

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL
MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL**

LUCAS HERBER BORTOLI

**ANÁLISE MODAL DE ESTRUTURAS PLANAS COM ELEMENTOS
FINITOS Q4 EM NOTAÇÃO STRAIN GRADIENT**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CURITIBA

2020

LUCAS HERBER BORTOLI

**ANÁLISE MODAL DE ESTRUTURAS PLANAS COM ELEMENTOS FINITOS Q4
EM NOTAÇÃO STRAIN GRADIENT**

**MODAL ANALYSIS OF PLANE STRUCTURES USING Q4 FINITE ELEMENTS IN
STRAIN GRADIENT NOTATION**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. João Elias Abdalla Filho

CURITIBA

2020



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito. Os usuários não têm que licenciar os trabalhos derivados sob os mesmos termos estabelecidos pelo autor do trabalho original.

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO N° 200

A Dissertação de Mestrado intitulada: **ANÁLISE MODAL DE ESTRUTURAS PLANAS COM ELEMENTOS FINITOS Q4 EM NOTAÇÃO STRAIN GRADIENT**, defendida em sessão pública pelo Candidato **Lucas Herber Bortoli**, no dia 29 de maio de 2020, foi julgada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Civil, linha de pesquisa: Estruturas e Geotecnia, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. João Elias Abdalla Filho - Presidente - UTFPR

Prof. Dr. Ivan Moura Belo - UTFPR

Prof. Dr. Hsu Yang Shang - PUCPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, **29 de maio de 2020**.

AGRADECIMENTOS

Primordialmente e notadamente a meus pais, Eliseu e Voni, por proporcionarem o alicerce sobre o qual me apoiei e possibilitou trilhar o caminho ao qual me trouxe. Palavras carecem minha indescritível gratidão pelo contínuo incentivo e por tudo que me fizeram.

À minha noiva, Nayane, pelo companheirismo, amor e paciência nos momentos difíceis. Muito obrigado, Nayane, por me confortar e estar ao meu lado nessa tão importante etapa de minha vida.

À minha irmã, Poliana, sempre prestativa e disposta a me apoiar e incentivar. Saiba que sou grato por tudo, Poli.

A meus tios, Flávio e Ivania, assim como minha prima, Flaviane, pelo acolhimento na Cidade de Curitiba, além de toda familiaridade prestada.

A meu orientador e professor, Dr. João Elias Abdalla Filho, pelos ensinamentos, inspirações, conselhos e, acima de tudo, pela amizade ao longo deste percurso.

Ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da UTFPR, pela oportunidade e disponibilização do acervo de conhecimentos, tanto por parte do corpo docente, quanto da infraestrutura da universidade. E à CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que, de alguma forma contribuíram a tornar-me melhor, seja profissionalmente, ou como pessoa, e, apesar de aqui não mencionados, encontram em minha memória a minha profunda gratidão.

“Só pensamos saber tudo quando sabemos pouco; à medida que vamos adquirindo conhecimentos, instala-se a dúvida”

(BACON, Francis)

RESUMO

BORTOLI, Lucas Herber. **Análise Modal de Estruturas Planas com Elementos Finitos Q4 em Notação Strain Gradient**. 2020. 100 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2020.

O crescente avanço de tecnologias que viabilizam a construção de estruturas mais esbeltas e complexas, portanto mais susceptíveis a efeitos deletérios, como ações dinâmicas, demandam cada vez mais o desenvolvimento de ferramentas computacionais capazes de simular o comportamento mecânico dessas estruturas. As análises estruturais, na maioria das vezes são realizadas pelo Método dos Elementos Finitos, onde a qualidade dos resultados dependem da formulação matemática empregada para descrever o modelo físico, podendo em alguns casos conter erros de modelagem. Elementos quadriláteros, frequentemente usados na elasticidade plana, são exemplos de elementos com erro conhecido como *shear locking* (travamento por cisalhamento), decorrente da presença de termos espúrios nas expressões de deformação por cisalhamento. Tais termos podem ser identificados por meio da notação *strain gradient*, uma notação fisicamente interpretável que permite avaliar a capacidade de modelagem do elemento e corrigir erros de modelagem, eliminando *a priori* os termos que não regem a equação. Neste sentido, a atual pesquisa visa verificar os efeitos do travamento por cisalhamento nas frequências naturais e modos de vibração de estruturas planas utilizando quadriláteros de 4 nós formulados com a notação *strain gradient*. Para tanto, é desenvolvido um algoritmo computacional capaz de efetuar análise modal de estruturas planas com a notação em questão. As frequências naturais de vibração determinadas são comparadas com os valores de frequência fornecidos pela formulação isoparamétrica e pelo software de modelagem ANSYS. As análises mostram a eficácia da notação *strain gradient* em modelar problemas de vibração livre, onde obtém-se os mesmos resultados que a formulação isoparamétrica e software ANSYS, quando há a presença de *shear locking*. Da comparação de resultados de modelos com e sem termos espúrios, observa-se que os termos espúrios causam erros nos valores de frequências naturais. Este efeito deletério tem maior preponderância para malhas menos refinadas e em modos de vibração flexionais. Além disso, observa-se que os erros causados pelos termos espúrios são mais relevantes em estruturas esbeltas e com menores valores de coeficiente de *Poisson*. Desta forma, conclui-se que a notação *strain gradient*, além de apresentar vantagens do ponto de vista numérico, demonstra êxito em eliminar os erros de modelagem nas situações estudadas, possibilitando atingir resultados mais precisos e coerentes com o modelo físico.

Palavras-chave: Notação strain gradient. Vibração livre. Quadrilátero de quatro nós. Travamento por cisalhamento. Cisalhamento Parasítico.

ABSTRACT

BORTOLI, Lucas Herber. **Modal Analysis of Plane Structures using Q4 Finite Elements in Strain Gradient Notation**. 2020. 100 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Federal Technology University - Parana. Curitiba, 2020.

The increasing advancement of technologies that enable building slender and complex structures, therefore more susceptible to deleterious effects such as dynamic loads, have increasingly demanded the development of computational tools capable of simulating the mechanical behavior of those structures. The structural analyses are mostly performed using the Finite Element Method, where the quality of the results depends on the mathematical formulation used to describe the physical model, which may contain in some cases modeling errors. Quadrilateral elements, often used in plane elasticity, are examples of elements that contain an error known as shear locking, due to the presence of spurious terms in the expression of angular deformation. These terms can be identified using the strain gradient notation, a physically interpretable notation that enable to evaluate the modeling characteristics of the element and correctly formulate the polynomials, removing a priori the terms that do not belong to the equation. Therefore, the objective of this study is to examine the effects of shear locking on the natural frequencies and mode shapes of vibration of plane structures using 4-node quadrilaterals formulated by the strain gradient notation. For that, it is developed a computational program capable of performing modal analysis of plane structures using the strain gradient notation. The computed natural frequencies are compared to the values obtained by the isoparametric formulation and ANSYS simulation software. The analyses show the effectiveness of the strain gradient notation in the modeling of free vibration problems, where the results obtained are the same as the isoparametric formulation and ANSYS software, when there is the presence of shear locking. When comparing the results of models with and without spurious terms, it is observed that spurious terms cause errors in the values of natural frequencies. This deleterious effect has a greater preponderance for less refined meshes and in flexural vibration modes. In addition, it is observed that the errors caused by spurious terms are more relevant in slender structures and at lower values of Poisson's ratio. Thus, it is concluded that the strain gradient notation show advantages by the numerical aspect and successfully eliminate the modeling errors in the studied problems, where it is possible to compute more accurate and compatible results according to the physical model.

Keywords: Strain gradient notation. Free vibration. Four-node quadrilateral. Shear locking. Parasitic shear.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Domínio dividido em elementos finitos	17
Figura 2– Barra sujeita a esforços axiais	18
Figura 3 – Monômios de um polinômio completo de grau p (Triângulo de Pascal) ...	19
Figura 4 – Aproximação $\tilde{\Phi}(x)$ em relação à solução exata $\Phi(x)$	20
Figura 5 – Barragem de Loch Laggan (Escócia).....	23
Figura 6 – Deslocamentos e rotações de um elemento no plano x–y	24
Figura 7 – Elemento sujeito a tensões em todas as direções	25
Figura 8 – Elemento finito bilinear retangular	29
Figura 9 – Parametrização de um elemento quadrilátero.....	31
Figura 10 – Movimentos de corpo rígido	35
Figura 11 – Coeficientes até a quarta ordem das funções de deslocamento bidimensional	37
Figura 12 – Viga sujeita a carga estática, à esquerda, e viga sujeita a carga dinâmica, à direita	46
Figura 13 – Sistema de um grau de liberdade.....	48
Figura 14 – Sistema de múltiplos graus de liberdade.....	49
Figura 15 – Fluxograma das sub-rotinas do PC-FEM	56
Figura 16 – Fluxograma das sub-rotinas do PC-FEM	57
Figura 17 – Contribuição dos elementos individuais à matriz global	60
Figura 18 – Etapas para solução do processo	61
Figura 19 – Viga em balanço.....	62
Figura 20 – Discretizações de malha da viga em balanço	63
Figura 21 – <i>Shear Wall</i>	64
Figura 22 – Chapa Quadrada.....	66
Figura 23 – Discretizações de malha da chapa.....	67
Figura 24 – Modos de vibração da viga em balanço para malha 20×2 (120 GL)	75
Figura 25 – Modos de vibração da parede de cisalhamento para malha 4×16 (160 GL)	77
Figura 26 – Modos de vibração da chapa quadrada para malha 8×8 (144 GL)	83

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Erro relativo em função do modo de vibração	74
Gráfico 2 – Frequência natural do 1° modo em função do GL para o problema da parede de cisalhamento	78
Gráfico 3 – Frequência natural do 2° modo em função do GL para o problema da parede de cisalhamento	79
Gráfico 4 – Frequência natural do 4° modo em função do GL para o problema da parede de cisalhamento	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Frequência fundamental da viga em balanço	70
Tabela 2 – Frequências naturais de vibração para malha 5 x 1 (20 GL), em rad/s ...	72
Tabela 3 – Frequências naturais de vibração para malha 10 x 1 (40 GL), em rad/s.	72
Tabela 4 – Frequências naturais de vibração para malha 20 x 2 (120 GL), em rad/s	73
Tabela 5 – Frequências naturais da parede de cisalhamento (rad/s).....	76
Tabela 6 – Erro relativo das frequências naturais da parede de cisalhamento	77
Tabela 7 – Frequências naturais da chapa quadrada (rad/s).....	81
Tabela 8 – Erro relativo das frequências naturais da parede de cisalhamento	82
Tabela 9 – Frequência fundamental da chapa com $L_y/L_x = 1$ (10^{-3} rad/s).....	84
Tabela 10 – Erro relativo da chapa com $L_y/L_x = 1$	85
Tabela 11 – Frequência fundamental da chapa com $L_y/L_x = 0,5$ (10^{-3} rad/s).....	86
Tabela 12 – Erro relativo da chapa com $L_y/L_x = 0,5$	87
Tabela 13 – Frequência fundamental da chapa com $L_y/L_x = 0,2$ (10^{-3} rad/s).....	88
Tabela 14 – Erro relativo da chapa com $L_y/L_x = 0,2$	89
Tabela 15 – Frequência fundamental da chapa com $L_y/L_x = 0,1$ (10^{-3} rad/s).....	90
Tabela 16 – Erro relativo da chapa com $L_y/L_x = 0,1$	91

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 OBJETIVO	14
1.1.1 Objetivo Geral	14
1.1.2 Objetivos Específicos	14
1.2 JUSTIFICATIVA	15
1.3 DELIMITAÇÃO	15
2 REFERENCIAL TEÓRICO	16
2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	16
2.1.1 Funções Aproximadoras de Deslocamento	18
2.1.2 Aproximação de Resultados em Elementos Finitos	19
2.1.2.1 Estratégias de refino	20
2.1.2.2 Convergência	21
2.1.2.3 Medidas de erro	21
2.1.2.4 Travamento por cisalhamento	22
2.2 MEF PARA ELASTICIDADE PLANA	23
2.2.1 Deformações	24
2.2.2 Relações Tensão-deformação	25
2.2.3 Solução de um Elemento Finito no Estado Plano	27
2.2.4 Retângulo Bilinear	29
2.2.5 Elementos Isoparamétricos	31
2.3 NOTAÇÃO STRAIN GRADIENT	32
2.3.1 Uso da Notação <i>Strain Gradient</i> no MEF	33
2.3.2 Funções Aproximadoras de um Elemento Finito <i>Strain Gradient</i>	34
2.3.2.1 Funções aproximadoras do quadrilátero de 4 nós	38
2.3.3 Formulação da Matriz de Rigidez Elemento Q4	39
2.3.3.1 Energia de deformação	39
2.3.3.2 Matriz de rigidez	42
2.4 ANÁLISE DINÂMICA PELO MEF	43
2.4.1 Ações dinâmicas	45
2.4.2 Equação de movimento	46
2.4.3 Vibração Livre Não Amortecida	47
2.4.3.1 Sistema de um grau de liberdade	48
2.4.3.2 Sistema de múltiplos graus de liberdade	49
2.4.4 Análise Modal	50
2.4.5 Condensação Estática	52
2.4.6 Matriz de Massa	52
2.4.6.1 Matriz de massa concentrada	53
2.4.6.2 Matriz de massa consistente	54

3 MATERIAL E MÉTODOS	55
3.1 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	55
3.1.1 PC-FEM.....	56
3.1.2 Algoritmo de Análise Dinâmica.....	59
3.1.2.1 Obtenção das matrizes de rigidez e massa.....	60
3.1.2.2 Sistema de equações dinâmicas.....	61
3.2 ESTRUTURAS PLANAS EM ESTUDO.....	62
3.2.1 Viga em Balanço.....	62
3.2.2 Shear Wall.....	64
3.2.3 Chapa Quadrada.....	65
3.2.3.1 Variação da relação altura/comprimento e coeficiente de <i>Poisson</i>	67
3.3 CRITÉRIOS DE ANÁLISE.....	68
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	70
4.1 VIGA EM BALANÇO.....	70
4.1.1 Validação da notação <i>strain gradient</i>	70
4.1.2 Frequências Naturais e Modos de Vibração.....	71
4.2 SHEAR WALL.....	75
4.2.1 Frequências Naturais e Modos de Vibração.....	75
4.2.2 Convergência dos Resultados.....	78
4.3 CHAPA QUADRADA.....	80
4.3.1 Frequências Naturais e Modos de Vibração.....	80
4.3.2 Variação da Relação entre Dimensões e Coeficiente de <i>Poisson</i>	83
4.3.2.1 Relação $L_y/L_x = 1$	84
4.3.2.2 Relação $L_y/L_x = 0,5$	86
4.3.2.3 Relação $L_y/L_x = 0,2$	88
4.3.2.4 Relação $L_y/L_x = 0,1$	89
5 CONCLUSÃO	92
5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	93
REFERÊNCIAS	95

1 INTRODUÇÃO

A análise modal de estruturas compreende o estudo do comportamento dinâmico de sistemas estruturais sob vibrações livres, onde determina-se as frequências naturais e os modos de vibração do sistema, de forma a avaliar sua capacidade oscilatória diante de potenciais ações dinâmicas.

Para Clough e Penzien (2003), a principal diferença das ações dinâmicas em relação às estáticas é a variação temporal. Desta forma, cada ponto do problema analisado não tem um único resultado de deslocamentos, deformações e tensões para determinadas condições, e sim um conjunto de resultados dependentes dos diversos instantes de tempo analisados.

A importância de se estudar o comportamento dinâmico de estruturas é ressaltada por Silva e Vasconcelos (2010) devido ao crescente desenvolvimento tecnológico que, cada vez mais, proporciona a execução de estruturas mais esbeltas e flexíveis, portanto, mais susceptíveis às ações de natureza dinâmica.

Uma das maiores dificuldades enfrentadas na análise estrutural dinâmica é formular modelos matemáticos capazes de representar apropriadamente o modelo físico estudado. Para tanto, diversas abordagens foram desenvolvidas, sendo o Método dos Elementos Finitos (MEF) a mais usual.

O principal motivo da popularização do MEF se deu pela sua capacidade de simular estruturas complexas, segundo Thompson e Thompson (2017), que seriam inviáveis por meio de métodos analíticos. Além do mais, o MEF é programável, o que possibilita criar rotinas de cálculo capazes de tratar problemas com diferentes geometrias e variáveis sem a necessidade de descrever novas formulações matemáticas.

Entretanto, o MEF não fornece soluções exatas para o problema, mas soluções aproximadas, onde a acurácia da resposta depende da discretização realizada no modelo estrutural. Segundo Novotny e Fancello (1998), a solução aproximada pode ser melhorada por meio de refinamentos, tanto no aumento da quantidade de elementos da malha, como no aumento da ordem polinomial do elemento.

A ordem polinomial das funções aproximadoras de deslocamento depende do tipo de elemento adotado na modelagem, em especial da quantidade de graus de liberdade do elemento. Em estruturas planas, por exemplo, alguns dos elementos

utilizados são: triângulo de três nós, formado por polinômio linear completo; quadrilátero de quatro nós, cujo polinômio linear é completo e quadrático incompleto; triângulo de seis nós, onde o polinômio linear e quadrático são completos; e quadrilátero de oito nós, com polinômio linear completo, quadrático completo e polinômio cúbico incompleto.

Como visto, os polinômios que formam as funções aproximadoras de deslocamento dos elementos triangulares de três e seis nós consistem em coeficientes de expansões binomiais completos, ao passo que nos quadriláteros, o polinômio de um determinado grau é incompleto. Uma das consequências de elementos com polinômios incompletos é o aparecimento de erros de modelagem que interferem nos resultados da análise (ABDALLA e DOW, 1994).

Normalmente estes erros de modelagem são contornados aumentando o refino da malha através do aumento do número de elementos, o que implica em maior esforço computacional. Porém, esta medida não elimina os erros de modelagem, apenas diminuem sua relevância, e, em muitos casos, o aumento do número de elementos pode dificultar a modelagem, visto que exige quantidade cada vez maior de operações numéricas que demandam maior tempo de cálculo.

Neste sentido, torna-se evidente a importância da formulação matemática empregada no processo computacional de modelagem. Em vista disso, Dow et al. (1985) propuseram formular as funções interpoladoras dos deslocamentos de um elemento finito utilizando uma notação fisicamente interpretável, que viria a ser denominada de *strain gradient*.

Na notação *strain gradient*, os deslocamentos são expressos como funções de movimentos de corpo rígido, deformações e suas derivadas (DOW, 1999). Desta forma, pode-se avaliar a capacidade de modelagem de um elemento finito e identificar a presença de termos espúrios nas expansões polinomiais para as componentes de deformação, causadoras dos erros de modelagem.

Tais termos manifestam-se em certos tipos de elementos finitos, como os quadriláteros de quatro nós, conhecidos também como elementos Q4. Neste caso, os termos espúrios aparecem na expressão de distorção angular e são conhecidos como termos de cisalhamento parasítico, causando erro denominado de travamento por cisalhamento, ou, *shear locking*.

Dow e Byrd (1988) desenvolveram expressões de deslocamentos para elementos finitos Q4 em notação *strain gradient* de modo a identificar e eliminar a

presença dos termos espúrios. Tais expressões levam a alterações na formulação da matriz de rigidez do elemento, onde foi mostrado para o caso de análise estática de vigas planas que a notação *strain gradient* proporciona maior eficiência de modelagem e resultados mais acurados.

Com isso, infere-se que a análise dinâmica de estruturas planas com elementos contendo termos espúrios, como é o caso dos quadriláteros, também é afetada por erros de modelagem, já que os erros estão contidos na matriz de rigidez e esta faz parte das equações que descrevem o movimento oscilatório do sistema estrutural. Adicionalmente, a análise dinâmica depende também de outros parâmetros, como a massa e amortecimento, fazendo com que a matriz de rigidez possa ser mais ou menos relevante na determinação das frequências naturais de vibração da estrutura.

Em razão disso, a atual pesquisa é regida por método hipotético-dedutivo e pretende simular computacionalmente estruturas planas pelo MEF implementando a notação *strain gradient* para corrigir erros de travamento nos elementos Q4 em análises de vibração livre.

1.1 OBJETIVO

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta pesquisa é verificar a influência do cisalhamento parasítico na determinação das frequências naturais e modos de vibração de estruturas planas utilizando elementos finitos Q4 em notação *strain gradient*.

1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são:

- Validar os resultados de modelagem de vibração livre via elementos finitos *strain gradient* Q4 em problemas de elasticidade plana linear;
- Avaliar a influência de termos de cisalhamento parasítico, presentes na matriz de rigidez de elementos quadriláteros de 4 nós, na determinação das frequências naturais e modos de vibração de estruturas planas;

- Analisar a convergência de malha em notação *strain gradient* com eliminação *a priori* dos termos espúrios em relação à formulação convencional de elementos finitos.

1.2 JUSTIFICATIVA

Estudos anteriores mostram a eficácia da notação *strain gradient* em identificar e eliminar termos espúrios *a priori* em análises estáticas, fazendo com que a matriz de rigidez de determinados elementos seja descrita de forma mais precisa e os resultados de modelagem estrutural sejam mais confiáveis. Paralelo a isso, na notação *strain gradient*, as formulações matemáticas implicam em menor quantidade de integrais a serem avaliadas, tendo como potencial aumentar a capacidade de refino da malha do modelo estrutural e reduzir esforços computacionais.

A eficiência computacional deve ser ainda mais significativa na análise dinâmica, que envolve maior quantidade de cálculos a serem efetuados. E, considerando a inexistência de publicações sobre o uso da notação *strain gradient* em dinâmica, esta dissertação possibilita explorar novos estudos sobre modelagens dinâmicas empregando elementos finitos formulados pela notação *strain gradient*.

1.3 DELIMITAÇÃO

Esta pesquisa foi desenvolvida na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, em Curitiba, Câmpus Ecoville, no espaço dedicado aos estudantes do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil.

A revisão bibliográfica foi realizada com auxílio de livros, artigos científicos, dissertações e teses. As modelagens efetuadas para atingir os objetivos da pesquisa consistem em análises de vibração livre sem amortecimento de estruturas bidimensionais com comportamento elástico-linear.

O software para modelagem computacional das estruturas foi desenvolvido em ambiente de desenvolvimento integrado de código aberto Code::Blocks, por intermédio de linguagem de programação Fortran 95 em conjunto ao MATLAB R2018b. Os resultados foram contrastados com os valores fornecidos pela formulação convencional, desenvolvida em MATLAB R2018b e software de modelagem ANSYS APDL 19.2, e a tabulação dos dados para apresentação dos resultados via Excel.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica usada para embasamento da pesquisa, tratando sobre o método dos elementos finitos no estado plano pelas notações isoparamétrica e *strain gradient*, com o propósito de evidenciar as diferenças entre ambas formulações. Além disso, é abordado sobre análise dinâmica de estruturas, em especial, vibrações livres no plano.

2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

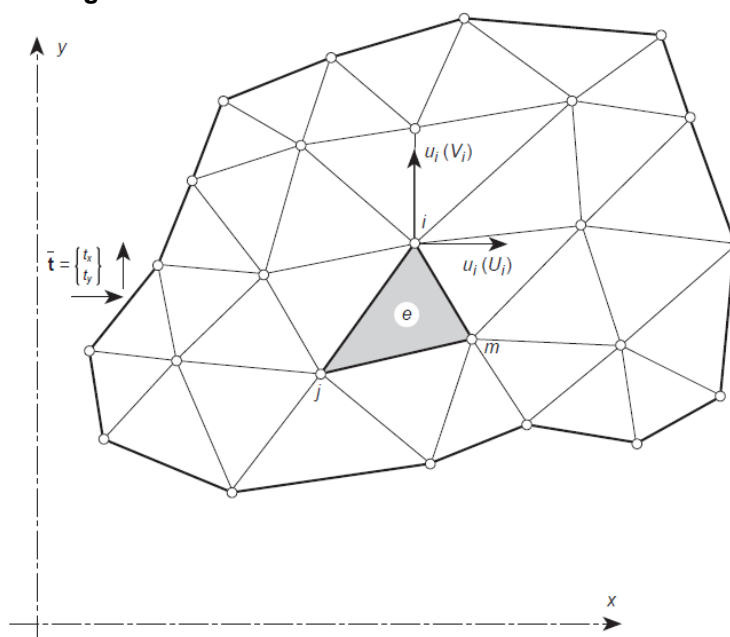
As principais ideias relacionadas ao Método dos Elementos Finitos (MEF) foram apresentadas por vários autores na década de 1950, e o termo MEF foi cunhado por Clough em 1960. Estudos a respeito da discretização de funções contínuas, por outro lado, foram realizados pelo matemático Courant em 1943, utilizando subdivisão de domínios com elementos triangulares e o princípio da minimização de energia potencial em estudos de torção em peças mecânicas (RAO, 2011).

Com a contribuição de matemáticos, físicos e engenheiros desenvolveu-se uma sólida base teórica para o método. Teixeira-Dias et al. (2010) diz que a aplicação do MEF a problemas complexos de engenharia, exige, muitas vezes, a disponibilidade de meios computacionais significativos. Deste modo, percebe-se que o desenvolvimento do método tenha vindo a acontecer de acordo com a disponibilidade tecnológica e aumento da capacidade de cálculo dos recursos computacionais.

Para Bittencourt (2010), o MEF pode ser considerado, basicamente, como um método numérico para a solução de Problemas de Valor de Contorno (PVC) envolvendo equações diferenciais ordinárias e parciais e respectivas condições de contorno.

A ideia básica do método é dividir um corpo em vários subdomínios ou elementos finitos (Figura 1) e determinar sua solução aproximada, considerando-se apenas os nós definidos pela subdivisão. O conjunto de nós e elementos constitui a malha de elementos finitos.

Figura 1 – Domínio dividido em elementos finitos



Fonte: Zienkiewicz et al. (2013)

Os elementos são interconectados pelos nós, e variações de campo, tais como tensões, deslocamentos, temperatura, pressão, velocidade, entre outros, são aproximadas por funções aproximadoras.

Segundo Rao (2011), o processo de solução de um problema em elementos finitos segue uma rotina que pode ser resumida em:

1. Dividir o domínio em elementos finitos;
2. Atribuir uma solução aproximada para os elementos;
3. Formular as matrizes características dos elementos;
4. Juntar as equações dos elementos em um sistema de equilíbrio global;
5. Solucionar as equações em função dos pontos nodais desconhecidos;
6. Computar as resultantes do elemento.

Alves Filho (2013) afirma que o conceito básico do MEF, a discretização, gera diversas equações algébricas simultâneas, que são resolvidas numericamente. Desta forma, todas as decisões são tomadas durante a elaboração do modelo, antes de realizar a análise, escolhendo os devidos parâmetros que representam uma dada situação física. Daí, a importância do elemento finito ser bem definido, com sua formulação matemática representando apropriadamente o comportamento físico que se pretende simular.

