos relacionados ao ato de ensinar e, como Silva (2009) descreve, na maioria das vezes, eles possuem uma relação bem superficial com o que se aprende nas universidades (formação inicial), enquanto as experiências originadas a partir do exercício do magistério acabam se tornando uma fonte privilegiada de aquisição e de reelaboração de saberes.

Confirmando as ideias expressas por Silva (2009), Tardif e Raymond (2000) apresentam a perspectiva de que os saberes que servem de base para o ensino não estão vinculados apenas à formação profissional e, portanto, esta não poderia ser a única responsável a responder às suas necessidades e às demandas do dia-a-dia de sala de aula.

No entanto, Silva (2009) defende que os saberes oriundos da experiência não são suficientes, é necessária sua articulação com outros saberes, neste sentido, pode-se perceber que os saberes docentes não são isolados, mas estão interligados. Além destes aspectos, Tardif e Raymond (2000, p. 215), complementando o quadro proposto por Silva (2009), apresentam uma forma de classificar e identificar os saberes docentes, além de indicar suas fontes de aquisição. Eles também apresentam as formas como estes saberes integram a ação docente. Observe o Quadro 2:

Quadro 2 - Saberes docentes

Saberes dos professores	Fontes sociais de aquisição	Modos de integração no trabalho docente
Pessoais	Família, ambiente de vida, a educação sentida ao lado e outros.	Pela história de vida e pela socialização primária.
Originados da formação escolar básica	A escola primária e secundária, os estudos pós-secundários não especializados e outros.	Pela formação e pela socialização pré-profissionais.
Provenientes da formação profissional para o magistério	Os estabelecimentos de formação de professores, os estágios, os cursos de reciclagem e outros.	Pela formação e socialização profissionais nas instituições de formação de professores.
Procedentes dos programas e livros didáticos usados no trabalho	Na utilização de “ferramentas” dos professores: programas, livros didáticos, cadernos de exercícios, fichas e outros.	Pela utilização das “ferramentas” de trabalho, sua adaptação as tarefas.
Derivados de sua própria experiência na profissão, na sala de aula e na escola	A prática do ofício na escola e na sala de aula, a experiência dos pares e outros.	Pela prática do trabalho e pela socialização profissional.

Fonte: Adaptado de Tardif e Raymond (2000, p. 215)

Porém, deve-se tomar cuidado para não tratar os diferentes saberes docentes como categorias estanques, mas se deve perceber que existem especificidades em determinadas produções desses saberes, pois, ao contrário, apenas contribuiria para uma tradicional fragmentação dos saberes da docência.

Ressalta-se, também, que a identidade profissional do professor sofre constante modificação, visto que, muitas vezes, ele busca aperfeiçoar suas práticas e, assim, seus saberes também vão se modificando. Por isso, “os saberes tornam-se relativos, mutáveis e assumem valores ético-políticos, transformadores da ação educativa do professor. Isto acontece porque os saberes atendem aos interesses e valores daqueles que produzem a prática” (CARR; KEMMIS, 1988 apud FIORENTINI et al., 1998, p. 326). Silva (2009, p. 108) ressalta que:

> [...] é necessário, antes de qualquer coisa, para o bom desenvolvimento da ação prática, que haja a articulação de um conjunto de saberes, porque são eles que dão sentido, configuram a ação docente. O saber da experiência não determina sozinho a ação do professor, mas sim um conjunto denso de saberes, capaz de fazer surgir um pensamento reflexivo sobre a formação e esta ação docente.

Tais entendimentos evidenciam o quanto esses saberes são indispensáveis para a ação docente, isto é, ela só acontece por meio deles, os quais a configuram e permitem que ela ocorra. Seguindo esta ideia, Tardif (2013, p. 11) também afirma que:

> [...] o saber dos professores é o saber deles e está relacionado com a pessoa e a identidade deles, com a sua experiência de vida e com a sua história profissional, com as suas relações com os alunos em sala de aula e com os outros atores escolares na escola, etc. Por isso é necessário estuda-los com esses elementos constitutivos do trabalho docente.

Portanto, é na prática social que os saberes docentes se realizam. Tais práticas “[...] possibilitarão uma ressignificação dos saberes na formação de professores” (PIMENTA, 1999, p. 25) e é a partir da experiência do exercício profissional que o educador poderá construir seu saber fazer. Sobre a prática docente, ainda em Pimenta (1999), pode-se encontrar mais reflexões acerca do que ela possa representar na constituição da trajetória profissional de professores, no que diz respeito às possibilidades para a construção de reflexões teóricas que retornem a essa prática de forma produtiva.

> Nas práticas docentes estão contidos elementos extremamente importantes, como a problematização, a intencionalidade para encontrar soluções, a experimentação metodológica, o enfrentamento de situações de ensino complexas, as tentativas mais radicais, mais ricas e mais sugestivas de uma didática inovadora, que ainda não está configurada teoricamente (PIMENTA, 1999, p. 27).

Os saberes docentes, em grande parte, ganham consistência ao longo da carreira do professor, a partir de sua história de vida, na sua prática docente e pedagógica de todos os dias na escola, nas relações que estabelece com outros professores, dentro da sala de aula com os alunos, com outras pessoas do corpo gestor da escola e demais integrantes da organização escolar e a partir do embate com seus próprios saberes.

Salienta-se que esta consistência que os saberes vão ganhando não garante uma prática docente de qualidade, tendo em vista que, como já se destacou, a prática desenvolve alguns saberes e outros só são desenvolvidos fora desse ambiente, como em cursos de formação. Um caminho para isso é a formação continuada que pode possibilitar-lhes ampliar tais saberes, o que pode trazer reflexos positivos para a prática docente, por isso devem estar em constante formação.

Para tanto, Freire (2002, p.28) destaca que o “homem deve ser sujeito de sua própria educação” e, por isso, é preciso refletir sobre a construção dos saberes docentes como processo de mudança, que resgata o entendimento de uma ação conscientizadora na qual o docente exerce sobre o mundo, pois a conscientização realiza-se na prática e não na teoria. Nessa perspectiva, ao sensibilizar-se da capacidade de intervir criticamente no contexto em que está inserido, o professor pode se tornar um agente de mudanças.

Dessa maneira, os saberes desempenham um papel crucial na prática docente, pois é a partir do conhecimento teórico e prático que irão definir como acontecerá o processo de ensino. Essas reflexões foram de suma importância para o desenvolvimento da presente pesquisa, pois possibilitaram realizar a investigação com os professores sobre suas compreensões das geometrias não euclidianas, bem como o recorte dos episódios históricos que foram transformados em vídeos e possibilitaram a construção das atividades propostas. Tais elementos são explorados no decorrer deste trabalho.

3 UM ELO ENTRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E AS TIC NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: O VÍDEO DIDÁTICO COMO SUGESTÃO PARA FORMAÇÃO DOCENTE

> A História da Matemática não é apenas uma caixa de tintas com que um pode fazer a imagem da matemática mais colorida, para capturar o interesse dos estudantes em seus diferentes níveis de ensino, é uma parte da imagem em si. Se é uma parte tão importante que vai dar uma melhor compreensão do que a matemática é tudo, se vão alargar os horizontes dos alunos, talvez não só seus horizontes matemáticos.
>
> Torkil Heiede (1996, p. 241)

Esta seção traz uma reflexão a respeito da História da Matemática no contexto da Educação Matemática enquanto recurso didático que pode ser explorado na formação de professores e de alunos, e das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), com ênfase no uso de vídeos didáticos. Na última subseção, faz-se um paralelo entre a História da Matemática e os vídeos didáticos, na tentativa de mostrar que é possível relacioná-los na exploração de conceitos matemáticos.

3.1 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A sociedade humana produz cultura e é a partir dessa cultura que é possível extrair histórias (MENDES; CHAQUIAM, 2016). Assim, a história considerada neste trabalho é aquela focalizada no aspecto cultural em que a sociedade se fundamenta, para pensar e produzir ideias.

Levando em consideração estas ideias, entende-se a Matemática como uma produção social, elaborada nessa realidade objetiva, mas que se caracteriza pela subjetividade, na medida em que se estabelece entre o individual e o coletivo na busca de solucionar problemas das mais diversas ordens ao longo dos tempos (MENDES; CHAQUIAM, 2016). Sobre esse assunto, Mendes e Chaquiam (2016) afirmam que é nessa dualidade objetiva-subjetiva que as construções históricas dessas produções são compreendidas, pois é necessário considerar a relação entre sociedade e cultura, plenamente evidenciada nas construções históricas da realidade, da qual a Matemática faz parte, visto que:

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber (D'AMBROSIO, 1999, p. 97).

Tais ideias foram produzidas, pensadas, refletidas e experimentadas para explicar fatos ou resolver problemas, produzindo modelos matemáticos em contextos históricos e culturais, que foram incorporados às diversas matemáticas existentes. Considera-se, assim, que esses aspectos são relevantes para serem inseridos no ensino da Matemática, pois podem contribuir para a construção de significados para seus conceitos.

Em conformidade, Balestri (2008, p. 12) diz que "a importância da história no ensino de qualquer ciência é reconhecida há alguns séculos. Particularmente no ensino de Matemática, existem indícios de que a importância da história aparece a partir do século XVIII". No Brasil, de acordo com Miguel e Miorim (2008), só foi a partir da década de 1980 que aconteceu com maior intensidade a inclusão da História da Matemática em textos direcionados à prática pedagógica, momento no qual o Movimento da Matemática Moderna[11] perdia suas forças.

A partir de então, diversas pesquisas começaram a ser desenvolvidas sobre esta temática, dentre elas é possível citar D'Ambrosio (1996, 1999), Miguel e Miorim (2008), Miguel e Brito (1996), Fauvel e Maanen (2000), Fried (2007), Araman (2011), Chaquiam (2015), Mendes e Chaquiam (2016), entre outras, que apontam a História da Matemática como um recurso didático que pode trazer contribuições à Educação Matemática.

---

[11] O Movimento da Matemática Moderna nasceu em meados do século XX, quando grupos de pessoas interessadas pelo ensino de matemática concluíram que seria conveniente adaptar ao ensino dessa disciplina duas das principais características da matemática do século XX: (1) abstração e (2) análise das estruturas e modelos subjacentes. Esse movimento caracterizou-se pela apresentação da Matemática de forma técnica e desprovida de problematizações, enfatizando o formalismo, o uso preciso da linguagem da matemática, o rigor e seus aspectos estruturais e lógicos. O professor era o elemento central do ensino e aos alunos cabia reproduzir o que era exposto pelo mesmo (BALESTRI, 2008).

A História da Matemática aqui defendida apresenta-se como recurso didático que:

> [...] pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área de conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma condição, ao mostrar as necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e os processos matemáticos do passado e do presente (...). Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural (BRASIL, 1997, p. 42).

A esse respeito, Fauvel e Maanen (2000) destacam que a Matemática precisa ser entendida como empreendedorismo humano, como fruto de seu pensamento, que vem sendo desenvolvido ao longo da história da humanidade. Para eles, a partir do uso da História da Matemática na Educação Matemática, por meio de suas potencialidades pedagógicas para o ensino, é possível alcançar tais entendimentos.

Ao longo do referido estudo, os autores buscam explicitar o papel que ela desempenha nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, e, para eles, “matemáticos, historiadores e educadores de muitos países pensam, já há algum tempo, que a Educação Matemática pode ser melhorada, de alguma forma, pela incorporação da História da Matemática (FAUVEL; MAANEM, 2000, p. 13, apud ARAMAN, 2011, p. 78).

Para D’Ambrosio (1996) e Fauvel e Maanem (2000), esse recurso didático é indispensável, já que ele possibilita a compreensão de como as teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas, em diferentes épocas e diferentes contextos.

Com todos esses discursos favoráveis à inserção deste recurso pedagógico no ensino da Matemática e seus contributos para o ensino e a aprendizagem dessa ciência, fica evidente que a História da Matemática é um campo fértil que pode possibilitar o desenvolvimento da Educação Matemática, na medida em que ela se apresenta como uma área de estudo e de pesquisa. Assim, não só o professor de Matemática, mas também pesquisadores podem se beneficiar com a História da Matemática, já que ela fornece a ambos uma abundância de problemas matemáticos interessantes, fontes e métodos que podem ser utilizados de forma implícita ou explícita no processo de ensino (MACHADO, 2011).

A esse respeito, Fried (2007) defende que a História da Matemática pode trazer diversas implicações para o contexto da Educação Matemática e, por isso, ela deve ser estudada, e, assim, os compromissos dessa área precisam ser reconsiderados para que a História desempenhe um papel significativo na formação dos estudantes. O trabalho de Fried (2007) tem como pressuposto a ideia de que a educação deve ser dirigida a todos os seres humanos e, desta forma, a Educação Matemática também deve contribuir para a formação do sujeito. Para tanto, ele argumenta que:

> [...] o trabalho do historiador da Matemática e do matemático são saberes complementares. Reconhecendo este fato, argumenta-se ser possível ter uma compreensão mais profunda de nós mesmos como criaturas que fazem Matemática. Esse entendimento, que é um tipo de autoconhecimento matemático, é então proposto como um compromisso alternativo para a Educação Matemática. À luz desse compromisso, a História da Matemática assume um papel essencial na formação Matemática tanto como objeto e como mediador entre as formas de conhecimento acima mencionadas (FRIED, 2007 p. 1).

Mediante tais apontamentos, é possível compreender que a História da Matemática é uma área de estudo relevante para o desenvolvimento da Educação Matemática, principalmente nos que diz respeito à formação de professores, como também na formação dos alunos. Apresenta-se a seguir alguns argumentos que apontam as contribuições desse recurso pedagógico para a formação docente e para a ação educativa, foco do trabalho em questão, bem como para a aprendizagem do aluno, pois se entende que o seu uso pedagógico em sala de aula está estritamente relacionado ao preparo do professor.

3.1.1 A História da Matemática e seus Contributos para a Aprendizagem da Matemática

A História da Matemática, enquanto recurso didático, apresenta-se como uma possibilidade de se trabalhar os afetos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem de maneira positiva, podendo colaborar para a quebra do ciclo de exclusão em relação à Matemática escolar (MACHADO, 2011), haja vista que o aluno, ao tomar contato com as produções matemáticas de diferentes épocas e culturas, pode ressignificá-la e estabelecer uma atividade dialógica com as diferentes características da linguagem Matemática, que, de acordo com Machado (2011), não se manifestam no conhecimento construído na escola no contexto atual.

Jankvist (2009) ressalta que a Matemática explorada em sala de aula, na atualidade, mostra-se desvinculada dos seus contextos históricos, sociais e culturais, o que pode trazer prejuízos à aprendizagem dos alunos. Tal problema também é destacado por Imenes (1990, p. 23):

> A Matemática apresentada no ensino de Matemática é a-histórica. História é coisa dos homens e, como a Matemática escolar se desenvolve em um ambiente exclusivamente matemático, fechado em si mesmo, onde não entram as coisas dos homens, ela se mostra a-histórica, não aparece como construção humana, não é parte de nossa cultura, não é gerada num ambiente sociocultural.

Neste contexto, a História da Matemática emerge como uma alternativa para solucionar esse problema. Na medida em que, a partir dela, os alunos podem experimentar a Matemática como atividade humana, que foi inventada, alterada e prorrogada sob a influência das pessoas ao longo do tempo. Assim, eles podem compreender que esta ciência está em constante e crescente mudança no seu corpo de conhecimentos, tornando-a mais agradável. Deste modo, os alunos poderão adquirir alguma noção de processos e de progressos, que aconteceram, também, a partir das influências sociais e culturais. Em face dessa contingência, “a história acentua as relações entre a Matemática e o seu papel em outras disciplinas, o que contribuirá para colocar a Matemática em uma perspectiva mais ampla e, assim, aprofundar a compreensão dos alunos” (MACHADO; MENDES, 2013, p. 25).

Em conformidade com tais entendimentos, Araman (2011, p. 77) aponta que “atividades embasadas na história de determinado conceito podem, além de auxiliar na condução da construção do conhecimento matemático, proporcionar uma visão mais ampla desse conhecimento”.

No entanto, não é qualquer história que pode ser inserida nas aulas de Matemática, visto que nem todo fato histórico pode ser considerado adequado para ser introduzido no desenvolvimento conceitual dos estudantes (MENDES; CHAQUIAM, 2016). O ideal é a utilização de fatos que remetem diretamente ao desenvolvimento epistemológico das ideias, conceitos e relações matemáticas ensinadas na Educação Básica e no Ensino Superior. Em síntese, eles devem tratar das histórias relacionadas aos aspectos matemáticos “em seu processo de criação, reinvenção e organização lógica, estabelecido no tempo e no espaço com a finalidade de sistematizar soluções de problemas de ordem cultural, científica e tecnológica, em todos os tempos e lugares” (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 8). Ainda a esse respeito, Miguel (1993, p. 107-108) diz que:

> Entre as opiniões extremadas que tentam nos convencer que a história tudo pode ou que a história nada pode, parece-nos mais adequado assumir uma posição intermediária que acredita que a história apenas quando devidamente reconstituída com fins pedagógicos e organicamente articulada com as demais variáveis que intervêm no processo de planejamento didático pode e deve desempenhar um papel subsidiário em Educação Matemática.

Por meio desses apontamentos, pode-se compreender que os contextos históricos de alguns conceitos matemáticos conseguem despertar a atenção dos alunos, bem como aumentar o interesse, a concentração e até mesmo a participação destes sujeitos nas aulas. Indo além, o uso deste recurso didático pode possibilitar o desenvolvimento do conhecimento matemático, reforçar a capacidade de investigação e desenvolver habilidades e estruturas mentais, dentre elas, os pensamentos lógico e crítico e o raciocínio (MENDES; CHAQUIAM, 2016).

Em suma, a História da Matemática, quando explorada de forma adequada, pode levar aos educandos a compreender:

> (1) Que a Matemática é uma construção humana;
> (2) As razões pelas quais as pessoas fazem Matemática;
> (3) As conexões existentes entre Matemática e filosofia, Matemática e religião, Matemática e o mundo físico e Matemática e Lógica;
> (4) Que necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas frequentemente servem de estímulo ao desenvolvimento de ideias matemáticas;
> (5) Que a curiosidade estritamente intelectual, isto é, que aquele tipo de conhecimento que se produz tendo como base a questão “O que aconteceria se...?”, pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias;
> (6) Que as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da Matemática mudam e se desenvolvem ao longo do tempo;
> (7) A natureza e o papel desempenhado pela abstração e generalização da história do pensamento matemático;
> (8) A natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova (MIGUEL, 1993, p. 76).

Neste sentido, o valor do conhecimento histórico não é ter um conjunto de histórias curiosas e histórias para entreter os alunos, a fim de se passar um tempo, pois o ensino da Matemática não pode se reduzir, apenas, a contar histórias, mas é necessário repensar a lógica da construção Matemática e isso só se faz conhecendo primeiro suas fontes (MENDES, 2006).

3.1.2 A História da Matemática na Formação Docente

Como já se destacou, diversos são os argumentos favoráveis à implementação de abordagens históricas nas aulas de Matemática; contudo para que esse recurso didático exerça tais contribuições, é necessário olhar para a formação do professor de Matemática, no que diz respeito à inserção da História da Matemática. Miguel (2005, p. 139) ressalta que:

> Nos últimos anos, tanto em nosso país quanto em outros, muito se tem dito acerca das potencialidades crítica e formativa da participação orgânica da História da Matemática na Educação Matemática Escolar e, como decorrência, também na formação de professores de Matemática.

D'Ambrosio (1996) é um dos pesquisadores que defende a História da Matemática na formação de professores e recomenda: "o bom seria que o professor tivesse uma noção da História da Matemática e pudesse fazer um estudo mais sistemático e por isso recomenda-se aos professores em serviço que procurem essa formação" (D'AMBROSIO,1996, p. 13).

Indo ao encontro dessa ideia, Miguel (2005) assume que os campos emergentes de investigação em História, Filosofia e Sociologia da Matemática poderiam vir participar, de forma crítica e qualificadora, da formação inicial e continuada de professores de Matemática. Isso se deve ao fato de que:

> [...] a História e Filosofia da Ciência surge como necessidade formativa do professor, na medida em que pode contribuir para: evitar visões distorcidas sobre o fazer científico; permitir a compreensão mais refinada dos diversos aspectos envolvendo o processo de ensino e de aprendizagem da ciência; proporcionar uma intervenção mais qualificada em sala de aula (MARTINS, 2007, p. 115).

Neste contexto, Araman (2011) ressalta que muitos pesquisadores da área defendem uma formação que proporcione discussões sobre a natureza da Matemática, de conceitos e métodos, enfim, da História da Matemática, o que pode contribuir com abordagens epistemológicas e metodológicas que possibilitem uma compreensão de como se dá o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Também é possível inferir que o nível de competência Matemática do professor na sua formação deve permitir a compreensão dos conceitos matemáticos. Para tanto, uma boa compreensão pode ser alcançada por meio dos elementos históricos, a fim de que os professores possam desenvolver um conhecimento efetivo desses conceitos e a forma como eles foram desenvolvidos. Contudo, o conhecimento histórico não é suficiente; os professores devem desenvolver tal perspectiva de conhecimento no sentido da sua correta utilização educacional (MACHADO; MENDES, 2013).

A propósito, os próprios PCN (BRASIL, 1997, p. 30) garantem isso ao mencionar que:

> O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

Tais entendimentos evidenciam que a História da Matemática tem uma influência decisiva no espírito do professor e na sua atitude em relação à própria Matemática (MACHADO, 2011) visto que, segundo Malet (1983), a atitude que o professor tem frente à matéria que explica é um dos ensinamentos mais importantes que ele pode transmitir aos alunos. Além disso, ele afirma que esses sujeitos teriam motivações para ensinar Matemática e, claro, o seu modo de ensinar pode ser influenciado positivamente por essa nova atitude possibilitada pelo conhecimento da história.

Desta forma, um estudo didático da História da Matemática pode ser um elemento importante da formação do professor. Mediante tais ponderações, considera-se imprescindível que a formação proporcione ao professor condições de compreender as possibilidades de aplicação da História da Matemática em sala de aula, bem como da conscientização de que tais conhecimentos colaboram para uma formação mais consistente frente aos desafios de se ensinar.

Corroborando essas propostas, Batista e Sampaio (2006) defendem que a abordagem histórica se constitui como instrumento fortalecedor da prática docente, contribuindo de diversas formas, dentre elas a promoção de debates acerca dos valores cognitivos da ciência. Tais investigações possibilitam ao professor uma compreensão da atividade científica e de suas implicações sociais e culturais, que certamente enriquecem a formação destes sujeitos. Assim, pode-se concluir que o estudo do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos é capaz de corroborar para que os professores tenham condição de promover debates, tornando, assim, suas aulas mais significativas e contextualizadas.

A esse respeito, Araman e Batista (2013) apresentam algumas das possíveis contribuições da História da Matemática para a formação do professor que ensina Matemática:

> (1) Compreensão da natureza do conhecimento matemático: A partir dos estudos [...] percebemos que muitos professores não apresentam uma compreensão adequada da sua ciência, no caso, a Matemática. Apresentam a noção de um corpo de conhecimentos pronto, acabado, no qual não há revisões a serem feitas, como também a noção de uma ciência de caráter empírico, em que as interpretações são feitas apoiadas nas observações. Em adição, os professores têm a concepção de que os conteúdos, teorias, leis, entre outros, são descobertos por pessoas geniais, com pouca colaboração entre os pares. Além disso, concebem uma ciência livre de influências sociais, culturais e políticas.
> (2) Compreensão dos conteúdos matemáticos: Ao estudar um determinado conceito, a partir de uma abordagem histórica, o professor pode caminhar para uma compreensão de como aquele conceito foi sendo desenvolvido, quais os elementos conceituais necessários para a sua compreensão, quais são os pontos de maior dificuldade, por que eles foram importantes naquela época, por que são importantes hoje, quais eram as necessidades para o desenvolvimento daquele dado conceito, entre outros [...]. Essa compreensão, que vai além daquela recebida durante a sua formação, tem o potencial de promover um entendimento mais amplo e significativo do conteúdo matemático, o que trará benefícios para suas aulas.
> (3) Formação metodológica do professor: Ao elaborar uma abordagem histórica para ensinar algum conteúdo matemático, o professor precisa ter cuidados metodológicos, como os de caráter pedagógico, para adequar o material histórico ao estágio de desenvolvimento dos seus alunos, ao tempo disponível para tal, certificar-se de que a proposta colabore efetivamente para a aprendizagem, entre outros [...]. Ao se propor a desenvolver abordagens históricas com seus alunos, o professor utiliza conhecimentos que vão além dos históricos ou dos conceituais relacionados ao conteúdo. Ele utiliza conhecimentos pedagógicos vindos de estudos teóricos, e, também, de sua prática, a fim de tornar factível o uso daquelas informações históricas em sala de aula.
> (4) Visão interdisciplinar do professor: A questão da interdisciplinaridade vem sendo muito debatida na comunidade acadêmica, que ressalta a necessidade da superação daquela visão compartimentada das áreas do conhecimento. A história da Matemática já guarda em si esse caráter interdisciplinar. Temos, num eixo, o estudo histórico e suas especificidades; em outro encontramos as questões filosóficas; e ainda temos o eixo relativo ao conhecimento matemático e suas características, que são diferentes de outras ciências. Então, trabalhar com história da Matemática já pressupõe uma postura interdisciplinar (ARAMAN; BATISTA, 2013, p. 4-5).

No entanto, cabe salientar que essa postura, advinda dos conhecimentos acerca da História da Matemática, certamente não resolverá todos os problemas da formação docente e do ensino da Matemática; porém, podem contribuir para o desenvolvimento de uma visão abrangente da evolução do pensamento científico e as suas relações com as diversas áreas do conhecimento (ARAMAN, 2011).

3.1.3 Possibilidades de Abordagens da História da Matemática no Ensino de Matemática

Entende-se que a inserção da História da Matemática em sala de aula seja algo necessário, mediante o que já foi exposto; todavia, para que isso aconteça, não é necessário que o professor de Matemática seja um especialista em História da Matemática para incorporá-la à sua prática pedagógica, como destaca D'Ambrosio (1996).

Neste viés, cabe a ele, baseando-se em sua formação, definir como a história será incorporada a suas aulas. De acordo com Miguel e Miorim (2008), a abordagem histórica dos conteúdos matemáticos é fonte de seleção e constituição de elementos para a elaboração de sequências adequadas aos diferentes tópicos de ensino da Matemática escolar. A escolha de problemas ou episódios considerados motivadores da aprendizagem também constitui um caminho que pode ser escolhido pelo professor para abordar a História da Matemática.

Defendem-se atividades baseadas na História da Matemática que permitam a construção do conhecimento matemático e que proporcionem uma visão mais ampla deste conhecimento, o que também é destacado por Mendes (2001). Segundo o referido autor, "podemos agir para que seja possível conduzir a aprendizagem do aluno a partir das ideias apoiadas no conhecimento histórico, visto que devemos orientá-lo para que ele vá se desenvolvendo numa sequência gradual" (MENDES, 2001, p. 231), partindo de experiências mais concretas e contextualizadas até o alcance das abstrações.

Cury e Motta (2008) apontam possíveis abordagens em termos da História da Matemática para o ensino em sala de aula como, por exemplo, a busca de novas soluções para problemas já resolvidos; a tentativa de solucionar problemas não resolvidos com recursos atuais mais potentes; a busca, em livros antigos ou filmes, de conhecimentos sobre o ensino de determinados conteúdos e compará-los com a forma como é trabalhado atualmente; ou ainda a apresentação de problemas clássicos através de animações computacionais.

Soma se a isso a proposta de Miguel (1993), o qual defende que o uso de problemas históricos possibilita o esclarecimento e o reforço de muitos conceitos que estão sendo ensinados; constitui-se em veículos de informação cultural e sociológica; reflete as preocupações práticas ou teóricas das diferentes culturas em diferentes momentos históricos; consiste em meio de aferimento da habilidade matemática de nossos antepassados e permite mostrar a existência de uma analogia ou continuidade entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Por meio destes apontamentos, entende-se que o uso da História da Matemática em sala de aula transcende o emprego de narrativas que retratam nomes, datas e locais e que, em grande parte, encontram-se desvinculadas dos conteúdos matemáticos ou das ideias produzidas para explicar determinados contextos, sejam sociais, culturais ou internos à própria Matemática (MENDES, 2001).

No que diz respeito ao valor didático da História da Matemática, Miguel (1993) defende que, quando usada pedagogicamente, pode inserir elementos que contribuam para a compreensão da Matemática como conhecimento dinâmico e significativo. Vianna (1998), embasado no trabalho de Miguel (1993), apresenta uma síntese de várias possibilidades, discutidas por diversos pesquisadores, de uso pedagógico de elementos históricos no ensino de Matemática:

- Uma fonte de motivação para o ensino-aprendizagem (História-Motivação).
- Uma fonte de seleção de objetos para o ensino aprendizagem (História-Objetivos).
- Uma fonte de métodos adequados para o ensino-aprendizagem (História-Métodos).
- Uma fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos ou recreativos a serem incorporados de maneira episódica nas aulas de Matemática (História-Recreação).
- Um instrumento que possibilita a desmitificação da Matemática e a desalienação do seu ensino (História-Desmitificação).
- Um instrumento na formalização de conceitos matemáticos (História-Formalização).
- Um instrumento na construção de um pensamento independente e crítico (História-Dialética).
- Um instrumento unificador dos vários campos da Matemática (História-Unificação).

> - Um instrumento de promotor de atitudes e valores (História-Axiologia).
> - Um instrumento de conscientização epistemológica (História-Conscientização).
> - Um instrumento de promoção da aprendizagem significativa e compreensiva (História-Significação).
> - Um instrumento revelador da natureza da Matemática (História-Epistemologia) (VIANNA, 1998, p. 25-26).

Por consequência, entende-se que é possível o uso efetivo da História da Matemática em sala de aula, e que ele pode trazer inúmeras contribuições para os alunos e para os professores e, por isso, ela pode promover o desenvolvimento da Educação Matemática.

3.2 AS TICS E O PAPEL DO VÍDEO DIDÁTICO NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

As técnicas empregadas na fabricação e produção de ferramentas dão indícios de que a cultura humana lida com a produção das tecnologias desde os primórdios. Em geral, a tecnologia tem desempenhado um importante papel no desenvolvimento das civilizações, sobretudo quando se uniu ao desenvolvimento da ciência. Neste processo, a tecnologia, a linguagem, os rituais, as artes etc. compõem uma parte importante da cultura, e, por isso, dão forma a ela (MACHADO, 2011).

Borba (1999) afirma que a tecnologia se refere a todas as ferramentas que os seres humanos usam em busca de sentido, para resolver problemas, comunicar as suas conclusões e para medir e explicar os fenômenos à sua volta. Dessa forma, ele inclui todas as ferramentas usadas para pesquisar, classificar, criar e comunicar as informações. Validando essa ideia, Chaves (1998) afirma que tecnologia é todo artefato ou técnica que o homem inventa para ampliar seus poderes, facilitar seu trabalho, ou, simplesmente, trazer-lhe maior satisfação e prazer. A exemplo, a roda, o machado, a fala, a escrita, o motor a vapor, a eletricidade, o telefone, o rádio, o celular, entre outros, são invenções que permitiram muitas modificações na forma de vida das pessoas.

Essas tecnologias vêm se modificando muito rapidamente, assim se vive hoje um grande desenvolvimento tecnológico, no qual a cada momento acontece o lançamento de artefatos de última geração em tempo recorde, como celulares, computadores, entre outros aparelhos. Essa revolução tecnológica permite visualizar uma nova sociedade, a chamada sociedade da informação ou sociedade do conhecimento.

Tal sociedade vem demudando sua forma de se comunicar e de disponibilizar informações. Para tanto, foram e estão sendo desenvolvidas ferramentas que facilitam o acesso às informações, que pode ocorrer, na maioria das vezes, simultaneamente ao acontecimento dos fatos, sendo a internet o recurso de destaque no desenvolvimento destas ferramentas. Desta forma, um novo quadro social se configura (PONTE, 2000).

Entre essas tecnologias estão as Tecnologias da Comunicação e da Informação, as TIC, que, por meio de suportes (mídias) e de meios de comunicação (tais como o jornal, o rádio, a televisão e a internet), possibilitam o acesso e a veiculação de informações, utilizando-se de diversas articulações comunicativas, em todo o mundo (PONTE, 2000). No que diz respeito, Ponte (2000, p. 2) afirma que:

> [...] estas tecnologias constituem tanto um meio fundamental de acesso à informação (Internet, bases de dados) como um instrumento de transformação da informação e de produção de nova informação (seja ela expressa através de texto, imagem, som, dados, modelos matemáticos ou documentos multimédia e hipermédia). Mas as TIC constituem ainda um meio de comunicação a distância e uma ferramenta para o trabalho colaborativo (permitindo o envio de mensagens, documentos, vídeos e software entre quaisquer dois pontos do globo).

