

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

SILVIO CÉSAR MENDONÇA

ESTUDO DA PROPAGAÇÃO DO FOGO POR MEIO DA DIFUSÃO EM
PALITOS DE FÓSFOROS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO - PR

2017

SILVIO CÉSAR MENDONÇA

**ESTUDO DA PROPAGAÇÃO DO FOGO POR MEIO DA DIFUSÃO EM
PALITOS DE FÓSFOROS**

Trabalho de Conclusão de Curso do Curso de
Licenciatura em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná campus
Toledo.

Orientador: Me. Renato Francisco Merli

Coorientadora: Ma. Dione Inês Christ Milani

TOLEDO - PR

2017

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado ESTUDO DA PROPAGAÇÃO DO FOGO POR MEIO DA DIFUSÃO EM PALITOS DE FÓSFOROS foi considerado APROVADO de acordo com a ata nº __ de __/__/____.

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Me. Renato Francisco Merli (Orientador)

Ma. Dione Inês Christ Milani (Coorientadora)

Ma. Márcia Regina Piovesan – UTFPR - Toledo

Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan – UTFPR - Toledo

TOLEDO - PR

2017

RESUMO

O estudo do comportamento do fogo em incêndios ainda é incipiente e o modelo para tal surge como uma importante ferramenta para práticas de treinamento dos bombeiros, possibilitando a simulação de cenários de propagação de incêndios em função das condições ambientais. Nesse contexto, e assumindo que nossa pesquisa é exploratória, descritiva e explicativa, além de bibliográfica, documental e experimental (GIL, 2002), buscamos encontrar alguns modelos matemáticos que descrevam o fenômeno: incêndio florestal. Sabemos, por hipótese, que muitas são as variáveis envolvidas, o que de certo modo torna os modelos matemáticos, para esse problema, muito complexos. Assim, sabendo das limitações impostas para tentar replicar esse problema, realizamos uma experiência com um conjunto de palitos de fósforos que procurou representar essa problemática com algumas variáveis sendo controladas. Este trabalho buscou responder às seguintes perguntas: *Colocando palitos de fósforo intercalados em fileiras, como será o percurso do fogo em relação ao tempo se acendermos o palito que está no centro de nossa experiência? A partir do(s) modelo(s) matemático(s) encontrado(s) na literatura, o(s) modelo(s) que encontramos para nossa experiência pode(m) ser considerado(s) uma redução, dadas as variáveis utilizadas?* Para tanto, o objetivo foi elaborar um modelo matemático que descrevesse a propagação do fogo por meio do acendimento de um conjunto de palitos de fósforos simbolizando uma floresta de pinus. A partir dos modelos obtidos e das comparações realizadas, consideramos que nossos modelos se apresentaram adequados para os primeiros minutos da experiência.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Propagação do Fogo. Experimentos.

ABSTRACT

The study of fire behavior in fires is still incipient and modelling for that appears as an important tool for firefighter training practices, allowing a simulation of fire propagation scenarios as a function of environmental conditions. In this context, and assuming that our research is exploratory, descriptive and explanatory, as well as bibliographical, documentary and experimental (GIL, 2002), we seek to find some mathematical models that describe the phenomenon: forest fire. We know, by hypothesis, that there are many surrounding variables, which in some way makes mathematical models for this problem very complex. Thus, knowing the limitations imposed to try to replicate this problem, we performed an experiment with a set of matchsticks that tried to represent a problem situation with some variables being controlled. This work intended to answer the questions: *Putting matchsticks interspersed in rows how will be the course in relation to the time if we light the matchstick that is at the center of our experience? From the mathematical models found in the literature, can the model we find for our experience be considered a reduction for models, given the variables used?* In order to do so, the objective was to elaborate a mathematical model that described a fire propagation by means of the ignition of a set of matchsticks symbolizing a pine forest. From the obtained models and the comparisons, we consider that our models are suitable for the first minutes of the experiment.

Keywords: Mathematical Modeling. Fire Propagation. Experiments.

AGRADECIMENTOS

À minha família, minha esposa e meus dois filhos, pelos momentos que estive ausente, e mesmo assim, sempre recebi o apoio necessário para seguir nessa caminhada.

Ao meu orientador, professor Me. Renato Francisco Merli, pelo apoio, direcionamento, broncas, elogios em todos os momentos desse trabalho, e principalmente pelo respeito acadêmico, que levo como ensinamento para sempre em minha vida, sem sua ajuda não seria possível a concretização desse Trabalho de Conclusão de Curso.

Ao professor Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan, pela brilhante sacada de me instigar a realizar essa pesquisa, de sua ideia surgiu a Modelagem Matemática hoje apresentada como TCC.

À professora Ma. Dione Inês Christ Milani, sem seu incrível conhecimento em matemática aplicada, não conseguiríamos elucidar nosso Modelo Matemático, não se esquivou em nenhum momento quando pedi socorro em algum entrave matemático no trabalho aqui descrito.

À professora Ma. Márcia Regina Piovesan, pela contribuição nas observações pontuais em nosso trabalho, cooperando para que essa pesquisa se tornasse mais didática, no ponto de vista dos cálculos.

Ao professor Dr. Rodolfo Maduro Almeida, pelo auxílio acadêmico, nos cedendo seu Modelo Matemático de Propagação do Fogo para nosso estudo bibliográfico.

A todos os professores desse curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Toledo que auxiliaram de alguma maneira para o término desse trabalho.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Etapas da Modelagem Matemática	16
Figura 2 - Ilustração do Princípio de Huygens	21
Figura 3 – Autômato celular com as variáveis aleatórias: D , B e I	24
Figura 4 - Placa de Madeira	26
Figura 5 - Palitos pegando Fogo	27
Figura 6 – Área queimada - Quadrante 1	29
Figura 7 – Curvas de nível	31
Figura 8 - Gráfico de dispersão dos dados	32
Figura 9 - Gráfico de ajuste linear do quadro 2	34
Figura 10 – Comparação entre os dados Reais e os do Modelo (Experiência 1)	37
Figura 11 - Montagem dos palitos de fósforos	37
Figura 12 – Propagação do fogo	38
Figura 13 - Primeiro quadrante (49s)	38
Figura 14 - Gráfico de dispersão do quadro 5	40
Figura 15 – Comparação entre os dados Reais e os do Modelo (Experiência 2)	44
Figura 16 - Gráfico da Primeira Experiência	45
Figura 17 - Gráfico da Segunda Experiência	45
Figura 18 - Processo de condução de um incêndio em vegetação	46

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Equações de cada segundo (1ª Experiência).....	30
Quadro 2 - Área em função do Tempo	31
Quadro 3 - Dados da Área para cálculo em Ford-Walford.....	34
Quadro 4 - Dados do modelo de Verhulst	36
Quadro 5 – Equações de cada segundo (2º Experiência).....	39
Quadro 6 - Dados coletados.....	40
Quadro 7 - Dados coletados Ford-Walford	40
Quadro 8 – Área (t) em função do tempo	43
Quadro 9 - Dados coletados.....	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	12
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
3.1	MODELAGEM MATEMÁTICA	15
3.2	MODELO MATEMÁTICO	18
3.3	MODELO MATEMÁTICO PARA PROPAGAÇÃO DE FOGO	19
3.4	AUTÔMATOS CELULARES	20
4	O DESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMÁTICO	26
4.1	PRIMEIRA EXPERIÊNCIA	26
4.1.1	Resolução Utilizando o Modelo Populacional De Verhulst.....	34
4.1.2	Validação da primeira experiência	36
4.2	SEGUNDA EXPERIÊNCIA	37
4.2.1	Resolução utilizando o Modelo Populacional De Verhulst.....	41
4.2.1	Validação da segunda experiência.....	43
4.3	REFLEXÕES A PARTIR DAS DUAS EXPERIÊNCIAS	44
5	CONCLUSÃO	47
	REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

Segundo Almeida (2012, p. 11),

[...] embora o fogo seja um evento endógeno e importante para o seu funcionamento, nos dias de hoje, a pressão humana sobre este bioma gera outro impacto negativo: o fogo exógeno ou de origem antrópica¹. O uso indiscriminado do fogo, que ocorre principalmente em atividades agropastoris durante a estação seca, torna as reservas ecológicas deste bioma susceptíveis a perigosos e devastadores incêndios, que causam impacto negativo sobre este bioma. O estudo do comportamento do fogo em incêndios de vegetação no Cerrado ainda é incipiente. [...] O modelo de propagação de incêndios de vegetação surge como uma importante ferramenta para práticas, possibilitando a simulação de cenários de propagação de incêndios em função das condições ambientais.

Nesse contexto, e a partir de uma pesquisa bibliográfica sobre o assunto, buscaremos encontrar alguns modelos matemáticos que descrevam o fenômeno: incêndio florestal. Sabemos, por hipótese, que muitas são as variáveis envolvidas, o que de certo modo torna os modelos matemáticos, para esse problema, muito complexos. Assim, sabendo das limitações impostas para tentar replicar, iremos realizar uma experiência com um conjunto de palitos de fósforos que procure representar a situação com algumas variáveis sendo controladas.

Diante do fenômeno a ser estudado e da experiência que realizaremos, o nosso problema consiste em responder às seguintes perguntas: *Colocando palitos de fósforo intercalados em fileiras, como será o percurso do fogo em relação ao tempo se acendermos o palito que está no centro de nossa experiência? A partir do(s) modelo(s) matemático(s) encontrado(s) na literatura, o(s) modelo(s) que encontramos para nossa experiência pode(m) ser considerado(s) uma redução, dadas as variáveis utilizadas?* Para responder essas perguntas, realizaremos dois testes com palitos de fósforos, a fim de, por meio da gravação de um vídeo da experiência, conseguirmos analisar o comportamento do fogo ao longo do tempo e tentar descrever o fenômeno por meio de um modelo matemático. Na sequência, com o intuito de corroborar o modelo encontrado, iremos utilizar os dados coletados na experiência em modelos da literatura.

O objetivo geral é elaborar um modelo matemático que descreva a propagação do fogo por meio do acendimento de um conjunto de palitos de fósforos simbolizando

¹ Na ecologia, antrópico se refere a tudo aquilo que resulta da atuação humana.

uma floresta de pinus e verificar se nosso modelo consegue satisfazer a prevenção de queimadas comparando nossa pesquisa com modelos matemáticos já existentes que estudam a propagação do fogo em florestas de pinus.

Nossa experiência se dará com palitos de fósforos que, segundo o site da empresa SWEDISH MATCH – BRASIL (2017), dona da marca Fiat-Lux de fósforos, que utilizamos em nosso trabalho,

[...] a cabeça do palito de fósforo é feita de uma massa química, mas não contém fósforo nem pólvora esta massa contém um composto químico chamado clorato de potássio, que cede oxigênio facilmente. Na lixa da caixinha de fósforos é que se encontra o elemento químico fósforo. Daí a origem do nome.

Atualmente a empresa utiliza a madeira de pinus em seus fósforos, o que corrobora com o intuito de nossa experiência. Não iremos levar em consideração algumas variáveis como: vento, altura da mata, tipo de vegetação, entre outros. Com o intuito de particionar o objetivo geral, elencamos os objetivos específicos: realizar um estudo bibliográfico sobre incêndios florestais e os modelos matemáticos que podem representar tal fenômeno; realizar um estudo bibliográfico sobre os métodos de modelagem matemática; realizar duas experiências de propagação do fogo com palitos de fósforos, eliminando algumas variáveis relativas (tamanho do palito, nivelamento do solo, etc.); encontrar um modelo matemático que descreva tal situação; analisar nossa experiência em relação aos modelos já existentes e verificar se descreve de forma aproximada a propagação do fogo.

Muitas são as justificativas que podem subsidiar essa pesquisa, entre elas podemos citar a necessidade de satisfazer uma curiosidade do autor em relação ao assunto, em conversa informal com um integrante do Corpo de Bombeiros de Marechal Cândido Rondon – Paraná, que é Bombeiro Socorrista, percebeu-se que para os Bombeiros não há uma equação que descreva o comportamento da propagação do fogo, o que dificulta seu trabalho no combate às chamas, pois os militares não têm um amparato matemático que consiga treiná-los para uma eventual atividade em campo. Verificando nas bibliografias, encontramos alguns modelos numéricos, que, simulam a propagação do fogo, buscando prever queimadas. Com esse intuito queremos encontrar um modelo que consiga aproximar a descrição da propagação do fogo. A pesquisa não tem o propósito de dar uma solução definitiva, mas uma contribuição para o tema muito discutido nos últimos 30 anos em todo o mundo, que nos vislumbra com modelos que descrevem tais fenômenos.

