Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Apucarana
Departamento Acadêmico de Matemática

Edital 21-2013/PROGRAD – Apoio à Produção de Recursos Educacionais Digitais

Autores: Michelle Andrade Klaiber e Diego Teodoro de Souza

Resoluções

Função Polinomial de 1º Grau

1. Temos os seguintes planos:

Plano A = fixo 800 + variável 20

Plano B = fixo 780 + variável 25

a) $C_a(x) = 20x + 800$

$C_b(x) = 25x + 780$

b) Determinaremos primeiramente $C_a(x) = C_b(x)$ assim

$$20x + 800 = 25x + 780$$

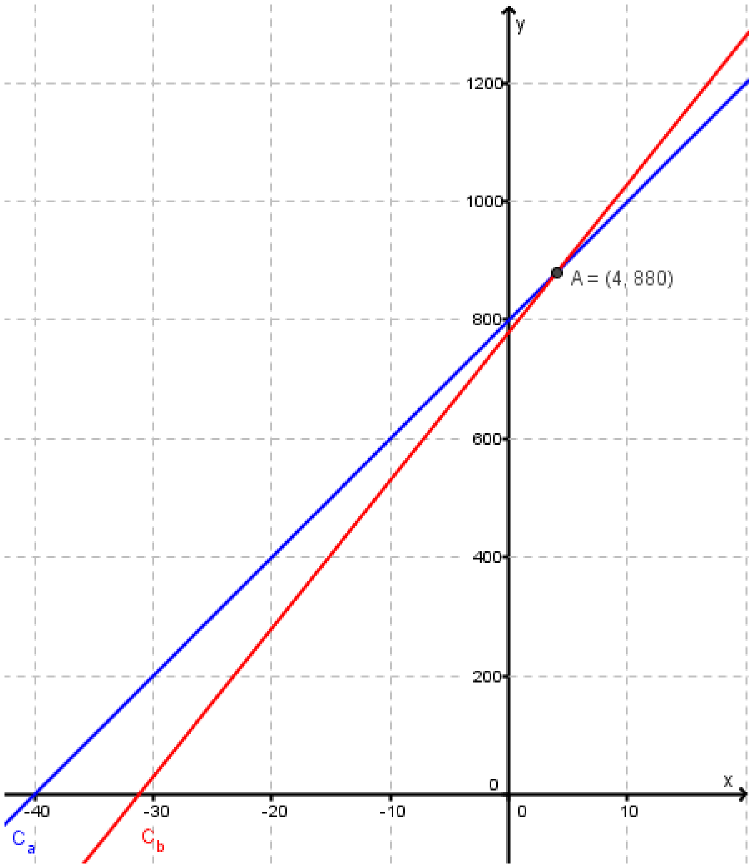
$$5x = 20$$

$$x = 4$$

Assim, os dois planos se equivalem para $x = 4$ mil peças.

O plano A é mais econômico para $x > 4$ mil peças.

O plano B é mais econômico para $x < 4$ mil peças.



2. Temos os seguintes dados:

Tempo (h)	Quantidade de Água (l)
8	2000
14	1760

Como a vazão é constante, trata-se de uma função de primeiro grau $y = ax + b$, podemos determinar o coeficiente angular a dessa função da seguinte forma:

$$a = \frac{1760 - 2000}{14 - 8} = \frac{-240}{6} = -40$$

Obtemos então $y = -40x + b$, substituindo os valores $x = 8$ e $y = 2000$.

$$2000 = 40 * 8 + b$$

$$b = 2000 + 320 = 2320$$

Assim a função que representa o escoamento em função do tempo x, dado em horas, é:

$$f(x) = -40x + 2320$$

Para que o tanque atinja metade de sua capacidade total, ou seja, 1000 litros:

$$1000 = -40x + 2320$$

$$-40x = -1320$$

$$x = 33$$

Logo , o tanque atingirá a metade de sua capacidade as 9 horas do dia seguinte.

E para 1/7 da capacidade total:

$$\frac{2000}{7} = -40x + 2320$$

$$2000 = -280x + 16240$$

$$280x = 14240$$

$$x = 50{,}88$$

Logo, o tanque atingirá 1/7 de sua capacidade aproximadamente às 2h 53min do terceiro dia.

3. O custo que o fabricante tem para produzir x peças é dado por

$$C(x) = 17{,}50x + 3000$$

E a receita obtida com a venda de x peças é dada por

$$R(x) = 25{,}00x$$

Como o lucro é calculado fazendo-se $L(x) = R(x) - C(x)$ obtemos:

$$L(x) = 25x - 17{,}5x - 3000$$

$$L(x) = 7{,}5x - 3000$$

Para que haja lucro, devemos ter $L(x) > 0$, ou seja

$$7{,}5x - 3000 > 0$$

$$7{,}5x > 3000$$

$$x > 400$$

Portanto, deverão ser vendidas mais de 400 peças para que haja lucro.