Dentre as TIC, é possível citar os recursos audiovisuais (TV, rádio, computador, etc.), que são um dos principais mecanismos que têm propiciado estes avanços. Para Ferreira (2010, p. 23):

> Os recursos audiovisuais partem do concreto, do visível, do imediato, do próximo. Mexem com o corpo, com a pele – tocam-nos e “tocamos” os outros, estão ao nosso alcance através dos recortes visuais, do Zoom, do som envolvente. Nos recursos audiovisuais, sentimos, experimentamos, temos sensações sobre o outro, sobre o mundo, sobre nós mesmos.

Esses recursos instigam, chamam a atenção, exploram a imaginação e dão vida ao pensamento. Dentre esses recursos, estão os vídeos que, segundo Amaral et al (2004), prometem ser o meio de comunicação mais potente deste século, porque abrem as portas, de um modo muito especial, para a alfabetização audiovisual permanente, possibilitam e fomentam nos espectadores a capacidade de produzir, analisar e modificar suas próprias mensagens. Moran (1995, p. 28) corrobora essa ideia ao afirmar que:

> O vídeo parte do concreto, do visível, do imediato, do próximo, que toca todos os sentidos. Mexe com o corpo, com a pele, nos toca e "tocamos" os outros, que estão ao nosso alcance, através dos recortes visuais, do close, do som estéreo envolvente. Pelo vídeo sentimos, experienciarmos sensorialmente o outro, o mundo, nós mesmos.

Tendo em vista tais especificidades, compreende-se que essa mídia tem um poder de alcance muito grande e, além disso, desencadeia muitas sensações nos sujeitos devido as suas potencialidades. Moran (1995) é um dos pesquisadores que refletem sobre tais potencialidades e, de acordo com ele:

> O vídeo é sensorial, visual, linguagem falada, linguagem musical e escrita. Linguagens que interagem superpostas, interligadas, somadas, não-separadas. Daí a sua força. Somos atingidos por todos os sentidos e de todas as maneiras. O vídeo nos seduz, informa, entretém, projeta em outras realidades (no imaginário), em outros tempos e espaços (MORAN, 1995, p. 28).

Devida a essas características, o vídeo pode e deve ser incorporado no contexto educacional, já que, segundo pesquisadores, a exemplo Moran (1995), Machado (2011), Machado e Mendes (2013), entre tantos outros, ele pode trazer benefícios para os processos de ensino e de aprendizagem. Para tanto, reflete-se nos próximos tópicos sobre as potencialidades do uso desse recurso na educação, dando ênfase a suas contribuições para o ensino da Matemática.

3.2.1 O Vídeo como Recurso Educacional

Entende-se que a formação docente deve, cada vez mais, propiciar aos professores e futuros professores uma visão diversificada da prática de ensino, possibilitando-lhes um contato com os diversos recursos didáticos que podem auxiliá-los nesse modelo de escola, que está em constante mudança, ainda mais em se tratando da formação da sociedade do conhecimento.

O vídeo deve ser um desses recursos, que é capaz de desempenhar um importante papel em sala de aula. Uma grande vantagem de seu uso é que os jovens estão acostumados com ele, isto é, o vídeo é uma mídia cada vez mais presente no cotidiano dos alunos, mas como uma forma de entretenimento e, quando inserido nas aulas, pode funcionar como um elemento auxiliador da aprendizagem. Seguindo essa ideia, Moran (1995, p. 27-28) afirma que:

> O vídeo está umbilicalmente ligado à televisão e a um contexto de lazer, de entretenimento, que passa imperceptivelmente para a sala de aula. Vídeo, na concepção dos alunos, significa descanso e não "aula", o que modifica a postura e as expectativa em relação ao seu uso. Precisamos aproveitar essa expectativa positiva para atrair o aluno para os assuntos do nosso planejamento pedagógico. Mas, ao mesmo tempo, saber que necessitamos prestar atenção para estabelecer novas pontes entre o vídeo e as outras dinâmicas da aula.

Levando em consideração esses entendimentos, compreende-se que o vídeo, pensado e inserido nas aulas com objetivos pedagógicos pré-definidos, pode trazer algumas corroborações para o processo educativo, dentre elas: quando usado para aumentar a memória visual é uma ferramenta valiosa; atingir as crianças com uma grande variedade de estilos de aprendizagem; trazer novas informações para sala de aula; permitir ao aluno ver como uma história aconteceu; servir para expor aos estudantes informações, pessoas, lugares e eventos que outros recursos de aprendizagem não podem (MACHADO, 2011). Além disso,

> [...] o vídeo como recurso didático apresenta uma série de características como baixo custo e facilidade de uso, o que lhe permitirá estar presente em diferentes momentos do processo educativo: como um meio de observação, como um meio de expressão, tais como autoaprendizagem e como meios de apoio à educação (RAMOS, 2000, p. 3).

Segundo Barato (2006), os vídeos trazem muitos benefícios para o contexto da sala de aula, na medida em que a partir dele é possível combinar som, imagem, movimento, entre outros arranjos, por meio dos quais se podem contar histórias, provocar emoções, criar sonhos, ativar o imaginário etc. Contudo, convém ressaltar que um único vídeo não permitirá tudo isso, mas seus aspectos lúdicos desencadeiam algumas sensações nesses sujeitos que podem atingir o imaginário, favorecendo, assim, a compreensão das ideias neles abordadas.

Outra característica explicitada por ele é que o vídeo tem o poder de sintetizar os conteúdos em obras curtas, o que é vantajoso, pois professores e alunos podem examinar muitas vezes o material, explorando significados de cores, movimentos, sons, tratamentos de imagens, natureza da mensagem, conteúdos, entre outros elementos. Tais aspectos permitem compreender que o vídeo explora diversas linguagens, e:

> [...] a mixagem entre imagens, movimentos, cores, e textos provocativos mobiliza sentimentos e pensamentos criativos. Transmite novas formas de linguagens em que estão presentes o pensar e o sentir. Cultura audiovisual que dá origem a uma nova linguagem, assumida pela sociedade contemporânea. Linguagem presente nas salas de aula com ou sem uso de equipamentos e tecnologias mediáticos e que contribui para o aparecimento no trabalho didático de algumas das suas características (KENSKI, 2003, p. 59).

Desta forma, as linguagens e características dos vídeos podem contribuir para a prática docente, desempenhando influências positivas que auxiliam na compreensão de conceitos. Todavia, é possível destacar que não é a simples utilização do vídeo em sala de aula que irá garantir a aprendizagem. Seu uso deve ser pensado e planejado. Indo ao encontro deste pensamento, Machado (2011, p. 70) afirma que “a utilização pedagógica de qualquer meio deve partir da didática e não do meio”, destacando que deve haver um planejamento antes de seu uso.

Soma-se a essas ideias o fato de que seu uso pedagógico pode ser realizado de diversas maneiras, devido ao seu caráter multidimensional e flexível. No entanto, sua utilização não deve reforçar ainda mais as práticas tradicionais, que consideram os alunos como folhas brancas para serem preenchidas pelas informações do professor ou do vídeo. Antes, porém, deve ser compreendido como uma faceta de ensino, juntamente com qualquer material ou outro recurso disponível para o ensino de um determinado tópico, e o professor deve estar preparado para isso (MACHADO, 2011).

Para que o docente possa desempenhar um melhor uso do recurso audiovisual, é preciso que ele tenha conhecimento do potencial que o vídeo tem, pois, para Cinelli e Lapolli (2003, p. 38), uma:

> [...] das grandes vantagens do vídeo em sala de aula está no fato do utilizador poder manuseá-lo, manipulá-lo como se “folheasse um livro”: avanços, recuos, repetições, pausas, todas essas interferências no ritmo e norma habitual de apresentação da mensagem audiovisual que distinguem a televisão do vídeo.

Assim, os docentes devem dominar esse recurso, o que permitirá a eles evitar abordagens inadequadas que, de acordo com Moran (1995), acontecem quando: utilizado para cobrir a ausência do professor; os vídeos fogem do conteúdo e do contexto da matéria; apenas esse tipo recurso é utilizado para ministrar o conteúdo, sem discussões sobre ele. Este autor também afirma que essas práticas desvalorizam o uso do vídeo, diminuem a sua eficácia e provocam empobrecimento das aulas. Ademais, para o aluno, o uso do vídeo pode passar a ser equivocadamente associado à falta de aula, passatempo ou falta de conteúdo para a disciplina trabalhada.

Compreende-se, assim, que o uso do vídeo como recurso educacional é possível; porém, sua inserção em sala de aula exige uma formação adequada por parte dos professores. Por isso, a necessidade de que os vídeos permeiem também a formação docente, a fim de que estes sujeitos tenham subsídios que os permitam realizar essa inserção, mas com qualidade.

3.2.2 O Vídeo no Ensino da Matemática

O vídeo é instrumento para o ensino e favorece a aprendizagem, na medida em que ele conjuga diversos recursos, como som, imagem e movimento, e, assim, ele pode chamar a atenção dos alunos, contribui para a didática do professor, facilita a interação entre professor e aluno e serve de instrumento para promoção de debates. Sua utilização, de forma contextualizada, valoriza e destaca a comunicação por meio dos elementos de imagens e som, estimulando a imaginação, a visualização e a abstração dos alunos (ROCATO, 2009).

Sendo essa uma estratégia que pode auxiliar na atribuição de significado aos conteúdos matemáticos, visto que o vídeo:

> [...] enfatiza o componente visual da matemática, mudando o status da visualização em Educação Matemática. (...) A mídia usada para comunicar, representar e produzir ideias matemáticas condiciona o tipo de matemática que é feita e o tipo do pensamento que está sendo desenvolvido neste processo. Ao mesmo tempo, o processo de visualização atinge uma nova dimensão se considerar um ambiente computacional de aprendizagem com um coletivo pensante particular, onde estudantes, professores/pesquisadores, mídia e conteúdos matemáticos residem juntos. (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 96; apud MACHADO, 2011).

Desse modo, o componente visual permite a reprodução de ideias matemáticas que auxiliam para a assimilação do conteúdo que está sendo abordado no vídeo. Rocato (2009, p. 86) contribui com essa perspectiva ao afirmar que:

> [...] a utilização de vídeos nesse processo de ensino e aprendizagem de Matemática pode facilitar sua desmistificação para os alunos, através das imagens, sons, interpretação, simulação e modelagens matemáticas, presentes nos vídeos existentes que abordam o ensino da Matemática e que podem extrapolar as relações, transitando por outras disciplinas ampliando e potencializando a construção do conhecimento matemático.

Nesse sentido, ele destaca que o uso do vídeo, se bem planejado, pode possibilitar aos discentes a visualização de uma Matemática dinâmica, contextualizada, viva, transformando o ambiente passivo em um ambiente ativo, na medida em que permite o desenvolvimento de uma nova postura frente ao ensino e à aprendizagem da Matemática, isto é, as atitudes deixam de ser de passividade e passam a ser de participação e interação.

Para Moran (2009), esse uso é um novo meio para o ensino da Matemática, que tem ocorrido, muitas vezes, de forma mecanizada e tradicional. Desta maneira, esse recurso didático apresenta-se como instrumento de mudanças nesse paradigma. Isso vai ao encontro do que defendem os PCN (BRASIL, 1997), os quais apresentam o entendimento de que as novas tecnologias são um recurso para se ensinar matemática, apesar do vídeo não ser um recurso tão novo, ainda assim, pode ser um mecanismo no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

A partir dessas reflexões, entende-se que o uso pedagógico do vídeo nas aulas de Matemática pode auxiliar na exploração dos diversos conceitos matemáticos, pois por meio dele é possível integrar habilidades sensoriais que representam e produzem ideias matemáticas. Logo, este recurso torna-se o meio pelo qual o professor poderá trabalhar os conteúdos de forma não tradicional, mas para que isso ocorra ele deve estar preparado para seu uso.

Cabe salientar que a utilização de ferramentas tecnológicas na Educação Matemática não é tarefa fácil e exige muito do professor, sem falar na disponibilidade dos recursos pela escola. No entanto, para usufruir das tecnologias, é necessário acima de tudo ter conhecimento sobre ela e planejamento da aula. Em se tratando do vídeo, o professor precisa conhecer seu conteúdo e planejar em que momento e de que forma ele será utilizado na aula de matemática.

3.3 O VÍDEO DIDÁTICO E A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA RELAÇÃO POSSÍVEL

Com vistas às ideias já explicitadas, entende-se que a inserção de qualquer tecnologia na educação exige uma alteração no papel que os professores exercem no ensino tradicional, por isso alguns desses papéis tendem a desaparecer, como o de transmissor de informações, e reforçar outros, como o de avaliador e criador de situações de aprendizagem. Por conseguinte, o professor deixa de ser o portador soberano das informações e passa a ser facilitador da aprendizagem, ao invés de um mero instrutor (CURY; MOTTA, 2008).

Para tanto, cabe ao educador gerar e produzir recursos didáticos, de modo a possibilitar a aprendizagem dos conceitos matemáticos. Um desses recursos, como já se destacou, pode ser o vídeo didático que, segundo Machado (2011), pode desempenhar influências positivas no ensino, pois o aspecto lúdico, devido às cores dos desenhos, do movimento, do som, as descobertas, às invenções, podem possibilitar uma melhor compreensão dos conceitos explorados.

De acordo com Cury e Motta (2008), Machado (2011), Machado e Mendes (2013), Costa (2015), entre outros pesquisadores, os vídeos podem ser aliados a outros recursos didáticos, dentre eles a História da Matemática. No que diz respeito a essa ideia, Machado e Mendes (2013, p. 63) fazem a seguinte ponderação:

> [...] defendemos a utilização de instrumentos tecnológicos como ferramentas de mediação dos conceitos matemáticos abordados através da História da Matemática, como o vídeo, por exemplo, mas outras formas de mídia podem ser usadas e manipuladas tanto por professores como por alunos.

Nesse sentido, eles destacam a possibilidade de se aliar a História da Matemática às tecnologias, inclusive os vídeos, os quais podem ser explorados na formação dos alunos e, também, na formação docente. Seguindo esta ideia, Cury e Motta (2008, p. 93) apresentam o entendimento de que:

> Os elementos históricos nela inseridos e o uso de recursos tecnológicos podem ser combinados de variadas formas, que dependem, apenas, da imaginação do professor. Assim, acreditamos que o apelo à fantasia, com sólido embasamento histórico, matemático e técnico, é uma das maneiras de elaborar atividades para o trabalho com cursos de formação inicial ou continuada de professores.

Nesse âmbito, os autores defendem que esta relação é algo possível e que pode contribuir para formação dos docentes, no que diz respeito à compreensão dos conceitos matemáticos e isso pode ajudar sua prática em sala de aula.

Moran (1995) ressalta que o aspecto visual do vídeo está situado no presente, mas que o interliga não linearmente com o passado e com o futuro, o que pode propiciar uma compreensão muito ampla dos aspectos históricos explorados, pois permite fazer relações entre os tempos. Machado (2011, p. 77) contribui com essa ideia, ao afirmar que:

> [..] o fator histórico, por despertar a atenção e curiosidade dos alunos, deve ser fundamental para o esclarecimento dos fatos e problemas que, no decorrer da nossa história, despertaram interrogações e empenho dos homens na tentativa de sua organização sistemática e divulgação até o modelo atual. Esse enfoque é fundamental (...) base para a elaboração das video-aulas e poderá levar o aluno a um diálogo interativo com os aspectos multidisciplinares e transversais da Matemática investigativa.

Concernente a essas reflexões, compreende-se que o uso da História da Matemática a partir do vídeo pode trazer resultados positivos para aprendizagem da Matemática, à medida que a história é fonte de ideias que podem possibilitar uma compreensão substantiva das regras e dos aspectos conceituais e das regras ligados aos conteúdos, como já se destacou. Para tanto, Costa (2015, p. 5) defende que:

> Para o resgate histórico dessa disciplina o professor pode realizá-lo por narrativas dos fatos ou pode apresentá-los em forma de vídeo. A popularização dos recursos de vídeo tem colocado os educadores a refletir sobre o potencial didático-pedagógico do uso dessa mídia em sala de aula. As televisões tornaram-se cada vez mais perfeitas na resolução de imagens. Também os aparelhos de reprodução tiveram seus aprimoramentos, como o vídeo cassete, DVDs... À medida que a imagem se aperfeiçoa, tanto na transmissão quanto na qualidade de imagem, as produções de documentários, filmes, programas de entrevistas, séries de TV e outras, ganham qualidade e quantidade de unir o filme como um recurso didático ao ensino, sobretudo da Matemática.

Por isso, acredita-se que esses elementos possam ser explorados em vídeos didáticos, sendo esta uma estratégia que pode possibilitar uma compreensão, baseada na reflexão, dos conceitos matemáticos a serem abordados, o que pode favorecer ações positivas frente a aprendizagem.

4 AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS: DO CONTEXTO HISTÓRICO À INSERÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

> Foi um verdadeiro ato de criação que fez surgir a geometria não euclidiana, mas a palavra que a fez surgir foi a palavra não. A negação é criadora. Pela partícula "não" se realiza a conjunção histórica dos dois sistemas. Para a geometria não euclidiana corresponde uma estrutura evolutiva não euclidiana na qual, sob sua forma antieuclidiana, o não-ser precede o ser, o contra vem antes do pró. Ela postula o impossível sob a forma de um discurso mentiroso e o transforma em realidade e em verdade.
>
> Imre Toth (2011, p. 51)

Esta seção traz uma discussão a respeito das geometrias não euclidianas, apresentando uma reflexão histórica sobre sua criação. Destacam-se Euclides e sua história, sua obra *Os Elementos*, o quinto postulado de Euclides ou postulado das retas paralelas, as indagações que perduraram por cerca de vinte séculos e os principais matemáticos que fizeram tamanha criação; também são elencadas as perspectivas de alguns pesquisadores sobre a inserção deste tópico na Educação Básica, bem como os documentos que a norteiam e defendem o ensino desse tópico e, por fim, relata-se uma investigação desenvolvida com professores que atuam nesse segmento sobre suas compreensões e saberes a respeito das geometrias não euclidianas.

4.1 DE EUCLIDES E *OS ELEMENTOS* À CRIAÇÃO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Nesta subseção, apresenta-se uma reflexão histórica sobre as geometrias não euclidianas, considerando as perspectivas de vários historiadores, pois, conforme destaca Koyré (1973, p.379), “cada historiador projeta na história os interesses e a escala de valores do seu tempo, e é de acordo com as ideias do seu tempo e com suas próprias ideias que compreende a sua reconstrução”. Verifica-se, assim, que, ao realizar a reconstrução, o historiador, intrinsecamente influenciado pelos valores pessoais, renova e torna a história mais viva, fazendo suas escolhas e levando em consideração o objetivo a ser alcançado (RIBEIRO, 2012). Por conseguinte, a partir dessas reconstruções buscou-se desenvolver um estudo histórico a respeito das geometrias não euclidianas, no intuito de levar tais elementos para o contexto da formação de professores de Matemática, por meio de vídeos didáticos e atividades.

Além disso, deve-se ponderar que não somos historiadores, mas nos propomos a realizar um olhar histórico sobre estas geometrias, na tentativa de que os professores utilizem História da Matemática como parte integrante de suas aulas, garantindo o que propõem as DCE (PARANÁ, 2008) para o ensino de Matemática na Educação Básica.

Destaca-se que este estudo foi realizado de modo que possibilitasse a seleção ou recorte de episódios históricos que pudessem ser transformados em vídeos.

4.1.1 Euclides e Os Elementos

Falar sobre Euclides é algo um tanto curioso, pois não se sabe ao certo se ele realmente existiu, isto é, não se sabe se Euclides foi uma pessoa, uma escola ou uma entidade, entre tantas outras dúvidas que cercam essa figura histórica. Conforme Tomei (2006), esse nome está vinculado a uma entidade que existiu na Antiguidade; já para alguns historiadores, como Ávila (2001), Eves (2004) e Nobre (2009), Euclides realmente existiu e teria vivido entre 325 a.C. e 265 a.C. na cidade egípcia de Alexandria, sendo professor e pesquisador da Biblioteca e do museu de Alexandria. Essa biblioteca se tornou o maior centro de discussão e disseminação da Matemática, da Filosofia e da Ciência, além de ser considerada o primeiro espaço mundial de pesquisas, um local de estudos para os principais pensadores do período. Ela foi fundada por volta de 300 a.C. por Ptolomeu I Sóter e chegou a conter 500 000 volumes de todos os campos do conhecimento, mas muitas obras se perderam ao longo do tempo por causa das guerras, restando apenas uma parte intacta até o século quarto de nossa era (KATZ, 2011).

De acordo com Katz (2011, p. 75), um dos únicos documentos existentes que mencionam tal matemático é comentário de Proclo (410-485):

> [...] veio Euclides, que trouxe os Elementos, sistematizando muitos dos teoremas de Eudoxo, aperfeiçoando muitos dos de Teeteto, e colocando em forma irrefutavelmente demonstrável proposições que tenham sido

> estabelecidas descuidadamente pelos seus antecessores. Viveu no tempo de Ptolomeu I, pois Arquimedes, que viveu depois do tempo do I Ptlomeu, menciona Euclides.

Tal comentário data de aproximadamente 750 anos após a morte de Euclides. Nele Proclo afirma que Euclides realmente existiu e em qual época, mesmo com essa evidência da existência de Euclides as informações sobre ele são praticamente inexistentes. Como destaca Eves (2011, p. 167), ao dizer que “é desapontador, mas muito pouco se sabe sobre a vida e personalidade de Euclides”, porém, mesmo com todas essas dúvidas, ele é considerado como um dos maiores nomes na História da Matemática. Segundo historiadores como Katz (2011) e Nobre (2002), ele teria vivido a maior parte de sua vida investigando e ensinando a Geometria, sendo possivelmente formado pela Escola Platônica de Atenas.

Euclides, enquanto professor e pesquisador da biblioteca de Alexandria, foi autor de uma das maiores obras da Matemática, também considerada um dos textos matemáticos mais importantes da época grega, escrito, há cerca de 2300 anos, chamada de *Os Elementos*. Esta foi traduzida para inúmeras línguas, e tem sido continuamente publicada desde o surgimento da imprensa, dentre elas a cópia mais antiga que se tem notícia, que teria sido publicada por Théon de Alexandria – um estudioso do século IV que traduziu e editou a obra – e, segundo Katz (2011), todas as traduções anteriores a 1814 foram baseadas nessa.

Não se tem registros que datam a época em que essa obra foi escrita. Katz (2011) aponta que é possível que ela tenha sido escrita no século IV a.C.; contudo não existem quaisquer cópias datando esse período. Esta coleção tem um valor histórico muito importante, visto que sua produção foi realizada no decorrer da Antiguidade, um período rico de desenvolvimento da cultura grega, como Bicudo (2009, p. 16) ressalta ao dizer que “a história de *Os Elementos* se confunde, em larga escala, com a história da Matemática grega”.

Eves (2004) pondera que nenhuma outra obra, exceto a bíblia, foi tão estudada quanto *Os Elementos*. A Figura 1 mostra a folha de rosto da primeira versão inglesa de *Os Elementos*:

Figura 1 - Folha de rosto da primeira versão inglesa de *Os Elementos*

Fonte: Ávila (2001 apud NASCIMENTO, 2013, p. 39)

Os Elementos é uma coleção de treze livros, mas não é uma obra unificada. Sua estrutura interna se caracteriza por um compêndio, que foi organizado por Euclides a partir de muitas obras existentes sobre várias áreas da Matemática incluídas em seu trabalho. Ela é composta por textos que versam sobre a álgebra e aritmética, além da própria geometria. Nela se encontram cerca de 465 proposições. Seus volumes foram divididos da seguinte forma: os volumes I, III, IV, XI, XII e XIII versam sobre a geometria plana e espacial; o volume II fala sobre as transformações de áreas e a álgebra geométrica da escola pitagórica; o volume V trata de uma exposição da Teoria das Proporções de Eudoxo, que culminou na criação dos números irracionais pelos pitagóricos; os volumes VII e VIII trazem uma abordagem da teoria dos números, apresentando o algoritmo euclidiano, o Teorema Fundamental da Aritmética e as progressões geométricas; o volume IX traz a prova da infinitude dos números, por meio da redução ao absurdo; o volume X fala sobre os números irracionais, dando crédito a Teeteto, mas teve as contribuições de Euclides (NASCIMENTO, 2013).

Com esse trabalho, Euclides se transformou em uma das pessoas mais influentes da Matemática, que axiomatizou a geometria plana e a fundamentou a partir de cinco postulados que são apresentados posteriormente.

Todavia, cabe destacar que *Os Elementos* não é a única produção que leva o nome de Euclides, outras obras são atribuídas a ele, as quais versam sobre a Matemática, entre elas podem ser citadas: *Os Dados, Pseudaria, Cônicas, Divisão de Figuras* e *Porísmas*, além de livros que falam sobre a Matemática aplicada, como *Os Fenômenos* e a *Óptica*, entre outros trabalhos (NASCIMENTO, 2013).

4.1.2 O Quinto Postulado de Euclides e as Tentativas de Prova

É no primeiro dos treze livros de *Os Elementos* que se encontram os famosos postulados que deram forma à "Geometria Euclidiana Plana" ou "Geometria Plana", que são:

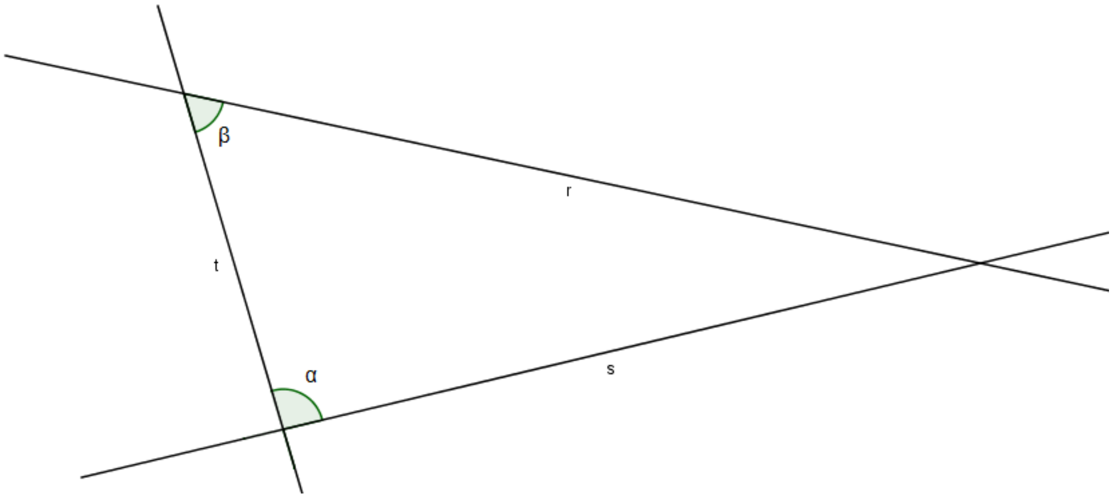
> I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando dois pontos.
> II. Pode-se prolongar (de uma única maneira) uma reta finita continuamente em uma linha reta.
> III. Pode-se traçar um círculo com centro qualquer e raio qualquer.
> IV. Todos os ângulos retos são iguais.
> V. Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos (BICUDO, 2009, p. 98).

Katz (2011) afirma que o quinto postulado tornou-se o alvo de críticas no tempo de Euclides, principalmente pela falta de simplicidade. Outro fato interessante é que o próprio Euclides aparenta evitar no decorrer de seu trabalho esse postulado. Como relata Brito (1995), Proclo, um grande comentarista de *Os Elementos* no século V, percebeu que as 28 primeiras proposições do trabalho (de 465 no total) são demonstradas sem empregá-lo, sendo que algumas seriam facilmente demonstradas se o quinto postulado fosse utilizado.

No ano de 1975, John Playfair apresenta, em sua obra *Elementos da Geometria*, uma outra forma de enunciar o quinto postulado, que ficou conhecido como Postulado das Paralelas: por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada (BARBOSA, 2011). Não há problema em assim enunciá-lo, pois essas proposições são equivalentes. E não parou por aí, anterior e posteriormente, esse postulado foi reescrito de diversas formas, mostrando que esse não era óbvio. Todavia, sem ele não apareceriam outras proposições ou conceitos matemáticos, como a da soma dos ângulos internos de um triângulo, a semelhança de figuras, e, assim sendo, não poderia existir a trigonometria (NASCIMENTO, 2013).

Como já mencionado, o quinto postulado foi enunciado por Euclides da seguinte forma: “Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos” (BICUDO, 2009, p. 98). Esta ideia está apesentada na Figura 2:

Figura 2 - O quinto postulado de Euclides (Postulado das paralelas)



Fonte: Ribeiro (2012, p. 36)

Muitos foram os matemáticos que se dedicaram a tentar provar esse postulado, o que perdurou por cerca de 2000 anos sem nenhum sucesso. Para Mlodinow (2004, p. 46), o postulado das paralelas “não era suficientemente simples para um postulado, e deveria ser demonstrável como um teorema”, assim ele conclui que essa falta de simplicidade deve ter sido um dos principais motivos pelos quais diversos estudiosos tentaram prová-lo. Apresentam-se, a seguir, alguns desses matemáticos.

Ptolomeu I foi um dos matemáticos que enveredaram nesta tentativa, que é citada em um dos comentários de Proclo sobre o livro I de *Os Elementos:* “ele (o quinto postulado da Geometria Euclidiana) deveria ser retirado completamente da redação dos postulados, pois é um teorema difícil, o qual Ptolomeu propôs-se a demonstrar” (PRESMIC, 2014, p. 12). O principal argumento dele era o de que se uma reta intercepta outra reta, então ela interceptará todas as retas paralelas a essa.

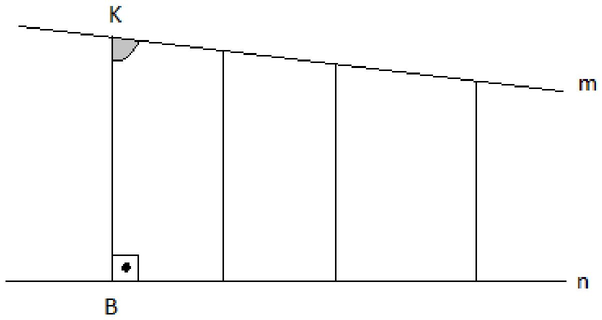
O matemático, filósofo e historiador Proclo também tentou prová-lo, além de mostrar alguns equívocos nas demonstrações de Ptolomeu I. A fim de realizar tal prova, ele propôs que as retas paralelas fossem equidistantes, mas esse argumento era equivalente ao quinto postulado e por isso não conseguiu (BRITO, 1995).

Muitos árabes também tentaram provar. Dentre eles, destaca-se Nasir Eddin All Tusin, editor de uma das versões em árabe de *Os Elementos,* que em sua tentativa propôs o seguinte axioma:

> Sejam *m* e *n* duas retas, *A* um ponto de *m* e *B* um ponto de *n*, tais que *AB* é perpendicular à *n* e forma um ângulo agudo com *m*. Então as perpendiculares baixadas de *m* à reta *n*, do lado do ângulo agudo, são menores do que *AB* e as que ficam do outro lado são maiores do que *AB”* (BARBOSA, 1995, p. 21)

Que também é equivalente ao quinto postulado. Uma representação deste axioma está apresentada na Figura 3:

Figura 3 - Representação do axioma proposto por Nasir



Fonte: O Autor

Ele não conseguiu realizar tal prova; porém, a partir de outros estudos e tentativas ele conseguiu provar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º (BARBOSA, 1995).

Já John Wallis não utilizou a ideia de equidistância entre retas, que foi empregada por outros matemáticos, como Proclo. Ele empregou a seguinte ideia: “dado um triângulo, é possível construir um outro que lhe é semelhante, com lados arbitrariamente grandes” (BARBOSA, 2002, p. 27). Contudo, essa era outra forma de se reescrever o quinto postulado e, por isso, não conseguiu prová-lo.

O padre jesuíta Girolamo Saccheri deu uma grande contribuição para o estudo do postulado das paralelas, suas ideias foram publicadas em um livro *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides, sem qualquer falha) no ano 1733. Sua tentativa de prova teve como base a redução ao absurdo, que consiste em assumir a falsidade da proposição e, caso haja alguma contradição durante a demonstração, conclui-se que proposição é verdadeira. No entanto, ele não conseguiu encontrar contradições e isso lhe causou muita estranheza, mesmo assim ele desconsiderou suas criações. Porém, se ele tivesse percebido que não havia contradições a serem encontradas, teria criado um século antes as geometrias não euclidianas (BARBOSA, 1995). Mais adiante, será tratada tal tentativa.