Para o capítulo dois descreveremos de que maneira serão os procedimentos metodológicos que adotaremos para concretizar o desenvolvimento de nossa pesquisa. Na sequência, no capítulo três, discutiremos nosso entendimento de modelagem matemática, modelo matemático e um exemplo de modelo matemático de propagação do fogo a partir da literatura presente. Para o desenvolvimento do modelo matemático, no capítulo quatro, mostramos passo a passo a modelagem que busca descrever o comportamento da propagação do fogo através da difusão em palitos de fósforos. Ao final, são apresentadas nossas conclusões a respeito do trabalho.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Antes de apresentarmos os procedimentos metodológicos propriamente ditos, realizamos uma discussão sobre a classificação de uma pesquisa e como a nossa se enquadra nessa classificação. Para Gil (2002, p. 41) “qualquer classificação se faz mediante algum critério” e, dois desses critérios referem-se aos objetivos da pesquisa e os procedimentos metodológicos adotados.

Nesse contexto, quanto aos objetivos de pesquisa temos do tipo “exploratórias, descritivas e explicativas” (GIL, 2002, p. 41). Segundo Gil (2002), as pesquisas exploratórias buscam aprimorar ideias, tornando-a mais familiar a todos. Essas pesquisas envolvem um levantamento bibliográfico, entrevistas e análises de casos. Nas pesquisas descritivas, o objetivo central é caracterizar uma população ou fenômeno, buscando o estabelecimento de relações entre as diferentes grandezas. As pesquisas explicativas “têm como preocupação central identificar os fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência dos fenômenos” (GIL, 2002, p. 42). As pesquisas explicativas normalmente utilizam o método experimental. Vale destacar que a intersecção entre os tipos de pesquisa não é um conjunto vazio, o que justifica o fato de muitas pesquisas serem ao mesmo tempo exploratórias, descritivas e explicativas.

Para o nosso caso, temos características dos três tipos de pesquisa. Da pesquisa exploratória, já que necessitamos fazer um levantamento bibliográfico e a análise de alguns casos (queimada de florestas de pinus); da descritiva, principalmente na elaboração do modelo matemático, ao buscar encontrar relações entre as diferentes variáveis; e também da explicativa, já que realizamos experimentalmente o processo.

Quanto à classificação por meio dos procedimentos adotados, Gil (2002) define que eles estão ligados diretamente à forma como a coleta de dados é realizada, ou seja, por meio de pesquisas de fontes textuais e por meio de dados fornecidos por pessoas (entrevistas, por exemplo). No primeiro caso, temos as pesquisas bibliográficas e documentais e, no segundo caso, temos as pesquisas experimentais, *ex-post facto*² e o estudo de caso. Não trataremos aqui de todos os tipos de pesquisas, mas apenas aquelas

² A tradução literal da expressão *ex-post facto* é “a partir do fato passado”. Isso significa que neste tipo de pesquisa o estudo foi realizado após a ocorrência de variações na variável dependente no curso natural dos acontecimentos (GIL, 2002, p. 49).

que nos dizem respeito, que são as pesquisas bibliográficas, documentais e experimentais.

Para Gil (2002, p. 44), a pesquisa bibliográfica

[...] é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas.

No caso da pesquisa documental,

[...] a diferença essencial entre ambas (bibliográfica e documental) está na natureza das fontes. Enquanto a pesquisa bibliográfica se utiliza fundamentalmente das contribuições dos diversos autores sobre determinado assunto, a pesquisa documental vale-se de materiais que não recebem ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetos da pesquisa (GIL, 2002, p. 45, acréscimo nosso).

O autor adverte que “Nem sempre fica clara a distinção entre a pesquisa bibliográfica e a documental, já que, a rigor, as fontes bibliográficas nada mais são do que documentos impressos para determinado público” (GIL, 2002, p. 46) e, mais, “nesse sentido, é possível até mesmo tratar a pesquisa bibliográfica como um tipo de pesquisa documental, que se vale especialmente de material impresso fundamentalmente para fins de leitura” (GIL, 2002, p. 46).

Em relação à pesquisa experimental, pode-se dizer que “consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo, definir as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto” (GIL, 2002, p. 47). As pesquisas experimentais são um instrumento indispensável para os pesquisadores poderem testar hipóteses sobre as relações de causa e efeito entre as variáveis.

Para nossa pesquisa, podemos considerar que temos elementos de uma pesquisa bibliográfica, documental e experimental. Nesse sentido, os procedimentos apontados a seguir devem ser entendidos dentro desse contexto.

O trabalho teve início com uma pesquisa bibliográfica sobre o que é modelagem matemática e modelo matemático. Depois realizamos um estudo documental e bibliográfico sobre a propagação do fogo por meio dos modelos já existentes, de artigos e dissertações de mestrado e doutorado acerca do assunto, utilizando para isso alguns estudos de caso. Nossa pesquisa tem ainda um caráter quantitativo experimental, pois coletamos dados, os classificamos e a partir daí fizemos uma análise do nosso modelo. Para isso utilizamos os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst,

além do Método de Ford-Walford. Por meio dos dados coletados ajustamos esses modelos para encontrarmos uma equação matemática que descreva o fenômeno da propagação do fogo.

No próximo capítulo apresentamos nosso arcabouço teórico sobre modelagem matemática, modelo matemático e, em seguida, apresentamos um exemplo de modelo matemático que descreve a propagação do fogo.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Com intuito de organizar esse capítulo, o separamos em diferentes seções que irão discutir sobre Modelagem Matemática, modelo matemático e o modelo matemático sobre propagação do fogo encontrado na literatura.

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

O termo *modelagem*, no dicionário Eletrônico Michaelis (2012) é caracterizado como “operação de modelar” ou ainda “conjunto de processos e meios usados na feitura de modelos”. No caso da Matemática, para criar/desenvolver um modelo matemático, é necessário modelar por meio de um conjunto de procedimentos, aos quais podemos chamar de Modelagem Matemática. Vários esquemas e modelos explicativos foram elaborados buscando compreender o processo da Modelagem Matemática, por exemplo, para Bassanezi (2009, p. 16), a Modelagem Matemática é a “[...] arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” ou ainda:

[...] a modelagem matemática é matemática por excelência. As origens das ideias centrais da matemática são o resultado de um processo que procura entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade. O desenvolvimento dessas ideias e sua organização intelectual dão-se a partir de elaborações sobre representações do real (BASSANEZI, 2009, p.13).

Segundo Oliveira (2011 p. 31),

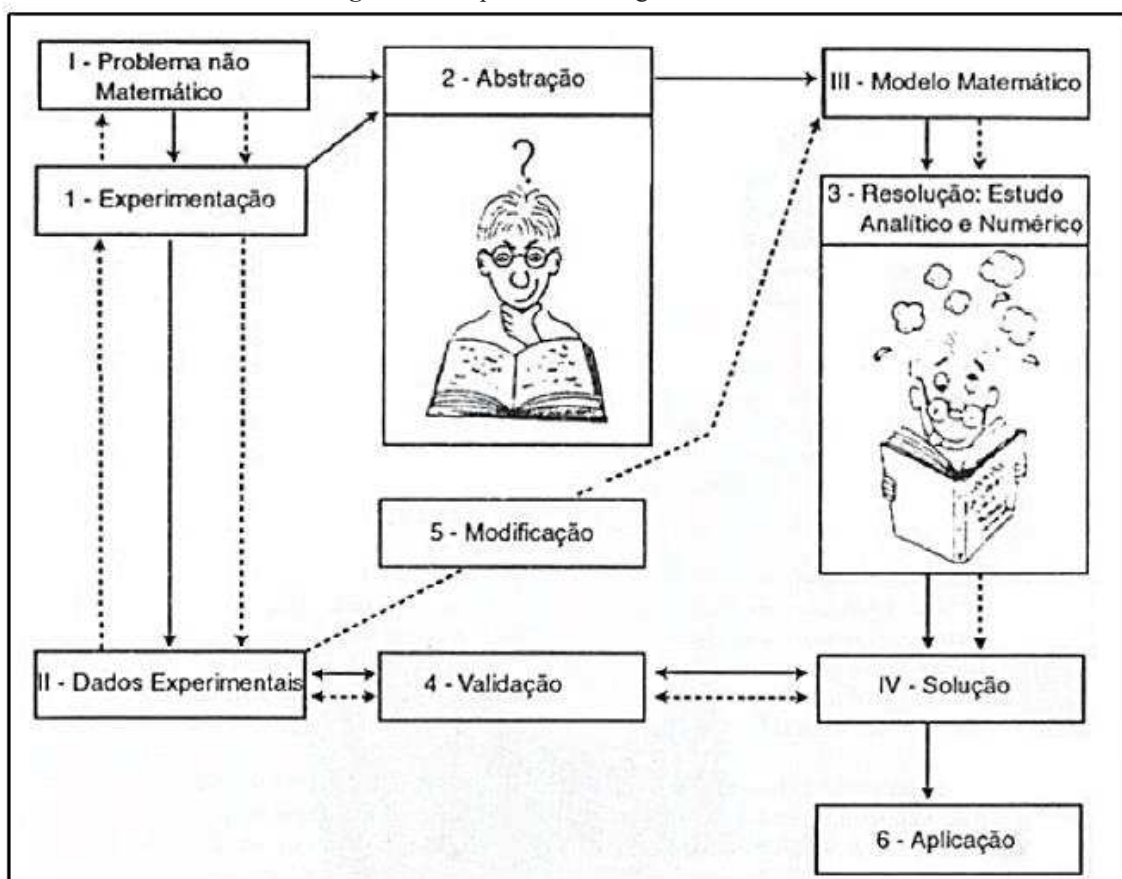
[...] a partir de uma situação problema, define-se o problema a ser estudado. Os dados são selecionados, por meio de simplificações e hipóteses, de modo a manter as características do problema. Muitas vezes, o problema não parece diretamente associado a uma linguagem matemática, e faz-se necessário substituir a linguagem do problema para uma linguagem matemática adequada (OLIVEIRA, 2011, p. 31).

Ainda segundo Bassanezi (2009, p. 19), “quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo”.

Para Bassanezi (2010, p. 27), algumas etapas no processos de modelagem matemática acontecem naturalmente em alguns indivíduos. Tais etapas são sequenciais, chamadas por ele de “atividades intelectuais” e podem ser enumeradas da seguinte

forma: 1) Experimentação, 2) Abstração, 3) Resolução: estudo analítico e numérico, 4) Validação, 5) Modificação e 6) Aplicação. Entre essas etapas ele atribui quatro contextos: I) Problema não matemático, II) Dados Experimentais, III) Modelo Matemático e IV) Solução. A Figura 1 apresenta o diagrama de relações entre essas etapas.

Figura 1 - Etapas da Modelagem Matemática



Fonte: Bassanezi (2010, p. 27)

A primeira atividade intelectual (ou etapa) que Bassanezi (2010) relata é a da *Experimentação*, que para o autor consiste em uma atividade laboratorial para o processamento de dados; “[...] a adoção de técnicas e métodos estatísticos na pesquisa experimental podem dar maior grau de confiabilidade aos dados obtidos” (BASSANEZI, 2010, p. 27). Os métodos experimentais quase sempre são ditados pela própria natureza do experimento e objetivo da pesquisa.

A segunda etapa descrita por Bassanezi (2010, p. 27) é a *Abstração*, ou seja, “[...] é o procedimento que deve levar à formação de Modelos Matemáticos”. Segundo o autor, na *Abstração*, o primeiro procedimento é procurar obter as variáveis mas, essas precisam ser bem definidas e conceituadas para um bom andamento da pesquisa; depois

devemos problematizar ou formular os problemas teóricos em uma linguagem própria da área que está trabalhando. Outro ponto importante, salientado pelo autor é que “[...] a escolha de um tema de uma pesquisa pode ser uma proposta abrangente, a formulação de um problema é mais específica e indica exatamente o que se pretende resolver” (BASSANEZI, 2010 p. 28).

É na **Abstração** que se dá a formulação de hipóteses, pois elas direcionam a investigação e permitem ao pesquisador deduzir manifestações empíricas específicas. Para Bassanezi (2010, p. 29) “a montagem do modelo matemático, que se dá nesta fase do processo da modelagem, depende substancialmente do grau de complexidade das hipóteses e da quantidade das variáveis interrelacionadas”. Por último, temos a simplificação, momento essencial da pesquisa para aparar as arestas quando não é possível modelar toda a complexidade de uma situação. Para Mark Kac *apud* Bassanezi (2010, p. 29) “se você não consegue resolver o problema a que se propôs, então tente simplificá-lo. A condição única é que não se deve simplificá-lo demasiadamente a ponto de perder as informações essenciais”.

A próxima etapa é a **Resolução**, na qual “o modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática corrente” (BASSANEZI, 2010, p. 29). Essa resolução, dependendo da complexidade pode, segundo o autor, ser verificado em métodos computacionais, dando uma solução numérica aproximada.

O próximo momento é a **Validação**. Para o autor esse passo é o de verificar o processo de aceitação ou não do modelo, mas isso depende dos fatores que “condicionam o modelador, incluindo seus objetivos e recursos disponíveis” (BASSANEZI, 2010, p. 30). Além disso, a interpretação “pode ser feita com a utilização de gráficos das soluções que facilitam avaliar as previsões ou mesmo sugerir um aperfeiçoamento dos modelos” (BASSANEZI, 2010, p. 30).