Se um determinado problema for discretizado de modo a ter n nós, então o número total de graus de liberdade a determinar é, em todo o modelo, $N_{gl} = n \cdot n_{gl}$,

em que n_{gl} designa o número de graus de liberdade por nó. Comparando com o sistema real, que teoricamente possui infinitos graus de liberdade, este número de incógnitas deve ser suficiente para aproximar adequadamente o comportamento do sistema real (ALVES FILHO, 2013).

2.1.1 Funções Aproximadoras de Deslocamento

O MEF resolve por aproximação o problema na forma variacional. Como visto, o domínio é discretizado em elementos, resultando em uma malha com n pontos nodais. Para tal, são utilizadas aproximações conforme indicado na Equação (1), por Cook (2002).

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad (1)$$

Onde $\hat{u}(x)$ é a solução aproximada de elementos finitos sobre o domínio, n é o número total de nós do elemento, N_i são as funções de interpolação associadas ao nó i e u_i os valores nodais de u .

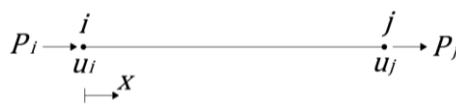
Um aspecto fundamental no MEF é que as funções aproximadoras adotadas gerem um polinômio completo do grau desejado (ASSAN, 2010).

Um polinômio completo $p(x)$ de grau n na variável local x possui todos os termos, de ordem zero até n , conforme a Equação (2):

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \quad (2)$$

Considerando a aproximação do deslocamento axial em uma barra de dois nós (Figura 2), ao expandir os termos, obtém-se um polinômio completo de primeiro grau, indicado pela Equação (3).

Figura 2– Barra sujeita a esforços axiais



Fonte: autoria própria

$$p(x) = a_0 + a_1x \quad (3)$$

Usando agora um elemento de três nós (quadrático), o deslocamento axial é aproximado pela Equação (4):

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (4)$$

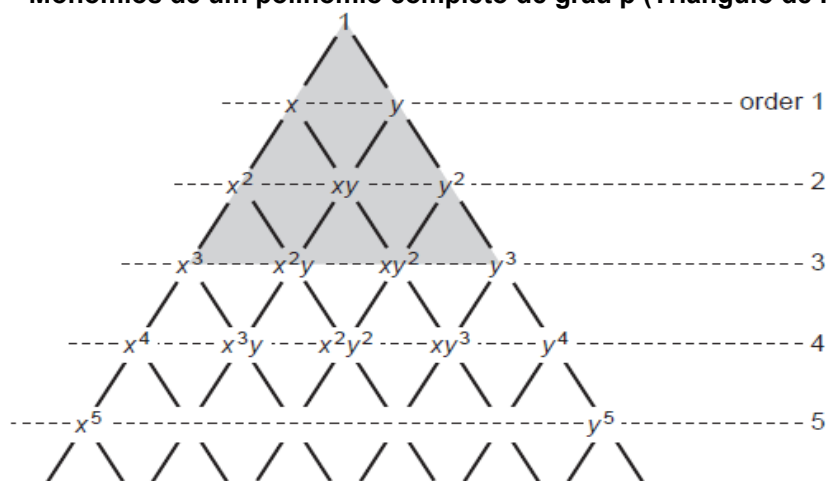
O mesmo conceito se aplica para casos bi e tridimensional. Polinômios completos de grau 1 e 2 nas variáveis locais (x, y) são expressos, respectivamente, pelas Equações (5) e (6):

$$p_1(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \quad (5)$$

$$p_2(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 \quad (6)$$

Para facilitar a visualização dos termos mínimos necessários para gerar uma expansão completa em (x, y) de um determinado grau, emprega-se o triângulo de Pascal, ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Monômios de um polinômio completo de grau p (Triângulo de Pascal)



Fonte: Zienkiewicz et al. (2013)

No entanto, alguns tipos de elementos não geram polinômios completos, como os quadriláteros. E apesar de satisfazerem com precisão aceitável o comportamento cinemático do domínio, erros estão contidos em suas funções.

2.1.2 Aproximação de Resultados em Elementos Finitos

Como visto, o MEF consiste em um procedimento numérico. Trata-se na verdade de um problema escrito em forma fraca, ou seja, sua formulação é integral com solução matematicamente aproximada. Difere pois, de problemas na forma forte, cuja formulação é diferencial e a solução matematicamente exata.

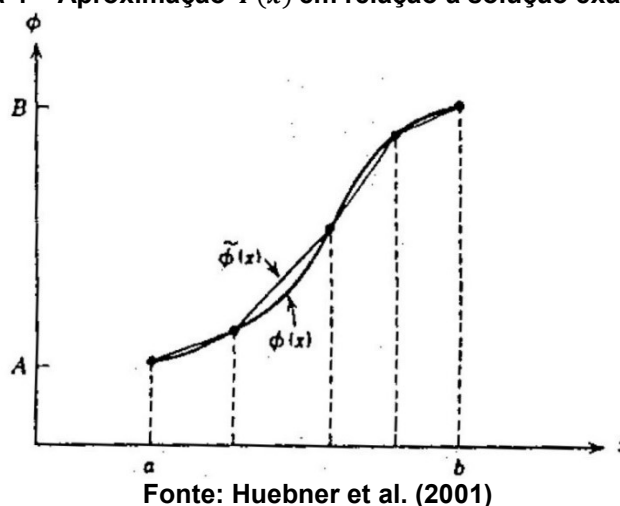
A abordagem por energia é um típico exemplo de formulação variacional considerada como fraca por LIU (2010), pois calcula-se a energia potencial total do sistema e aplica-se o princípio da energia potencial total estacionária para determinar o campo de deslocamentos que extremiza a energia total. A avaliação por energia

exige apenas a existência de derivadas primeira e segunda dos deslocamentos, uma condição que segundo o autor justificaria sua eventual classificação como formulação fraca.

Assim sendo, é inevitável a existência de erros de aproximação da resposta aproximada em relação à resposta exata. Para Díez (2000), toda formulação de elementos finitos contém erro no funcional de aproximação dos elementos, onde esse erro está associado à aproximação do espaço funcional dimensional infinito ao qual a solução pertence por um espaço de interpolação dimensional finito induzido pela malha.

A Figura 4 exemplifica a aproximação por elementos finitos em relação à solução exata.

Figura 4 – Aproximação $\tilde{\Phi}(x)$ em relação à solução exata $\Phi(x)$



Em geral, pode-se reduzir o erro de discretização por meio da redistribuição dos elementos da malha de uma forma mais apropriada ou através do aumento do número de graus de liberdade, ao utilizar técnicas de refino (PEREIRA, 1996).

Em consequência disso, para melhorar a qualidade da aproximação dos resultados no MEF, utiliza-se tais refinamentos e medidas de estimativa de erros em relação à resposta exata.

2.1.2.1 Estratégias de refino

De acordo com Novotny e Fancello (1998), as principais técnicas de refino de malhas de elementos finitos são baseadas na mudança de localização dos nós sem

alterar a topologia da malha (refino r), no refino da malha através do aumento do número de elementos (refino h), no aumento da ordem polinomial dos elementos (refino p) ou através de combinações destes.

No refino h da malha, a ordem polinomial das funções de interpolação dos elementos permanece constante, enquanto o tamanho dos mesmos é modificado. Já no refino p , procura-se criar uma sequência de aproximações aumentando-se sucessivamente a ordem polinomial das funções de interpolação dos elementos, mantendo seus tamanhos.

O método mais eficiente de controle de erro é obtido ao combinar as diferentes estratégias de refino, isto é, efetuar uma discretização inteligente da malha, escolher elementos cuja ordem polinomial seja suficiente ao problema analisado, e variar as quantidades de elementos até que haja convergência aceitável dos resultados.

2.1.2.2 Convergência

Para Bathe (2014), uma solução admissível de elementos finitos deve convergir, na medida em que se aumenta os graus de liberdade, à solução analítica (exata) das equações diferenciais que regem a resposta do modelo matemático.

Entretanto, em problemas de maior complexidade, em especial na dinâmica de estruturas, é comum não haver meios viáveis de determinar analiticamente a solução exata das equações diferenciais do movimento. Neste caso, as características básicas de cinemática, equilíbrio e relações constitutivas contidas no modelo matemático devem, em última análise, convergir com precisão numérica satisfatória em função do objeto de estudo.

Bathe (2014) também afirma que para atingir convergência monotônica, os elementos devem ser completos e compatíveis com a malha. O critério de completude significa que as funções de deslocamento, assim como suas derivadas, devem ser contínuas no interior do elemento. E o critério de compatibilidade, implica que os deslocamentos devem ser contínuos tanto no interior quanto nos limites do elemento.

2.1.2.3 Medidas de erro

Os erros mais recorrentes introduzidos na solução de uma dada equação integral pelo MEF, segundo Reddy (2006), podem ser:

- Erros de aritmética finita e quadratura: oriundos de arredondamento nos cálculos realizados pelo computador;
- Erros de aproximação de domínio: interpretados como erros de especificação de dados do problema porque a solução é encontrada a partir de uma equação diferencial com um domínio modificado;
- Erros de aproximação do polinômio: decorrentes da substituição da função de solução exata do problema por uma função polinomial aproximada.

Para quantificar os erros de aproximação, diversas abordagens de estimativa de erro foram desenvolvidas. Tais estratégias podem ser divididas, em geral, em duas categorias principais: *a priori* e *a posteriori*. A primeira, refere-se aos erros antes que a solução seja conhecida e fornecem dados relativos ao comportamento assintótico dos erros de discretização (GRÄTSCH e BATHE, 2005). Já os estimadores de erros *a posteriori*, consistem em estimar o resultado ao qual a resposta de determinada malha converge, baseado no refino da mesma, resultando em diminuição do valor do erro.

O estudo de estimativas de erro foge do escopo da atual pesquisa, uma vez que esta concentra-se na correção *a priori* de erros de travamento por cisalhamento, fornecida pela notação *strain gradient*.

2.1.2.4 Travamento por cisalhamento

Além dos erros de discretização do contínuo, outra categoria de erros presentes no MEF são os erros de modelagem contidos no próprio elemento. Tais erros podem manifestar-se, por exemplo, através do enrijecimento artificial ou travamento do modelo, associado à deformação por cisalhamento, ou, distorção angular (DOW e BYRD, 1990). Este erro é conhecido como *shear locking* (travamento por cisalhamento) e decorre do aparecimento de termos espúrios na expressão de distorção angular, que para este caso, são chamados de termos de cisalhamento parasítico.

O motivo do surgimento de termos espúrios durante a formulação das funções de deslocamentos é o uso de polinômios incompatíveis. A ordem dos polinômios pode ser incompleta, como no caso dos quadriláteros de quatro nós, ou inconsistentes, por meio de polinômios incompletos e cuja ordem é inconsistente com a ordem da teoria

modelada, como ocorre em elementos de viga de Timoshenko, e placas ou cascas segundo teoria de Mindlin (ABDALLA, 2006).

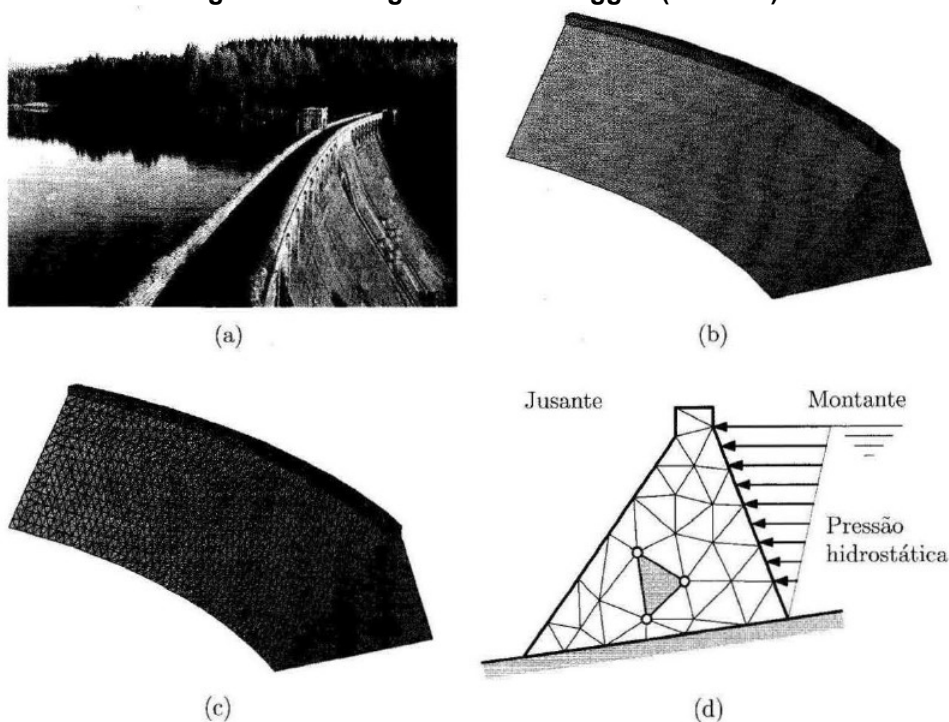
Como bem menciona Yazdani et al. (1996), existem ainda diversos outros fatores que afetam a qualidade dos resultados no MEF. Porém, o *shear locking* é de particular interesse aos elementos Q4, e com a notação *strain gradient*, é possível identificar e corrigir o travamento *a priori*, como mostra a seção 2.3.

2.2 MEF PARA ELASTICIDADE PLANA

Estruturas de estado plano são estruturas cujo modelo de representação é bidimensional, onde uma dimensão, normalmente medida na direção do eixo z do sistema de coordenadas cartesiano, é muito menor do que as outras duas medidas nas direções dos eixos x e y do plano $x - y$. As forças atuantes nessas estruturas agem também no plano $x - y$ (VAZ, 2011).

Exemplos de estruturas de estado plano na Engenharia Civil podem ser alvenarias, vigas-parede, pilares-parede, ou a seção de espessura constante de um muro de arrimo ou uma barragem, como pode ser visto na Figura 5.

Figura 5 – Barragem de Loch Laggan (Escócia)



Fonte: Teixeira-Dias et al. (2010)

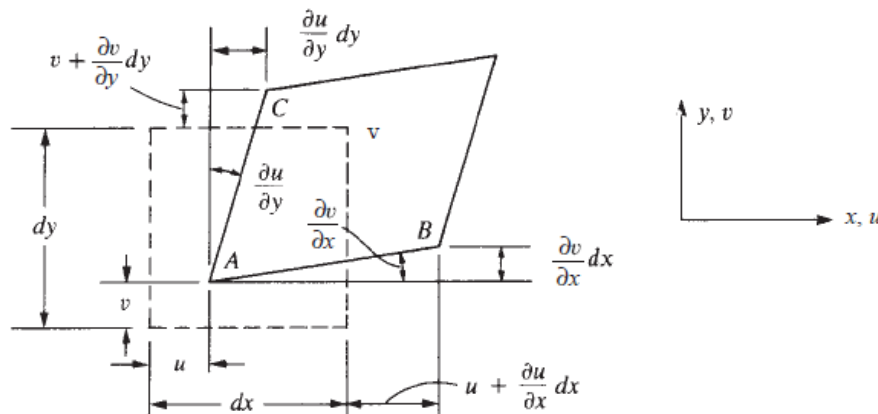
Na Figura 6a, mostra-se a estrutura real da barragem; (b) o modelo geométrico tridimensional simplificado; (c) representação tridimensional simplificada, discretizada em elementos finitos; e (d) representação simplificada do modelo bidimensional discretizado de uma seção qualquer.

Outro tipo de estrutura plana e de particular interesse a estudos de dinâmica são pilar-paredes de contraventamento, visto que auxiliam na redução de efeitos oscilatórios de ações sísmicas e de vento.

2.2.1 Deformações

Os campos de deslocamento de estruturas bidimensionais no plano $x - y$ são $u(x, y)$ e $v(x, y)$, respectivamente nas direções dos eixos x e y . A Figura 6 mostra uma representação de um elemento infinitesimal em algum ponto de uma estrutura plana.

Figura 6 – Deslocamentos e rotações de um elemento no plano $x-y$



Fonte: Logan (2012)

As componentes de deformação para o elemento são descritas pelas Equações (13).

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{13}$$

Sendo que:

ε_x = deformação normal no eixo x

ε_y = deformação normal no eixo y

γ_{xy} = deformação de cisalhamento no plano $x - y$

Podendo ser escritas matricialmente como na Equação (14):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (14)$$

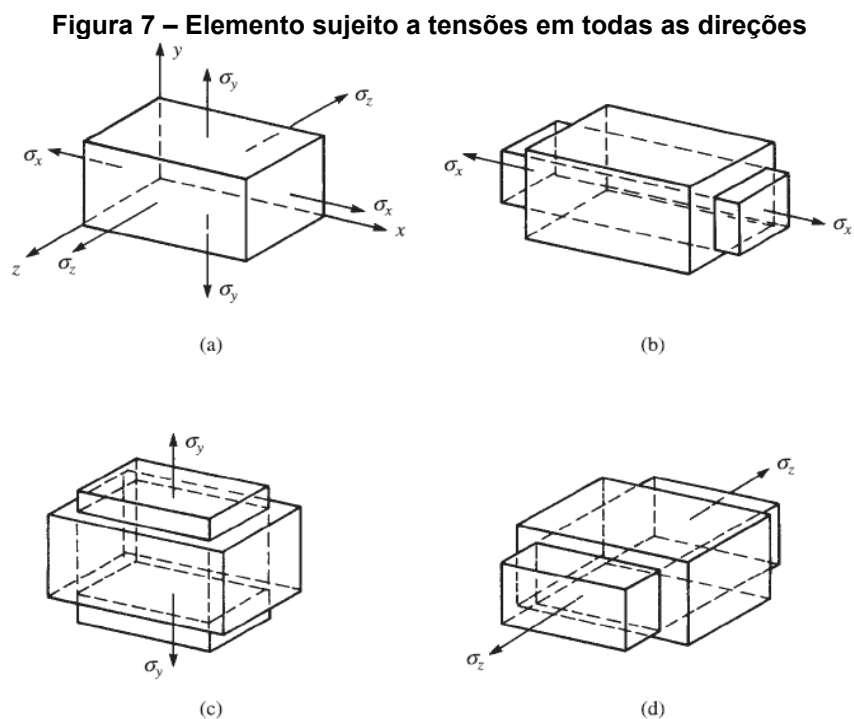
Ou ainda, de modo sucinto, conforme Equação (15):

$$\{\varepsilon\} = [L] \{u\} \quad (15)$$

Onde $\{\varepsilon\}$ é o vetor das deformações, $[L]$ a matriz de operadores diferenciais e $\{u\}$ o vetor dos deslocamentos.

2.2.2 Relações Tensão-deformação

Ao considerar na elasticidade linear um corpo sólido com material isotrópico e homogêneo sujeito a tensões em todas as direções e livre para se deformar, como mostra a Figura 7, é válida a Lei de Hooke generalizada.



Fonte: Logan (2012)

Neste caso, as direções ortogonais encurtam-se devido ao efeito de Poisson, e ao aplicar a superposição de efeitos, chega-se nas Equações (16).

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\end{aligned}\quad (16)$$

Onde E é o módulo de elasticidade do material, ν é o coeficiente de *Poisson* e σ_x , σ_y e σ_z referem-se às tensões nas direções x , y e z , respectivamente, descritas pelas Equações (17).

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_x(1-\nu) + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z] \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + (1-\nu)\varepsilon_z]\end{aligned}\quad (17)$$

Assim como nas tensões normais, a Lei de Hooke aplica-se também às deformações e tensões de cisalhamento, como nas Equações (18).

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{zx}\end{aligned}\quad (18)$$

Sendo que γ_{xy} , γ_{yz} e γ_{zx} referem-se às deformações por cisalhamento nos respectivos planos indicados.

As estruturas no estado plano $x - y$ de tensões apresentam tensões atuando somente neste plano, ou seja, $\sigma_z = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$, e as deformações na direção do eixo z livres, $\varepsilon_z \neq 0$.

Logo, as relações constitutivas podem ser escritas como na Equação (19):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\quad (19)$$

Ou, sucintamente, em sua forma matricial, pela Lei de Hooke generalizada, Equação (20):

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (20)$$

Onde $[D]$ é denominada matriz constitutiva para o estado plano de tensões.

Já nas estruturas em estado plano de deformações, a deformação é impedida na direção do eixo z , $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, e as tensões normais são diferentes de zero, $\sigma_z \neq 0$.

Assim, as relações constitutivas para este caso são dadas pela Equação (21):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

2.2.3 Solução de um Elemento Finito no Estado Plano

Para desenvolver as equações de equilíbrio no MEF é aplicado o princípio da mínima energia potencial. De acordo com Moharos et al. (2012), ao considerar um elemento elástico no estado plano, a energia potencial total Π_e é definida pela diferença entre a energia de deformação U (energia interna) e o trabalho W exercido pelas ações externas, conforme descreve a Equação (22):

$$\Pi_e = U - W = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \int_{A_{pe}} \{u\}^T \{p\} dA - \int_{V_e} \{u\}^T \{q\} dV - \sum_{i=1}^n \{u\}^T(x_i, y_i) \{F_i\} \quad (22)$$

Onde:

$\{u\}$ = campo de deslocamentos

$\{p\}$ = forças de superfície

$\{q\}$ = forças de corpo

$\{F_i\}$ = forças concentradas nos pontos nodais

$\{A_{pe}\}$ = área de contorno do elemento

$\{V_e\}$ = volume do elemento

O campo de deslocamentos é dado pela função interpoladora indicada na Equação (23):

$$\{u(x, y)\} = [N(x, y)] \{u_e\} \quad (23)$$

Onde $[N(x, y)]$ é a matriz de interpolação da função e sua dimensão depende do grau de liberdade do elemento plano. $\{u_e\}$ é o vetor de deslocamentos nodais.

A relação entre o campo de deslocamentos e campo de deformações já foi introduzido pela Equação (15). A combinação destas relações resulta na Equação (24):

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} = [L][N(x, y)]\{u_e\} = [B]\{u_e\} \quad (24)$$

O campo de tensões resulta na Equação (25):

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{u_e\} \quad (25)$$

E a energia de deformação para um elemento é dada pela Equação (26):

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \iint \{u_e\}^T [B]^T [D]^T [B] \{u_e\} t dx dy = \frac{1}{2} \{u_e\}^T [K_e] \{u_e\} \quad (26)$$

Sendo $[K_e]$ a matriz de rigidez do elemento, Equação (27):

$$[K_e] = \int_{V_e} [B]^T [D]^T [B] dV = \iint [B]^T [D]^T [B] t dx dy \quad (27)$$

A dimensão da matriz depende do número de grau de liberdade do elemento. Tratando-se de elemento planos, o volume diferencial é escrito na forma $dV = t dA = t dx dy$, onde t é a espessura do elemento. O trabalho das forças externas que atuam no elemento fica de acordo com a Equação (28):

$$W = \int_{A_{pe}} \{u\}^T \{p\} dA + \int_{V_e} \{u\}^T \{q\} dV + \sum_{i=1}^n \{u\}^T(x_i, y_i) \{F_i\} \quad (28)$$

$$W = \{u_e\}^T \int_{A_{pe}} [N]^T \{p\} dA + \{u_e\}^T \int_{V_e} [N]^T \{q\} dV + \{u_e\}^T \{F_{ec}\}$$

Onde $\{F_{ec}\}$ é o vetor de forças concentradas que atua nos nós do elemento.

Logo, a energia potencial total pode ser escrita conforme a Equação (29):

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{u_e\}^T [K_e] \{u_e\} - \{u_e\}^T \{F_e\} \quad (29)$$

Onde $\{F_e\}$ é o vetor de forças que atuam no elemento, Equação (30):

$$\{F_e\} = \int_{A_{pe}} [N]^T \{p\} dA + \int_{V_e} [N]^T \{q\} dV + \{F_{ec}\} = \{F_{eb}\} + \{F_{ep}\} + \{F_{ec}\} \quad (30)$$

$\{F_{eb}\}$ e $\{F_{ep}\}$ são as forças de corpo e de superfície, respectivamente.

As equações de equilíbrio no elemento são formuladas pelo princípio da mínima energia potencial total, Equação (31):

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} \{u_e\}^T [K_e] \{u_e\} - \{u_e\}^T \{F_e\} \right) = 0 \quad (31)$$

$$[K_e]\{u_e\} - \{F_e\} = 0$$

A montagem das matrizes de rigidez de todos os elementos, assim como os vetores de deslocamentos nodais e forças nodais levam à equação de equilíbrio global da estrutura, Equação (32):

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (32)$$

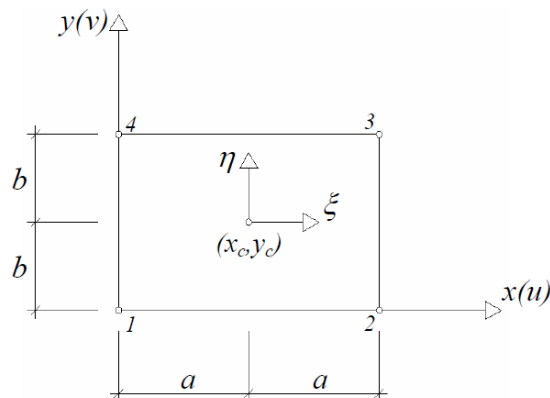
Onde $[K]$ é a matriz de rigidez global, $\{u\}$ e $\{F\}$ são os deslocamentos nodais e forças nodais da estrutura, respectivamente.

Para a solução de problemas no estado plano, podem haver vários tipos de elementos. Considerando a proposta da atual pesquisa, são abordados os elementos retangulares e quadriláteros, de 4 nós.

2.2.4 Retângulo Bilinear

O retângulo bilinear, trata-se de elemento retangular com 4 nós e 2 graus de liberdade (u e v) por nó (ASSAN, 2010). Para este elemento, os deslocamentos são descritos por funções lineares que podem estar atreladas ao sistema de referência cartesiano (x, y) , como mostra a Figura 8.