Adrien Marie Legendre, um matemático francês, também se dedicou a estudar e provar o quinto postulado. Ele tentou realizá-la de várias formas, em uma delas ele utilizou ideias muito parecidas com as de Saccheri, tendo como base a soma dos ângulos internos de um triângulo, considerando três hipóteses: a soma pode ser 180º, maior que 180º ou menor que 180º (NASCIMENTO, 2013).

Esses foram alguns dos inúmeros matemáticos que se dedicaram a esse estudo; porém, todos falharam em suas tentativas. De acordo com Barbosa (2011, p. 33), isso aconteceu pelo fato de que, “em geral, elas utilizavam de argumentos equivalentes ao próprio quinto postulado, tornando as provas inválidas”.

Outro fator a ser considerado é que alguns dos matemáticos deste período, mesmo fracassando em suas tentativas, chegaram à conclusão de que o quinto postulado se tratava de um teorema e não de um postulado, assim Euclides estaria equivocado.

Foram esses alguns dos questionamentos iniciais que culminaram na criação das geometrias não euclidianas.

4.1.3 A Criação das Geometrias Não Euclidianas

Conforme se destacou na subseção anterior, desde o momento em que Euclides apresentou seus postulados, o quinto postulado chamou a atenção de diversos matemáticos, que, durante muitos séculos, dedicaram-se a estudá-lo buscando estratégias para tentar prová-lo, o que não foi possível. Eles chegaram em muitos resultados, até então, desconhecidos, faltando a formalização do que hoje se conhece como geometrias não euclidianas, o que aconteceu algum tempo depois. Momento no qual foi possível compreender que o quinto postulado, além de não poder ser provado, poderia ser negado sem que contradições acontecessem (BARBOSA, 2011).

Segundo Eves (2004, p. 540), “a primeira investigação realmente científica do postulado das paralelas só foi publicada em 1773 e seu autor é o jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667-1733)”. Depois, veio Joahnn Heinrich Lambert (1729-1777) e, por fim, Legendre (1752-1833), que, de acordo com Eves (2004), foi o último a tentar provar o quinto postulado.

Logo depois, vieram outros matemáticos que nasceram no mesmo século, que, considerando o quinto postulado como um axioma, chegaram a resultados revolucionários que culminaram na criação das geometrias não euclidianas. Os créditos desta criação são dados a três matemáticos de grande renome na História da Matemática: Nikolay Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) e Cal Friedrich Gauss (1777-1855). Eles realizaram inúmeros questionamentos e reflexões que permitiram tamanha criação (KATZ, 2011).

O húngaro János Bolyai era oficial do exército e sua relação com a Matemática vinha a partir de seu pai, o também matemático Farkas Bolyai, que era professor universitário. De acordo com Struik (1989), Farkas dedicou tanto tempo aos estudos sobre o postulado das paralelas que, ao ver seu filho seguindo o mesmo caminho, lhe escreveu uma carta, no ano de 1820, pedindo-lhe que abandonasse aquele estudo e que, então, se dedicasse a estudar outros temas. Struik (1989, p. 270) traz um trecho dessa carta:

> Devias detestar tanto isso como as coisas perversas, que te podem privar de todo lazer, na tua saúde, do teu descanso e de toda alegria da tua vida. Esta escuridão insondável podia talvez destruir um milhar de poderosos Newtons, sem nunca haver luz na Terra.

Mesmo com estas indicações, Bolyai prosseguiu em seus estudos, e, de acordo com Eves (2004, p. 542), acabou compreendendo que havia uma harmonia no quinto postulado de Euclides, realizando, assim, várias criações, ficando tão entusiasmado que escreveu a seu pai, por volta de 1823, dizendo que havia criado “um universo novo e estranho”. Farkas ficou admirado com os feitos de seu filho, que ao responder a carta, propôs a ele que publicasse aquelas ideias como apêndice de seu livro, pois, segundo Farkas, “muitas coisas têm uma época na qual elas são criadas em vários lugares e ao mesmo tempo, assim como violetas aparecem por todos os lados na primavera” (GARBI, 2010, p. 345).

Bolyai cumpriu as indicações de seu pai e o livro que continha esse apêndice foi publicado em 1832. Apesar de todo os seus feitos, este foi seu único trabalho de destaque, mesmo escrevendo outros manuscritos que caracterizavam as geometrias não euclidianas.

Um contemporâneo de Bolyai, Nicolai Lobachevsky, que foi professor e reitor da Universidade de Kazan na Rússia, foi o primeiro a publicar um artigo sobre as geometrias não euclidianas, em meados de 1829. No entanto, esse artigo não recebeu muita atenção, talvez pelo idioma em que foi escrito, o russo (EVES, 2004) e também publicou outros artigos e 1835, 1836 e 1837, mas, da mesma forma que ocorreu com o primeiro, não foi dada tanta importância para eles. Onze anos depois, Lobachevsky publicou um livro, em alemão, intitulado *Investigações Geométricas Sobre a Teoria das Paralelas*, e no ano de 1855 publicou outro artigo, em francês, chamado *Pangeometria* (NASCIMENTO, 2013).

Neste período, pouco se tinha de informações sobre essas geometrias, além disso, o conhecimento produzido a respeito desta temática espalhava-se lentamente. Em consequência disso, Lobachevsky não conseguiu desfrutar dos méritos de sua obra, a qual só foi reconhecida após sua morte (RIBEIRO, 2012).

No que diz respeito ao alemão Gauss, conhecido como o príncipe da Matemática, desde a sua infância era considerado como uma criança prodígio e não demorou muito tempo até que se tornasse professor universitário. Gauss estudou e escreveu sobre diversos ramos da Matemática, como aritmética, álgebra e geometria (RIBEIRO, 2012). Ele era amigo de Farkas, pai de Bolyai, que ao descobrir sobre os feitos de seu filho envia uma carta a Gauss, mencionando a criação de uma nova geometria. Ao responder a carta, Gauss afirma que já havia pesquisado sobre o assunto, todavia não havia publicado suas ideias (NASCIMENTO, 2013).

A partir da apresentação das geometrias não euclidianas, por Lobachevsky em 1829 e por Bolyai em 1832, ficou provado que o postulado das paralelas não era válido em outros contextos, comprovando-se, assim, que existiam outras geometrias diferentes da até então estudada, as geometrias não euclidianas, que discordavam em alguns elementos da euclidiana, mas a respeitava (NASCIMENTO, 2013).

A partir desta criação, as dúvidas que se tinha, até então, a respeito dos postulados das paralelas, que perduraram por séculos, foram sanadas, pois ficou provado que ele era independente dos outros quatro postulados (RIBEIRO, 2012).

De acordo com Eves (2004, p. 544):

> Com a possibilidade de inventar geometrias puramente “artificiais”, tornou-se evidente que o espaço físico devia ser visto como um conceito empírico derivado de nossas experiências exteriores e que os postulados da geometria, formulados para descrever o espaço físico, são simplesmente expressões dessas experiências, com leis de uma ciência física.

Mediante tais fatos, conclui-se que as geometrias não euclidianas revelaram a Matemática como uma ciência em construção, assim, novas teorias e conceitos podem ser criados, mesmo que desconsertem aquilo que já é dado como certo, verdadeiro e único, o novo na Matemática sempre acontece, tornando-a viva, como uma ciência em constante evolução.

Na próxima subseção, apresenta-se mais detalhadamente as ideias que foram criadas por esses e outros matemáticos, entre outros elementos que permearam a construção das geometrias não euclidianas.

4.1.4 Alguns Matemáticos e suas Criações

Por meio de diversas criações, ficou provado que os cinco postulados de Euclides eram independentes entre si. Assim, definiu-se que toda geometria que não satisfaça um dos cinco postulados de Euclides seja considerada como uma geometria não euclidiana (BARBOSA, 2011).

Dentre as geometrias não euclidianas é possível citar: a geometria hiperbólica, a geometria fractal, a geometria elíptica, a geometria do motorista de táxi, a geometria projetiva, entre tantas outras que tornam esse campo muito rico em aplicações e discussões matemáticas (KATZ, 2011). Contudo, neste trabalho, não se abordam todas elas, devido à gama de conceitos envolvidos em cada uma delas. Por isso, esta subseção busca refletir sobre como se deu o surgimento de alguns conceitos referentes a essas geometrias, dando destaque às geometrias hiperbólica e elíptica[12], partindo das criações de alguns matemáticos.

4.1.4.1 Saccheri

Como já se destacou, Saccheri (1667-1733) foi um dos grandes estudiosos e pesquisadores do quinto postulado de Euclides. Em seus trabalhos, ele faz inúmeras críticas às tentativas de prova do quinto postulado de Euclides feitas por Wallis e de Nasir al-Din Tusi e, assim, tenta atestar que este postulado seria uma consequência dos quatro primeiros postulados (KATZ, 2011).

Em sua tentativa de prova, ele propõe um quadrilátero que possui dois lados opostos congruentes e perpendiculares à mesma base, como mostra a Figura 4.

Figura 4 - Quadrilátero de Saccheri

Fonte: Ribeiro (2012, p. 40)

Ele se dedicou a investigar os outros dois ângulos, no intuito de provar que eles também eram retos, caso conseguisse estaria provado o quinto postulado de Euclides; porém a hipótese empregada era equivalente a ele (BARBOSA, 2011).

De acordo Barbosa (2011), ele conseguiu provar que esses dois ângulos eram congruentes, logo se dedicou a investigar a medida desses ângulos, que a princípio tinha três hipóteses possíveis: serem obtusos, serem agudos ou serem retos. Tais hipóteses estão ilustradas na Figura 5:

[12] Foram as geometrias escolhidas para serem exploradas nos vídeos e nas atividades propostas.

Figura 5 - As três hipóteses para o quadrilátero de Saccheri

Fonte: Ribeiro (2012, p. 41)

Para tanto, ele assumiu como verdadeiras as hipóteses de os ângulos serem agudos e de os ângulos serem obtusos, e, por contradição, queria provar que a única hipótese possível era a do ângulo reto – dessa maneira estaria provado o quinto postulado. Facilmente, ele conseguiu provar que a hipótese dos ângulos obtusos era falsa, já que era incompatível com os outros quatro postulados; faltava, então, descartar a hipótese de os ângulos serem agudos. Só que ele acabou chegando à conclusão de que esta poderia ser verdadeira, mas desconsiderou tal resultado, pois contradizia a natureza da reta (KATZ, 2011).

Outro fator a ser considerado é que, nestas tentativas, Saccheri conseguiu demonstrar inúmeros teoremas da geometria hiperbólica e não achou nenhuma contradição nessas demonstrações, relatando ter conseguido se deparar com muitos fatos “estranhos”. Ele divulgou essas criações na obra *Euclides Vindicatus* e, em suas conclusões, ao falar de sua tentativa de prova do quinto postulado, ressalta que seus resultados se contrapõem à geometria euclidiana (RIBEIRO, 2012).

Apesar de seus feitos, Saccheri é considerado apenas como precursor das geometrias não euclidianas, pois não admitiu que suas ideias eram válidas em outras geometrias, além de não propor uma negação ou substituição para o quinto postulado de Euclides, como fizeram outros matemáticos (NASCIMENTO, 2013).

4.1.4.2 Lambert

O matemático Johann Heinrich Lambert (1728-1777) ao tentar provar a quinto postulado, também propôs três hipóteses muito parecidas com Saccheri, para um quadrilátero. Atualmente, muitos historiadores acreditam que Lambert teve contato com as ideias de Saccheri e as utilizou como fonte para seus estudos, devido às várias coincidências, todavia, não há certezas, como destaca Bonola (1955).

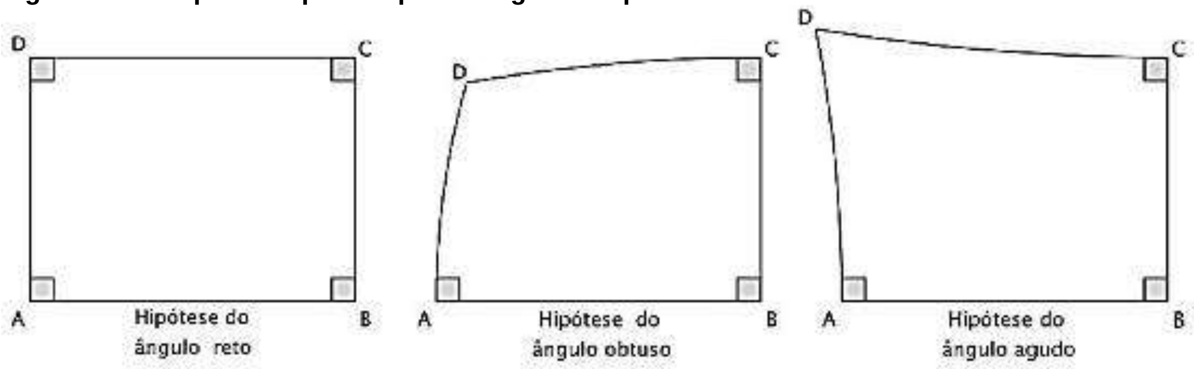
A proposta de Lambert levava em consideração um quadrilátero que possuía três ângulos retos e se dedicou a estudar o quarto ângulo, visto que, se fosse provado que este também era reto, então o postulado das paralelas estaria provado. Rosenfeld (1988) destaca que esse quadrilátero já havia sido empregado nas tentativas de prova do quinto postulado pelo egípcio Ibn al Haytham (965-1041).

Figura 6 - O quadrilátero de Lambert

Fonte: Ribeiro (2012, p. 47)

Assim como Saccheri, Lambert considerou três hipóteses para o quarto ângulo desse quadrilátero: ser agudo, ser obtuso ou ser reto, como ilustra a Figura 7:

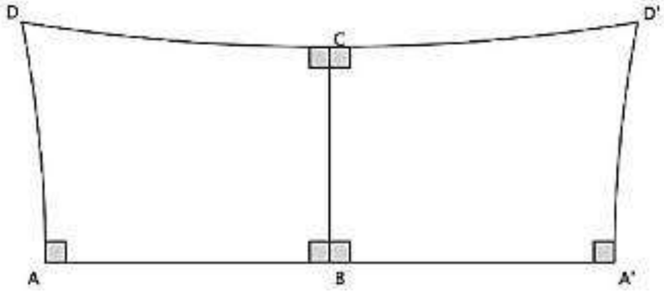
Figura 7 - As hipóteses para o quarto ângulo do quadrilátero de Lambert



Fonte: Ribeiro (2012, p. 47)

Nascimento (2013) destaca que é possível demonstrar que tais hipóteses são equivalentes às de Saccheri, bastando considerar uma perpendicular passando pelo ponto médio da base do quadrilátero de Saccheri, encontrando, assim, dois quadriláteros de Lambert congruentes, como mostra a Figura 8:

Figura 8 - O quadrilátero de Lambert partir do quadrilátero de Saccheri



Fonte: Ribeiro (2012, p. 48)

Nesse sentido, todos os teoremas que são demonstrados a partir do quadrilátero de Saccheri podem ser provados a partir do quadrilátero de Lambert e, assim, a hipótese do ângulo obtuso não é válida para este quadrilátero, além disso, as outras duas hipóteses são inconsistentes entre si. No entanto, Lambert chega a essas conclusões por outros meios, desconsiderando a equivalência entre esses quadriláteros.

Sobre tal matemático, Ribeiro (2012) afirma que uma de suas principais contribuições para as pesquisas que vieram posteriormente, em relação às geometrias não euclidianas, foi em relação à hipótese de o ângulo obtuso ser válida quando considerada a superfície de uma esfera. Em outras palavras, ele percebeu que não era possível encontrar contradição nessa hipótese se fosse considerada como reta uma circunferência máxima em tal superfície, além de estudar algumas propriedades envolvendo os triângulos esféricos, ideias as quais, mais tarde, foram exploradas por Riemann e que são apresentadas mais adiante.

Nascimento (2013) também destaca que Lambert chegou muito próximo das ideias criadas por Lobachevsky. Em sua investigação sobre o quinto postulado, nunca chegou a uma contradição para a hipótese do ângulo agudo, até que em certo momento ele conclui que poderia ser considerada uma esfera de raio imaginário, na qual essa hipótese também seria válida, antecipando a existência de uma figura que hoje é conhecida como pseudoesfera[13]. Mesmo com tais constatações, ele acreditou ter encontrado uma contradição para tal hipótese, achando, assim, ter provado o quinto postulado de Euclides.

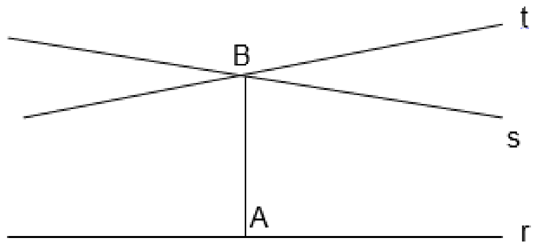
[13] Apresenta-se mais adiante esse conceito.

4.1.4.3 Lobachevsky

O russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856) foi o primeiro a publicar algo sobre as geometrias não euclidianas, em meados de 1829. Neste trabalho, ele propunha uma substituição para o quinto postulado de Euclides pela sua negação, sem tentar prová-lo (EVES, 2004). Nesse trabalho, ele apresentou uma nova geometria, a qual chamou de geometria imaginária e, mais tarde, atribuiu o nome de pangeometria (GREENBERG, 1994). Devido à língua em que foi publicada, o russo, sua obra não teve grande destaque e, além disso, os maiores centros de pesquisas matemáticas desse período estavam no ocidente. Assim, no ano de 1840, ele publicou um tratado em alemão – o que deu mais visibilidade a seu trabalho (RIBEIRO, 2012; EVES, 2004).

Em seu estudo, Lobachevsky propôs que o quinto postulado fosse substituído pelo seguinte: por um ponto fora de uma reta dada, passa mais de uma reta paralela que não intercepta a primeira (BONOLA, 1955). Em síntese, ele admitiu que existiam, no mínimo, duas retas paralelas a essa reta, como ilustra a Figura 9:

Figura 9 - Retas paralelas segundo Lobachevsky



Fonte: O Autor

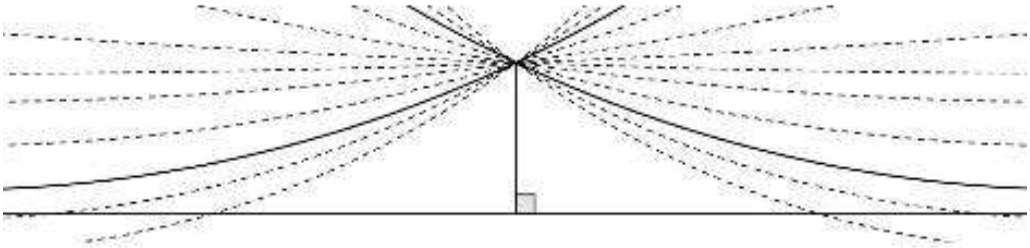
A partir desse postulado, ele define como retas não secantes as que não interceptam a reta *r*, e como retas paralelas à primeira reta aquelas que não interceptam a reta *r* (RIBEIRO, 2012). Como mostra a Figura 9, as retas *s* e *t* são paralelas a *r*. Neste contexto, Lobachevsky (LOBACHEVSK, 2010, p. 26) define retas paralelas como:

> Dada uma reta e um ponto no plano, eu chamo de reta paralela à reta dada, que passa pelo ponto dado, uma reta que passa por este ponto e que é o

> limite entre as linhas que estão no mesmo plano, que passam através do mesmo ponto e que, quando prolongada a um dos lados da perpendicular que liga o ponto a reta dada, interceptam esta reta e aquelas que não interceptam[14].

Tal definição está representada na Figura 10:

Figura 10 - Retas paralelas

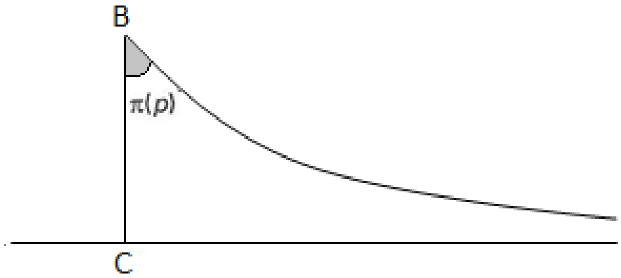


Fonte: Ribeiro (2012, p. 51)

As linhas contínuas representam as retas paralelas e as retas tracejadas, acima das retas contínuas, são as retas não secantes.

Outro conceito, relacionado à ideia de retas paralelas, que foi estudado e apresentado por Lobachevsky, foi o ângulo de paralelismo:

Figura 11 - O ângulo de paralelismo de Lobachevsky



Fonte: O Autor

Este ângulo é definido por Lobachevsky (PAPADOPOULOS, 2010) como sendo o ângulo formado entre a reta paralela que passa por um ponto dado e a perpendicular à reta dada passando por este ponto, como mostra a Figura 11. Este ângulo depende diretamente da distância do ponto à reta dada, sendo que, quanto

[14] Tradução nossa.

maior a distância, menor ele é, e, quanto mais próximo da reta, mais ele se aproxima de 90º, tal ângulo era denotado por $\pi(p)$.

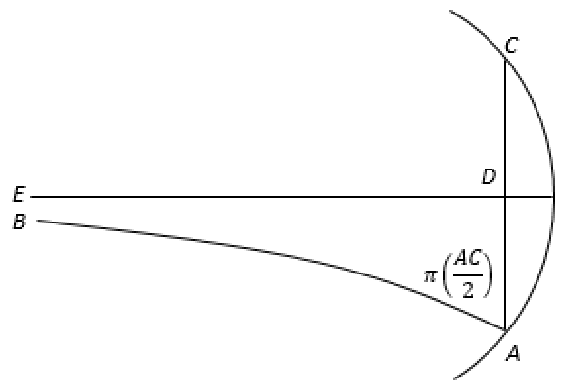
Acrescentam-se a esses conceitos algumas das principais propriedades deduzidas por este matemático, apresentadas por Ribeiro (2012, p. 51):

> (1) Se uma reta *s* é paralela a *r* no ponto *P*, então s será paralela a *r* em qualquer ponto de *s* na mesma direção.
> (2) Se *s* é paralela a *r*, então *r* é paralela a *s*.
> (3) Se *r* é paralela a *s* e *s* é paralela a *t*, então *r* é paralela a *t*.
> (4) Se *r* é paralela a *s*, então *r* é assintótica a *s*.

Nesse sentido, Lobachevsky deduziu muitas propriedades, mas algumas já eram conhecidas e estudadas por Saccheri e/ou Lambert. A exemplo, a propriedade $\pi(\mathrm{p}) < 90^{\circ}$ para todo *p*, é equivalente a dizer que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor que 180º (NASCIMENTO, 2013).

Com o intuito de definir a forma e a natureza das retas paralelas, com maior precisão, ele define uma nova curva: “chamamos de linha de fronteira (ou horociclo) a curva do plano para a qual todas as perpendiculares levantadas a partir de pontos médios das cordas são paralelos entre si” (KATZ, 2011, 1008). Em outras palavras, pode-se dizer que, dada uma linha *AB* com *A* sobre o horociclo, qualquer outro ponto *C* estará sobre o horociclo se *AC* fizer ângulo $\prod\left(\frac{AC}{2}\right)$ com a linha *AB*, pois nesse caso a perpendicular *DE* a *AC* no seu ponto médio será paralela a *AB* (KATZ, 2011), conforme ilustrado na Figura 12:

Figura 12 - Horociclo de Lobachevsky



Fonte: Katz (2011, p. 1008)

De acordo com Katz (2011), os resultados obtidos por Lobachevsky eram baseados na trigonometria no plano não euclidiano, ademais, esses resultados não eram conhecidos nem por Saccheri, nem por Lambert. Outro aspecto a se considerar é que as fórmulas elaboradas por Lobachevsky implicam as fórmulas usadas na geometria plana apenas quando os lados dos triângulos são pequenos.

Assim, a fórmula $\pi(x)$ implica em:

$$cot\prod(x) = senh\,x \qquad cos\prod(x) = tanh\,x \qquad sen\prod(x) = \frac{1}{cosh\,x}\ .$$

A partir destas implicações, é possível, matematicamente por séries de potência, obter os seguintes resultados:

$$b\ sen\ A = a\ sen\ b,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$A\ sin\ (A + B) = b\ sen\ A\,,$$

$$cos\ A + cos\ (b + c) = 0\,.$$

Esses dois primeiros são familiares da geometria euclidiana plana, conhecidos como leis dos senos e cossenos; já os outros dois são frutos da combinação dos dois primeiros e são equivalentes a $A + B + C = \pi$ (KATZ, 2011). Tais elementos são algumas das muitas criações de Lobachevsky; por isso, ele é considerado um dos maiores nomes entre os que contribuíram para a elaboração dos conceitos das geometrias não euclidianas, principalmente da geometria hiperbólica.

4.1.4.4 Bolyai

Além de Lobachevsky, ganha destaque na criação das geometrias não euclidianas o matemático húngaro János Bolyai (1802-1860). Na opinião de Ribeiro (2012), há um consenso entre os historiadores que ambos desenvolveram a mesma ideia ao pensar em uma nova geometria: substituir o quinto postulado de Euclides por outro; todavia, Bolyai não tinha conhecimento da pesquisa desenvolvida pelo seu contemporâneo, e só publicou em meados de 1832.

Bolyai enfrentou problemas acadêmicos no que diz respeito à divulgação de suas obras, além da falta de apoio. A partir do reconhecimento de seus feitos, ele e

Lobachevsky[15] passaram a ter apoio de Gauss. No entanto, o tratamento dado a Bolyai foi muito diferente do dado a Lobachevsky, não se sabendo, até hoje, o motivo. Gauss era considerado o maior matemático vivo da época, e com suas influências conseguiu ingressar Lobachevsky na Sociedade Científica de Göttigen (GREENBERG, 1994). Porém, Bolyai não teve a mesma sorte, mesmo sendo filho de um grande amigo de Gauss, o que proporcionou a ele conhecer a sua obra muitos anos antes de conhecer a obra de Lobachevsky.

Como mencionado, János Bolyai seguiu os passos de seu pai, que lhe aconselhou a não se envolver com tal estudo, pois ele teria passado muito tempo de sua vida tentando demonstrar o quinto postulado de Euclides e não conseguiu realizar tal feito. Mesmo com as indicações contrárias de seu pai, János prosseguiu em seus estudos e no ano de 1823 envia uma carta a seu pai, na qual está contida a seguinte frase: “do nada, criei um novo universo”. Neste contexto, ele relata acreditar na criação de uma nova geometria e destaca que iria publicar suas criações (EVES, 2004).

Em resposta a essa carta, seu pai Farkas demonstra estar surpreso com seus feitos e orienta seu filho a publicar suas ideias, até mesmo porque ideias como aquelas se espalhariam facilmente entre os matemáticos que poderiam publicá-las antes que ele fizesse isso (RIBEIRO, 2012). Seu pai estava certo em seu pensamento, pois no ano de 1829 Lobachevsky publica suas ideias.

No ano de 1832, Bolyai publica sua obra com 26 páginas intitulada *Ciência Absoluta do Espaço* como apêndice do livro *Tentamen*, de seu pai Farkas.

Segundo Ribeiro (2012, p. 55), os principais resultados obtidos por Bolyai em seus estudos são:

> (1) A própria definição de retas paralelas e suas consequências imediatas
> (2) O círculo e a esfera com raios infinitos
> (3) A trigonometria esférica é independente do quinto postulado
> (4) A utilização da trigonometria para o cálculo de áreas e volumes na geometria hiperbólica
> (5) A impossibilidade da quadratura do círculo na geometria euclidiana.

[15] Tal matemático também enfrentou grandes problemas ao longo de sua carreira, isto é, mesmo como o apoio de Gauss a divulgação de suas criações esbarrou em diversas dificuldades.

A diferença entre as obras de Bolyai e Lobachevsky é que Bolyai dava ênfase à independência do quinto postulado em relação à geometria euclidiana plana, e, a partir disso, desenvolveu propriedades que eram válidas fora dessa geometria; já Lobachevsky concentrava-se na criação de uma nova geometria baseada na negação do quinto postulado. Porém, ambos remetem a uma mesma geometria, a chamada geometria hiperbólica (RIBEIRO, 2012).

4.1.4.5 Riemann

Após tais criações, não demorou muito para que outros matemáticos se interessassem pela temática, emergindo a dúvida se era possível inserir ou substituir outros postulados, além do que se deveria entender por geometria (COUTINHO, 2001). Então, foram surgindo outras propriedades e postulados, que não haviam sido apresentados por Euclides, que, talvez, por serem “tão óbvios” não eram notados (RIBEIRO, 2012).

Pouco tempo depois das ideias apresentadas por Lobachevsky e Bolyai, apareceu Riemann (1826-1866) que, com suas criações, surpreendeu a todos apresentando uma geometria muito mais ampla, que dava sentido ao ângulo obtuso e às ideias introduzidas por Lambert. Dentre as contribuições desse matemático, pode-se citar a ideia de que a reta poderia ser limitada, como apresentaremos mais adiante.

Riemann propôs que o quinto postulado de Euclides fosse substituído por: Dada uma reta *r* e um ponto *P* que não pertence a *r*, não existe nenhuma reta paralela à *r* que passe por *P* (CAMARGO, 2012); o que poderia ser reescrito como “paralelas não existem”. Tal postulado era contraditório, pois, até então, em todas as geometrias estudadas, retas paralelas sempre existiam.

Algum tempo depois, Felix Klein compreendeu que a superfície de uma esfera poderia ser um modelo para a geometria proposta por Riemann, além disso, Klein a batizou de geometria elíptica. Ele considerou retas como sendo os círculos máximos na superfície de uma esfera, por sua vez dois círculos máximos sempre se cortam em dois pontos, por isso a inexistência de retas paralelas nesta geometria (RIBEIRO, 2012). Portanto, as contribuições de Riemann foram muito importantes para a geometria, a exemplo ele definiu a noção de curvatura de uma geometria.

Assim, pode-se dizer que ele conseguiu estudar e apresentar uma gama maior de propriedades e de conceitos, dos quais alguns são apresentados na próxima subseção.

4.1.5 Alguns Elementos da Geometria Hiperbólica e da Geometria Elíptica

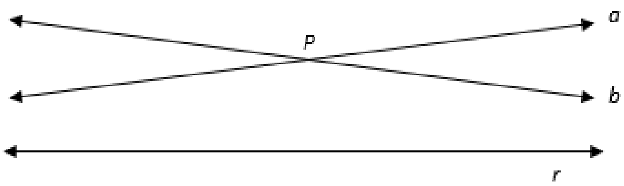
A partir do momento em que as geometrias não euclidianas foram criadas, diversos ramos da Matemática se desenvolveram, dentre eles a Física. Além disso os conceitos dessas geometrias passaram a ser divulgados pelo mundo inteiro. Assim, nesta subseção, são feitas algumas reflexões sobre duas dessas geometrias, a geometrias hiperbólica e a geometria elíptica (ou esférica). Para tanto, baseia-se nos trabalhos de Ribeiro (2012), Nascimento (2013), entre outros.

4.1.5.1 Geometria hiperbólica

Alguns dos fatos relacionados à origem da geometria hiperbólica foram mencionados no tópico anterior, ela está atrelada aos matemáticos Lobachevsky e Bolyai, que, quando publicaram suas obras mencionando a origem de uma nova geometria, estavam se referindo exatamente à geometria hiperbólica (NASCIMENTO, 2013).

Nessa geometria, alguns dos teoremas e axiomas das geometrias euclidianas são aceitos; porém, o quinto postulado é substituído pelo axioma hiperbólico, obtido pela negação da unicidade proposta pelo postulado das paralelas. Tal substituição propõe que no espaço hiperbólico existem no mínimo duas retas paralelas que passam por qualquer ponto fora dela, como mostra a Figura 13:

Figura 13 - Postulado hiperbólico

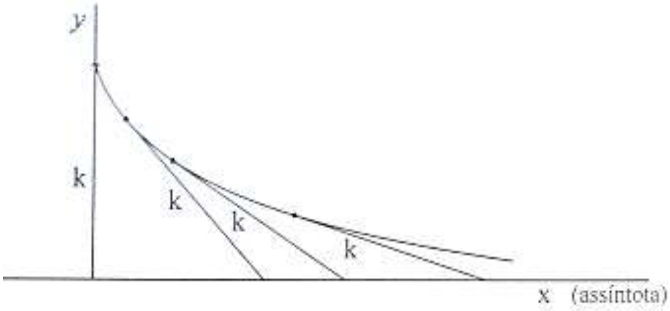


Fonte: O Autor

No entanto, é possível destacar que entre *a* e *b* existem outras retas que não interceptam a reta *r*, porém apenas *a* e *b* são paralelas, as demais são chamadas de retas não secantes a reta *r* (NASCIMENTO, 2013). A superfície de estudo da geometria hiperbólica possui curvatura negativa, a qual é chamada de pseudoesfera.