A última etapa é a **Modificação**, momento em que o pesquisador deve relacionar todas as variáveis e decidir se o modelo é válido, caso não seja, ele deve pontuar alterações pertinentes para validar o modelo, como aponta Bassanezi (2010, p. 30), ao afirmar que,

[...] alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. Quando os modelos são obtidos considerando simplificações e idealizações da realidade, suas soluções geralmente não conduzem às previsões corretas e definitivas.

Realizadas essas etapas, o modelador resolve um problema e constrói um modelo matemático. Mas o que seria esse modelo matemático? Na seção seguinte apresentamos nossa concepção de modelo matemático.

3.2 MODELO MATEMÁTICO

Desde os primórdios, o homem procura entender e descrever fenômenos da natureza por meio de modelos (sejam eles matemáticos ou não). Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 13), neste contexto, referem-se ao modelo como “uma tentativa de expor e/ou explicar características de algo que não está presente, mas se ‘torna presente’”, por meio do modelo.

Cifuentes e Negrelli (2007, p. 74) caracterizam modelo como:

[...] uma forma de ‘ver’ a realidade, de perceber seu sentido e, desse ponto de vista, é um recurso epistemológico para a sua compreensão. Essa compreensão, longe de significar atingir a verdade, como usualmente se pensa, significa apenas, dado o caráter aproximativo da representação, uma adequação empírica com os fenômenos estudados.

O modelo matemático segundo Sodré (2007, p. 3),

[...] pode ser apresentado como uma representação de um sistema real, o que significa que um modelo deve representar um sistema e a forma como ocorrem as modificações no mesmo [...] um modelo é normalmente uma simplificação do mundo real ou alguma forma conveniente de trabalhar com este mundo, mas as características essenciais do mundo real devem aparecer no modelo, de modo que o seu comportamento seja igual ou semelhante aquele do sistema modelado.

Na visão de Bassanezi (1994, p. 31, tradução nossa), modelo matemático é “quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, etc., obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno sobre análise” ou também como “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” (BASSANEZI, 2009, p. 20).

Podemos imaginar que desenvolver o processo de Modelagem Matemática, que é diferente do desenvolvimento de modelos matemáticos, não é em geral, muito simples. Muitos esforços são feitos para se chegar a uma melhor representação matemática da realidade que se quer estudar, dando uma explicação que se aproxime da

realidade do modelo examinado. No caso em tela, discutimos, a seguir, o modelo matemático para propagação do fogo.

3.3 MODELO MATEMÁTICO PARA PROPAGAÇÃO DE FOGO

A natureza tem a necessidade de renovação, plantas morrem e outras tomam seus lugares, rios nascem e rios morrem, algumas espécies entram em extinção e outras tomam seus lugares. Isso acontece naturalmente, por exemplo, nas florestas, que, através da fagulha expelida por um relâmpago em contato com uma vegetação seca, gera um incêndio que renova as árvores e plantas, Contudo segundo Junior (2007, p. 18),

[...] o fogo advindo tanto das queimadas quanto dos incêndios é um grande problema para a natureza e para a sociedade. Além da fumaça ser danosa à saúde, pode provocar fechamento de aeroportos, destruição de plantações e de espécies raras de fauna e flora (JUNIOR, 2007, p. 18).

Recentemente (junho de 2017) tivemos em Portugal, um dos maiores incêndios registrados naquele país, morreram 63 pessoas e ficaram mais de 54 feridas cinco dessas pessoas em estado grave. As autoridades locais asseguraram que o foco inicial do incêndio teve origem natural, um raio caiu em uma árvore que estava em campo aberto, mas as fortes rajadas de vento propagaram o fogo e o tornaram incontrolável, as autoridades portuguesas necessitaram de ajuda internacional para o controle dos diversos focos do incêndio (MARTÍN, 2017). Almeida (2012) descreve que maior frequência de queimadas é por descuido do homem. Listando os pecuaristas, que para renovar seu pasto põem fogo na inverno sem a devida autorização e acompanhamento do IBAMA³, esse fogo geralmente não tem o controle esperado e acaba atingindo a mata acontecendo a destruição da vida que domicilia aquele *habitat*. Também temos os casos de descuido pertinente aos fumantes. Esses incêndios não fazem parte de uma renovação e acabam destruindo uma vegetação de diversas espécies e os animais que ali vivem. Neste viés estamos propondo um modelo matemático que descreva uma propagação do fogo com palitos de fósforos, dando uma ideia do que poderia acontecer

³ Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis (IBAMA) - Ministério do Meio Ambiente. Disponível em: <<http://www.ibama.gov.br/>>.

se fossem árvores de pinus plantadas em sequência, como acontece com as grandes plantações de árvores para celulose de papel.

A seguir, apresentamos um exemplo de modelo matemático que encontramos na literatura que busca descrever e representar a propagação do fogo em uma floresta.

3.4 AUTÔMATOS CELULARES

A pesquisa realizada por Almeida (2012, p. 6) tem o intuito de ajudar a preservar um patrimônio do povo brasileiro que é o cerrado. Segundo o autor, o cerrado é o segundo maior bioma brasileiro estendendo-se por uma área que cobre em torno de dois milhões de km² do Brasil Central, sendo caracterizado por uma vasta biodiversidade animal e vegetal. Almeida descreve que,

[...] dentre os tipos de incêndios de vegetação, o incêndio de superfície é o mais comum e conseqüentemente o mais estudado. Neste tipo de incêndio, o termo combustível vegetal refere-se a toda vegetação viva ou morta com potencial de ignição que se encontra imediatamente acima da superfície, sendo responsável por conduzir a propagação do fogo. O comportamento do fogo em incêndios de vegetação é conduzido pela interação de três principais conjuntos de fatores, que são: vegetação, condições atmosféricas e topografia. Se o fogo se propaga em condições homogêneas de vegetação e sem vento ou elevações na superfície, a razão comprimento-largura será uma unidade, e o perímetro assume forma isotrópica ou circular. Havendo uma direção dominante na propagação do fogo, o perímetro assume forma elíptica (ALMEIDA, 2012, p. 6).

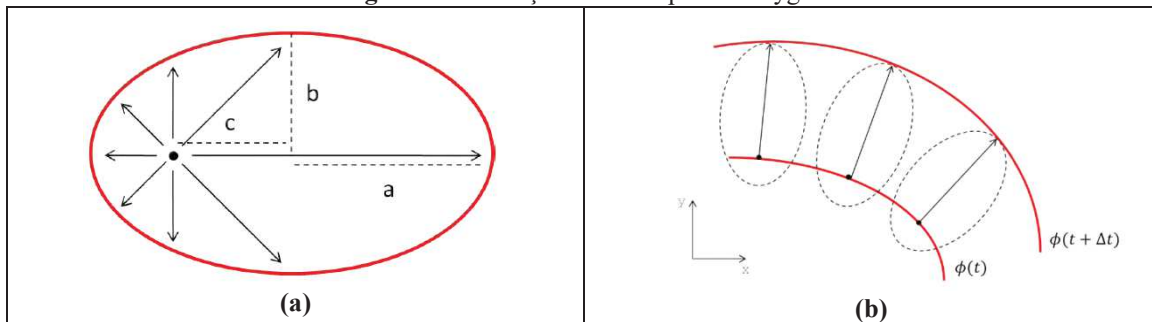
Conforme apontam McKenzie e Kennedy (2011), um incêndio pode ser descrito como um distúrbio ecológico que se dá por um processo de contágio, no qual o fogo se alastra sobre a vegetação ao longo do tempo. Este processo de contágio é representado por duas componentes, o momento e a conectividade, que juntas condicionam a ocorrência do incêndio (ALMEIDA, 2012, p. 37). O momento ou energia relaciona-se com a queima da vegetação e os mecanismos de transferência de calor. Já a conectividade relaciona-se com a abundância e a distribuição espacial da vegetação. Com base nesta descrição, podemos quantificar valores para estas componentes que, conjuntamente, condicionam a ocorrência de um incêndio. Aqui, o conceito de percolação é utilizado para representar este condicionamento (STAUFFER; HARONY, 1994 *apud* ALMEIDA, 2012, p. 37).

A teoria de percolação começou com o estudo da propagação de fluidos em meios desordenados. Nestes meios, como por exemplo, uma rocha porosa, a propagação do fluido se dá em função da porosidade, de uma forma não

linear. Ou seja, existem dois regimes bem definidos, a propagação e a extinção, separados por uma transição brusca - a chamada transição de percolação. Assim, para baixos valores de porosidade, o fluido não percola o meio. Para valores acima de um valor crítico, chamado de limiar de percolação, existe uma probabilidade de percolação do fluido pelo meio poroso (ALMEIDA, 2012, p. 37).

Para exemplificar o autor utiliza o Princípio de Huygens, onde cada ponto do perímetro da frente de fogo em um dado instante de tempo t é considerado a origem de frentes de ondas elípticas secundárias, representadas pelo modelo básico, e que se propagam por um intervalo de tempo Δt . A nova posição da frente de fogo $\varphi(t + \Delta t)$, após o intervalo de tempo Δt , será definida pelas expansões das frentes de onda secundárias, expandidas a partir da posição da frente de fogo no tempo t , $\varphi(t)$. A direção de rotação das elipses e velocidade de expansão das elipses é determinada em função de modelos de comportamento do fogo, que consideram o efeito combinado dos fatores que direcionam a propagação.

Figura 2 - Ilustração do Princípio de Huygens



Fonte: Almeida (2012, p. 7)

Para Almeida (2012) as equações que representam a expansão dos pontos da elipse podem ser dadas por:

$$x(\phi, t) = a \cdot t \cdot \cos\phi \quad y(\phi, t) = a \cdot t \cdot \sin\phi \quad (1)$$

Richards (1990 *apud* Almeida, Macau e Ramos 2014, p. 3) propôs que, para um dado instante de tempo t , a taxa de expansão das elipses partindo de um ponto $(x(\phi, t), y(\phi, t))$ da frente de fogo, dada pela equação:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{a^2 \cos\theta \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \sin\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi} \cos\theta \right) - b^2 \sin\theta \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \cos\theta - \frac{\partial y}{\partial \phi} \sin\theta \right)}{\sqrt{b^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \cos\theta - \frac{\partial y}{\partial \phi} \sin\theta \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \sin\theta - \frac{\partial y}{\partial \phi} \cos\theta \right)^2}} + c \sin\theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{-a^2 \sin\theta \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \sin\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi} \cos\theta \right) - b^2 \cos\theta \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \cos\theta - \frac{\partial y}{\partial \phi} \sin\theta \right)}{\sqrt{b^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \cos\theta - \frac{\partial y}{\partial \phi} \sin\theta \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \sin\theta - \frac{\partial y}{\partial \phi} \cos\theta \right)^2}} + c \cos\theta \quad (3)$$

onde, $\frac{\partial x}{\partial t}$ e $\frac{\partial y}{\partial t}$ são as derivadas das componentes x e y em relação ao tempo e, $\frac{\partial x}{\partial \phi}$ e $\frac{\partial y}{\partial \phi}$ as derivadas em relação ao ângulo ϕ da equação paramétrica da elipse. Para Jesus (2006, p. 7) “as equações paramétricas são particularmente úteis quando queremos construir o traço de uma curva C do plano, a fim de compreender melhor o movimento do ponto $P = (x(t), y(t))$ da curva C ”.

Almeida (2012) utiliza de Autômatos Celulares para modelar o problema da propagação do fogo. Para Castro e Castro (2008, p. 90),

[...] os autômatos celulares são ferramentas simples e poderosas para representar sistemas físicos compostos por elementos discretos com interações locais. Vários sistemas se enquadram nessa definição, tais como o processo de surgimento de um cristal de gelo, em que cada molécula traz suas próprias informações locais e agrupam-se baseadas nas construções das moléculas vizinhas (CASTRO; CASTRO, 2008, p. 90).

Weimar (1996 *apud* Castro e Castro 2008, p. 92) ainda apresenta algumas características dos Autômatos Celulares:

- Consistem em uma matriz ou grade de células;
- A evolução se dá em passos discretos de tempo;
- Cada célula é caracterizada por um estado pertencente a um conjunto finito de escalas;
- Cada célula evolui de acordo com as mesmas regras que dependem somente do estado em que a célula se encontra e de um número finito de vizinhos;
- A relação com a vizinhança é local e uniforme.