Figura 8 – Elemento finito bilinear retangular



Fonte: Assan (2010)

As funções que descrevem o campo de deslocamentos $u(x, y)$ e $v(x, y)$ para esse sistema são dados pela Equação (33):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v(x, y) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \end{aligned} \quad (33)$$

Particularizando as igualdades da Equação (33) para cada nó do elemento, é possível determinar através da resolução de um sistema linear com oito equações e

oito incógnitas os coeficientes a_n e b_n . A partir destes coeficientes, as Equações (33) são reescritas na forma das Equações (34) e (35):

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^4 N_j u_j \quad (34)$$

$$v(x, y) = \sum_{j=1}^4 N_j v_j \quad (35)$$

Onde as funções de forma são:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+x)(1-y)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+x)(1+y)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-x)(1+y)$$

A matriz de rigidez do elemento deduzida na Equação (27) fica de acordo com a Equação (36):

$$[K_e] = \iint [B]^T [D] [B] t dx dy \quad (36)$$

A matriz $[B]$ é determinada relacionando os deslocamentos com deformações. Escrevendo as equações (34) e (35) em forma matricial, tem-se a Equação (37):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

Ao substituir a Equação (37) na Equação (15), chega-se à Equação (38):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

O que implica em $[L][N]\{d\} = [B]\{d\}$, fazendo com que a matriz $[B]$ resulte na Equação (39):

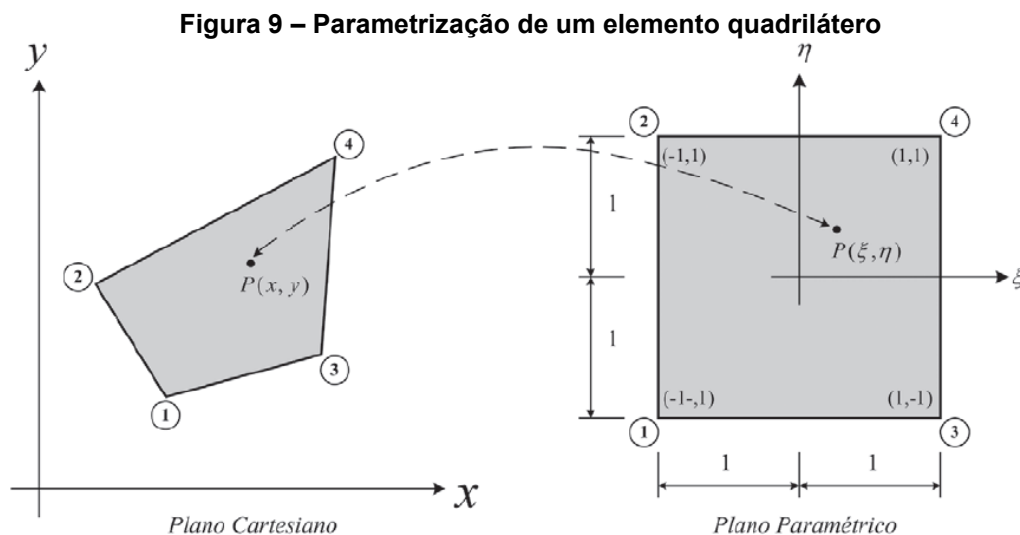
$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Nota-se que a operação $[B]^T[D][B]$ resulta em uma matriz de ordem 8, compatível com a quantidade de graus de liberdade do elemento.

2.2.5 Elementos Isoparamétricos

Muitas vezes os elementos encontram-se distorcidos, com geometrias irregulares em relação aos eixos de coordenadas, o que dificulta a solução das integrais que regem a matriz de rigidez. Para facilitar a resolução, Huebner et al. (2001) afirma que nesses elementos, pode-se mapear a geometria distorcida das coordenadas cartesianas globais em um sistema local de coordenadas, e então integrar as equações resultantes, analítica ou numericamente.

A parametrização dos elementos é realizada através de funções polinomiais equivalentes às utilizadas na aproximação da solução. Por exemplo, para um elemento quadrilátero definido no plano $x - y$ (Figura 9), a aproximação $u(x, y)$ escrita em termos de coordenadas naturais (ξ, η) é dada pela Equação (40).



Fonte: Vaz (2011)

$$\hat{u}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{n=4} N_i(\xi, \eta) u_i \quad (40)$$

Onde $N_i(\xi, \eta)$ é a função de interpolação local (de elemento) do nó i . A geometria é descrita pelas equações (41) e (42):

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n=4} N_i(\xi, \eta) x_i \quad (41)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n=4} N_i(\xi, \eta) y_i \quad (42)$$

Sendo (x_i, y_i) as coordenadas dos nós do elemento.

Os elementos isoparamétricos são a maneira mais usual de formular quadriláteros devido à sua capacidade de modelar elementos distorcidos, não se restringindo, portanto, somente a elementos retangulares.

Considerando o sistema de mapeamento (ξ, η) da Figura 10, introduz-se segundo Griffiths (1994) o conceito da matriz do Jacobiano $[J]$ de acordo com a Equação (43):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Se $|J|$ é o determinante do Jacobiano, tem-se um fator de escala de área para o mapeamento que leva do espaço paramétrico para o espaço cartesiano. Utilizando este conceito e de acordo com a Equação (27), obtém-se na Equação (44) a matriz de rigidez para o quadrilátero de 4 nós:

$$[K_e] = \iint [B]^T [D] [B] t dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| t d\xi d\eta \quad (44)$$

A matriz de rigidez para este elemento é de ordem 8 e resulta em 64 expressões algébricas a serem integradas. A fim de simplificar computacionalmente a solução, visto que as funções apresentam diversas operações polinomiais, normalmente emprega-se técnicas de integração numérica, como a quadratura de Gauss.

2.3 NOTAÇÃO STRAIN GRADIENT

De acordo com Dow (1999), a notação *strain gradient* trata-se de uma notação fisicamente interpretável onde os deslocamentos são descritos explicitamente como funções do movimento de corpo rígido, de deformações e de suas derivadas. Com isso, é possível:

- I. Avaliar a capacidade de modelagem de elementos finitos;
- II. Identificar termos espúrios durante a formulação de elementos finitos, que causam erros de modelagem;
- III. Corrigir erros de modelagem, eliminando *a priori* termos espúrios;
- IV. Reformular o método das diferenças finitas para aplicação a geometrias e malhas irregulares;
- V. Aprimorar procedimentos de análise da existência de erros;
- VI. Desenvolver medidas de erro.

Sendo que os principais tópicos de interesse para este trabalho são I, II e III, e a atual seção apresenta a fundamentação matemática destes tópicos, assim como um panorama geral da notação *strain gradient*.

2.3.1 Uso da Notação *Strain Gradient* no MEF

A primeira referência aos fundamentos que regem a notação *strain gradient* foram apresentados por Dow et al. (1985), onde foi proposto uma abordagem para determinar as propriedades de meio contínuo de uma estrutura composta por padrões repetidos de elementos discretos em termos de coordenadas de deslocamento e rotação de corpo rígido.

Dow e Hoyer (1989) publicaram mais informações referentes à identificação de estados de deformação linearmente independentes de uma dada estrutura. Com isso, os autores apresentam um procedimento para desenvolver as matrizes de rigidez de elementos finitos e os operadores de diferenças finitas.

Tendo em vista as vantagens das abordagens envolvendo a notação fisicamente interpretável, diversos estudos foram realizados no que diz respeito à reformulação do MEF e Método das Diferenças Finitas, incluindo procedimentos de identificação e correção de erros de modelagem (DOW e BYRD, 1988). Posteriormente, pesquisas envolvendo erros de modelagem foram desenvolvidas em diferentes tipos de elementos e estruturas, como é o caso de elementos de placa (DOW e BYRD, 1990) e compósitos laminados (ABDALLA, 1992; ABDALLA e DOW, 1994).

Depois, Dow (1999) publicou um livro com abordagem unificada para o MEF e procedimentos de análise de erros, trazendo uma síntese dos estudos envolvendo a notação fisicamente interpretável, designada como notação *strain gradient*.

Com o uso da notação *strain gradient*, Mohamed et al. (2005) aperfeiçoaram o processo de integração reduzida de um elemento finito isoparamétrico. Assim, aplicaram a quadratura de Gauss para remover a presença de cisalhamento parasítico sem introduzir modos espúrios de energia nula.

Abdalla et al. (2006) usaram a notação *strain gradient* para formular elementos de vigas de compósitos laminados, de forma a identificar e eliminar a presença de cisalhamento parasítico. Já Abdalla et al. (2008), desenvolveram elementos de placa Q4 para análise de compósitos laminados com travamento por cisalhamento corrigido *a priori*.

Mais tarde, Abdalla et al. (2016) formularam elementos *serendipity* de placa, livre de *shear locking* e de modos espúrios de energia nula. Em seguida, os autores realizaram uma avaliação das características de eficiência e convergência de um elemento finito de placa Q4 na análise de compósitos laminados (ABDALLA et al., 2017). E por fim, estudaram erros de modelagem no elemento de placa Mindlin de 8 nós (ABDALLA et al., 2020), sendo esta a publicação mais recente até o presente momento que faz uso da notação *strain gradient*.

Ressalta-se que todos os trabalhos supracitados apresentam vantagens acerca da notação *strain gradient* e mostram uma série de diferentes aplicações que são possíveis principalmente devido à característica fisicamente interpretável da notação. Além disso, não há ainda publicações a respeito da notação *strain gradient* na análise dinâmica de estruturas planas, conforme discorre o item 2.4.

2.3.2 Funções Aproximadoras de um Elemento Finito *Strain Gradient*

Conforme exposto nas seções anteriores, as funções aproximadoras de um elemento finito bidimensional qualquer são descritas por um polinômio de Newton, de acordo com as Equações (45):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + \dots \\ v(x, y) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 + b_7x^3 + b_8x^2y + b_9xy^2 + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Onde a quantidade de termos e o grau do polinômio dependem do número de graus de liberdade do elemento.

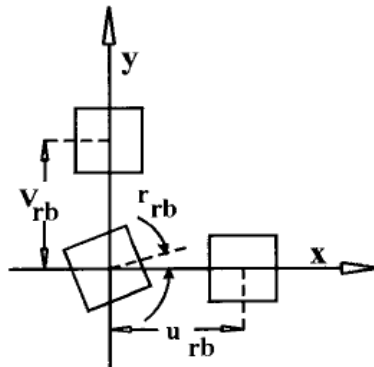
Segundo Dow (1999), esta é a forma geral dos polinômios de deslocamentos do elemento finito. Os coeficientes contidos nestes polinômios não evidenciam explicitamente o sistema físico do elemento, devido à sua natureza arbitrária.

Para que as equações de deslocamento do elemento sejam escritas em função de termos fisicamente interpretáveis, os movimentos de corpo rígido podem ser expressos pela translação horizontal u_{rb} na direção x , translação vertical v_{rb} na direção y , e rotação de corpo rígido r_{rb} , conforme a Equação (46):

$$r_{rb} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (46)$$

A Figura 10 exibe os movimentos de corpo rígido de um elemento quadrilátero.

Figura 10 – Movimentos de corpo rígido



Fonte: Dow (1999)

Quanto às deformações, são derivadas dos deslocamentos e já foram definidas na Equação (13).

$$\varepsilon_x = u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = u_{,y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Assumindo a origem do sistema de coordenadas do elemento no centroide, os coeficientes de ordem zero são $u(0,0) = a_1$ e $v(0,0) = b_1$.

Logo, infere-se as Equações (47):

$$(\varepsilon_x)_0 = a_2$$

$$(\varepsilon_y)_0 = b_3$$

$$(\gamma_{xy})_0 = a_3 + b_2$$

$$(r_{rb})_0 = \frac{1}{2} (b_2 - a_3) \quad (47)$$

Onde os coeficientes de primeira ordem (termos lineares) resultam nas Equações (48):

$$a_2 = (\varepsilon_x)_0$$

$$a_3 = \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} - r_{rb} \right)_0 \quad (48)$$

$$b_2 = \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} + r_{rb} \right)_0 \quad b_3 = (\varepsilon_y)_0$$

Tais termos correspondem aos três estados de deformação constante e de rotação de corpo rígido.

De modo semelhante, os coeficientes de segunda ordem (termos quadráticos) são determinados pela primeira derivada das componentes de deformações em respeito às direções x e y , exibidos nas Equações (49):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,x} &= \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \varepsilon_{x,y} &= \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon_{y,x} &= \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} & \varepsilon_{y,y} &= \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy,x} &= \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \gamma_{xy,y} &= \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (49)$$

E os coeficientes de segunda ordem são exibidos nas Equações (50):

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{(\varepsilon_{x,x})_0}{2} & a_5 &= (\varepsilon_{x,y})_0 & a_6 &= \frac{(\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x})_0}{2} \\ b_4 &= \frac{(\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x})_0}{2} & b_5 &= (\varepsilon_{y,x})_0 & b_6 &= \frac{(\varepsilon_{y,y})_0}{2} \end{aligned} \quad (50)$$

Os seis coeficientes dos termos de segunda ordem são funções das primeiras derivadas das componentes de deformação, ou segunda derivada das componentes de deslocamento. Estes termos representam as variações lineares das deformações em relação à distância da origem local.

A obtenção dos coeficientes de terceira ordem se dá pela segunda derivada das componentes de deformação, e assim sucessivamente.

A Figura 11 indica os coeficientes até a quarta ordem das funções de deslocamento bidimensional.

Figura 11 – Coeficientes até a quarta ordem das funções de deslocamento bidimensional

i	Termo	a_i para $u(x, y)$	b_i para $v(x, y)$
1	1	$(u)_0$	$(v)_0$
2	x	$(\varepsilon_x)_0$	$(\gamma_{xy}/2 + r)_0$
3	y	$(\gamma_{xy}/2 - r)_0$	$(\varepsilon_y)_0$
4	x^2	$(\varepsilon_{x,x}/2)_0$	$((\gamma_{xy,x} - \varepsilon_{x,y})/2)_0$
5	xy	$(\varepsilon_{x,y})_0$	$(\varepsilon_{y,x})_0$
6	y^2	$((\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x})/2)_0$	$(\varepsilon_{y,y}/2)_0$
7	x^3	$(\varepsilon_{x,xx}/6)_0$	$((\gamma_{xy,xx} - \varepsilon_{x,xy})/6)_0$
8	x^2y	$(\varepsilon_{x,xy}/2)_0$	$(\varepsilon_{x,xx}/2)_0$
9	xy^2	$(\varepsilon_{x,yy}/2)_0$	$(\varepsilon_{x,xy}/2)_0$
10	y^3	$((\gamma_{xy,yy} - \varepsilon_{y,xy})/6)_0$	$(\varepsilon_{x,yy}/6)_0$
11	x^4	$(\varepsilon_{x,xxx}/24)_0$	$((\gamma_{xy,xxx} - \varepsilon_{x,xxxy})/24)_0$
12	x^3y	$(\varepsilon_{x,xxxy}/6)_0$	$(\varepsilon_{y,xxx}/6)_0$
13	x^2y^2	$(\varepsilon_{x,xyy}/4)_0$	$(\varepsilon_{y,xxxy}/4)_0$
14	xy^3	$(\varepsilon_{x,yyy}/6)_0$	$(\varepsilon_{y,xyy}/6)_0$
15	y^4	$((\gamma_{xy,yyy} - \varepsilon_{y,xyy})/24)_0$	$(\varepsilon_{x,xx}/24)_0$

Fonte: Dow (1999)

De modo a verificar a completa expansão polinomial de uma determinada ordem, pode-se representar as equações de deslocamentos e deformações por meio da expansão em série de Taylor, ao realizar sucessivas integrações por partes do funcional que descreve o comportamento da deformação, segundo a Equação (51):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x - x_0)^n \quad (51)$$

Deste modo, a expansão em série de Taylor para as deformações fica de acordo com a Equação (52):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y) &= (\varepsilon_x)_0 + (\varepsilon_{x,x})_0 x + (\varepsilon_{x,y})_0 y + \frac{1}{2} (\varepsilon_{x,xx})_0 x^2 + (\varepsilon_{x,xy})_0 xy + \dots \\ \varepsilon_y(x, y) &= (\varepsilon_y)_0 + (\varepsilon_{y,x})_0 x + (\varepsilon_{y,y})_0 y + \frac{1}{2} (\varepsilon_{y,xx})_0 x^2 + (\varepsilon_{y,xy})_0 xy + \dots \\ \gamma_{xy}(x, y) &= (\gamma_{xy})_0 + (\gamma_{xy,x})_0 x + (\gamma_{xy,y})_0 y + \frac{1}{2} (\gamma_{xy,xx})_0 x^2 + (\gamma_{xy,xy})_0 xy + \dots \end{aligned} \quad (52)$$

A expansão em série de Taylor para as deformações pode ser usado como referência para verificar se as deformações do elemento contemplam os termos corretos de deformações de uma dada ordem do polinômio.

2.3.2.1 Funções aproximadoras do quadrilátero de 4 nós

Tendo conhecimento dos coeficientes arbitrários que compõem as funções aproximadoras de deslocamento de um elemento finito qualquer, basta apenas as funções de um elemento específico para que seja formulado expressões de deslocamentos e deformações na notação *strain gradient*.

Para o elemento Q4, as funções aproximadoras em notação convencional são dadas pelas Equações (53):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v(x, y) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \end{aligned} \quad (53)$$

A escolha do polinômio de 2ª ordem xy ao invés de x^2 ou y^2 é feita para que haja simetria do campo de deslocamentos em ambas direções.

Substituindo os coeficientes arbitrários pelos coeficientes em notação *strain gradient*, temos a Equação (54):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (u_{rb})_0 + (\varepsilon_x)_0x + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} - r_{rb}\right)_0 y + (\varepsilon_{x,y})_0xy \\ v(x, y) &= (v_{rb})_0 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} + r_{rb}\right)_0 x + (\varepsilon_y)_0y + (\varepsilon_{y,x})_0xy \end{aligned} \quad (54)$$

Nota-se que os coeficientes em notação *strain gradient* podem ser fisicamente interpretados, onde $(\varepsilon_{x,y})_0$ representa a variação linear de $(\varepsilon_x)_0$ na direção y . Este padrão de deformação é equivalente à deformação apresentada em um elemento fletido por um momento constante. Então, este termo pode ser interpretado como um termo de deformação à flexão.

As funções aproximadoras das deformações ficam conforme a Equação (55):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (\varepsilon_x)_0 + (\varepsilon_{x,y})_0y \\ \varepsilon_y &= (\varepsilon_y)_0 + (\varepsilon_{y,x})_0x \\ \gamma_{xy} &= (\gamma_{xy})_0 + (\varepsilon_{x,y})_0x + (\varepsilon_{y,x})_0y \end{aligned} \quad (55)$$

As expressões de deformação normal ε_x e ε_y representam corretamente a deformação do elemento de acordo com a expansão da série de Taylor, mostrada na Equação (52), embora haja somente um termo de deformação linear. Neste caso, trata-se de um polinômio de primeira ordem incompleto, onde os termos presentes nas expressões são corretos.

Entretanto, a deformação por cisalhamento, ou, distorção angular, contém dois termos incorretos. Os termos de deformação normal $(\varepsilon_{x,y})_0$ e $(\varepsilon_{y,x})_0$ indicam

acoplamento incorreto na representação da deformação por cisalhamento, pois esta independe de deformações normais. Estes termos, portanto, são termos de cisalhamento parasítico e ocasionam o supracitado erro conhecido como *shear locking* (DOW e BYRD, 1988).

Portanto, a deformação por cisalhamento pode ser reescrita eliminando os termos espúrios, como mostra a Equação (56):

$$\gamma_{xy} = (\gamma_{xy})_0 \quad (56)$$

A identificação dos termos espúrios é possível devido à interpretação física das expressões de deformações, proporcionada pela notação *strain gradient*.

2.3.3 Formulação da Matriz de Rigidez Elemento Q4

A partir das expressões que regem o campo de deslocamentos e deformações do elemento, a construção da matriz de rigidez em notação *strain gradient*, de acordo com Dow (1999), pode ser resumida às seguintes etapas:

1. Formulação da expressão da energia de deformação;
2. Integração dos termos da energia de deformação;
3. Formulação das coordenadas de transformação;
4. Formulação da Matriz de Rigidez.

Apresenta-se nesta seção o desenvolvimento da matriz de rigidez para o Estado Plano de Tensões, sendo que para o Estado Plano de Deformações o procedimento é análogo, com a única mudança a ser observada na matriz constitutiva.

2.3.3.1 Energia de deformação

As expressões de deformações mostradas na Equação (55) podem ser escritas em forma matricial, como na Equação (57):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_{rb})_0 \\ (v_{rb})_0 \\ (r_{rb})_0 \\ (\varepsilon_x)_0 \\ (\varepsilon_y)_0 \\ (\gamma_{xy})_0 \\ (\varepsilon_{x,y})_0 \\ (\varepsilon_{y,x})_0 \end{Bmatrix} = [T]\{\varepsilon_{sg}\} \quad (57)$$

Onde $[T]$ é a matriz de transformação das deformações elásticas à base do contínuo e $\{\varepsilon_{sg}\}$ representa as deformações expressas em quantidades *strain gradient*, que formam a base cinemática que o elemento pode representar. Os termos em destaque, referem-se aos termos espúrios.

A aproximação discreta da energia de deformação U em quantidades *strain gradient* como variáveis independentes são indicadas pela Equação (58).

$$U = \frac{1}{2} \{\varepsilon_{sg}\}^T [\bar{U}] \{\varepsilon_{sg}\} \quad (58)$$

A matriz $[\bar{U}]$ pode ser interpretada como uma matriz que quantifica as quantidade de energia de deformação associadas às coordenadas *strain gradient* do elemento finito, de acordo com a Equação (59).

$$[\bar{U}] = \int_V [T]^T [D][T] dV \quad (59)$$

Para desenvolver a energia de deformação do quadrilátero sem a presença do cisalhamento parasítico, pode-se remover *a priori* os termos espúrios x e y em destaque na terceira linha da matriz $[T]$, de forma a escrever a matriz de transformação corrigida. Neste caso, porém, o erro será mantido para que possa ser visualizado os efeitos do mesmo na energia de deformação do elemento.

As componentes *strain gradient* podem ser vistas como “coordenadas generalizadas”. E a partir deste ponto já podem ser notadas as diferenças entre o procedimento convencional de formulação de elementos finitos e a abordagem por meio da notação *strain gradient*.

Com isso, a forma expandida da matriz $[\bar{U}]$ resulta na Equação (60):

$$\bar{U} = \int_V \begin{bmatrix} [T_0]^T [D][T_0] & [T_0]^T [D][T_\varepsilon] \\ [T_\varepsilon]^T [D][T_0] & [T_\varepsilon]^T [D][T_\varepsilon] \end{bmatrix} dV \quad (60)$$

Onde somente a partição \bar{U}_{22} não resulta em zero, já que $[T_0]$ é uma matriz nula. Realizando as operações matriciais e integrando em uma área de espessura t constante, esta parte resulta na Equação (61):

$$\bar{U}_{22} = \int_V \left(\frac{tE}{1-\nu^2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y & 0 & x \\ 0 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} dV$$

$$\bar{U}_{22} = \frac{tE}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} I_1 & \nu I_1 & 0 & I_3 & \nu I_2 \\ \nu I_1 & I_1 & 0 & \nu I_3 & I_2 \\ 0 & 0 & \alpha I_1 & \alpha I_2 & \alpha I_3 \\ I_3 & \nu I_3 & \alpha I_2 & (I_6 + \alpha I_4) & (\nu + \alpha) I_5 \\ \nu I_2 & I_2 & \alpha I_3 & (\nu + \alpha) I_5 & (I_4 + \alpha I_6) \end{bmatrix} \quad (61)$$

Onde:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_A dA & I_2 &= \int_A x dA & I_3 &= \int_A y dA \\ I_4 &= \int_A x^2 dA & I_5 &= \int_A xy dA & I_6 &= \int_A y^2 dA \\ \alpha &= \frac{1-\nu}{2} \end{aligned}$$

Os termos espúrios contidos na Energia de Deformação são αI_4 , αI_5 e αI_6 . Quando é efetuada a multiplicação matricial $\{\varepsilon_{sg}\}^T \bar{U} \{\varepsilon_{sg}\}$, estes termos passam a multiplicar as deformações $(\varepsilon_{x,y})_0$ e $(\varepsilon_{y,x})_0$, que são lineares.

Com a remoção destes termos, a expressão é resumida na Equação (62):

$$\bar{U}_{22} = \frac{tE}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} I_1 & \nu I_1 & 0 & I_3 & \nu I_2 \\ \nu I_1 & I_1 & 0 & \nu I_3 & I_2 \\ 0 & 0 & \alpha I_1 & \alpha I_2 & \alpha I_3 \\ I_3 & \nu I_3 & \alpha I_2 & I_6 & \nu I_5 \\ \nu I_2 & I_2 & \alpha I_3 & \nu I_5 & I_4 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Caso estes termos tivessem sido eliminados *a priori* na Equação (57), a expansão da energia de deformação já teria resultado na Equação (61), ao invés da Equação (62).

Uma importante característica desta expressão, segundo Dow (1999), é que apenas seis integrais são efetuadas para formular a matriz de rigidez do quadrilátero de 4 nós. Nota-se que as integrais em questão referem-se à área, momentos estáticos e momentos de inércia do elemento. O pequeno número e simplicidade dos integrandos contidos nas integrais significa que não é necessário efetuar transformações de mapeamento como ocorre nos elementos isoparamétricos.

Caso a origem do sistema de coordenadas esteja no centroide do elemento, as integrais I_2 e I_3 , referentes aos momentos estáticos, resultam sempre em zero, fazendo com que a Equação (62) seja simplificada à Equação (63):

$$\bar{U}_{22} = \frac{tE}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} I_1 & \nu I_1 & 0 & 0 & 0 \\ \nu I_1 & I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_6 & \nu I_5 \\ 0 & 0 & 0 & \nu I_5 & I_4 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Desta forma, a quantidade de integrais reduz-se à quatro, podendo estas serem calculadas por integração direta em caso de elementos retangulares, ou aplicando-se o Teorema de Green para quaisquer formas de quadriláteros.

Enfatiza-se ainda, que os integrandos são sempre os mesmos, alterando somente os limites de integração de acordo com as coordenadas nodais do elemento. Logo, as integrais podem ser resolvidas previamente por manipulação simbólica, de modo a diminuir operações numéricas e simplificar o cálculo da matriz de rigidez.

2.3.3.2 Matriz de rigidez

A transformação necessária para escrever as expressões da energia de deformação em termos de coordenadas nodais é formada utilizando a função de interpolação dada na Equação (64):

$$\{d\} = [\emptyset]\{\varepsilon_{sg}\} \quad (64)$$

A matriz $[\emptyset]$ é descrita pela Equação (65):

$$[\emptyset] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & 0 & x_1 y_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & 0 & x_1 y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & 0 & x_2 y_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & 0 & x_2 y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & 0 & y_3 & 0 & x_3 y_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 & 0 & y_3 & 0 & x_3 y_3 \\ 1 & 0 & x_4 & 0 & y_4 & 0 & x_4 y_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 & 0 & y_4 & 0 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Onde $\{d\}$ é o vetor de deslocamentos nodais e $[\emptyset]$ é a matriz de transformação entre coordenadas nodais e as coordenadas *strain gradient*. A matriz $[\emptyset]$ contém os vetores linearmente independentes que representam matematicamente a configuração deformada do elemento finito associado a cada estado de deformação presente em ε_{sg} .