Garbi (2010) afirma que essa superfície é gerada por meio da revolução de uma curva chamada tratriz (Figura 14), em torno do seu eixo horizontal. As retas da Geometria Hiperbólica são geodésicas da pseudoesfera.

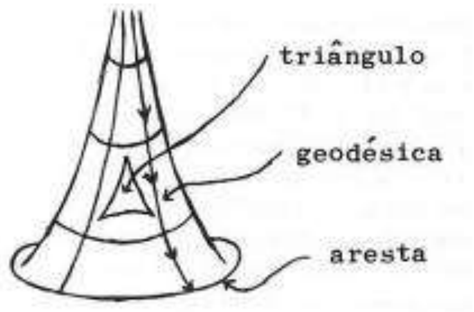
Figura 14 - Tratriz



Fonte: Garbi (2010, p. 351)

Como visto anteriormente, outra propriedade válida nesta geometria é que, em um triângulo qualquer, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180º, como propôs Lobachevsky. Na Figura 15, apresenta-se a pseudoesfera e este triângulo, bem como outros elementos da geometria hiperbólica:

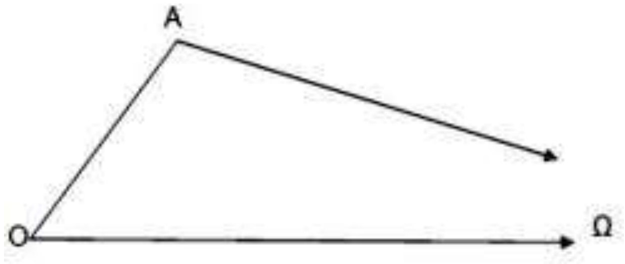
Figura 15 - Alguns elementos da geometria hiperbólica



Fonte: Carmo (1987, p.31)

Outro conceito importante é o de ponto ideal, que, de acordo com Coutinho (2001, p. 47), "na geometria hiperbólica duas retas paralelas não têm um ponto em comum, porém se diz que se encontram num ponto ideal. Portanto, chama-se de ponto ideal o ponto de encontro de duas retas paralelas", esse conceito foi um dos primeiros introduzidos por Bolyai. A partir disso, define-se triângulo ômega como aquele em que um dos vértices é um ponto ideal (COUTINHO, 2001), como se vê na Figura 16.

Figura 16 - Triângulo ômega



Fonte: Coutinho (2001, p. 63)

Coutinho (2011) afirma que esse triângulo deve satisfazer as seguintes propriedades, a saber: se uma reta passa por um vértice, ou por qualquer outro ponto de um triângulo ômega, então essa reta intercepta o lado oposto; seja qualquer triângulo ômega *OAΩ*, os ângulos exteriores do prolongamento OP serão sempre maiores que os ângulos interiores do lado oposto; sendo dois triângulos ômegas *OAΩ* e *O'A'Ω'*, estes são congruentes se os lados de extensões finitas forem congruentes e também se o par de correspondentes ângulos *Ô* e *Ô'* ou *Â* e *Â'* são congruentes; dois triângulos ômegas *OAΩ* e *O'A'Ω'* são congruentes somente se os dois pares de ângulos *Ô',Ô, Â'* e *Â* forem congruentes.

Além disso, como já apresentado, Saccheri e Lambert basearam-se em quadriláteros para tentar provar o quinto postulado de Euclides levando em consideração três hipóteses: ângulos retos, ângulos agudos ou ângulos obtusos. Hoje se sabe que, na geometria hiperbólica, é válida a hipótese dos ângulos agudos (RIBEIRO, 2012).

Barbosa (2011) ressalta que a partir desse e outros estudos foi possível chegar a outros resultados para a geometria hiperbólica:

- A área de um triângulo euclidiano é dada por $\frac{LH}{2}$, em que *L* é o comprimento de um lado do triângulo e *H* a altura do lado, o que não é válido para os triângulos hiperbólicos;
- Os triângulos semelhantes são obrigatoriamente congruentes;
- Na geometria hiperbólica, não existem retângulos, pois os quadriláteros terão no máximo três ângulos retos;

- Na geometria euclidiana, se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si, o mesmo não se pode dizer para esta geometria.

Por sua vez, como nessa geometria não se pode ter retângulos, o quadrado de lado unitário não pode ser empregado no cálculo de áreas; por isso, são utilizados triângulos. A partir dessa constatação, chega-se à seguinte definição: "dois polígonos são equivalentes se podem ser divididos no mesmo número finito de pares de triângulos congruentes" (COUTINHO, 2001, p. 64).

Outra propriedade desta geometria determina que a área de um triângulo é proporcional à diferença entre a soma de seus ângulos internos e dois ângulos retos, isto é, a medida da área de um triângulo é dada por *K.d,* em que *K* é uma constante positiva e *d* é o valor da diferença angular entre 180º e a soma da medida dos ângulos internos do triângulo (NASCIMENTO, 2013), que algebricamente pode ser escrito como:

$$d = \pi - (med\ (A) + med\ (B) + med\ (C)).$$

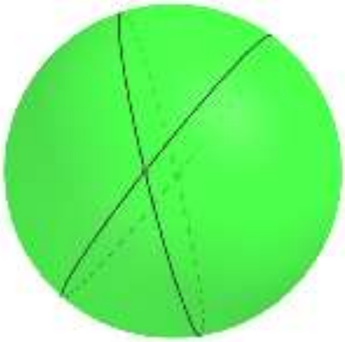
Essa diferença ficou conhecida como deficiência do triângulo, que na geometria euclidiana é igual a zero.

4.1.5.2 Geometria elíptica

A geometria elíptica foi desenvolvida por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), esta também é chamada de geometria esférica ou geometria riemanniana. Para criar esta geometria, Riemann propôs que o postulado das paralelas fosse substituído pela sua negação, isto é, não existem retas paralelas, o que possibilitou elaborar um novo sistema axiomático. Ela foi apresentada pela primeira vez no ano de 1851, em uma aula inaugural ministrada por Riemann, na Universidade de Göttingen (COUTINHO, 2001).

Nessa geometria a reta não é infinita, pois são circunferências máximas na superfície esférica. De acordo com Riemann, dados dois pontos *A* e *B*, denomina-se circunferência máxima, que passa por esses pontos, a maior circunferência que pode ser obtida na superfície da esfera, estas circunferências também são chamadas de geodésicas. Além disso, em qualquer esfera, dois círculos máximos se interceptam em mais de um ponto (COUTINHO, 2001), como representa a Figura 17:

Figura 17 - Geodésicas na superfície esférica



Fonte: O Autor

Soma-se a isso outro postulado proposto por Riemann, que diz: dados dois pontos sobre a esfera, pode-se encontrar infinitas retas que passam por eles (COUTINHO, 2001), como ilustra a Figura 18:

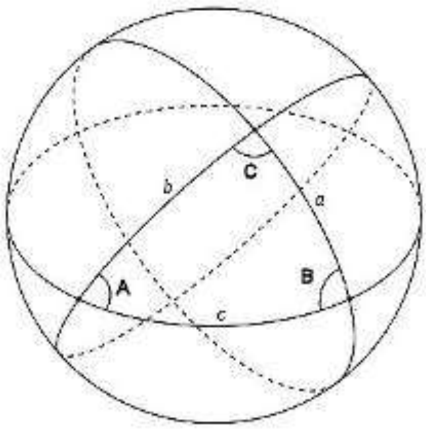
Figura 18 - Infinitas retas que passam por dois pontos dados

Fonte: O Autor

Assim como na geometria hiperbólica, nessa geometria, as figuras como triângulos e quadriláteros também possuem algumas propriedades, mas com as suas peculiaridades.

A exemplo, um triangulo esférico é formado por três pontos distintos *A, B* e *C* que não pertencem a um mesmo círculo máximo; assim, os arcos que unem esses pontos, dois a dois, formam um triângulo esférico. Os lados desse triângulo são denotados por *a, b* e *c*, os quais são medidos em graus ou radianos (KATZ, 2011), como retrata a Figura 19:

Figura 19 - Triângulo Esférico



Fonte: Katz (2011, 1011)

No ano de 1826, Taurino (1794-1874) publica um trabalho no qual comenta sobre a hipótese de ângulos obtusos na superfície de uma esfera de raio imaginário. Taurino, a partir de seus estudos, conseguiu chegar à conclusão de que, em um triângulo na superfície esférica, a soma dos ângulos internos é maior que 180º (KATZ, 2011).

A soma dos ângulos internos desse triângulo pode variar de 180º a 540º e pode ter um valor fixo dependendo das características do triângulo considerado. Já a soma dos lados *a, b* e *c* pode variar de 180º a 360º, em contrapartida nenhum deles pode ser maior que 180º (COUTINHO, 2001).

Outro aspecto a ser ponderado é que, assim como na geometria plana, os triângulos são classificados de acordo com a medida dos lados: a) Retilátero: um lado medindo 90º; b) Birretilátero: dois lados medindo 90º; c) Trirretilátero: os três lados medindo 90º; e, também, de acordo com a medida dos ângulos: a) Retângulo: um ângulo reto; b) Birretângulo: dois ângulos retos; c) Trirretângulo: três ângulos retos (COUTINHO 2001).

No que tange aos quadriláteros, segundo Coutinho (2001), nos quadriláteros de Saccheri e Lambert, é válida a hipótese dos ângulos obtusos, e isto se deve ao fato que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo esférico poder ser maior que 180º.

4.2 AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

A geometria euclidiana recebe esse nome por ter sido sistematizada e fundamentada a partir dos cinco postulados de Euclides, seus conceitos são explorados nas escolas brasileiras, nos mais diferentes níveis e modalidades de ensino, desde os tempos dos jesuítas. Contudo, neste período ela não alcançou o *status* de disciplina, seu estudo era realizado nas disciplinas de algoritmos e de aritmética. Ao longo do tempo, seu ensino sofreu diversas modificações, mas em grande parte desse tempo ele foi negligenciado e, em alguns momentos, foi quase inexistente. Esse panorama só se modificou com o fim do Movimento da Matemática Moderna, em meados de 1970, emergindo o campo de estudos da Educação Matemática, o que possibilitou o desenvolvimento de diversas pesquisas sobre o ensino, a aprendizagem e o conhecimento matemático. Mesmo assim demorou mais de vinte anos para que o ensino da geometria acontecesse na Educação Básica da mesma forma que o ensino das demais áreas da Matemática (BICUDO, 2004).

Quando se percebeu que os conhecimentos advindos da geometria contribuem para o desenvolvimento de diversas potencialidades, como orientação, noção de espaço e de forma, compreensão de distâncias, entre outras, que podem auxiliar na forma como os alunos compreendem e representam o mundo em que vivem. Sendo assim, não propor esse estudo seria privar os alunos de desenvolver tais aptidões. Como destaca Lorenzato (1995, p.13):

> Sem estudar geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade elas, dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da geometria como fator altamente facilitador para a compreensão de questões de outras áreas de conhecimento humano.

Por sua vez, documentos norteadores da educação brasileira, a exemplo dos PCN – Matemática (BRASIL, 1997), defendem amplamente seu ensino, acrescentando-se a isto o fato de que seus conceitos e ensino começam a ser discutidos em congressos e eventos da área da Educação Matemática, além dos livros didáticos que, seguindo tais propostas, começam a mudar (BICUDO, 2004).

Em paralelo, pesquisas com foco em conteúdos matemáticos pouco abordados na Educação Básica e, em alguns casos, nunca abordados, começam a ser desenvolvidas. Isto contribuiu para que muitas discussões sobre a importância dos conceitos matemáticos para a formação do sujeito sejam iniciadas, tais fatos possibilitaram um equilíbrio na distribuição dos conteúdos nos currículos escolares e, também, a abertura para a inserção de alguns conceitos que até então não eram abordados nas escolas, um deles foram as geometrias não euclidianas (RIBEIRO, 2012).

O termo geometrias não euclidianas se justifica pelo fato de que essas geometrias se contrapõem à geometria sistematizada por Euclides. Ademais, seu surgimento, que se deu em meio ao século XIX, proporcionou uma grande revolução entre os matemáticos da época e para a própria Matemática. Essa possibilidade de criação perturbou a base dos conhecimentos matemáticos até então constituídos, além de conduzir a um pensamento de que a geometria e seu sistema axiomático não dependem, apenas, da percepção de mundo, mas exigem uma abstração profunda (NASCIMENTO, 2013).

Segundo Struik (1989), no fim do século XVIII, período em que filósofos começam a questionar os fundamentos da própria Matemática, os matemáticos passaram a questionar a geometria euclidiana plana, com o argumento de que “se há a possibilidade apenas de uma única geometria, certos postulados ou noções comuns seriam teoremas, isto é, seriam uma consequência lógica de proposições primeiras” (STRUIK,1989, p.92).

> O quinto postulado do livro I (a relação entre “axiomas e postulados” não é muito clara em Euclides) é equivalente ao chamado “axioma das paralelas”, de acordo com o qual, por um ponto passa uma recta dada e uma só. As tentativas de reduzir esse axioma a um teorema conduziram, no século XIX, a uma apreciação completa da sensatez do ponto de vista de Euclides ao adaptá-lo como um axioma e levaram à descoberta das chamadas geometrias não euclidianas (STRUIK, 1989, p. 92).

Na tentativa de se compreender e demonstrar o quinto postulado de Euclides surgiram as chamadas geometrias não euclidianas. Após tamanha criação, começam a despontar as primeiras definições para tais geometrias como a apresentada por Costa (1929, p. 201): “qualquer dos sistemas dedutivos construídos sobre a negação do chamado [quinto] postulado de Euclides, conservadas e completadas [...] as demais proposições primitivas de Euclides”.

Ele destaca que só define as geometrias não euclidianas desta forma devido ao fato de que era o termo empregado habitualmente, mas sabia que, em rigor, elas deveriam ser definidas como qualquer “geometria entre cujos postulados se encontrem em contradição com quaisquer postulados euclidianos, e não apenas o das paralelas” (COSTA, 1929, p. 201).

Tal compreensão também é compartilhada pelas DCE (PARANÁ, 2008). Além disso, esse documento afirma que estas geometrias também abarcam a “geometria projetiva (pontos de fuga e linhas de horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais” (PARANÁ, 2008, p.14).

A partir destas e outras orientações, Ribeiro (2012) destaca que, no Brasil, o ensino da geometria euclidiana na Educação Básica se dá de forma gradativa, visto que inicialmente são apresentadas algumas proposições e propriedades e, ao longo dos anos escolares, a dedução delas é exigida.

Cabe destacar que as geometrias não euclidianas, assim como a euclidiana plana, têm seu sistema axiomático, teoremas e postulados; porém, é necessário um nível de abstração muito alto para que ocorra a compreensão dos mesmos. Entretanto, Hansen (1998) defende que toda esta estrutura não deva fazer parte dos currículos da Educação Básica, mas defende que os professores devem propiciar uma reflexão sobre alguns elementos dessa estrutura.

A exemplo, Hansen (1998, p.14, tradução nossa) ressalta que “é possível apresentar a construção do plano hiperbólico no Ensino Médio”. No trabalho em questão, o autor dá um exemplo sobre a possibilidade de cobrir, com polígonos quaisquer, o plano hiperbólico, fato que, segundo ele, deve ser surpreendente para qualquer aluno do Ensino Médio que tenha conhecimentos prévios de geometria. Posto isto, Hansen (1998) deixa claro que é possível apresentar e/ou explorar uma geometria sem apresentar seu sistema axiomático.

Nesta mesma perspectiva, Douady (1998) destaca que um estudo muito detalhado das geometrias hiperbólica e elíptica na Educação Básica não é aconselhável. Para ele, seria interessante a inserção de alguns tópicos de tais geometrias, o que poderia contribuir para formação destes sujeitos.

A propósito, Krause (2012) propõe que, ao escolher algum conceito das geometrias não euclidianas para se explorar em sala de aula, o professor deve verificar se ele cumpre as seguintes condições: 1) ser próxima da geometria euclidiana, no que diz respeito à estrutura axiomática; 2) ter aplicações relevantes; 3) ser compreensível a qualquer pessoa que possua conhecimentos básicos da geometria euclidiana. Ele também destaca que esta inserção pode propiciar a compreensão dos conceitos da própria geometria euclidiana.

Acrescenta-se a isso as DCE (PARANÁ, 2008) que defendem o ensino das geometrias não euclidianas. No que tange ao conteúdo estruturante de “Geometrias” desse documento, há uma subdivisão em geometria plana, geometria espacial, geometria analítica e noções básicas das geometrias não euclidianas. Tal proposta das geometrias não euclidianas se difere do Ensino Fundamental para o Ensino Médio.

Para o Ensino Fundamental, são propostos o ensino de noções básicas dos seguintes tópicos: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte), geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade curvas e conjuntos abertos e fechados) e noções de geometria dos fractais.

Já para o Ensino Médio, orienta-se que sejam trabalhados os seguintes conteúdos: geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e geometria elíptica. Além disso, tal documento defende que “na geometria dos fractais pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski” (PARANÁ, 2008, p. 56); já para as demais geometrias propõe que:

> Para abordar os conceitos elementares da geometria hiperbólica, uma possibilidade é através do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudoesfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos). Já na apresentação da geometria elíptica, fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésica; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto à medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: polos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (PARANÁ, 2008, p. 57).

Em resumo, as DCE propõem que o ensino das geometrias deve ocorrer tanto nos anos finais do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, iniciando por noções básicas e ampliando esses conceitos no decorrer dos anos escolares. Além disso, a perspectiva apresentada vai ao encontro do que propõe Hansen (1998), visto que este documento não defende um estudo axiomático das geometrias não euclidianas, mas uma reflexão a respeito das noções básicas e teoremas que constituem essas geometrias.

Ademais, Coutinho (2001) e Martos (2002) ressaltam que a inclusão conhecimentos nas aulas de Matemática, ainda, esbarra em algumas relutâncias por parte dos alunos e dos professores, mesmo assim defendem que não é algo impossível e pode trazer inúmeras contribuições para formação dos educandos, e, por isso, devem ser trabalhados na Educação Básica.

Cabe destacar, também, que, mesmo com o fim do Movimento da Matemática Moderna e toda tentativa que foi e vêm sido feita no campo da Educação Matemática para que o ensino da geometria aconteça da mesma forma que os demais conteúdos, ainda se percebe que o ensino deste tópico ainda fica em segundo plano em toda Educação Básica, isto é, o ensino da aritmética, da álgebra etc., acabam sendo privilegiados em detrimento do ensino da geometria e de outros tópicos (LIMA, 2015).

Neste viés, destaca-se que ainda existem inúmeras dificuldades encontradas no ensino de geometria, principalmente no das geometrias não euclidianas, conforme relata Ribeiro (2012). Desta forma, cabe aos professores buscar compreendê-las, além de desenvolver estratégias que possibilitem apresentá-la a seus alunos.

Tais entendimentos permitiram investigar as compreensões e os saberes dos professores em relação às geometrias não euclidianas, na tentativa de que as considerações e resultados obtidos com esse estudo nos guiasse no desenvolvimento de um material (vídeos e atividades) que pudesse ser explorado na formação continuada desses sujeitos e que contribuísse para a ampliação desses saberes. Tal investigação é apresentada na próxima subseção.

4.3 ALGUMAS COMPREENSÕES A RESPEITO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS APRESENTADAS POR PROFESSORES

Considerando que as geometrias não euclidianas podem colaborar para a formação dos alunos, como já se destacou na primeira seção, foi desenvolvida uma pesquisa[16] com sete professores de Matemática que atuam na Educação Básica no Estado do Paraná, para compreender sua formação em relação a tais geometrias. Desse modo, busca-se investigar como esses sujeitos compreendem as geometrias não euclidianas, bem como os saberes que têm em relação a isso.

Neste tópico, apresentam-se os dados coletados a partir das entrevistas e também busca-se fazer sua análise, apoiada nos pressupostos da Análise do Conteúdo e, sobretudo, nos estudos realizados a respeito da formação docente, dos saberes e das geometrias não euclidianas. Para tanto, organiza-se de acordo com o estudo de cada questão, apresentando as respostas dos sujeitos (a partir das categorias) e as confrontando com a literatura, possibilitando uma reflexão a respeito dessa temática.

Para explicitar as perspectivas expressas pelos docentes investigados, são apresentados trechos de suas falas, frutos dos recortes empregados para categorização. Para uma melhor compreensão, serão utilizadas as siglas S1, S2, S3, S4, S5, S6 e S7, em que S1 representa a fala do primeiro professor entrevistado, S2 remete ao segundo professor entrevistado, e assim por diante. Antes da apresentação e análise dos dados, destaca-se a dificuldade que a maioria dos professores demonstrou ao responder aos questionamentos realizados, tal aspecto dá indícios das dificuldades deles com relação ao tema.

A primeira questão explorada é “O que são as geometrias não euclidianas?”, na sequência são apresentadas as falas dos sujeitos, destacando os aspectos significativos para o contexto da pesquisa. Na perspectiva dos docentes S2, S5 e S7 é a geometria que se baseia no estudo das superfícies e formas não planas. Seguem algumas falas:

> Na minha concepção... É aquela <u>geometria das curvas</u>, não só das superfícies planas. (S2)
> [...] são <u>geometrias que não estão no plano</u>. (S5)
> Pelo que já vi, ela remete as figuras <u>que não estão no plano</u>, mas nas esferas, nos cones [...] (S7)

---

[16] A presente pesquisa está publicada em sua versão completa no volume 17, número 4, da Revista Ensino, Educação e Ciências Humanas, intitulada como *Professores de Matemática e suas Compreensões a Respeito das Geometrias Não Euclidianas*, disponível em: http://www.pgsskroton.com.br/seer/index.php/ensino/article/view/3610/3393.

Esses professores apresentam uma percepção de que a base para o desenvolvimento das geometrias não euclidianas são as superfícies curvas, isto é, o estudo das formas e elementos das geometrias plana em superfícies que se diferem do plano. Porém, não expressam o que são estas superfícies chamadas de curvas, mas de acordo com Rodrigues (1960) estas superfícies são geradas a partir de linhas curvas que se desenvolvem no espaço tridimensional seguindo leis específicas de geração. Segundo os tipos de entes geradores que irão configurar os grupos de superfícies circulares em geral, geradas pelo movimento de circunferências, e normalmente em superfícies quádricas, geradas pelo movimento de outros tipos de curva.

Tal compreensão não fica evidente nas falas, mas segundo um dos professores (S7) ele emprega os termos cone e esfera como superfícies, sendo estes elementos da geometria espacial, mas que também é foco de estudo da geometria analítica, assim como o hiperboloide, elipsoide etc. Nesse sentido, os entrevistados mencionados não conseguem conceituar o que são às geometrias não euclidianas sem se remeter as geometrias euclidianas.

Os professores S2, S3 e S4 afirmam que são as geometrias que não são euclidianas ou que discordam, em alguns aspectos, da geometria de Euclides. Como mostram as seguintes falas:

> [...] que é uma geometria que <u>não é euclidiana</u>. (S2)
> São as geometrias <u>não ligadas aos poliedros polígonos de Euclides</u>, e que <u>não segue seus postulados</u>. (S3)
> A euclidiana é baseada em postulados e em axiomas em duas e três dimensões, a não euclidiana ela também tem regras, postulados, mas é [...] <u>discorda um pouquinho do que foi feito na euclidiana</u>, por isso que é não euclidiana. (S4)

A partir da fala de S2, é possível identificar que tal sujeito não explicita um conceito para geometrias não euclidianas, pois apenas remete ao que o próprio termo já diz não euclidiana, o que pode dar indícios de que desconhece sua definição. Já S3 e S4 ressaltam “diferenças” que remetem a postulados, axiomas e figuras das geometrias euclidianas; portanto, também não conseguem conceituar as geometrias não euclidianas sem reportarem-se às geometrias euclidianas.

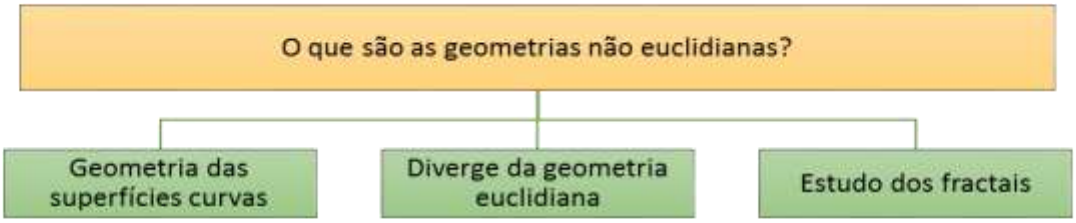
De acordo com os professores S1 e S6, as geometrias não euclidianas se reportam à geometria dos fractais, como indicam as falas:

> Ao falar de geometrias não euclidianas já me <u>vêm à memória os fractais</u>, que é o que eu tive contato. (S1)
> Pra mim <u>fala dos fractais</u>, destas formas diferentes de composição de figuras. (S6)

Nota-se que S1 e S2 se referem a apenas um dos tópicos das geometrias não euclidianas; contudo, este tema é composto por muitos outros, como citam as DCE (PARANÁ, 2008, p. 56): “noções básicas das geometrias não euclidianas, geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) ”.

No que concerne ao primeiro questionamento, “O que são as geometrias não euclidianas?”, as respostas puderam ser organizadas nas seguintes categorias: (1) Geometria das superfícies curvas (acredita que são as geometrias que se baseiam em superfícies não planas, isto é, nas curvas – S2, S5 e S7); (2) Diverge da geometria euclidiana (são as geometrias que se diferem em algum aspecto da geometria euclidiana – S2, S3 e S4); (3) Estudo dos fractais (se refere ao estudo dos fractais – S1 e S6). Em síntese, é possível explicitar as repostas nas seguintes categorias, expostas na Figura 20:

Figura 20 - Categorias para questão “O que são as geometrias não euclidianas?”



Fonte: O Autor

No percurso da construção da definição deste termo, Costa (1929) definiu as geometrias não euclidianas como “qualquer dos sistemas dedutivos construídos sobre a negação do chamado [quinto] postulado de Euclides, conservadas e completadas [...] as demais proposições primitivas de Euclides” (COSTA, 1929, p. 201). Todavia, Santos (2009, p. 14) afirma que:

> A proposta da DCE para as geometrias não euclidianas na Educação Básica não se refere apenas às geometrias que historicamente são denominadas como tais, ou seja, a Geometria Hiperbólica e a Elíptica, mas a qualquer geometria que negue pelo menos dos cinco postulados de Euclides.

Assim, entende-se que as geometrias não euclidianas são todas aquelas geometrias que possuem algum axioma que contradiz algum axioma euclidiano. Dentre as respostas explicitadas, concorda com essa perspectiva a expressa na segunda categoria (pelos sujeitos S3 e S4). No entanto, é uma perspectiva bem mais simplista do que esta, citando postulados, axiomas e figuras, mas não especificam de que maneira isto acontece.

Por meio de tais reflexões, entende-se que os saberes disciplinares relacionados à compreensão do que são as geometrias não euclidianas devem ser desenvolvidos pelos entrevistados, uma vez que conhecer o conteúdo não garante que aconteça o seu ensino (TARDIF, 2013).

A segunda questão a ser analisada é “Quais as diferenças entre a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas?”. Para isso, apresentam-se, a seguir, as falas dos sujeitos, destacando os aspectos significativos que respondem tal questionamento, bem como uma reflexão sobre estas.

Para os professores S1, S2, S4, S5 e S7, a principal diferença entre elas é o estudo das figuras planas em outras superfícies, isto é, as modificações nas propriedades e na forma de uma figura quando está contida em uma superfície não plana. Veja algumas falas:

> [...] o triângulo na esfera [...] é [...] eu tinha essa ideia de que o triângulo na esfera é diferente de um triângulo plano. (S1)
> A geometria euclidiana a gente trabalha com ela num plano, e a geometria não euclidiana a gente trabalha com ela em superfícies curvas. (S2)
> [...] é um estudo de figuras não mais planas, certinho, bonitinha, ela é... ela tem distorções nas imagens. (S4)
> [...] eu sei dar exemplo, mas explicar a diferença... quando você fala da sela do cavalo... que a soma dos ângulos internos, quando a gente tem um triângulo na sela do cavalo não é 180. Agora te explicar a diferença... eu sei que essa parte tem alguma coisa a ver com os ângulos. (S5)
> As duas estudam as figuras e as formas, mas o que muda é a superfície onde estas formas estão inseridas, pois quando muda a superfície a figura muda sua forma [...] sofre uma deformação e aí elas se diferem. (S7)

A partir destas respostas, é possível notar que os professores reconhecem algumas das diferenças entre as figuras estudadas pela geometria euclidiana plana e aquelas estudadas pelas geometrias não euclidianas, como pode-se notar nos exemplos citados por S1 e S5 sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo em superfícies como a esfera e o paraboloide hiperbólico. Já S2, S4 e S5 falam das deformações que as figuras sofrem quando estão contidas e superfícies não-planas, porém algumas das geometrias não euclidianas também são desenvolvidas no plano, assim, eles demonstram desconhecer a ideia de que essas deformações também podem acontecer fora do plano. No entanto, é possível destacar que não há um rigor matemático nos elementos expressos, além disso, esses docentes não citam alguns dos elementos que as diferem, dos quais alguns são expressos por Ribnikov (1987) no trecho a seguir:

> a) a disposição das retas paralelas; b) a soma dos ângulos em triângulos e polígonos; c) as áreas; d) os polígonos inscritos e circunscritos na circunferência; e) a semelhança e congruência de figuras; f) a trigonometria; g) o teorema de Pitágoras; h) as medições do círculo e suas partes (RIBNIKOV, 1987, p. 434).

Já os professores S3 e S6 não conseguem explicitar as diferenças entre as geometrias euclidiana e não euclidianas, como pode-se observar em suas falas:

> Não sei responder [...] na formação que tive não trabalhei com as geometrias não euclidianas. (S3)
> Eu não sei falar dessas diferenças, mas sei que são muitas diferenças. (S6)

A partir das falas, entende-se que esses sujeitos não explicitam as diferenças e, ainda, um deles fala sobre a formação inicial que não o possibilitou desenvolver seus conhecimentos em relação às geometrias não euclidianas. De acordo com Ribeiro (2012, p. 33):

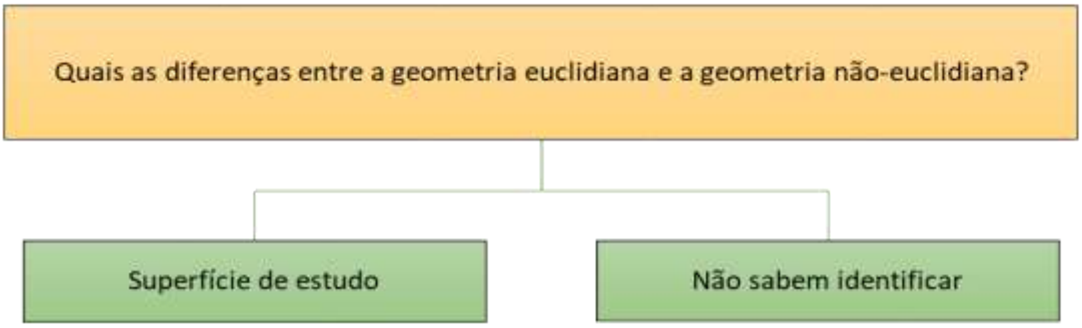
> Independente se as geometrias não euclidianas devem ou não ser ensinadas para um público que não seja de especialistas em matemática, há muito motivos para que um especialista tenha conhecimento destas estruturas. O surgimento destas geometrias foi o grande passo para modificar o conceito de verdade matemática.

Logo, a formação do professor de Matemática deveria propiciar-lhes a compreensão desses conceitos, bem como da estrutura das geometrias não euclidianas.

Em consequência disto, no que se refere à pergunta “Quais as diferenças entre a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas?”, as respostas puderam ser agrupadas nas seguintes categorias: (1) Superfície de estudo (a superfície onde se estudam as figuras e suas propriedades: a euclidiana desenvolve seu estudo no plano e as não euclidianas em outras superfícies, como as curvas – S1, S2, S4, S5 e S7); (2) Não sabem identificar (não identificam as diferenças – S3 e

S6). Pode-se sintetizar as respostas no esquema da Figura 21:

Figura 21 - Categorias para questão "Quais as diferenças entre a geometria euiclidiana plana e as geometrias não euclidianas?"