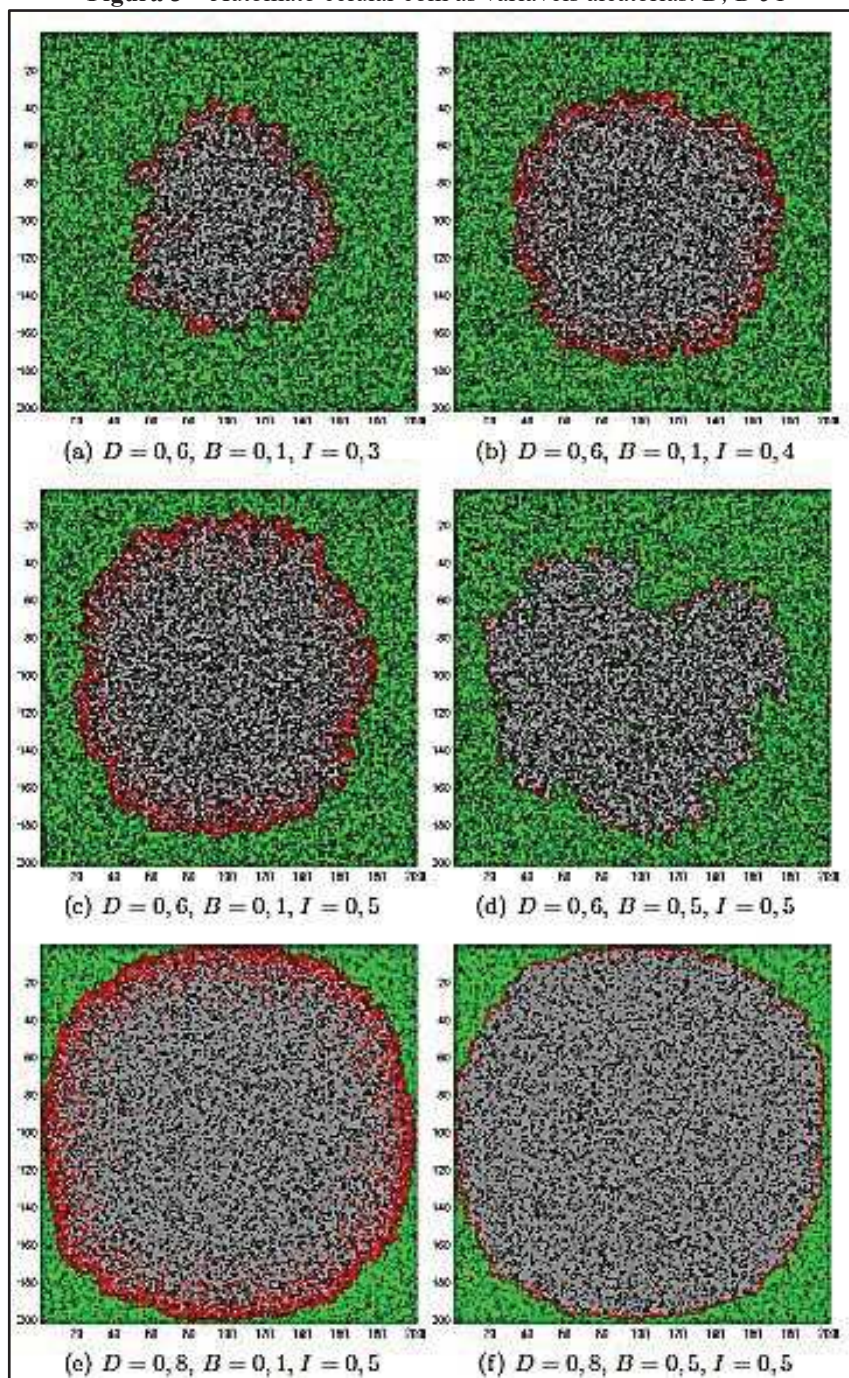
Longe de ser um tratado de Autômatos Celulares, buscamos apenas apresentar algumas características essenciais, de modo a compreender como essa técnica de inteligência artificial pode ajudar na elaboração de um modelo matemático.

Nesse contexto, o modelo de Almeida (2012) foi desenvolvido para prever incêndios no Parque Nacional da Emas, localizado no sudeste do estado de Goiás e que frequentemente é atingido por incêndios naturais (provocados por raios) e acidentes provocados pelo homem (queimadas sem o controle do órgão responsável). Seu modelo, baseado nos Autômatos Celulares, simulou uma queimada a partir de um determinado foco de incêndio e ainda considerou variáveis como: vegetação rasteira do cerrado, umidade e vento.

Descrevendo as variáveis probabilísticas, Almeida (2012) chama de análise qualitativa dos padrões de propagação do fogo a caracterização desses padrões. Segundo ele, é preciso verificar tais padrões para diferentes valores de probabilidades. Por exemplo, assumindo $t = 100$ como uma medida de distância até o centro da ignição, o espaço celular terá dimensão de 201×201 com ignição pontual partindo da célula central $S_{(100,100)}^0 = F$. Cada cor na Figura 3 tem uma caracterização. Nela é possível verificar os resultados da simulação⁴ utilizando os Autômatos Celulares para modelar a propagação do fogo.

⁴ As simulações realizadas por Almeida (2012) foram feitas utilizando o software MATLAB (*Matrix Laboratory*), um software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/>>.

Figura 3 – Autômato celular com as variáveis aleatórias: D , B e I



Fonte: Almeida (2012, p. 66)

Para Almeida (2012), as células de cor preta na Figura 3 são células vazias, células com cor verde representam a vegetação e as células de cor cinza são as células queimadas. A probabilidade D está relacionada com a abundância e a distribuição espacial de células com vegetação ao longo do espaço celular; quando o valor de D aumenta, o incêndio atinge maiores proporções.

A probabilidade B expressa a eficiência do processo de combustão da célula, o valor de B^{-1} expressa o tempo médio de queima da célula. No momento que $B = 1$ há

uma queima em uma única iteração. Para $0 < B < 1$ a célula pode queimar em mais de uma iteração. Valores baixos de B , quando comparados a valores elevados, implicam em uma maior persistência do fogo na célula, aumentando as chances de o fogo se manter no espaço celular por mais tempo, pois a ignição da célula vizinha com vegetação é avaliada por um número maior de vezes.

A probabilidade de ignição I , ao assumir valores baixos, pode ocorrer somente para valores pequenos da probabilidade de extinção da probabilidade B . Percebemos que as variáveis probabilísticas deixam o campo celular queimando a partir do ponto central, conforme se altera os valores das probabilidades há uma verificação diferente nas imagens da Figura 3.

Nas duas primeiras imagens a e b , notamos que foi alterado o valor da probabilidade I (ignição), havendo um pequeno aumento na área de propagação. Nas imagens do meio, c e d , percebemos que o valor de B (eficiência de combustão) se alterou e a faixa vermelha ficou menor, diminuindo a área da queima de células. Já nas duas últimas imagens, e e f , aumentou-se o valor de D (abundância e a distribuição espacial de células com vegetação ao longo do espaço celular) em relação às imagens anteriores e, da mesma forma que as imagens do meio, se alterou em cada imagem o valor da probabilidade B . Assim, a imagem da esquerda tem uma área com uma borda vermelha e a figura da direita tem a mesma área, mas sem a borda vermelha.

Esse exemplo, nos permitiu entender a dinâmica da propagação do fogo em uma floresta, a partir de um modelo probabilístico e numérico, dadas as probabilidades de abundância de vegetação (D), de ignição (I) e de eficiência no processo de combustão (B). Com esse modelo, pudemos perceber que a propagação do fogo se dá de forma geralmente circular ou elipsoidal, dependendo de algumas características do ambiente. Na sequência, capítulo quatro, apresentamos o desenvolvimento do modelo matemático para o fenômeno.

4 O DESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMÁTICO

A obtenção dos dados foi realizada por meio de dois experimentos. Na primeira experiência não foram levados em consideração: o tamanho dos palitos de fósforos, o local (ela foi realizada ao ar livre) e o nivelamento do solo. Na segunda experiência essas condições iniciais foram consideradas. Em ambas, utilizamos a mesma marca e modelo de fósforos. Também foram consideradas as mesmas forma e disposição dos fósforos, de modo a tentar representar uma floresta de pinus em que as árvores estavam espaçadas homoganeamente. Na sequência, apresentamos e analisamos cada uma das experiências.

4.1 PRIMEIRA EXPERIÊNCIA

Para realizar o experimento construímos nosso modelo a partir de uma placa de madeira compensada de 2 cm de espessura por 41 cm de largura e 41 cm de comprimento. Em uma fresa computadorizada (Centro de Usinagem VCN-410 – MAZAK) realizamos furos com 5 mm de espaçamento intercalados uns dos outros totalizando 6400 furos. Em cada furo colocamos um fósforo da marca Fiat Lux (Pinheiro), conforme pode ser visto na Figura 4.

Figura 4 - Placa de Madeira

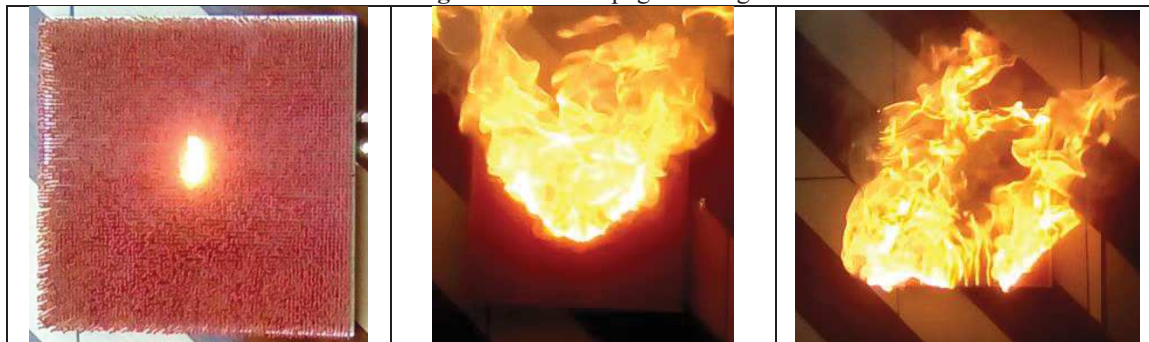


Fonte: Do autor

O local da primeira experiência foi na calçada de nossa casa, ao ar livre, dispomos a placa de madeira com os palitos de fósforos no piso sem verificarmos o nivelamento da madeira em relação ao solo. Após isso, colocamos fogo no palito maior,

no centro da placa, e filmamos⁵, observando por meio das imagens a evolução da propagação do fogo e como foi seu comportamento, conforme Figura 5.

Figura 5 - Palitos pegando Fogo



Fonte: Do autor

Notamos que o fogo atingiu uma altura de labareda muito grande, não havia vento na hora do experimento, mas conforme verificamos em alguns textos, o fogo necessita de três fatores para sua origem, o comburente (oxigênio), o material combustível (palitos de fósforos) e o calor. Segundo Brasil (2010, p. 31),

[...] o conhecimento do comportamento do fogo é fundamental para um combate eficiente, eficaz e seguro. É por meio dele que obtemos a capacidade de previsão de seu comportamento futuro (modelo de propagação do incêndio), o que se constitui num dos alicerces para o planejamento das ações de combate.

O fogo é formado pela reação em cadeia, unindo três elementos:

- Combustível – É tudo aquilo que está sujeito a se incendiar, tais como: papel, madeira, estopa, gasolina, álcool, metano, hidrogênio, acetileno e outros.
- Calor – É a fonte de energia que dá início ao fogo, que o mantém e proporciona sua propagação.
- Oxigênio – Presente no ar em proporção de 21%, ele é essencial para a manutenção da reação química (comburente) do fogo.

Por conta disso o calor se dissipou por estar ao ar livre e aumentou consequentemente a altura da labareda.

A princípio não tínhamos ideia de que forma ou como calcular a propagação do fogo. A elucidação do problema foi encontrar a área queimada no decorrer do tempo utilizando recursos tecnológicos, como por exemplo, o auxílio do software de desenho técnico não gratuito *Cad Solidworks*⁶, para criação de um modelo sólido em 3D da propagação do fogo em função do tempo, a partir das fotos *tiradas* (frame a frame) utilizando o software *Movie Maker*. Com o software *Cad Solidworks* construímos um

⁵ O vídeo está disponível em: <<http://silviocesarmendonca.blogspot.com.br/>>.

⁶ Para maiores detalhes acesse: <<http://www.solidworksbrasil.com.br/>>.

sólido geométrico que moldava nossa placa de madeira compensada com as mesmas dimensões. Na sequência, inserimos a foto de cada segundo da experiência no *Cad Solidworks* e dispomos a foto de maneira que as dimensões da imagem ficassem de acordo com as dimensões do sólido gerado pelo software, dessa maneira tínhamos como dimensionar o percurso que o fogo havia realizado naquele determinado tempo de queima.

Achamos prudente calcular apenas um quarto do plano cartesiano (Figura 6), pois nos outros quadrantes o padrão era o mesmo. Com essas dimensões da queima calculadas, exportamos a imagem para o software Geogebra. Assim, encontramos uma função que descrevia os pontos através do método dos mínimos quadrados, que o Geogebra possui, com essa equação encontramos uma integral definida a partir dos pontos do quarto de plano, através da integral definida em dois pontos no plano cartesiano conseguimos calcular a área sob a curva determinada por uma função. A partir daí encontramos a área desse quarto de plano e multiplicamos por quatro para encontrar a área total a cada segundo. O próximo passo foi estabelecer um modelo já constituído na literatura.