Com a disponibilidade da expressão de energia de deformação em termos das variáveis escritas em notação *strain gradient* para deslocamentos nodais, é possível formular a expressão da energia de deformação, segundo a Equação (66):

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [\emptyset]^{-T} \bar{U} [\emptyset]^{-1} \{d\} \quad (66)$$

A matriz de rigidez do elemento pode ser extraída segundo o princípio da mínima energia potencial, resultando na Equação (67):

$$[K_e] = [\emptyset]^{-T} \bar{U} [\emptyset]^{-1} \quad (67)$$

2.4 ANÁLISE DINÂMICA PELO MEF

Estudos de dinâmica são realizados desde os séculos XVII e XVIII por meio da investigação do movimento oscilatório de pêndulos, onde destaca-se contribuições de Galilei, Newton, Bernoulli, D’Alembert e Euler. Entretanto, foi no final do século XIX e principalmente no século XX que problemas de dinâmica estrutural passaram a ser amplamente desenvolvidos e aplicados, onde tiveram notoriedade os trabalhos de Rayleigh, que introduziu o efeito de inércia rotacional à teoria de vigas de Euler-Bernoulli, e Timoshenko, que acrescentou efeitos de cisalhamento (SHANG, 2016). A teoria de vigas de Timoshenko tornou-se relevante especialmente em problemas cuja seção transversal da viga é elevada, diferente da teoria de Euler-Bernoulli, que melhor se adequa a problemas de vigas longas.

Análises dinâmicas no plano bidimensional, por sua vez, tornaram-se mais recorrentes com o desenvolvimento do MEF. Até então, era comum o emprego de soluções via equações de onda, métodos semianalíticos e numéricos como diferenças finitas ou problemas de valor de contorno (FORSYTHE, 1954; HUBBARD, 1961; REID e WALSH, 1965). Como não há soluções exatas para problemas de vibrações de estruturas em estado plano, várias abordagens foram propostas na tentativa de chegar a resultados acurados.

Leissa (1969) publicou o livro *Vibration of Plates* que traz uma revisão bibliográfica de pesquisas sobre vibração de estruturas planas com diferentes formatos: circular, elíptica, retangular, triangular, espessura variável e demais tipos de geometrias. Mais tarde, publicou um artigo sobre vibração livre de chapas retangulares sob diferentes condições de contorno (LEISSA, 1973).

Carr (1970) pesquisou o efeito do cisalhamento na flexão e da inércia rotacional nas frequências naturais de vigas altas. Posteriormente, outros pesquisadores usaram as soluções analíticas fornecidas pelo autor para comparar com as frequências naturais de vigas no estado plano de tensões (NELSON, 1978; CHEUNG et al., 2000; LEUNG et al., 2004).

Após uma série de testes experimentais e simulações numéricas realizadas na NASA, Veletsos et al. (1972) publicaram diversos casos de vibrações de arcos circulares em estado plano.

Gupta (1978) desenvolveu expressões de elementos finitos dinâmicos para vibração livre de estruturas bidimensionais, onde atingiu resultados acurados de

frequências naturais e modos de vibração para uma chapa quadrada engastada em uma das bordas. Tal caso foi analisado por Zhao e Steven (1996), Leung et al. (2004), e Shang et al. (2017).

A partir do MEF, extensivas aplicações de dinâmica em estruturas planas foram realizadas. Guan-Liang et al. (1991) por exemplo, desenvolveram um modelo de elementos finitos para estudar a vibração de chapas com a presença de trincas. Valliappan e Zhao (1993) estudaram a resposta dinâmica de barragens considerando a interação estrutura-fluido-fundação, um problema em estado plano de deformações. Já Nicolae e Reynouard (2000) por sua vez, propuseram um modelo constitutivo para prever a resposta cíclica de estruturas de concreto armado em estado plano de tensões.

Algumas pesquisas mais recentes que podem ser destacadas são: vibração livre de discos circulares planos (BASHMAL et al., 2009); análise de vibração de chapas com enrijecedores pelo MEF (HAMEDANI et al., 2012); aplicação de modelos não lineares em paredes de concreto (SONG e HARMON, 2013); efeitos de mecanismos de amortecimento em paredes de contraventamento acopladas (FARIDANI e CAPISONI, 2016); e vibração de chapas anulares com restrições elásticas e material graduado (LYU et al., 2017).

Além de formulações convencionais do MEF, diversas outras foram desenvolvidas e usadas em análises dinâmicas de estruturas planas. Nagashima (1999) e Gu e Liu (2001) aplicaram métodos sem malhas em análises estáticas e dinâmicas, Liu et al. (2009) usaram ES-FEM (*Edge-Based Smoothed Finite Element Method*) em problemas de sólidos bidimensionais, e Nguyen-Thanh et al. (2010), propuseram o Método de Elementos Finitos Alternativo Alfa (A α FEM) para vibração livre e forçada de estruturas com malhas triangulares. Nestes artigos, os autores calculam, dentre vários problemas, as frequências naturais e modos de vibração de uma viga em balanço, onde comparam as soluções aproximadas da viga em estado plano com as soluções exatas de viga de Euler-Bernoulli.

Cita-se como exemplo ainda, o Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH), que permite a formulação de elementos de alta ordem por meio da introdução de expressões hierárquicas nas funções de forma. Após isso, formulou-se o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), onde adiciona-se funções de enriquecimento para melhorar a qualidade das aproximações do elemento. Shang et al. (2017) aplicaram o MEFG para analisar a vibração livre de estruturas em estado

plano de tensões com malhas distorcidas. Depois, Shang et al. (2018) estudaram o MEF com enriquecimento trigonométrico na dinâmica de modelos elastoplásticos bidimensionais.

Quanto à notação *strain gradient*, embora haja diversos estudos mostrando sua eficácia na determinação de tensões e deslocamentos, não há publicações aplicando-a em análises dinâmicas de estruturas planas. Na análise dinâmica de uma forma geral, o primeiro e até então único trabalho é ainda recente, onde a notação *strain gradient* foi usada por Horta (2019) para determinar as frequências naturais e modos de vibração em vigas de Timoshenko.

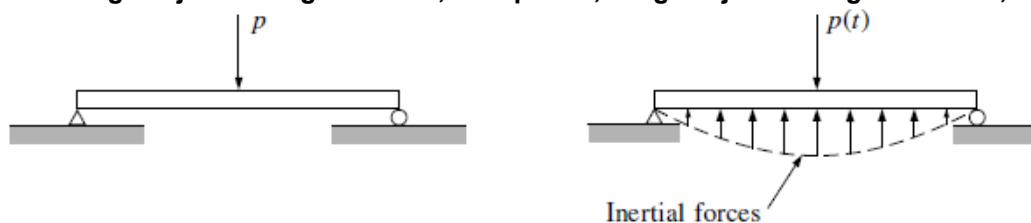
Enfatiza-se então a importância de formular elementos planos pela notação *strain gradient*. Como visto, há variados tipos de aplicações envolvendo análises dinâmicas pelo MEF, e combinando as potencialidades da notação *strain gradient* demonstradas na seção 2.3, novas abordagens são possíveis. Com isso em mente, os tópicos subsequentes sintetizam os principais temas associados às pesquisas desenvolvidas por este trabalho.

2.4.1 Ações dinâmicas

Ações de natureza dinâmica diferem das estáticas em duas importantes contrapartidas, mencionam Clough e Penzien (2003). A primeira diferença a ser notada é, por definição, a variação temporal no problema. Tanto as ações quanto a resposta da estrutura variam em função do tempo em problemas dinâmicos, o que não implica em uma solução única, como ocorre em problemas estáticos.

A segunda principal distinção é ilustrada na Figura 12. Se uma viga simples está sujeita a uma carga estática p , seus esforços internos dependem somente desta carga e podem ser computados estabelecendo princípios de equilíbrios de forças. Por outro lado, se a carga $p(t)$ é aplicada dinamicamente, os deslocamentos resultantes na viga não dependerão apenas desta carga mas também de forças inerciais que se opõem às acelerações produzidas.

Figura 12 – Viga sujeita a carga estática, à esquerda, e viga sujeita a carga dinâmica, à direita



Fonte: Clough e Penzien (2003)

Logo, os esforços correspondentes na viga não equilibram apenas a força externa $p(t)$ mas também as forças inerciais resultantes das acelerações da viga.

Para Cook (2002), as respostas dinâmicas passam a apresentar diferenças consideráveis em relação às respostas estáticas em casos de carregamentos de alta frequência, carregamentos aplicados subitamente (impacto) ou quando os carregamentos são cíclicos com frequência inferior a $\frac{1}{4}$ da menor frequência de vibração da estrutura. Nesta esta última situação, é necessário conhecer a frequência natural de vibração da estrutura, objeto de estudo deste trabalho e que é discutida nas seções adiante.

2.4.2 Equação de movimento

Paz e Leigh (2004) elencam que as características fundamentais de uma estrutura para a análise dinâmica contém os seguintes elementos:

- I. Elementos de massa m representando a massa e parâmetros inerciais da estrutura;
- II. Elementos de rigidez k representando a força elástica restauradora e a energia potencial armazenada na estrutura;
- III. Elementos de amortecimento c representando características friccionais e a energia de dissipação da estrutura;
- IV. Força(s) de excitação $f(t)$ representando cargas externas atuando no sistema estrutural.

Todos estes parâmetros juntos constituem o equilíbrio da estrutura em movimento, constituindo portanto, as equações de movimento.

Para cada força $f(t)$ atuante em uma estrutura, surgem três forças resistentes: força inercial $f_I(t)$, força de amortecimento $f_D(t)$ e força elástica $f_S(t)$, como pode ser visto na Equação (68):

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = f(t) \quad (68)$$

Segundo o princípio de d'Alembert (HUMAR, 2012), a força inercial pode ser resumida como o produto da massa m e aceleração $\ddot{u}(t)$, conforme a Equação (69):

$$f_I(t) = m \ddot{u}(t) \quad (69)$$

Assumindo o mecanismo de amortecimento, a força de amortecimento é expressa como o produto entre a constante de amortecimento c e a velocidade \dot{u} , indicado na Equação (70):

$$f_D(t) = c \dot{u}(t) \quad (70)$$

E a força elástica é o produto da rigidez k e do deslocamento $u(t)$, mostrado na Equação (71):

$$f_S(t) = k u(t) \quad (71)$$

A partir das equações (69), (70) e (71), obtém-se a Equação (72) de movimento do sistema:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = f(t) \quad (72)$$

Geralmente, a estrutura encontra-se em repouso antes de ser excitada dinamicamente, o que implica segundo Chopra (2014) em especificar o deslocamento inicial $u(0)$ e a velocidade inicial $\dot{u}(0)$ no tempo zero, para definir o problema completamente.

2.4.3 Vibração Livre Não Amortecida

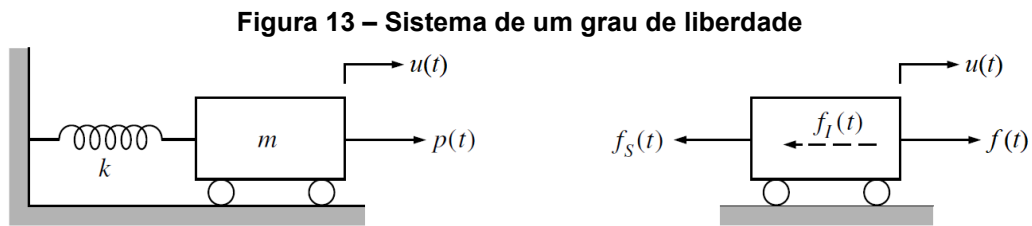
A vibração é descrita por Hibbeler (2013) como sendo o movimento periódico de um corpo ou sistema de corpos conectados deslocados de uma posição de equilíbrio. Para o autor, em geral, há dois tipos de vibração: livre e forçada. A vibração livre ocorre quando após cessada a força $f(t)$, o movimento é mantido por forças restauradoras gravitacionais ou elásticas. Já a vibração forçada, é caracterizada por excitações intermitentes ou periódicas, advindas de agentes externos à estrutura.

Quanto à dissipação de energia, seja por efeitos de atrito interno e externo, ou demais mecanismos, faz com que na prática, a oscilação da estrutura decaia gradualmente. Entretanto, supondo um sistema ideal sem amortecimento, a oscilação continuará indefinidamente, caracterizando um problema de vibração livre não amortecida, que exprimem os estudos aqui realizados.

2.4.3.1 Sistema de um grau de liberdade

A fim de entender e para simplificar a aplicação da equação de movimento em um modelo dinâmico, apresenta-se um sistema de um grau de liberdade.

Tal sistema é representado por um corpo rígido com massa m constante conectado a uma mola sem massa e de rigidez k sobre uma superfície sem atrito. Essa configuração é ilustrada na Figura 13.



Fonte: adaptado de Clough e Penzien (2003)

Se uma força $f(t)$ é aplicada, então resulta em um deslocamento do corpo, $u(t)$, descrito pela equação do movimento. Após cessada a força, o corpo continua a oscilar, tratando-se portanto, de um problema de vibração livre. Desconsiderando efeitos do amortecimento, tem-se então um sistema de um grau de liberdade com vibração livre não amortecida.

A equação do movimento consiste em uma equação diferencial linear de segunda ordem, homogênea com coeficientes constantes. Sua solução, partindo das condições iniciais de repouso, é descrita pela Equação (73), de acordo com Timoshenko (1937).

$$u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \text{sen}(\omega t) + u(0) \text{cos}(\omega t) \quad (73)$$

Onde ω refere-se à frequência angular ou circular de oscilação, dada pela Equação (74):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (74)$$

A frequência de vibração é muitas vezes expressa pela frequência cíclica, baseado na quantidade de ciclos completos que o sistema executa a cada segundo (Hertz), expresso pela Equação (75):

$$f_n = \frac{2\pi}{\omega} \quad (75)$$

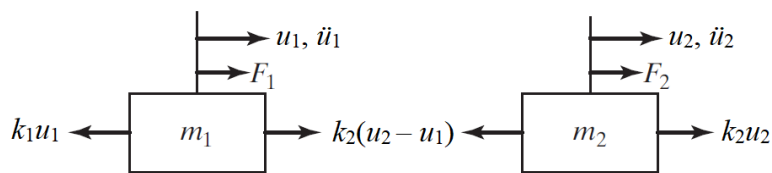
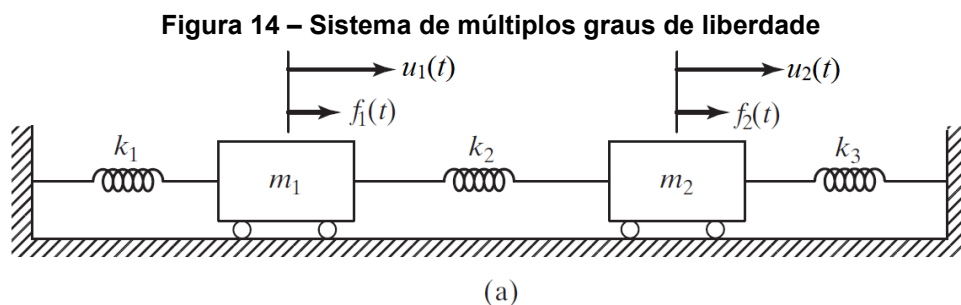
E o período natural de vibração é o tempo de uma oscilação completa do corpo, Equação (76):

$$T_n = \frac{\omega}{2\pi} \quad (76)$$

A solução da equação de movimento do sistema mostra que a função é periódica, com amplitudes senoidal e cossenoidal representadas por $u(0)$ e $\dot{u}(0)/\omega$, respectivamente. E o período, neste caso, indica a distância entre dois pontos adjacentes de cristas ou vales (YANG, 2005).

2.4.3.2 Sistema de múltiplos graus de liberdade

As estruturas de engenharia, no geral, são representadas por sistemas com múltiplos graus de liberdade. Um típico exemplo desse sistema consiste em dois corpos rígidos com massa constante conectado a três amortecedores e três molas, como mostra a Figura 14.



Fonte: adaptado de Rao (2011)

O movimento do sistema é descrito pelos deslocamentos $u_1(t)$ e u_2 , que define as massas m_1 e m_2 em qualquer tempo t das respectivas posições de equilíbrio. As equações de movimento para o sistema são dadas pela Equação (77):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 &= f_1 \\ m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3) u_2 &= f_2 \end{aligned} \quad (77)$$

O sistema pode ser escrito matricialmente como na Equação (78):

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & c_1 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (78)$$

A Equação (78) escrita em sua forma mais compacta é apresentada na Equação (79), tratando-se da equação de movimento para múltiplos graus de liberdade:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\} \quad (79)$$

Onde:

$[M]$ = matriz de massa

$\{\ddot{u}\}$ = vetor de acelerações

$[K]$ = matriz de rigidez

$\{u\}$ = vetor de deslocamentos

$\{f\}$ = vetor de forças externas

Supondo um sistema de vibração livre não amortecida, $\{f\}$ passa a ser um vetor nulo, pois não há presença de forças de excitação, e a Equação (79) reduz-se à Equação (80):

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (80)$$

A Equação (80), advinda do sistema de dois graus de liberdade, pode ser estendida para qualquer sistema com n graus de liberdade.

2.4.4 Análise Modal

Como visto, a estrutura tende a vibrar em função das excitações causadas e de suas propriedades de massa, rigidez e amortecimento. No caso de sistemas com múltiplos graus de liberdade, a estrutura passará a vibrar de diversas formas, assumindo diferentes frequências e modos de vibração.

Após cessado o efeito que causou a oscilação da estrutura, podendo este ser uma força ou deslocamento, a taxa de oscilação livre com que a estrutura continua a vibrar é denominada de frequência natural de vibração. A análise modal determina as frequências naturais de vibração da estrutura e os modos naturais correspondentes.

De acordo com Chopra (2014), as frequências naturais de vibração livre de um sistema não amortecido com n graus de liberdade é descrita matematicamente pela Equação (81):

$$u(t) = \phi_n q_n(t) \quad (81)$$

Onde ϕ_n é a forma de vibração do modo natural n que não varia com o tempo, enquanto $q_n(t)$ é o deslocamento dependente do tempo, descrito pela função harmônica da Equação (82):

$$q_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \text{sen}(\omega_n t) \quad (82)$$

Onde A_n e B_n são constantes que dependem das condições de contorno iniciais. Substituindo a Equação (82) na Equação (81), obtém-se a Equação (83):

$$u(t) = \phi_n [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \text{sen}(\omega_n t)] \quad (83)$$

Ao substituir o deslocamento $u(t)$ da Equação (83) na solução de vibração livre não amortecida apresentada na Equação (80) e sua segunda derivada $\ddot{u}(t)$ multiplicada por ϕ_n , chega-se à Equação (84):

$$(-\omega_n^2 [M] \phi_n + [K] \phi_n) q_n(t) = 0 \quad (84)$$

Considerando o sistema inicialmente em repouso, então $u(t) = 0$, conseqüentemente, $q_n(t) = 0$. Esta é conhecida como solução trivial do problema, e resulta na Equação (85):

$$[K] \phi_n = \omega_n^2 [M] \phi_n \quad (85)$$

Esta equação refere-se ao problema de autovalores e autovetores. A solução trivial $\phi_n = 0$ não é válida, pois implica que não há movimento oscilatório no sistema (CHOPRA, 2014). Portanto, a solução não trivial é descrita pela Equação (86):

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (86)$$

A Equação (86) é conhecida como equação característica.

Após a determinação das frequências naturais, a Equação (85) pode ser resolvida para os modos de vibração. Os modos de vibração ϕ_n podem ser estruturados em uma matriz singular única como mostra a Equação (87):

$$\phi_{jn} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \quad (87)$$

Onde j indica o grau de liberdade, e cada coluna representa um modo natural de vibração. Esta matriz é conhecida como matriz modal para o problema de autovalores.

2.4.5 Condensação Estática

A ideia da condensação estática na análise dinâmica, segundo Alves Filho (2008), é considerar a massa da estrutura concentrada a limitados graus de liberdade. Desta forma, as equações dinâmicas serão reduzidas e só serão contabilizadas forças de inércia onde há massa. Os graus de liberdade escolhidos para concentrar as massas são denominados graus de liberdade *master*, ao passo que os demais não fazem parte das equações dinâmicas e são chamados de graus de liberdade *slave*. O movimento dos graus *slave* está constricto aos graus *master* por meio de equações denominadas *Constraint Equations*.

Este caso particular de Condensação Estática é conhecido como Redução Cinemática, e um dos métodos utilizado para realizar numericamente a redução é a Redução de Guyan.

Na Redução de Guyan, os graus de liberdade *slave* são requeridos para se movimentarem conforme ditado pelos graus *master* e o conteúdo de $[K]$, com inércia ignorada. Somente os GL *master* aparecem no sistema de equações reduzidas, cuja ordem é equivalente ao número de graus *master* (COOK, 2002).

O método parte da Equação (85) de autovalores e autovetores e é particionada conforme os GL *master* (\bar{D}_m) e *slave* (\bar{D}_s), indicado na Equação (88):

$$\begin{pmatrix} [K_{mm} & K_{ms}] \\ [K_{sm} & K_{ss}] \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} [M_{mm} & M_{ms}] \\ [M_{sm} & M_{ss}] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{D}_m \\ \bar{D}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (88)$$

A expressão é particionada de modo a resultar em um problema de autovalor reduzido, conforme a Equação (89):

$$([K_r] - \omega^2 [M_r]) \{\bar{D}_m\} = \{0\} \quad (89)$$

Onde:

$$[K_r] = K_{mm} - K_{ms} K_{ss}^{-1} K_{sm}$$

$$[M_r] = M_{mm} - M_{ms} K_{ss}^{-1} K_{sm} - K_{ms} K_{ss}^{-1} M_{sm} + K_{ms} K_{ss}^{-1} M_{ss} K_{ss}^{-1} K_{sm}$$

2.4.6 Matriz de Massa

As forças que atuam em um corpo podem ser classificadas em forças pontuais, forças de superfície (como a pressão), ou forças de volume, segundo Alves Filho (2008). A força de volume pode ser a força peso, que se distribui ao longo de toda a massa da estrutura, ou a força inercial.

As forças inerciais que atuam no interior dos elementos também podem ser transformadas em forças nodais equivalentes, por intermédio de transformações que permitem aplicar forças pontuais no nós que causariam o mesmo efeito das forças inerciais. Por esse motivo, faz-se necessário conhecer as acelerações internas do elemento e aplicar técnicas de interpolação, semelhante ao processo da análise estática.

A ideia resume-se em utilizar a mesma função de forma que descreve o deslocamento interno do elemento em termos de deslocamentos nodais, para fornecer também a aceleração interna em termos de acelerações nodais. Tal conceito leva à matriz de massa consistente do elemento, que permite considerar nas equações dinâmicas da estrutura o efeito das massas que não estão originalmente concentradas nos nós (ALVES FILHO, 2008).

Assim sendo, a massa da estrutura pode ser representada pela matriz de massa consistente, além da matriz de massa concentrada, que engloba possíveis corpos acoplados a determinados nós da estrutura. E para determinar as frequências naturais de vibração, Hamedani et al. (2011) afirmam que ambas as matrizes de massa concentradas e consistentes podem ser somadas, a fim de serem inseridas na equação característica dos autovalores e autovetores.

2.4.6.1 Matriz de massa concentrada

Uma matriz de massa concentrada para o elemento Q4 pode ser definida inserindo-se um quarto da massa total em cada um dos 8 termos da diagonal da matriz. Cada termo corresponde a um grau de liberdade do elemento, sendo 2 graus de liberdade por nó. Esse procedimento conduz à matriz de massa da Equação (90):

$$[M] = \frac{\rho A t}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (90)$$

Sendo A , a área do elemento e t , a espessura. Como o elemento tem i graus de liberdade por nó, um deslocamento horizontal e outro vertical, a soma das massas m_i em cada direção, tem que ser igual a $m = \rho A t$.

2.4.6.2 Matriz de massa consistente

A matriz de massa consistente de um elemento finito, segundo Boutagoga e Djeghaba (2013), é dada pela Equação (91):

$$[M_e] = \int_V \rho [N]^T [N] dV \quad (91)$$

Sendo $[N]$ a matriz das funções de forma usadas para a interpolação do deslocamento e ρ a massa específica do material.

Aksu (1997) mostra que tal matriz é obtida a partir da expressão de energia cinética, aplicando-se o princípio do trabalho virtual.

Para o caso de elementos distorcidos geometricamente, a matriz de massa consistente é de difícil integração no domínio do elemento, o que leva a aplicar o mesmo mapeamento isoparamétrico usado na matriz de rigidez. Portanto, a matriz de massa consistente para o elemento isoparamétrico é dada pela Equação (92):

$$[M_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho N(\xi, \eta)^T N(\xi, \eta) t \det J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (92)$$

Sauer (1993) menciona que a integração da matriz pela quadratura de Gauss de ordem 2x2 já é suficiente, visto que o aumento da ordem de pontos de Gauss fornecerá o mesmo resultado.

Resolvendo então a Equação (92) para um elemento retangular de largura a e altura b , a Matriz de Massa Consistente resulta na Equação (93):

$$[M_e] = \frac{\rho abt}{36} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (93)$$

Tanto a Equação (91) quanto a Equação (92) resultam na mesma matriz para elementos retangulares, como é de se esperar. Podendo então, esta matriz resultante ser utilizada como padrão na resolução de estruturas planas que envolvem discretizações regulares da malha, em complemento à matriz de massa consistente em coordenadas isoparamétricas sendo aplicada aos elementos com geometrias não regulares.

3 MATERIAL E MÉTODOS

O método de pesquisa utilizado para estudo do problema consiste em simulação computacional, onde foi desenvolvido algoritmo específico para modelar computacionalmente estruturas planas via método dos elementos finitos empregando notação *strain gradient*, a fim de determinar as frequências naturais e modos de vibração das estruturas em estudo.

Este capítulo apresenta as particularidades das estruturas a serem estudadas, hipóteses adotadas para a modelagem e descrição do procedimento utilizado.

Efetua-se a modelagem de diferentes estruturas em estado plano com elementos finitos Q4. A principal importância de realizar o mesmo estudo para problemas com características distintas é verificar quais padrões de comportamento dos resultados se repetem em ambas situações, servindo como forma de validar as análises e verificar os principais aspectos que afetam os efeitos do *shear locking*.

Uma vez que a solução dos problemas estudados requerem análise computacional, efetua-se simulação pelo software Ansys APDL, cujo resultados são comparados com a formulação isoparamétrica desenvolvida em MATLAB sem aplicação de procedimentos de redução de erro, visando verificar se os resultados obtidos pelo software aplicam tais procedimentos. Paralelo a isso, os resultados da formulação isoparamétrica são comparados com a notação *strain gradient* e estudos observados na literatura, como forma de validar a modelagem da mesma, onde posteriormente corrige-se os termos de cisalhamento parasítico.

3.1 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A parte a ser implementada envolve o desenvolvimento de elementos finitos quadriláteros de 4 nós em notação *strain gradient*, tal como toda a parte da análise modal, sendo que o programa existente, PC-FEM, é capaz de performar somente análises de tensões e deformações por elementos finitos com alguns tipos de elementos.