Função Polinomial de 2º Grau

1. A função receita é dada por $R(x) = 100x$.

A função custo, é dada por $C(x) = x^2 + 20x + 700$.

Como sabemos, $LUCRO = RECEITA - CUSTO$

Assim, o lucro é dado por $L(x) = R(x) - C(x)$

$$L(x) = 100x - (x^2 + 20x + 700)$$

$$L(x) = -x^2 + 80x - 700$$

Para que se tenha o lucro diário de R$900,00

$$-x^2 + 80x - 700 = 900$$

$$-x^2 + 80x - 1600 = 0$$

Resolvendo esta equação do 2º grau encontramos $x = 40$ caixas, sendo que cada caixa contém 10 cones.

Portanto, deverão ser produzidos e vendidos 400 cones de fio por dia para obter um lucro diário de R$900,00.

2. As vendas são dadas pela equação

$$V(s) = 20s - s^2$$

Para determinar a maior quantidade de vendas devemos encontrar o máximo desta função, ou seja, o vértice da parábola.

Assim, utilizando a fórmula para o x do vétice

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-1)} = \frac{20}{2} = 10$$

Portanto, a maior quantidade de vendas ocorrerá na 10º semana, o que seria em meados do mês de março.

Quanto à menor quantidade vendida, sabemos o mínimo que se pode vender é 0 unidades.

Portanto, as raízes da equação, correspondem às semanas com venda nula (zero)

$$20s - s^2 = 0$$

$$s(20 - s) = 0$$

para que este produto seja igual a zero, devemos ter

$$s = 0 \qquad \text{ou} \qquad 20 - s = 0$$

$$s = 20$$

Portanto, as vendas serão nulas na 1º e na 20º semana que correspondem ao início de janeiro e ao final de maio.

3. Dada a função

$$P(h) = 24h - 3h^2$$

Para encontrar a hora de maior produção, calculamos o vértice desta parábola, utilizando a fórmula

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{24}{2(-3)} = \frac{24}{6} = 4$$

Portanto, o funcionário é mais produtivo na metade de sua jornada de trabalho, ou seja, após 4 horas de trabalho.

Para calcular a maior produção calculamos o y do vértice utilizando a fórmula (ou podemos substituir $h = 4$ na função $P(h)$)

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{24^2 - 4(-3)0}{4(-3)} = \frac{24^2}{12} = 48$$

Logo, produziriam 48 unidades no horário mais produtivo.

Função Polinomial

1. Temos $f(x) = x^3 - 2x + 2$

Desejamos descobrir após quantos anos voltarão a vender 2000 peças, ou seja, descobrir para que valores de x teremos $f(x) = 2$ (já que $f(x)$ está em milhares de unidades).

$$x^3 - 2x + 2 = 2$$

$$x^3 - 2x = 0$$

Colocando x^2 em evidência:

$$x^2(x - 2) = 0$$

Para que este produto seja zero, devemos ter:

$x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ (desconsiderar)

Ou $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

Logo, passaram-se dois anos até as vendas voltassem aos valores habituais.

2. $f(x) = 9x - 12x^2 + 3x^3$

Desejamos calcular x para que $f(x) = 0$, assim:

$$9x - 12x^2 + 3x^3 = 0$$

Colocando $3x$ em evidência temos:

$$3x(3 - 4x + x^2) = 0$$

Assim, segue que :

$3x = 0$ ou $x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 0$ $x = 1$ ou $x = 3$ (Resolva por Baskhara)

O crescimento volta a ser zero após uma hora e após três horas do início da reação.