Com os dados da área e do tempo utilizamos o software Microsoft Excel para encontrar um gráfico de dispersão que pudesse nos mostrar qual a tendência dos dados. Num primeiro momento, pensamos numa tendência exponencial e tentar utilizar o método de Ford-Walford, mas a função exponencial tende ao infinito quando aplicamos o limite, além disso, sabemos por hipótese, que a área queimada não vai para o infinito. Diante dessa discussão, procuramos outro modelo que buscasse atender às características do problema.

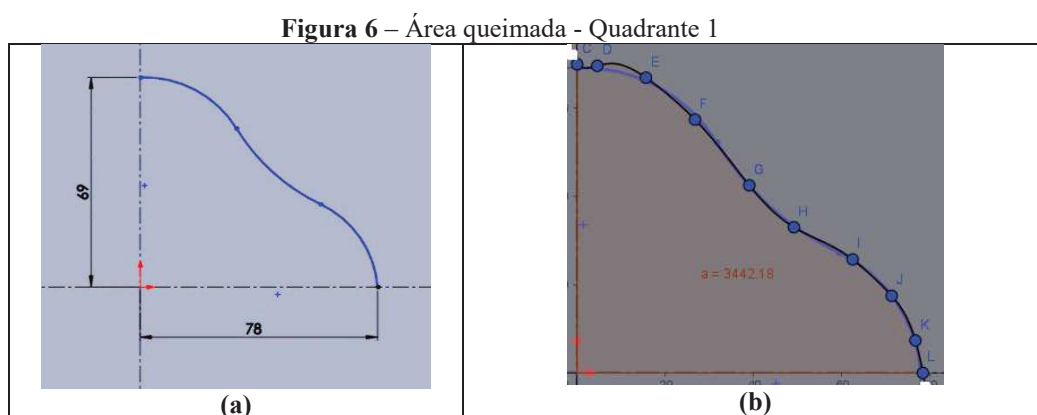
Nesse sentido, testamos o modelo populacional de Verhulst⁷. Esse modelo, proposto em 1838, descreve o crescimento populacional; ele foi baseado na avaliação de estatísticas disponíveis e complementa a teoria do crescimento exponencial com termos representando os fatores de inibição do crescimento. Segundo Almeida e Oliveira (2015, p. 119),

[...] os resultados das investigações de Verhulst sobre o crescimento populacional vieram à luz por meio de várias publicações no período de 1838 até 1847 [...] defende que o crescimento populacional tem necessariamente

⁷ Pierre-François Verhulst nasceu em Bruxelas no ano de 1804, obtendo o grau de doutor em Matemática pela Universidade de Ghent no ano de 1825.

um limite e não cresce indefinidamente como Malthus propôs em seu modelo. Adotando as hipóteses de Quetelet, ele assumiu que a resistência ao crescimento humano é proporcional ao quadrado da velocidade com que a população tende a crescer (ALMEIDA, OLIVEIRA, 2015 p. 119).

Figura 6 (a) temos o esboço da queimada no quadrante 1, obtido a partir do software Cad Solidworks. Com ele foi possível obter as dimensões da área queimada.



Fonte: Do autor

Na Figura 6 (b), temos a Figura 6 (a) disposta no software Geogebra. Com ela, encontramos uma função que passava o mais próximo possível dos pontos⁸ da curva da imagem. A partir da função encontrada, aplicamos uma integral definida do ponto C ao ponto L, denotando a área que a mesma compreende. No quadro 1 demonstramos a cada segundo da experiência a equação plotada pelo software Geogebra a respectiva integral definida e sua área:

⁸ O Geogebra possui uma ferramenta chamada PONTO, a qual permite criar pontos manualmente.

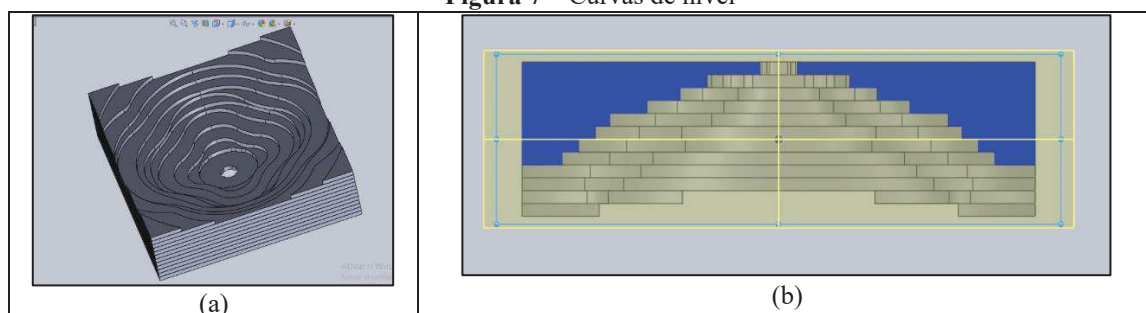
Quadro 1 – Equações de cada segundo (1ª Experiência)

<i>Tempo (s)</i>	<i>Equações que descrevem a curva acima do eixo x no primeiro quadrante do plano</i>	<i>Integrais definidas das equações</i>	<i>Área total Somados os quatro quartos do plano</i>
65	$f(x) = 0x^4 + 0,011x^3 - 0,162x^2 + 0,489x + 14,37$	$\int_0^{16} 0x^4 + 0,011x^3 - 0,162x^2 + 0,489x + 14,37 dx$	735,508
66	$f(x) = 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 - 0x^3 + 0,05x^2 - 0,46x + 50$	$\int_0^0 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 - 0x^3 + 0,05x^2 - 0,46x + 50 dx$	8 635,88
67	$f(x) = 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0,01x^3 - 0,08x^2 + 0,47x + 60$	$\int 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0,01x^3 - 0,08x^2 + 0,47x + 60 dx$	12 487,56
68	$f(x) = 0x^9 + 0x^8 - 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 - 0,05x^3 + 0,38x^2 - 1,01x + 70$	$\int 0x^9 + 0x^8 - 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 - 0,05x^3 + 0,38x^2 - 1,01x + 70dx$	13 768,72
69	$f(x) = 0x^{11} - 0x^{10} + 0x^9 - 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0,04x^3 - 0,16x^2 - 0,6x + 100$	$\int 0x^{11} - 0x^{10} + 0x^9 - 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0,04x^3 - 0,16x^2 - 0,6x + 100$	26 453,64
70	$f(x) = 0x^9 + 0x^8 - 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0,04x^2 - 0,38x + 131,47$	$\int 0x^9 + 0x^8 - 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0,04x^2 - 0,38x + 131,47dx$	45 475,6
71	$f(x) = 0x^{12} + 0x^{11} - 0x^{10} + 0x^9 - 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0,03x^3 - 0,18x^2 + 0,56x + 137,09$	$\int 0x^{12} + 0x^{11} - 0x^{10} + 0x^9 - 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0,03x^3 - 0,18x^2 + 0,56x + 137,09dx$	57 565,2
72	$f(x) = 0x^{11} - 0x^{10} + 0x^9 - 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0,02x^3 - 0,18x^2 + 0,4x + 151,24$	$\int 0x^{11} - 0x^{10} + 0x^9 - 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0,02x^3 - 0,18x^2 + 0,4x + 151,24dx$	63 318,2
73	$f(x) = 0x^{10} - 0x^9 + 0x^8 - 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 - 0,01x^3 + 0,22x^2 - 1,58x + 157,79$	$\int 0x^{10} - 0x^9 + 0x^8 - 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 - 0,01x^3 + 0,22x^2 - 1,58x + 157,79dx$	76 467,52
74	$f(x) = 0x^9 + 0x^8 - 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0,06x^2 - 0,36x + 175,02$	$\int 0x^9 + 0x^8 - 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0,06x^2 - 0,36x + 175,02dx$	102 692,24
75	$f(x) = 0x^8 - 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0,01x^2 + 0,07x + 191,33$	$\int 0x^8 - 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0,01x^2 + 0,07x + 191,33dx$	116 987,88
76	$f(x) = 0x^{10} + 0x^9 - 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0x^3 - 0,06x^2 + 0,35x + 200$	$\int 0x^{10} + 0x^9 - 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0x^3 - 0,06x^2 + 0,35x + 200 dx$	137 858,52
77	$f(x) = 0x^8 - 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 - 0x^4 + 0x^3 - 0,01x^2 + 0,23x + 200$	$\int 0x^8 - 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 - 0x^4 + 0x^3 - 0,01x^2 + 0,23x + 200dx$	152 500,08

Fonte: Do autor

Com o Solidworks pudemos perceber pelas curvas de nível que os dados estavam tendendo para uma exponencial. A Figura 7 (a) descreve uma montagem de todas as áreas que foram calculadas; cada camada dessas representa uma área a cada segundo da experiência. A cada segundo descrito fizemos um sólido tridimensional que representava a área queimada com medidas reais em milímetros. Os treze segundos estão representados por treze sólidos, conforme descritos na Figura 7. Na Figura 7 (b) fizemos no Solidworks um corte no centro da Figura 6 e colocamos em uma vista do tipo frontal.

Figura 7 – Curvas de nível



Fonte: Do autor

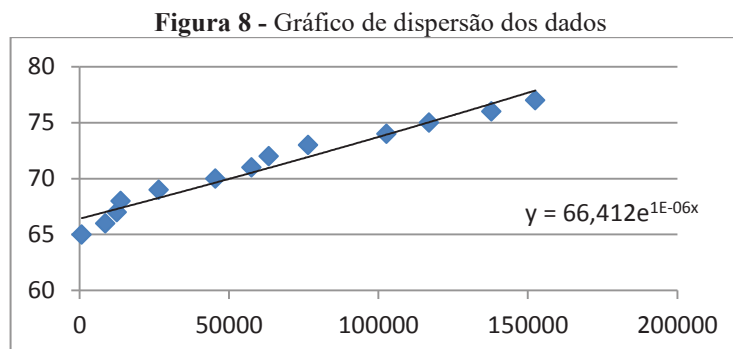
Em busca de uma outra representação para as áreas, construímos um quadro com a Área em função do tempo. No Quadro 2, apresentamos do tempo 65 segundos até o tempo 77 segundos, que foram os instantes relevantes e de possível visualização no vídeo que filmamos.

Quadro 2 - Área em função do Tempo

Área queimada (mm ²)	Tempo (em segundos)
735,508	65
8 635,88	66
12 487,56	67
13 768,72	68
26 453,64	69
45 475,64	70
57 565,2	71
63 318,2	72
76 467,52	73
102 692,24	74
116 987,88	75
137 858,52	76
152 500,08	77

Fonte: Do autor

Na sequência, utilizamos o software Microsoft Excel para gerar o gráfico de dispersão desses pontos e encontrar uma curva de tendência, conforme Figura 8.



Fonte: Do autor

Iniciamente, pensamos no modelo populacional de Malthus,

$$A(t) = (1+\alpha)^t A(0) \quad (4)$$

em que $A(t)$ é a área queimada em função do tempo t .

Mas esse modelo não é o mais adequado para os nossos dados, pois eles tendem para o infinito quando aplicamos o limite no tempo indo para o infinito.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1+\alpha)^t A(0) = \infty \quad (5)$$

Optamos pelo Modelo de crescimento logístico. Segundo Zill (2001, p. 135-140) a equação do modelo de Verhulst pode ser obtida da equação do modelo de Malthus acrescentando-se um termo inibidor de crescimento $-\beta A(t)^2$ uma vez que os recursos naturais são limitados e por isso sempre haverá competição por eles, sendo proporcional ao número de disputa entre os seres e isto é dado por $A(t)^2$. Fazendo $\mu = 1+\alpha$ na equação temos:

$$A_{t+1} = \mu \cdot A(t) - \beta \cdot A(t)^2, \quad (6)$$

onde β e μ são parâmetros a serem determinados.

Seja K a capacidade de suporte de uma determinada população e r a taxa de crescimento, chamada de taxa de crescimento intrínseca; considerando que A_0 seja conhecido, podemos obter A_t em função de A_0 usando a expressão,

$$\frac{dA}{A(K-A)} \quad (7)$$

e resolvendo pela separação de variáveis, decompondo o lado esquerdo em frações parciais e integrando temos,

$$\left(\frac{1/r}{A} + \frac{1/r}{K-A}\right) dP = dt \quad (8)$$

$$\frac{1}{r} \ln|A| - \frac{1}{r} \ln|K-A| = t + c \quad (9)$$

$$\ln \left| \frac{A}{K-A} \right| = rt + rc \quad (10)$$

$$\frac{A}{K-A} = ce^{rt} \quad (11)$$

Assim temos que:

$$A_t = \frac{Kce^{rt}}{1 + ce^{rt}} = \frac{Kc}{c + ce^{rt}} \quad (12)$$

Se $A(0) = A_0$, obtemos $c = \frac{A_0}{K+A_0}$ ao substituirmos e simplificarmos temos como solução a equação

$$A_t = \frac{KA_0}{A_0 + (K - A_0) \cdot e^{-rt}} \quad (13)$$

Para a utilização da equação se faz necessário que se conheça a capacidade de suporte K e a taxa de crescimento r .