Fonte: O Autor

Tendo em vista o que foi explicitado pelos sujeitos da pesquisa para este questionamento e o anterior, compreende-se que alguns apresentam uma parte dos saberes disciplinares, aqueles que dizem respeito aos saberes específicos da matéria (TARDIF, 2013), relacionados às geometrias não euclidianas; porém, ainda estão muito aquém do que a literatura propõe. Por isso, destaca-se que estes docentes ainda devem desenvolvê-los, visto que segundo Bonete (2000):

> [...] o conhecimento das geometrias não euclidianas pode proporcionar aos futuros professores um melhor preparo para que possam atuar no ensino fundamental e médio com a disciplina de matemática e, em especial, o ensino da geometria (BONETE, 2000, p. 230).

Dando sequência, apresenta-se reflexão sobre as respostas para a pergunta "Quais documentos curriculares defendem o ensino das geometrias não euclidianas na Educação Básica?", assim como nas questões anteriores, dispõe-se a fala dos sujeitos destacando as falas mais significativas, fazendo uma reflexão sobre elas.

De acordo com os professores S1 e S6, as DCE (PARANÁ, 2008) trazem em sua proposta tópicos das geometrias não euclidianas. Vejam-se as falas:

> [...] as DCE têm, a gente coloca no plano de ensino, lá no último tópico e nunca dá tempo de trabalhar. (S1)
> [...] pelo que já estudei e utilizei para fazer meus planejamentos as DCE do Paraná trazem, mas a gente nem coloca no planejamento. (S6)

Para os sujeitos S3 e S7 tanto PCN (BRASIL, 1997), quanto as DCE (PARANÁ, 2008) defendem o ensino das geometrias na Educação Básica. Notam-se as falas:

> Os parâmetros... As diretrizes do Paraná... Tem mas não deixa muito claro. Talvez ela defenda algum tópico que a gente pensa que é uma geometria plana ou espacial e ela é não euclidiana. Talvez, é falta de formação do professor para saber disso. (S3)
> Pelo que já li... Eu já vi alguma coisa nas DCE e nos Parâmetros. (S7)

Em face das ideias expressas por S1, S3, S6 e S7, é possível fazer duas observações: 1) eles reconhecem que as duas principais propostas curriculares, para o estado em que atuam, defendem o ensino das geometrias não euclidianas; porém não explanam o que tais documentos defendem; 2) mesmo que reconheçam que documentos norteadores para o ensino propõem o estudo das geometrias não euclidianas, S1 e S6 alegam que nunca trabalharam com este tema em suas aulas.

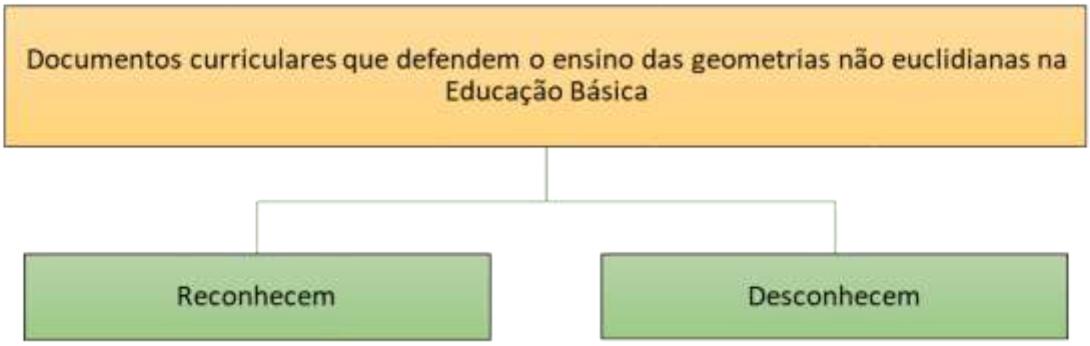
Tais apontamentos remetem à discussão proposta por Perrenoud (2003) que ressalta que há um grande distanciamento do currículo prescrito (documentos criados pelas secretarias de Educação, que são as orientações curriculares) e o currículo real (que se efetiva na prática da sala de aula), ou seja, muitos dos tópicos que os docentes colocam em seus planejamentos não são trabalhados com seus alunos.

Por fim, os professores S2, S4 e S5 dizem que não se lembram de quais documentos fazem estes apontamentos. Observe alguns trechos:

> Não me lembro, mas do que eu li das DCE e os PCN, eu não me lembro se aborda a geometria não euclidiana. Eu não sei dizer... não me lembro de ter lido sobre isso neles. Poder estar em uma parte que eu pulei. (S2)
> Não me recordo, posso até ter visto, mas não me recordo. (S4)
> Que eu lembre? Eu acho que é nos parâmetros, mas eu não me lembro... Se eu não me engano... Eu usei a pra fazer... mas foi há oito anos e não me lembro direito, mas foi algo assim que eu usei. (S5)

Em síntese, no que diz respeito aos documentos curriculares que defendem o ensino das geometrias não euclidianas na educação básica, as respostas obtidas foram dispostas nas seguintes categorias: (1) Reconhecem (compreendem que documentos como as DCE (PARANÁ, 2008) e os PCN (BRASIL, 1997) defendem o ensino das geometrias não euclidianas, mas não seguem tais orientações – S1, S3, S6 e S7); (2) Desconhecem (não se lembram de nenhum documento curricular que propõe o ensino das geometrias não euclidianas – S2, S5 e S6). Tais categorias são sintetizadas na Figura 22:

Figura 22 - Categorias para questão "Documentos curriculares que defendem o ensino das geometrias não euclidianas na educação básica"



Fonte: O Autor

Para tanto, compreende-se que as duas propostas curriculares citadas pelos sujeitos investigados trazem a proposta de se trabalhar com as geometrias não euclidianas, mas com enfoques diferentes.

Os PCN (BRASIL, 1997) falam da importância do surgimento das geometrias não euclidianas para a compreensão das rupturas dos paradigmas que esse conhecimento sofreu, além de contribuir para a compreensão do desenvolvimento do conhecimento matemático. Segundo esta proposta para o Ensino Fundamental:

> [...] mudanças no paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para a aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico (BRASIL, 1997, p. 25).

Contudo, essa ênfase se dá apenas para o Ensino Fundamental, uma vez que para o Ensino Médio esse aspecto fica de forma implícita no documento.

Já as DCE (PARANÁ, 2008) sugerem a inserção das geometrias não euclidianas no currículo. Este documento defende que as geometrias hiperbólica e elíptica sejam trabalhadas no Ensino Médio, além de deixar livre para a inserção de outros tópicos.

Tais apontamentos evidenciam que os saberes curriculares, que dizem respeito aos programas escolares (objetivos, conteúdos, métodos) que o professor deve conhecer e aplicar (TARDIF, 2013), ainda, devem ser ampliados pelos entrevistados, até mesmo porque três de sete não souberam nem explicitar pelo menos uma destas propostas.

A última questão a ser analisada é "Qual a importância de se trabalhar com as geometrias não euclidianas em sala de aula?". A análise está explicitada da mesma forma como as demais questões.

Para os professores S1, S2, S3, S5 e S7, é importante explorar as geometrias não euclidianas em sala de aula porque elas possibilitam ao aluno compreender muitos elementos da natureza, visto que nela nem tudo é plano. Observe as falas:

> Para o aluno ter a noção de que nem tudo na natureza é plano, nem tudo na natureza é perfeito... a geometria plana não dá conta de explicar tudo que existe na natureza, ai a gente não consegue explicar tudo isso. (S1)
> Porque no contexto da vida real a gente vai ter a situação que a geometria euclidiana não responde. [...] teríamos que abordar os dois tipos de geometrias, uma vez que ele encontrará ela na sua vida cotidiana. Talvez não com a nomenclatura dela certinho, mas ele vai ter esse conceito. (S2)
> [...] talvez pelo pouco contato do professor com a geometria e não saber suas verdadeiras aplicações, mas são elas que os alunos utilizam no seu dia a dia. (S3)
> [...] os alunos se deparam com situações no dia a dia em que demanda a geometria não euclidiana por isso ele deve conhecê-la. (S7)

Tais professores defendem aspectos que lembram o que defende Cabariti (2004) no fim do trecho a seguir:

> Pode favorecer o processo de compreensão das principais características e natureza da Matemática, visto que este conhecimento faz-se presente não apenas pela quantificação do real e pelo desenvolvimento de técnicas de cálculos com números e com as grandezas, mas sobretudo, pela criação de sistemas abstratos que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados por vezes a fenômenos do mundo físico (CABARITI, 2004, p. 153).

Segundo este autor, muito mais que compreender os fenômenos físicos e o mundo que nos rodeia, as geometrias não euclidianas possibilitam uma compreensão da natureza matemática, na qual nem tudo é estável, pois se podem questionar suas verdades, testar possibilidades e, então, redescobrir seus conceitos, axiomas e postulados.

No ponto de vista dos docentes S4 e S6, as geometrias não euclidianas devem ser levadas para o contexto escolar pelo fato de que elas auxiliam na aquisição de uma nova visão a respeito das coisas e a da própria Matemática.

> Eu acho que se desprende bastante a geometria não euclidiana, ela abre horizontes assim, você para de pensar em uma coisa única, você começa a ver outros modos de se pensar, então você abre um pouco o horizonte, da coisa que achava a é isso... opa... espera aí você começa a analisar e são outras situações, outros casos, outras dimensões. (S4)

> As geometrias não euclidianas contribuem para o desenvolvimento de uma nova compreensão das coisas até mesmo da matemática, sob uma nova perspectiva. (S6)

Estas perspectivas corroboram as ideias defendidas por Berro (2008, p. 78) ao afirmar que, ao ter um contato com as geometrias não euclidianas, "os alunos comecem a enxergar o Universo com olhares distintos do que estão acostumados a fitar, bem como ter uma visão mais crítica do que passa ao seu redor [...] é uma oportunidade excepcional de apresentar um tema complexo utilizando figuras de rara beleza".

A partir disto, no que se refere à importância de se trabalhar com as geometrias não euclidianas em sala de aula, as respostas obtidas puderam ser organizadas em duas categorias:

(1) Visão da natureza e do cotidiano (auxilia no desenvolvimento de uma nova visão sobre natureza e das coisas do cotidiano – S1, S2, S3, S5 e S7); (2) Visão das coisas e da Matemática (contribui para o desenvolvimento de uma nova visão das coisas e da própria Matemática – S4 e S6). Por fim, sistematizaram-se as categorias de acordo com a Figura 23 a seguir:

Figura 23 - Categorias para questão "Quais as diferenças entre a geometria euclidiana e a geometria não euclidiana?"

Fonte: O Autor

Considera-se que, quando se fala da importância de se trabalhar com um determinado conteúdo, refere-se, implicitamente, aos objetivos de um determinado tópico, os quais estão contemplados nos saberes disciplinares e curriculares a partir do enfoque de Tardif (2013). Neste trabalho, pressupõe-se que o ensino das geometrias não euclidianas na Educação Básica pode trazer diversas contribuições para formação do aluno, haja vista que auxilia na compreensão de que a geometria euclidiana não é a única possível e praticável no mundo em que se vive, existem outras que podem auxiliar a compreender melhor as coisas que estão em nossa volta.

Também é possível inferir que uma das principais contribuições deste tópico para a formação dos alunos é a mudança na percepção de que a Matemática contempla verdades prontas e acabadas, mas que pode ser questionada e possibilita a criação de novos conceitos. Tal perspectiva, de modo muito mais simplista, é apontada apenas pelo sujeito S6. Neste contexto, os saberes que dizem respeito aos objetivos do ensino das geometrias não euclidianas também devem ser ampliados pelos sujeitos entrevistados.

Por meio da investigação desenvolvida, foi possível compreender que os professores investigados apresentam saberes limitados em relação a este tópico, o que tem desencadeado reflexos na sua prática, visto que todos eles alegam nunca ter trabalhado em sala de aula com as geometrias não euclidianas, um deles até destaca que “a gente coloca no plano de ensino, lá no último tópico e nunca dá tempo de trabalhar” (S1). E isso não acontece no ensino apenas deste tópico, pois, muitas vezes, os docentes precisam tomar decisões no decorrer de sua prática, sem poderem se apoiar em um “saber-fazer” que lhes possibilitem dominar a situação com as quais ele se depara.

Tendo em vista tais evidencias, é possível compreender que muitos docentes não possuem uma boa formação para o ensino das geometrias, por isso eles têm certa dificuldade em explorá-la em suas aulas. Até mesmo porque apenas dois professores alegam ter tido um contato com essas geometrias em sua formação inicial, mas tópicos isolados, como a geometria esférica e a geometria fractal.

Dessa maneira, propõe-se desenvolver um material, conjunto de vídeos e atividades, baseado na História da Matemática, materiais estes que podem ser aplicados na formação docente, com o intuito de que esses sujeitos possam ampliar tais saberes, possibilitando que eles insiram elementos destas geometrias em suas aulas.

5 ELABORAÇÃO DOS VÍDEOS E DAS ATIVIDADES

> Há ocasiões que é mil vezes preferível fazer de menos que fazer de mais, entrega-se o assunto ao governamento da sensibilidade, ela, melhor que a inteligência racional, saberá proceder segundo o que mais convenha à perfeição dos instantes seguintes.
>
> José Saramago

Nesta seção, apresentam-se os elementos que possibilitaram a elaboração do objeto educacional proposto: sequência de vídeos e atividades baseadas na História da Matemática sobre as geometrias não euclidianas. Dessa forma, são retratadas: o recorte dos episódios que, *a posteriori*, foram transformados em vídeos; os passos realizados na produção dos vídeos; a construção e a apresentação das atividades.

5.1 RECORTE DOS EPISÓDIOS HISTÓRICOS

Para a elaboração dos vídeos, foi necessária a realização dos recortes de episódios históricos, isto é, a seleção dos elementos históricos que possibilitaram construir os *scripts* para os vídeos. Assim, a partir das pesquisas realizadas na literatura, foi possível encontrar elementos que possibilitaram isso.

Tais recortes tiveram como norte os saberes docentes propostos por Tardif (2013), explicitados na segunda seção. Dentre as tipologias de saberes apresentadas, encontrou-se nos saberes disciplinares, nos saberes curriculares e nos saberes da formação profissional subsídios que direcionaram esses recortes.

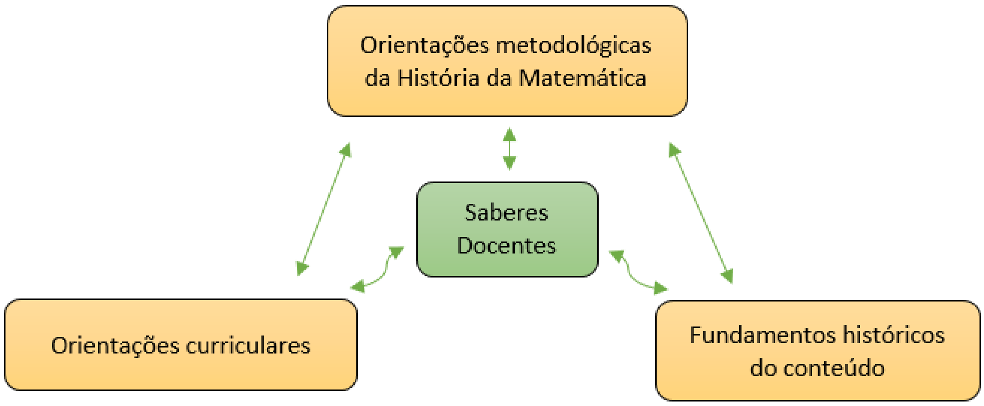
Os saberes da formação profissional são constituídos pelo conjunto de saberes da formação profissional, ou seja, dos conhecimentos pedagógicos relacionados às técnicas e métodos de ensino (saber fazer), que são legitimados cientificamente e são explorados no processo de formação do professor, seja ela inicial ou continuada (TARDIF, 2013).

Os *saberes disciplinares* são os saberes reconhecidos e identificados como pertencentes a um determinado campo de conhecimento (ciências humanas, ciências exatas, ciências biológicas etc.), além disso, são produzidos e acumulados pela humanidade ao longo de sua história, são administrados pela comunidade científica e o acesso a eles se dá, principalmente, por meio das instituições educacionais (TARDIF, 2013).

Os *saberes curriculares* são os saberes relacionados ao modo como as instituições educacionais fazem a gestão dos conhecimentos produzidos e que devem ser transmitidos aos estudantes sendo apresentados, concretamente, sob forma de programas escolares ou orientações curriculares (documentos que apresentam objetivos, conteúdos e métodos) que os professores devem aprender e aplicar. Neste contexto, o professor deve conhecer quais são as orientações que esses documentos trazem sobre o que deve ser ensinado e em que nível esse recurso didático pode ser empregado no ensino desses conteúdos, bem como os objetivos a serem alcançados (TARDIF, 2013).

Desta maneira, foi possível sintetizar, na Figura 24, os saberes que se consideramos necessários para se realizar o recorte de episódios históricos:

Figura 24 - Saberes necessários para o recorte



Fonte: O Autor

Assim, buscou-se olhar para o texto, a partir do conteúdo a ser abordado, das orientações curriculares para este conteúdo, da história do conteúdo e dos pressupostos metodológicos da História da Matemática, e, a partir disto, realizar os recortes. Por meio desses elementos, foi possível realizar o recorte de quatro episódios históricos relacionados à origem e aos conceitos das geometrias não euclidianas, os quais são: Episódio 1: A origem das geometrias não euclidianas; Episódio 2: Retas paralelas nas geometrias não euclidianas; Episódio 3: Os triângulos nas geometrias não euclidianas; Episódio 4: Os quadriláteros nas geometrias não euclidianas.

Para tanto, explicitam-se os recortes realizados e as suas justificativas, que, em suma, levam em consideração os três seguintes aspectos.

As orientações curriculares: o que defendem as DCE (PARANÁ, 2008) e os PCN (BRASIL, 1997) a respeito das geometrias não euclidianas e o seu ensino (vinculado aos saberes curriculares).

Os fundamentos da história: os aspectos históricos das geometrias não euclidianas (vinculado aos saberes disciplinares).

As orientações metodológicas: o que dizem as pesquisas desenvolvidas sobre os aspectos metodológicos da História da Matemática para o ensino de Matemática (vinculado aos saberes da formação pedagógica).

5.1.1 Recorte de Episódios Históricos das Geometrias Não Euclidianas

Nesta subseção, são apresentados os episódios recortados, os quais versam sobre a origem das geometrias não euclidianas e o surgimento de alguns conceitos, principalmente aqueles relacionados às geometrias hiperbólica e elíptica.

5.1.1.1 Episódio 1: a origem das geometrias não euclidianas

As geometrias não euclidianas surgiram a partir da própria geometria euclidiana plana, que teve como seu grande precursor Euclides. Pouco se sabe sobre ele e muitos duvidam da sua existência, mas, de acordo com Nobre (2009), Euclides viveu entre 325 a.C. e 265 a.C. na cidade egípcia de Alexandria, sendo professor da Biblioteca e Museu de Alexandria. Euclides foi autor de uma das maiores obras da Matemática e um dos textos matemáticos mais importantes da época grega, escrito há cerca de 2300 anos, chamado *Os Elementos*.

Esta obra é uma coleção de treze livros, mas não apresenta uma estrutura unificada, sendo caracterizada por um compêndio, que foi organizado por Euclides a partir de muitas obras existentes sobre várias áreas da Matemática incluídas no trabalho.

É no primeiro dos treze livros de *Os Elementos* que se encontram os cinco famosos postulados que deram forma à “Geometria Euclidiana Plana” ou “Geometria Plana”. Além disso, ele traz 23 definições e 9 noções comuns. São os postulados:

> (1) Pode-se traçar uma (única) reta ligando dois pontos.
> (2) Pode-se prolongar (de uma única maneira) uma reta finita continuamente em uma linha reta.
> (3) Pode-se traçar um círculo com centro qualquer e raio qualquer.
> (4) Todos os ângulos retos são iguais.
> (5) Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

O quinto postulado trouxe grandes repercussões entre os matemáticos que se dedicaram a tentar prová-lo, até mesmo porque, segundo Brito (1995), Proclo, um grande comentarista de *Os Elementos* no século V, percebeu que as 28 primeiras proposições do trabalho (465 no total) são demonstradas sem empregar este postulado, sendo que algumas seriam facilmente demonstradas se o quinto postulado fosse utilizado – isso pode indicar que até Euclides tentava "evitar" seu uso (KATZ, 2011).

Diversos são os matemáticos que tentaram prová-lo, dentre eles: Ptolomeu I, Proclo, o árabe Nasis Eddin All Tusin, John Wallis, o padre jesuíta Girolamo Saccheri (o primeiro a publicar), Joahnn Heinrich Lambet, Adrien Marie Legendre, entre tantos outros (BARBOSA, 2011). Muitos também tentaram reescrevê-lo ou criar proposições equivalentes, sendo a mais famosa a proposta por John Playfair (1748-1819), que ficou conhecida como postulado das paralelas, que diz que "por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada" (BARBOSA, 2011, p. 29).

Apesar de todas as investigações e tentativas, não foi possível prová-lo; porém, séculos mais tarde (XVIII e XIX), alguns matemáticos compreenderam que o quinto postulado de Euclides, além de não poder ser provado, poderia ser negado sem que contradições acontecessem. Neste episódio ganham destaque Nikolay Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) e Cal Friedrich Gauss (1777-1855), que percebem que, ao negar ou substituir o quinto postulado por outro, surgiria uma nova geometria, tão válida quanto a de Euclides (BARBOSA, 2011). Isso abriu o caminho para que novas geometrias surgissem e hoje se entende por geometria não euclidiana, como qualquer geometria que contradiz, ao menos, um dos postulados de Euclides (PARANÁ, 2008).

Para justificar o recorte feito para a realização deste estudo, apontam-se os alicerces nos quais o pesquisador se ancorou.

Orientações curriculares: De acordo com as DCE (PARANÁ, 2008), uma abordagem histórica deve vincular as criações matemáticas aos fatos sociais e políticos, às circunstâncias históricas e às correntes filosóficas que determinaram o pensamento e influenciaram o avanço científico de cada época", que são alguns dos elementos explorados no recorte.

Fundamento histórico: Para Hansem (1998), foi a criação de um ramo novo que mostrou que a geometria de Euclides não era uma verdade incontestável, pensamento que se tinha até aquele momento, desta forma este feito abriu um caminho para as discussões sobre a consistência das diversas áreas da ciência e da própria Matemática.

Orientações metodológicas: De acordo com Mendes e Chaquiam (2016), deve-se explorar as histórias relacionadas aos aspectos matemáticos em seu processo de criação, reinvenção e organização lógica, estabelecidos no tempo e no espaço com a finalidade de sistematizar soluções de problemas de ordem sociocultural e científica, em todos os tempos e lugares. No que diz respeito às geometrias não euclidianas, Hansem (1998) propõe que, inicialmente, deve-se apresentar o contexto histórico que possibilitou estas geometrias surgirem: que foram todas as tentativas de prova do quinto postulado de Euclides e também o desenvolvimento da lógica simbólica, que permitiu a definição formal e a demonstração de muitos conceitos, como destaca Sachs (2016).

5.1.1.2 Episódio 2: retas paralelas nas geometrias não euclidianas

Na geometria euclidiana plana, Bonola (1955) diz que duas retas são paralelas se elas não possuem interseção e estão em um mesmo plano, isto é, são equidistantes. Todavia, Lobachevsky, em meados de 1820, define retas paralelas como "todas as linhas retas que num plano partem de um ponto e podem, relativamente a uma linha reta do mesmo plano, ser divididas em duas classes – as que cortam e as que não cortam. As linhas fronteiras de uma e outra classe são chamadas paralelas à linha dada" (KATZ, 2011, p. 1001). Na Figura 10, apresentam-se as retas paralelas na perspectiva de Lobachevsky, como se pode observar, a geometria Lobachevskyana adota a existência de, ao menos, duas retas paralelas a uma reta dada passando por um ponto dado.

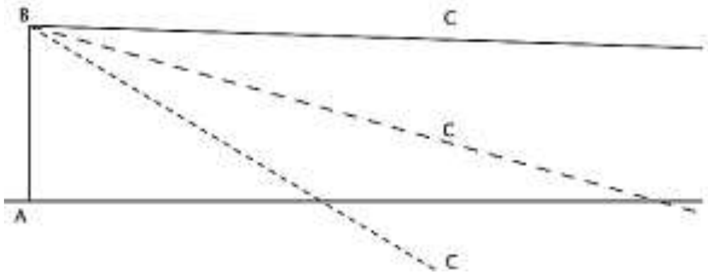
Segundo Bonola (1955), Lobachevsky alterou o postulado das paralelas pelo que hoje é chamado de postulado hierbólico: por um ponto fora de uma reta dada passa mais de uma reta que não intercepta a primeira. Daí a definição de retas paralelas adotadas por ele.

As principais propriedades deduzidas por Lobachevsky, a partir dessa propostas, são:

- Se uma reta s é paralela a r no ponto P, então s será paralela a r em qualquer ponto de s na mesma direção.
- Se s é paralela a r, então r é paralela a s.
- Se r é paralela a s e s é paralela a t, então r é paralela a t.
- Se r é paralela a s, então r é assintótica a s (BONOLA, 1955, p. 87-88).

Já Bolyai definiu o conceito de paralela assintótica, que é a primeira reta que não cruza com outra dada, quando se altera continuamente sua inclinação em relação a outra (RIBEIRO, 2012). Na Figura 25, apresenta-se essa ideia, isto é, inclina-se a reta BC até que esta deixe de interceptar a outra reta:

Figura 25 - Paralela assintótica



Fonte: Ribeiro (2012, p. 54)

Todas essas ideias são válidas na geometria hiperbólica. Porém, na geometria elíptica, Riemann propôs que a as retas fossem os círculos máximos que podem ser obtidos nas superfícies de uma esfera, também chamadas de geodésicas. Além disso, em qualquer esfera, dois círculos máximos se interceptam em mais de um ponto, como mostra a Figura 17. Assim, Riemann propôs que o quinto postulado fosse substituído por: dada uma reta *r* e um ponto *P* que não pertence a *r*, não existe nenhuma reta paralela à *r* que passe por *P* (RIBEIRO, 2012), que claramente pode ser substituído por: paralelas não existem. Outro postulado proposto por Riemann é o de que dados dois pontos sobre a esfera, pode-se encontrar infinitas retas que passam por esses dois pontos (COUTINHO, 2001).

Como justificativa para o recorte realizado são apresentadas as seguintes âncoras.

Orientações curriculares: Segundo as DCE (PARANÁ, 2008), uma das possibilidades é explorar os conceitos da geometria hiperbólica por meio do postulado de Lobachevsky e, também, “na apresentação da geometria elíptica, fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésica; círculos máximos e círculos menores” (PARANÁ, 2008, p, 57).

Fundamento histórico: O quinto postulado de Euclides ou postulado das paralelas foi o principal motivador do surgimento das geometrias não euclidianas, desta forma, Ribeiro (2012) destaca que a ideia de paralelismo seja um dos elementos a serem explorados, dando ênfase ao postulado de Lobachevsky, que possibilitou o surgimento da geometria hiperbólica, e o postulado de Riemann, que possibilitou o surgimento da geometria elíptica.

Orientações metodológicas: De acordo com Mendes e Chaquiam (2016), é preciso extrair das informações históricas a explicação de porquês matemáticos, que podem contribuir para o interesse de estudos futuros por parte dos alunos. Nesta perspectiva, eles destacam que os modelos matemáticos criados ou reformulados em determinadas épocas podem ser fontes inspiradoras que o professor pode levar para sala de aula.

5.1.1.3 Episódio 3: os triângulos nas geometrias não euclidianas

O estudo dos triângulos nas geometrias não euclidianas se iniciou com as tentativas de prova do quinto postulado de Euclides. Uma dessas tentativas foi de Adrien Marie Legendre, um grande matemático francês, que tinha como base a soma dos ângulos internos de um triângulo, assumindo três hipóteses: a soma pode ser 180º, maior que 180º ou menor que 180º. Porém não conseguiu demonstrar (NASCIMENTO, 2013).

Algum tempo depois dessa proposta, matemáticos, utilizando-se de outros artifícios, conseguiram chegar à conclusão de que que: a) soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser maior que 180º; b) A soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser menor que 180º.

No ano de 1826, Taurino (1794-1874) publica um trabalho no qual comenta sobre a hipótese de ângulos obtusos na superfície de uma esfera de raio imaginário. Taurino, a partir de seus estudos, conseguiu chegar à conclusão de que, em um triângulo na superfície esférica, a soma dos ângulos internos é maior que 180º (KATZ, 2011).

Esse triângulo é chamado de triângulo esférico, que é definido por Reis (2006, p. 46) como: Considere *A*, *B* e *C*, três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima. Unindo esses pontos, dois a dois, por arcos de circunferências máximas, todos menores que uma semicircunferência, tem-se um triângulo esférico ABC, com lados $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. A soma dos ângulos desse triângulo pode variar entre 180º a 540º e pode ter um valor fixo dependendo das características do triângulo considerado (COUTINHO, 2001).

Lambert chama de “excesso” a diferença entre 180º e a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo (RIBEIRO, 2012).

Outras propriedades criadas por matemáticos que vieram depois são: na geometria esférica não existem triângulos esféricos semelhantes que não sejam congruentes, isto é, dois triângulos esféricos são semelhantes se são congruentes (RIBEIRO, 2012); dois triângulos esféricos com ângulos correspondentes iguais são congruentes (COUTINHO, 2001).

Ademais, Lobachevsky, a partir de seus estudos, conseguiu chegar ao resultado de que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser menor que 180º, ou seja, em um triângulo construído sobre uma pseudoesfera. Segundo Ribeiro (2012), três "retas" não colineares formam um triângulo ABC chamado de triângulo hiperbólico, como mostra a Figura 19.

De acordo com Coutinho (2001), Saccheri e Lambert obtiveram proposições inusitadas, uma delas é a área de um triângulo ser proporcional à diferença entre a soma de seus ângulos internos e dois ângulos retos, isto é, esta medida de área é dada por $K.\ d$ em que K é uma constante positiva e d é o valor da diferença angular entre 180º e a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo (NASCIMENTO, 2013), que algebricamente pode ser escrito como:

$$d = \pi - (med\ (A) + med\ (B) + med\ (C)).$$

Essa diferença ficou conhecida como deficiência do triângulo (ou defeito), que na geometria euclidiana é igual a zero.

Outras propriedades foram criadas por matemáticos que vieram posteriormente foram: os triângulos hiperbólicos semelhantes são obrigatoriamente congruentes, ou seja, têm que possuir as mesmas medidas (BARBOSA, 2011); a área de um triângulo euclidiano é dada por $\frac{LH}{2}$, em que *L* é o comprimento de um lado do triângulo e *H* a altura do lado, o que não é válido para os triângulos hiperbólicos (BARBOSA, 2011); o teorema de Pitágoras não é válido para um triângulo hiperbólico (NASCIMENTO, 2013); dois polígonos são equivalentes se podem ser divididos no mesmo número finito de pares de triângulos hiperbólicos congruentes (COUTINHO, 2001, p. 64).

Como justificativas para o recorte, pondera-se:

Orientações curriculares: as DCE (PARANÁ, 2008) defendem que é possível explorar o triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos a partir do postulado de Lobachevsky e, a partir de um estudo histórico, destaca que é possível explorar o triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos.

Fundamento histórico: A soma dos ângulos internos de um triângulo está diretamente relacionada às tentativas de prova do quinto postulado e, segundo Ribeiro (2012), alguns matemáticos já tinham estudado sobre esse tópico antes mesmo do surgimento das geometrias não euclidianas. Coutinho (2001) destaca que a possibilidade da soma dos ângulos internos de um triângulo ser maior ou menor que 180° contribuiu para o pensamento de que a existência de uma outra geometria era possível.

Orientações metodológicas: Para Groenwald (2004), é necessário que o professor leve o aluno a compreender a gênese dos conceitos matemáticos, isto é, o que motivou o aparecimento das ideias matemáticas, desta forma, a História da Matemática proporciona uma visão dinâmica da evolução dessa disciplina.

5.1.1.4 Episódio 4: os quadriláteros nas geometrias não euclidianas

O estudo dos quadriláteros nas geometrias não euclidianas surgiu a partir das tentativas de prova do quinto postulado de Euclides, por Giovanni Girolamo Saccheri (16671733) e Johann Heinrich Lambert (1728-1777) (RIBEIRO, 2012).

Saccheri admitiu que: dado um quadrilátero simétrico que possui dois ângulos retos e os outros dois iguais entre si, existem três possibilidades para estes ângulos, que ele chamou de ângulos de topo, ambos serem retos; ambos serem obtusos; ambos serem agudos (BARBOSA, 2011).

Ele conseguiu verificar a validade dos ângulos serem agudos, mas achou incompatível a ideia, já que tinha como base de estudo o plano, ou seja, a geometria euclidiana, e diz até ter encontrado vários resultados estranhos. Algum tempo depois, com as ideias exploradas por Bolyai, Lobachevsky, Gauss, Riemann entre outros, foi possível entender que a medida desse quarto ângulo desse quadrilátero irá depender da geometria considerada: a) geometria plana: esse ângulo é reto; b) geometria hiperbólica: esse ângulo é agudo e c) geometria elíptica: esse ângulo é obtuso (RIBEIRO, 2012).