3.1.1 PC-FEM

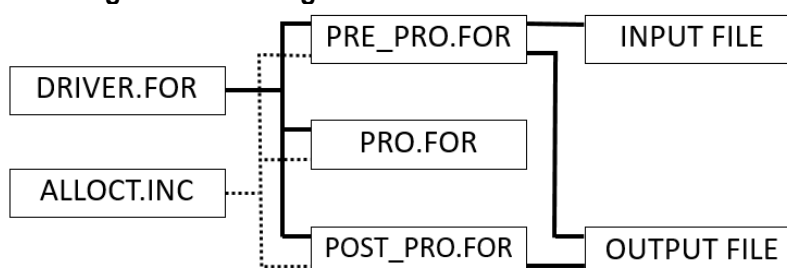
O PC-FEM consiste em um programa de código aberto para simulação em elementos finitos, escrito inicialmente por Dow (1988) em linguagem de programação Fortran 77 na Universidade do Colorado. Devido à sua estrutura modular que permite modificações do código-fonte do programa, adaptações foram realizadas a fim de inserir novos tipos de elementos ou de realizar outros tipos de análises, como é o caso do LAMFEM, programa desenvolvido por Abdalla (1992) para análise de compósitos laminados via método dos elementos finitos utilizando notação *strain gradient*.

A versão atual do PC-FEM soluciona problemas de estado plano de tensões, estado plano de deformações e axisimetria de estática em regime elástico-linear. O programa inclui biblioteca dos seguintes elementos em formulação isoparamétrica: quadrilátero de quatro nós, quadrilátero de nove nós e triângulo de seis nós.

Na sequência, resume-se o principal funcionamento do PC-FEM de acordo com o manual do programa.

O PC-FEM é formado por uma arquitetura modular (Figura 15) que permite ao operador do programa implementar novas sub-rotinas em etapas específicas de uma simulação computacional por meio do MEF.

Figura 15 – Fluxograma das sub-rotinas do PC-FEM

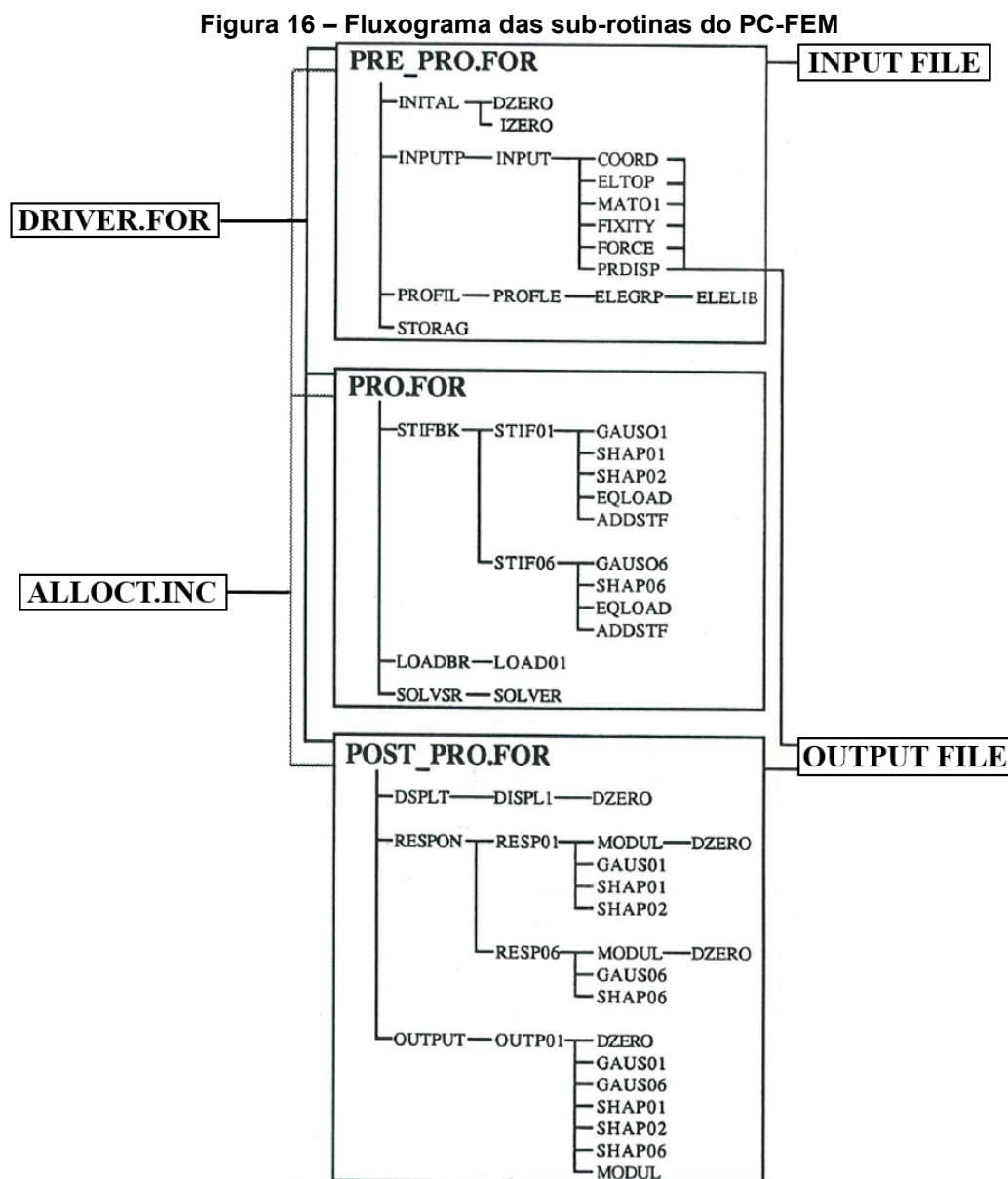


Fonte: Manual do PC-FEM (1988)

O programa consiste em um subprograma principal denominado driver, três subprogramas e um arquivo de alocação de memória. O driver principal do programa, DRIVER.FOR, contém somente declarações que chamam sub-rotinas e não executa computações. O primeiro subprograma, PRE_PRO.FOR, contém as sub-rotinas que controlam os dados de entrada no programa. O subprograma PRO.FOR contém as sub-rotinas que formulam as matrizes de rigidez individuais dos elementos, as combina para criar a matriz de rigidez global e soluciona os sistemas de equações de

movimento. O terceiro subprograma, POST_PRO.FOR, contém sub-rotinas que calculam tensões e deformações nos pontos de Gauss e cria os dados de saída. A comunicação das variáveis são efetuadas pelo arquivo ALLOCT.INC através do uso de declarações “\$include”.

Uma descrição mais detalhada dos passos utilizados para solucionar um problema típico no PC-FEM é dado na Figura 16.



Fonte: Manual do PC-FEM (1988)

1. Para iniciar o programa, o usuário digita 'PCFEM'. Então o driver principal do programa, 'DRIVER.FOR', chama as sub-rotinas 'INITAL' no subprograma 'PRE_PRO.FOR', que inicializa os vetores reais e inteiros a serem utilizados ao longo do programa.

2. Em seguida o subprograma chama a sub-rotina 'INPUTP', contida em 'PRE_PRO.FOR'. Essa sub-rotina leva o usuário à inserção do arquivo de entrada de dados a ser lido pela sub-rotina 'INPUT'. Esta sub-rotina chama uma série de outras sub-rotinas para ler os dados do problema inserido. Após isso, o programa retorna ao driver principal.

3. A sub-rotina 'PROFIL' no subprograma 'PRE_PRO.FOR' é chamada na sequência pelo driver principal. Esta sub-rotina estipula o número de equações que serão necessárias para a análise e configura o sistema de armazenamento. Isso também estabelece o tipo de elemento usado, e após isso o programa retorna novamente ao driver principal.

4. Os requerimentos do armazenamento são checados por meio da sub-rotina 'STORAG' em 'PRE_PRO.FOR'. Esta sub-rotina verifica se o programa designou vetores suficientes para a armazenagem.

5. A formulação da matriz de rigidez é controlada pela sub-rotina 'STIFBK' no subprograma 'PRO.FOR'. Esta sub-rotina direciona o programa à sub-rotina apropriada que irá formular a matriz de rigidez de acordo com o elemento em questão. Estas matrizes então são adicionadas à matriz de rigidez global na sub-rotina 'ADDSTF' e o programa retorna ao driver principal.

6. A formulação do vetor de carregamento é o próximo passo na solução do processo e é acompanhado pela sub-rotina 'LOADBR' no subprograma 'PRO.FOR' que utiliza as informações de entrada para criar um vetor contendo as cargas, assim como as cargas resultantes de um deslocamento prescrito.

7. A solução para o sistema de equações é realizado primeiramente pela sub-rotina 'SOLVSR' no subprograma 'PRO.FOR' que chama a sub-rotina 'SOLVER'. Esta sub-rotina utiliza eliminação de Gauss e retorna ao driver principal.

8. Então o programa chama a subrotina 'DISPLT' no subprograma 'POST_PRO.FOR', cuja finalidade é rearranjar os vetores de deslocamentos em uma matriz que também contém deslocamentos prescritos. Após isso, o programa retorna ao subprograma 'DRIVER.FOR'.

9. As tensões e deformações no ponto de Gauss são computadas pela sub-rotina 'RESPON' no subprograma 'POST_PRO.FOR' onde se executa as sub-rotinas apropriadas ao tipo de elemento em uso e calcula as tensões e deformações.

10. O Passo final na solução do processo é formar os dados de saída. Isto é feito chamando a sub-rotina 'OUTPUT' no programa 'POST_PRO.FOR'. Esta sub-

rotina então chama 'OUTP01' que escreve as informações da análise no dado de saída e após completado este passo o programa retorna ao subprograma 'DRIVER.FOR', onde o programa é finalizado.

Os dados de entrada são divididos em controle de entrada e dados do problema onde cada arquivo de entrada possui as seguintes informações:

- Cabeçalho
- Parâmetros de controle de entrada
- Topologia do elemento
- Restrições cinemáticas nodal
- Forças nodais prescritas
- Deslocamentos nodais prescritos
- Coordenadas nodais
- Dados de agrupamento do material
- Declarações que finalizam o processo de entrada

3.1.2 Algoritmo de Análise Dinâmica

Conforme mencionado anteriormente, o PC-FEM é construído em uma estrutura que permite ao usuário acessar os códigos-fonte e modificá-los. Com base nisso, foi desenvolvido algoritmos capazes de inserir as equações de análise dinâmica apresentadas na pesquisa a fim de simular as estruturas em questão.

Na estrutura do PC-FEM, pretende-se adicionar a matriz de rigidez do elemento Q4 em notação *strain gradient*, e por meio da implementação da análise dinâmica no programa, inserir os novos parâmetros de análise, além de implementar a solução do problema de autovalores e autovetores para auferir as frequências naturais e modos de vibração da estrutura.

O programa segue uma rotina descrita pelos seguintes passos:

1. Construção das matrizes de rigidez e massa de cada elemento;
2. Conectividade das matrizes;
3. Matriz de rigidez e massa global da estrutura;
4. Sistema de equações dinâmicas;
5. Frequências naturais de vibração da estrutura.

As sequências são descritas brevemente nos tópicos seguintes.

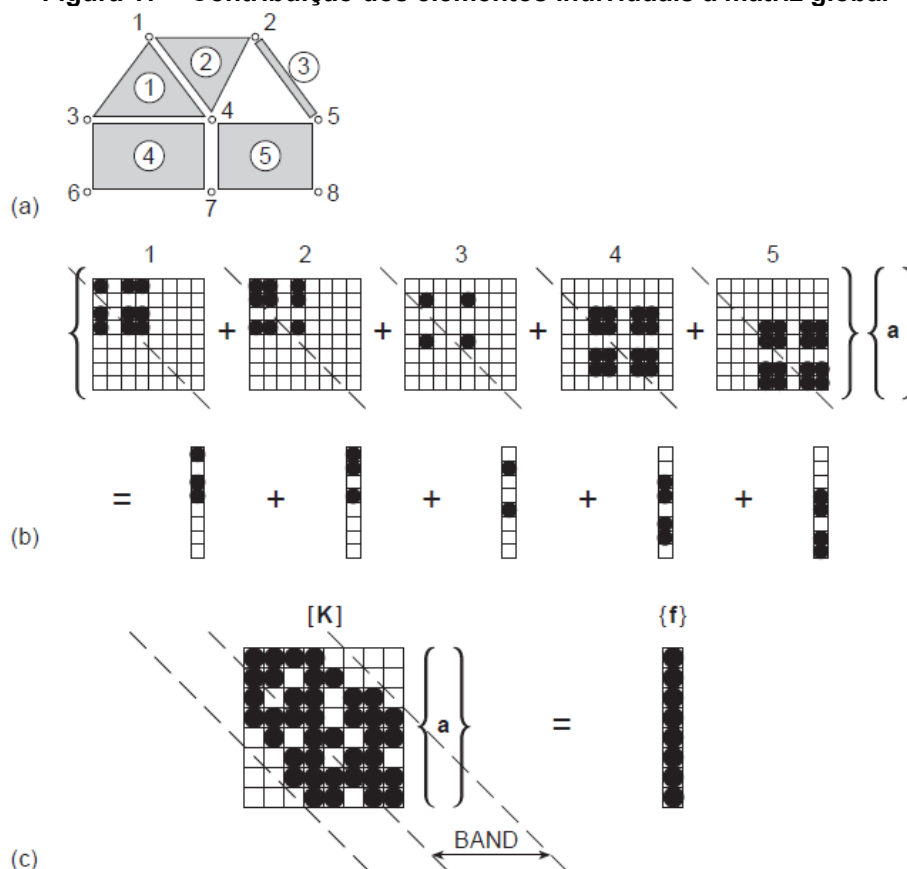
3.1.2.1 Obtenção das matrizes de rigidez e massa

O procedimento computacional para formular as matrizes de rigidez e massa de um elemento é semelhante, de modo que o programa seja capaz de identificar a geometria do elemento a partir de suas coordenadas nodais e parâmetros, como módulo de elasticidade, coeficiente de *Poisson*, espessura e massa específica do material.

A conectividade trata-se de transformações criadas para adequar cada elemento ao sistema global, sendo possível somá-los e montar a matriz global da estrutura. Com base nas informações de coordenadas, numeração e condições de contorno de cada nó, é formada a matriz de conectividade, funcionando como uma transformação de ordem e posição do conjunto matricial (Cueva-Zepeda, 2006).

A Figura 17 ilustra um exemplo de contribuição individual de elementos à matriz global.

Figura 17 – Contribuição dos elementos individuais à matriz global



Fonte: Zienkiewicz (2013)

Cada elemento possui suas propriedades particulares e estão conectados a outros elementos pelos seus nós. Por meio da transformação, as matrizes individuais de massa e de rigidez dos elementos são assimiladas a uma matriz maior cuja ordem refere-se à ordem da matriz global conforme a quantidade de graus de liberdade, ao passo que os nós são realocados de acordo com suas posições no sistema global. Desta forma, torna-se possível somar todos os elementos e formar a matriz do sistema global.

Após a transformação do sistema de coordenadas locais do elemento às coordenadas globais, a montagem das matrizes globais de rigidez e massa é realizada por meio de um somatório de todos os elementos em suas respectivas posições nodais.

A matriz de massa global é então apresentada na mesma forma da matriz de rigidez para que haja compatibilidade entre as duas.

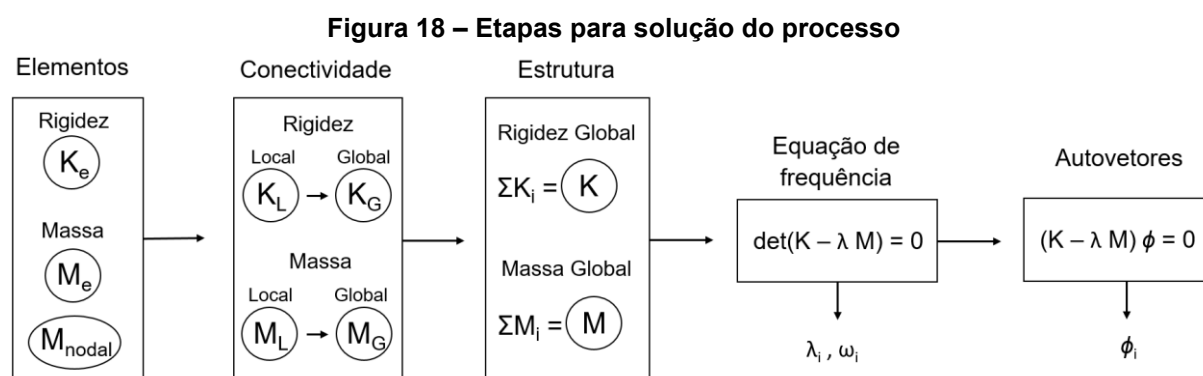
3.1.2.2 Sistema de equações dinâmicas

Com as matrizes de massa e rigidez compatibilizadas, é possível formular a equação que rege o problema de vibração livre da estrutura, descrito na seção 2.4.3.

Com a implementação, a equação modal da dinâmica para vibração livre leva ao problema de autovalores e autovetores, onde calcula-se as frequências naturais e modos de vibração da estrutura.

Resolvido o problema de autovalores e autovetores, encontram-se as frequências naturais associadas a cada modo de vibração da estrutura.

A Figura 18 resume as principais etapas de resolução abordadas pelo processo de solução do problema estrutural.



Fonte: autoria própria

3.2 ESTRUTURAS PLANAS EM ESTUDO

Para averiguar os efeitos decorrentes dos termos de cisalhamento parasítico em ocasiões distintas, simula-se diferentes estruturas em estado plano de tensões. Portanto, cada problema apresenta diferentes geometrias, propriedades de material, discretizações de malha e conseqüentemente, quantidade de graus de liberdade.

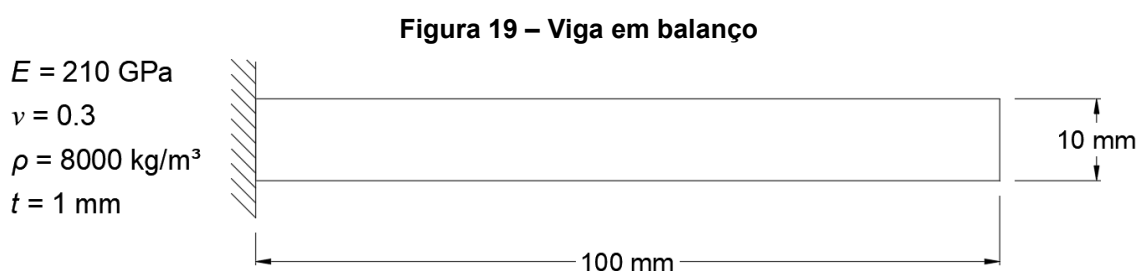
Zhao e Steven (1996) afirmam que não há soluções exatas para problemas de vibração livre de sólidos elásticos bidimensionais. Por isso, uma forma de verificar os valores de frequências naturais determinados por soluções numéricas no estado plano, é modelar estruturas planas com uma dimensão muito superior à outra, cujos resultados podem ser comparados com soluções de estruturas unidimensionais.

Em vista disso, a primeira estrutura modelada trata-se de uma viga longa engastada em uma das bordas. A segunda estrutura, refere-se a uma *shear wall* (parede de cisalhamento) analisada sob a ótica de viga alta. E por fim, a terceira estrutura trata-se de uma chapa quadrada engastada.

Todas análises são efetuadas no regime linear-elástico considerando material homogêneo com comportamento isotrópico.

3.2.1 Viga em Balanço

A primeira estrutura plana a ser estudada refere-se a uma viga em balanço com as dimensões e propriedades do material indicadas na Figura 19.



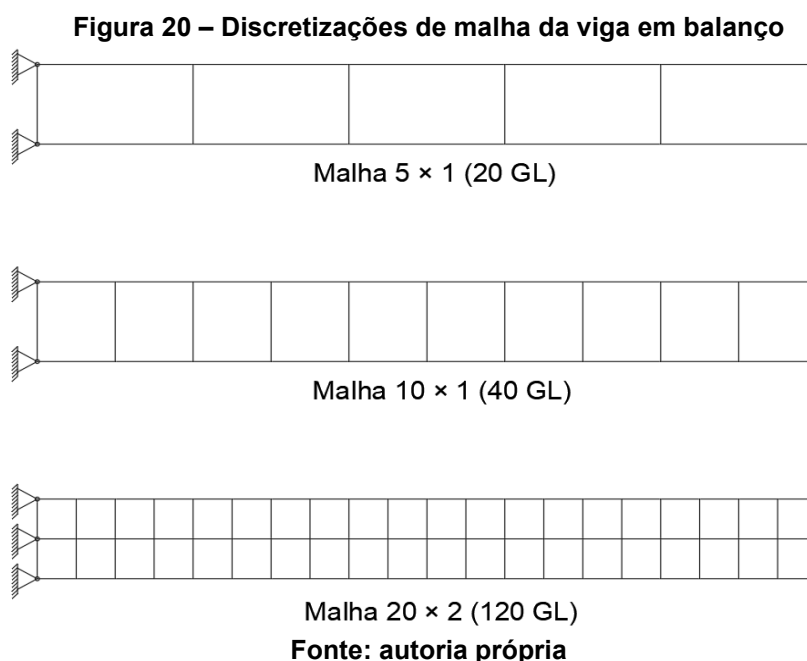
Fonte: autoria própria

Tal problema foi analisado por Nagashima (1999), Gu e Liu (2001), Liu et al. (2009) e Nguyen-Thanh (2010), onde os autores computam as frequências naturais referentes aos oito primeiros modos de vibração da estrutura no estado plano de tensões. Cada autor apresenta diferentes abordagens de elementos finitos, onde

comparam os resultados com soluções refinadas e verificam as frequências fundamentais de vibração no estado plano em relação à solução de vigas de Euler-Bernoulli.

Neste sentido, o presente trabalho utiliza as frequências naturais e modos de vibração fornecidos pelos autores para validar e comparar com os resultados das modelagens do trabalho.

A Figura 20 mostra as discretizações de malha adotadas para as modelagens.



A comparação das frequências fundamentais com a solução analítica de viga de Euler-Bernoulli visam validar as implementações efetuadas no trabalho. Entretanto, para as demais frequências naturais, utiliza-se como referência uma malha refinada de 100×10 elementos (2200 GL) para comparar os resultados com um modelo que melhor represente a estrutura no estado plano. Assim, determina-se as frequências naturais dos oito primeiros modos de vibração, quantidade proporcional aos calculados pelos demais autores.

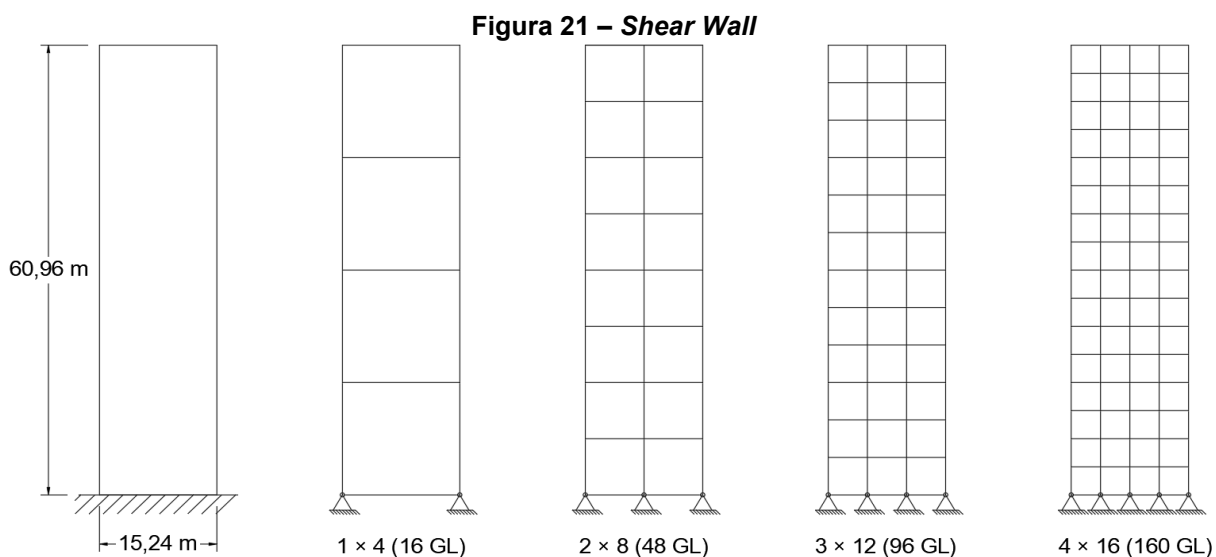
Além disso, para este problema avalia-se o Número de Condição (NC) da matriz de rigidez, calculada pela notação *strain gradient* com a presença de termos espúrios e sem a presença dos mesmos. O motivo de calcular NC somente para a matriz de rigidez deve-se ao fato dos termos espúrios estarem presentes apenas nesta matriz, ao passo que a matriz de massa não se altera nas análises.

De acordo com Cook (2002), matrizes com NC elevado indicam mal condicionamento do problema. Isto significa que o sistema é sensível a pequenas variações nos termos da matriz.

3.2.2 Shear Wall

O exemplo da *shear wall* (parede de cisalhamento) foi proposto inicialmente por Petyt (1992, apud Leung et al., 2004), onde o autor analisa as cinco primeiras frequências naturais de vibração usando diferentes tipos de elementos e tipologias de malhas. Posteriormente, Cheung et al. (2000) aplicaram quadriláteros refinados denominados de RQ6 para computar as três primeiras frequências naturais dos modos de vibração flexionais. E por fim, Leung et al. (2004) utilizaram elementos p trapezoidais de Fourier para determinar as cinco primeiras frequências naturais de vibração da estrutura.

A Figura 21 apresenta as características geométricas da estrutura e as respectivas malhas modeladas pela notação *strain gradient* e formulação convencional de elementos finitos.



Fonte: autoria própria

A estrutura apresenta as seguintes propriedades:

- Espessura: $t = 1$ m;
- Módulo de Elasticidade: $E = 34,474$ GPa;
- Coeficiente de *Poisson*: $\nu = 0,11$;

— Massa específica: $\rho = 568,7 \text{ kg/m}^3$.

Diferente do exemplo de viga longa, onde a dimensão longitudinal é dez vezes superior à transversal, na *shear wall*, a dimensão longitudinal é quatro vezes superior, e a simplificação da teoria de viga de Euler-Bernoulli não mais se adequa ao problema. Por isso, Petyt (2010) e Leung et al. (2004) apresentam as frequências naturais de vibração da estrutura calculadas analiticamente com base nas soluções propostas por Carr (1970), que considera efeitos de inércia rotacional e cisalhamento na flexão para a vibração livre de vigas altas.

Com o objetivo de comparar as modelagens do trabalho com as soluções fornecidas pelos autores, computa-se as mesmas frequências naturais referentes aos primeiros cinco modos de vibração.