A constante K pode ser calculada segundo o método de Ford-Walford. O método consiste em, dado um conjunto de dados x_i medidos nos tempos discretos n_i sobre o qual sabemos ser a sequência (x_i) convergente para K quando n_i cresce infinitamente, ajustados uma função f contínua, ou seja, tal que $f(x_i) = x_{i+1}$. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{i+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_i = K \quad (14)$$

ou seja, a sequência de pontos (x_i, x_{i+1}) converge para o ponto (K, K) de modo que K é um ponto fixo da função f .

Uma vez estimado o valor de K , o cálculo da *taxa de crescimento* r pode ser feito isolando-a na equação 13,

$$A_t = \frac{KA_0}{A_0 + (K - A) \cdot e^{-rt}}$$

$$\begin{aligned}
 A_0 A_t + A_t (K - A_0) e^{-rt} &= K A_0 \\
 A (K - A_0) e^{-rt} &= K A_0 - A_0 \cdot A_t \\
 (K - A_0) e^{-rt} &= A_0 \cdot \left(\frac{K}{A_t} - 1 \right) \\
 e^{-rt} &= \frac{A_0 \cdot \left(\frac{K}{A_t} - 1 \right)}{(K - A_0)}
 \end{aligned}$$

assim,

$$r = -\frac{1}{t} \cdot [\ln(A_0 \cdot (\frac{K}{A_t} - 1)) - \ln(K - A_0)] \quad (15)$$

4.1.1 Resolução Utilizando o Modelo Populacional De Verhulst

Primeiramente vamos dispor nossos dados de maneira que possamos calcular utilizando o método de Ford-Walford que satisfaça,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_{n+1}}{Y_n} = 1 \quad (16)$$

Para isso criamos a tabela $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1})$ em função de $Y' = (Y_2, Y_3, \dots, Y_n)$, conforme Quadro 3.

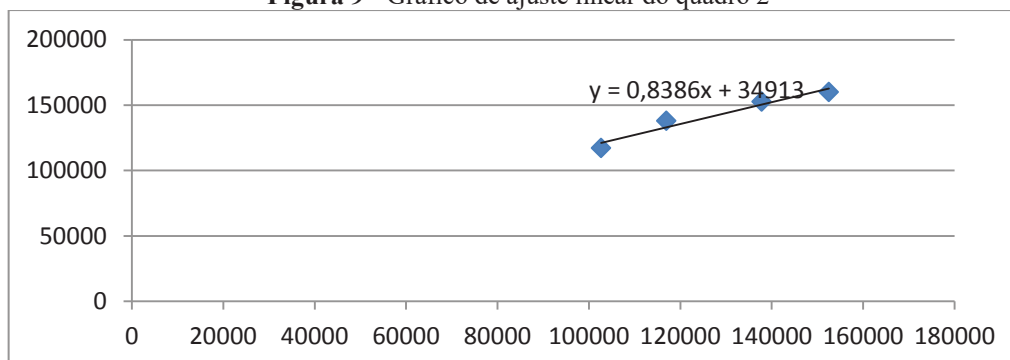
Quadro 3 - Dados da Área para cálculo em Ford-Walford

Tempo	Y	Y'
0	102 692,2	116 987,9
1	116 987,9	137 858,5
2	137 858,5	152 500,1
3	152 500,1	160 000

Fonte: Do Autor

Além disso, utilizando o software Microsoft Excel plotamos esses pontos e obtivemos o gráfico de dispersão da Figura 9.

Figura 9 - Gráfico de ajuste linear do quadro 2



Fonte: Do autor

O software Excel nos forneceu, por meio do Método dos Mínimos Quadrados, a melhor curva linear para os pontos dados. Conforme verificado na Figura 9, a melhor curva é dada pela função $Y = 0,8386x + 34913$. A utilizando para encontrar a constante K, fizemos $X = Y$. Desse modo temos,

$$Y = 0,8386x + 34913$$

Nesse momento chamamos x de Ye isolamos Y, que será nossa constante K,

$$Y = 0,8386Y + 34913$$

$$Y - 0,8386Y = 34913$$

$$Y = \frac{34913}{0,1614}$$

$$Y = 216\,313,5068 \quad (17)$$

Dessa forma, o resultado (17) é nossa constante $K = 216\,313,5068$.

Para calcular o valor de r , iremos utilizar a média de r_1 (tempo 1), r_2 (tempo 2) e r_3 (tempo 3), na equação 15. Substituindo os dados nessa equação, temos:

$$r_1 = -\frac{1}{1} \cdot [\ln(102\,692,2 \cdot (\frac{216\,313,5068}{116\,987,9} - 1)) - \ln(216\,313,5068 - 102\,692,2)]$$

$$r_1 = 0,264801986 \quad (18)$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} \cdot [\ln(102\,692,2 \cdot (\frac{216\,313,5068}{137\,858,5} - 1)) - \ln(216\,313,5068 - 102\,692,2)]$$

$$r_2 = 0,664837384 \quad (19)$$

$$r_3 = -\frac{1}{3} \cdot [\ln(102\,692,2 \cdot (\frac{216\,313,5068}{152\,500,1} - 1)) - \ln(216\,313,5068 - 102\,692,2)]$$

$$r_3 = 0,972336831 \quad (20)$$

Assim, tomando a média, encontramos:

$$\bar{r} = \left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}\right) = 0,224\,9362 \quad (21)$$

De posse dos valores de $K = 216\,313,5068$ (resultado 17) e $\bar{r} = 0,633992067$ (resultado 21), vamos então encontrar o valor A_t do modelo populacional de Verhulst, conforme equação (13) em três instantes de tempo.

$$A_t = \frac{KA_0}{A_0 + (K - A) \cdot e^{-rt}}$$

$$A(t) = \frac{22213709903,00696}{102\,692,2 + 113621,3068 \cdot e^{-0,633992067 \cdot t}} \quad (21)$$

Realizando as devidas substituições, encontramos A_1 , A_2 e A_3 .

$$A_1 = \frac{216\,313,5068 \cdot 102\,692,2}{102\,692,2 + (216\,313,5068 - 102\,692,2) \cdot e^{-0,633992067 \cdot 1}}$$

$$A_1 = 136\,309,8223 \text{ mm}^2 \quad (22)$$

$$A_2 = \frac{216\,313,5068 \cdot 102\,692,2}{102\,692,2 + (216\,313,5068 - 102\,692,2) \cdot e^{-0,633992067 \cdot 2}}$$

$$A_2 = 164\,955,2792 \text{ mm}^2 \quad (23)$$

$$A_3 = \frac{216\,313,5068 \cdot 102\,692,2}{102\,692,2 + (216\,313,5068 - 102\,692,2) \cdot e^{-0,633992067 \cdot 3}}$$

$$A_3 = 185\,651,3522 \text{ mm}^2 \quad (24)$$

4.1.2 Validação da primeira experiência

Na sequência realizamos a validação do modelo de posse da equação que modelamos, ajustando as variáveis e inserindo os dados coletados da área em relação ao tempo (Quadro 4 e Figura 10).

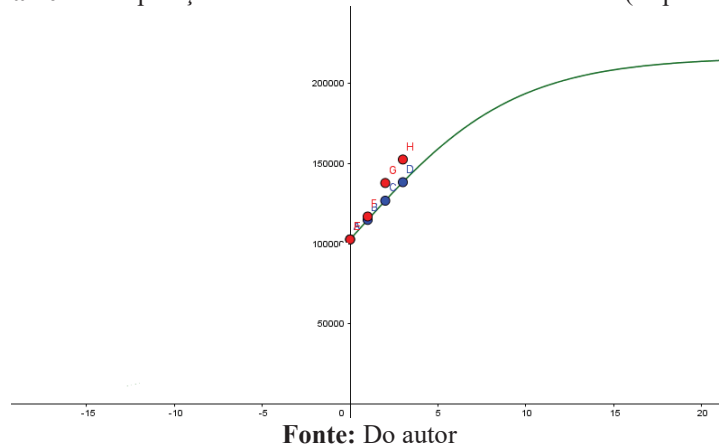
Quadro 4 - Dados do modelo de Verhulst

Tempo	A (Modelo)	A(Real)	Erro (%)
0	102 692,24	102 692,2	0
1	136 309,8222	116 987,9	14,17
2	164 955,2792	137 858,5	16,42
3	185 651,3522	152 500,1	17,85

Fonte: Do autor

O Quadro 4 nos permite verificar que o erro percentual tem aumentado ao longo do tempo, o que pode nos sugerir que o modelo que encontramos, talvez não seja o mais adequado para tempos muito maiores.

Figura 10 – Comparação entre os dados Reais e os do Modelo (Experiência 1)

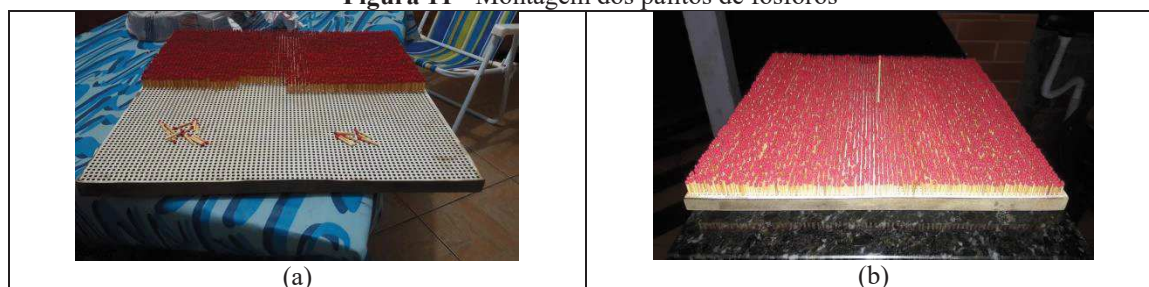


Como pudemos verificar no Quadro 4, os dados reais (em vermelho) começam a ficar distantes dos dados do modelo (em azul) à medida que o tempo aumenta. Vale destacar que o domínio da função é não negativo, pois não temos área negativa.

4.2 SEGUNDA EXPERIÊNCIA

Em nossa segunda experiência tomamos o cuidado com algumas variáveis que considerávamos pertinentes e que mudariam nosso modelo. Nesse contexto, fizemos em um local fechado, sem a interferência do vento, cortamos os palitos de fósforo ao meio, para não ter variação na perpendicular em relação à base da placa de compensado, e nivelamos o piso. Utilizamos a mesma placa de madeira compensada de 2 cm de espessura por 40 cm de largura e 40 cm de comprimento com 6400 furos intercalados com 5 mm de espaçamento a cada furo, da mesma forma como na primeira experiência colocamos um fósforo da marca Fiat Lux (Pinheiro) cortados ao meio, conforme a Figura 11.

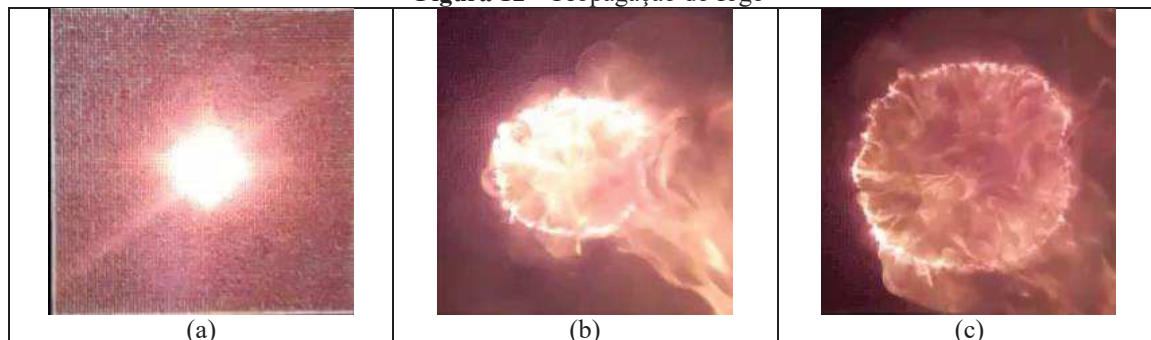
Figura 11 - Montagem dos palitos de fósforos



Fonte: Do autor

Após isso colocamos fogo no palito maior no centro da placa e filmamos observando através da evolução da propagação do fogo como foi seu comportamento, conforme a Figura 12.