Já o quadrilátero proposto por Lambert, com o mesmo intuito, possuía três ângulos retos, investigando, assim, o quarto ângulo desse quadrilátero, uma vez que, se conseguisse mostrar que esse também era um ângulo reto, conseguiria provar que o postulado das paralelas poderia ser provado, mas, assim como os outros, ele não conseguiu (NASCIMENTO, 2013).

Da mesma forma que Saccheri, Lambert tinha três hipóteses para o quarto ângulo do quadrilátero: ser reto; ser obtuso; ser agudo. Ele conseguiu verificar que, se os lados do quadrilátero fossem círculos máximos na superfície de uma esfera, a hipótese do ângulo obtuso era válida, assim muitos estudiosos falam que é possível que tenha motivado o trabalho de Riemann.

Mais tarde, foi possível verificar que esses ângulos irão depender da geometria considerada, isto é, tendo dois ângulos retos os outros dois irão depender da geometria considerada: a) geometria plana: esses ângulos são retos; b) geometria hiperbólica: esses ângulos são agudos e c) geometria elíptica: esses ângulos são obtusos (RIBEIRO, 2012).

Além dessas propriedades, existem outras a serem consideradas em relação aos quadriláteros, como destaca Ribeiro (2012), que são consequências das propriedades vistas.

a) Na geometria hiperbólica: a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é menor que 360º; na geometria hiperbólica não existem retângulos, os quadriláteros terão no máximo três ângulos retos; o quadrado de lado unitário não pode ser empregado no cálculo de áreas, desta forma é utilizado um triângulo.

b) Na geometria elíptica: a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é maior que 360º.

Como justificativas para tal recorte, seguem:

Orientações curriculares: As DCE de Matemática (PARANÁ, 2008) defendem que conceitos elementares das geometrias hiperbólica e elíptica façam parte da formação do aluno, dentre estes conceitos ela remete às figuras geométricas, aos ângulos, aos triângulos, às retas, ao paralelismo etc. Neste contexto, o estudo dos quadriláteros é um aprofundamento de todos os conceitos já explorados nos tópicos anteriores, além de ter uma grande aplicabilidade na Matemática, como o cálculo de áreas.

Fundamento histórico: O estudo dos quadriláteros e seus ângulos está profundamente relacionado às tentativas de prova do quinto postulado de Euclides. Dentre os matemáticos que partiram desse estudo, pode-se citar Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) e Johann Heinrich Lambert (17281777), que chegaram em resultados muitos próximos dos que obtiveram Lobachevsky e Bolyai, tempos antes de surgirem as geometrias não euclidianas (RIBEIRO, 2012).

Orientações metodológicas: O valor do conhecimento histórico não é ter uma bateria de histórias curiosas para entreter os alunos, a fim de torná-la mais lúdica, pois a Matemática não pode se reduzir apenas a contar histórias, mas é necessário repensar a construção de seus conceitos, e isso só se faz, conhecendo primeiro a origem dos mesmos (MACHADO; MENDES, 2013).

5.2 PRODUÇÃO DOS VÍDEOS DIDÁTICOS

Neste tópico, mostra-se o processo de elaboração dos vídeos didáticos, que foram desenvolvidos com base nas técnicas de elaboração de vídeos balizados na História da Matemática, apresentadas por Machado e Mendes (2013), bem como nas propostas de ensino apoiadas na História da Matemática, defendidas por Miguel (2005).

Procurou-se desenvolver uma sequência baseada em uma ordem de ensino que mantém a continuidade de aprendizagem (MENDES, 2001). Por isso, partiu-se de uma progressão de apresentação dos conteúdos, de modo a ter um cuidado na organização das etapas e da apresentação dos vídeos para que, dessa forma, fosse possível atingir os objetivos iniciais.

Assim como qualquer outra tecnologia que coleta, armazena e exibe informação, os vídeos envolvem três elementos básicos e diferenciados de qualquer processo de ensino e de aprendizagem: a interatividade (play, pausar, rever etc.), os sistemas de símbolos utilizados (imagens, músicas, gráficos etc.), a mensagem, além dos mais diversos conteúdos vinculados (MACHADO; MENDES, 2013).

Do ponto de vista educativo, o vídeo deve ser uma ferramenta inovadora para o plano curricular o qual pode ser utilizada na formação do sujeito, em qualquer nível e modalidade de ensino. De acordo com Machado e Mendes (2013), a proposta do vídeo deve ser uma consequência de um trabalho de reflexão que permite encontrar razões pedagógicas que justifiquem a utilização dos vídeos e de outros meios tecnológicos, isto é, deve-se ter uma finalidade.

Para a elaboração dos vídeos didáticos sobre conceitos das geometrias não euclidianas e seus aspectos históricos, levou-se em consideração as questões norteadoras para o desenvolvimento de vídeos educativos propostas por Telg (2009 apud MACHADO; MENDES, 2013): a) Qual é a necessidade de um programa de vídeo? Deve-se fazer uma avaliação das necessidades, em essência, deve-se justificar a necessidade de se utilizar o vídeo; b) Quais são as metas e objetivos do vídeo? Metas e objetivos estruturam planejamento, ou seja, qual é finalidade de se utilizar o vídeo, e o que se pretende alcançar com o seu uso; c) Quem são os alunos (a plateia)? Deve-se levar em consideração quem serão os expectadores, ou seja, para que sujeitos eles serão destinados; d) Quais são as idades dos membros da audiência, cultura, interesses e níveis de ensino? Deve-se conhecer as necessidades do público-alvo, que são as considerações mais importantes em uma produção de vídeo; e) Qual será o conteúdo? Quais são as informações que você está tentando dizer ou passar para a plateia? Qual é o conteúdo educativo? f) Como é que os alunos serão avaliados? Como você vai conhecer se o seu público aprendeu alguma coisa? Que perguntas você gostaria que um membro da plateia fizesse para ser capaz de responder depois de ter visto o vídeo? A avaliação é importante, mas muitas vezes é deixada de fora do processo de produção, por isso ela deve ser planejada, pois é ela que dará os indícios de que os objetivos foram alcançados, e g) Como é que o vídeo será avaliado? Determinar critérios de avaliação, que pode acontecer com um público pequeno.

Além disso, tomou-se o cuidado de seguir as orientações de Franco (2009), que afirma que todo vídeo educativo quer captar a atenção das pessoas mobilizando seus conhecimentos, percepções e sentimentos. Franco (2009, p. 1 apud MACHADO, MENDES, 2013, p. 93) também apresenta alguns conselhos para a elaboração de um vídeo educativo:

> Para produzir um vídeo educativo se deve perguntar primeiro se já existe o material que pretendemos fazer, no caso, se houver, nós temos que fazer outra pergunta: o que novas contribuições poderemos dar aos nossos conteúdos de vídeo. Também é essencial, como o tema e abordagem, selecionar e definir o nosso público-alvo. Note-se que os interesses e necessidades da amostra devem ser definidas, então você pode desenvolver uma ideia geral destinada a todos, mas um alcance específico e motivar o nosso público-alvo. O processo de produção de vídeo educativo é um trabalho especializado de comunicação, e deve ser coordenada por profissionais treinados para a tarefa. Além disso, para cumprir os objetivos educacionais do vídeo, o especialista em design de conteúdo deve ser envolvido em todo o processo de produção, para garantir que a ideia / mensagem / conhecimento a ser transferido corretamente para a linguagem audiovisual.

Consequentemente, pode-se compreender, a partir das orientações de Franco (2009), que o procedimento da elaboração dos vídeos didáticos deve ser adaptado a cada caso de acordo com as circunstâncias, dentre eles o assunto que deve ser abordado.

Destaca-se que antes foi feita uma pesquisa para saber se já haviam sido produzidos vídeos baseados na História da Matemática sobre as geometrias não euclidianas e, em uma pesquisa no site do Youtube (youtube.com), encontrou-se o seguinte: *"As Geometrias Não Euclidianas"*[17]. Nesse vídeo, Jeremy Gray, matemático inglês, narra alguns conceitos e elementos históricos de diversos tópicos da Matemática e, no sexto vídeo, com cerca de vinte e cinco minutos, ele explora o surgimento das geometrias não euclidianas. Esse vídeo se difere dos propostos nesse trabalho, pois os nossos não se tratam apenas de narrações, mas animações nas quais um avatar, a partir de imagens, sons e textos, explora conceitos das geometrias não euclidianas.

Neste contexto, já se tinha definido o conteúdo (aspectos históricos e conceituais das geometrias não euclidianas) e o público alvo (professores de

---

[17] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=gqyY_vSQWEw

Matemática que atuam nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Partindo disto, seguiram-se os passos propostos por Machado e Mendes (2013) para a elaboração de um vídeo didático baseado na História da Matemática:

1. Título dos vídeos didáticos

“O título a ser dado nos vídeos deve ser fruto da realização de um estudo e pesquisa sobre um determinado tema ou assunto que o represente de uma maneira geral” (MACHADO; MENDES, 2013, p. 95). Neste sentido, o título deve expressar qual é o foco principal dos vídeos.

À vista disso, escolheram-se os seguintes títulos para os vídeos produzidos: “A origem das geometrias não euclidianas”, “Retas paralelas nas geometrias não euclidianas”, “Os triângulos nas geometrias não euclidianas” e “Os quadriláteros nas geometrias não euclidianas”.

2. Introdução

“Trata-se na verdade de uma síntese ou resumo do assunto; é uma breve introdução ao foco do assunto e que destaca os aspectos mais importantes. Em suma, é o que vai atrair a atenção inicial dos alunos às vídeo-aulas” (MACHADO; MENDES, 2013, p. 96). Além disso, destacam que o importante é a brevidade.

Desse modo, procurou-se ser bem breve destacando apenas os conceitos que deveriam ser explorados e o objetivo de cada vídeo.

3. *Storyboard*

“Desenho das tomadas e enquadramento de modo que se ajustem as realizações das fases anteriores [...]. Isso se faz necessário para garantir que as imagens usadas obedeçam àqueles conteúdos de que tratam as vídeo-aulas” (MACHADO; MENDES, 2013, p. 96). Sem o *storyboard,* as imagens pouco têm a ver com a narração. Em suma, esta etapa é o planejamento, bem como a organização do vídeo a ser desenvolvido a partir das imagens, que, no nosso caso, foi feita a partir dos episódios históricos recortados e destacados na subseção 5.1.

Os vídeos foram produzidos em animação, para tanto, utilizou-se o *software Microsoft Power Point*, em que as imagens foram animadas com efeitos visuais de entrada, saída, ênfase e transição, de maneira que dessem a impressão de movimento real. Alguns objetos foram programados para aparecer no momento desejado, bem como sair da apresentação e, por isso, o roteiro foi muito importante, pois a partir dele escolheu-se o que iria aparecer e em que momento, ainda sem a narração, como mostra a Figura 26:

Figura 26 - Animação de imagens no *software* Microsoft Power Point

Fonte: O Autor

Optou-se pelo uso do avatar, pois se pensou que seria mais fácil uni-lo a outras imagens, a textos, entre outros elementos.

4. Revisão e elaboração

Nesta fase, é importante moldar as imagens e fazer as correções necessárias, além disso:

> Outra coisa a se fazer nessa etapa é a seleção musical que fará parte da trilha sonora do vídeo como background. Um cuidado a ser tomado é a seleção de uma música para cada etapa, atentando para seu tamanho: 10, 30, 45, 60 segundos ou mais, se necessário. É importante escolher um acorde com a música do filme, possivelmente, uma música sem palavras,

> para não se sobrepor à voz do narrador ou do ator/palestrante/professor (MACHADO; MENDES, 2013, p. 97).

No que diz respeito aos vídeos elaborados, a escolha das músicas (trilhas) foi uma etapa em que se encontrou dificuldades, pois era necessário tomar cuidado com essa escolha que deveria ser apenas de trilhas livres de direitos autorais, ou seja, aquelas que já estão no domínio público ou trilhas brancas[18]. Por isso, optou-se pelas trilhas brancas por ter melhor qualidade e ajustar melhor ao que se pretendia, além dos diversos tamanhos que podem ser encontradas, 1 minuto, 30, 20, 15 e 10 segundos, permitindo ser encaixada em diversos momentos.

5. Filmagem

“Só agora, neste momento, procedem-se as filmagens. Devem aderir plenamente ao que está previsto. Isso apenas permite que o vídeo tenha um bom desenvolvimento” (MACHADO; MENDES, 2013, p. 97).

Assim, feita a conclusão das montagens dos vídeos didáticos em apresentação do *Microsoft Power Point*, realizou-se a filmagem a partir do *software* Camtasia Studio (Figura 27), que é um aplicativo que permite a criação e a edição de vídeos a partir da área de trabalho do computador, ou seja, ele permite gravar toda atividade realizada na tela do computador, que no caso dos vídeos produzidos foram a gravação das animações produzidas.

[18] São trilhas sonoras livres, isto é, de domínio público.

Figura 27 - Gravação das imagens no Camtasia

Fonte: O Autor

6. Edição Preliminar

Depois que é realizada a filmagem, os vídeos devem passar por um processo de edição e montagem que “é o conjunto do vídeo, incluindo os efeitos e transições, que ajudam a linha narrativa do vídeo que está sendo feito. Nesta fase procedem-se cortes em partes de cada cena do vídeo, aparando os excessos preliminares, intermediários e finais” (MACHADO; MENDES, 2013, p. 97).

Nesta etapa, deve ser feita, também, a inserção do *brackground*, que é a música de fundo, que, de acordo com Machado e Mendes (2013, p. 98), “não deve haver espaço com músicas em altura de som maior do que a voz do narrador, para não prejudicar o entendimento do texto. Deve haver sincronia entre imagens e sons para que o público possa relaxar e desfrutar do conteúdo do vídeo”.

7. Edição final

> São os ajustes finais de sincronias, cortes ou prolongamentos de imagens ou áudio, bem como a maneira de como escolherá salvar seu arquivo. Se desejar publicar na internet, rodar em DVD ou outra mídia, atenção para o formato do vídeo. Isso é importante porque o tamanho final do arquivo deve ficar de acordo com as necessidades. Um vídeo que será compartilhado na internet não precisa da mesma resolução de um vídeo que será apresentado em um evento ou gravado em um CD (MACHADO; MENDES, 2013, p. 98).

Antes de desenvolver estas duas etapas de edição (preliminar e final), assistiram-se os vídeos, a fim de identificar se havia algo para ser corrigido ou fazer alguns cortes necessários. Além disso, ambas as etapas foram realizadas com os recursos do *software* Camtasia Studio, que, em termos de edição, oferece a função de fazer *zoom*, adicionar áudio, criar efeitos de transição e limpar o som de ruídos. Com ele é possível, também, gravar os vídeos em qualquer formato comum de multimídia: avi, swf, exe, flv, wmv, gif animed, entre outros.

Seguindo esses passos, foram produzidos quatro vídeos (APÊNDICE A), nos quais o avatar, com o auxílio imagens, textos, entre outros elementos, explora a criação das geometrias não euclidianas e o surgimento de algumas ideias relacionadas as geometrias hiperbólica e elíptica (retas paralelas, triângulos e quadriláteros).

5.3 PRODUÇÃO DAS ATIVIDADES

Nesta subseção, apresenta-se a forma como as sequências de atividades, correspondentes a cada vídeo, foram pensadas e produzidas, destacando a estrutura, os elementos e os objetivos que elas pretendem alcançar. As atividades tiveram como princípio a abordagem histórico-investigativa a respeito das propriedades e definições geométricas. Estas, de acordo com Nascimento (2013, p. 55), incitam ao desenvolvimento da “capacidade de indagar questões dadas para averiguação e que tenha possibilidade de progredir com seu raciocínio lógico-matemático ampliando, mediante confrontos, as definições dos elementos geométricos e suas propriedades”.

O intuito de se explorar a investigação nas atividades propostas reside no fato de que “investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 13). Desta forma, a partir da investigação é possível aguçar a curiosidade e o interesse, sendo estas atitudes positivas frente ao conhecimento matemático e que podem favorecer a compreensão e uma reflexão em relação aos conceitos investigados.

Salienta-se também que o uso da História da Matemática nas atividades parte do princípio de que a história dá significado ao tema explorado, pois o sujeito, ao conhecer como os conceitos, técnicas e propriedades foram surgindo, começa a ver sentido no tema estudado, o que pode contribuir para uma melhor compreensão dos conceitos explorados, como já se destacou.

Para Mendes (2009), o uso da investigação histórica é um fator determinante na prática do ensino da Matemática, sendo esta uma forma de propiciar uma compreensão substantiva dos conceitos e de desenvolver habilidades frente a essa área do conhecimento.

Para o referido autor:

> Abordar o ensino de Matemática por meio de investigação histórica desponta como uma contribuição decisiva para o exercício de uma prática reflexiva em Educação Matemática. Esse empreendimento didático contribui para o estudante desenvolver competências e habilidades de construção autônoma da sua aprendizagem e exercitar a disciplina investigatória de compreensão sólida do desenvolvimento epistemológico da Matemática, de suas diversas formas de representação em todos os tempos e de suas conexões com outras áreas do conhecimento (MENDES, 2009, p. 115).

Partindo dessas reflexões, foi idealizada uma sequência de atividades para cada vídeo produzido, atividades estas pensadas a partir de um mesmo princípio: refletir sobre algumas propriedades e características que são válidas na geometria euclidiana plana e que se modificam nas geometrias hiperbólica e elíptica; o norte foram os recortes realizados.

Nos próximos tópicos, são apresentadas essas atividades, dando destaque à maneira como elas foram elaboradas, bem como aos materiais produzidos que permitiram que elas pudessem ser realizadas.

5.3.1 As Atividades

Baseando-nos nos recortes dos episódios históricos apresentados na subseção 5.1, propôs-se construir uma sequência de atividades que pudessem ser utilizadas em conjunto com os vídeos didáticos na formação continuada de professores. A partir das reflexões realizadas a respeito da História da Matemática enquanto recurso didático, buscou-se desenvolvê-las de modo a possibilitar a compreensão de algumas propriedades que são válidas na geometria euclidiana plana e suas modificações na geometria hiperbólica e na geometria elíptica, tendo como princípio a investigação histórica proposta por Mendes (2009).

Tais produções partiram do intuito de propiciar aos docentes uma ampliação de suas compreensões a respeito dos elementos e propriedades geométricas, por meio de reflexões sobre paralelismo, a soma dos ângulos internos dos triângulos e as características dessa forma geométrica, a soma dos ângulos internos dos quadriláteros e as principais características dessa figura.

As atividades foram produzidas seguindo uma estrutura básica: *1º - Conhecimentos prévios:* retomada dos conceitos da geometria euclidiana plana que são pré-requisitos para realização das atividades; *2º - Recorte histórico:* apresentação dos elementos históricos da criação dos conceitos matemáticos que são explorados na atividade (quem criou; quando criou; o que foi proposto; entre outros elementos); *3º - Objetivo:* delimitação do objetivo que se pretende alcançar com a realização da atividade; *4º - Procedimentos:* formalização da atividade, isto é, delimitação do que deve ser realizado ou respondido.

Por meio dessa estrutura, foram elaboradas quatro sequências de atividades (APÊNDICE B).

A primeira sequência, que não atende completamente a essa estrutura, propõe uma discussão inicial a respeito do que são e como surgiram as geometrias não euclidianas. Na primeira atividade, o intuito foi levar os professores a refletirem sobre as superfícies, que são um dos elementos principais que algumas das geometrias não euclidianas se diferem da geometria euclidiana. Assim, pensou-se no balão no qual é possível desenhar uma figura “plana” enquanto vazio e que, ao enchê-lo, a figura sofre algumas alterações. E a partir dessa figura, alguns questionamentos podem ser feitos. Já na segunda atividade, buscou-se levar a uma reflexão sobre como surgiram as geometrias não euclidianas, isto é, apresenta-se uma citação e, a partir do que os professores compreendem e das informações apresentadas no vídeo, eles devem analisá-la.

Na segunda sequência, explora-se a ideia de retas paralelas, com o objetivo principal de levar os professores a refletir sobre as seguintes ideias: dados uma reta e um ponto fora dela, pode existir uma única reta paralela à reta dada passando por esse ponto, pode existir mais de uma reta paralela à reta dada passando por esse ponto ou podem não existir retas paralelas, dependendo da geometria considerada. Com a finalidade de que eles julguem estas afirmações e reflitam sobre outros conceitos e propriedades que envolvem as retas paralelas em outras geometrias, são propostas as construções destas retas com régua e compasso no plano (representado pela folha de sulfite), na pseudoesfera (representado por uma superfície de *biscuit* – Figura 29) e na esfera (representado pela bola de isopor – Figura 28) e, a partir delas, são propostos alguns questionamentos.

Seguindo a mesma estrutura, a terceira sequência propõe uma reflexão sobre os triângulos, tendo como objetivo principal possibilitar uma discussão sobre as seguintes afirmações: dado um triângulo qualquer, a soma de seus ângulos internos pode ser 180º, pode ser menor que 180º ou pode ser maior que 180º, dependendo da geometria considerada. Para que eles julguem essas informações e outros elementos que envolvem a geometria hiperbólica e elíptica, também se propõe a construção de triângulos nas mesmas superfícies da segunda sequência e, com o auxílio do transferidor, os docentes devem medir e somar os ângulos destas figuras. E, assim, são propostos alguns questionamentos.

Por fim, com a quarta sequência, pretende-se possibilitar aos professores uma reflexão a respeito dos quadriláteros, com o objetivo principal de ponderar sobre a soma dos ângulos internos destas figuras que: pode ser 360º, pode ser menor que 360º ou pode ser maior que 360º, e que, também, depende da geometria considerada. Da mesma forma como nas duas últimas sequências, são propostas as construções nas mesmas superfícies e, com o auxílio do transferidor, os ângulos destas figuras geométricas devem ser medidos e somados. A partir destes resultados, alguns questionamentos devem ser respondidos.

Em suma, cada sequência é composta por um conjunto atividades, seguindo a ordem apresentada pelo Quadro 3:

Quadro 3 - Atividades que compõem as sequências

Atividades		A criação das geometrias não euclidianas	Retas paralelas	Os triângulos	Os quadriláteros
	1	Figuras planas no balão.	Retas paralelas na geometria euclidiana.	Triângulos na geometria euclidiana.	Quadriláteros na geometria euclidiana.
	2	A origem das geometrias não euclidianas.	Retas paralelas na geometria hiperbólica.	Triângulos na geometria hiperbólica.	Quadriláteros na geometria hiperbólica.
	3	________	Retas paralelas na geometria elíptica.	Triângulos na geometria elíptica.	Quadriláteros na geometria elíptica.
	4	________	Avaliação das construções.	Avaliação das construções.	Avaliação das construções.
	5	________	Comparando as diferenças.	Comparando as diferenças.	Comparando as diferenças.

Fonte: O Autor

Pode-se perceber, a partir deste quadro, que a intenção das atividades é que os professores reflitam sobre as mesmas propriedades na geometria euclidiana, na geometria hiperbólica e na geometria elíptica. No decorrer delas, os sujeitos são convidados a realizar a mesma construção nas superfícies em que cada uma se desenvolve e, por intermédio delas, são sugeridos alguns questionamentos que direcionam a uma investigação a respeito dessas propriedades.

5.3.2 Os Materiais

Como se pode observar, as sequências produzidas propõem construções geométricas em diferentes superfícies, o que exigiu a produção de alguns materiais que pudessem ser utilizados nestas construções.

Inicialmente, pensou-se em objetos nos quais pudessem ser desenhados: um que representasse a esfera e outro que representasse a pseudoesfera. Para tanto, foram propostas a bola de isopor (esfera), de 10 cm de diâmetro, encontrada em papelarias, e uma sela de *biscuit* (pseudoesfera), produzida artesanalmente, como mostra a Figura 28:

Figura 28 - Bola de isopor e sela de *biscuit*

Fonte: O Autor

Desenvolvidas as atividades e definidos esses objetos, foi proposto um minicurso na V Semana da Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornélio Procópio-PR, intitulado “Afinal, como surgiram as geometrias não euclidianas e seus conceitos?”, no intuito de avaliá-los na prática. Trinta pessoas participaram, dentre elas alunos do curso de Licenciatura em Matemática, professores do curso de Licenciatura e da Educação Básica. No decorrer deste minicurso, foi possível identificar as seguintes dificuldades: a sela de *biscuit* era muito pequena, e, por isso, era difícil realizar as construções nela; era difícil manusear o transferidor e a régua convencional sobre as superfícies; e alguns questionamentos estavam muito repetitivos.

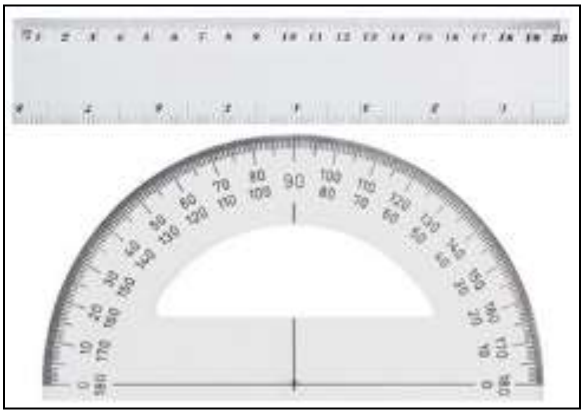
Por isso, modificou-se a sela de *biscuit* e optou-se em utilizar parte de uma pseudoesfera, tendo como molde a parte superior de uma garrafa. Na Figura 29, apresenta-se a nova proposta:

Figura 29 - Parte da pseudoesfera de *biscuit*

Fonte: O Autor

Além disso, foram construídos o transferidor e a régua em papel acetato, o que permitiu que eles ficassem maleáveis, podendo ser utilizados em outras superfícies diferentes do plano e possibilitando, assim, uma maior precisão nas medidas e nas construções nas superfícies curvas, o que os convencionais não permitiam. Estes estão apesentados na Figura 30:

Figura 30 - Régua e transferidor construídos em papel acetato



Fonte: O Autor

Tais instrumentos possibilitaram uma agilidade maior na realização das atividades, o que foi sentido ao longo do curso ministrado aos professores da Educação Básica, que é apresentado na próxima seção.

6 A APLICAÇÃO DOS VÍDEOS DIDÁTICOS E ATIVIDADES EM UM CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA

> O conhecimento (...) exige uma presença curiosa do sujeito em face do mundo. Requer sua ação transformadora sobre a realidade. Demanda uma busca constante. Implica em invenção e em reinvenção. Reclama a reflexão crítica de cada um sobre o ato mesmo de conhecer, pelo qual se reconhece conhecendo e, ao reconhecer-se assim, percebe o "como" de seu conhecer e os condicionamentos a que está submetido seu ato.
>
> Paulo Freire (2002, p. 27).

No intuito de propiciar aos professores de Matemática uma reflexão a respeito das geometrias não euclidianas e, também, avaliar o potencial do material produzido, foi proposto curso de formação continuada para professores que atuam na Educação Básica (anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio) no município de Leópolis-PR. Assim, a presente seção traz uma reflexão sobre o curso ministrado e uma análise dos resultados obtidos com ele.

Participaram deste curso seis professoras e sobre elas é possível destacar que todas possuíam a mesma formação: licenciatura em ciências[19], que concedia a habilitação para o ensino da Matemática e Ciências nos anos finais do Ensino Fundamental (licenciatura curta), e que permitia ao professor escolher uma complementação (licenciatura plena) em Matemática (4), Física (1), Química (1) ou Biologia (1 – a mesma da Química). Além disso, todas elas eram efetivas da rede pública de ensino e já atuavam, em média, há mais de dez anos como professoras.

O curso foi ministrado em uma escola pública do município, sob a concessão do Núcleo Regional de Cornélio Procópio-PR e da direção do colégio[20], em meados de abril de 2017 em três encontros, aos sábados, totalizando doze horas de duração, conforme o cronograma presente no Quadro 4:

---

[19] O curso nessa modalidade já não é mais oferecido pela instituição em que elas se formaram.

[20] A cidade em que o curso foi ministrado é pequena (cerca de 4.500 habitantes), tendo apenas duas escolas localizadas na zona urbana (uma que oferta os anos finais do Ensino Fundamental e a outa oferta o Ensino Médio), então escolhemos a que oferecia uma melhor comodidade (sala com os recursos necessários – mesas, projetor, quadro etc.). Além disso, cabe salientar que são poucos professores que atuam na disciplina de Matemática na cidade (cerca de 10 professores), então fomos nas escolas divulgando o curso, participando, assim, aqueles que se interessaram.

Quadro 4 - Cronograma do curso de formação

Encontro	Atividades desenvolvidas
1º (dia 01/04/2017, das 08h às 12h)	• Discussão inicial. • Atividades e vídeo sobre a origem das geometrias não euclidianas.
2º (dia 08/04/2017, das 08h às 12h)	• Atividades e vídeo sobre as retas paralelas. • Atividades e vídeo sobre os triângulos.
3º (dia 29/04/2017, das 08h às 12h)	• Atividades e vídeo sobre os quadriláteros. • Questionário final. • Discussão sobre o que foi desenvolvido ao longo de curso, bem como sobre a necessidade de se abordar este tópico em sala de aula.

Fonte: O Autor

Passa-se a apresentar o que foi desenvolvido neste curso e uma análise dos resultados obtidos.

1º Encontro

Este se iniciou com uma discussão[21], no intuito conhecer as professoras presentes e observar seus saberes sobre estas geometrias.

Finalizada essa discussão, deu-se início às atividades da primeira sequência, na qual inicialmente perguntou-se às professoras: O que são estas geometrias não euclidianas? A partir desta, foi estabelecida uma discussão em que cada uma apresentava sua opinião e uma ia complementando as ideias da outra, e, assim, novos questionamentos eram realizados. De acordo com elas, as geometrias não euclidianas eram uma geometria que explorava as três dimensões, isto é, faces, arestas, vértices, entre outros elementos que remetem à geometria euclidiana espacial, o que deu indícios de que elas não sabiam do que se tratava. De acordo com elas, nunca haviam tido um contato profundo com estas geometrias, e o pouco que tiveram foi por intermédio de livros didáticos.

Assim, foi possível identificar que algumas participantes não sabiam diferenciar as geometrias não euclidianas da geometria euclidiana espacial, que também é fundamentada pelos cinco postulados de Euclides, como destaca

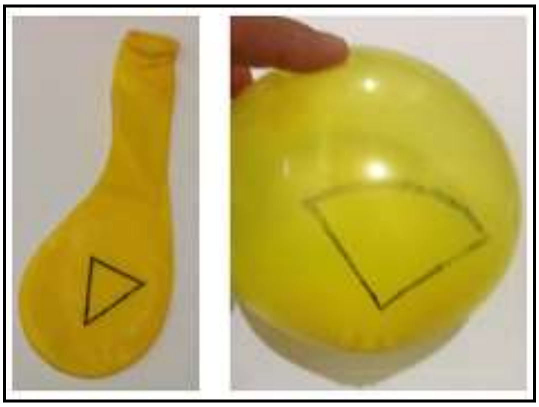
[21] Todo curso foi gravado em áudio.

Machado (2012), evidenciando a carência na formação delas em relação a este tópico.

Encerradas essas discussões, entregou-se a elas um conjunto de materiais: régua comum, lápis, borracha, caneta, compasso, as cópias das atividades, transferidor (de acetato), régua (de acetato), balão vazio (de festa), esferas de isopor e a superfície de *biscuit*.

Em seguida, sugeriu-se a elas que desenhassem em um balão vazio uma figura geométrica plana (quadrado, triângulo, retângulo, losango, trapézio etc.) e posteriormente os enchessem, como mostra a Figura 31:

Figura 31 - Atividade dos balões



Fonte: O Autor

Feito isso, propôs-se às professoras uma reflexão sobre as modificações que as figuras tinham sofrido. Elas destacaram que as figuras haviam sofrido algumas deformações, sendo a principal na forma dos lados, visto que alguns permaneciam “retos”, porém outros ficavam “curvos”. A partir das observações feitas por elas, sugeriu-se que respondessem as questões que estavam na folha, destacando as suas conclusões. Algumas delas foram: *“A figura manteve suas linhas, seus pontos, mais mudou sua curvatura”*; *“De repente as linhas ficaram tortas, porém manteve a característica inicial”*; *“As retas não ficaram tão perfeitas, mas manteve o padrão”.*

Logo após, destacou-se que os conceitos e propriedades, que seriam explorados ao longo das outras atividades, poderiam explicar estas deformações.