3. $f(x) = -x^5 + 15x^4 - 90x^3 + 270x^2 - 15x + 43$

Quantidade inicial no estoque $(x = 0)$

$f(0) = 43$ peças

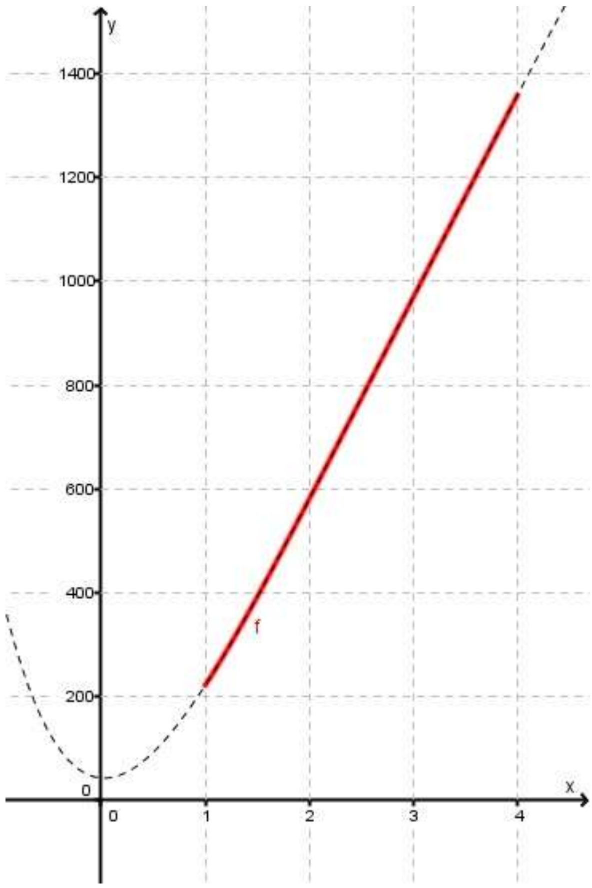
Quantidade final de peças no estoque $(x = 5)$

$$f(5) = -(5)^5 + 15(5)^4 - 90(5)^3 + 270(5)^2 - 15(5) + 43$$

$$f(5) = 1718 \text{ peças}$$

Observando o gráfico

x	f(x)
0	43
1	222
2	581
3	970
4	1359
5	1718

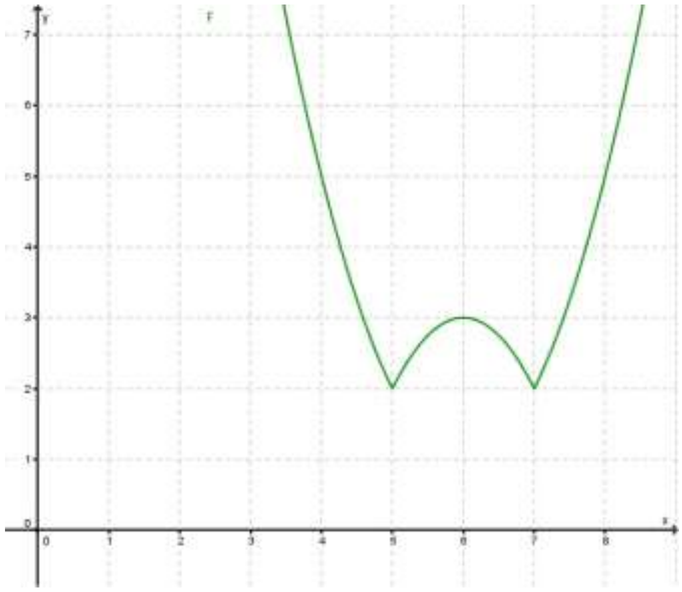


Podemos notar que, o referido trecho apresenta um crescimento quase que uniforme, portanto, neste trecho a função f(x) poderia ser aproximada por uma função linear $y = ax + b$.

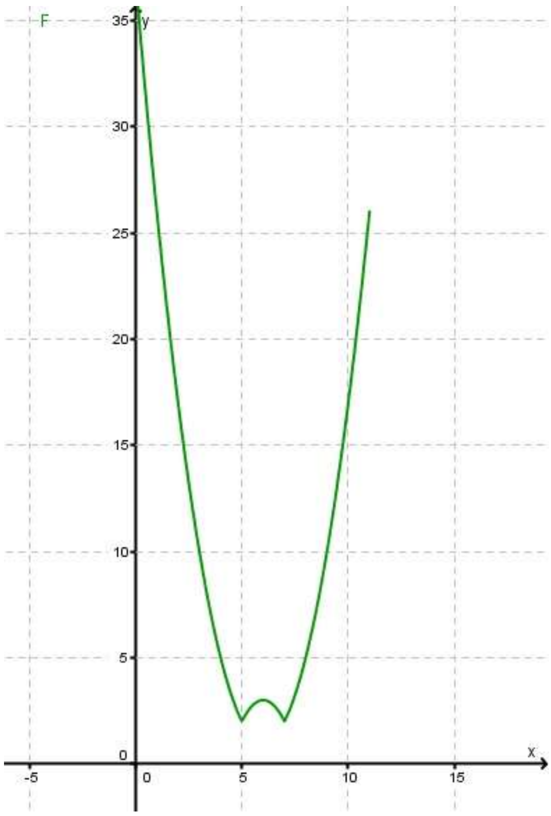
Função Modular

1. Temos $f(t) = |t^2 - 12t + 35| + 2\ ,\ 0 \leq t \leq 11$
Calculando alguns valores de $f(t)$ obtemos o gráfico

x	f(x)
0	37
4	5
5	2
6	3
7	2
8	5



O mesmo gráfico com todos os pontos de 0 a 11:



Calculamos o faturamento do mês de agosto substituindo $t = 7$ na função $f(t)$

$$f(t) = |7^2 - 12 * 7 + 35| + 2$$

$$f(t) = |0| + 2 = 2$$

Portanto, o faturamento do mês de agosto foi de 2 mil reais.