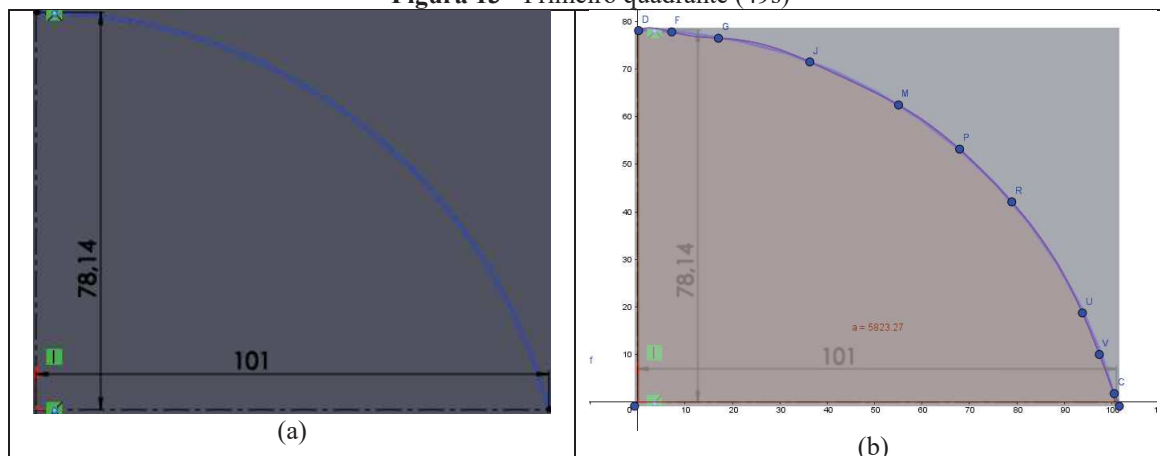
Figura 12 – Propagação do fogo



Fonte: Do autor

Podemos verificar pelas fotos da segunda experiência que o fogo comporta-se de forma circular. Procedemos aos cálculos como feitos na primeira experiência. Com o auxílio dos softwares Solidworks, Geogebra e Excel, encontramos as áreas em cada segundo de queimada dos respectivos palitos de fósforos e montamos um quadro com os dados coletados da área em relação ao tempo. Na Figura 13, em 13 (a) e (b) temos respectivamente os resultados apresentados no software Solidworks e Geogebra no tempo 49s.

Figura 13 - Primeiro quadrante (49s)



Fonte: Do autor

Da mesma maneira que no primeiro experimento, aplicamos uma integral definida do ponto D ao ponto C, encontrando a área para o quarto de plano. No Quadro 5 mostramos a cada segundo da experiência a equação plotada pelo software Geogebra a respectiva integral definida e sua área:

Quadro 5 – Equações de cada segundo (2º Experiência)

<i>Tempo (s)</i>	<i>Equações que descrevem a curva acima do eixo x no primeiro quadrante do plano</i>	<i>Integrais definidas das equações</i>	<i>Área total Somados os quatro quartos do plano</i>
49	$f(x) = 0x^9 - 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0.02x^3 - 0.18x^2 + 0.64x + 77.97$	$\int_0^{16} 0x^9 - 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0.02x^3 - 0.18x^2 + 0.64x + 77.97 dx$	23 239,08
50	$f(x) = 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0x^3 - 0.02x^2 + 0.2x + 96.45$	$\int_0^0 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0x^3 - 0.02x^2 + 0.2x + 96.45 dx$	33 742,56
51	$f(x) = 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0.03x^2 - 0.36x + 128.18$	$\int 0x^7 + 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0.03x^2 - 0.36x + 128.18 dx$	52 559,68
52	$f(x) = 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0.01x^3 - 0.09x^2 + 0.7x + 149.21$	$\int 0x^8 + 0x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0.01x^3 - 0.09x^2 + 0.7x + 149.21 dx$	76 000
53	$f(x) = 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0x^2 - 0.09x + 163.07$	$\int 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0x^2 - 0.09x + 163.07 dx$	101 454
54	$f(x) = 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0.01x^2 - 0.27x + 174.35$	$\int 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0.01x^2 - 0.27x + 174.35 dx$	116 331,6
55	$f(x) = 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0x^2 - 0.07x + 204.9$	$\int 0x^5 + 0x^4 - 0x^3 + 0x^2 - 0.07x + 204.9 dx$	143 975,76
56	$f(x) = 0x^5 - 0x^4 + 0x^3 - 0.01x^2 + 0.21x + 205.13$	$\int 0x^5 - 0x^4 + 0x^3 - 0.01x^2 + 0.21x + 205.13 dx$	152 965

Fonte: do autor

No Quadro 6 podemos observar os dados coletados da segunda experiência.

Quadro 6 - Dados coletados

Área queimada (mm ²)	Tempo (segundos)
23 239,08	49
33 742,56	50
52 559,68	51
76 000	52
101 454	53
116 331,6	54
143 975,76	55
152 965	56

Fonte: Do autor

Encontramos a constante K com o modelo de Ford-Walford conforme os dados do Quadro 7.

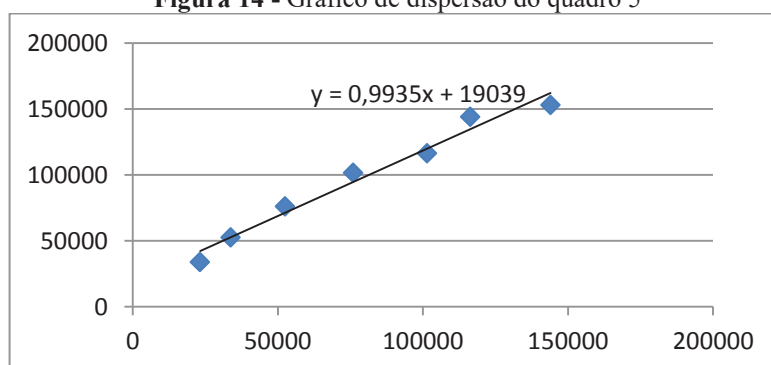
Quadro 7 - Dados coletados Ford-Walford

Tempo	Y	Y'
0	23 239,08	337 42,56
1	33 742,56	52 559,68
2	52 559,68	76 000
3	76 000	101 454
4	101 454	116 331,6
5	116 331,6	143 975,8
6	143 975,8	152 965

Fonte: Do autor

Na sequência, da mesma forma que na experiência um, fizemos o gráfico de dispersão no software Excel para encontrar a equação que mais se adequa aos pontos, conforme Figura 14.

Figura 14 - Gráfico de dispersão do quadro 5



Fonte: Do autor

Para encontrar a constante K, utilizamos a função de primeiro grau $Y = 0,9935x + 19039$ e tomamos $x = Y$. Desse modo temos,

$$Y = 0,9935x + 19039$$

Nesse momento chamamos x de Y , que será nossa constante

K ,

$$Y = 0,9935Y + 19039$$

$$Y - 0,9935Y = 19039$$

$$0,0065Y = 19039$$

$$Y = \frac{19039}{0,0065}$$

$$Y = 2\,929\,076,923 \quad (25)$$

Assim, do resultado 25, obtemos a nossa constante $K = 2\,929\,076,923$.

4.2.1 Resolução utilizando o Modelo Populacional De Verhulst

Utilizando a Equação (9) e fazendo as devidas substituições, encontramos:

$$r_1 = -\frac{1}{1} \cdot \left[\ln(23\,239,08 \cdot \left(\frac{2\,929\,076,923}{33\,742,56} - 1 \right)) - \ln(2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \right]$$

$$r_1 = 0,376545 \quad (26)$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} \cdot \left[\ln(23\,239,08 \cdot \left(\frac{2\,929\,076,923}{52\,559,68} - 1 \right)) - \ln(2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \right]$$

$$r_2 = 0,413127715 \quad (27)$$

$$r_3 = -\frac{1}{3} \cdot \left[\ln(23\,239,08 \cdot \left(\frac{2\,929\,076,923}{76\,000} - 1 \right)) - \ln(2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \right]$$

$$r_3 = 0,401073908 \quad (28)$$

$$r_4 = -\frac{1}{4} \cdot \left[\ln(23\,239,08 \cdot \left(\frac{2\,929\,076,923}{101\,454} - 1 \right)) - \ln(2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \right]$$

$$r_4 = 0,375263877 \quad (29)$$

$$r_5 = -\frac{1}{5} \cdot \left[\ln(23\,239,08 \cdot \left(\frac{2\,929\,076,923}{116\,331,6} - 1 \right)) - \ln(2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \right]$$

$$r_5 = 0,328634032 \quad (30)$$

$$r_6 = -\frac{1}{6} \cdot \left[\ln(23\,239,08 \cdot \left(\frac{2\,929\,076,923}{143\,975,8} - 1 \right)) - \ln(2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \right]$$

$$r_6 = 0,311041244 \quad (31)$$

Assim tomando a média dos resultados (de 26 a 31), obtemos

$$\bar{r} = \left(\frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6}{6} \right) = 0,367566.$$

Com os valores de $K = 2\,929\,076,923$ e $r = 0,367566$, temos condições de encontrar o valor da área queimada em função do tempo, a partir do modelo populacional de Verhulst, conforme equação (13).

$$A_t = \frac{KA_0}{A_0 + (K - A_0) \cdot e^{-rt}}$$

$$A_n = \frac{2\,929\,076,923 \cdot 23\,239,08}{23\,239,08 + (2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \cdot e^{(-0,367566 \cdot t)}} \quad (32)$$

Realizando as devidas substituições, encontramos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 .

$$A_1 = \frac{2\,929\,076,923 \cdot 23\,239,08}{23\,239,08 + (2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \cdot e^{(-0,367566 \cdot 1)}} \quad A_1 = 33\,444,3522 \text{ mm}^2 \quad (33)$$

$$A_2 = \frac{2\,929\,076,923 \cdot 23\,239,08}{23\,239,08 + (2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \cdot e^{(-0,367566 \cdot 2)}} \quad A_2 = 48\,057,1015 \text{ mm}^2 \quad (34)$$

$$A_3 = \frac{2\,929\,076,923 \cdot 23\,239,08}{23\,239,08 + (2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \cdot e^{(-0,367566 \cdot 3)}} \quad A_3 = 68\,902,6165 \text{ mm}^2 \quad (35)$$

$$A_4 = \frac{2\,929\,076,923 \cdot 23\,239,08}{23\,239,08 + (2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \cdot e^{(-0,367566 \cdot 4)}} \quad A_4 = 98\,481,1153 \text{ mm}^2 \quad (36)$$

$$A_5 = \frac{2\,929\,076,923 \cdot 23\,239,08}{23\,239,08 + (2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \cdot e^{(-0,367566 \cdot 5)}} \quad A_5 = 140\,134,9497 \text{ mm}^2 \quad (37)$$

$$A_6 = \frac{2\,929\,076,923 \cdot 23\,239,08}{23\,239,08 + (2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \cdot e^{(-0,367566 \cdot 6)}} \quad A_6 = 198\,173,3443 \text{ mm}^2 \quad (38)$$

Com as áreas em função do tempo calculadas a partir do modelo de Verhulst podemos montar o Quadro 8.

Quadro 8 – Área (t) em função do tempo

Tempo (t)	A (t)
0	23 239,08
1	33 444,3603
2	48 057,1015
3	68 902,6165
4	98 481,1153
5	140 134,9497
6	198 173,3443

Fonte: Do autor

4.2.1 Validação da segunda experiência

Na sequência, realizamos a validação do modelo, o que podemos verificar no Quadro 9 e na Figura 15.

Quadro 9 - Dados coletados

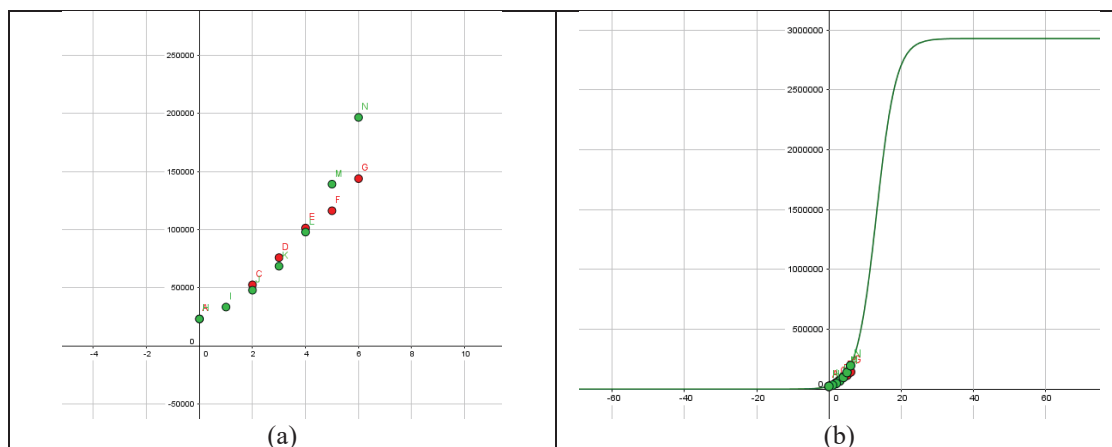
Tempo	Área (real)	Área (modelo)	Erro (%)
0	23 239,08	23 239,08	0
1	33 742,56	33 444,3603	0,89
2	52 559,68	48 057,1015	9,36
3	76 000	68 902,6165	10,30
4	101 454	98 481,1153	3,01
5	116 331,6	140 134,9497	16,98
6	143 975,8	198 173,3443	27,34

Fonte: Do autor

O Quadro 9 nos permite verificar que o erro percentual é pequeno, uma média de 2,96 %, o que pode nos sugerir que o modelo que encontramos se adequa bem aos dados obtidos.