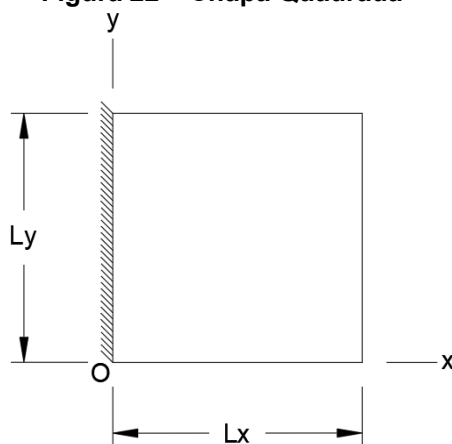
Além disso, neste problema estuda-se a convergência de malha das frequências naturais referentes aos modos flexionais de vibração. O estudo de convergência é realizado nas frequências naturais obtidas a partir das formulações considerando a presença dos termos espúrios, em relação às análises da notação *strain gradient* com eliminação dos termos espúrios. Desta forma, é possível comparar qual solução melhor se aproxima do resultado de referência, na medida em que efetua-se o refino da malha.

3.2.3 Chapa Quadrada

A chapa quadrada foi proposta inicialmente por Gupta (1978), onde foi usado elementos finitos dinâmicos para analisar a vibração livre da estrutura. O problema foi estudado mais tarde por Shang et al. (2017), aplicando o MEEG.

A Figura 22 mostra a estrutura em questão.

Figura 22 – Chapa Quadrada



Fonte: autoria própria

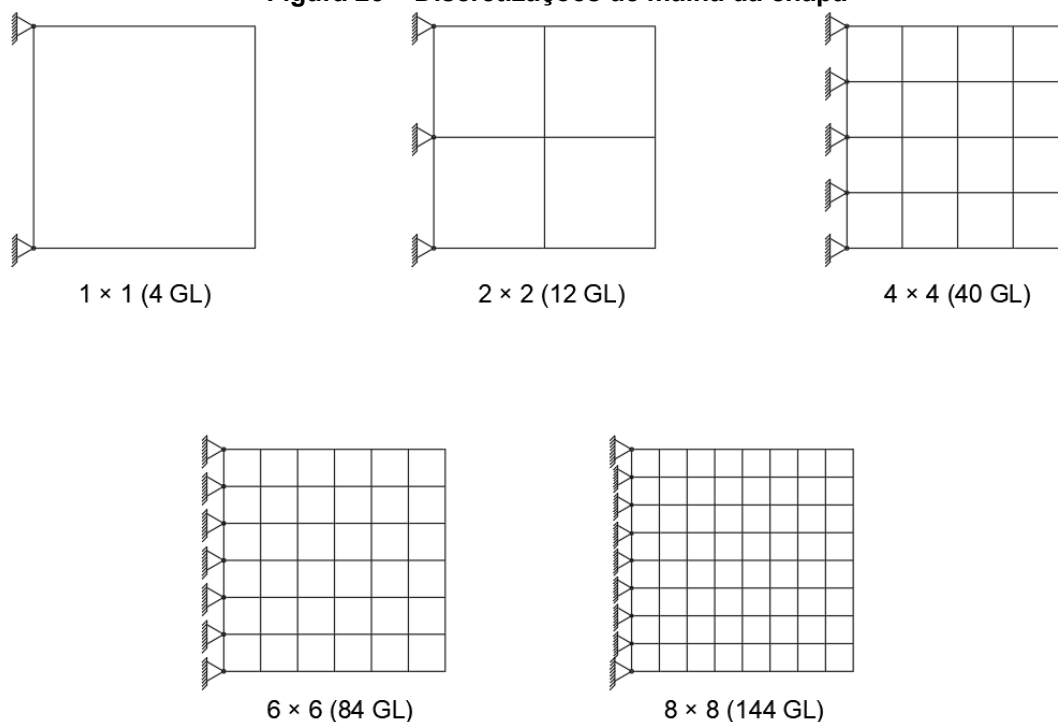
As dimensões são: $Lx = 10$ e $Ly = 10$. As propriedades do material são unitárias, com $E = 1$ e $\rho = 1$, e o coeficiente de *Poisson*, $\nu = 0,3$.

Diferente dos problemas anteriores, soluções de elementos unidimensionais não se aplicam à chapa quadrada. Por isso, as frequências naturais mais acuradas observadas em Gupta (1978) e Shang et al. (2017) são usadas como referencial aos resultados. Adota-se também uma malha de 100×100 elementos (20200 GL) modelada no ANSYS.

Os autores supracitados apresentam as frequências naturais dos seis primeiros modos de vibração. Para efeitos de comparação, determina-se a mesma quantidade de frequências naturais e modos de vibração que os autores.

A Figura 23 indica as discretizações de malha da estrutura.

Figura 23 – Discretizações de malha da chapa



Fonte: autoria própria

A primeira malha refere-se a uma malha grossa de um único elemento (4 GL), onde efetua-se o refinamento até observar diferença inferior a 1% na frequência fundamental, em relação ao resultado de Gupta (1978).

3.2.3.1 Variação da relação altura/comprimento e coeficiente de *Poisson*

A principal característica que difere a chapa da viga engastada e *shear wall* é a geometria. Na chapa quadrada, a relação altura/comprimento é unitária ($L_y/L_x = 1$) e por isso apresenta menor esbelteza quando comparada às demais estruturas.

Wolff (2019) constata que a razão de aspecto dos elementos que compõem a malha da estrutura, assim como o coeficiente de *Poisson*, afetam o erro ocasionado pelo cisalhamento parasítico na determinação das tensões e deslocamentos de estruturas planas. Apesar disso, não foi verificada a influência entre as dimensões longitudinais e transversais da estrutura.

No exemplo da chapa, verifica-se na análise modal a influência entre altura/comprimento da estrutura e também dos elementos da malha, além do coeficiente de *Poisson*. Desta forma, varia-se a altura da chapa e determina-se as frequências fundamentais de vibração da chapa com quatro diferentes dimensões:

- Razão de aspecto $L_y/L_x = 1$ com $L_y = 10$ e $L_x = 10$;
- Razão de aspecto $L_y/L_x = 0,5$ com $L_y = 5$ e $L_x = 10$;
- Razão de aspecto $L_y/L_x = 0,2$ com $L_y = 2$ e $L_x = 10$;
- Razão de aspecto $L_y/L_x = 0,1$ com $L_y = 1$ e $L_x = 10$.

Para que não haja mudança na quantidade de graus de liberdade da estrutura, mantem-se em todas as análises as mesmas discretizações de malhas usadas na chapa quadrada. Portanto, altera-se as relações altura/comprimento dos elementos proporcionalmente à razão de aspecto da estrutura.

As análises são realizadas na notação *strain gradient* com e sem a presença dos termos espúrios. Para auferir o erro relativo, usa-se como referência solução refinada calculada pelo ANSYS.

O módulo de elasticidade e massa específica do material continuam unitários, com $E = 1$ e $\rho = 1$. As variações nos valores de coeficiente de *Poisson* adotados são: $\nu = 0$; $\nu = 0,15$; $\nu = 0,3$; e $\nu = 0,4999 \cong 0,5$.

3.3 CRITÉRIOS DE ANÁLISE

Após obtenção dos resultados finais das estruturas em estudo, é estabelecido os critérios utilizados para análise dos dados em questão. Por isso, lista-se as frequências naturais e modos de vibração calculados pelas diferentes metodologias para cada malha da estrutura.

A ilustração dos modos de vibração das estruturas são obtidos a partir do ANSYS. E a apresentação dos dados para análise é feita em forma de gráficos e para comparação dos mesmos, verifica-se os erros relativos às soluções de referência.

O erro relativo é calculado por:

$$\text{Erro} = \left| \left(\frac{\omega_{calc}}{\omega_{ref}} - 1 \right) \right|$$

Onde ω_{calc} refere-se à frequência natural calculada, e ω_{ref} é a frequência usada como referência nas análises.

No último exemplo, onde varia-se a relação altura/comprimento e coeficiente de *Poisson*, determina-se também a diferença de erro relativo entre as análises da notação *strain gradient* com a presença de termos espúrios (SG) em relação às análises sem a presença dos termos (SGS). Tal diferença é expressa por:

Dif. = Erro SG – Erro SGS

O Quadro 1 lista as abreviaturas que são empregadas nas análises.

Quadro 1 – Legenda das abreviaturas usadas nas análises

ISOP	Resultados obtidos a partir da formulação isoparamétrica
ANSYS	Resultados obtidos a partir da modelagem via ANSYS
SG	Notação <i>strain gradient</i> com termos espúrios
SGS	Notação <i>strain gradient</i> sem termos espúrios
N/A	Não aplicável
Ref.	Valor de referência para o cálculo do erro relativo
GL	Graus de Liberdade
$n \times n$ (GL)	Malha com $n \times n$ elementos e determinada quantidade de GL
Dif.	Diferença de erro relativo entre análises SG e SGS
	Frequência calculada inferior à solução de referência

Fonte: autoria própria

Com a análise dos resultados, espera-se avaliar a eficácia da notação *strain gradient* para os problemas estudados e atingir os objetivos propostos do trabalho.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nas seções seguintes é descrito as análises e discussão dos resultados de modelagem conforme estabelecido em Material e Métodos.

4.1 VIGA EM BALANÇO

4.1.1 Validação da notação *strain gradient*

Para validar as análises da viga em balanço, a Tabela 1 indica a frequência fundamental de vibração referente a cada metodologia, onde a solução de viga de Euler-Bernoulli é usada como referência aos demais resultados. Nas análises pela notação *strain gradient*, exibe-se também o Número de Condicionamento da matriz de rigidez.

Tabela 1 – Frequência fundamental da viga em balanço

Método	Malha (GL)	ω_1 (rad/s)	Erro	NC (10^4)
Euler-Bernoulli	N/A	5200	Ref.	—
Nagashima (1999)	N/A	5304	2,00%	—
Gu e Liu (2001)	N/A	5180	0,39%	—
Liu et al. (2009)	20 × 2 (120)	5360	3,06%	—
Nguyen-Thanh et al. (2010)	20 × 2 (120)	5453	4,85%	—
ISOP = ANSYS = SG	5 × 1 (20)	8358	60,72%	2,25
	10 × 1 (40)	6283	20,82%	3,52
	20 × 2 (120)	5477	5,33%	20,55
SGS	5 × 1 (20)	5436	4,54%	5,32
	10 × 1 (40)	5418	4,18%	4,72
	20 × 2 (120)	5239	0,75%	21,89

Fonte: autoria própria

Constata-se que tanto a modelagem via ANSYS, formulação isoparamétrica e notação *strain gradient* com termos espúrios apresentam os mesmos valores de frequência fundamental. Tais resultados já eram esperados e servem para confirmar os processos aplicados nos cálculos da notação *strain gradient*, visto que para

comparação entre as formulações, é necessário que haja conformidade entre os procedimentos numéricos utilizados na obtenção dos resultados.

As análises sem a presença do cisalhamento parasítico auferem frequência mais acurada quando comparadas aos outros métodos, com exceção de Gu e Liu (2001), que usam uma solução refinada sem malha. Todavia, quando contrastada com as discretizações equivalentes, a aproximação da frequência com eliminação dos termos espúrios em relação à solução de Euler-Bernoulli é maior. Mesmo a malha grossa com apenas 5 elementos e 20 GL mostra resultados mais precisos que as malhas refinadas de 40 elementos e 120 GL dos outros métodos, tanto em relação à formulação convencional, quanto aos métodos propostos pelos autores, o que evidencia a influência dos termos espúrios na frequência fundamental desta estrutura.

Contudo, a eliminação dos termos espúrios eleva o número de condição da matriz de rigidez, o que implica em mal condicionamento do problema. Essa discrepância é inversamente proporcional ao erro relativo, onde NC varia de $2,25 \times 10^4$ para $5,32 \times 10^4$ (aumento de 136,44%) na malha grossa, e $20,55 \times 10^4$ para $21,89 \times 10^4$ (+6,52%) na malha fina.

Tal fenômeno ocorre também no MEFG, onde é possível atingir frequências naturais mais acuradas devido às funções de enriquecimento, porém as matrizes de rigidez e de massa possuem número de condicionamento maior, em despeito da solução convencional de elementos finitos. Para esta abordagem, Shang et al. (2018) mencionam que foi proposto o Método dos Elementos Finitos Estabilizado, a fim de mitigar os valores de NC do problema. No caso da notação *strain gradient*, a investigação desse efeito foge do escopo deste trabalho.

4.1.2 Frequências Naturais e Modos de Vibração

A Tabela 2 lista as frequências naturais para a malha grossa de 5 elementos e 20 GL, assim como os respectivos erros em relação aos resultados da malha fina de 100×10 e 2200 GL, usada como referência.

Tabela 2 – Frequências naturais de vibração para malha 5 x 1 (20 GL), em rad/s

Modo	Ref. 100 × 10	ANSYS/ ISOP/SG	Erro	SGS	Erro
1	5179	8358	61,38%	5436	4,96%
2	31081	52380	68,53%	35637	14,66%
3*	80582	81300	0,89%	81279	0,87%
4	81914	149637	82,68%	109440	33,60%
5*	148955	252676	69,63%	241790	62,32%
6	227344	297672	30,93%	252568	11,09%
7	241588	450279	86,38%	431101	78,44%
8	313267	466304	48,85%	449984	43,64%

*Modo de vibração longitudinal

Fonte: autoria própria

Os resultados da malha média, de 10 x 1 elementos e 40 GL, são indicados pela Tabela 3.

Tabela 3 – Frequências naturais de vibração para malha 10 × 1 (40 GL), em rad/s

Modo	Ref. 100 × 10	ANSYS/ ISOP/SG	Erro	SGS	Erro
1	5179	6283	21,31%	5417,7	4,60%
2	31081	38183	22,85%	33274,2	7,06%
3*	80582	80821	0,30%	80783,2	0,25%
4	81914	103186	25,97%	91202,9	11,34%
5	148955	194537	30,60%	174854,1	17,39%
6*	227344	244548	7,57%	244372,9	7,49%
7	241588	310004	28,32%	283466,0	17,33%
8*	313267	414578	32,34%	414068,3	32,18%

*Modo de vibração longitudinal

Fonte: autoria própria

Em todos os modos de vibração, as frequências naturais determinadas pela notação *strain gradient* sem a presença de termos espúrios nas malhas 5 × 1 (20 GL) e 10 × 1 (40 GL) são mais próximas às frequências da malha de referência 100 × 10 (2200 GL), em comparação às análises considerando os termos espúrios para a mesma malha. Nos modos cujo sentido de vibração é predominantemente axial, por outro lado, a diferença não é tão acentuada.

Teoricamente, os termos de cisalhamento parasítico não afetam as oscilações no sentido axial, já que estas independem dos efeitos de cisalhamento, que age transversalmente. No entanto, no estado plano o sentido das vibrações ocorre em concomitância, não havendo modos puramente axiais ou transversais, e por isso todos os modos sofrem alguma interferência devido ao cisalhamento parasítico. Em

vista disso, define-se os modos de vibração com sentido predominantemente axial como modos axiais ou longitudinais de vibração.

Em relação à malha refinada, de 20×2 elementos e 120 GL, os resultados são apresentados na Tabela 4. Para este caso, exibe-se também as frequências naturais dos métodos calculados por Liu et al. (2009) e Nguyen-Thanh et al. (2010) usando a mesma discretização de malha.

Tabela 4 – Frequências naturais de vibração para malha 20×2 (120 GL), em rad/s

Modo	Ref. 100 x 10	Liu et al. (2009)	Nguyen- Thanh et al. (2010)	ANSYS/ ISOP/SG	Erro	SGS	Erro
1	5179	5360	5453	5477	5,76%	5239	1,16%
2	31081	31906	32851	33071	6,40%	31715	2,04%
3*	80582	80601	80636	80658	0,09%	80643	0,08%
4	81914	83227	87074	88030	7,47%	84706	3,41%
5	148955	149433	159384	162209	8,90%	156673	5,18%
6*	227344	224838	241737	242364	6,61%	242302	6,58%
7	241588	240633	244904	251341	4,04%	243645	0,85%
8	313267	304942	339430	352126	12,40%	342479	9,33%

*Modo de vibração longitudinal

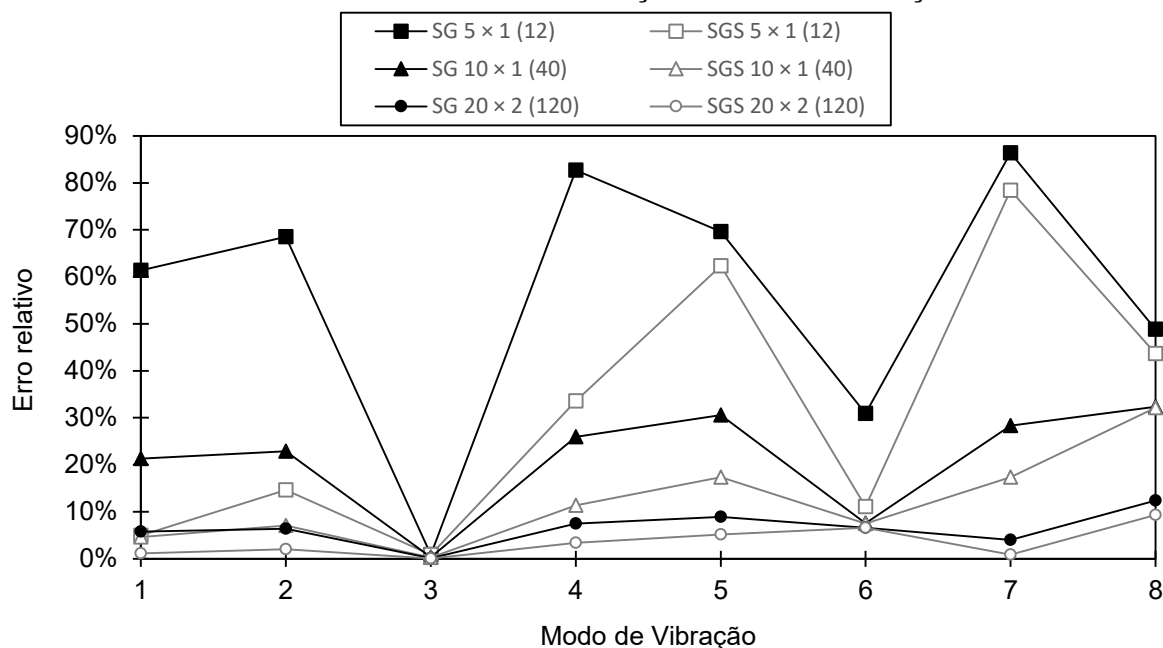
Fonte: autoria própria

Os métodos propostos por Liu et al. (2009) e Nguyen-Thanh et al. (2010) resultam em frequências mais próximas à solução de referência quando comparados ao MEF convencional na malha 20×2 (120 GL). No entanto, as frequências fornecidas pelos autores diferem dos resultados da notação *strain gradient* com eliminação dos termos espúrios. No caso de Liu et al. (2009), os últimos modos resultam em frequências naturais mais baixas, mesmo em relação à solução refinada de 2200 GL do MEF convencional. Por tratar-se de abordagens distintas, não cabem comparações à notação *strain gradient*, mas servem como referências adicionais aos resultados calculados.

Diferente de outras abordagens de elementos finitos que visam resultados mais acurados, a formulação da notação *strain gradient* parte das mesmas funções de deslocamento que o método de elementos finitos convencional, com a diferença de formular a matriz de rigidez com mais facilidade e corrigir erros de modelagem, como o *shear locking*.

O Gráfico 1 exibe a variação do erro relativo em função do modo de vibração para cada malha.

Gráfico 1 – Erro relativo em função do modo de vibração



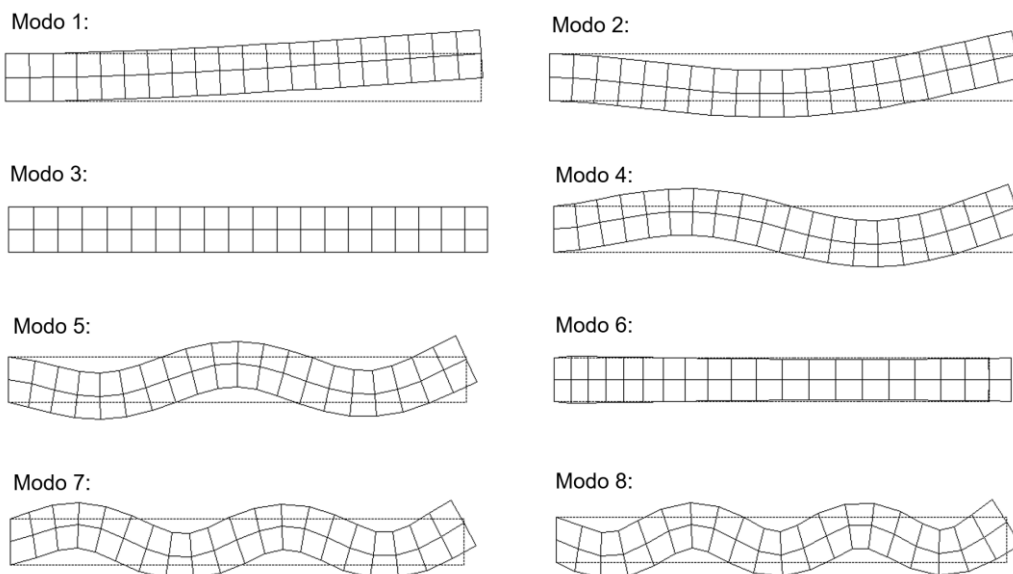
Fonte: autoria própria

Constata-se menores discrepâncias de erros entre os modos de vibração para a malha refinada. As diferenças entre as análises modais com a presença dos termos espúrios e sem a eliminação dos mesmos são acentuadas principalmente nos primeiros modos de vibração.

Nas frequências mais elevadas, o erro relativo aumenta, e a influência do cisalhamento parasítico na análise é intensificada de acordo com o modo de vibração. Os modos flexionais são os mais afetados pelo *shear locking*.

Na Figura 24, observa-se os oito primeiros modos de vibração da malha refinada.

Figura 24 – Modos de vibração da viga em balanço para malha 20 × 2 (120 GL)



Fonte: autoria própria

Os modos 3 e 6 demonstram as vibrações longitudinais, e os demais, as flexionais.

Importante ressaltar que nas malhas de 5×1 e 10×1 , os modos de vibração coincidem com a malha 20×2 até o quarto modo, onde o modo 3 é axial e os modos 1, 2 e 4 flexionais. Na medida em que aumenta-se a quantidade de graus de liberdade, os modos de vibração da estrutura se alteram.

Como este primeiro exemplo não se propõe a analisar a convergência do modelo, e sim a validação dos resultados fornecidos pela notação *strain gradient*, os resultados atendem o primeiro objetivo proposto pelo trabalho. Já para os próximos exemplos, compara-se somente os modos de vibração equivalentes.

4.2 SHEAR WALL

4.2.1 Frequências Naturais e Modos de Vibração

A Tabela 5 lista as frequências naturais de vibração fornecidas pelos autores supracitados no item 3.2.2 e pelas modelagens efetuadas via ANSYS, cálculos usando formulação convencional do MEF, e pela notação *strain gradient* – com e sem

a presença dos termos espúrios – para cada malha, conforme critérios em Material e Métodos.

Tabela 5 – Frequências naturais da parede de cisalhamento (rad/s)

Método	Malha (GL)	ω_1	ω_2	ω_3^*	ω_4	ω_5^*
Leung et al. (2004)	—	31,18	161,81	200,72	375,39	601,99
Analítico	N/A	31,25	165,82	200,71	389,97	602,13
Cheung et al. (2000)	—	31,28	164,51	—	386,99	—
ISOP = ANSYS = SG	1 × 4 (16)	37,60	202,13	209,04	536,77	637,80
	2 × 8 (48)	32,97	175,79	201,08	424,04	610,77
	3 × 12 (96)	31,96	167,80	200,87	397,03	605,75
	4 × 16 (160)	31,59	164,79	200,80	386,83	603,99
SGS	1 × 4 (16)	31,63	184,54	202,09	493,87	637,56
	2 × 8 (48)	31,35	169,02	201,06	410,97	610,67
	3 × 12 (96)	31,22	164,60	200,86	390,41	605,70
	4 × 16 (160)	31,17	162,94	200,79	382,90	603,96

*Modo de vibração longitudinal

Fonte: autoria própria

Assim como no problema de viga longa em balanço, o atual problema, que é analisado sob a ótica de viga alta, apresenta os resultados de análise modal em concomitância entre o ANSYS, formulação isoparamétrica e notação *strain gradient* com termos espúrios. Observam-se diferenças de frequências naturais entre as análises somente após correção do cisalhamento parasítico, que aproxima-se dos resultados de literatura.

A frequência fundamental de vibração nas modelagens contendo termos espúrios varia de 37,60 rad/s a 31,59 rad/s entre a malha grossa e a última malha refinada, em comparação com 31,63 rad/s a 31,17 rad/s, nas modelagens com remoção dos termos espúrios. Neste último caso, o valor da frequência fundamental é inferior à solução analítica e aos valores determinados por Cheung et al. (2000) e Leung et al. (2004).

Observa-se também diferenças consideráveis nos demais modos flexionais de vibração – 2 e 4 –, ao passo que os modos longitudinais – 3 e 5 – apresentam discrepâncias menores.

Na Tabela 6, apresenta-se os erros das frequências naturais em relação aos resultados de Leung et al. (2004).

Tabela 6 – Erro relativo das frequências naturais da parede de cisalhamento

Método	Malha (GL)	ω_1	ω_2	ω_3^*	ω_4	ω_5^*
Leung et al. (2004)	—	Ref.	Ref.	Ref.	Ref.	Ref.
Analítico	N/A	0,21%	2,48%	0,00%	3,89%	0,02%
Cheung et al. (2000)	—	0,31%	1,67%	—	3,09%	—
ISOP = ANSYS = SG	1 × 4 (16)	20,58%	24,92%	4,15%	42,99%	5,95%
	2 × 8 (48)	5,74%	8,64%	0,18%	12,96%	1,46%
	3 × 12 (96)	2,50%	3,70%	0,08%	5,76%	0,62%
	4 × 16 (160)	1,32%	1,84%	0,04%	3,05%	0,33%
SGS	1 × 4 (16)	1,42%	14,05%	0,69%	31,56%	5,91%
	2 × 8 (48)	0,54%	4,46%	0,17%	9,48%	1,44%
	3 × 12 (96)	0,14%	1,72%	0,07%	4,00%	0,62%
	4 × 16 (160)	0,03%	0,70%	0,04%	2,00%	0,33%

*Modo de vibração longitudinal

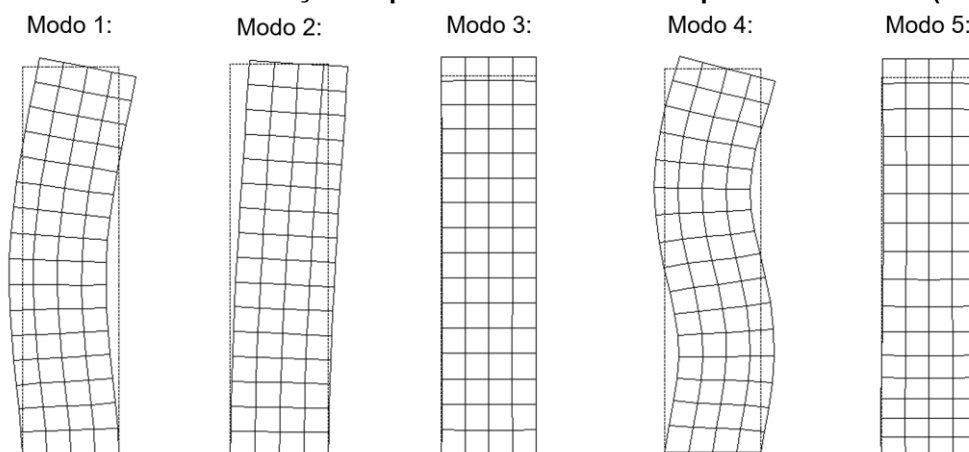
Fonte: autoria própria

Nota-se que nas análises da notação *strain gradient* com eliminação dos termos espúrios, o erro relativo diminui principalmente na frequência fundamental de vibração, analogamente ao exemplo da viga longa. Mesmo a malha grossa de 1 × 4 elementos e 16 GL apresenta erro de apenas 1,42% na notação *strain gradient* sem termos espúrios. Este valor de erro só é atingido na malha refinada de 4 × 16 elementos e 160 GL, quando incluídos os termos espúrios.