2. Temos $P(x) = 1 + |x^2 - 5x + 6|$, $1 \leq x \leq 12$.

Os meses com menor produtividades serão os meses para os quais $P(x) = 1$, pois $|x^2 - 5x + 6| \geq 0$.

Assim, devemos determinar $|x^2 - 5x + 6| = 0$, ou ainda, $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Por Baskhara, as raízes da equação são $x = 2$ e $x = 3$.

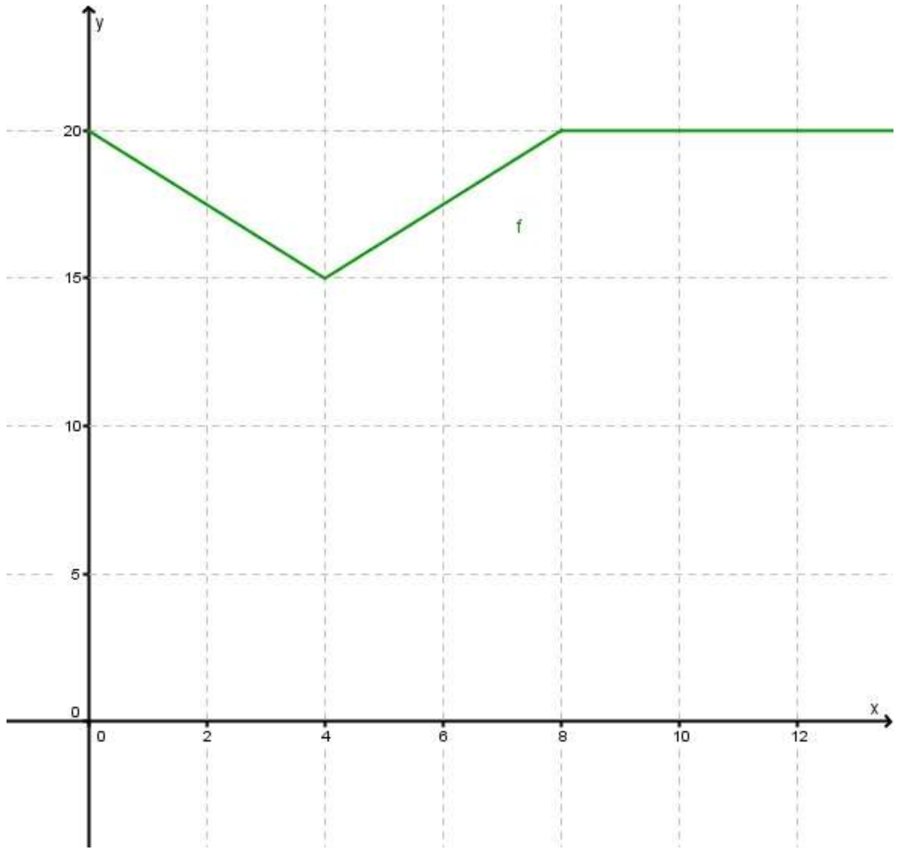
Portanto, os meses com menor produtividade são Fevereiro e Março.

3. Temos

$$f(x) = \begin{cases} \left|-\frac{5}{4}x + 5\right| + 15, & se\ 0 \leq x \leq 8 \\ 20, & se\ x > 8 \end{cases}$$

O gráfico é definido por duas sentenças, como a segunda é constante ($f(x) = 20$ se $x > 8$) então montamos uma tabela apenas para a primeira sentença:

x	f(x)
0	$\left\|-\frac{5}{4} * 0 + 5\right\| + 15 = 20$
1	$\left\|-\frac{5}{4} * 1 + 5\right\| + 15 = 18{,}75$
2	$\left\|-\frac{5}{4} * 2 + 5\right\| + 15 = 17{,}5$
3	$\left\|-\frac{5}{4} * 3 + 5\right\| + 15 = 16{,}25$
4	$\left\|-\frac{5}{4} * 4 + 5\right\| + 15 = 15$
5	$\left\|-\frac{5}{4} * 5 + 5\right\| + 15 = 16{,}25$
6	$\left\|-\frac{5}{4} * 6 + 5\right\| + 15 = 17{,}5$
7	$\left\|-\frac{5}{4} * 7 + 5\right\| + 15 = 18{,}75$
8	$\left\|-\frac{5}{4} * 8 + 5\right\| + 15 = 20$