A partir, do uso do software Geogebra podemos fazer uma comparação com os dados reais e os dados do modelo, conforme Figura 15.

Figura 15 – Comparação entre os dados Reais e os do Modelo (Experiência 2)



Fonte: Do autor

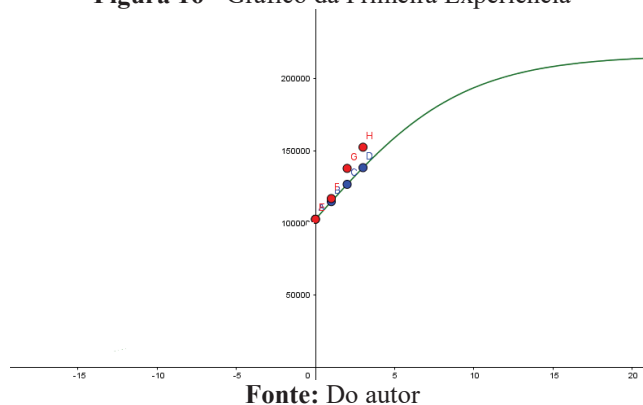
Notemos que na Figura 15 (a) os dados do nosso modelo descrevem os dados coletados nos primeiros segundos da experiência, o que indica numa aproximação satisfatória para o experimento. Na Figura 15 (b) temos os mesmos dados plotados, mas com a inferência da função quanto ao seu comportamento.

4.3 REFLEXÕES A PARTIR DAS DUAS EXPERIÊNCIAS

A partir da primeira experiência conseguimos encontrar o modelo matemático (equação 21) a seguir:

$$A_t = \frac{216\,313,5068 \cdot 102\,692,2}{102\,692,2 + (216\,313,5068 - 102\,692,2) \cdot e^{-0,633992067 \cdot t}} \quad (21)$$

E partir desse modelo conseguimos gerar o gráfico da Figura 16, que nos permitiu fazer um comparativo.

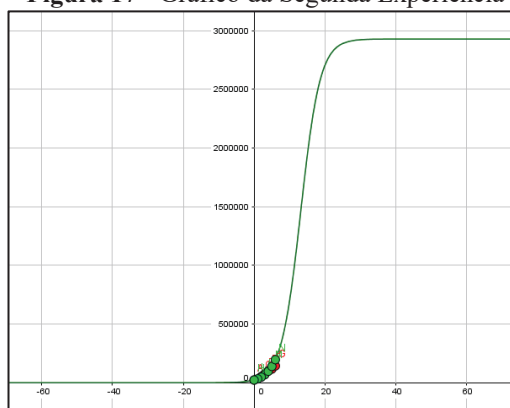
Figura 16 - Gráfico da Primeira Experiência

Fonte: Do autor

A partir da segunda experiência conseguimos encontrar o modelo matemático (equação 32) a seguir:

$$A_t = \frac{2\,929\,076,923 \cdot 23\,239,08}{23\,239,08 + (2\,929\,076,923 - 23\,239,08) \cdot e^{(-0,367566 \cdot t)}} \quad (32)$$

E partir desse modelo conseguimos gerar o gráfico da Figura 17, que nos permitiu fazer um comparativo.

Figura 17 - Gráfico da Segunda Experiência

Fonte: Do autor

Notemos que na primeira experiência, nosso modelo não consegue descrever a propagação do fogo através de palitos de fósforos por tempo prolongado, mas para a experiência aqui descrita satisfaz as expectativas de aproximação. Com a interferência do vento (ao ar livre) e com os palitos de fósforos em seu tamanho original pudemos perceber que a queima tem uma propagação mais lenta, pois a chama se eleva e há uma demora na condução do fogo na parte plana, dando uma maior altura na coluna de convecção, conforme Almeida (2012) sugere. Isso pode ser verificado na Figura 18, onde o fogo procurava seu comburente, que é o ar, e não tinha ventos laterais, mas a experiência estava ao ar livre.

Figura 18 - Processo de condução de um incêndio em vegetação



Fonte: Almeida (2012, p. 29)

Na segunda experiência retiramos o experimento do vento ao ar livre, conduzindo nosso experimento em um ambiente fechado e com o piso nivelado além disso condicionamos os palitos de fósforos cortando-os ao meio, proporcionando menos interferência na distância entre eles, pois quando no tamanho original não conseguimos deixá-los de maneira perpendicular em relação à placa de madeira compensada.

Quando estão no tamanho normal, os palitos de fósforos não se assentam uniformemente nos furos da placa de modo que não ficam perfeitamente na vertical em relação à placa de madeira. A partir daí notamos que a propagação do fogo foi mais rápida, nesse experimento percebemos que o percentual de erro do modelo em relação aos dados nesse segundo modelo foi menor, mas assim como no primeiro experimento, podemos validar apenas para os primeiros segundos.

Assim concluímos que apesar de os dados terem ficados diferentes, as equações formuladas a partir do modelo logístico de Verhulst, permitem descrever a propagação do fogo através da difusão por palitos de fósforos. Quando há interferência de intempéries o processo de propagação toma uma forma elipsoidal. Sem a ação das variáveis tamanho do palito e vento, a propagação exerce a forma de um círculo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso trabalho foi desenvolvido a partir de uma pesquisa bibliográfica acerca da propagação do fogo para uma possível ajuda em prevenção de futuros incêndios, e buscando entender como ocorre a propagação do fogo em um conjunto de palitos regularmente espaçados e, a partir do modelo matemático encontrado na literatura, estabelecer relações entre este e o comportamento deste experimento. Nosso objetivo geral foi encontrar um modelo matemático para descrever o fenômeno da propagação do fogo, para isso, realizamos uma pesquisa bibliográfica acerca do que é uma Modelagem Matemática, suas etapas de construção do conhecimento, onde, através de seleção de hipóteses e variáveis matematizamos nosso problema e construímos nosso Modelo Matemático a partir de um experimento. Não satisfeitos com uma experiência, resolvemos elaborar outra, dispostos a encontrar mais um Modelo Matemático e comparar se os dois modelos davam conta de descrever a propagação do fogo que tínhamos pretendido.

Notamos que na primeira experiência o fogo tomou uma forma elíptica e sua lavareda aumentou muito a sua altura de convecção dificultando a coleta de dados, mesmo assim nosso modelo conseguiu descrever o fenômeno nos primeiros minutos, depois se distanciou da realidade de queima,. Para a segunda experiência retiramos algumas variáveis denotadas em nosso primeiro experimento como: tamanho dos palitos de fósforos, nivelamento do solo e ambiente fechado, como resultado de nossos ajustes tivemos o fogo tomando uma forma circular em sua área de queima, lavareda baixa e a queima dos fósforos se deu mais rápida, nesse caso o modelo matemático conseguiu descrever por mais tempo a queima real, mas somente nos primeiros segundos de atividade. Assim concluímos que nossos modelos conseguiram descrever a propagação do fogo em nossas duas experiências, mas para áreas maiores, deveremos ajustar os modelos.

Este trabalho ainda deixa espaço para decifrar as variáveis probabilísticas que Almeida (2012) utiliza em seu modelo de propagação do fogo através de Autômatos Celulares, onde através de um programa elaborado no software MATLAB, se consegue descrever a propagação do fogo considerando as variáveis probabilísticas. Em trabalhos futuros poderemos customizar nosso modelo matemático de maneira que possamos

comparar se nosso modelo atende ao nosso anseio de descrever a propagação do fogo, retirando as variáveis contidas no meio natural como vegetação e relevo.

Um estudo mais aprofundado sobre o tema nos dará uma resposta mais favorável ao que os profissionais que trabalham na contenção do fogo necessitam, como os Bombeiros e a Defesa Civil. Uma ferramenta que descreva a propagação do fogo para determinar uma simulação do caminho que o fogo poderá percorrer e evitar danos maiores ao meio ambiente e às pessoas que estão em perigo durante tal calamidade, mas para uma eficaz prevenção devemos considerar que os profissionais deverão contar com auxílio meteorológico como fotos do recorrente incêndio para a obtenção dos dados, como área que está sendo queimada, relevo, direção do vento, etc., com os dados em mãos e diante de um modelo matemático, será mais fácil a observação da direção que o fogo está seguindo e o tempo que a chama levará para chegar em áreas habitáveis, havendo a evacuação dos locais e a prevenção de tragédias, como a de Portugal citada no decorrer do texto.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, L. M. W.; OLIVEIRA, C. F. Modelos de crescimento populacional: um olhar à luz de uma socioepistemologia. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. Londrina. 2015.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
- ALMEIDA, R. M.; MACAU, E. E. N.; RAMOS F. M.. **Modelagem e Avaliação de Táticas de Combate ao Fogo em Incêndios Florestais**. 2014. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/44098886_Modelagem_e_Avaliacao_de_Taticas_de_Combate_ao_Fogo_em_Incendios_Florestais>. Acesso em: 07 dez. 2017.
- ALMEIDA, R. M. **Modelagem da propagação do fogo como ferramenta de auxílio à tomada de decisão no combate e prevenção de incêndios no parque nacional das emas**, GO. 2012. 147f. Tese Doutorado (Curso de Pós Graduação em Computação Aplicada). INPE. São José dos Campos, 2012. Disponível em: <<http://mtc-m16d.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m19/2012/11.01.13.13/doc/publicacao.pdf>>. Acesso em: 20 abr. 2017.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3 ed. 1. reimpressão. São Paulo: Contexto, 2009.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3 ed. 2. reimpressão. São Paulo: Contexto, 2010.
- BASSANEZI, R. C. Modeling as a teaching-learning strategy. **For the learning of mathematics**, Vancouver, v. 14, n. 2, p. 31-35, 1994.
- BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Manual para Formação de Brigadista de Prevenção e Combate aos Incêndios Florestais**, 2010. Disponível em: <<http://www.icmbio.gov.br/portal/images/stories/servicos/sejaumbrigadista.pdf>>. Acesso em: 30 dez. 2017.
- CASTRO, M. L. A.; CASTRO, R. O. Autômatos Celulares: implementações de Von Neumann, Conway e Wolfram. **Revista de Ciências Exatas e Tecnologia**. v. 3, n. 3, 2008, p. 89-106. Disponível em: <<http://www.pgsskroton.com.br/seer/index.php/rcext/article/view/2370>>. Acesso em: 20 out. 2017.
- CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G. Modelagem Matemática e Método axiomático. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM, p. 63-77, 2007.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. Ed. São Paulo: Editora Atlas, 2002. Disponível em: <http://www.urca.br/itec/images/pdfs/modulo%20v%20-%20como_elaborar_projeto_de_pesquisa_-_antonio_carlos_gil.pdf>. Acesso em: 20 out. 2017.

INSTITUTO BRASILEIRO DO MEIO AMBIENTE E DOS RECURSOS NATURAIS RENOVÁVEIS (IBAMA). Disponível em: <<http://www.ibama.gov.br/>>. Acesso em: 04 nov. 2017.

JESUS, A. R. de. **Equações Paramétricas.** Disponível em: <<http://mat.ufg.br/bienal/2006/mini/adelmo.conf.pdf>>. Acesso em: 06 dez. 2017.

JUNIOR, D. B. S. **Modelagem computacional de incêndios e queimadas: um estudo de caso sobre a reserva biológica do Lago Piratuba – AP.** Dissertação de Mestrado pela Universidade Católica de Pernambuco. Recife. 2007. Disponível em: <http://www.unicap.br/tede//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=170>. Acesso em: 28 jun. 2017.

MARTÍN, J. **El País Internacional - Incêndio em Portugal mata ao menos 63 pessoas e fere outras 54.** Junho de 2017. Disponível em: <http://brasil.elpais.com/brasil/2017/06/18/internacional/1497740856_855475.htm>. Acesso em: 28 jun. 2017.

MCKENZIE, D.; KENNEDY, M. C. Scaling laws and complexity in fire regimes. In: MCKENZIE, D.; MILLER, C.; FALK, D. A. (Ed.). **The Landscape Ecology of Fire.** New York, NY: Springer, 2011.

MICHAELIS, D. **Modelo.** Disponível em: <<http://michaelis.uol.com.br/>>. Acesso em: 25 jun. 2017.

OLIVEIRA, C. F. **Modelagem matemática do crescimento populacional: um olhar à luz da socioepistemologia.** Dissertação de Mestrado do programa de Pós-Graduação do Centro de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2011. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000166409>>. Acesso em: 28 jun. 2017.

SODRÉ, U. **Modelos matemáticos.** 2005. 27f. UEL (Universidade Estadual de Londrina). Londrina. 2005. Disponível em: <<http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf>>. Acesso em: 26 abr. 2017.

SWEDISH MATCH – BRASIL. Disponível em: <http://www.swedishmatch.com.br/main_produtos_fosforos_historia_2.html>. Acesso em: 06 dez. 2017.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**, volume 1. Tradução: Antonio Zumpano. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.