Em todos os modos de vibração flexionais da última malha refinada, as análises pela notação *strain gradient* sem a presença de cisalhamento parasítico demonstra erros menores em relação à solução analítica e aos cálculos de Cheung et al. (2000).

Os cinco primeiros modos de vibração da estrutura são exibidos na Figura 25.

Figura 25 – Modos de vibração da parede de cisalhamento para malha 4 × 16 (160 GL)



Fonte: autoria própria

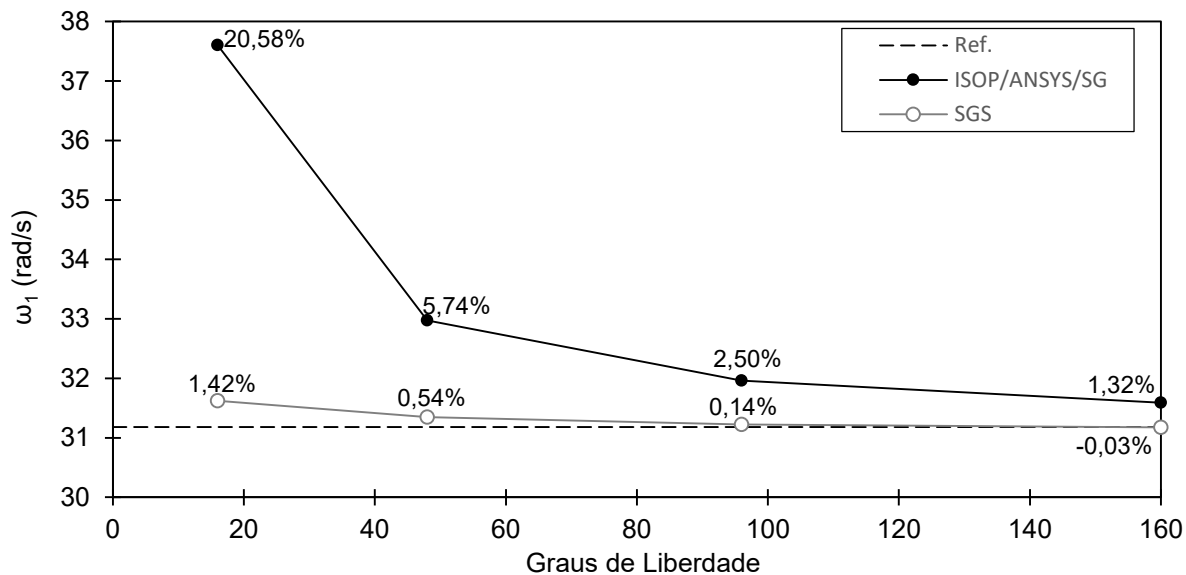
Observa-se a vibração no sentido longitudinal da estrutura nos modos 3 e 5 e no sentido flexional nos demais modos.

Ressalta-se que para este exemplo, todos os cinco primeiros modos determinados são equivalentes em todas as malhas analisadas, e por isso torna-se adequado comparar os resultados do mesmo modo referente às malhas distintas, conforme mostra o item 4.2.2.

4.2.2 Convergência dos Resultados

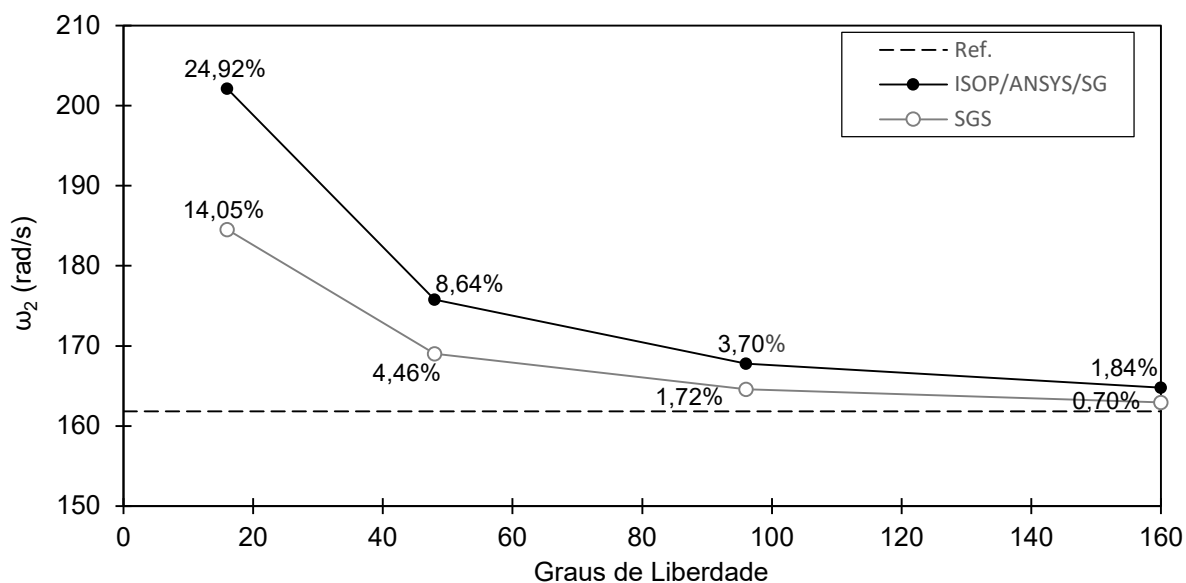
Para verificar a convergência de malha na notação *strain gradient* com eliminação dos termos espúrios, compara-se as variações de frequências naturais em função dos graus de liberdade da malha de elementos finitos em relação às modelagens contendo termos espúrios. Tais análises são efetuadas para os modos flexionais de vibração – 1, 2 e 4 – de acordo com os Gráficos 2, 3 e 4, respectivamente.

Gráfico 2 – Frequência natural do 1º modo em função do GL para o problema da parede de cisalhamento



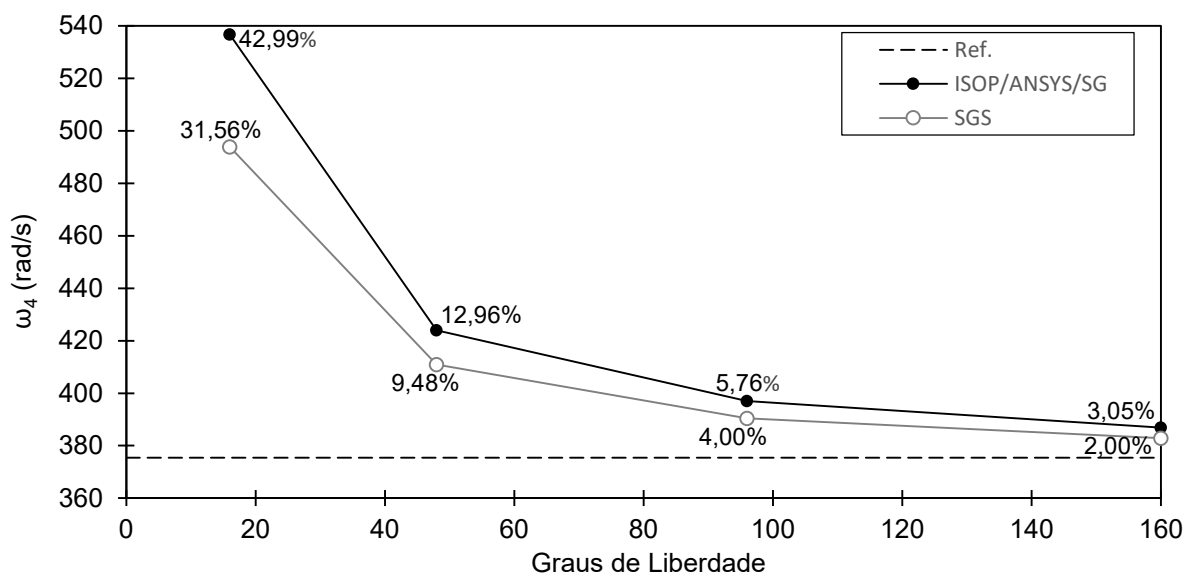
Fonte: autoria própria

Gráfico 3 – Frequência natural do 2º modo em função do GL para o problema da parede de cisalhamento



Fonte: autoria própria

Gráfico 4 – Frequência natural do 4º modo em função do GL para o problema da parede de cisalhamento



Fonte: autoria própria

Em todos os modos de vibração, constata-se que as análises com correção do cisalhamento parasítico resultam em valores mais acurados de frequências naturais de vibração.

No primeiro modo de vibração, a presença dos termos espúrios causa erros relativos à solução de referência na ordem de dez vezes superiores aos valores de erros calculados com a remoção dos termos espúrios. Já nos modos 2 e 4, as

diferenças de erro entre as análises são menos significativas em relação ao primeiro modo.

As variações das frequências naturais indicam que tanto as análises com e sem a presença de termos espúrios tendem a convergir ao mesmo resultado, desde que haja um refino suficiente. Porém, o erro estará sempre presente na modelagem, visto que o MEF trata-se de uma solução aproximada e não exata do problema, conforme apontado no Referencial Teórico.

Sendo assim, com o emprego da notação *strain gradient* neste problema, é possível atingir as frequências das formulações convencionais modelando a estrutura com menores quantidades de graus de liberdade. Isto corrobora para o procedimento empregado na remoção de erros *a priori*, atestando a capacidade da notação *strain gradient* em atingir resultados mais acurados com um mesmo refino, isto é, sem necessariamente aumentar o número de elementos ou a ordem do polinômio usado nas funções de deslocamento.

4.3 CHAPA QUADRADA

4.3.1 Frequências Naturais e Modos de Vibração

A Tabela 7 lista as frequências naturais de vibração fornecidas pelos autores supracitados no item 3.2.3 e pelas modelagens efetuadas via ANSYS, cálculos usando formulação convencional do MEF, e pela notação *strain gradient* – com e sem a presença dos termos espúrios – para cada malha, conforme critérios estabelecidos anteriormente.

Tabela 7 – Frequências naturais da chapa quadrada (rad/s)

Método	Malha (GL)	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
Gupta (1978)	N/A	0,0659	0,1580	0,1769	0,2707	0,3034	0,3214
Shang et al. (2017)	(1300 GL)	0,0658	0,1580	0,1772	0,2816	0,3037	0,3223
MEF (ANSYS)	100 × 100 (20200)	0,0658	0,1580	0,1772	0,2816	0,3037	0,3223
ISOP = ANSYS = SG	1 × 1 (4)	0,0779	0,1743	0,2908	0,3821	—	—
	2 × 2 (12)	0,0719	0,1637	0,2090	0,3372	0,3905	0,3963
	4 × 4 (40)	0,0679	0,1597	0,1870	0,3029	0,3317	0,3438
	6 × 6 (84)	0,0669	0,1588	0,1819	0,2919	0,3171	0,3316
	8 × 8 (144)	0,0665	0,1585	0,1800	0,2876	0,3115	0,3275
SGS	1 × 1 (4)	0,0717	0,1734	0,2720	0,3671	—	—
	2 × 2 (12)	0,0701	0,1635	0,2050	0,3208	0,3801	0,3889
	4 × 4 (40)	0,0673	0,1595	0,1856	0,2966	0,3304	0,3387
	6 × 6 (84)	0,0666	0,1587	0,1812	0,2887	0,3161	0,3295
	8 × 8 (144)	0,0663	0,1584	0,1795	0,2857	0,3108	0,3263

Fonte: autoria própria

As frequências naturais de vibração de Shang et al. (2017) usando uma malha refinada de 1300 GL por meio do MEFH coincidem até a quarta casa decimal com as frequências obtidas a partir da malha refinada do ANSYS. A solução de Gupta (1978), embora apresente frequência fundamental superior, demonstra frequências menores nos demais modos de vibração. Por conta disso, utiliza-se os resultados de Gupta (1978) como referência para o cálculo do erro relativo.

Nas demais análises contendo termos espúrios, a frequência fundamental de vibração varia de 0,0779 rad/s a 0,0665 rad/s entre a malha de um elemento (4 GL) à malha de 8 × 8 elementos (144 GL), atingindo valores próximos das análises com eliminação dos termos espúrios, que apresenta 0,0663 rad/s na malha de 8 × 8 elementos (144 GL).

A principal diferença de resultados entre as análises com e sem termos espúrios é notada na malha representada por um único elemento (4 GL).

A Tabela 8 apresenta os erros das frequências naturais relativos aos resultados de Gupta (1978).

Tabela 8 – Erro relativo das frequências naturais da parede de cisalhamento

Método	Malha (GL)	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
Gupta (1978)	N/A	Ref.	Ref.	Ref.	Ref.	Ref.	Ref.
Shang et al. (2017)	(1300 GL)	0,04%	0,01%	0,17%	4,04%	0,10%	0,28%
MEF (ANSYS)	100 × 100 (20200)	0,08%	0,03%	0,17%	4,05%	0,11%	0,29%
ISOP = ANSYS = SG	1 × 1 (4)	18,32%	10,33%	64,40%	41,18%	—	—
	2 × 2 (12)	9,12%	3,67%	18,15%	24,59%	28,72%	23,33%
	4 × 4 (40)	3,14%	1,10%	5,71%	11,91%	9,35%	6,97%
	6 × 6 (84)	1,58%	0,55%	2,82%	7,86%	4,52%	3,19%
	8 × 8 (144)	0,96%	0,33%	1,72%	6,25%	2,69%	1,91%
SGS	1 × 1 (4)	8,89%	9,81%	53,75%	35,63%	—	—
	2 × 2 (12)	6,44%	3,50%	15,86%	18,52%	25,30%	21,01%
	4 × 4 (40)	2,25%	1,01%	4,93%	9,59%	8,91%	5,40%
	6 × 6 (84)	1,14%	0,49%	2,42%	6,68%	4,20%	2,53%
	8 × 8 (144)	0,69%	0,30%	1,48%	5,56%	2,46%	1,54%

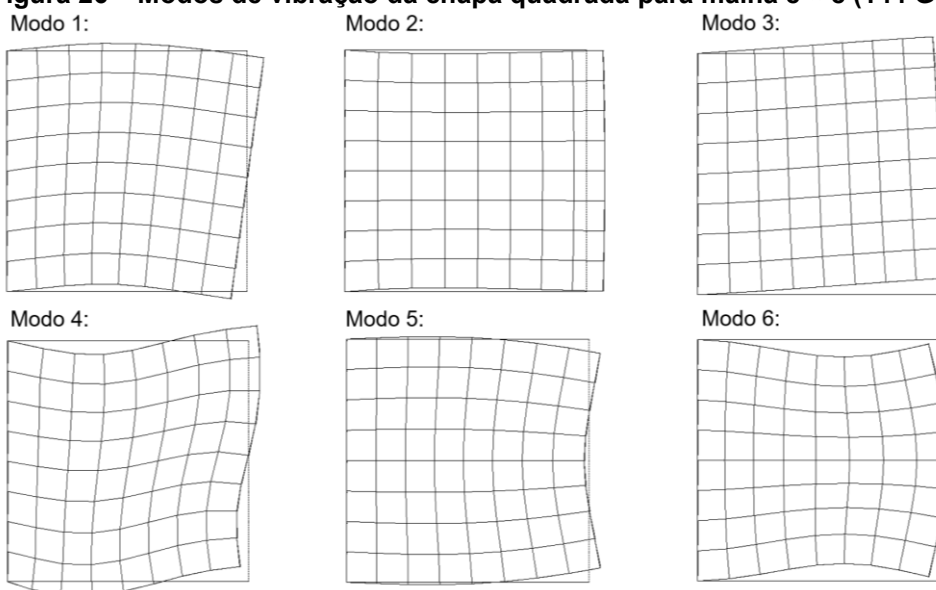
Fonte: autoria própria

A partir da malha 2 × 2 (12 GL), as análises com e sem termos espúrios apresentam pequenas diferenças de erro relativo, em especial no segundo modo, que refere-se à vibração no sentido axial.

Em vista disso, a chapa quadrada demonstra menores discrepâncias de resultados entre as análises com cisalhamento parasítico e sem a remoção do mesmo, quando comparada às outras estruturas analisadas: viga longa e parede de cisalhamento.

A Figura 26 mostra os modos de vibração da chapa quadrada.

Figura 26 – Modos de vibração da chapa quadrada para malha 8 × 8 (144 GL)



Fonte: autoria própria

O segundo modo de vibração refere-se às vibrações no sentido do eixo x , ortogonal à face engastada (eixo y). Neste modo, as vibrações ocorrem somente no sentido axial do eixo, e por isso é considerado um modo de vibração axial, ou longitudinal, mesmo que ambas as dimensões da chapa sejam iguais. Isto explica a menor interferência do cisalhamento parasítico nas frequências naturais de vibração do modo 2.

4.3.2 Variação da Relação entre Dimensões e Coeficiente de *Poisson*

Como já observado, a principal diferença da chapa quadrada para as demais estruturas é a relação entre as dimensões longitudinal e transversal da estrutura, que implica em um problema com pouca flexão. Devido a isso, os termos espúrios na distorção angular tem menos relevância para este caso, em comparação aos problemas da viga e *shear wall*.

Portanto, este item considera a influência da relação altura/comprimento da estrutura na análise modal. A razão de aspecto dos elementos varia proporcionalmente à relação entre dimensões da estrutura, de forma a manter a mesma malha em todos os problemas analisados. Verifica-se também a influência do coeficiente de *Poisson*.

4.3.2.1 Relação $L_y/L_x = 1$

A Tabela 9 apresenta a frequência fundamental da chapa com relação $L_y/L_x = 1$ determinadas por cada metodologia de cálculo, discretização de malha e coeficiente de *Poisson*.

Tabela 9 – Frequência fundamental da chapa com $L_y/L_x = 1$ (10^{-3} rad/s)

Método	Malha (GL)	$\nu = 0$	$\nu = 0,15$	$\nu = 0,3$	$\nu \cong 0,5$
MEF (ANSYS)	100 × 100 (20200)	69,12	67,34	65,82	64,10
SG	1 × 1 (4)	82,94	79,82	77,92	77,13
	2 × 2 (12)	75,32	73,22	71,86	71,12
	4 × 4 (40)	71,07	69,27	67,92	66,78
	6 × 6 (84)	70,05	68,28	66,89	65,56
	8 × 8 (144)	69,66	67,90	66,48	65,04
SGS	1 × 1 (4)	72,90	71,77	71,71	73,21
	2 × 2 (12)	72,53	71,00	70,10	69,87
	4 × 4 (40)	70,24	68,58	67,34	66,3
	6 × 6 (84)	69,65	67,95	66,60	65,30
	8 × 8 (144)	69,43	67,71	66,30	64,87

Fonte: autoria própria

Para todos coeficientes de *Poisson* considerados nas análises, as frequências obtidas a partir da notação *strain gradient* sem o cisalhamento parasítico são mais próximas à solução refinada do ANSYS, embora a diferença seja pequena.

Nota-se que o aumento no coeficiente de *Poisson* resulta em frequências de vibração mais baixas. Na análise da malha 8 × 8 (144) com a presença de termos espúrios, a frequência é de 0,0697 rad/s para $\nu = 0$ e 0,0650 rad/s para $\nu \cong 0,5$. Já nas análises sem termos espúrios, a frequência é de 0,0694 rad/s para $\nu = 0$ e 0,0649 rad/s para $\nu \cong 0,5$.

A Tabela 10 indica os erros relativos das frequências à solução de referência, e a diferença de erro entre ambas formulações – com e sem termos espúrios.

Tabela 10 – Erro relativo da chapa com $L_y/L_x = 1$

Método	Malha (GL)	$\nu = 0$	$\nu = 0,15$	$\nu = 0,3$	$\nu \cong 0,5$
MEF (ANSYS)	100 × 100 (20200)	Ref.	Ref.	Ref.	Ref.
SG	1 × 1 (4)	20,00%	18,53%	18,37%	20,32%
	2 × 2 (12)	8,98%	8,73%	9,17%	10,95%
	4 × 4 (40)	2,83%	2,85%	3,18%	4,18%
	6 × 6 (84)	1,35%	1,40%	1,63%	2,27%
	8 × 8 (144)	0,78%	0,83%	1,00%	1,46%
SGS	1 × 1 (4)	5,47%	6,58%	8,94%	14,20%
	2 × 2 (12)	4,95%	5,43%	6,49%	9,00%
	4 × 4 (40)	1,63%	1,84%	2,30%	3,43%
	6 × 6 (84)	0,78%	0,91%	1,18%	1,87%
	8 × 8 (144)	0,45%	0,54%	0,73%	1,21%
Dif. (SG – SGS)	1 × 1 (4)	14,54%	11,95%	9,43%	6,12%
	2 × 2 (12)	4,03%	3,30%	2,68%	1,95%
	4 × 4 (40)	1,20%	1,01%	0,88%	0,75%
	6 × 6 (84)	0,57%	0,49%	0,44%	0,41%
	8 × 8 (144)	0,33%	0,29%	0,27%	0,26%

Fonte: autoria própria

Constata-se que na chapa quadrada, o erro relativo dos resultados à solução de referência aumenta proporcionalmente ao coeficiente de *Poisson*. A exceção são as malhas grossas de 1 × 1 (4 GL) e 2 × 2 (12 GL) nas análises considerando termos espúrios, onde para $\nu = 0,15$ e $\nu = 0,3$ apresentam redução do erro, e para $\nu = 0,5$ novamente mostra aumento do erro nestas malhas. Isto não ocorre nas análises sem a presença dos termos espúrios.

Verifica-se ainda que apesar do erro relativo ser maior nas análises com coeficientes de *Poisson* mais elevados, a diferença de erro entre ambas formulações é menor. Observa-se variações superiores de erro em $\nu = 0$, onde a diferença de erro varia de 14,54% a 0,33% conforme o refino. E para $\nu = 0,5$ a variação é menos acentuada, de 6,12% para 0,26%.

Com isso, infere-se que na chapa quadrada, coeficientes de *Poisson* menores intensificam a interferência do cisalhamento parasítico na vibração livre da estrutura.

4.3.2.2 Relação $L_y/L_x = 0,5$

A Tabela 11 exibe a frequência fundamental da chapa com relação $L_y/L_x = 0,5$ auferidas por cada metodologia de cálculo, discretização de malha e coeficiente de *Poisson*.

Tabela 11 – Frequência fundamental da chapa com $L_y/L_x = 0,5$ (10^3 rad/s)

Método	Malha (GL)	$\nu = 0$	$\nu = 0,15$	$\nu = 0,3$	$\nu \cong 0,5$
MEF (ANSYS)	100 × 50 (10200)	44,31	43,84	43,47	43,09
SG	1 × 1 (4)	69,41	66,01	63,69	62,30
	2 × 2 (12)	54,16	52,63	51,80	51,88
	4 × 4 (40)	47,15	46,41	46,02	46,12
	6 × 6 (84)	45,61	45,03	44,69	44,64
	8 × 8 (144)	45,05	44,52	44,19	44,05
SGS	1 × 1 (4)	45,79	45,56	45,90	48,85
	2 × 2 (12)	44,92	44,94	45,75	47,31
	4 × 4 (40)	44,77	44,40	44,30	44,72
	6 × 6 (84)	44,52	44,10	43,89	43,98
	8 × 8 (144)	44,43	43,99	43,73	43,66

Fonte: autoria própria

Da mesma forma que na chapa quadrada, a chapa com relação $L_y/L_x = 0,5$ também apresenta frequências mais próximas à solução refinada usada como referência, em todas malhas e coeficientes de *Poisson* analisados.

Neste caso, o aumento do coeficiente de *Poisson* novamente resulta em valores inferiores de frequências. Na análise da malha 8×8 (144) com a presença de termos espúrios, a frequência é de $45,05(10^3)$ rad/s para $\nu = 0$ e $44,05(10^3)$ rad/s para $\nu \cong 0,5$. Enquanto nas análises sem termos espúrios, a frequência é de $44,43(10^3)$ rad/s para $\nu = 0$ e $43,66(10^3)$ rad/s para $\nu \cong 0,5$.

A Tabela 12 expõe os erros relativos das frequências à solução refinada, e a diferença de erro entre ambas formulações – com e sem termos espúrios.

Tabela 12 – Erro relativo da chapa com $L_y/L_x = 0,5$

Método	Malha (GL)	$\nu = 0$	$\nu = 0,15$	$\nu = 0,3$	$\nu \cong 0,5$
MEF (ANSYS)	100 × 50 (10200)	Ref.	Ref.	Ref.	Ref.
SG	1 × 1 (4)	56,66%	50,57%	46,53%	44,57%
	2 × 2 (12)	22,23%	20,05%	19,18%	20,40%
	4 × 4 (40)	6,41%	5,86%	5,89%	7,02%
	6 × 6 (84)	2,94%	2,72%	2,83%	3,60%
	8 × 8 (144)	1,67%	1,57%	1,67%	2,23%
SGS	1 × 1 (4)	3,34%	3,92%	5,60%	13,36%
	2 × 2 (12)	1,39%	2,51%	5,27%	9,79%
	4 × 4 (40)	1,05%	1,27%	1,92%	3,77%
	6 × 6 (84)	0,48%	0,61%	0,98%	2,05%
	8 × 8 (144)	0,27%	0,35%	0,60%	1,32%
Dif. (SG – SGS)	1 × 1 (4)	55,27%	48,06%	41,02%	31,21%
	2 × 2 (12)	18,88%	16,13%	13,68%	10,61%
	4 × 4 (40)	5,36%	4,59%	3,96%	3,24%
	6 × 6 (84)	2,46%	2,12%	1,84%	1,55%
	8 × 8 (144)	1,40%	1,21%	1,07%	0,91%

Fonte: autoria própria

Na chapa com relação $L_y/L_x = 0,5$ identifica-se diferentes padrões de variação do erro relativo em função do coeficiente de *Poisson* da estrutura. Nas análises em que se considera o cisalhamento parasítico, o erro relativo aumenta em função do coeficiente de *Poisson* na malha 1 × 1 (4) e diminui em outras. Para este caso, os menores valores de erro são observados na estrutura com $\nu = 0,15$. E nas análises com eliminação do cisalhamento parasítico, o erro é maior para $\nu = 0$ em todas as malhas, e diminui proporcionalmente ao coeficiente de *Poisson* nas demais.