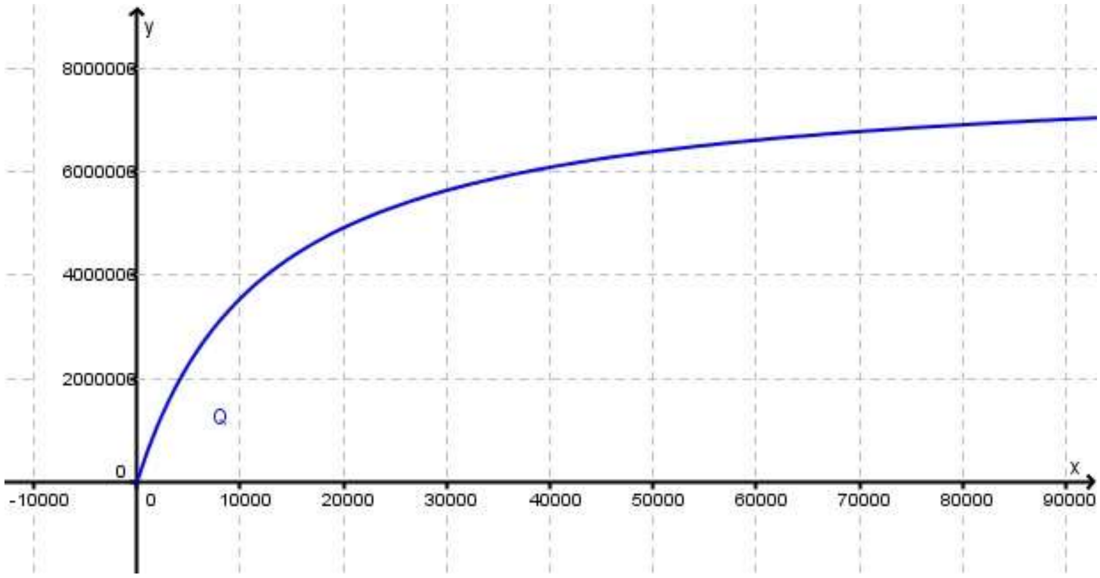
Durante as quatro primeiras semanas de treinamento a produção desta máquina diminui até chegar a 15 toneladas, nas próximas quatro semanas a produção aumenta chegando a 20 toneladas e após este período permanece constante.

Sim, após completar o treinamento do operador, a produção se estabiliza em 20 toneladas.

Função Racional

1. $Q(x) = \frac{Cx}{1+kx}$, onde $x > 0$, $C = 640$ e $k = 0{,}00008$

Gráfico de $Q(x) = \frac{640x}{1+0{,}00008x}$



a) A quantidade de corante adsorvida tende a se estabilizar à medida que a concentração de corante aumenta.

b) Para $x = 100\ mg/L$ temos.

$Q(100) = \frac{640*100}{1+0{,}00008*100} = \frac{64000}{1+0{,}008} = \frac{64000}{1{,}008} = 63.492{,}06\ mg/L$ de adsorção máxima possível.

2. $P(t) = \frac{4t^2+100t+603}{t+15}$

Para que a máquina apresente 100% de estabilidade, t deve satisfazer:

$$\frac{4t^2 + 100t + 603}{t + 15} = 100$$

$$4t^2 + 100t + 603 = 100t + 1500$$

$$4t^2 = 897$$

$$t^2 = 224{,}25$$

$$t = \sqrt{224{,}25} = 14{,}98$$

Portanto, a máquina apresentará 100% de estabilidade após 15 minutos, aproximadamente.

3. Temos $V_t = \frac{F_t}{R} = \frac{5}{R}$, pois $F_t = 5$.

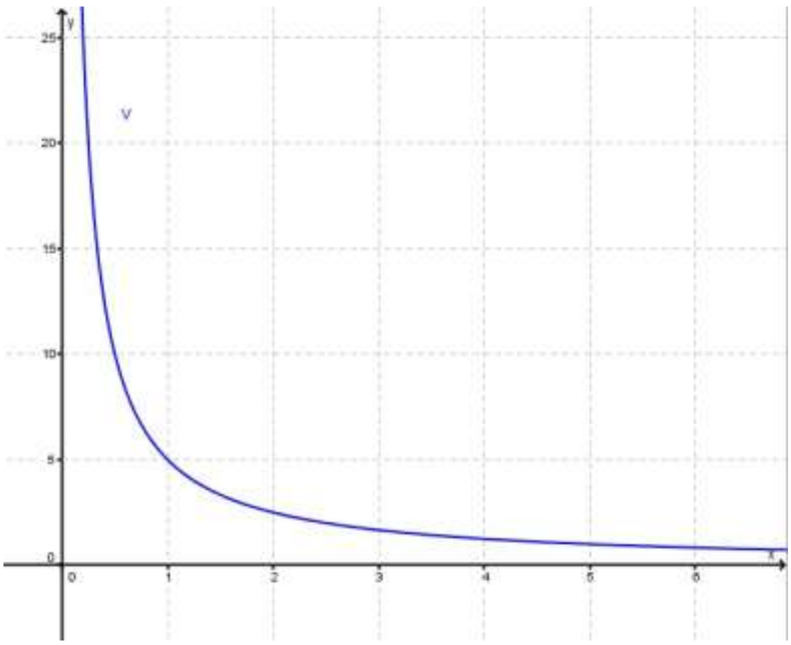
Trata-se de uma função racional, com domínio

$$D_{V_t} = \{R \in \mathbb{R} \mid R \neq 0\}$$

pois não podemos efetuar divisão por zero.

Construindo uma tabela para calcular alguns valores de V_t, obtemos

R	$V_t = \frac{5}{R}$
-7	$-0{,}71$
-6	$-0{,}83$
-5	-1
-4	$-1{,}25$
-3	$-1{,}67$
-2	$-2{,}5$
-1	-5
1	5
2	$2{,}5$
3	$1{,}67$
4	$1{,}25$
5	1
6	$0{,}83$
7	$0{,}71$



Podemos perceber que quanto maior o valor de R, menor o valor de V_t, se aproximando muito de zero, e quanto mais próximo de zero for R, maior será o valor de V_t.

Função Exponencial

1. Dada a função

$$N = N_0 e^{rt}$$

Temos $r = 5\% = 0{,}05$

Devemos determinar para qual valor de t teremos

$$N = 2N_0$$

Seja

$$N_0 e^{rt} = 2N_0$$

$$e^{rt} = 2$$

Aplicando ln dos dois lados da igualdade

$$\ln(e^{rt}) = \ln 2$$

Considerando que $\ln(e^{rt}) = rt,\ \ln 2 \cong 0{,}6931$ e $r = 0{,}05$

$$0{,}05t = 0{,}6931$$

$$t = 13{,}86$$

Portanto, o número de bactérias dobrará em aproximadamente 13 minutos e 52 segundos.

2. Temos

$$E = 10^{4{,}4+1{,}5M}$$

a) Se $M = 8{,}2$, segue

$$E = 10^{4{,}4+1{,}5*8{,}2} = 10^{16{,}7}$$

ou ainda,

$$E = 5{,}0119 * 10^{16} \text{ Joules.}$$

b) $E = 100.000$ Joules

Substituindo na equação dada temos

$$100.000 = 10^{4{,}4+1{,}5M}$$

$$10^5 = 10^{4{,}4+1{,}5M}$$

Como as bases são iguais, basta comparar os expoentes

$$5 = 4{,}4 + 1{,}5M$$

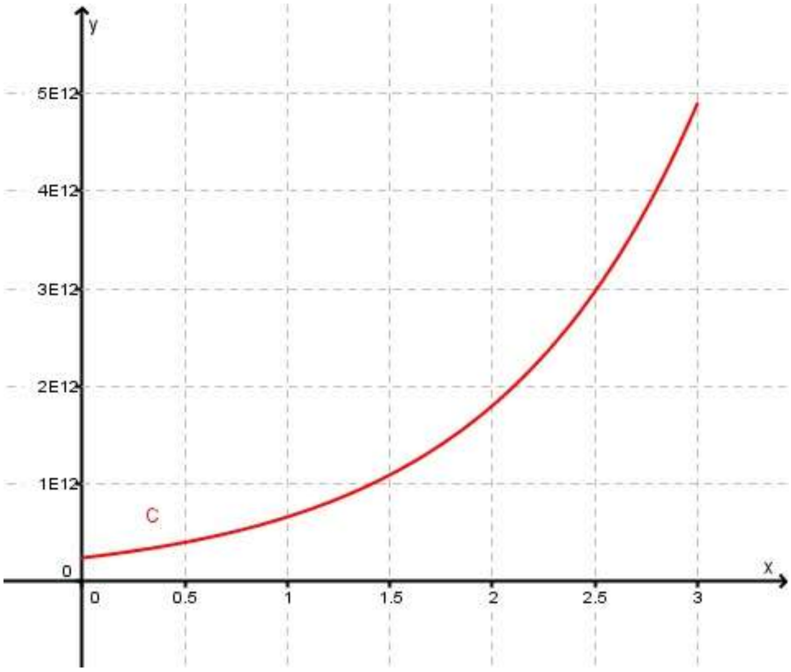
$$M = \frac{0{,}6}{1{,}5} = 0{,}4.$$

Portanto, a magnitude será de 0,4.