Em seguida, apresentou-se o primeiro vídeo que foi produzido, *A origem das geometrias não euclidianas*, que mostrou o surgimento destas geometrias, destacando como e quem contribuiu para tal. Após a exibição do vídeo, as informações nele exibidas foram questionadas e debatidas, possibilitando, assim, uma melhor compreensão das ideias nele abordadas. Feito isso, retomou-se a ideia explorada no balão e nesse momento uma delas disse: *Nossa! É por isso que a figura fica curva! Era a superfície, uma geometria esférica!* Logo, elas conseguiram relacionar o balão à esfera e, nesse sentido, foi possível destacar que a figura sofria alterações dependendo da superfície na qual era construída.

Na sequência, elas tiveram que analisar uma citação constante na atividade que remetia a esse surgimento, o que permitiu identificar que elas haviam compreendido o contexto de criação explorado no vídeo.

2º Encontro

Deu-se início à segunda sequência que remetia ao estudo das paralelas. Nas três primeiras atividades elas deveriam construir retas paralelas, tendo como referência o postulado de *Playfair,* o qual diz que “dado uma reta e um ponto fora dela, pode se traçar uma única reta paralela à reta dada”, seguindo os mesmos passos, em três diferentes superfícies: na folha de papel (representando o plano), na superfície de *biscuit* (representando a pseudoesfera) e na esfera de isopor (representando a superfície esférica), representados nas Figuras 32 e 33:

Figura 32 - Construção das retas paralelas

Fonte: O Autor

Figura 33 - Professoras realizando as construções

Fonte: O Autor

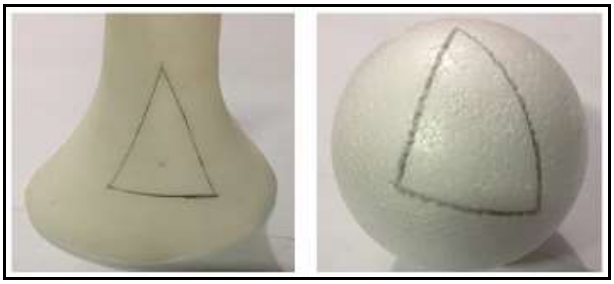
Durante estas construções, as docentes puderam observar que o traçado das retas paralelas só serve para o referencial euclidiano, pois na geometria esférica não existem retas paralelas e na geometria hiperbólica pode-se passar mais de uma reta paralela à reta inicial. Por exemplo, uma das questões que elas deveriam responder questionava se havia sofrido alguma deformação em relação à reta paralela do quinto postulado de Euclides, uma delas respondeu "*sim, a afirmação só é verdadeira no plano* (geometria euclidiana)". Além disso, outra professora respondeu em uma das questões que *"em espaços diferentes* (outras geometrias) *nem sempre existem retas paralelas"*, e, quando indagadas sobre a existência de retas paralelas em qualquer espaço, outra professora respondeu: *"nem sempre existem retas paralelas, pois há espaços que elas podem não existir e há espaços que podem existir mais de uma"*.

De início, elas acreditavam que, independentemente da geometria considerada, o paralelismo acontecia em qualquer espaço, o que já era internalizado a partir do que haviam aprendido ao longo de suas vidas acadêmicas e do que ensinavam em suas aulas, que era a geometria euclidiana plana, por meio de toda essa experimentação e visualização proposta, foi possível mudar essa ideia. Alcançou-se o objetivo da sequência, porque, passado o conflito, houve a aceitação de que o paralelismo, segundo Euclides, é válido apenas na geometria euclidiana e que, quando muda a geometria, consequentemente, existirão ou não retas paralelas.

Finalizou-se a sequência com a apresentação do segundo vídeo elaborado, *Retas paralelas nas geometrias não euclidianas*. Nele, as professoras puderam compreender quem definiu a ideia de paralelismo na geometria hiperbólica e na geometria elíptica, entre outros elementos e propriedades que foram explorados por meio dele. As imagens e animações, foram fundamentais para compreensão desses conceitos, o que permitiu finalizar e complementar as ideias discutidas nas atividades e nas construções realizadas.

Em seguida, deu-se início à terceira sequência, que versava sobre os triângulos, dando destaque à soma dos ângulos internos. Os materiais empregados na realização das atividades foram os mesmos utilizados na segunda sequência, isto é, um papel sulfite, uma superfície de *biscuit* e uma esfera de isopor. Inicialmente, explorou-se a definição geral de triângulo, independente da geometria, e algumas propriedades relacionadas aos triângulos que são válidas na geometria euclidiana plana. Propôs-se, logo após, que as professoras marcassem três pontos não colineares no plano (sulfite), na esfera (bola de isopor) e no espaço hiperbólico (superfície de *biscuit*) e que, então, ligassem esses pontos. Questionados sobre a figura formada, as docentes responderam, sem hesitar, que se tratavam de triângulos; porém, com algumas modificações nos lados, que eram curvos. A exemplo, apresentam-se alguns triângulos construídos por elas na Figura 34:

Figura 34 - Construção dos triângulos



Fonte: O Autor

Terminadas as construções, propôs-se que medissem os ângulos internos dos triângulos construídos e que completassem a tabela, conforme mostram as Figuras 35 e 36:

Figura 35 - Atividade da soma dos ângulos internos dos triângulos

X	Triângulo da atividade 1	Triângulo da atividade 2	Triângulo da atividade 3
Medida do ângulo 1	32°	35°	95°
Medida do ângulo 2	64°	83°	83°
Medida do ângulo 3	84°	54°	26°
Soma das medidas dos ângulos internos	180°	172°	204°

Fonte: O Autor

Figura 36 - Medindo os ângulos

Fonte: O Autor

Logo que elas começaram a medir, perceberam que na folha de sulfite a soma havia dado 180°. Ao medirem os ângulos na superfície de *biscuit,* elas se mostraram confusas, pois viram que a soma era menor que 180°, mesmo sendo algo próximo. Então começaram a questionar e pedir ajuda, pois acreditavam estar erradas. Dentre as falas apresentadas por elas é possível citar: *"Nossa! Acho que está errado, porque o meu deu 176º"*, *"Que estranho! O meu e o da outra professora também deu menos que 180°"*, *"O meu não está dando 180º não! Não era para dar?"*, entre outras. Na tentativa de que elas refletissem sobre as somas e as construções permitiu que elas mesmas chegassem a suas conclusões.

As indagações foram ainda maiores quando elas começaram a medir os ângulos construídos na bola de isopor, pois as somas davam maiores que 180º. Uma delas até disse: *"Vixi! Agora deu maior! Deve estar tudo errado mesmo"*. Assim, elas começaram a desenhar outros triângulos nas duas superfícies e, a partir destes questionamentos e tentativas, iniciou-se uma discussão sobre o que elas haviam observado. Por meio dessas discussões, as professoras chegaram em algumas conclusões, e, dentre elas, as respostas dadas para a pergunta "Desta forma, é possível afirmar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180°? Por quê?" (APÊNDICE B): *"Não, pois variam com as superfícies onde foram desenhadas"*; *"Não, nem sempre, eles variam de acordo com o espaço"*; *"Não, variam de acordo com a superfície onde são desenhadas"*.

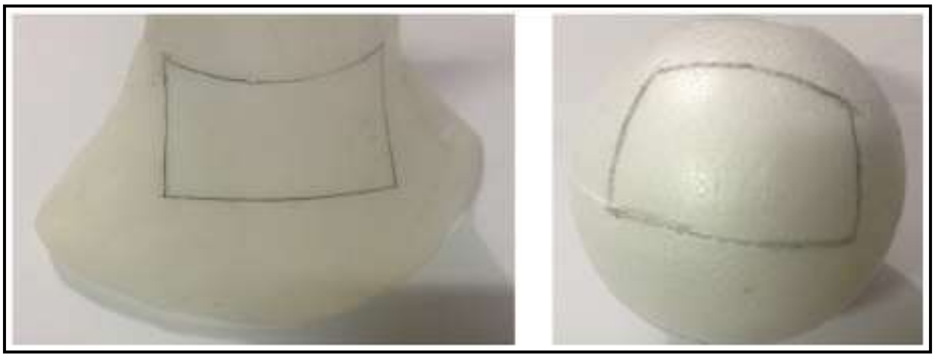
Desta forma, percebe-se que elas puderam identificar que essa soma irá variar dependendo da geometria considerada. Essas ideias foram formalizadas a partir do terceiro vídeo, *Os triângulos nas geometrias não euclidianas*. Além disso, foi possível explorar outras propriedades referentes aos triângulos nas geometrias hiperbólica e elíptica, como a medida dos lados que é feita em graus ou radianos e não em comprimento (cm, m, entre outras unidades de medida), classificação dos triângulos quanto à medida dos lados e às medidas dos ângulos internos, a ideia de semelhança, entre outras, permitindo algumas discussões sobre elementos que, até então, não haviam sido discutidos.

Neste sentido, as atividades dessas sequências contribuíram para que os professores eliminassem certas generalizações e que, também, ampliassem suas percepções a respeito dos triângulos, compreendendo que há triângulos diferentes com propriedades diferentes e em espaços distintos, e saber o que é um triângulo não se limita a conhecer o seu traçado, mas ter o entendimento de que ele é um polígono convexo com três lados e três ângulos (NASCIMENTO, 2013).

3º Encontro

Este se iniciou com a última sequência de atividades que versava sobre os quadriláteros, no intuito de refletir sobre a soma de seus ângulos e a possibilidade de construir, ou não, retângulos nessas superfícies. Incialmente, foi relembrado o conceito de quadrilátero, bem como os quadriláteros notáveis (quadrado, retângulo, losango etc.). Em seguida, foi proposta a realização da primeira atividade em que elas tinham que tentar construir um retângulo na folha de sulfite, na superfície de *biscuit* e na esfera de isopor, mesmo material utilizado nas outras duas últimas atividades, a partir dos mesmos passos que estavam indicados na folha entregue. Nas Figuras 37 e 38, estão as tentativas de construção:

Figura 37 - Construção dos retângulos



Fonte: O Autor

Figura 38 - Tentativa de construção

Fonte: O Autor

Enquanto iam construindo essas figuras, elas levantavam suposições a partir das outras construções realizadas, das retas paralelas e da soma dos ângulos internos dos triângulos, destacando que, na construção na superfície hiperbólica, os lados eram paralelos. Porém, na bola de isopor, era perceptível que os lados opostos, se prolongados, iam se encontrar. E sobre os ângulos uma delas destacou que eram diferentes, visto que, na bola, o retângulo havia ficado bem deformado e que, certamente, era por causa dos ângulos. Isso permitiu identificar que o que havia sido realizado, até aquele momento, tinha possibilitado a eles uma nova visão a respeito das formas, das figuras, das propriedades, entre outros elementos.

Finalizadas as construções, sugeriu-se a elas que medissem os ângulos internos dos triângulos e os somassem. Rapidamente uma delas disse: *“Nos dois retângulos só tem dois ângulos de 90°”*, o que também foi observado pelas outras professoras. Elas tentaram construir outros retângulos; porém em todos os triângulos construídos não era possível obter um quadrilátero com os quatro ângulos sendo retos. Dessa forma, foi estabelecida uma discussão, até que elas chegaram à conclusão de que não era possível construir retângulos, nas geometrias hiperbólica e elíptica.

Feitas tais considerações, apresentou-se o quarto vídeo, *Os quadriláteros nas geometrias não euclidianas*. Por meio dele, foi possível formalizar essas propriedades e outras, como a da soma dos ângulos internos dos quadriláteros – que na geometria euclidiana plana é 360º, na geometria hiperbólica é menor que 360º e na geometria esférica é maior que 360º –, a impossibilidade de se utilizar quadrados para medir áreas, entre outras e, assim, a sequência foi encerrada.

Cabe salientar que, a princípio, as participantes estavam desconfiadas com aquilo que elas estavam vendo, pois não acreditavam que, ao mudar o espaço, as características e os elementos das figuras geométricas, também, mudariam; no entanto, a partir das reflexões e das averiguações realizadas, permitiu-se a elas entender e compreender as mudanças ocorridas, o que possibilitou uma aceitação e um aprofundamento do pensamento geométrico. Perceptível em uma aparente mudança de posicionamento delas frente ao desenvolvimento da última atividade, as quais estavam mais confiantes, mais envolvidas e com um pensamento mais aberto, isto é, livre dos conceitos euclidianos e mais não euclidianos.

Para identificar o que as professoras haviam compreendido a partir do curso e que, também, avaliassem os vídeos e as atividades, foi proposto a elas que respondessem o questionário final (APÊNDICE C), que trazia questões como o que eles haviam compreendido a respeito das geometrias não euclidianas, sobre a generalização das propriedades, sobre a exploração desses conceitos em sala de aula, avaliação do curso, das atividades, dos vídeos, entre outros questionamentos, que são apresentados na sequência.

Questionário final

A primeira pergunta do questionário era "O que são as geometrias não euclidianas?", e tinha como objetivo perceber se as professoras participantes conseguiam definir tais geometrias, mediante aos conceitos e propriedades refletidos por elas no decorrer do curso. De modo geral, as professoras demonstraram ter compreendido a ideia, como mostram suas respostas[22]:

> [...] são as geometrias que fogem dos cinco postulados de Euclides. (P1)
> São geometrias em que não é válida um dos postulados de Euclides. (P2)
> Nessas geometrias são empregadas proposições diferentes das que são válidas na geometria plana, pois nelas o postulado das paralelas não é válido. (P3)
> Uma geometria é não euclidiana se ela contradiz um dos postulados de Euclides. (P4)
> Qualquer geometria que não satisfaz um dos postulados. (P5)
> É uma geometria que não cumpre o quinto postulado. (P6)

Pode-se notar que todas elas remetem, de alguma forma, à definição de geometrias não euclidianas, que, de acordo com Costa (1929, p 201), é qualquer "geometria entre cujos postulados se encontrem em contradição com quaisquer postulados euclidianos, e não apenas o das paralelas". Além disso, essas ideias são bem mais próximas do conceito de geometrias não euclidianas do que as perspectivas expressas pelos professores da Educação Básica que foram investigados na subseção 4.3, em outras palavras, nesta investigação foi feita uma pergunta bem parecida com essa e as respostas obtidas estavam bem longe da definição formal de geometrias não euclidianas, por outro lado é possível identificar

[22] Serão utilizadas as siglas P1, P2, P3, P4, P5 e P6, destas P1 representa a fala da primeira professora, P2 remete a segunda professora, e assim por diante.

nas respostas das professoras que participaram do curso ideias mais próximas desta definição formal.

Cabe ressaltar que estas ideias também são bem diferentes das apresentadas por elas no início do curso, momento no qual demonstravam não as conhecer, além de confundi-las com a geometria euclidiana espacial. Além disso, no decorrer das atividades, as professoras demonstraram não conhecer conceitos básicos da geometria, a exemplo, elas, de início, estavam chamando a esfera de círculo, assim foi possível identificar que elas tinham a dificuldade diferenciar, até mesmo, a geometria euclidiana plana da espacial. Tudo isso permitiu identificar uma carência na formação delas, no que diz respeito à geometria euclidiana plana, indo ao encontro do que apresenta Lorenzato (1995), e em relação às geometrias não euclidianas, apontada por Chavichiolo (2011) e Ribeiro (2012).

Portanto, é possível notar uma mudança nas perspectivas dessas docentes em relação a essas geometrias, evidenciando que as atividades e os vídeos permitiram a elas compreender como essas geometrias surgiram e o que elas são, sendo a História da Matemática um dos elementos que permitiram isso, conforme propõe Araman (2013, p. 4), que “o professor pode caminhar para uma compreensão de como aquele conceito foi sendo desenvolvido”.

Já a segunda pergunta era “No que as geometrias não euclidianas se diferem da geometria euclidiana plana?” e o intuito dela era tentar identificar se as docentes conseguiam elencar alguns elementos que diferenciavam a geometria euclidiana das não euclidianas. Seguem as respostas:

> Eu pude notar que a geometria depende do espaço, além das paralelas que podem existir nenhuma, uma ou várias, as propriedades que também se modificam. (P1)
> O que mudam são as propriedades, pois nem tudo o que é válido na geometria plana é válido na geometria elíptica e na geometria esférica. (P2)
> Mudam as ideias de retas paralelas e isso muda muito as outras propriedades, como a soma dos ângulos das figuras, além das superfícies que contribuem para essas mudanças. (P3)
> [...] os lados das figuras se modificam e ficam curvos, as propriedades também se modificam como a das retas paralelas. (P4)
> Percebe-se que a superfície muda, as formas das figuras mudam, algumas propriedades deixam de ser válidas. (P5)
> Algumas definições e conceitos mudam, entre elas a ideia das paralelas. Além disso, tem outras proposições que mudam, pois os espaços também mudam, assim como a ideia de reta. (P6)

Percebe-se que todas as professoras remetem ao entendimento de que a principal modificação está nas propriedades ou definições, dentre elas as retas paralelas e a soma dos ângulos internos da figura.

Soma-se a isso o entendimento das professoras P1, P3, P5 e P6, as quais destacam a mudança nas superfícies, sendo espaço o principal agente na modificação das propriedades, assim para eles, ao mudar o espaço muda-se a forma e, por consequência disso, algumas propriedades se modificam.

Por fim, as docentes P3, P4, P5 e P6 destacam as diferenças nas formas das figuras, principalmente no que diz respeito aos lados e também na ideia de reta, que passa a ser curva.

No que concerne a tais entendimentos, nota-se que eles remetem, de alguma maneira, às modificações apresentadas por Ribnikov (1987): a disposição das retas paralelas, a soma dos ângulos em triângulos e polígonos, as áreas, os polígonos inscritos e circunscritos na circunferência, a semelhança e congruência de figuras, a trigonometria, o teorema de Pitágoras e as medições do círculo e suas partes. Esses são alguns dos elementos que foram explorados ao longo do curso, evidenciando que, a partir do que foi abordado, elas conseguem reconhecer algumas diferenças.

O terceiro questionamento era “Você acha relevante abordar esse tema nas aulas de matemática? Por quê?”, com essa pergunta procurou-se identificar se elas acreditavam relevante explorar esse tema em sala de aula após o que havia sido discutido. As respostas obtidas foram:

> Para se inserir no contexto do aluno e permitir a ele refletir sobre o espaço. (P1)
> É importante explorar esse tema para que os alunos tenham uma melhor compreensão do espaço onde ele vive, no globo, pois ele trabalha com os conceitos dessas geometrias diariamente, mas sem saber sobre elas. (P2)
> É interessante, pois mostra aos alunos novos conceitos e isso pode despertar no aluno o interesse pela Matemática, pois é atraente e diferente do que eles estão acostumados. (P3)
> Eu acredito que é relevante, pois a partir desses conceitos o aluno pode compreender melhor o espaço, até mesmo o mundo em que ele vive. (P4)
> Sim, é relevante pois pode despertar no aluno a curiosidade pois é um novo conhecimento para ele, diferente daquilo que eles já viram. (P5)
> Eu acho que é muito importante trabalhar esse conteúdo em sala, pois os alunos podem compreender que existem outras ideias e outros conceitos. (P6)

A partir desses apontamentos, nota-se que as docentes P1, P2 e P4 remetem ao entendimento de ser esse estudo importante para que os alunos compreendam melhor os espaços, isto é, as superfícies nas quais as geometrias se desenvolvem e que, por meio disso, eles podem compreender melhor o espaço em que eles vivem, já que eles lidam cotidianamente com conceitos não euclidianos e por meio dos conhecimentos de tais conceitos eles poderão entender melhor o que acontece a sua volta.

Por outro lado, os professores P3, P5 e P6 defendem que a relevância de se explorar essa temática se dá pelo fato de que isso possibilita uma melhor compressão dos conceitos geométricos, pois é diferente do que eles estão acostumados, isto é, a geometria euclidiana plana, e essa abordagem, segundo eles, possibilita um interesse maior pela Matemática.

No entanto, quando elas terminaram de responder tal questionário, foi proposto um debate sobre a inserção das geometrias não euclidianas nas aulas de Matemática e no decorrer das discussões elas permaneciam defendendo tais perspectivas, porém, todas elas destacaram a falta de tempo de explorar a geometria, principalmente no Ensino Médio, momento no qual disseram elas que sempre procuram trabalhar primeiro com outros conceitos, como os relacionados à álgebra, pois consideram mais importante e quando chega o final do ano já não há mais tempo para trabalhar esse tema.

Esse é um grande problema, como já se destacou no decorrer desse trabalho, pois ao deixar de se explorar esses conceitos impede-se o educando de desenvolver um conhecimento que “lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1997, p. 55).

No que diz respeito à quarta pergunta, que era “Como você se sente para trabalhar com tais geometrias em sala de aula?”, ela foi proposta no intuído de verificar se as professoras se sentiam aptas para trabalhar com essa temática em sala de aula. Observam-se as respostas:

> Eu teria que estudar um pouco mais, mas algumas dessas ideias que a gente discutiu eu poderia levar para sala de aula. (P1)
> Do jeito que foi trabalhado no curso eu acho que não conseguiria, mas algumas coisas eu conseguiria levar. (P2)
> Acredito que sim. (P3)
> Sinceramente, eu ainda tenho alguns receios e não sei se daria conta. (P4)
> Eu acho que até conseguiria, mas não sei se os alunos conseguiriam assimilar todas essas ideias. (P5)

> Eu não daria conta de trabalhar tudo isso, mas certamente alguns elementos eu tentarei levar para minhas aulas. (P6)

Como se pode notar, todas as professoras, exceto a P4, destacam que de alguma maneira conseguiriam abordar esse tema em sua aula, mesmo ressaltando que elas teriam que se dedicar um pouco mais para dominar seus conceitos e propriedades. Sobre esse aspecto, é importante destacar que houve uma mudança na postura das professoras em relação a isso, pois, na discussão inicial, todas elas declararam não estar aptas para explorar esse tema, mas, a partir do curso, elas perceberam que poderiam, mesmo que superficialmente, introduzir alguns daqueles conceitos em suas aulas.

Cabe ressaltar a dúvida expressa na resposta da docente P5, ao dizer que não sabe se os alunos iriam compreender todos aqueles conceitos. Ela também apresentou essa ideia ao longo da discussão final. Assim se indagou sobre o porquê ela achar aquilo e a resposta foi: *"Muitas vezes não dá nem para trabalhar os conceitos da geometria plana, assim não tem como eles entenderem esses conceitos nessas outras geometrias"*. Tal afirmação também remete ao que já foi apontado: muitas vezes, os professores deixam de explorar os conceitos relacionados a geometria em virtude da valorização de outros conteúdos.

Nesse sentido, pode-se dizer que, na perspectiva dessa professora, a inserção deste tópico nas aulas de Matemática pode esbarrar na falta de pré-requisitos por parte dos alunos, isto é, os alunos podem não dominar conceitos básicos que seriam de suma importância para a compreensão das propriedades e conceitos das geometrias não euclidianas.

Em relação à quinta pergunta, "Você acha que é possível trabalhar com vídeos nas aulas de Matemática? Por quê?", esta tinha como foco investigar a compreensão das professoras no que diz respeito ao uso de vídeos nas aulas de Matemática. As respostas obtidas foram:

> Eu acho que é possível, mas depende do vídeo e não sendo usado em todas as aulas. (P1)
> No meu ponto de vista é possível, mas tem que ser um vídeo na linguagem dos alunos, pois já tentei usar algumas vezes e alguns não me ajudaram em nada, pois os alunos nem prestavam atenção. (P2)

> Acredito que é possível, mas nem sempre. Por que, dependendo do vídeo, ele só atrapalha, pois, os alunos não conseguem ficar prestando atenção nele por muito tempo. (P3)
> Em sala de aula eu não sei se funciona, pois algumas vezes fazemos alguns cursos EAD[23] e até pra gente fica muito cansativo. (P4)
> Eu acho que é possível, mas depende da turma. (P5)
> Sim, é possível, mas tem que ser complementado pelo professor. Por que a explicação não deve ser feita só pelo vídeo. (P6)

Por meio das respostas, percebe-se que a professora P2 afirma que já tentou usar vídeos em suas aulas. No entanto, nem todas as suas experiências foram bem-sucedidas, devido ao vídeo utilizado, que para ela tem que ser próximo do aluno para que seja aplicado com esta finalidade. Assim, o vídeo deve ter elementos que prendam a atenção dos alunos, o que também se aproxima das perspectivas das docentes P1 e P3. Isso vai ao encontro do que propõem Machado e Mendes (2013), quando destacam que esse uso deve ser pensado e justificado e que, além disso, explorem cores, imagens, sons, entre outros elementos que permitam a compreensão daquilo que está sendo abordado.

Na perspectiva apresentada por P5, esse uso é possível, porém não em qualquer turma, devido ao comportamento e ao nível de interesse dos alunos. Todavia, Machado e Mendes (2013) destacam que a inserção desse recurso audiovisual exige um planejamento, levando em consideração a turma na qual o vídeo será abordado, isto é, esse uso é possível desde que seja considerado o perfil dos alunos e o interesse dos mesmos.

Outro aspecto destacado por P1, P3 e P4 é a duração do vídeo, visto que os alunos não conseguem "prestar atenção por muito tempo". O que também é defendido por Telg (2009) e Barato (2006). Para eles, o vídeo didático deve ser curto para que professores e alunos possam revê-lo, pausá-los e discuti-lo quantas vezes forem necessárias, de modo a diminuir os argumentos e questionamentos, favorecendo, assim, a compreensão dos conceitos que neles são abordados. Contudo, Barato (2006) destaca que ele não deve estar presente em todas as aulas e, sim, permeá-las, já que nem todo conteúdo pode ser explorado pelo vídeo e, além disso, ele pode acabar sendo associado ao despreparo do professor, o que é destacado pela docente P1.

[23] Educação a distância.

Ademais, P6 afirma que o vídeo deve ser complementado pelo professor, ou seja, o vídeo não deve ser o único expositor do conteúdo, cabe ao professor trazer outras atividades, outras estratégias, outros recursos, entre outros elementos que levem o aluno ao entendimento dos conceitos explorados. Isso vai ao encontro do que defende Machado (2011), o qual diz que o vídeo não deve reforçar práticas tradicionais de ensino, pois ele pode ser utilizado de diversas maneiras e ser aliado a outros recursos, e quem decide como será feito isso é o professor.

Por fim, nos últimos três questionamentos, as professoras deveriam avaliar os vídeos didáticos e atividades empregadas, bem como o curso ofertado.

Em relação às atividades, as avaliações foram:

> As atividades foram bem claras, interessantes e investigativa. Podem ser exploradas em sala de aula, pois envolve materiais lúdicos o farão com que os alunos assimilarão com mais facilidade o conteúdo proposto. (P1)
> As atividades foram ótimas, bem elaboradas e certamente ajudariam em um bom aprendizado em sala de aula. Muito interessante, pois trabalha com material concreto. (P2)
> Os materiais e atividades foram bem elaboradas. Elas ficaram bem esclarecedoras, pois a partir de tudo que desenvolvemos deu para aprender muitas coisas que eu não conhecia. (P3)
> As atividades foram muito bem elaboradas, de forma sucinta e de fácil entendimento. O material concreto utilizado foi muito importante e bem explorado durante todo o curso. Foi tão bem desenvolvido que pode ser explorado, sim, em sala de aula. (P4)
> As atividades e os materiais usados nela foram de grande proveito para mim, a linguagem é objetiva e clara o que facilita o entendimento do que está sendo abordado. (P5)
> Para mim as atividades estão ótimas, são claras e bem elaboradas, permitem a gente refletir sobre os conceitos facilitado pelas construções propostas. (P6)

Pode-se notar, a partir das respostas, que todas professoras elogiaram as atividades e o seu potencial, principalmente pelo fato de explorar materiais concretos, que facilitam a compreensão do que é abordado. E, de acordo com elas, é possível que elas sejam exploradas em sala de aula. Somam-se a isso as ideias expressas ao longo das atividades realizadas, que permitem dizer que essas atividades possibilitaram a elas verificar, conjecturar, refletir e compreender as propriedades e conceitos abordados.

No que diz respeito aos vídeos, foram feitas as seguintes avaliações:

> Os vídeos são bem interessantes e bem objetivos. A partir deles é possível assimilar as mensagens com facilidade, pois o ver e o ouvir ajudam a entender melhor as ideias. (P1)

> Os vídeos utilizados são excelentes, pois a linguagem, as imagens, os desenhos são bem claros e objetivos. Usaria em minhas aulas. (P2)
> São de fácil compreensão, pois são dinâmicos, objetivos e curtos, isso facilita o entendimento das ideias. É possível explorar eles na Educação Básica. (P3)
> Os vídeos utilizados são bem interessantes, é fácil entender as ideias apresentadas, pois tem imagem, som, e isso ajuda a gente a prender a atenção no que é falado. Acredito que é possível trabalhar com eles nas aulas. (P4)
> Eu achei muito interessante, pois são feitos na linguagem dos alunos. Se a gente gostou imagina os alunos. Certamente podem ser explorados na Educação Básica. (P5)
> Eu gostei muito, pois é criativo. Traz a informações de forma clara, e as imagens ajudam a entender as ideias. (P6)

Tais respostas permitem compreender que os vídeos foram bem aceitos por elas, as quais destacam que a linguagem falada, a linguagem visual, a objetividade, a duração, a clareza, entre outros aspectos que permitiram a compreensão dos conceitos e propriedades geométricas neles abordadas, o que é defendido por Barato (2006), Telg (2009), Machado (2011), Machado e Mendes (2013), entre outros. Acrescentam-se a isso os entendimentos que elas exprimem em relação à possibilidade de usá-los na Educação Básica, sendo que uma delas até diz que os usaria em suas aulas. Esses fatores dão indícios de que os vídeos produzidos seguiram as orientações e estão de acordo com aquilo que defende a literatura.

As avaliações sobre o curso foram:

> Sempre é muito relevante estudar temas que nos ajudam em nosso dia a dia. Esse curso muito contribui para o meu enriquecimento profissional, pois me deu muitas ideias novas. (P1)
> Esse curso foi muito proveitoso, aprendi muitas coisas que, certamente, me ajudarão em sala de aula. (P2)
> O curso foi bastante relevante, o tema foi bem explorado, deu-nos a oportunidade de refletir sobre nossa prática pedagógica em relação a novos conceitos que podem ser inseridos em sala de aula. (P3)
> O curso foi muito prático e interessante, aprendi muitas coisas que, sinceramente, não sabia que existia. (P4)
> Acho muito importante esse tipo de curso, pois permite a nós refletir sobre como explorar alguns conteúdos e são poucas as oportunidades que temos para isso. (P5)
> O curso foi muito interessante e importante para minha prática, pois aprendi muita coisa, além disso, tirei muitas ideias que posso levar para sala de aula. (P6)

Durante todo o processo de construção dos vídeos e das atividades, buscou-se refletir sobre as implicações pedagógicas de se abordar um tema tão discordante na formação de professores de Matemática, pessoas que, em sua maioria, tiveram uma formação em geometria euclidiana e as possibilidades de ampliar seus saberes em relação a essa temática. A partir desse curso, foi possível identificar que o material produzido contribuiu substancialmente para que os professores refletissem sobre a temática e que compreendessem um pouco sobre esse universo tão surpreendente que são as geometrias não euclidianas. Tais aspectos são evidenciados nessas avaliações, nas quais as professoras descrevem ter aprendido coisas novas, entre elas conceitos, propriedades, estratégias de ensino, entre outros elementos, o que, muitas vezes, não acontece na formação docente, isto é, não é dada a esses sujeitos a oportunidade de refletir sobre os conceitos que eles devem abordar em sala de aula e, também, sobre as formas de abordá-los.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho, além de refletir sobre o surgimento histórico das geometrias não euclidianas, buscou mostrar que estes aspectos são possíveis de serem inseridos na formação de professores. Assim, propôs-se uma forma de se explorar este tema a partir do uso pedagógico dos vídeos e de atividades baseados na História da Matemática, que, segundo Mendes (2001), permite compreender a origem das ideias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento. Desta maneira, a presente proposta visa mostrar aos professores da Educação Básica que a Matemática não é algo pronto e acabado ou mesmo infalível e imutável, pretendendo incentivar os docentes a ampliar seus horizontes para novos caminhos da ciência.

Optou-se pelo uso de vídeos didáticos pelo fato de que podem contribuir para uma compreensão de conceitos de forma prazerosa, considerando que o vídeo pode ser um instrumento de motivação, pelo seu forte potencial didático (MORAN, 1995).

Esses vídeos e atividades foram produzidos com o intuito de possibilitar aos professores uma formação em relação às geometrias não euclidianas por meio dos conhecimentos advindos da História da Matemática, para que eles tenham subsídios para levar este tema para suas aulas. Segundo as DCE (PARANÁ, 2008), no desenvolvimento do conhecimento matemático, a história mostrou grandes transformações matemáticas que são acessíveis aos alunos da Educação Básica, dentre elas destaca ser possível uma abordagem histórica das geometrias não euclidianas. Ademais, defendem que esta abordagem pode aproximar os alunos de outas ideias, com a finalidade de ampliar seu conhecimento e seu pensamento geométrico.