Quanto à diferença de erro entre as formulações, percebe-se para esta estrutura o mesmo padrão da chapa quadrada: a diferença é inversamente proporcional ao coeficiente de *Poisson* da estrutura.

O principal fator a ser notado, entretanto, são as diferenças de erro relativo desta estrutura em relação à chapa quadrada, já que a flexão para este caso é mais relevante. Por isso, os termos de cisalhamento parasítico tem efeito mais deletério.

O erro das frequências calculadas com a notação *strain gradient* considerando termos espúrios é consideravelmente superior na estrutura cujo $L_y/L_x = 0,5$ em relação à estrutura onde $L_y/L_x = 1$. E na notação *strain gradient* sem a presença dos termos espúrios, ocorre o oposto: o erro relativo diminui na chapa com relação altura/comprimento inferior.

4.3.2.3 Relação $L_y/L_x = 0,2$

A Tabela 13 lista a frequência fundamental da chapa em que $L_y/L_x = 0,2$, computadas por cada metodologia de cálculo, discretização de malha e coeficiente de *Poisson*.

Tabela 13 – Frequência fundamental da chapa com $L_y/L_x = 0,2$ (10^{-3} rad/s)

Método	Malha (GL)	$\nu = 0$	$\nu = 0,15$	$\nu = 0,3$	$\nu \cong 0,5$
MEF (ANSYS)	100 × 20 (4200)	19,80	19,77	19,75	19,76
SG	1 × 1 (4)	62,79	58,83	55,70	52,62
	2 × 2 (12)	39,39	37,38	35,90	34,74
	4 × 4 (40)	26,35	25,57	25,08	24,86
	6 × 6 (84)	22,96	22,55	22,32	22,29
	8 × 8 (144)	21,63	21,38	21,25	21,27
SGS	1 × 1 (4)	20,27	20,35	20,73	22,37
	2 × 2 (12)	19,95	19,96	20,45	21,86
	4 × 4 (40)	19,86	19,86	20,13	20,66
	6 × 6 (84)	19,83	19,82	19,95	20,27
	8 × 8 (144)	19,61	19,80	19,87	20,10

Fonte: autoria própria

As frequências naturais observadas neste caso são nitidamente superiores nas análises com presença do cisalhamento parasítico, em especial nas malhas grossas. Considerando $\nu = 0$, a análise com termos espúrios apresenta variações de $62,79(10^3)$ a $21,63(10^3)$ rad/s na frequência fundamental, conforme o refino. Enquanto na análise com remoção dos termos espúrios, a variação da frequência é de $20,27(10^3)$ a $19,61(10^3)$ rad/s, atingindo valor de frequência inferior à solução refinada do ANSYS.

Contudo, constata-se que na medida em que se aumenta o coeficiente de *Poisson*, as frequências fundamentais das análises sem termos espúrios aumentam, em contraponto ao que ocorre nas chapas onde $L_y/L_x = 0,5$ e $L_y/L_x = 1$.

A Tabela 14 exhibe os erros relativos das frequências à solução refinada, e a diferença de erro entre ambas formulações – com e sem termos espúrios.

Tabela 14 – Erro relativo da chapa com $L_y/L_x = 0,2$

Método	Malha (GL)	$\nu = 0$	$\nu = 0,15$	$\nu = 0,3$	$\nu \cong 0,5$
MEF (ANSYS)	100 × 20 (4200)	Ref.	Ref.	Ref.	Ref.
SG	1 × 1 (4)	217,03%	197,63%	182,03%	166,25%
	2 × 2 (12)	98,89%	89,10%	81,77%	75,75%
	4 × 4 (40)	33,03%	29,37%	26,97%	25,79%
	6 × 6 (84)	15,91%	14,09%	13,01%	12,79%
	8 × 8 (144)	9,23%	8,17%	7,59%	7,64%
SGS	1 × 1 (4)	2,34%	2,97%	4,94%	13,17%
	2 × 2 (12)	0,71%	1,00%	3,54%	10,58%
	4 × 4 (40)	0,29%	0,47%	1,90%	4,52%
	6 × 6 (84)	0,14%	0,26%	1,01%	2,58%
	8 × 8 (144)	0,96%	0,15%	0,62%	1,70%
Dif.	1 × 1 (4)	214,69%	194,65%	177,09%	153,08%
(SG – SGS)	2 × 2 (12)	98,18%	88,10%	78,22%	65,16%
	4 × 4 (40)	32,73%	28,91%	25,07%	21,27%
	6 × 6 (84)	15,77%	13,83%	12,00%	10,21%
	8 × 8 (144)	10,19%	8,02%	6,96%	5,94%

Fonte: autoria própria

Observa-se que o erro relativo das frequências fundamentais calculadas pela notação *strain gradient* com cisalhamento parasítico distanciam da solução de referência em todas as malhas, indicando a necessidade de maior refino da malha para obtenção de resultados mais acurados.

A diferença de erro entre os resultados são muito mais significativos nesta estrutura, em comparação às análises onde $L_y/L_x = 0,5$ e $L_y/L_x = 1$.

4.3.2.4 Relação $L_y/L_x = 0,1$

A Tabela 15 mostra a frequência fundamental da chapa com relação $L_y/L_x = 0,1$, calculadas por cada metodologia de cálculo, discretização de malha e coeficiente de *Poisson*.

Tabela 15 – Frequência fundamental da chapa com $L_y/L_x = 0,1$ (10^{-3} rad/s)

Método	Malha (GL)	$\nu = 0$	$\nu = 0,15$	$\nu = 0,3$	$\nu \cong 0,5$
MEF (ANSYS)	100 × 10 (2200)	10,11	10,10	10,11	10,13
SG	1 × 1 (4)	61,64	57,55	54,23	50,69
	2 × 2 (12)	36,18	33,92	32,12	30,31
	4 × 4 (40)	20,39	19,37	18,58	17,87
	6 × 6 (84)	15,56	14,97	14,53	14,17
	8 × 8 (144)	13,45	13,06	12,79	12,59
SGS	1 × 1 (4)	10,31	10,37	10,58	11,45
	2 × 2 (12)	10,16	10,19	10,42	11,21
	4 × 4 (40)	10,12	10,13	10,29	10,60
	6 × 6 (84)	10,10	10,11	10,20	10,40
	8 × 8 (144)	9,95	10,06	10,16	10,30

Fonte: autoria própria

Como esperado, na relação $L_y/L_x = 0,1$ as malhas das análises pela notação *strain gradient* com termos espúrios não são suficientes para aproximar-se da solução refinada do ANSYS. Já nas análises com eliminação do cisalhamento parasítico, mesmo as malhas mais grossas já resultam em frequências mais precisas, principalmente quando considera-se valores mais baixos de coeficiente de *Poisson*. Inclusive, nas malhas finas da notação *strain gradient* sem termos espúrios, para $\nu = 0$ e $\nu = 0,15$, a frequência fundamental de vibração é inferior à solução de referência, o que sugere que nestes casos, a influência do *shear locking* pode estar afetando também a malha refinada de 100 × 10 elementos (2200 GL) do ANSYS.

A Tabela 16 apresenta os erros relativos das frequências à solução refinada, e a diferença de erro entre ambas formulações – com e sem termos espúrios.

Tabela 16 – Erro relativo da chapa com $L_y/L_x = 0,1$

Método	Malha (GL)	$\nu = 0$	$\nu = 0,15$	$\nu = 0,3$	$\nu \cong 0,5$
MEF (ANSYS)	100 × 10 (2200)	Ref.	Ref.	Ref.	Ref.
SG	1 × 1 (4)	509,67%	469,54%	436,42%	400,32%
	2 × 2 (12)	257,84%	235,70%	217,78%	199,13%
	4 × 4 (40)	101,74%	91,67%	83,83%	76,36%
	6 × 6 (84)	53,93%	48,12%	43,73%	39,84%
	8 × 8 (144)	33,03%	29,28%	26,53%	24,23%
SGS	1 × 1 (4)	1,96%	2,63%	4,70%	13,03%
	2 × 2 (12)	0,47%	0,80%	3,04%	10,64%
	4 × 4 (40)	0,08%	0,29%	1,80%	4,62%
	6 × 6 (84)	0,06%	0,09%	0,91%	2,63%
	8 × 8 (144)	1,57%	0,46%	0,52%	1,71%
Dif. (SG – SGS)	1 × 1 (4)	507,71%	466,91%	431,72%	387,29%
	2 × 2 (12)	257,37%	234,90%	214,74%	188,49%
	4 × 4 (40)	101,66%	91,38%	82,03%	71,74%
	6 × 6 (84)	53,99%	48,02%	42,82%	37,21%
	8 × 8 (144)	34,60%	29,74%	26,01%	22,52%

Fonte: autoria própria

Verifica-se que as diferenças de erro entre as análises variam desde 507,71% a 22,52% dependendo da malha e coeficiente de *Poisson*. Tais discrepâncias decorrem da interferência dos termos de cisalhamento parasítico nas frequências fundamentais de vibração. Quando removidos os termos, os erros nas frequências diminuem.

Destaca-se que a variação da relação L_y/L_x tem efeitos distintos na determinação dos erros relativos entre as modelagens. Quando considerado os termos espúrios nas análises, o erro relativo aumenta para menores relações L_y/L_x . Isto não ocorre nos casos em que os termos espúrios são eliminados.

Estas observações confirmam que o *shear locking* é acentuado em estruturas planas cuja relação entre dimensões transversal e longitudinal é menor, influenciando a determinação das frequências naturais de vibração da estrutura.

5 CONCLUSÃO

Conforme apontado no decorrer desta dissertação, a notação *strain gradient*, por ser fisicamente interpretável, permite avaliar se as expressões de deformação descrevem adequadamente o comportamento do elemento em questão, como ocorre no triângulo de três e seis nós, por exemplo. E nos casos em que o elemento apresenta erros de modelagem, a notação permite identificar e corrigir os termos que não são legítimos à equação de distorção angular, como feito com o quadrilátero de quatro nós.

Destaca-se a eficiência da notação *strain gradient* em formular as matrizes de rigidez dos elementos que compõem a estrutura. Pois como pode ser observado no referencial teórico, há somente seis integrais a serem computadas, que diminuem para quatro, quando considera-se a origem de coordenadas do elemento em seu centroide. Ademais, as integrais referem-se sempre às mesmas funções, podendo estas serem integradas previamente.

Em virtude disso, é notável a simplificação numérica da notação *strain gradient* em comparação à formulação isoparamétrica, onde integra-se diferentes expressões para todos os termos da matriz de rigidez. Esta simplificação permite não apenas aprimorar o processo de cálculo, mas também a modelagem de estruturas com maior quantidade de graus de liberdade, que requerem maior esforço computacional.

No que diz respeito às modelagens computacionais, a implementação da notação *strain gradient* demonstra êxito em simular as estruturas planas sob vibração livre não amortecida, uma vez que é capaz de fornecer frequências naturais de vibração equivalentes à formulação convencional nas mesmas malhas analisadas, quando contendo os termos de cisalhamento parasítico. E indo além, ao corrigir o cisalhamento parasítico, obtêm-se resultados mais acurados, que se aproximam com maior precisão de soluções analíticas e resultados disponíveis em literatura.

No problema da viga longa em balanço, a frequência fundamental de vibração das modelagens com a notação *strain gradient* sem a presença de termos espúrios aproximam-se da solução analítica de referência. E nos demais modos de vibração, as frequências naturais aproximam-se dos resultados de modelagem com malha refinada do ANSYS e valores da literatura, mostrando inclusive maior acurácia da notação *strain gradient* sem termos espúrios nas malhas equivalentes.

Na *shear wall*, as frequências naturais da notação *strain gradient* com remoção dos termos espúrios também condizem com as soluções analíticas e resultados de literatura. Além disso, a eliminação dos termos espúrios nas análises da notação *strain gradient* proporcionam melhor convergência de malha, o que implica na obtenção de frequências naturais mais acuradas com menor quantidade de refino.

Quanto à chapa quadrada, as diferenças entre as formulações com e sem a presença de termos espúrios é menor em relação aos problemas de viga longa e *shear wall*. Tal fato deve-se à esbeltez das estruturas, onde as análises com variação das relações altura/comprimento da chapa indicam que o *shear locking* se mostra mais evidente em estruturas com menores relações entre as dimensões. Isto porque, a flexão é mais relevante em estruturas esbeltas, o que implica em preponderância dos efeitos de cisalhamento parasítico.

Em todos os problemas analisados, as principais diferenças entre as formulações com e sem termos espúrios ocorrem nos modos de vibração flexionais, que estão sujeitos à deformação por flexão, onde a manifestação do cisalhamento parasítico é mais significativa.

Outros fatores que também afetam a influência do cisalhamento parasítico nas análises é o coeficiente de *Poisson* e a razão de aspecto dos elementos que compõem a malha. Valores inferiores no coeficiente de *Poisson* e elementos com menor razão de aspecto (menor relação entre largura e altura) resultam em erros relativos mais elevados.

Assim sendo, as análises modais das estruturas mostram que de fato os termos espúrios afetam as frequências naturais de vibração, e a correção *a priori* dos erros permite melhorar a acurácia dos resultados. Por fim, infere-se que o erro relativo das frequências naturais de vibração da estrutura depende de sua característica geométrica, propriedades do material, e discretização adotada na malha de elementos finitos.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Até o presente momento, não há registros de publicações sobre análises dinâmicas em estruturas planas por meio da notação *strain gradient*. Neste sentido, a

atual pesquisa é pioneira no tema e sugere outras abordagens a serem exploradas sobre o assunto, tais como:

- Modelar elementos quadriláteros com distorções geométricas;
- Efetuar análises dinâmicas com outros tipos de elementos que também contém termos espúrios em sua formulação, como os quadriláteros de 8 e de 9 nós;
- Estudar o comportamento de estruturas sob vibrações livres amortecidas e vibrações forçadas – com e sem amortecimento – utilizando a notação *strain gradient*;
- Realizar análises transientes com elementos finitos *strain gradient*.

REFERÊNCIAS

- ABDALLA, J. E. **Qualitative and Discretization Error Analysis of Laminated Composite Plate Models**. Ph.D. Thesis. University of Colorado, Boulder, CO, 1992.
- ABDALLA, J. E.; DOW, J. O. An Error Analysis Approach for Laminated Plate Finite Element Models. **Computers and Structures**, v. 52, n. 4, p. 611-616, 1994.
- ABDALLA, J. E.; FLORENTINO, A. F.; MACHADO, R. D. Identification and elimination of parasitic shear in a laminated composite beam finite element. **Advances in Engineering Software**, v. 37, p. 522–532, 2006.
- ABDALLA, J. E.; BELO, I. M.; PEREIRA, M. S. A laminated composite plate finite element a-priori corrected for locking. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 28, n. 5, 2008.
- ABDALLA, J. E.; BELO, I. M.; DOW, J. O. A serendipity plate element free of modeling deficiencies for the analysis of laminated composites. **Composite Structures**, v. 154, p. 150–171, 2016.
- ABDALLA, J. E.; BELO, I. M.; DOW, J. O. On a Four-Node Quadrilateral Plate for Laminated Composites. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 14, n. 12, p. 2177–2197, 2017.
- ABDALLA, J. E.; BELO, I. M.; DOW, J. O. Modeling Deficiencies in the Eight-Node Mindlin Plate Finite Element Physically Explained. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 146, n. 2, 2020.
- AKSU, T. A Finite Element Formulation for Free Vibration Analysis of Shells of General Shape. **Computers and Structures**. V. 65, n. 5, p. 687-694, 1997.
- ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE**. 6. ed. São Paulo: Érica, 2013.
- ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE - análise dinâmica**. 2. ed. São Paulo: Érica, 2008.
- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos – Primeiros passos**. Editora da Unicamp, 2 ed: Campinas, SP, 2010.
- BATHE, K.J. **Finite Element Procedures**. Pearson Education, 2 ed, Watertown, MA, 2014.
- BITTENCOURT, M. L. **Análise computacional de estruturas: com aplicação do Método de Elementos Finitos**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2010.
- BOUTAGOGA, D.; DJEGHABA, K. Evaluation of Linear and Geometrically Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Thin Shells by Flat Shell Finite Element. **International**

Journal of Civil, Environmental, Structural, Construction and Architectural Engineering, v. 7, n. 2, 2013.

CARR, J. B. The Effect of Shear Flexibility and Rotatory Inertia on the Natural Frequencies of Uniform Beams. **The Aeronautical Quarterly**, v. 21, p. 79–90, 1970.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. John Wiley & Sons, 4 ed., 2002.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures** – Theory and Applications to Earthquake Engineering. 3 ed. University of California, Berkeley, CA, 2014.

CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. Computers & Structures Inc, 3 ed, Berkeley, CA, 2003.

CHEUNG, Y. K.; ZHANG, Y. X.; CHEN, W. J. A refined nonconforming plane quadrilateral element. **Computers & Structures**, v. 78, n. 5, p. 699–709, 2000.

CUEVA-ZEPEDA, A.; AVALOS-GARCÍA, J. The role of a connectivity matrix in the assemblage process of the finite element method. **Advances in Engineering Software**, v. 37, p. 721–727, 2006

DÍEZ, P.; HUERTA, A. Error estimation for adaptive computations of shell structures. **Revue Européenne des Elements**, v. 9, n. 1-3, p. 49-66, 2000.

DOW, J.O. **A Guide to the Operation of PC-FEM**. University of Colorado, Boulder, 1988.

DOW, J.O. **A Unified Approach to the Finite Element Method and Error Analysis Procedures**. Academic Press, San Diego, CA, 1999.

DOW, J. O.; ABDALLA, J. E. Qualitative errors in laminated composite plate models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, n. 7, p. 1215–1230, 1994.

DOW, J. O.; BYRD, D. E. The identification and elimination of artificial stiffening errors in finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, n. 3, p. 743–762, 1988.

DOW, J. O.; BYRD, D. E. Error Estimation Procedure for Plate Bending Elements. **AIAA Journal**, v. 28, n. 4, p. 685-693, 1990.

Dow, J. O.; HUYSER, S. A. Continuum Models of Space Station Structures. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 2, n. 4, p. 220–238, 1989.

DOW, J. O.; SU, Z. W.; FENG, C.; BODLEY, C. Equivalent continuum representation of structures composed of repeated elements. **AIAA Journal**, v. 23, n. 10, p. 1564–1569, 1985.

FORSYTHE, G. E. Asymptotic lower bounds for the frequencies of certain polygonal membranes. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 4, n. 3, p. 467-480, 1954.

GRÄTSCH, T.; BATHE, J. K. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. **Computers and Structures**, v. 83, p. 235–265, 2005.

GRIFFITHS, D. V. Stiffness Matrix of the Four-Node Quadrilateral Element in Closed Form. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. V. 37, p. 1027–1038, 1994.

GU, Y. T.; LIU, G. R. A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for free and forced vibration analyses for solids. **Computational Mechanics**, v. 27, n. 3, 188–198, 2001.

GUAN-LIANG, Q.; SONG-NIAN, G.; JIE-SHENG, J. A finite element model of cracked plates and application to vibration problems. **Computers & Structures**, v. 39, n. 5, p. 483–487, 1991.

GUPTA, K. K. Development of a finite dynamic element for free vibration analysis of two-dimensional structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 12, n.8, p. 1311–1327, 1978.

HAMEDANI, S. J.; MOHAMMAD, R. K.; AZKAT, S. Vibration Analysis of stiffened plates using Finite Element Method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 9, n.1, Rio de Janeiro, 2012.

HIBBELER, R. C. **Engineering Mechanics: Dynamics**. Pearson Education, 12 ed., Cingapura, 2010.

HORTA, T. P. **Vibração livre de vigas pelo método de elementos finitos utilizando a notação strain gradient**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2019.

HOUMAT, A. In-plane vibration of plates with curvilinear plan-forms by a trigonometrically enriched curved triangular p-element. **Thin-Walled Structures**. V. 46, n. 2, 2008, p. 103–111.

HUBBARD, B. Bounds for eigenvalues of the free and fixed membrane by finite difference methods. **Pacific Journal of Mathematics**, v.11, n.2, p.559-590, 1961.

HUEBNER, K. H.; DEWHIRST, D. L.; SMITH, D. E. **The Finite Element Method for Engineers**. John Wiley & Sons, 4 ed., Canada, 2001.

HUMAR, J. L. **Dynamics of Structures**. CRC Press / Balkema, 3 ed, Amsterdam, The Netherlands, 2012.

LEISSA, A. W. **Vibration of Plates**. National Aeronautics and Space Administration (NASA), Washington, 1969.

LEISSA, A. W. The free vibration of rectangular plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 31, n. 3, p. 257-293, 1973.

LEUNG, A. Y. T.; ZHU, B.; ZHENG, J.; YANG, H. Analytic trapezoidal Fourier p-element for vibrating plane problems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 271, n. 1, 67–81, 2004.

LI, S.; CUI, X.; WANG, G. Bending and vibration analyses of plate and shell using an element decomposition method. **Engineering Computations** (Swansea, Wales). V. 35, n. 1, 2018, p. 287-314.

LIU, G. R. **Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method**. Taylor & Francis Group, 2 ed., New York, 2010.

LIU, D. Y.; WANG, C. Y.; CHEN, W. Q. Free vibration of FGM plates with in-plane material inhomogeneity. **Composite Structures**, v. 92, n.5, p. 1047–1051, 2010.

LYU, P.; DU, J.; LIU, Z.; ZHANG, P. Free in-plane vibration analysis of elastically restrained annular panels made of functionally graded material. **Composite Structures**, v. 178, p. 246–259, 2017.

LOGAN, D. L. **A First Course in The Finite Element Method**. Cengage Learning, 5 ed., University of Wisconsin, Platteville, 2012.

MOHAMED, O. A.; BYRD, D. E.; DOW, J. O. Improved Modeling Capabilites with Reduced-Order Integration. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 131, n. 1, p. 2–11, 2005.

MOHAROS, I.; OLDAL, I.; SZEKRÉNYES A. **Finite Element Method**. Typotex Publishing House. Hungria, 2012.

NAGASHIMA, T. Node-by-node meshless approach and its applications to structural analyses. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, , p. 341-385, 1999.

NELSON, H. M. High frequency flexural vibration of thick rectangular bars and plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 60, n. 1, p. 101–118, 1978.

NICOLAE, I.; REYNOUARD, J. M. Nonlinear analysis of reinforced concrete shear wall under earthquake loading. **Journal of Earthquake Engineering**, v. 4, n. 2, p. 183-213, 2000.

NGUYEN-THANH, N.; RABCZUK, T.; NGUYEN-XUAN, H.; BORDAS, S. P. A. An alternative alpha finite element method (A α FEM) for free and forced structural vibration using triangular meshes. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 233, n. 9, p. 2112–2135, 2010.

NOVOTNY, A. A.; FANCELLO, E. A. Um refinamento h, p e hp adaptativo na análise de flexão de placas semi-espessas. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingeniería**. V. 14, 1998, p. 25 - 48.

PAZ, M.; LEIGH, W. **Structural Dynamics – Theory and computation**. Kluwer Academic Publisher, 5 ed, Norwell, Massachussetts, 2004.

PEREIRA, O. J. B. A. **Utilização de Elementos Finitos de Equilíbrio em Refinamento Adaptativo**. 1996. 214f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 1996.

RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. Department of Mechanical and Aerospace Engineering. University of Miami, Coral Gables, Florida, USA, 2011.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. New York: 3. ed. Mc Graw Hill, 2006.

REID, J. K.; WALSH, J. E. An elliptic eigenvalue problem for a reentrant corner. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 13, n. 3, p. 837-850, 1965.

SAUER, G. Consistent Diagonal Mass Matrices for the Isoparametric 4-node Quadrilateral and 8-node Hexaedron Elements. **Communications in Numerical Methods in Engineering**. V. 9, p. 35-43, 1993.

SILVA, W.Q.; VASCONCELOS, R.P. Desenvolvimento de uma ferramenta numérica em linguagem Delphi via método dos elementos finitos para análise de estruturas de placa submetidas a carregamentos dinâmicos. **Mecânica Computacional**, v. XXIX, p. 1729-1746, 2010.

SHANG, H. Y. Enriched finite element methods for Timoshenko beam free vibration analysis. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, n. 15-16, p. 7012–7033, 2016.

SHANG, H. Y.; MACHADO, R. D.; ABDALLA, J. E; ARNDT. A. Numerical analysis of plane stress free vibration in severely distorted mesh by Generalized Finite Element Method. **European Journal of Mechanics A/Solids**, v. 62, p. 50–56, 2017.

SHANG, H. Y.; MACHADO, R. D.; ABDALLA, J. E. On the performance of GFEM with trigonometric enrichment in bidimensional dynamic elastoplastic modelling. **European Journal of Mechanics / A Solids**, 2018.

TEIXEIRA-DIAS, F. et al. **Método dos Elementos Finitos - Técnicas de simulação Numérica em Engenharia**. ETEP - Edições Técnicas e Profissionais. Lisboa, 2010.

TIMOSHENKO, S. **Vibration Problems in Engineering**. D. Van Nostrand Company, 2 ed., New York, 1937.

THOMPSON, M. K.; THOMPSON, J. M. **ANSYS Mechanical APDL for Finite Element Analysis**. Butterworth-Heinemann, Cambridge, 2017.

VALLIAPPAN, S.; ZHAO, C. Dynamic response of concrete gravity dams including dam–water–foundation interaction. **Computers and Structures**, v. 54, p. 705–715, 1993.

VAZ, L. E. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

VELETSOS, A. S.; AUSTIN, W. J.; PEREIRA, L.; C. A.; WUNG, S.-J. Free in-plane vibration of circular arches. **American Society of Civil Engineers, Engineering Mechanics Division, Journal**, v. 98, p. 311-329, 1972.

YANG, B. **Stress, Strain, and Structural Dynamics**. Elsevier Academic Press, 2005.

YAZDANI, A. A.; GAKWAYA, A.; DHATT, G. A posteriori error estimator based on the second derivative of the displacement field for two-dimensional elastic problems. **Computers & Structures**. V. 62, n. 2, 1997, p. 317–338.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R. L.; ZHU J. Z. **The Finite Element Method**, volume 1: its Basis and Fundamentals. Butterworth-Heinemann, 7 ed., 2013.

ZHAO, C.; STEVEN, G. P. Asymptotic solutions for predicted natural frequencies of two-dimensional elastic solid vibration problems in finite element analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, n. 16, p. 2821–2835, 1996.