3. Para a função

$$C(t) = \frac{175e^{t+23}}{7}$$

Tomando $0 \leq t \leq 3$ temos o seguinte gráfico



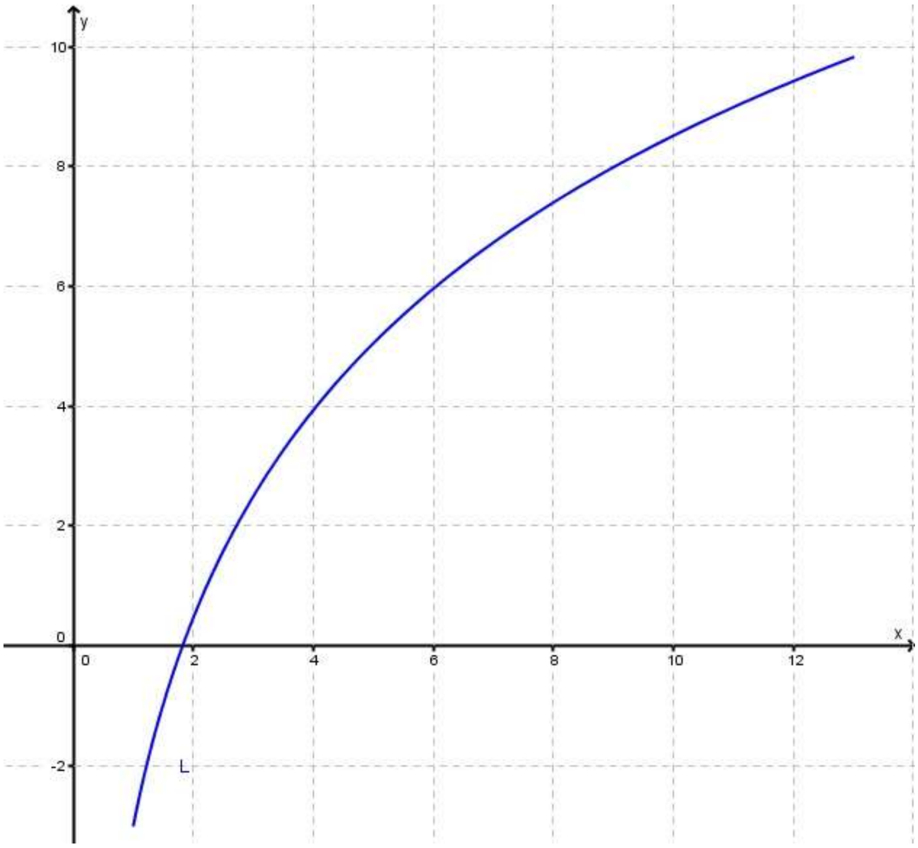
Após 264 horas = 11 dias, teremos

$C(11) = \frac{175e^{11+23}}{7} + \frac{175e^{34}}{7} \cong 1{,}46 * 10^{16}$ bactérias.

Função Logarítmica

1. $L(x) = 5\ln(x) - 3, \ \ 1 \leq x \leq 13$

Gráfico de $L(x)$



A nova linha será um sucesso, pois os lucros aumentarão chegando a atingir 9.800 reais na 13º semana.

Quando a empresa terá lucros, ou seja, $L(x) > 0$?

$$5\ln(x) - 3 > 0$$

$$\ln(x) > \frac{3}{5}$$

Aplicando exponencial dos dois lados da equação

$$e^{\ln(x)} > e^{\frac{3}{5}}$$

como $e^{\ln(x)} = x$, segue

$$x > e^{3/5} = 1{,}82$$

Portanto, a empresa terá lucro no final da segunda semana, após aproximadamente 13 dias do início da produção.

2. $H = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$

Para o referido tear circular temos $I = 1 \times 9{,}0012^2$. Assim,

$$H = 10\log\left(\frac{1 \times 9{,}0012^2}{10^{-12}}\right) = 10\log(8{,}1022 \times 10^{13}) = 10 \times 13{,}9086$$
$$= 139{,}086\ decibéis$$

Portanto, o referido tear causará danos à audição do trabalhador, sendo necessário assim, o uso de protetor auricular.

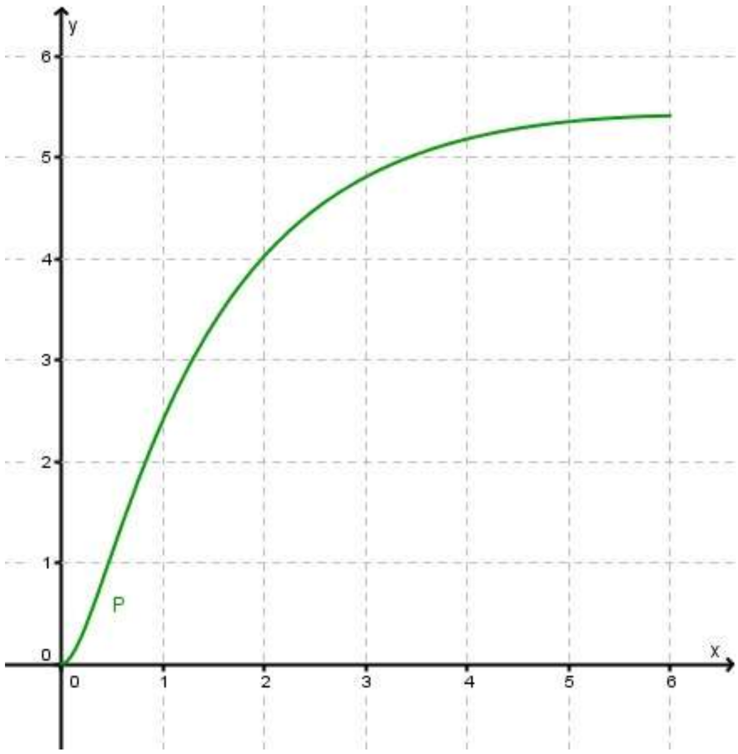
3. $P(t) = \frac{10(\ln(t+1))^2}{t+1}, \quad 0 \leq t \leq 6$

Para $t = 4$ horas, temos

$$P(4) = \frac{10(\ln(4+1))^2}{4+1} = \frac{10(\ln 5)^2}{5} = 2 \times 2{,}5903 = 5{,}1806$$

Após 4 horas de ajustes a produção será de 5.180 unidades.

Gráfico:



Podemos verificar que o maior aumento na produção ocorre durante as 3 primeiras horas de ajuste.

Função Trigonométrica

1. $f(x) = \cos(2x)$

Sabemos que para a função $\cos(x)$ descrever um período completo devemos ter $0 \leq x \leq 2\pi$, ou seja, seu período é dado por $2\pi - 0 = 2\pi$.

Da mesma forma, para a função $\cos(2x)$ temos

$$0 \leq 2x \leq 2\pi \ (\div\ 2)$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

logo, seu período é dado por $\pi - 0 = \pi$.

Note na figura que a curva L representa a metade de um período da função $\cos(2x)$, portanto, o comprimento de p é

$$p = \frac{\pi}{2} \quad u.c.$$

2. $f(x) = -\frac{1}{2}sen(x)$

Para determinar a amplitude de $f(x)$ devemos calcular

$$h = valor\ máximo\ de\ f - valor\ mínimo\ de\ f$$

Sabemos que $-1 \leq sen(x) \leq 1$.

Multiplicando essa igualdade por $-\frac{1}{2}$ obtemos

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}sen(x) \leq \frac{1}{2}.$$

Portanto, $h = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1 \quad u.c.$

3.

Temos $L \cong 0{,}335\ mm$ e $f(x) = \frac{1}{3}sen(12x + \pi)$.

Observando a figura, notamos que p corresponde a metade do período de $f(x)$.

Calculamos então o período

$$0 \leq 12x + \pi \leq 2\pi$$

$$-\pi \leq 12x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{12}$$

logo, o período de $f(x)$ é dado por $\frac{\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ e assim, obtemos $p = \frac{\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{12} \cong 0{,}26\ mm$.

Podemos agora calcular os percentuais de ondulação e contração sofridos pelos fios

$$Ond_{\%} = \frac{L-p}{p}100 = \frac{0,335-0,26}{0,26}100 = 0,2885 * 100 = 28,85\%$$

$$Ctr_{\%} = \frac{L-p}{L}100 = \frac{0,335-0,26}{0,335}100 = 0,2234 * 100 = 22,34\%$$

Função Inversa

1. A função $T(x) = -5x + 280$ expressa o tempo (T) em função da temperatura (x), para expressar a temperatura (x) em função do tempo (T) devemos obter a função inversa à $T(x)$.

O primeiro passo é isolar x na equação

$$T = -5x + 280$$

$$5x = -T + 280$$

$$x = \frac{-T+280}{5}$$

Escrevemos então a função $x(T)$

$$x(T) = \frac{-T+280}{5}$$

Ou ainda usando a notação de função inversa $T^{-1}(x) = \frac{-x+280}{5}$

A relação matemática entre as funções $T(x)$ e $x(T)$ é que uma é a inversa da outra.

Observação: Note que para $T(x)$ temos $10 \leq x \leq 50$, como $T(10) = 230$ e $T(50) = 30$, segue que para $x(T)$ devemos ter $30 \leq T \leq 230$.