A exemplo, as DCE (PARANÁ, 2008) trazem o relato de algumas discussões sobre o quinto postulado de Euclides que perduraram durante séculos, apresentando os esforços empregados por vários matemáticos no intuito de prová-lo. Mesmo sem conseguir, tais discussões foram o ponto de partida para a criação de outras geometrias, isto é, um novo universo geométrico: o não euclidiano. Essas circunstâncias trouxeram significativas mudanças para a geometria, de um modo geral. Tal exemplo evidencia que, muitas vezes, na Matemática (até mesmo na vida), o que se aprende com o erro é tão (ou até mais) importante que os resultados obtidos nos acertos.

Este tipo de discussão faz-se necessária na formação de professores, visto que, a partir das pesquisas desenvolvidas na literatura, bem como a que se realizou com os professores da Educação Básica, percebe-se que as geometrias não euclidianas são pouco exploradas na formação inicial e continuada destes sujeitos.

Não se espera que a inserção das abordagens acerca das geometrias não euclidianas seja imediata, mas, face ao interesse do professor se tornará possível a ampliação de tais discussões. Neste contexto, faz-se indispensável gerar uma mudança na postura atual do ensino da geometria de um modo geral. Assim, o presente trabalho apresenta-se como uma tentativa para que essa geometria seja levada para a formação docente e, por consequência, este tópico seja explorado em sala de aula, como defendem as DCE (PARANÁ, 2008).

No contexto da pesquisa, foi feita uma reflexão histórica a respeito da criação das geometrias não euclidianas e seus conceitos, baseando-se na reconstrução desenvolvida por outros pesquisadores e historiadores, isto é, em fontes secundárias (textos historiográficos). Tal reflexão subsidiou a seleção dos episódios históricos para serem transformados em vídeos e a construção das atividades.

O recorte dos episódios históricos foi desenvolvido a partir dos saberes docentes, em outras palavras, das tipologias de saberes proposta por Tardif (2013).

De posse disso, deu-se início à elaboração dos *scripts*, bem como à produção das animações, que possibilitaram a gravação dos vídeos didáticos e sua edição. A opção de apresentar os episódios históricos selecionados por meio de vídeos se deu pelo fato de que essa mídia pode ser acessada por professores em qualquer lugar e a qualquer momento.

Após este processo, foram elaboradas as atividades aliadas aos vídeos, baseadas no recorte dos episódios históricos e na investigação histórica proposta por Mendes (2009).

A partir dessa elaboração, propôs-se um minicurso no qual foram aplicadas a sequência de atividades, o que permitiu fazer as modificações necessárias nas mesmas e nos materiais necessários para realizá-las.

Feito isso, foi ofertado um curso de formação continuada para professores de Matemática que atuam no município de Leópolis-PR, deste participaram seis professoras dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, em meados de abril de 2017. As atividades e os vídeos didáticos produzidos foram aplicados, o que permitiu concluir que os materiais produzidos possibilitaram uma reflexão sobre as geometrias não euclidianas e contribuíram para compreensão de alguns conceitos das geometrias hiperbólica e elíptica, evidenciando, assim, o potencial do material produzido.

Os resultados obtidos com este estudo permitem concluir que o uso dos vídeos didáticos, aliado a atividades baseadas na investigação histórica, mostrou-se como um caminho viável para se inserir as geometrias não euclidianas na formação docente, feito que pode trazer contributos para a formação desses sujeitos, sobretudo no que diz respeito à compreensão de que a inserção das geometrias não euclidianas na Educação Básica é algo possível.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, P. C. A. BIAJONE, J. Saberes docentes e formação inicial de professores: implicações e desafios para as propostas de formação. In: **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 33, n. 2, 2007.

ALMOULOUD, S. A. et al. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. In: **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 27, 2004.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

AMARAL, S. F. et al. Serviço de apoio a distância ao professor em sala de aula pela TV digital interativa. In: **Revista Digital de Biblioteconomia e Ciência da Informação**, Campinas, v. 1, n. 2, p. 53-70, 2004.

ARAMAN, E. M. O. **Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática**. 2011. 240 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2011.

ARAMAN, E. M. O.; BATISTA, I. L. Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 27, n. 45, abr. 2013.

ÁVILA, G. Euclides, geometria e os fundamentos. In: **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 45, p.1-6, 2001.

BALESTRI, R. D. **A participação da história da matemática na formação inicial de professores de matemática na ótica de professores e pesquisadores**. 2008. 104 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2008.

BARATO, J. N. **Leitura de vídeos em educação**. Disponível em: <http://aprendente.blogspot.com/2006/01/leitura-de-vdeos-emeducao.html>. Acesso em: 14 de fev. 2017.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

______. **Geometria hiperbólica**. Goiânia: Instituto de Matemática e Estatística da UFG, 2002.

BARBOSA, L. N. S. C. de. **Uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento das geometrias não euclidianas**. 2011. 58 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2011.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70 Ltda, 1979.

BATISTA, I. L.; SAMPAIO, H. R. A filosofia da ciência como um saber necessário para a teorização da prática docente. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 6., 2006. Florianópolis. **Anais...** Florianópolis, 2006.

BERGER, P.L.; LUCKMANN, T. **A construção social da realidade:** tratado de sociologia do conhecimento. Tradução de Floriano de Souza Fernandes. Petrópolis: Vozes, 2011.

BERRO, R. T. **Relações entre arte e matemática:** um estudo da obra de Maurits Cornelis Escher. 2008. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade São Francisco, Itatiba. 2008.

BICUDO, I. Peri apoidexeos/de demonstratione. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 58-76.

______. Introdução e tradução. In: EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BONETE, I. P. **As Geometrias não euclidianas em cursos de licenciatura**: algumas experiências. 2000. 219 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas/Universidade Estadual do Centro-Oeste, Campinas/Guarapuava. 2000.

BONOLA, R. **Non educlidean geometry:** a critical and historical study of its development. Traduzido por Horatio Scott Carslaw. Nova Iorque: Dover, 1955.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

______. Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. In: **ZDM**, v. 41, n. 4, p. 453-465, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRITO, A. J. **Geometrias não euclidianas: um estudo histórico pedagógico**. 1995. 187 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 1995.

BRITO, A. J.; CARVALHO, D. L. Utilizando a história da matemática no ensino de geometria. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. **A formação do professor que ensina matemática:** perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. p. 27-42.

CABARITI, E. **Geometria hiperbólica:** uma proposta didática em ambiente informatizado. 2004. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2004.

CAMARGO, K. C. A. **A Expressão gráfica e o ensino das geometrias não euclidianas.** 2012. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e em Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2012.

CARMO, M. P. Geometrias não euclidianas. **Matemática Universitária,** Rio de Janeiro, n. 6, p. 25-48, dez. 1987.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula:** proposta para integração aos conteúdos matemáticos. São Paulo: Livraria da Física, 2015. (Série História da Matemática para o Ensino).

CHAVES, E. O. C. **Tecnologia e educação:** o futuro da escola na sociedade da informação. Campinas: Mindware, 1998. 194 p.

CHAVICHIOLO, C. V. **Geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de matemática: o que dizem os formadores**. 2011. 165 p. Dissertação (Mestrado em Educação), Setor de Educação – Universidade Federal do Paraná. 2011.

CINELLI, N. P. F. 2003. 72 f. **A influência do vídeo no processo de aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2003.

CÓRDOVA, S. T.; PERES, J. A. Utilização de recursos áudio visuais na docência de medicina veterinária. In: **Revista Eletrônica Lato Sensu**, Ano 3, n.1, mar. 2008.

COSTA, M. A. **As ideias fundamentais da Matemática**. Rio de Janeiro: Pimenta de Mello & C., 1929.

COSTA, L. F. Diálogo entre a história da matemática e as novas concepções do ensino de matemática: os recursos audiovisuais na formação de professores. In: COLÓQUIO INTERNACIONAL EDUCAÇÃO, CIDADANIA E EXCLUSÃO: DIDÁTICA E AVALIAÇÃO, 9., 2015, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: 2015.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não euclidianas.** 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

CURITIBA. Secretaria Municipal de Educação de Curitiba. **Currículo básico**: uma contribuição para a escola pública brasileira. Curitiba: PMC, 1988.

CURY, H. N. MOTTA, C. E. M. História e estórias da matemática: uma entrevista com Heron nos dias atuais. In: CARVALHO, L. M. et al (Org.). **História e tecnologia e ensino da matemática.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

D’AMBRÓSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

______. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97-115.

DOUADY, A. Space and Plane. In: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (Eds.). **Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century:** an ICMI study. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1998.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FAUVEL, J.; MAANEN, J. V. Introduction. In: FAUVEL, J.; MAANEN, J. V. (Ed.). **History in mathematics education:** the ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 6-18.

FERREIRA, E. C. **O uso dos audiovisuais como recurso didáctico.** 2010. 75f. Dissertação (Mestrado em Ensino em História e Geografia) – Faculdade de Letras, Universidade do Porto, Porto. 2010.

FIORENTINI, D. et al. Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C. M.G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. A. (Orgs.). **Cartografia do trabalho docente:** professor(a) – pesquisador(a). Campinas: Mercado de Letras, 1998. p. 307-335.

FRANCO, J. P. **Cómo producir un video educativo:** unidad de recursos educativos. Disponível em: <http://www.upch.edu.pe/faedu/documentos/documentos/cpvideo.htm>. Acesso em: 12 de fev. 2016.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 13. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

______. **Extensão ou comunicação?** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2002.

______. **Ação Cultural para a liberdade e outros escritos**. 10. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2002.

FRIED, M. N. Didactis and history of mathematics: knowledge and self-knowledge. In: **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, n. 66, p. 203-223, 2007.

GAUTHIER, C. **Por uma teoria da pedagogia, pesquisas contemporâneas sobre o saber docente.** 2. ed. Rio Grande do Sul: Unijui, 2006.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-euclidean geometries:** development and history. 3. ed. Nova Iorque: Freeman, 1994.

GROENWALD, C. L. S. **Perspectivas em educação matemática**. Canoas: Ulbra, 2004.

HANSEN, V. L. Everlatig Geometry. In: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (Eds.). **Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century:** an ICMI study. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1998.

HEIEDE, T. História da matemática e do professor. In: CALINGER, R. (Ed.). **Vita Mathematica.** Washington: The Mathematical Association of America, 1996.

IMENES, L. M. Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da matemática. In: **BOLEMA**, Rio Claro, n. 6, p. 21-27, 1990.

JANKVIST, U. T. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, n. 71, p. 235-261, 2009.

KATZ, V. J. **A história da matemática:** uma introdução. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2011.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias:** o novo ritmo da informação. Campinas: Papirus, 2003.

KOYRÉ, A. **Études d'histoire de la pensée scientifique**. Paris: Editions Gallimard, 1973.

KRAUSE, E. F. **Taxicab geometry:** an adventure in non-Euclidean geometry. Massachusetts: Courier Corporation, 2012.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 2004.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência**. O futuro do pensamento na era da informática. Traduzido por Carlos Irineu da Costa. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LIMA, M. A. D. S.; ALMEIDA, M. C. P.; LIMA, C. C. A utilização da observação participante e da entrevista semiestruturada na pesquisa de enfermagem. In: **Revista gaúcha de enfermagem,** Porto Alegre, v. 20, n. especial, p. 130-142, 1999.

LIMA, A. F. **Do sensível às ideias:** um estudo de geometria a partir de atividades envolvendo espaço e forma. 2015. 251 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia. 2015.

LOBACHEVSK, N. I. **Pangeometry.** Tradução de Athanase Papadopoulos. Zürich: European Mathematical Society, 2010.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? In: **Educação matemática em revista**, Blumenau, n. 4, p. 3-13, 1995.

MACHADO, B. F. **Vídeo-aula de história da matemática:** uma possibilidade didática para o ensino de matemática. 2011. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. 2011.

MACHADO, B. F.; MENDES, I. A. **Vídeos didáticos de história da matemática:** produção e uso na educação básica. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. 180 p. (Coleção História da Matemática para Professores).

MACHADO, P. A. F. **Fundamentos de geometria espacial**. Belo Horizonte: CAED – UFMG, 2012. 120 p.

MALET, A. et al, Històrià de les matemàtiques: cultura y didáctica. **Papers de Batxillerat**, n. 3, 7477. 1983.

MARQUEZE, J. P. **As faces dos sólidos platônicos na superfície esférica:** uma proposta para o ensino-aprendizagem de noções básicas da geometria esférica. 2006. 162 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2006.

MARTINS, A. F. P. História e filosofia da ciência no ensino: há muitas pedras nesse caminho. In: **Caderno Brasileiro de Ensino de Física,** Florianópolis, v. 24, n. 1, p. 112-131, abr. 2007.

MARTOS, Z. G. **Geometrias não euclidianas:** uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no ensino fundamental. 2002. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2002.

MENDES, I. A. **Ensino da matemática por atividades:** uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática. 2001. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. 2001.

______. A investigação histórica como agente de cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. Nápoles. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática.** Porto Alegre: Sulina, 2006.

______. **Matemática e investigação em sala de aula:** tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MENDES, I. A. CHAQUIAM, M. **História nas aulas de matemática:** fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016. 124 p.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação matemática.** 1993. 274 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 1993.

______. História, filosofia e sociologia da educação matemática na formação do professor: um programa de pesquisa. In: **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 137-152, jan./abr. 2005.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J. A história da matemática na formação do professor que ensina matemática. In: **Caderno CEDES**, Campinas, v. 40, p. 47-61, 1996.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MLODINOW, L. **A janela de Euclides:** a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

MORAN, J. M. O vídeo na sala de aula. **Comunicação e Educação**, São Paulo, Moderna, p. 27-35, jan./abr. 1995. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/comueduc/article/view/36131/38851>. Acesso em: 16 nov. 2016.

______. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas. In MORAN, J. M.; MASETTO, M.; BEHRENS, M. **Novas tecnologias e tecnologias e mediação pedagógica.** São Paulo: Papirus: 2013.

NASCIMENTO, A. K. S. do. **Geometrias não euclidianas como anomalias:** implicações para o ensino de geometria e medidas. 2013. 115 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. 2013.

NOBRE, S. R. Introdução à história da matemática: das origens do século XVIII. In: **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, v. 2, n. 3, p. 3-43, abr. 2002.

______. **Introdução histórica às geometrias não euclidianas:** uma proposta pedagógica. Belém: SBHMat, 2009.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes curriculares para a educação básica:** Matemática. Curitiba, 2008. Disponível em: <http://www.nre.seed.pr.gov.br/irati/arquivos/file /matematica.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2016.

PERRENOUD, P. Sucesso na escola: só o currículo, nada mais que o currículo. Traduzido por Neide Luzia de Rezende. In: **Caderno de pesquisas**, São Paulo, n. 119, p. 9-27, 2003.

PIMENTA, S. G. **Saberes pedagógicos e atividade docente**. São Paulo: Cortes, 1999.

PONTE, J. P. Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios? In: **Revista Iberoamericana de Educación**, n. 24, 2000. p. 63-90. Disponível em: www.rieoei.org/ri24a03.PDF. Acesso em 22 de out. 2016.

______. As TIC no início da escolaridade: perspectivas para a formação inicial de professores. In: **Cadernos de Formação de Professores**, Porto, n. 4, p. 19-26, 2002.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PRESMIC, J. G. **Geometrias não euclidianas**. 2014. 69 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília. 2014.

QUEIROZ, D. T. et al. Observação participante na pesquisa qualitativa: conceitos e aplicações na área da saúde. In: **Enferm,** Rio de Janeiro, v. 15, n. 2, p. 276-283, 2007.

RAMOS, J. L. B. **El vídeo educativo**. Disponível em: <http://www.ice.upm.es/wps/jlbr/Documentacion/Libros/Videdu.pdf>. Acesso em: 12 fev. 2017.

REIS, J. D. S. **Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis.** 2006. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2006.

RIBEIRO, R. D. G. L. **O ensino das geometrias não euclidianas:** um olhar sob a perspectiva da divulgação científica. 2012. 102 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade São Paulo, São Paulo. 2012.

RIBNIKOV, K. **Historia de las matemáticas.** Moscú: MIR, 1987.

ROCATO, P. S. **As concepções dos professores sobre a utilização do vídeo como potencializadores do processo de ensino e aprendizagem**. 2009. 172 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo. 2009.

RODRIGUES, A. J. **Geometria descritiva:** projetividade, curvas e superfícies. 3. ed. Rio de Janeiro: Ao livro técnico, 1960.

ROSENFELD, B. A. **A history of non-Euclidean geometry:** evolution of the concept of a geometric space. Traduzido por Abe Shenitzer. New York: Springer-Verlag, 1988.

SACCHERI, G. **Euclides ab omni naevo vidicatu.** Traduzido para o inglês por HALSTED, G. B. Chelsea: Open Court Pub. Co.,1970.

SACHS, L. O quinto postulado de Euclides com história de problemas. In: **Hipátia**, Campos do Jordão, v. 1, n. 1, p. 11-29, dez. 2016.

SANTOS, T. S. **A Inclusão das geometrias não-euclidianas no currículo da educação básica.** 2009. 138 f. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em

Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá. 2009.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta curricular para o ensino de matemática:** 1º grau. 4. ed. São Paulo: SE/CENP, 1991.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. In: **Educational researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, A. C. **Reflexão sobre a matemática e seu processo de ensino/aprendizagem**: implicações na (re)elaboração de concepções e práticas de professores. 2009. 246 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa. 2009.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas***.* Traduzido por João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1989.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional***.* 15. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2013.

TARDIF, M.; GAUTHIER, C. O saber profissional dos professores: fundamentos e epistemologia. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA SOBRE O SABER DOCENTE, 1., 1996, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: UFCE, 1996.

TARDIF, M.; RAYMOND, D. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. **Educação e Sociedade**, vol. 21, n. 73, p. 209-244, dez. 2000.

TOMEI, C. **Euclides:** a conquista do espaço. 2. ed. São Paulo: Odysseus, 2006.

TOTH, I. A revolução não euclidiana. **Caderno de Física da UEFS**, 09 (01 e 02), p. 37-52, 2011.

VIANNA, C. R. Usos didáticos para história da matemática. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 1., 1998, Recife. **Anais...** Recife, 1998.

APÊNDICE A - Vídeos Produzidos

VÍDEOS DIDÁTICOS

1º VÍDEO – A ORIGEM DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	2º VÍDEO – RETAS PARALELAS NAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS
	
Link: https://www.youtube.com/watch?v=eqjKgzx7fLk&t=4s	Link: https://www.youtube.com/watch?v=ZvuzbE0FP3E
3º VÍDEO – OS TRIÂNGULOS NAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	**4º VÍDEO – OS QUADRILÁTEROS NAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS**
	
Link: https://www.youtube.com/watch?v=YIW-q11QNhY	Link: https://www.youtube.com/watch?v=ia9pzMeVUEU

APÊNDICE B - Sequências das Atividades

Sequências de Atividades

1ª SEQUÊNCIA: A ORIGEM DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

1) Desenhe em seu balão (vazio) uma figura geométrica plana (Ex.: quadrado, retângulo, triângulo, etc.), logo após encha seu balão.

a) A figura que se formou manteve a mesma forma ou houve alguma modificação? Em caso afirmativo, descreva essa forma.

b) Como ficaram os lados da figura?

c) Você acredita que para essa figura são válidas as mesmas definições e propriedades que eram válidas na figura original? Por quê?

2) A partir das informações apresentadas no primeiro vídeo:

a) Descreva o que de novo as geometrias não euclidianas trouxeram para a matemática.

b) Analise a ideia expressa no trecho a seguir:

> Foi um verdadeiro ato de criação que fez surgir a geometria não euclidiana, mas a palavra que a fez surgir foi a palavra não. A negação é criadora. Pela partícula "não" se realiza a conjunção histórica dos dois sistemas. Para a geometria não euclidiana corresponde uma estrutura evolutiva não-euclidiana na qual, sob sua forma anti-euclidiana, o não-ser precede o ser, o contra vem antes do pró. Ela postula o impossível sob a forma de um discurso mentiroso e o transforma em realidade e em verdade (TOTH, 2011, p. 51).

c) Para você, por que o quinto postulado de Euclides motivou tantos estudos entre os matemáticos?

2ª SEQUÊNCIA: RESTAS PARALELAS NAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Na geometria euclidiana plana, duas retas distintas de um plano são paralelas, quando não têm um ponto comum. (IEZZI, 2009).

Esse conceito foi definido em *Os Elementos*, escrito por Euclides por volta de 300 a.C., nessa obra estão os famosos cinco postulados de Euclides e o último deles refere-se a ideia de paralelismo:

> E, no caso de uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontraram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (EUCLIDES, 2009, p.98).

Esse foi reescrito de diversas maneiras, sendo a mais conhecida a proposta por John Playfair em meados de 1795: "para toda reta *l* e todo ponto *P* fora de *l*, pode-se traçar uma única reta paralela a *l*, que passe por *P*".

1) Vamos construir tais retas paralelas e verificar a veracidade desse postulado para a geometria euclidiana plana, considerando como o plano a folha de sulfite, proceda da seguinte forma:

a) Trace uma reta e a denomine de *r*;

b) Marque um ponto *P* fora da reta *r*;

c) Construa um arco de centro *P* de modo que este intersecte a reta *r*;

d) Marque o ponto *A* dessa interseção;

e) Construa outro arco de mesmo raio, com centro em *A*, o qual intercepte a reta *r*;

f) Marque o ponto *B* dessa intersecção;

g) Após isso, construa um arco de centro em *B*, de mesmo raio, e que intersecte em algum ponto do arco de centro *P*;

h) Chame o ponto da interseção de *Q*;

i) Trace uma reta a qual passe pelos pontos *P* e *Q* e chame-a de reta *s*.

Por intermédio dessa construção, responda: a reta *s* construída é paralela a *r*, tomando como referência a geometria euclidiana plana?

2) Como vimos no primeiro vídeo, Lobachevsky propôs uma ideia de retas paralelas diferente da proposta por Euclides em sua obra *Os Elementos*, pois "chegou à conclusão que se o espaço muda a imagem e a definição também mudará". (NASCIMENTO, 2013). Assim, ele propôs que o 5º postulado de Euclides fosse substituído pelo seguinte: "existe uma reta *r* e um ponto *P* que não pertence a *r* tal que por *P* passa ao menos duas retas paralelas à reta *r*" (CAMARGO, 2012, p. 49), entendendo reta como geodésica do espaço hiperbólico. A partir dessa substituição, ele deu forma a uma nova geometria, a chamada geometria hiperbólica.

Vamos verificar essa afirmação. Sobre uma superfície hiperbólica, representada pela superfície de *biscuit*, execute os mesmos passos realizados no item anterior.

A partir dessa construção, é possível dizer que a reta que passa por *s* é paralela a *r*, tomando como referência a definição de reta paralela na geometria euclidiana plana? Por quê?

3) Quaisquer duas retas em um plano, desde que não sejam paralelas, têm um ponto de encontro. Contudo:

> Nesta Geometria, as retas são consideradas como os círculos máximos, chamados de geodésicas, que dividem a esfera em duas partes iguais, assim como a linha do equador ou as linhas de longitude da Terra. Esses círculos são chamados de máximos, pois são os maiores círculos que podem ser traçados na esfera e desta forma são os caminhos com menor curvatura. Sendo assim, tem-se uma analogia com as retas no plano euclidiano, pois o caminho mais curto formado por dois pontos da esfera é um arco do círculo máximo que passa por estes pontos. Dois grandes círculos se cruzam, de modo que não existem retas paralelas nesta geometria (CAMARGO, 2012, p.57).

Desse modo, Riemann propôs que o quinto postulado de Euclides fosse substituído por "Dada uma reta *L* e um ponto *P* não pertencente a *L*, não existe reta paralela a *L* passando por *P*". (CAMARGO, 2012, p. 72).

Verifique essa afirmação. Para isso, sobre uma superfície esférica, representada pela bola de isopor, tente realizar os mesmos passos da construção anterior.

Por meio dessa construção, é possível dizer que a reta que passa por *s* é paralela a *r*, tomando como referência a definição de reta paralela na geometria euclidiana plana? Por quê?

4) A partir das atividades e construções realizadas nos três itens anteriores, responda:

a) Descreva como as retas ficaram nessas superfícies.

b) As retas foram construídas em três superfícies distintas, mesmo assim elas perderam suas caraterísticas principais?

c) Em que divergem as características das retas paralelas construídas?

d) Fundamentado nas construções, a que conclusões você chegou? São as mesmas apresentadas no vídeo?

e) Para você, qual a relevância dessas propriedades para a Matemática e para o seu contexto histórico?

3ª SEQUÊNCIA: OS TRIÂNGULOS NAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Atualmente, um triângulo é definido como "Dados três pontos A B e C não colineares, chama-se triângulo ABC a reunião dos segmentos AB, BC e AC". (IEZZI, 2009, p. 99).

O primeiro, dos treze livros de *Os Elementos*, trouxe a ideia de triângulos, porém ele chama essa figura com três lados de triláteras a definindo como "E das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais". (EUCLIDES, 2009, p. 98).

1) Levando em consideração essas definições, vamos construir estas figuras:

a) Marque três pontos não colineares em uma folha de papel.

b) Ligue esses pontos.

c) A figura construída se trata realmente de um triângulo?

2) O matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) criou um mapa que auxilia na visualização do plano hiperbólico. Esse mapa é um desenho gráfico o qual se propõe a representar, sobre uma superfície plana, o que existe na realidade em uma região acidentada.

O site *Seara da Ciência*[1] afirma que o mapa de Poincaré é do tipo que os matemáticos chamam de mapa conforme. Nesse tipo de mapa, os ângulos são mantidos invariantes pela transformação. Isto é, se duas retas do espaço hiperbólico se cruzam e formam um ângulo qualquer, as representações dessas duas retas no mapa também se cruzam formando o mesmo ângulo.

Assim, um triângulo nessa geometria ficou definido como: Três "retas" não colineares formam um triângulo ABC.

Levando em consideração essa definição:

a) Pegue a superfície de *biscuit* e marque três pontos não colineares sobre ela.

b) Ligue esses pontos.

A figura construída se trata realmente de um triângulo?

3) Considerando A, B e C, três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima. Unindo esses pontos, dois a dois, por arcos de circunferências máximas, todos menores que uma semicircunferência, teremos um triângulo esférico ABC.

[1] Disponível em: <http://www.seara.ufc.br/>. Acesso em: 20 maio 2016.

a) Pegue uma esfera de isopor e marque três pontos não colineares sobre sua superfície.

b) Ligue esses pontos.

c) A figura construída se trata realmente de um triângulo?

4) Os triângulos que você construiu nas duas superfícies (sela e isopor) permanecem com as mesmas características de um triângulo plano? Houve alguma deformação?

5) Sabe-se que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer mede 180°, como afirma Iezzi (2009). Tomando essa afirmação como parâmetro, vamos verificar se essa propriedade é válida para as geometrias elíptica e hiperbólica.

a) Com o auxílio de um transferidor, meça os ângulos formados nas figuras, depois complete a tabela:

X	Triângulo da atividade 1	Triângulo da atividade 2	Triângulo da atividade 3
Medida do ângulo 1			
Medida do ângulo 2			
Medida do ângulo 3			
Soma das medidas dos ângulos			

b) O que você conseguiu verificar sobre a soma dos ângulos internos das figuras?

c) Logo, é possível afirmar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo sempre é igual 180°? Por quê?

4ª SEQUÊNCIA: OS QUADRILÁTEROS NAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

O estudo dos quadriláteros nas geometrias não euclidianas surgiu a partir das tentativas de prova do quinto postulado de Euclides por Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) e Johann Heinrich Lambert (1728-1777). (RIBEIRO, 2012).

Saccheri admitiu que: dado um quadrilátero simétrico, o qual possui dois ângulos retos e os outros dois iguais entre si, existem três possibilidades para esses ângulos, os quais ele chamou de ângulos de topo, ambos serem retos; ambos serem obtusos; ambos serem agudos. (BARBOSA, 2011).

Considerando que um retângulo quadrilátero, o qualque possui os quatro ângulos retos (IEZZI, 2009), vamos verificar se é possível construir essa figura em qualquer superfície.

1) Assim, vamos construir essa figura nas três superfícies (sulfite, superfície de *biscuit* e bola de isopor), considerando os seguintes passos:

a) Traçar uma reta *r* e nela marcar dois pontos *A* e *B*;

b) Com uma medida qualquer e centro em A, traçar um arco que intercepte a reta *r* em dois pontos e os nomeie de *P* e *Q*;

c) Com a mesma medida traçar um arco com centro em *P* e outro em *Q* de modo que eles se interceptem, nomeie esse ponto de interseção de *C*;

d) Com a mesma medida e centro em B, traçar um arco que intercepte a reta *r* em dois pontos e os nomeie de *U* e *V*;

e) Ligue os pontos *A* e *C*, *B* e *D*, *C* e *D*, formando o quadrilátero *ABCD*.

A partir disso responda:

I) Que figura formou na folha de sulfite?

II) Que figura formou na superfície de *biscuit*?

III) Que figura formou na bola de isopor?

IV) As figuras sofreram alguma deformação em sua aparência? Quais?

2) Partindo da ideia que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º, vamos verificar se esta propriedade é válida em qualquer espaço.

a) Com o auxílio de um transferidor, meça as medidas dos ângulos formados nas figuras, depois complete o quadro:

X	Quadrilátero no plano	Quadrilátero na pseudoesfera	Quadrilátero na esfera
Medida do ângulo 1			
Medida do ângulo 2			
Medida do ângulo 3			
Medida do ângulo 4			
Soma das medidas dos ângulos internos			

b) O que você conseguiu verificar sobre a soma dos ângulos internos dessas figuras? É sempre 360º?

c) Portanto, é possível afirmar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo sempre é igual 360°? Por quê?

d) Em relação ao quadrilátero de Saccheri, como fica a classificação dos ângulos de topo:

- No plano? ____
- Na superfície hiperbólica? ____
- Na Superfície esférica? ____

ANOTAÇÕES

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

REFERÊNCIAS

ARAMAN, E. M. O. **Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática**. 2011. 240 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

BARBOSA, L. N. S. C. de. **Uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento das geometrias não euclidianas**. 2011. 58 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

BONETE, I. P. **As Geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura**: algumas experiências. 2000. 219 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas/Universidade Estadual do Centro-Oeste, Campinas/Guarapuava, 2000.

CAMARGO, K. C. A. **A expressão gráfica e o ensino das geometrias não euclidianas.** 2012. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e em Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

CHAVICHIOLO, C. V. **Geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de matemática**: o que dizem os formadores. 2011. 165 p. Dissertação (Mestrado em Educação), Setor de Educação – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

IEZZI, G. **Matemática e Realidade**. São Paulo: Atual, 2009.

MACHADO, B. F.; MENDES, I. A. **Vídeos didáticos de história da matemática:** produção e uso na educação básica. São Paulo: Livraria da Física, 2013. 180 p.

MARTOS, Z. G. **Geometrias não euclidianas:** uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no ensino fundamental. 2002. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J. A história da matemática na formação do professor que ensina matemática. **Caderno CEDES**, Campinas, v. 40, p. 47-61, 1996.

NASCIMENTO, A. K. S. do. **Geometrias não euclidianas como anomalias:** implicações para o ensino de geometria e medidas. 2013. 115 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares para a Educação Básica:** Matemática. Curitiba, 2008. Disponível em: <http://www.nre.seed.pr.gov.br/irati/arquivos/file /matematica.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2016.

RIBEIRO, R. D. G. L. **O ensino das geometrias não euclidianas:** um olhar sob a perspectiva da divulgação científica. 2012. 102 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade São Paulo, São Paulo, 2012.

TOTH, I. A revolução não euclidiana. **Caderno de Física da UEFS**, 09 (01 e 02), p. 37-52, 2011.

APÊNDICE C - Questionário Final

Nome: ____

QUESTIONÁRIO FINAL

1) Para você o que são as geometrias não euclidianas?

2) No que você acha que elas se difere da geometria euclidiana?

3) Você acha relevante abordar esse tema nas aulas de Matemática? Por quê?

4) Agora como você se sente para trabalhar com tais geometrias em sala de aula?

5) Você acha possível trabalhar com vídeos nas aulas de Matemática? Por que?

6) Avalie o material utilizado e o curso:

a) Avalie as atividades (se foram claras, se é possível explorá-las em sala de aula e o que achar relevante?

b) Avalie os vídeos utilizados (linguagem, objetividade, se é possível explorá-los na educação básica).

c) Avalie a relevância do curso em geral para sua formação e prática: