UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ADRIANE LEMES SILVESTRE

CONCEITOS E PROPRIEDADES DE FUNÇÕES SOB A ÓTICA DO ENSINO BÁSICO

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO

2016

ADRIANE LEMES SILVESTRE

CONCEITOS E PROPRIEDADES DE FUNÇÕES SOB A ÓTICA DO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: João Biersdof, Dr.

PATO BRANCO

2016

S587c Silvestre, Adriane Lemes.
Conceitos e propriedades de funções sob a ótica do ensino básico / Adriane Lemes Silvestre. -- 2016.
85 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. João Biesdorf
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2016.
Bibliografia: f. 85.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Funções (matemática). 3. Ensino - Metodologia. 4. Ensino de segundo grau. I. Biesdorf, João, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Ficha Catalográfica elaborada por
Suélem Belmudes Cardoso CRB9/1630
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Pato Branco

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 016

“CONCEITOS E PROPRIEDADES DE FUNÇÕES SOB A ÓTICA DO ENSINO BÁSICO”.

por

Adriane Lemes Silvestre

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 09h30min do dia 25 de novembro de 2016. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. João Biesdorf, Dr.
(Presidente - UTFPR/Pato Branco)

Prof. Pedro Pablo Durand Lazo, Dr.
(UNIOESTE/Cascavel)

Prof. Fredy Maglorio Sobrado Suarez, Dr.
(UTFPR/Branco)

Prof. Rômel da Rosa da Silva, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

AGRADECIMENTOS

- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- Ao meu orientador pela pelo voto de confiança, paciência e suporte acadêmico durante a realização deste trabalho.
- À minha família e amigos pelo constante incentivo e apoio emocional.

RESUMO

SILVESTRE, Adriane Lemes. CONCEITOS E PROPRIEDADES DE FUNÇÕES SOB A ÓTICA DO ENSINO BÁSICO. 86 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2016.

Este estudo apresenta uma proposta de material de apoio docente para o trabalho com o início do conteúdo Função, no primeiro ano do Ensino Médio. Partindo da exposição do conceito de função abordado em diferentes bibliografias para então desenvolver o conteúdo por meio de propriedades e exemplos envolvendo, em especial, bijetividade, composição e inversão de funções. Encerrado com transformações de gráficos de funções em geral.

Palavras-chave: Ensino médio, Função, conceito.

ABSTRACT

SILVESTRE, Adriane Lemes. . 86 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2016.

This study presents a proposal for teaching support materials to work with the beginning of the Function content in the first year of high school. Starting from the exhibition of the Function concept addressed in different bibliographies and then develop the content through of properties and examples involving, in particular, bijectivity, composition and inversion of functions. Ended with function transformations of graphics general functions.

Keywords: High school, function, concept.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É uma percepção nossa e de muitos professores que atuam na educação básica a dificuldade que os alunos tem em compreender o conceito de função. Muitos destes alunos continuam com essa dificuldade por todo o período escolar, o que acaba por prejudicar seu desenvolvimento nos conceitos matemáticos como um todo, por esta dificuldade acarretar num desinteresse completo pela disciplina de Matemática.

Percebemos também que esta dificuldade não está somente no aluno. Em alguns casos, o professor também tem dificuldades em encontrar meios mais palpáveis para o entendimento do aluno. Os livros didáticos escolares nem sempre abordam o tema com clareza, e os livros de cursos superiores trabalham o tema de uma maneira muito formal.

Tendo isto em mente, resolvemos nesta dissertação do PROFMAT elaborar um texto que tivesse uma abordagem intermediária entre a dos livros escolares e a abordagem dos cursos de nível superior. Nossa ideia, é que este material sirva de base para estudos de professores de matemática da educação básica, quando estes desejarem por ventura rever alguns conceitos, praticar novamente as habilidades de demonstrações teóricas e aprimorar seu entendimento de grande parte dos conteúdos encontrados sobre o tema funções, consolidando sua base específica de Funções.

Diferentemente da forma como a maioria dos livros sobre funções trabalha, apresentando os tipos de função uma a uma, e descrevendo suas propriedades, como função linear, função quadrática, função exponencial, etc; aqui trabalharemos sempre com funções gerais, e focaremos em propriedades e conceitos que se aplicam a uma série de funções. Faremos uso de funções específicas somente na hora de apresentar exemplos.

Esta dissertação está assim dividida: primeiramente, apresentamos uma justificativa para o desenvolvimento de tal trabalho. Em seguida, no primeiro capítulo, apresentamos um apanhado histórico do conceito de função, observando como o conceito de função foi evoluindo através dos anos, com o desenvolvimento do raciocínio humano, destacando os principais matemáticos e suas contribuições neste tópico.

Já no capítulo 2, apresentamos o conceito de função como é trabalhado nos dias de hoje, e fazemos uma comparação entre as diferentes maneiras como a definição de função é apresentada em alguns livros didáticos de nível médio e superior. Apresentamos o conceito de função por meio de diagramas, e também por meio de fórmulas, sempre apresentando exemplos para ajudar na compreeensão dos conceitos envolvidos. Finalizamos este capítulo com uma breve discussão sobre o gráfico de um função, bem como a definição e exemplos de igualdade funções são.

No capítulo 3, tratamos de diversas propriedades de funções e apresentamos alguns resultados mais teóricos. Começamos definindo as operações entre funções: somas, subtrações, multiplicações e divisões entre funções, bem como a multiplicação de um função por um escalar. Em seguida, tratamos da composição de duas funções. Posteriormente, definimos a injetividade, a sobrejetividade e a bijetividade de uma função, e apresentamos também métodos de reconhecer tais propriedades através da análise do seu gráfico. Na sessão seguinte, juntamos as sessões anteriores e apresentamos uma série de resultados sobre a composição de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Na sessão seguinte, apresentamos o conceito de inversa de uma função e função inversa, suas propriedades, seu gráfico, e novamente a relação deste conceito com a ideia de composição de funções.

No capítulo 4 expomos mais algumas propriedades de funções. Iniciamos o capítulo com as funções pares e as funções ímpares, suas propriedades algébricas e, principalmente, suas características gráficas. Em seguida, exibimos as funções periódicas, novamente com enfoque na ánalise do gráfico. Posteriormente, mostramos o conceito de monoticidade de funções, isto é, os conceitos de funções crescentes, decrescentes, não crescentes e não decrescentes; e apresentamos também os conceitos de pontos de máximo e pontos de mínimo de um função. Encerramos este capítulo apresentando alguns exemplos de funções definidas implicitamente.

No capítulo 5, apresentamos as transformações que podem ser feitas numa função, e como tais transformações alteram o gráfico da função original. Mostraremos as translações verticais e horizontais, bem como as compressões e as expansões, tanto horizontais como verticais, sempre apresentando gráficos para exemplificar tais ideias.

Por último, apresentaremos uma conclusão e uma lista com as referências aqui utilizadas.

2 JUSTIFICATIVA

Durante o trabalho com o conteúdo de funções, ao lecionar para o primeiro ano do Ensino Médio, tive a percepções da dificuldade dos alunos em compreender e aplicar conceitos, definir função em diferentes contextos, reconhecer funções entre conjuntos não numéricos, lidar com domínio, contradomínio e imagem de funções e suas relevâncias no estudo de funções injetoras, sobrejetoras, bijetoras, funções compostas e inversas, além de reconhecer as diferentes representações de uma função. E ainda, no decorrer do curso PROFMAT, nas disciplinas de Números e Funções Reais e Fundamentos de Cálculo, pude notar detalhes e análises que não me eram comuns, mas que se fazem necessários quando se estuda funções e que me fortaleceriam para as próximas situações de ensino-aprendizagem de funções com os alunos do Ensino Médio. Com isso, surgiu o interesse de utilizar minhas percepções e conhecimentos aprimorados durante o curso do PROFMAT para contribuir para a prática docente deste assunto na educação básica.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000), reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações, contribui para que ensino de Matemática possa resultar em uma aprendizagem real e significativa para os alunos. Uma função, em suas diferentes representações, possui caráter integrador entre conteúdos Matemáticos. E ainda, através das funções pode-se realizar interpretações de fenômenos naturais e cotidianos, gerando conexões com outras áreas do conhecimento.

Nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (PARANÁ, 2007) , funções aparecem como um conteúdo estruturante para o Ensino Fundamental e Médio. Por meio do estudo deste conteúdo os alunos devem compreender que as funções modelam situações naturais e problemas que atendem às necessidades da sociedade. Segundo as DCE, é importante compreender a construção dinâmica e histórica do conceito de função, capaz de provocar explorações matemáticas, interligando outros conteúdos específicos. Para o Ensino Médio, é necesssário abordar o conteúdo de forma mais ampla e aprofundada, permitindo assim que a identificação de regularidades, estabelecimento de generalizações e apropriação de uma linguagem matemática que descreva e interprete fenômenos matemáticos e de outras áreas do conhecimento, ganhando fundamental relevância na leitura e interpretação da linguagem gráfica que facilita a compreensão das variáveis envolvidas e suas relações.

O estudo de funções, seus comportamentos e regularidades, possibilita ao estudante a capacidade de analisar e compreender situações do seu cotidiano como uma tarifa de estacionamento, a duração do efeito de um remédio no organismo do ser humano, posições de objetos móveis com relação a um ponto de referência, receitas culinárias. Onde são tratadas funções específicas contidas no currículo básico do Ensino Médio e por meio de suas propriedades aplicadas ao problema em questão, pode-se prever informações e tirar conclusões proveitosas para a sua realidade.

Além da importância do estudo de funções devido à sua aplicabilidade no cotidiano, este conteúdo está presente no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que é uma forma dos alunos concluíntes do Ensino Médio ingressarem em universidades públicas do país. De acordo com o (INEP, 2011) , o conteúdo da prova está dividido em quatro áreas do conhecimento, entre elas, Matemática e suas tecnologias, que em sua matriz de referências, descreve entre as competências:

> Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
> H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
> H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
> H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
> H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.
>
> Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
> H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
> H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
> H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
> H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
> H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

É possível notar que, o domínio do conteúdo de funções é essencial para um melhor desempenho e resultado ao estudante que realiza a prova do ENEM.

Visto a importância do estudo de funções na educação básica, tanto por sua aplicabilidade, como a presença deste conteúdo em provas que dão acesso ao ensino superior, tem-se por objetivo neste trabalho elaborar um material didático de apoio que sirva de aporte ao professor de matemática em sua prática docente ao ensinar tal conteúdo.

3 UM APANHADO HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

A origem do conceito de função ou início do raciocínio funcional são assuntos de difícil consenso entre diversos autores. Entre as primeiras manifestações de uma relação de dependência, encontram-se, cerca de 2000 anos a.C., representações de função nos cálculos das tabelas sexagesimais de quadrados, cubos, raízes e exponenciais das tábuas babilônicas e mais tarde, na Grécia, como figuras geométricas nas cônicas de Apolônio e nas espirais de Arquimedes. Esses casos tratavam de situações particulares de dependência funcional. Nesse período não houve tentativa de generalizar alguma relação funcional entre quantidades variáveis.

O século XIV pode ser visto como o momento em que o conceito de função começa ser analisado de forma mais geral. O que facilitou esse processo de generalização do conceito de função foi a associação da matemática com fenômenos naturais. Nessa época os cientistas já entendiam claramente a relação de dependência entre grandezas, mas a dificuldade estava em formalizá-la. (BOYER, 1974) , destaca Nicole Oresme (1323-1382), como precursor dessa formalização, em que antes de 1361 , enquanto estudava um teorema sobre o valor médio de uma forma "uniformemente diforme", teve a idéia de traçar figuras ou gráficos mostrando a forma com que variam as coisas.

Nicole Oresme traçou um gráfico da velocidade por tempo (velocidade x tempo) para um corpo que se move com aceleração constante. Ele marcou os pontos referentes ao tempo (longitudes) ao longo de uma reta horizontal e para cada um destes pontos ergueu um segmento perpendicular a horizontal em que a medida correspondia à velocidade(latitudes). Percebeu então que as extremidades desses segmentos formavam uma reta. Assim, Nicole Oresme parece ter percebido que uma função de uma variável pode ser representada por uma curva, porém de forma eficaz usou somente o caso da função linear. Com essa representação gráfica, pode-se dizer que Nicole Oresme iniciou um esboço da geometria de coordenadas antes de Descartes e ainda, que Oresme poderia ter influenciado Descartes.

No século XV, era das Grandes Navegações, houve um grande incentivo aos estudiosos, em especial, na astronomia, pois era interessante obter um conhecimento científico dos movimentos dos astros, marés, ventos e tudo mais que contribuísse para a segurança e sucesso das navegações. Cientistas como Leonardo da Vinci (1452 – 1510), acreditavam que a Matemática seria capaz de traduzir esses movimentos, colaborando para que o conceito de função começasse a se formalizar.

A partir do século XVII, a evolução da idéia de função torna-se mais intensa e ganha importantes contribuições, como Galileu Galilei (1564 – 1642), que introduziu o tratamento quantitativo nas suas representações gráficas. René Descartes (1596 – 1650) conseguiu unir a geometria à aritmética ao explicar o antigo gráfico de Nicole Oresme e formular o método das coordenadas, permitindo representar funções por meio de gráficos. Descartes também introduziu uma relação de dependência entre quantidades variáveis, usando equações em x e y, possibilitando encontrar os valores de y, usando os valores de x, ou vice-versa, dando, portanto, início ao método analítico para representar funções. Paralelamente, Fermat (1601–1655) também contribuiu para o processo de representação analítica de funções. No ano da morte de Galileu, nasceu Isaac Newton (1642-1727), autor de trabalhos que contribuíram efetivamente no conceito de função. Ao escrever suas idéias sobre funções, Newton pensava na taxa de variação, ou fluxo, de quantidades variáveis continuamente, ou fluentes.

Entre os grandes feitos de Newton com relação à função, está o desenvolver e expressar funções ou fluentes em séries infinitas. Ele fez um excelente trabalho de desenvolvimento da idéia de função, chegando até na tentativa de definir o limite de uma função. Porém, a palavra "função" correspondendo ao objeto matemático, só foi usada pela primeira vez por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), ao se referir a "certos segmentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas relacionadas a curvas". Posteriormente usou para designar o instrumento matemático do movimento e se referir a quantidades dependentes ou a expressões. Em 1697, Jean Bernoulli (1667-1748) introduz a notação x ou *x* para a função da variável x, que durou pouco tempo, ainda usou várias notações para uma função da variável x, como a letra grega , porém a mais próxima da notação usada hoje era escrita sem os parênteses "x". Em um artigo, em 1718, Jean Bernoulli apresentava a seguinte definição de função: "função de uma quantidade variável é uma quantidade composta de alguma maneira desta variável e de quantidades constantes" (ZUFFI, 1999, p. 03). Sendo esta a definição explícita de função mais remota que se tem conhecimento até hoje.

No século XVIII, aparece Leonard Euler (1707-1783), contribuindo nesta evolução da formalização, definindo função da seguinte forma: "uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e de números ou quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica a qual, além da variável z, contém também quantidades constantes, é uma função de z. Por exemplo: a + 3z; az – 4zz; az + b/ aa – zz;, etc., são funções de z.” (SIERPINSKA, apud ZUFFI, 1999, p. 12)

De acordo com (BOTELHO, 1992) o conceito de função definido por Euler foi aceito por muito tempo, porém em 1747 o conceito é questionado quando D’Alembert (1717-1783) fala em funções arbitrárias, como a usada para solucionar o problema da equação diferencial da corda vibrante. A busca pelo conceito ideal de função é retomada.

Em 1734, Euler introduz a notação f(x) para representar uma função f da variável x e em 1755, redefine seu conceito da seguinte forma: “Se algumas quantidades dependem de outras quantidades de modo que uma alteração nas segundas implique uma alteração nas primeiras, então as primeiras são chamadas de funções das segundas”. (YOUSCHKEVITCH, apud BOTELHO, 1992, p. 119)

Segundo (ZUFFI, 1997) neste período as definições começam a receber mais rigor, mas ainda ligadas às expressões analíticas, o que as distanciavam da definição atual que não considera que uma função esteja condicionada a uma expressão analítica. Augustin Cauchy (1789-1857) também deixa sua contribuição na busca do conceito ideal de função, ele a definia da forma: “Chamam-se funções de uma ou várias quantidades variáveis às quantidades que se apresentam, no cálculo, como resultados de operações feitas sobre uma ou várias outras quantidades constantes ou variáveis”. (SIERPINSKA, apud ZUFFI, 1999, p. 13)

A definição aceita até meados do século XX foi a de Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859), que em 1837, definiu função da seguinte maneira: “Se uma variável y está relacionada a uma variável x de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x”. (SIERPINSKA, apud ZUFFI, 1999, p. 13)

Em 1939, nas publicações de Bourbaki (pseudônimo de um grupo de matemáticos) aparece a definição de função aceita atualmente na matemática: “Uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de X x Y, tal que, se $(x,y) \in f$ e $(x,y') \in f$, então $y = y'$ ” (SIERPINSKA, apud ZUFFI, 1999, p. 14).

4 FUNÇÃO

4.1 CONCEITO DE FUNÇÃO

Segundo (FLEMMING, 2006), o conceito de função é um dos mais fundamentais da Matemática. Nota-se pelo seu papel integrador, seja entre diferentes áreas da Matemática, como por exemplo álgebra e geometria, ou entre a teoria matemática e o contexto de cada época, modelando fenômenos de diversos campos do conhecimento, desde situações mais simples às mais complexas. Tal conceito trata da correspondência entre conjuntos, basicamente da associação de elementos de um conjunto a elementos de outro conjunto.

Na busca bibliográfica por definições de função, foram selecionadas algumas encontradas em livros de nível médio e superior, que entre palavras ou maneiras diferentes de conceituar uma função, fornecem concepções pertinentes a este conceito matemático.

Para isso adotamos como base a definição apresentada no livro Números e Funções Reais, do curso PROFMAT, que servirá de parâmetro para as demais definições que apresentaremos neste trabalho. Lima define função da forma:

Definição 4.1. *Dados dois conjuntos X, Y, uma função $f : X \to Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se "y igual a f de x"). O conjunto X chama-se o domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$.(LIMA, 2013), (p. 40)*

Notamos assim que uma função é constituída de três objetos: domínio, contradomínio e uma regra, que é uma relação entre o domínio e o contradomínio. O *domínio* de uma função é o conjunto onde a função é definida, o *contradomínio* é o conjunto onde a função toma os elementos correspondentes do domínio, de acordo com a regra, e a *regra* da função é a lei de correspondência que permite a associação dos elementos do domínio com elementos do contradomínio.

Em *Um Curso de Cálculo* (GUIDORIZZI, 2001), encontra-se a seguinte definição:

Definição 4.2. *Entendemos por uma função f uma terna $(A, B, a \mapsto b)$, onde A e B são dois conjuntos e $a \mapsto b$, uma regra que nos permite associar a cada elemento a de A um único b de B. O conjunto A é o domínio de f e indica-se por D_f, assim $A = D_f$. O conjunto B é o contradomínio de f. O único b de B associado ao elemento de a de A é indicado por $f(a)$ (leia: f de a); diremos que $f(a)$ é o valor que f assume em a ou que $f(a)$ é o valor que f associa a a. Quando x percorre o domínio de f, $f(x)$ descreve um conjunto denominado imagem de f e que se indica por Imf:*

$$Imf = \{f(x)|x \in D_f\}$$

Uma função de f de domínio A e contradomínio B é usualmente indicada por $f : A \to B$ (leia: f de A em B).(GUIDORIZZI, 2001), (p. 37).

Percebemos que os elementos contidos na definição de Lima, também estão presentes na definição de Guidorizzi, visto a mesma apresenta a função como uma regra que associa cada elemento do domínio a um único elemento do contradomínio, além de definir os conjuntos domínio, contradomínio e imagem.

Já em *Cálculo A*, de (FLEMMING, 2006), tem-se:

Definição 4.3. *Sejam A e B subconjuntos de R. Uma função $f : A \to B$ é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B. O conjunto A é chamado domínio de f e e denotado por $D(f)$. B é chamado de contradomínio ou campo de valores de f. (FLEMMING, 2006), (p. 12).*

Escrevemos:

$$\begin{aligned} f: \quad & A \to B \\ & x \to f(x) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & A \xrightarrow{f} B \\ & x \to y = f(x) \end{aligned}$$

A definição 4.3 embora conceitue regra, domínio e contradomíno, não define o conjunto imagem de uma função, a qual está descrita na definição 4.1, usada como base.

Em um contexto mais formal, temos que dada a função $f : A \to B$, $y = f(x) e X \subset A$, define-se a imagem do conjunto X pela função f como sendo $\{f(x) : x \in X\}$ e denota-se por

$f(x)$. Assim, $f(x) \preceq \{f(x) : x \in X\}$ ou $y \in f(x) \Leftrightarrow existe x \in X$ tal que $y = f(x)$. Em particular, $f(A)$ chama-se *imagem da função*.

Dos materiais destinados ao Ensino Médio, selecionamos a definição de (DANTE, 2013), do livro *Matemática: Contextos e Aplicações, volume 1*:

Definição 4.4. *Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$. (DANTE, 2013), (p. 40)*

Nesta definição, o autor não faz considerações acerca dos conjuntos domínio, contra-domíno e imagem de uma função, como feito na definição do livro Números e Funções Reais.

Nas consultas bibliográficas, verificamos que uma função também pode ser definida como um caso particular de uma relação entre elementos de dois conjuntos. Tal fato pode ser verificado em (NETO, 2012), que define uma relação entre elementos de dois conjuntos:

Definição 4.5. *Dados dois conjuntos não vazios X e Y, uma **relação** de X em Y (ou entre X e Y, nessa ordem) é um subconjunto R do produto cartesiano [1] $X \times Y$, isto é, R é um conjunto de pares ordenado do tipo (x,y), com $x \in X$ e $y \in Y$. Se R é uma relação de X em X, diremos simplesmente que R é uma relação em X. (NETO, 2012), (p. 5)* Notação: $xRy \Leftrightarrow (x,y) \in XxY$.

Exemplo 4.6. *o conjunto $R = \{(x,y) \in X \times Y; x \geq y\}$, onde $X = \{1,2,3\}$ e $Y = \{2,3,4,5\}$, é uma relação de X em Y que tem por elementos os pares ordenados $(2,2)$, $(3,2)$ e $(3,3)$, ou seja, $R = \{(2,2), (3,2), (3,3)\}$.*

Na sequência, Neto define função:

Definição 4.7. *Dados dois conjuntos não vazios X e Y, uma relação f de X em Y é uma função se a seguinte condição for satisfeita:*

$$\forall x \in X, \exists \text{ um único } y \in Y; xfy. \text{ (NETO, 2012), (p. 6)}$$

Com isso, tem-se que, se $f : X \to Y$ é uma função e $f(x) = y$, então o par $(x,y) \in X \times Y$ é relacionado por f, isto é, satisfaz xfy. Ou seja, uma função pode ser definida como um conjunto de pares ordenados que satisfazem à condição da definição 4.7.

A definição acima diferencia-se da definição de Lima por apresentar a função como um caso particular de uma relação, além de não conceituar os conjuntos domínio, contradomínio e

[1] Segundo (LIMA, 2007), o produto cartesiano dos conjuntos X e Y é o conjunto XxY cujos elementos são todos os pares ordenados (x,y) cuja primeira coordenada pertence a X e a segunda a Y. Portanto, $XxY = \{(x,y); x \in X$ e $y \in Y\}$.

imagem de f. Mas seguindo o pensamento descrito na definição 4.1, Neto apresenta uma regra, neste caso na forma de uma condição que deve ser satisfeita em uma relação.

Adotando a definição 4.5, podemos afirmar que o exemplo 4.6 trata de uma relação que não é função, pois não satisfaz a condição, dado que os pares ordenados $(3,2)$ e $(3,3)$ relacionam o elemento $3 \in X$ a dois elementos distintos de Y.

Observamos ainda que por meio das definições anteriores, podemos concluir que duas condições são necessárias e suficientes para que uma regra determine o conjunto de uma função $f : X \to Y$, ou seja:

1. Não deve haver exceções: para todo $x \in X$, a regra deve fornecer $f(x) \in Y$.

2. Não deve haver ambiguidades: para cada $x \in X$, a regra deve fornecer um único $f(x) \in Y$.

Na próxima seção, abordaremos a utilização de diagramas de setas como ferramenta de apoio para conceitar uma função.

4.2 FUNÇÃO POR MEIO DE DIAGRAMAS

O emprego de diagramas aparece como uma forma de ilustrar a ideia que o conceito de função oferece. No livro Tópicos de Matemática Elementar encontra-se um exemplo desta utilização:

Sejam dados dois conjuntos não vazios X e Y. Informalmente, uma **função** f de X em Y é uma *regra* que associa a cada $x \in X$ um único $y \in Y$. Por vezes podemos visualizar uma função $f : X \to Y$ de uma maneira mais concreta por meio de diagramas como o da figura 1.1, onde cada seta indica que elemento $y \in Y$ está associado a cada $x \in X$. (NETO, 2012), (p.2)

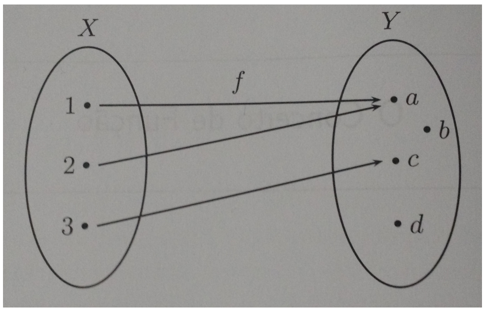


Figura 1: exemplo de função f de X em Y

Neste exemplo, f representa uma função de X em Y, já que satisfaz a definição de

Lima, onde o conjunto $X = \{1,2,3\}$ é o domínio, o conjunto $Y = \{a,b,c,d\}$ é o contradomínio e como $f(1) = a$, $f(2) = a$ e $f(3) = c$, tem-se que $I = \{a,c\}$ é a imagem de f. O diagrama de setas, embora não consiga representar todos tipos de funções, permite uma concepção menos abstrata do conceito. A definição de função consente que um ou mais elementos do contradomínio não possuam correspondentes no domínio ou, ainda, que um ou mais elementos do contradomínio possuam mais que um correspondente no conjunto domínio. Essas permissões do conceito são mostradas no diagrama acima, onde se vê, no conjunto contradomínio, que o elemento a "recebe" duas setas e os elementos b e d não "recebem" setas.

Ressaltamos que neste mesmo exemplo, colocando o conjunto Y como domínio, o conjunto X como contradomínio e mantendo a associação entre os mesmos elementos, não teremos mais uma função, pois sobrariam os elementos b e d do domínio sem correspondentes no contradomínio e o elemento a do domínio possuiria duas imagens em X. Não satisfazendo as condições 1 e 2 da definição.

Mais dois diagramas são exibidos, desta vez com exemplos que não correspondem a funções:

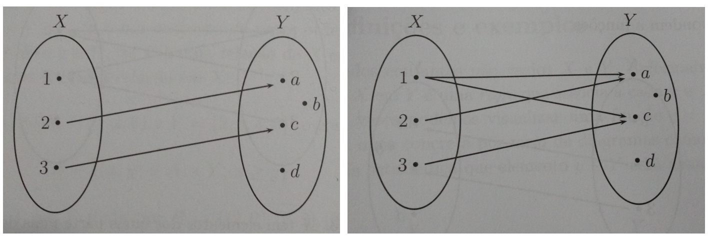


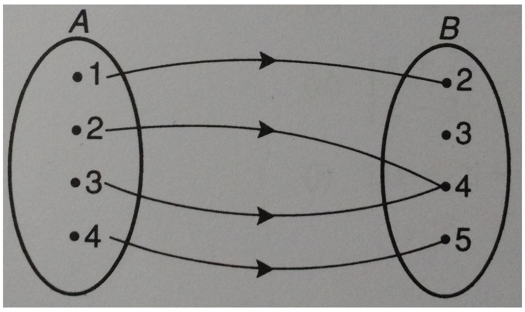
Figura 2: exemplos que não satisfazem alguma condição para definir uma função

No primeiro diagrama não existe seta partindo do elemento 1 do conjunto X, ou seja, esse elemento de X não possui correspondente no conjunto Y, logo não satisfaz a condição 1 da definição.

No segundo diagrama partem mais de uma seta do elemento $1 \in X$, isto é, um elemento do conjunto X possui mais de um correspondente no conjunto Y, não atendendo a condição 2 da definição de função.

(FLEMMING, 2006) também faz uso de diagramas para exemplificar o conceito apresentado:

Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,3,4,5\}$. $f : A \to B$ dada pelo diagrama abaixo é uma função de A em B.

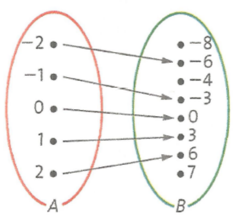


É possível notar que todos os elementos do conjunto *A* (domínio) possuem uma, e apenas uma, *ligação* com algum elemento do conjunto *B* (contradomínio) e, mesmo que o elemento 4 do contradomínio possua duas *ligações* com elementos do domínio, este diagrama satisfaz as condições 1 e 2 para representar uma função.

Ressaltamos que apesar dos diagramas serem úteis para a exemplificação de alguns casos especiais de funções, quando o domínio e o contradomínio são conjuntos discretos, eles não podem ser utilizados quando tratamos de funções definidas sobre o conjuntos dos números reais.

4.3 O CONCEITO EM EXEMPLOS

Exemplo 4.8. *(Dante, p. 45) Observe os conjuntos A e B relacionados da seguinte forma: em A estão alguns números inteiros e em B, outros. Devemos associar cada elemento de A a seu triplo em B.*



$x \in A$	$y \in B$
−2	−6
−1	−3
0	0
1	3
2	6

Figura 3: Diagrama e tabela da relação de *A* em *B*

O exemplo satisfaz a definição 4.1, pois apresenta os conjuntos domínio (conjunto A), contradomínio (conjunto B) e uma regra que associa cada elemento do conjunto A a algum elemento do conjunto B.

Note que todos os elementos de A tem correspondente em B e a cada elemento de A corresponde um único elemento de B. Neste caso, temos uma função de A em B, expressa pela fórmula $y = 3x$.

Exemplo 4.9. *(Flemming, p. 13) Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,3,4,5\}$.*

$$\begin{aligned} g: \quad & A \to B \\ & x \to x+1, \end{aligned}$$

é uma função de A em B. Podemos representar g em diagrama.

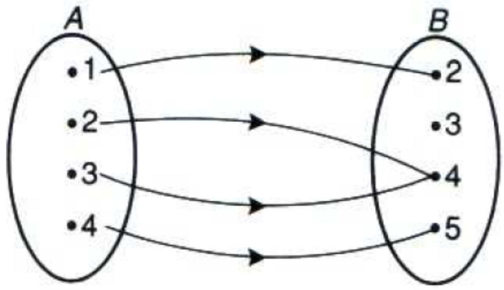


Figura 4: Diagrama da função g

Este exemplo mostra o conjunto A como domínio da função g, o conjunto B como contradomínio e a lei de associação $x \to x+1$ como a regra que relaciona os elementos dos conjuntos A e B. Percebemos que cada elemento de A possui um, e somente um, correspondente em B, contemplando assim a definição de Lima.

Exemplo 4.10. *(LIMA, 2007) (p.14) Sejam P o conjunto dos polígonos do plano, $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $f: P \to \mathbb{R}$ a função que associa a cada polígono x sua área $f(x)$.*

Aqui temos o conjunto P como domínio, o conjuntos dos números reais como contradomínio e a regra que faz cada polígono corresponder a um número real, como cada polígono possui um único valor para área, este exemplo satisfaz as condições para representar uma função.

Exemplo 4.11. *(Lima, p. 14) Sejam T o conjunto dos triângulos do plano e $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Consideremos a tentativa de definir uma função $f: \mathbb{R}^+ \to T$ pela regra seguinte: a cada número real $x > 0$ façamos corresponder o triângulo $f(x)$, cuja área é x. Evidentemente, há ambiguidades: dado um número real $x > 0$, existe uma infinidade de triângulos cuja área é x. A regra não define uma função, pois não satisfaz a condição 2 da definição.*

Exemplo 4.12. *Sejam S o conjunto dos segmentos de reta do plano Π e Δ o conjunto de retas desse mesmo plano. A regra que associa a cada segmento $AB \in S$ sua mediatriz $g(AB)$ define uma função $g : S \to \Delta$.*

O conjuntos Π é o domínio, o conjunto Δ o contradomínio e como cada segmento de reta possui somente uma mediatriz, o exemplo contempla a definição de função.

Exemplo 4.13. *A correspondência que associa a cada número natural n seu sucessor $n+1$ define uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, com $s(n) = n+1$, visto que o domínio e o contradomínio são o conjunto dos números naturais e todo número natural possui somente um sucessor.*

Para que uma regra ou relação defina uma função, o domínio e contradomínio não precisam ser necessariamente conjuntos numéricos ou matemáticos. Como veremos nos exemplos a seguir:

Exemplo 4.14. *Considere como domínio o conjunto X constituído por todos os seres humanos existentes e como contradomínio o conjunto Y com os tipos sanguíneos, B = {A,B,AB,O}. A regra que associa cada pessoa ao seu tipo sanguíneo representa uma função $f : X \to Y$, já que cada pessoa possui um, e somente um, tipo sanguíneo.*

Exemplo 4.15. *Considere uma sala de aula com uma turma de alunos e cadeiras, de modo que o número de alunos não ultrapasse o número de cadeiras, a lei de associação que diz que cada aluno deve sentar em uma, e apenas uma, cadeira representa uma função, onde o domínio é o conjunto constituído por todos os alunos da turma, o contradomínio é o conjunto com as cadeiras e a imagem é o conjunto composto pelas cadeiras que possuem algum aluno sentado.*

4.4 FUNÇÃO POR MEIO DE FÓRMULAS

Ainda que relações entre conjuntos não numéricos possam satisfazer o conceito de uma função, é usual, nas bibliografias que tratam do assunto, a representação de função por meio de fórmulas matemáticas. Aparecendo tanto em situações estritamente matemáticas, como em situações que envolvam outras áreas do conhecimento. Por exemplo, em (NETO, 2012) temos:

> O mais das vezes, trabalharemos com funções $f : X \to Y$ tais que $X, Y \subset \mathbb{R}$. Em tais casos, geralmente indicaremos quem é o elemento $f(x) \in Y$ associado a um elemento genérico $x \in X$ por meio de uma *fórmula* em x que explicite uma regra que a função deva satisfazer. Por exemplo, podemos dizer: *considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.* Isto quer dizer que a função associa, a cada $x \in \mathbb{R}$, seu quadrado x^2. Veja que os requisitos definidores de uma função estão satisfeitos, uma vez que, a cada $x \in \mathbb{R}$ temos associado um único outro real $f(x)$, qual seja, x^2. Assim é que, ainda em relação a esse exemplo, temos $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$, $f(3) = 3^2 = 9$, etc.

Quando $X,Y \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to Y$ é uma função tal que o elemento $f(x) \in Y$ associado a $x \in X$ é dado por uma fórmula em x, denotamos por vezes tal correspondência escrevendo

$$\begin{aligned} f: \quad & X \to Y \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

Assim, a função do parágrafo anterior, que associa a cada $x \in X$ seu quadrado x^2, poderia ser denotada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

Observemos mais alguns exemplos:

Exemplo 4.16. *Um fabricante produz peças para computadores pelo preço de R\$ 2,00 cada uma. Calcula-se que, se cada peça for vendida por x reais, os consumidores comprarão, por mês, $600 - x$ unidades. Assim podemos expressar o lucro mensal f do fabricante como função do preço x da forma $f(x) = x(600 - x) - 2(600 - x)$, ou seja, $f(x) = (600 - x)(x - 2)$.*

Como x representa o valor de venda de cada peça, devemos ter $x \geq 0$ e como a quantidade mensal vendida será $600 - x$, temos que $600 - x \geq 0$, ou seja, $x \leq 600$. Portanto, o domínio da função é $D(f) = (0, +600]$. O contradomínio é $\mathbb{R}$, pois o lucro pode ser zero ou até mesmo negativo. Neste caso, a empresa estará tendo prejuízo com a venda do produto.

Exemplo 4.17. *(IEZZI G., 2001)(p.108) Considere esta tabela para o cálculo do imposto de renda a ser pago pelos contribuintes em um certo mês de 1990.*

x	i	d
Renda líquida (Cr\$)	*Alíquota (%)*	*Parcela a deduzir*
até 25.068,00	*isento*	–
de 25.068,01 a 83.561,00	*10*	*2.506,80*
acima de 83.561,00	*25*	n

Considerando x como a renda líquida de um contribuinte, o imposto a pagar é função f de x. O contribuinte deve multiplicar a sua renda líquida pelo valor da alíquota e subtrair o resultado da parcela a deduzir. Além disso, tal função deve ser contínua, para não prejudicar nem beneficiar contribuintes cuja renda líquida se situe em faixas distintas da tabela. Note, por exemplo, que, ao passar da primeira faixa (isentos) para a segunda (alíquota de 10%), a parcela a dedizur (2.506,80) não permite saltos no gráfico.

a) Utilize os valores de i e d na tabela e dê a expressão da função imposto a pagar relativa a uma renda x, em cada faixa da tabela.

b) Determine o valor de n da tabela para tornar a função obtida no item a) contínua.

Solução: *(a) Como dito no enunciado do problema, para cada valor de x em cada determinada faixa, devemos multiplicar pelo valor da alíquota e subtrair a parcela a deduzir, assim:*

$$f(x) = \begin{cases} x.0 - 0 & se\ 0 \leq x \leq 25.068,00 \\ x.10\% - 2.506,80 & se\ 25.068,00 < x \leq 83.561,00 \\ x.25\% - n & se\ x > 83.561,00 \end{cases}$$

Simplificando as expressões, obtemos

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ 0 \leq x \leq 25.068,00 \\ \frac{x}{10} - 2.506,80 & se\ 25.068,00 < x \leq 83.561,00 \\ \frac{x}{4} - n & se\ x > 83.561,00 \end{cases}$$

(b) Neste caso, basta observar quando há uma mudança da segunda para a terceira faixa, o imposto cobrado deve ser o mesmo, logo, n deve satisfazer a equação

$$\frac{83.561,00}{4} - 2.506,80 = \frac{83.561,00}{4} - n.$$

Resolvendo esta equação, obtemos $n = 15.040,95$.

4.4.1 O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Vamos agora introduzir o conceito de gráfico de um função. Tal conceito é muito interessante para o estudo de funções, pois através dele podemos fazer uma visualização de diversas propriedades associadas às funções. Iremos ver muitas situações onde tal aplicação será necessária ao longo deste texto. Consideremos então a seguinte definição:

Definição 4.18. *(GUIDORIZZI, 2001)(p.37) Seja* $f : X \to Y$ *uma função. O conjunto*

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

denomina-se gráfico de f*; assim, o gráfico de* f *é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados* (x, y) *de números reais.*

Se pensarmos num plano, munido de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico aproximado de f pode ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f.

A maneira mais simples de se construir o gráfico aproximado de uma função é através da plotagem de alguns pontos da forma $(x, f(x))$, onde x pertence ao domínio da função f, e depois unir tais pontos através de um linha contínua, se o domínio for um intervalo da reta real. Vamos exemplificar essa ideia através da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 1$.

Inicialmente, vamos calcular alguns valores para a função, para determinar os pares ordenados, que irão compor os pontos a serem plotados no gráfico. Tais valores são apresentados na tabela abaixo:

x	y=x+ 1
-1	0
0	1
1	2
2	3
3	4

Vamos agora plotar tais pontos no plano cartesiano. O resultado deste processo pode ser visto na figura abaixo (Fonte: Site Brasil Escola[2]).

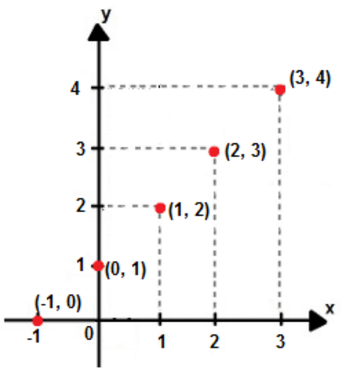


Figura 5: Pares ordenados no plano cartesiano

Agora que já temos estes pontos colocados no plano cartesiano, nosso último passo é unir tais pontos. Com isso, conluímos a construção aproximada do gráfico, que pode ser visto na figura abaixo (Fonte: Site Brasil Escola[3]).

[2] http://brasilescola.uol.com.br/matematica/como-construir-grafico-uma-funcao.htm

[3] http://brasilescola.uol.com.br/matematica/como-construir-grafico-uma-funcao.htm

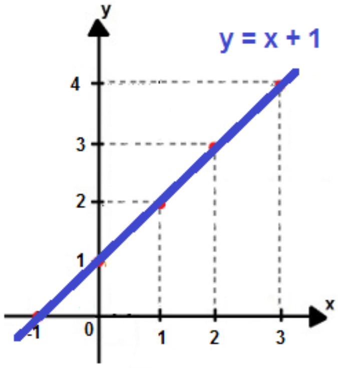


Figura 6: Gráfico da função f definida por $f(x) = x+1$

Outra propriedade interessante sobre a representação cartesiana, é que podemos verificar se uma relação entre dois conjuntos X e Y é uma função ou não, somente pela análise de tal representação. Para isto, basta verificarmos se a reta paralela ao eixo y, conduzida pelo ponto $(x,0)$, para $x \in X$, encontra sempre o gráfico de f em um só único ponto (IEZZI G., 2001)(p.82). Se uma dessas reta não cortar o gráfico, significa que para aquele valor x, no domínio da função, não possui imagem, e portanto a definição de função não é satisfeita. Se, por outro lado, uma das retas cortar o gráfico em dois pontos ou mais, para um dado x no domínio da função, isso signica que um mesmo valor no domínio possui duas ou mais imagens, o que também não pode ocorrer para uma função. Nas figuras abaixo(Fonte: Site Matematiques[4]), temos dois exemplos dessas situações:

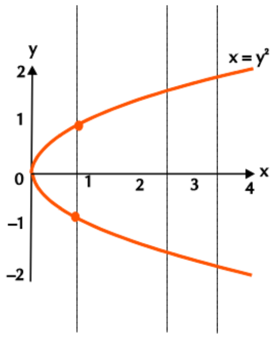


Figura 7: Gráfico não representa uma função

Observe que, para o valor $x = 1 \in D(f)$, temos dois valores de imagem. Ou, como comentamos acima, a reta $x = 1$ corta o gráfico em dois pontos. Já na figura abaixo (Fonte: Site Matematiques[5]), temos o gráfico de uma função.

[4] www.matematiques.com.br
[5] www.matematiques.com.br

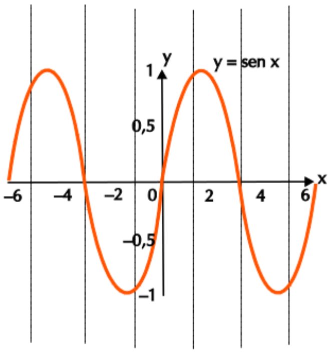


Figura 8: Gráfico de uma função

4.4.2 FUNÇÕES IGUAIS

Neste, momento, é interessante analisarmos quando duas funções são consideradas iguais. Para isto, temos a seguinte definição:

Definição 4.19. *(IEZZI G., 2001)(p.93) Duas funções $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$ são iguais se, e somente se, apresentarem:*

a) domínios iguais, ou seja, $X = Z$;

b) contradomínios iguais, ou seja, $Y = W$;

c) $f(x) = g(x)$ para todo x do domínio.

Vale ressaltar que no item c) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X, x \in Z$.

Isto equivale a dizer que duas funções f e g são iguais se, e somente se, forem conjuntos iguais de pares ordenados.

Exemplo 4.20. *(IEZZI G., 2001)(p.93) Sejam os conjunto $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{-2,-1,0,1,2\}$, e as funções de A em B definidas por*

$$f(x) = x - 1 \text{ e } g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$$

Tais funções são iguais, pois:

$$x = 1 \Leftarrow f(1) = 1 - 1 = 0 \text{ e } g(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0,$$
$$x = 2 \Leftarrow f(2) = 2 - 1 = 1 \text{ e } g(2) = \frac{4-1}{2+1} = 1,$$

$$x = 3 \Leftarrow f(3) = 3 - 1 = 2 \text{ e } g(3) = \frac{9-1}{3+1} = 2,$$

ou seja, $f = g = \{(1,0),(2,1),(2,3)\}$.

Exemplo 4.21. *(IEZZI G., 2001)(p.94) As funções* $f(x) = x$ *e* $g(x) = |x|$ *de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *não são iguais, pois* $f(x) = x \neq |x| = g(x)$ *para* $x < 0$.

Ressaltamos que as três condições devem ser satisfeitas para termos duas funções iguais: domínios iguais, contradomínios iguais e $f(x) = g(x)$, para todo x no domínio das funções.

5 PROPRIEDADES DE FUNÇÕES

5.1 OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

Conforme encontramos em (FLEMMING, 2006), podemos adicionar, subtrair, multiplicar e dividir funções para obter novas funções. Essas operações são definidas como segue, para funções reais. Observamos, antes de continuar, que os livros de Cálculo em geral, expõem a expressão da função nos reais, definem o domínio como o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde tal expressão esteja bem definida e usam o contradomínio como sendo $\mathbb{R}$. A menos de menção contrária, também utilizaremos tal ideia aqui.

Definição 5.1. *(FLEMMING, 2006)(p.26) Dadas as funções f e g, sua soma $f+g$, diferença $f-g$, produto $f.g$ e quociente f/g são definidas por:*

a) $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$;

b) $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$;

c) $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;

d) $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

O domínio das funções $f+g, f-g$ e $f.g$ é a intersecção dos domínios de f e g. O domínio de f/g é a intersecção dos domínios de f e g, excluindo-se os pontos x onde $g(x) = 0$.

Conforme observamos em (NETO, 2012) (pg.8), uma forma alternativa de definir algumas operações com funções, é já exigir que as funções f e g tenham o mesmo domínio: No contexto de funções reais de variável real, temos maneiras padrão de construir novas funções a partir de outras já conhecidas, utilizando as operações aritméticas do contradomínio Rdas mesmas. Mais precisamente, dados um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$, um número real c e funções reais de uma variável real $f, g : X \to \mathbb{R}$ (de mesmo domínio!), definimos as funções

$$f+g, f\cdot g \text{ e } c\cdot f : X \to \mathbb{R}$$

Pondo

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),\ (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x),\ (c\cdot f)(x) = c\cdot f(x),$$

para todo $x \in X$.

Observamos ainda, que pelo item (c), podemos definir potências para uma função f : temos primeiramente $(f.f)(x) = f^2(x)$. Se repetirmos o processo mais uma vez, obtemos $(f.f)(f)(x) = f^3(x)$. Repetindo o processo n vezes, obtemos $(f.f.f...f)(x) = f^n(x)$, para qualquer n natural. Se considerarmos $n \in \mathbb{Z}$, temos os inversos multiplicativos.

Exemplo 5.2. *(FLEMMING, 2006)(p.26) Sejam $f(x) = \sqrt{5-x}$ e $g(x) = \sqrt{x-3}$. Então:*

$$(f+g)(x) = \sqrt{5-x}+\sqrt{x-3},$$

$$(f-g)(x) = \sqrt{5-x}-\sqrt{x-3},$$

$$(f.g)(x) = \sqrt{5-x}.\sqrt{x-3},$$

$$(f/g)(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-3}}.$$

Como $D(f) = (-\infty,5]$ e $D(g) = [3,+\infty)$, então o domínio de $f+g, f-g$ e $f.g$ é $[3,5]$.

O domínio de f/g é $(3,5]$. O ponto $x = 3$ foi excluído porque $g(x) = 0$ quando $x = 3$.

Podemos ainda definir o produto de uma função f por um escalar $k \in \mathbb{R}$, ou ainda, o produto de uma função f por uma função constante.

Definição 5.3. *(FLEMMING, 2006) (p.26) Se f é uma função e k é um número real, difinimos a função kf por*

$$(kf)(x) = k.f(x).$$

O domínio de kf coincide como domínio de f.

Considere por exemplo a função $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2-1}$. Então, se $k = 3$, temos

$$(3f)(x) = 3f(x) = 3\sqrt{x^2-1},$$

e o domínio de $3f$ é igual ao domínio de f, $D(f) = [1,+\infty)$.

5.2 COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Nesta seção, introduziremos o conceito de composição entre duas funções f e g. Intuitivamente, a ideia de composição de funções é a seguinte: se temos uma função que vai de um conjunto X para um conjunto Y, e outra função que vai de Y para o conjunto Z, será que existe uma função de vai diretamente de X para Z? Veremos quais são as condições necessárias e suficientes para que isso aconteça, além de uma série de exemplos que nos ajudarão a verificar o método de obtenção da função composta, quando ela existir. Iniciamos então com a seguinte definição:

Definição 5.4. *(NETO, 2012)(p.28) Dadas as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, a função composta de f e g (nessa ordem) é a função $g \circ f : X \to Z$ definida, para cada $x \in X$, por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Percebemos que o domínio da função g deve ser igual ao contradomínio da função f. Como afirma (LIMA, 2007), na página 20, ao definir função composta.

Na figura abaixo, temos um diagrama que representa a composição de funções. Tal figura foi retirada do site Wikipedia[1].

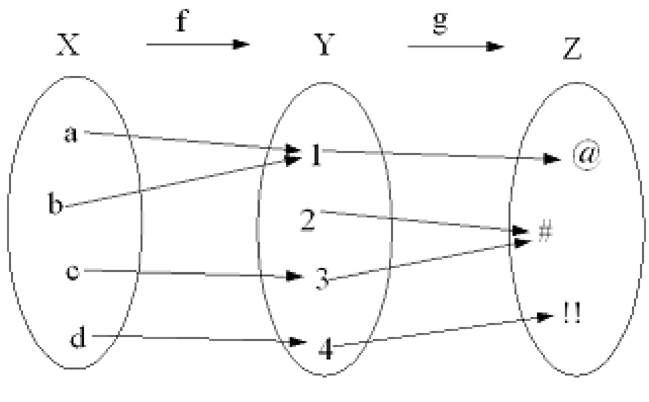


Figura 9: Diagrama de composição de funções

Em (FLEMMING, 2006), temos a seguinte observação : O domínio de $g \circ f$ é o conjunto de todos os pontos x no domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g.

Simbolicamente,

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) | f(x) \in D(g)\}.$$

[1] `https://pt.wikipedia.org/wiki/Composicao_de_funcoes`, Acesso em 17 de Setembro de 2016.

Nossa segunda observação é sobre a notação $g \circ f$: lemos essa expressão como "g composta com f", "g círculo f"ou ainda "g bola f".

De maneira bem geral, a partir dessa definição, percebemos que para encontrarmos a imagem de $x \in X$ por $g \circ f$, precisamos primeiramente encontrar a imagem de $f(x) \in Y$, e depois aplicarmos esse valor em g. Como f e g são funções bem definidas, fica fácil ver que $g \circ f$ é também uma função. Vamos ver agora exemplos de composição de funções.

Exemplo 5.5. *(NETO, 2012)(p.29) Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Temos $g \circ f$ e $f \circ g$ funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{(f(x)^2) + 1} = \frac{1}{(x^2)^2 + 1} = \frac{1}{x^4 + 1}$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^2 = \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1}.$$

No exemplo acima, observamos algo muito importante: podemos ter $f \circ g \neq g \circ f$, isto é, a ordem com que fazemos a composição das funções interfere no resultado final. É importante observarmos também que nem sempre ambas as composições $f \circ g$ e $g \circ f$ são possíveis de construção. Isso ocorre, por exemplo, quando tomamos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, com $X \neq Z$. Entretanto, o que o exemplo acima nos mostra é que, mesmo quando $X = Z$, pode ocorrer de termos $f \circ g \neq g \circ f$.

No exemplo abaixo temos uma situação um pouco diferente da anterior:

Exemplo 5.6. *(NETO, 2012)(p.30).Sejam $f, g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ funções tais que*

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{3x^2} \text{e } (f \circ g)(x) = \frac{x + 2}{3}.$$

Encontre a expressão da função g.

Solução: *Segue da definição de função composta que*

$$\frac{x + 2}{3} = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)^2 + 1}{3g(x)^2},$$

de modo que

$$\frac{g(x)^2 + 1}{3g(x)^2} = \frac{x + 2}{3},$$

ou ainda,

$$3g(x)^2 + 3 = 3(x + 2)g(x)^2.$$

Olhando essa expressão como uma equação do primeiro grau em $g(x)^2$, obtemos

$g(x)^2 = \frac{1}{x+1}$ e, daí, $g(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, para cada $x > 0$. Mas, como g deve ter imagem não negativa, deve ser $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, para todo $x > 0$.

Exemplo 5.7. *(IEZZI G., 2001)(p.220) Sejam as funções reais $f(x) = 3x - 5$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$. Determine a lei da função g.*

Solução: *Se $f(x) = 3x - 5$, então trocando-se x por $g(x)$ temos:*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 5,$$

mas é dado que

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 3,$$

então

$$3g(x) - 5 = x^2 - 5,$$

ou seja,

$$g(x) = \frac{x^2 + 2}{3}.$$

Exemplo 5.8. *(IEZZI G., 2001) (p.216) Sejam as funções reais f e g, definidas por $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$.*

a) Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

b) Calcule $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(2)$.

c) Determine os valores do domínio da função $f \circ g$ que produzem imagem 16.

Solução: *a) A lei que define $f \circ g$ é obtida a partir da expressão de f, trocando-se x por $g(x)$:*

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = [g(x)]^2 + 4[g(x)] - 5 = (2x-3)^2 + 4(2x-3) - 5 \\ (f \circ g)(x) &= 4x^2 - 4x - 8.\end{aligned}$$

A lei que define $g \circ f$ é obtida a partir da lei de g, trocando-se x por $f(x)$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(x^2 + 4x - 5) - 3$$

$$(g \circ f)(x) = 2x^2 + 8x - 13.$$

b) Calculemos $f \circ g$ para $x = 2$

$$(f \circ g)(2) = 4.2^2 - 4.2 - 8 = 16,$$

e calculando $g \circ f$ para $x = 2$ temos

$$(g \circ f)(2) = 2.2^2 + 8.2 - 13 = 11.$$

c) O problema em questão, resume-se em resolver a equação

$$(f \circ g)(x) = 16$$

ou seja,

$$4x^2 - 4x - 8 = 16 \Rightarrow 4(x^2 - x - 6) = 0.$$

Portanto, temos as soluções $x = 3$ ou $x = -2$.

Como vimos anteriormente, a operação de composição de funções não é uma operação comutativa, mas ela é associativa, como podemos obeservar através da próxima proposição, encontrada em (NETO, 2012), (p.30).

Proposição 5.9. *Dadas funções $f : X \to Y, g : Y \to Z$ e $h : Z \to W$, temos*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Demonstração:
Veja primeiro que ambas $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$ são funções de X em W. Portanto, para serem iguais, é suficiente que associem, a cada $x \in X$, um mesmo elemento de W. Para isto, basta notar que

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h((g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x). \end{aligned}$$

□

O que esta proposição nos diz então é que, se tivermos três funções f, g, h que podem ser compostas (nesta ordem), não precisamos nos preocupar com qual composição realizar primeiro. Ainda, podemos simplificar a notação e simplesmente escrever $h \circ g \circ f$. Observamos ainda, que podemos generalizar esta ideia e realizar a composição para quatro funções ou mais.

Exemplo 5.10. *(NETO, 2012)(p.31) Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ a função dada por*

$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, encontre a expressão que define a função

$$f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}.$$

Solução: *Veja primeiro que $f^{(n)} : \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Agora,*

$$f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = x,$$

isto é, $f^{(2)}(x) = Id_X$, a função identidade de $X = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Segue daí que

$$f^{(3)}(x) = f \circ f^{(2)} = f \circ Id_x = f,$$

e

$$f^{(4)}(x) = f \circ f^{(3)} = f \circ f = Id_X.$$

Em geral, se já mostramos que $f^{(2k+1)} = f$ e $f^{(2k)} = Id_X$, temos que

$$f^{(2k+1)} = f \circ f^{(2k)} = f \circ Id_X = f$$

e

$$f^{(2k+2)} = f \circ f^{(2k+1)} = f \circ f = Id_X.$$

Logo,segue por indução que $f^{(n)} = f$ quando n for ímpar e $f^{(n)} = Id_X$ quando n for par.

Vale ressaltar aqui uma observação sobre a notação que estamos utilizando: quando escrevemos $f^2(x)$ temos a multiplicação da função f por ela mesma, ou seja, $f^2(x) = f(x).f(x)$. Já quando temos a notação $f^{(2)}(x)$ temos a composição da função f com ela mesma, ou seja $f^{(2)}(x) = f \circ f(x)$.

5.3 BIJETIVIDADE DE FUNÇÕES

Como já vimos em exemplos anteriores, dada uma função $f : X \to Y$, nem sempre a imagem de f é igual ao contradomínio Y. Além disso, pode ocorrer de dois elementos distintos no domínio X terem a mesma imagem em Y. Quando estas situações ocorrem, temos nomenclaturas especiais para tais funções, conforme veremos na definição a seguir:

Definição 5.11. *(NETO, 2012)(p.32) Uma função $f : X \to Y$ é dita:*

(a) Injetora, ou injetiva ou, ainda, uma injeção, se, para todo $y \in Y$, existir no máximo um

$x \in X$ tal que $f(x) = y$.

(b) Sobrejetora, ou sobrejetiva ou, ainda, uma sobrejeção, se sua imagem for todo o conjunto Y, isto é, para todo $y \in Y$, existir pelo menos um $x \in X$, tal que $f(x) = y$.

(c) Bijetora, ou bijetiva ou, ainda, uma bijeção, se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.

Temos um modo relativamente eficiente para verificar se uma função $f : X \to Y$ é injetora: basta verificar se a implicação

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \tag{4}$$

é satisfeita, para todos $x_1, x_2 \in X$. De maneira semelhante, podemos usar a contra-positiva desta afirmação:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in X.$$

Notemos que, pela definição acima, uma função $f : X \to Y$ é sobrejetora se, e somente se, $Im(f) = Y$. (IEZZI G., 2001) (p.222)

A figura abaixo, mostra esta propriedade em um diagrama. (Fonte: Wikipedia[2])

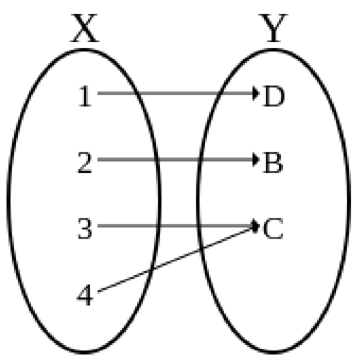


Figura 10: Diagrama de uma função sobrejetora

[2] `https://pt.wikipedia.org/wiki/Funcao_sobrejectiva`. Acesso em 17 de Setembro de 2016.

Em termos de diagramas, temos a seguinte situação para representar uma função injetora (Fonte: Wikipedia [3]).

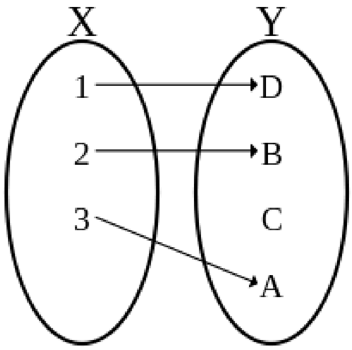


Figura 11: Diagrama de uma função injetora

Já para a representação em diagramas de uma função bijetora, temos o seguinte diagrama (Fonte: Wikipedia [4]).

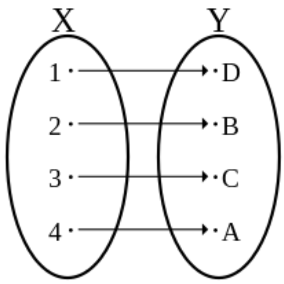


Figura 12: Diagrama de uma função bijetora.

Exemplo 5.12. *(IEZZI G., 2001)(p.224) A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = 2x$ é injetora, pois quaisquer que sejam x_1 e x_2 de $\mathbb{N}$, se $x_1 \neq x_2$, então*

$$f(x_1) = 2x_1 \neq 2x_2 = f(x_2).$$

Exemplo 5.13. *(IEZZI G., 2001)(p.224) A função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ é*

[3] `https://pt.wikipedia.org/wiki/Funcao_injectiva`. Acesso em 17 de Setembro de 2016.
[4] `https://pt.wikipedia.org/wiki/Funcao_bijectiva`. Acesso em 17 de Setembro de 2016.

injetora, pois para quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se $x_1 \neq x_2$, então

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2} = f(x_2).$$

De maneira semelhante, para verificarmos se f é sobrejetora, devemos verificar se para cada $y \in Y$, podemos obter pelo menos uma solução $x \in X$ para a equação $f(x) = y$. Vamos analisar esses conceitos através de alguns exemplos.

Exemplo 5.14. *(IEZZI G., 2001)(p.223) A função $f : \mathbb{R} \to \{y \in \mathbb{R} | y \geq 1\}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ é sobrejetora, pois, para todo $y \in \{y \in \mathbb{R} | y \geq 1\}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^2 + 1$, bastando para isso tomar*

$$x = \sqrt{y-1} \text{ ou } x = -\sqrt{y-1}.$$

Exemplo 5.15. *(NETO, 2012) (p.32) Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio e $f : X \to X$ é uma função tal que $f(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, então f é bijetiva.*

Solução: *Sejam x_1 e x_2 números reais tais que $f(x_1) = f(x_2)$. De acordo com a implicação (4), para mostrarmos que f é injetiva é suficiente provar que $x_1 = x_2$. Para tanto, observe que $f(x_1) = f(x_2)$ implica $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ e, daí, em $x_1 = x_2$, pela hipótese.*

A sobrejetividade de f é imediata: fixado $y \in Y$ e tomando $x = f(y) \in X$, temos $f(x) = f(f(y)) = y$ e, daí, $y \in Im(f)$.

É importante observamos que existem funções que não são nem sobrejetoras e nem injetoras. Como exemplo, vamos considerar a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.

Dado $y \in \mathbb{R}^*_-$, ou seja, o conjunto dos números reais negativos, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = |x|$. Portanto, f não é sobrejetora.

Existem x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$, com x_1 e x_2 opostos, e portanto $x_1 \neq x_2$, tais que

$$|x_1| = |x_2|.$$

Portanto, f não é injetora.

5.3.1 RECONHECIMENTO ATRAVÉS DO GRÁFICO

Através do gráfico de uma função f, podemos verificar se ela é injetora ou sobrejetora ou bijetora. Neste caso, é necessário analisarmos o número de pontos de interseção das retas paralelas ao eixo dos x, conduzidas por cada ponto $(0,y)$ em que $y \in Y$ (contradomínio de f).(IEZZI G., 2001)(p.225).

- Primeiro caso: Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto ou não cortar o gráfico, então a função é injetora.

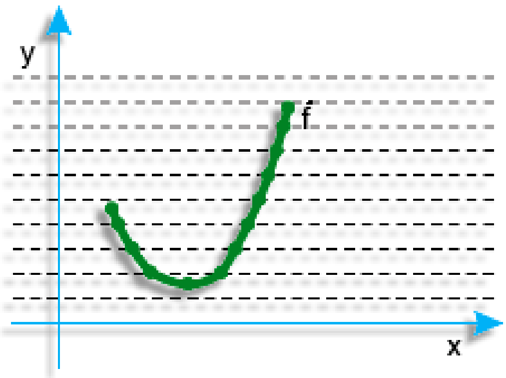


Figura 13: Gráfico de uma função f, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não injetiva.

Já para o caso de uma função injetiva, considere função que pode ser visto na figura abaixo.

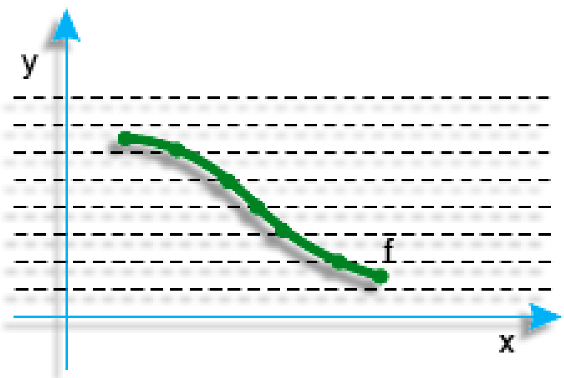


Figura 14: Gráfico de uma função f, onde $f : A \to B$, injetiva.

- Segundo caso: Se cada uma das retas cortar o gráfico em um ou mais pontos, então a função é sobrejetora. Observe que devemos considerar as retas relativas a todos os pontos do contradomínio da função.

  Podemos ver esta situação na figura abaixo:

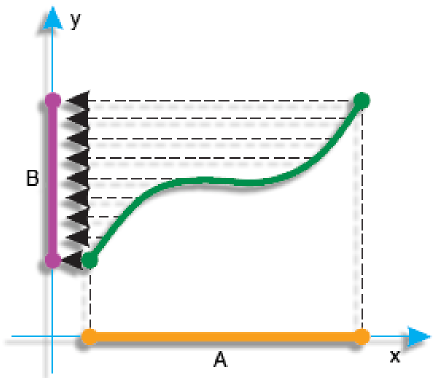


Figura 15: Gráfico de uma função f, $f : A \to B$, sobrejetora

  No gráfico abaixo, temos a situação de um função que não é sobrejetora.

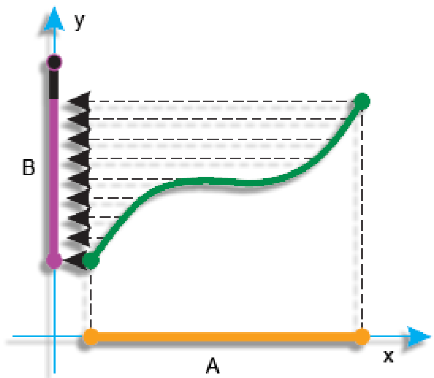


Figura 16: Gráfico de uma função f, $f : A \to B$, não sobrejetora

  Observe que existem pontos do contradomínio que não interceptam o gráfico.

- Terceiro caso: Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto, então a função é bijetora.

  Para este caso, temos a figura abaixo.

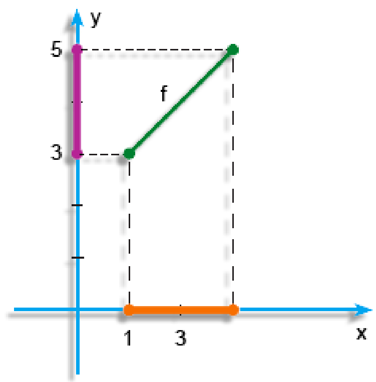


Figura 17: Gráfico de uma função f, $f : [1,3] \to [3,5]$, bijetora

Observamos que todas as figuras desta subseção foram retiradas do Site Objetivo Conteúdo Online[5].

5.3.2 COMPOSTAS DE INJETORAS E SOBREJETORAS

Uma questão que pode surgir neste momento é a seguinte : se fazemos a composição de duas funções injetoras, o resultado será uma função injetora ? E se fazemos a composição de duas funções sobrejetoras, o que podemos esperar da função resultante ? Na proposição a seguir, veremos como se comportam as funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras em relação à composição:

Proposição 5.16. *(NETO, 2012)(p.33) Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções dadas. Então:*

(a) $g \circ f$ injetora $\Rightarrow$ f injetora, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

(b) $g \circ f$ sobrejetora $\Rightarrow$ g sobrejetora, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

(c) g, f injetoras $\Rightarrow$ $g \circ f$ injetora.

[5] http://conteudoonline.objetivo.br

(d) g, f *sobrejetoras* $\Rightarrow g \circ f$ *sobrejetora.*

(e) g, f *bijetoras* $\Rightarrow g \circ f$ *bijetora.*

Demonstração:

(a) Para x_1 e x_2 em X, temos que

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

onde, na última passagem, utilizamos o fato de $g \circ f$ ser injetora.

Temos agora que dar um exemplo no qual f seja injetora, mas $g \circ f$ não o seja. Para tanto, basta tomarmos

$$X = Y = Z = \mathbb{R}, f(x) = x \; e \; g(x) = x^2.$$

(b) Escolhido arbitrariamente $z \in Z$, a sobrejetividade de $g \circ f$ garante a existência de pelo menos um $x \in X$ tal que $z = (g \circ f)(x)$. Mas, daí, $z = g(f(x))$, de sorte que g também é sobrejetora.

Para o exemplo necessário à segunda parte, tomemos novamente

$$X = Y = Z = \mathbb{R}, g(x) = x \; e \; f(x) = x^2.$$

(c) Utilizando sucessivamente as injetividades de g e f, temos, para x_1 e x_2 em X, que

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

e $g \circ f$ também é injetora.

(d) Escolhido arbitrariamente $z \in Z$, a sobrejetividade de g garante a existência de $y \in Y$ tal que $z = g(y)$.

Por outro lado, a sobrejetividade de f assegura a existência de $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Então temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z,$$

de modo que $g \circ f$ também é sobrejetiva.

(e) Segue dos itens (c) e (d) que

$$\begin{aligned} g\ e\ f\ bijetoras &\Rightarrow g\ e\ f\ injetoras\ e\ sobrejetoras \\ &\Rightarrow g \circ f\ injetora\ e\ sobrejetora \\ &\Rightarrow g \circ f\ bijetora. \end{aligned}$$

□

Temos também o seguinte resultado:

Proposição 5.17. *(MONTEIRO, 1978)(p.38) Se as função $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ são tais que $g \circ f = Id_X$, então f é injetora e g é sobrejetora.*

Demonstração:
Seja x um elemento qualquer de X e ponhamos $f(x) = y$, logo $y \in Y$. Temos

$$x = Id_X(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y),$$

portanto, g é sobrejetora.

Sejam x_1 e x_2 dois elementos quaisquer de X e suponhamos que $f(x_1) = f(x_2)$. Temos

$$x_1 = Id_X(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = Id_X(x_2) = x_2.$$

Portanto, f é injetora.

□

5.4 FUNÇÃO INVERSA

No conjunto de todas as funções $f : X \to Y$, aquelas que são bijeções são as que possuem uma característica muito especial: os elementos de X e Y estão em correspondência biunívoca, ou seja, a cada elemento $x \in X$ corresponde um único elemento de Y via f,e vice-versa (NETO, 2012). Nosso questionamento neste momento é o seguinte: será que existe uma função $g : Y \to X$ que faça o ”caminho contrário”da função f? Em caso afirmativo, como encontrá-la? Nosso objetivo nesta sessão é responder a tais questionamentos. Vamos começar com a seguinte definição:

Definição 5.18. *(LIMA, 2007)(p.21) Dadas as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$, diremos que g é uma inversa à esquerda para f quando $g \circ f = Id_X : X \to X$, ou seja, quando $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$.*

Proposição 5.19. *(LIMA, 2007)(p.22) Uma função $f : X \to Y$ possui inversa à esquerda se, e somente se, é injetiva.*

Demonstração:
Se f é injetiva, para cada $y \in f(X)$ existe um único $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Escrevemos $x = g(y)$. Isto define uma função $g : f(X) \to X$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$. Completamos a definição de $g : Y \to X$ pondo, por exemplo, $g(y) = x_0$ (elemento que fixamos em X) para $y \in Y \setminus f(X)$. Obtemos $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = Id_X$.

Reciprocamente, se a inversa à esquerda existe, a injetividade segue da proposição 5.17.

□

Como exemplo, consideremos a função injetiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$, e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) = \frac{y}{3}$. Vamos verificar que g é uma inversa à esquerda para a função f. De fato, temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = \frac{3x}{3} = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

No exemplo a seguir, trataremos da possibilidade de não unicidade da inversa à esquerda de uma função.

Exemplo 5.20. *(LIMA, 2007)(p.21) Sejam A o conjunto dos números reais maiores ou iguais a zero e Ro conjunto de todos os números reais. Consideremos $f : A \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, e $g : \mathbb{R} \to A$, definida por $g(y) = \sqrt{y}$ se $y \geq 0$ e $g(y) = 0$ se $y < 0$. Logo $g \circ f = Id_A$ e, portanto, g é uma inversa à esquerda de f. Note-se que qualquer função $h : \mathbb{R} \to A$, tal que $h(y) = \sqrt{y}$ para $y \geq 0$, é uma inversa à esquerda de f. (A definição dos valores $h(y)$ para $y < 0$ pode ser qualquer, sem que fique afetada a igualdade $h \circ f = Id_A$).*

Definição 5.21. *(LIMA, 2007)(p.22) Uma função $g : Y \to X$ chama-se inversa à direita de uma função $f : X \to Y$ quando $f \circ g = Id_Y : Y \to Y$, ou seja, quando $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$.*

Assim, como na definição anterior, temos uma propriedade para esta situação:

Proposição 5.22. *(LIMA, 2007)(p.22) Uma função possui inversa à direita se, e somente se, é sobrejetiva.*

Demonstração:
Seja $f : X \to Y$ sobrejetiva. Então, para cada $y \in Y$, o conjunto $f^{-1}(y)$ não é vazio. Escolhamos, para cada $y \in Y$, um $x \in X$ tal que $f(x) = y$ e ponhamos $g(y) = x$. Isto define uma função $g : Y \to X$ tal que $f(g(y)) = y$. Logo, g é uma inversa à direita de f.

Reciprocamente, se existe $g : Y \to X$ com $f \circ g = Id_Y$ então, para cada $y \in Y$, escolhendo $x = g(y)$, temos $f(x) = f(g(y)) = y$. Logo, f é sobrejetiva.

□

Exemplo 5.23. *(LIMA, 2007)pg.22 Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(1) = 1$ e, se $x > 1$, $f(x) =$ número de fatores primos distintos que entram na composição de x. Definamos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo $g(y) =$ menor número natural que é o produto de y fatores primos distintos. Então, para todo número natural y, temos $f(g(y)) = y$. Logo, $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$ e, portanto, g é uma inversa à direita para f. Outras funções $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ poderiam ser definidas com a propriedade $f \circ h = Id_{\mathbb{N}}$. Por exemplo, poderíamos por $h(y)$= menor número natural divisível por 13 que é o produto de y fatores primos distintos.*

Como exemplo, consideremos a função sobrejetiva $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dada por $f(x) = x^2$ e a função $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) = \sqrt{y}$. Vamos mostrar que g é um inversa à direita para a função f. De fato,

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y.$$

Pelo que vimos até então, observamos que podemos definir uma função inversa utilizando as definições e proposições que vimos acima: Uma função $g : Y \to X$ chama-se inversa da função $f : X \to Y$ quando

$$g \circ f = Id_X \text{ e } f \circ g = Id_Y,$$

isto é, quando g é inversa à direita e à esquerda para f. Ressaltamos que neste caso, precisamos que a função f seja uma bijeção.

Em termos de notação, é mais comum utilizarmos a expressão f^{-1} para indicar a inversa de uma bijeção $f : X \to Y$. O expoente -1 na notação da função não tem nenhum significado aritmético; ele simplesmente chama a atenção para o fato de que f^{-1} faz o caminho inverso de f, isto é, aplica Y em X, em vez de X em Y, revertendo as setas das associações feitas por f. (NETO, 2012)(p.40).

Proposição 5.24. *(IEZZI G., 2001)(p.240) Seja f uma função bijetora de X em Y. Se f^{-1} é a* *função inversa de f, então*

$$f^{-1} \circ f = Id_X \text{ e } f \circ f^{-1} = Id_Y.$$

Demonstração:
A demonstração segue das seguintes relações, onde temos $f(x) = y$:

$$\forall x \in X, (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

para a primeira propriedade, e

$$\forall y \in Y, (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y,$$

para a segunda.

□

Temos também o seguinte corolário das proposições anteriores:

Corolário 5.25. *Se uma função $f : X \to Y$ possui função inversa, então ela é única.*

Demonstração:
Suponhamos que $g : Y \to X$ e $h : Y \to X$ sejam ambas inversas para f. Então

$$h = h \circ Id_Y = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = Id_X \circ g = g.$$

□

Temos ainda a seguinte proposição:

Proposição 5.26. *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções bijetoras, então $g \circ f : X \to Z$ é bijetora e*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Demonstração:
Já sabemos, pelo item (e) da Proposição 5.16, que $g \circ f$ é bijetora. Por outro lado, como $(g \circ f)^{-1}$ e $f^{-1} \circ g^{-1}$ são ambas funções de Z em X, a fim de verificar que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

é suficiente pela unicidade de inversa, mostrar que

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = Id_X$$

e

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=Id_Z.$$

Temos então para $x\in X$

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)(x)=(f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f)(x)=(f^{-1}\circ(Id_Y\circ f))(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=Id_X(x)$$

e analogamente para $z\in Z$

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})(z)=(g\circ(f\circ f^{-1})\circ g^{-1})(z)=(g\circ(Id_Y\circ g^{-1}))(z)=(g\circ g^{-1})(z)=Id_Z(z),$$

onde em ambas as provas utilizamos a associatividade da composição de funções.

□

Com os resultados que vimos até agora sobre funções inversas, podemos determinar quando um função é uma bijeção através da ideia de funções inversas. Tal resultado é apresentado no seguinte resultado:

Proposição 5.27. *(MONTEIRO, 1978) Uma função* $f:X\to Y$ *é uma bijeção se, e somente se, existem funções* $g:Y\to X$ *e* $h:Y\to X$ *tais que*

$$g\circ f=Id_X \text{ e } f\circ g=Id_Y.$$

Neste caso, tem-se $g=h=f^{-1}$.

Demonstração:

Se f *é uma bijeção de* X *em* Y, *tomamos* $g=h=f^{-1}$ *e claramente temos*

$$g\circ f=Id_X \text{ e } f\circ g=Id_Y.$$

Reciprocamente, suponhamos que existam funções g *e* h *de* Y *em* X *tais que*

$$g\circ f=Id_X \text{ e } f\circ g=Id_Y$$

sejam verdadeiras. De $g\circ f=Id_X$ *resulta, em virtude da proposição 5.17, que* f *é injetora e de* $f\circ h=Id_Y$ *resulta, conforme a mesma proposição, que* f *é sobrejetora. Portanto,* f *é bijetora. Falta demonstrar que as relações*

$$g\circ f=Id_X \text{ e } f\circ g=Id_Y$$

implicam $g = h = f^{-1}$. Seja y um elemento qualquer de Y e ponhamos $f^{-1}(y) = x$, logo, $f(x) = y$. Temos

$$f^{-1}(y) = x = Id_X(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y),$$

portanto $g = f^{-1}$.

Por outro lado, sabemos que

$$g \circ Id_Y = g \text{ e } Id_x \circ h = h,$$

logo, em virtude de

$$g \circ f = Id_X \text{ e } f \circ g = Id_Y$$

e da proposição 5.9, temos

$$g = g \circ Id_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = Id_X \circ h = h,$$

e portanto $g = h = f^{-1}$.

□

Corolário 5.28. *(MONTEIRO, 1978) Se f é uma bijeção de X em Y, então sua inversa f^{-1} é uma bijeção deY em X e, além disso, $(f^{-1})^{-1} = f$.* A demonstração deste corolário segue diretamente da proposição acima. Temos portanto, que a inversa da inversa de uma função, é a própria função.

Uma outra maneira de definir a função inversa de uma função é a seguinte maneira:

Definição 5.29. *(NETO, 2012)(p.39) Seja $f : X \to Y$ uma bijeção dada. A função inversa de f é a função $g : Y \to X$ tal que, para $x \in X, y \in Y$ temos*

$$g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

Observamos também, na definição acima apresentada, que é estritamente necessário que a função seja uma bijeção para podermos definir sua inversa. Assumindo que isso seja possível, surge agora o problema de como encontrar tal função. Tal tarefa é um pouco mais complicada do que obter a composição de funções, mas veremos através de alguns exemplos a seguir, como determinar a função inversa de uma bijeção dada. De maneira geral, vamos pensar o seguinte: dada a bijeção $f : X \to Y$, fixado $y \in Y$, como $f^{-1}(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$, a fim de explicitar $f^{-1}(y) = x$, basta resolvermos, para $x \in X$, a equação $f(x) = y$. (NETO, 2012)(p.40).

Exemplo 5.30. *(NETO, 2012)(p.40) Sejam a e b reais dados, sendo $a \neq 0$, e considere a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax+b$. Mostre que f é uma bijeção e calcule sua inversa.*

Solução: *Note inicialmente que*

$$f(x) = y \Leftrightarrow ax+b = y \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}.$$

Por outro lado, a definição de f^{-1} exige que tal valor de x deve ser exatamente igual a $f^{-1}(y)$, de maneira que

$$f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}.$$

Vamos agora verificar que a função encontrada é realmente uma inversa à esquerda e à direita para a função f:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(ax+b) = \frac{(ax+b)-b}{a} = \frac{ax}{a} = x,$$

e

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(\frac{y-b}{a}) = a\frac{y-b}{a} + b = y-b+b = y.$$

Exemplo 5.31. *(NETO, 2012)(p.40) Uma discussão análoga à do exemplo acima garante que a inversa da função identidade Id_X do conjunto $X \neq \emptyset$ é ela mesma, isto é, que $(Id_X)^{-1} = Id_X$. No entanto, a inversa de uma função pode ser ela mesma sem que a função seja a identidade. Um exemplo é fornecido pela função de proporcionalidade inversa $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (a qual já sabemos ser bijetiva). De fato, como*

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y},$$

concluímos

$$f^{-1}(y) = x = \frac{1}{y},$$

e daí $f^{-1} = f$. Novamente, fazendo as composições à direita e à esquerda, temos

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(1/x) = \frac{1}{1/x} = x,$$

e

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(1/y) = \frac{1}{1/y} = y.$$

Estes exemplos nos apresentam um regra prática para encontrarmos a função inversa de uma bijeção (IEZZI G., 2001)(p.237): Dada a função f de X em Y, definida pela sentença

$y = f(x)$, para obtermos a sentença que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

- na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$.
- transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Exemplo 5.32. *(IEZZI G., 2001)(p.242) Seja a função f de $\mathbb{R}_-$ em $\mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^2$. Qual é a função inversa de f ?*

Solução: *A função dada é $f(x) = y = x^2$ com $x \leq 0$ e $y \geq 0$. Aplicando a regra prática temos, permutando as variáveis*

$$x = y^2 \text{ com } y \leq 0 \text{ e } x \geq 0.$$

Expressando y em função de x, obtemos

$$x = y^2 \Leftarrow y = \sqrt{x} \text{ ou } y = -\sqrt{x}.$$

Considerando que na função inversa f^{-1} devemos ter $y \leq 0$ e $x \geq 0$, a lei de correspondência da função inversa será $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Fazendo as composições, obtemos:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = -\sqrt{x^2} = x,$$

e

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(-\sqrt{y}) = (-\sqrt{y})^2 = y.$$

Exemplo 5.33. *(IEZZI G., 2001)(p.243) Seja a função bijetora f de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definida por*

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

Qual é a função inversa de f?

Solução: *A função f é dada por $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, com $x \neq 2$ e $y \neq 1$. Aplicando a regra prática, temos:*

$$x = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow xy - 2x = y + 1 \Rightarrow xy - y = 2x + 1,$$

e resolvendo tal equação em y, obtemos

$$y(x-1) = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-1}.$$

Portanto, $f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{2\}$, *dada por* $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Fazendo as composições, obtemos:

$$(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{2\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+1}{\frac{x+1}{x-2}-1} = \frac{\frac{2x+2+x-2}{x-2}}{\frac{x+1-x+2}{x-2}} = \frac{3x}{3} = x,$$

e

$$(f\circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{2y+1}{y-1}\right) = \frac{\frac{2y+1}{y-1}+1}{\frac{2y+1}{y-1}-2} = \frac{\frac{2y+1+y-1}{y-1}}{\frac{2y+1-2y+2}{y-1}} = \frac{3y}{3} = y.$$

Exemplo 5.34. *(IEZZI G., 2001)(p.245) Seja* f *a função bijetora de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & se\ x \geq 0 \\ x-1 & se\ x < 0. \end{cases}$$

Determine f^{-1}.

Solução: *Notemos que:*

1^0) *Se* $x \geq 0$, *então* $f(x) = y = x^2-1$, *logo* $y \geq -1$.

2^0) *Se* $x < 0$, *então* $f(x) = x-1$, *logo* $y < -1$.

A função proposta é

$$y = x^2-1,\ com\ x \geq 0\ e\ y \geq -1,$$

ou

$$y = x-1\ com\ x < 0\ e\ y < -1.$$

Aplicando a regra prática, permutando as variáveis, temos:

$$x = y^2-1\ com\ y \geq 0\ e\ x \geq -1,$$

ou

$$x = y-1\ com\ y < 0\ e\ x < -1.$$

Expressando y em termos de x, temos:

$$y = \sqrt{x+1}\ com\ y \geq 0\ e\ x \geq -1,$$

ou

$$y = x+1\ com\ y < 0\ e\ x < -1.$$

Logo, a função inversa f^{-1} de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é definida por

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & se\ x \geq -1 \\ x+1 & se\ x < -1. \end{cases}$$

Encerraremos esta seção com o seguinte exemplo:

Exemplo 5.35. *(IEZZI G., 2001)(p.247) Dadas as funções f e g em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 3x-2$ e $g(x) = 2x+5$, determine a função inversa de $g \circ f$.*

Solução: *Temos duas maneira de resolver esta questão. Na primeira, determinamos inicialmente $g \circ f$ e em seguida $(g \circ f)^{-1}$. Temos*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x)+5 = 2((3x-2)+2)+5 = 6x+1.$$

Aplicando a regra prática, temos:

$$x = 6y+1 \Rightarrow y = \frac{x-1}{6}.$$

Portanto, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x-1}{6}$.

Na segunda solução, determinamos inicialmente f^{-1} e g^{-1} e em seguida $(f^{-1} \circ g^{-1})$, pois $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Aplicando a regra prática em $f(x) = 3x-2$ e $g(x) = 2x+5$, temos:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}\ e\ g^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}.$$

Calculando a composição, obtemos

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{g^{-1}(x)+2}{3} = \frac{\frac{x-5}{2}+2}{3} = \frac{x-1}{6}.$$

Portanto, $f^{-1} \circ g^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{6}$.

5.4.1 GRÁFICO DE FUNÇÕES INVERSAS

De acordo com (IEZZI G., 2001)(p.238), os gráficos cartesianos de uma função f e de sua função inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos primeiro e terceiro quadrantes do plano cartesiano.

Nossa primeira observação é que se o ponto (a,b) pertence ao gráfico da função f, então o ponto (b,a) pertence ao gráfico da função f^{-1}.Figura fonte: Site Unesp[6].

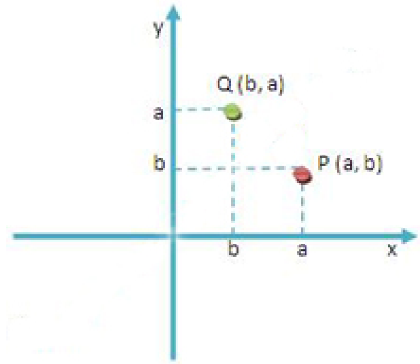


Figura 18: Sistema cartesiano

[6]http://www.calculo.iq.unesp.br/Calculo1/funcoes-inversas.html

Demonstração: Seja o ponto A o ponto $(a,0)$ e O a origem do plano cartesiano. Considere o triângulo OAP, retângulo em A. Seja A' o ponto $(0,a)$ e considere o triângulo $OA'Q$, retângulo em A'. Pelo critério LLL (lado, lado, lado), tais triângulos são iguais. Como o segmento $\overline{OM}$ é a bissetriz do primeiro quadrante, pelo critério LAL (lado, ângulo, lado), os triângulos POM e QOM são iguais. Logo, temos $\overline{QM} = \overline{PM}$. Ainda, como num triângulo isósceles (triângulo OPQ) a altura e a bissetriz do ângulo aposto à base coincidem, temos que o segmento $\overline{QP}$ é perpendicular ao segmento $\overline{OM}$, conforme queríamos demonstrar.

Outra maneira de demonstrar:

Para provarmos que os pontos $P(a,b)$ e $Q(b,a)$ são simétricos em relação à reta r de equação $y = x$, bissetriz dos primeiro e terceiro quadrantes, devemos provar que a reta que passa pelos pontos P e Q é perpendicular à reta r e que as distâncias dos pontos P e Q à reta r são iguais. Figura fonte: Site Unesp [7].

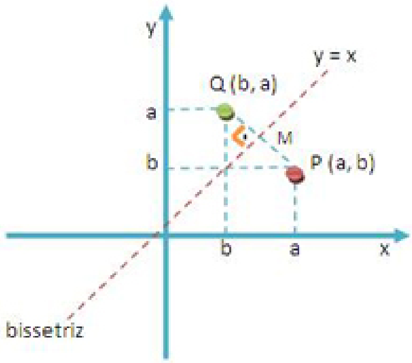


Figura 19: Reta bissetriz.

O ponto M, médio do segmento $\overline{PQ}$, tem coordenadas $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ e portanto M pertence à reta r. Como M é o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$, isto é, $\overline{MP} = \overline{MQ}, M \in r$, está então provado que os pontos P e Q equidistam da reta r.

Para provarmos que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta r, consideremos o ponto $R(c,c)$ da reta r, distinto de M, e provemos que o triângulo PMR é retângulo em M.

Calculando a medida dos lados do triângulo PMR, encontramos:

$$\overline{PM}^2 = \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

[7] `http://www.calculo.iq.unesp.br/Calculo1/funcoes-inversas.html`

$$\overline{MR}^2 = \left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 = 2\left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2$$

$$\overline{PR}^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2$$

e observamos que

$$\begin{aligned}
\overline{PM}^2 + \overline{MR}^2 &= 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 \\
&= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} \\
&= -2(a+b)c + 2c^2 \\
&= a^2 + b^2 - 2ac - 2bc + 2c^2 \\
&= (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) \\
&= (a-c)^2 + (b-c)^2 \\
&= \overline{PR}^2
\end{aligned}$$

Na figura abaixo,(fonte:Site Unesp [8]), vemos o gráfico de um função e sua inversa.

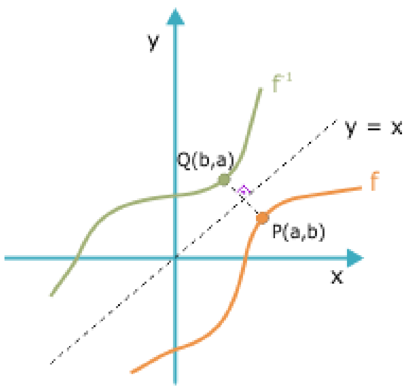


Figura 20: Gráfico da função f e sua inversa f^{-1}

[8] http://www.calculo.iq.unesp.br/Calculo1/funcoes-inversas.html

No gráfico abaixo (Fonte: Site InfoEscola[9]), temos o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 6$ e sua inversa $f^{-1}(x) = \frac{x-6}{3}$, também definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

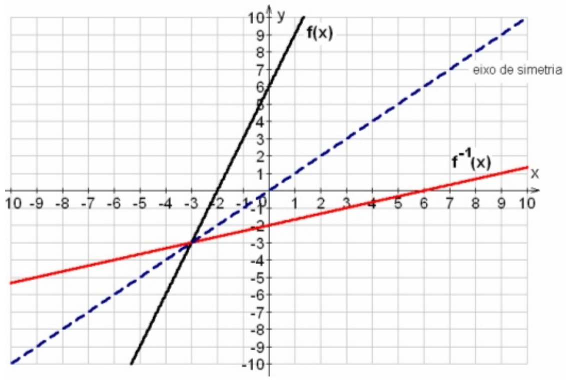


Figura 21: Gráfico da função f e sua inversa f^{-1}

[9] http://www.infoescola.com/matematica/funcao-inversa/

6 PROPRIEDADES COMPLEMENTARES

Neste capítulo, apresentaremos mais algumas propriedades de funções. Inicialmente apresentaremos as funções pares e ímpares, demonstraremos alguns resultados e apresentaremos alguns exemplos. Em seguida, trataremos das funções periódicas, que tem sua principal característica apresentada através dos seus gráficos. Discutiremos a monoticidade de funções, bem como os pontos de máximo e mínimo de uma função. Por último, apresentaremos através de alguns exemplos, o conceito de funções definidas implicitamente.

6.1 FUNÇÕES PARES E FUNÇÕES ÍMPARES

Começaremos esta seção com a seguinte definição, retirada de (FLEMMING, 2006)(p.40):

Definição 6.1. *Dizemos que uma função f é par se, para todo x no domínio de f,*

$$f(-x) = f(x).$$

O gráfico de um função par é simétrico em relação ao eixo dos y. Podemos observar isso no gráfico[1] abaixo, da função $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$:

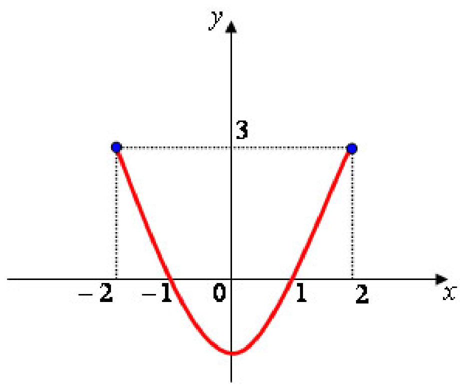


Figura 22: Gráfico da função f definida por $f(x) = x^2 - 1$

[1] Site Brasil Escola

Temos também o gráfico [2] da função $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^2 - 6$:

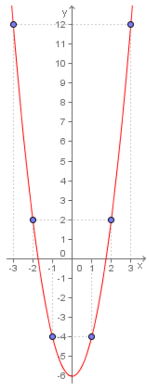


Figura 23: Gráfico da função f definida por $f(x) = 2x^2 - 6$

Como podemos observar em ambos os gráficos, existe uma simetria em relação ao eixo y. Intuitivamente, é como se o gráfico de um lado do eixo y fosse refletido para formar o gráfico do outro lado do eixo. Essa é, na realidade, uma regra prática que podemos utilizar na construção de gráficos de funções pares, basta fazer o gráfico para os valores de $x \geq 0$ e refletir o gráfico pelo eixo y para obter o gráfico para valores de $x < 0$, pois $f(-x) = f(x)$.

Temos agora a definição para funções ímpares, também retirada de (FLEMMING, 2006)(p.40):

Definição 6.2. *Uma função f é ímpar se, para todo x no domínio de f,*

$$f(-x) = -f(x).$$

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem. Isso pode ser visto no gráfico [3] da função $f : -2,-4]rightarrow[-4,4]$ definida por $f(x) = 2x$:

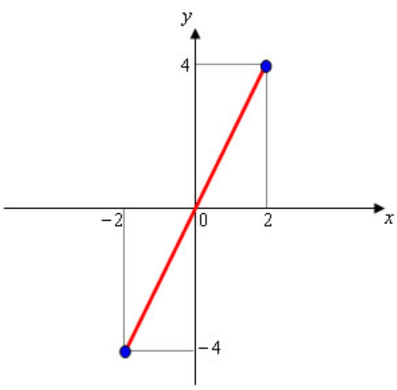


Figura 24: Gráfico da função f definida por $f(x) = 2x$

[2]Site Matemática Didática
[3]Site Brasil Escola

Abaixo, temos o gráfico[4] de mais um exemplo de uma função ímpar, a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{x^3}{10}$:

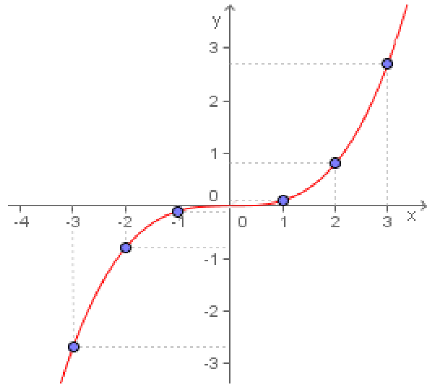


Figura 25: Gráfico da função f definida por $f(x)=\frac{x^3}{10}$

Pela análise dos gráficos acima, podemos observar a simetria em relação à origem do sistema cartesiano. Essa é, graficamente, a principal característica de funções ímpares.

Motivados pelos gráficos acima, que apresentaram exemplos de funções polinomiais, realizaremos um estudo mais detalhado desse tipo de funções, sob a luz da paridade:

Exemplo 6.3. *Toda função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^{2n}$, onde $n\in N$, é uma função par, pois*

$$f(-x)=(-x)^{2n}=x^{2n}=f(x).$$

Por outro lado, se tivermos $f(x)=x^{2n-1}$, então f será uma função ímpar, pois

$$f(-x)=(-x)^{2n-1}=-x^{2n-1}=-f(x).$$

Vale ressaltar que existem funções que não são nem pares nem ímpares. Como exemplo, consideramos a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+1$. Temos que

$$f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1\neq f(x)\ e\ -x^3+1\neq -f(x),$$

portanto, f não é nem par nem ímpar.

Vamos agora verificar algumas propriedades de operações de funções pares e ímpares:

Proposição 6.4. *Considere $f,g:X\to Y$, duas funções ímpares, então:*

a) $(f+g)$ *é uma função ímpar.*

b) $(f-g)$ *é uma função ímpar.*

[4]Site Matemática Didática

c) $(f.g)$ *é uma função par.*

d) (f/g) *é uma função par.*

Demonstração:
(a) A prova desta propriedade segue diretamente da definição de função ímpar:

$$(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) = -(f(x)+g(x)) = -(f+g)(x),$$

onde utilizamos o fato de f e g serem funções ímpares.

Para o item (b), temos analogamente

$$(f-g)(-x) = f(-x)-g(-x) = -f(x)-(-g(x)) = -f(x)+g(x) = -(f(x)-g(x)) = -(f-g)(x).$$

Para o item (c), temos

$$(f.g)(-x) = f(-x).g(-x) = (-f(x)).(-g(x)) = (-1)(-1)f(x)g(x) = f(x)g(x) = (fg)(x).$$

E finalmente, para o item (d), temos

$$(f/g)(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = (f/g)(x).$$

$\square$

Observamos que se f e g forem funções pares, então a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão serão funções pares. Se f for par e g for ímpar, então nada se pode afirmar sobre a soma e a subtração, e a multiplicação e a divisão serão ímpares.

Temos também a seguinte propriedade, apresentada como o exercício 10 de (FLEMMING, 2006):

Proposição 6.5. *Qualquer função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *pode ser expressa como a soma de uma função par com uma função ímpar.*

Demonstração:
Inicialmente, vamos verificar que a função g definida por $g(x) = \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ é uma função par:

$$g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(-x)+f(x)] = g(x).$$

Agora, vamos verificar que a função h definida por $h(x) = \frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ é uma função ímpar:

$$h(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = \frac{1}{2}(-1)[f(x) - f(-x)] = -h(x).$$

Nossa ideia agora é então mostrar que $f(x) = g(x) + h(x)$, onde g é par, e h é ímpar. Assim, para todo x real, temos

$$f(x) = g(x) + h(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \frac{1}{2}[2f(x)] = f(x).$$

Isto conclui a prova.

$\square$

Para finalizar esta sessão, vamos considerar o seguinte exemplo:

Exemplo 6.6. *(NETO, 2012) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar. Decida se a função $f \circ f$ é par, ímpar, ou nem par nem ímpar.*

Solução: Para resolver este exercício, vamos aplicar a definição de função ímpar à composição $f \circ f$:

$$f \circ f(-x) = f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x)) = -f \circ f(x),$$

portanto, a composição de uma função ímpar com ela mesma é também uma função ímpar. É fácil perceber que se fizermos a composição da função f ímpar, com qualquer outra função ímpar g, a composição também será uma função ímpar.

Neste momento, levantamos a seguinte questão, será que tal propriedade também é verdadeira para funções pares? Suponhamos assim que f seja uma função par, então

$$f \circ f(-x) = f(f(-x)) = f(f(x)) = f \circ f(x),$$

logo, a composição de uma função par com ela mesma é também um função par. Assim como considerado acima, a composição de duas funções pares quaisquer será sempre uma função par.

6.2 FUNÇÕES PERIÓDICAS

Nesta seção apresentaremos o conceito de função periódica, sua caracterização através da análise gráfica e finalizaremos a seção apresentando alguns exemplos.

Definição 6.7. *(FLEMMING, 2006) Dizemos que uma função $f(x)$ é periódica se existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$, para todo $x \in D(f)$.*

O número T é chamado *período* da função $f(x)$. Em (NETO, 2012), na página 37, o exercício proposto 15, define período como sendo o menor número real positivo p, tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ainda, o gráfico de uma função periódica se repete a cada intervalo de comprimento $|T|$. Sendo assim, observamos que o domínio de uma função periódica não pode ser limitado.

Exemplo 6.8. *As funções trigonométricas senx e cosx são periódicas de período $T = 2\pi$. Podemos ver isso através das propriedades para soma de arcos:*

$$sen(x+2\pi) = senxcos2\pi + sen2\pi cosx = senx.1 + 0.cosx = senx,$$

e

$$cos(x+2\pi) = cosxcos2\pi - senxsen2\pi = cosx.1 - senx.0 = cosx.$$

O gráfico[5] das funções *sen* e *cos* pode ser visto abaixo

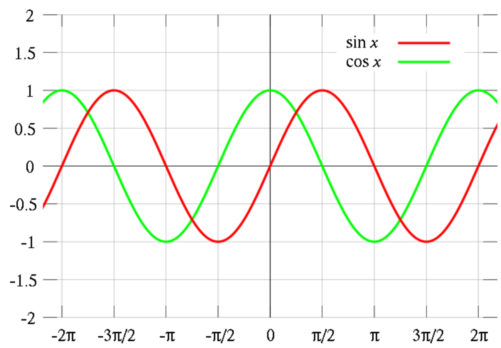


Figura 26: Gráfico das funções *sen* **e** *cos*

É fácil observar que a cada intervalo de comprimento $T = 2\pi$, o gráfico, tanto da função *senx* como da função *cosx* se repetem. Ainda, é importante ressaltar que podemos podemos escolher o intervalo de comprimento T começando em qualquer ponto do gráfico, não é necessário pensar no intervalo T começando na origem do sistema.

Assim como no caso das funções pares e ímpares, temos a seguinte proposição que determina como se comportam as funções periódicas quando realizamos operações entre elas.

[5]Site Wikipedia

Proposição 6.9. *(FLEMMING, 2006)(p.66) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções periódicas de período T. Então:*

a) $(f+g)$ é periódica de período T.

b) $(f-g)$ é periódica de período T.

c) $(f.g)$ é periódica de período T.

d) (f/g) é periódica de período T, assumindo-se que $g(x) \neq 0 \forall x \in D(g)$.

Demonstração:
(a) Se f e g são periódicas de período T, então $f(x+T) = f(x)$ e $g(x+T) = g(x)$, logo

$$(f+g)(x+T) = f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x) = (f+g)(x),$$

portanto, $(f+g)$ é periódica de período T. (b)Segue análogo ao caso anterior. (c) Neste caso temos:

$$(fg)(x+T) = f(x+T)g(x+T) = f(x)g(x) = (fg)(x).$$

(d) E, finalmente, temos

$$(f/g)(x+T) = \frac{f(x+T)}{g(x+T)} = \frac{f(x)}{g(x)} = (f/g)(x).$$

□

Observamos que como funções periódicas tem a propriedade de repetir seu gráfico a cada comprimento $|T|$ do intervalo, precisamos definir a função períodica somente num intervalo de comprimento $|T|$. Como exemplo desta situação, consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -4x+2 & 0 \leq x < 1 \\ -2 & 1 \leq x < 2 \\ 4x-10 & 2 \leq x < 3 \\ 2 & 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

períodica de período $T = 4$.

Seu gráfico[6] pode ser visto na figura abaixo. Observe que o gráfico se repete a cada intervalo de comprimento $T = 4$.

[6] Site Pense Vestibular

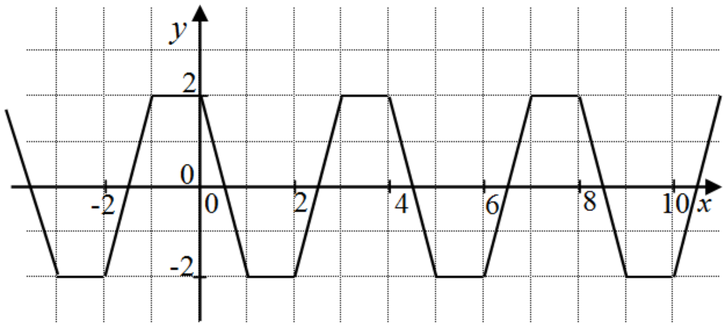


Figura 27: Gráfico da função $f(x)$

Terminaremos essa seção com o seguinte exemplo, que mostra que o período T de uma função periódica é o menor número real (em módulo) para o qual temos $f(x+T) = f(x)$, ou seja, se T é período de uma função f então todo múltiplo de T também o é.

Exemplo 6.10. *(FLEMMING, 2006) Se f é periódica de período T, prove que $3T$ também é período de f.*

Precisamos mostrar que $f(x+3T) = f(x), \forall x \in D(f)$, usando o fato de que $f(x+T) = f(x)$. Temos então:

$$f(x+3T) = f((x+2T)+T) = f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x).$$

6.3 MONOTONICIDADE DE FUNÇÕES

Nesta seção apresentarmos um estudo sobre a monotonicidade de funções, pontos de máximo e pontos de mínimo. Tais conceitos são comumente estudados em maiores detalhes nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, como uma aplicação do conceito de derivação de funções reais. Entretanto, podemos fazer um estudo de tal tema, sem fazer uso do Cálculo. Começamos com a seguinte definição:

Definição 6.11. *(NETO, 2012)(p.19) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita:*

a) crescente se, para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

b) decrescente, se para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

c) não decrescente, se para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

d) não crescente, se para todos $x_1 < x_2$ em I, tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Observamos que o domínio pode ser qualquer subconjunto dos reais. De maneira geral, em qualquer um dos casos acima, dizemos que a função f é *monótona* em I. Nas notações desta definição, vale observar que, para alguns autores, uma função f satisfazendo as condições do item (a),(respectivamente (b),(c) e (d)) é dita *estritamente crescente* (respectivamente, *estritamente decrescente, crescente e decrescente*) (NETO, 2012)(p.19). Observamos ainda que a análise de tais propriedades numa função real pode ser feita através do estudo do sinal da derivada da função. Tais ideias são de grande enfoque nos livros de Cálculo Diferencial e Integral.

Exemplo 6.12. *(NETO, 2012)(p.19) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$ é crescente se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$.*

Solução: Verifiquemos tal afirmação quando $a > 0$, sendo a análise do caso $a < 0$ totalmente análoga. Sendo $x_1 < x_2$ números reais quaisquer, segue de $a > 0$ que

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - ax_1 - b = a(x_2 - x_1) > 0,$$

e f é crescente.

Tal argumento, calcular o sinal da diferença $f(x_2) - f(x_1)$ quando $x_1 < x_2$, é um dos métodos para definir a monotonicidade de uma função.

Em vista da definição acima, um problema interessante é o de encontrar os *intervalos de monotonicidade* de uma função, isto é, dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, investigar em que intervalos f é crescente ou decrescente. Vejamos alguns exemplos.

Inicialmente, vamos considerar a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & se \quad x \leq -2 \\ 3 & se \quad -2 < x < 1 \\ 2x + 1 & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$

O gráfico [7] dessa função pode ser visto abaixo:

[7] Instituto de Matemática - UFRJ

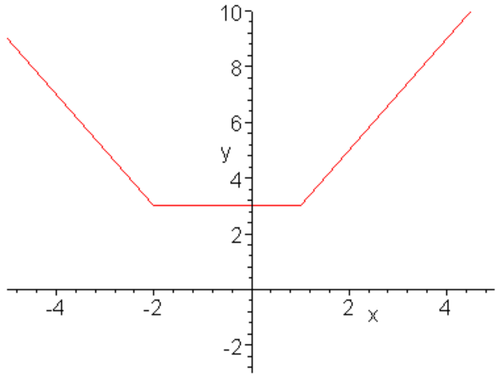


Figura 28: Gráfico da função f

Temos que para o intervalo $(-\infty, -2]$, tal função é estritamente decrescente, pois neste caso, para quaisquer $x_1, x_2 \in (-\infty, -2]$, com $x_1 < x_2$ temos:

$$f(x_2) - f(x_1) = -2x_2 - 1 - (-2x_1 - 1) = -2(x_2 - x_1) < 0,$$

ou seja,

$$f(x_2) < f(x_1).$$

Para o intervalo $[-2, 1)$, temos que $f(x) = 3$, ou seja, é constante, portanto temos

$$f(x_2) - f(x_1) = 0, \forall x_1, x_2 \in [-2, 1).$$

Neste caso, podemos dizer que f é não decrescente ou não crescente, pois ambas as condições (c) e (d) da definição acima são satisfeitas.

Finalmente, para o intervalo $[1, +\infty)$, temos, para $x_1, x_2 \in [1, +\infty), x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = 2x_2 + 1 - 2x_1 - 1 = 2(x_2 - x_1) > 0,$$

portanto, f é estritamente crescente neste intervalo.

Como vemos neste exemplo, a monotonicidade de um função pode variar a medida que variamos o valor de $x \in D(f)$.

Utilizando o conceito de Cálculo Diferencial, relembramos que o valor da derivada de uma função aplicada num ponto nos dá o valor do coeficiente de inclinação da reta tangente à curva neste ponto. Tendo isso em mente, quando uma função è crescente, temos que a inclinação da reta tangente é positiva, e portanto o sinal de sua derivada é positiva. Se a função é decrescente, sua reta tangente tem inclinação negativa e o sinal de sua derivada também é negativo.

Veremos agora mais alguns exemplos sobre a monotonicidade de funções.

Exemplo 6.13. *(NETO, 2012)(p.20) A função* $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ *é crescente em* $[0,+\infty)$.

Solução: Para verificar tal afirmação, tome números reais $0 \leq a < b$. Então

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{b^2}{b+2} - \frac{a^2}{a+2} \\ &= \frac{1}{(a+2)(b+2)}[b^2(a+2) - a^2(b+2)], \end{aligned}$$

e, uma vez que $(a+2)(b+2) > 0$, basta mostrarmos que $b^2(a+2) - a^2(b+2) > 0$. Para tanto, veja que

$$\begin{aligned} b^2(a+2) - a^2(b+2) &= b^2a - a^2b + 2(b^2 - a^2) \\ &= ab(b-a) + 2(b-a)(b+a) \\ &= (b-a)[ab + 2(b+a)]; \end{aligned}$$

como $0 \leq a < b$, segue que ambos os fatores do último produto acima são positivos e, daí, $b^2(a+2) - a^2(b+2) > 0$.

Exemplo 6.14. *(NETO, 2012)(p.20) A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3 + 2x$ *é crescente.*

Solução: De fato, para números reais quaisquer $a < b$, temos

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= b^3 - a^3 + 2b - 2a \\ &= (b-a)(b^2 + ba + a^2) + 2(b-a) \\ &= (b-a)(b^2 + ab + a^2 + 2). \end{aligned}$$

Como $b - a > 0$, basta mostrarmos que $a^2 + ab + b^2 + 2 > 0$; uma possibilidade é usar a desigualdade entre as médias quadrática e geométrica, para dois números, onde $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab}$, logo $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$. Assim temos que:

$$a^2 + b^2 + ab + 2 \geq 2|ab| + ab + 2 \geq |ab| + 2 > 0,$$

onde na penúltima passagem utilizamos o fato de que $|\alpha| + \alpha \geq 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Passemos agora para as definições de pontos de máximo e pontos de mínimos. Tais definições estão diretamente relacionadas com o estudo da monoticidade de um função, como veremos a seguir.

Definição 6.15. *(NETO, 2012)(p.21) Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função dada.*

Dizemos que $y_0 \in \mathbb{R}$ é o valor mínimo de f em I se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

a) $Im(f) \subset [y_0, +\infty)$;

b) $y_0 \in Im(f)$.

Novamente observamos que o domínio pode ser qualquer subconjunto dos reais. Neste caso, os números reais $x_0 \in I$ tais que $f(x_0) = y_0$ são denominados os *pontos de mínimo* da função f.

Analogamente, definimos o que se entende por *valor máximo* e *ponto de máximo* de uma função $f : I \to \mathbb{R}$. Genericamente, os pontos de máximo (resp. mínimo) de uma função são denominados seus *pontos extremos*; da mesma forma, os valores que a função assume em tais pontos são seus *valores extremos*(NETO, 2012)(p.22).

Vejamos alguns exemplos de tais situações:

Exemplo 6.16. *(NETO, 2012)(p.24) Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$. Qual o valor mínimo que f assume? A função f assume um valor máximo?*

Solução: Inicalmente, note que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x^2-1+2}{x+1} \\ &= x-1+\frac{2}{x+1} = (x+1)+\frac{2}{x+1}-2. \end{aligned}$$

Portanto, aplicando a desigualdade entre as médias para dois números, obtemos

$$(x+1)+\frac{2}{x+1} \geq 2\sqrt{(x+1)\frac{2}{x+1}} = 2\sqrt{2},$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x+1 = \frac{2}{x+1}$, isto é, se e só se, $x^2+2x-1 = 0$. Observamos que aqui utilizamos a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética para números reais: se $a \geq 0, b \geq 0$, números reais, então:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Mas, como $x \geq 0$, concluímos que haverá igualdade na desigualdade acima se, e só se, $x = \sqrt{2}-1$. Assim, para $x \geq 0$ temos

$$f(x) = (x+1)+\frac{2}{x+1}-2 \geq 2\sqrt{2}2,$$

de sorte que $2\sqrt{2}-2$ é o valor mínimo de f, o qual é atingido se, e só se, $x = \sqrt{2}-1$. Para o que falta observe que, para $n \in \mathbb{N}$, temos $f(n) = n-1+\frac{2}{n+1} \geq n-1$ e, daí, f não assume valor máximo.

Exemplo 6.17. *(NETO, 2012)(p.24)Encontre o máximo da função* $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+16}$.

Solução: Novamente pela desigualdade entre as médias geométrica e aritmética, agora utilizada com quatro termos, $\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$ temos

$$\begin{aligned} x^2+16 &= x^2+\frac{16}{3}+\frac{16}{3}+\frac{16}{3} \\ &\geq 4\sqrt[4]{x^2\cdot\frac{16}{3}\cdot\frac{16}{3}\cdot\frac{16}{3}} = \frac{32}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{x}, \end{aligned}$$

e daí

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+16} \leq \frac{\sqrt[4]{27}}{32}.$$

A igualdade ocorre se, e só se, $x^2 = \frac{16}{3}$, ou seja, se e só se $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ (uma vez que $x \geq 0$). Assim, $\frac{\sqrt[4]{27}}{32}$ é o valor máximo de f.

Se tivermos uma função contínua definida num intervalo limitado e fechado, então necessariamente tal função terá um máximo e um mínimo (GUIDORIZZI, 2001)(p.139). Observamos que a função $f : [0,3) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$ não possui um ponto de máximo, justamente pelo fato do intervalo que define o domínio da função não ser fechado.

6.4 FUNÇÕES DEFINIDAS IMPLICITAMENTE

Dentre todas as maneiras que já vimos sobre como podemos definir uma função, vamos ainda considerar as funções que podem ser definidas implicitamente por um conjunto de propriedades (NETO, 2012)(p.44). Consideremos, por exemplo, a função $g(x) = x+1$ e a função $h(x) = x-1$. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é tal que

$$f(g(x)) = g(x)^2 \ e \ f(h(x)) = h(x)^2,$$

ou seja, ela é tal que

$$f(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1 \ e \ f(x-1) = (x-1)^2 = x^2-2x+1.$$

Assim, temos que a função acima satisfaz, para todo $x \in \mathbb{R}$, a relação

$$f(x+1) - f(x-1) = 4x.$$

Podemos tentar reverter os passos acima, perguntando agora quais são as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x+1) - f(x-1) = 4x, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

É claro que a função $f(x) = x^2$ não é a única, pois como é fácil verificar, para qualquer constante real c a função f_c definida por $f_c(x) = x^2 + c$ também satisfaz (14).

Como uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo (14) não está dada por seus valores, e sim por uma relação que deve satisfazer, dizemos que a função está *definida implicitamente*.(NETO, 2012)(p.44). Notemos que, a partir de (14), podemos descobrir outras relações que a função satisfaz. Por exemplo, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = x^2$, temos

$$f(g(x)+1) - f(g(x)-1) = 4g(x),$$

ou ainda,

$$f(x^2+1) - f(x^2-1) = 4x^2, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Logo, qualquer função que satifaz (14) também satisfaz (15). Entretanto, a relação (15) pode não ser muito útil para ajudar a determinar as funções que satisfazem (14). Só a experiência dirá que relações obtidas a partir de uma relação inicialmente dada serão úteis nesse sentido.(NETO, 2012)(p.45)

Veremos a seguir alguns exemplos de como encontrar todas as funções definidas implicitamente por um certo conjunto de relações dadas.

Exemplo 6.18. *(NETO, 2012)(45) Se $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, encontre todas as funções $f : D \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in D$ tenhamos*

$$f(x)^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x.$$

Solução: Note antes de tudo que, como $x \neq 0$, temos $f(x)^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \neq 0$ para todo $x \in D$. Em particular, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in D$. Seja agora $g(x) = \frac{1-x}{1+x}, x \in D$. A definição de D garante facilmente que $g(D) \subset D$, de modo que podemos compor f com g. Assim, para todo $x \in D$, temos

$$f(g(x))^2 f\left(\frac{1-g(x)}{1+g(x)}\right) = 64g(x). \tag{16}$$

Substitutindo a expressão de g na relação acima, chegamos a

$$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) f\left(\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}\right) = 64\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

ou ainda

$$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 f(x) = 64\left(\frac{1-x}{1+x}\right),$$

para todo $x \in D$. Elevando ao quadrado ambos os membros da relação do enunciado e dividindo o resultado pela relação acima, obtemos

$$f(x)^3 = 64x^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right),$$

e daí,

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}.$$

Até esse ponto, mostramos apenas que, se f existir, deve ser dada por essa expressão. Temos, pois, de verificar que f, assim definida, realmente satisfaz a relação do enunciado para todo $x \in D$. Mas tal verificação é imediata.

Exemplo 6.19. *(NETO, 2012)(p.51) Encontre todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que, para todos os naturais m e n, tenhamos*

$$f(f(m)+f(n)) = m+n.$$

Solução: Provemos primeiramente que f é injetiva. Para tanto, sejam m e n naturais tais que $f(m) = f(n) = k$. Então $f(2k) = f(f(n)+f(n)) = 2n$ e, analogamente, $f(2k) = 2m$, de modo que deve ser $m = n$.

Seja agora $k > 1$ natural. De $(k-1)+2 = k+1$, segue que

$$f(f(k-1)+f(2)) = k+1 = f(f(k)+f(1)).$$

Pela injetividade de f, temos então $f(k-1)+f(2) = f(k)+f(1)$ ou ainda, $f(k)-f(k-1) = f(2)-f(1)$, para todo número natural $k > 1$. Escrevendo essa relação para $k = 2,3,...,n$ e somando as igualdades assim obtidas, chegamos a

$$f(n) = (n-1)(f(2)-f(1))+f(1),$$

para todo natural $n > 1$. Fazendo $n = 2f(1)$ na relação acima, segue então que

$$2 = f(f(1)+f(1)) = f(2f(1)) = (2f(1)-1)(f(2)-f(1))+f(1)$$

ou ainda,

$$f(2)-f(1) = \frac{2-f(1)}{2f(1)-1}.$$

Mas $f(2)-f(1)$ é inteiro, de modo que $2f(1)-1$ divide $2-f(1)$. Assim, deve ser $2f(1)-1 \leq |2-f(1)|$ e é fácil concluir a partir daí que a única possibilidade é $f(1) = 1$, de modo que

$f(2) = 2$. Segue então que $f(n) = n$, para todo n natural.

Exemplo 6.20. *(MORGADO, 2013)(p.78)* ***Recorrência linear não-homogênea de primeira ordem.*** *Seja $x_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, resolva a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2^n$, $x_1 = 1$*

Solução: Temos

$$x_2 = x_1 + 2$$

$$x_3 = x_2 + 2^2$$

$$x_4 = x_3 + 2^3$$

$$\dots \;\; \dots. \;\; \dots$$

$$x_n = x_{n+1} + 2^{n-1}$$

Somando ambos os lados da igualdade, temos o resultado

$$x_n = x_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1})$$

$$x_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}$$

$$x_n = 1\frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$x_n = 2^n - 1$$

Assim temos a regra que permite calcular qualquer termo em função da sua posição na sequência dada.

7 TRANSFORMAÇÕES EM GRÁFICOS

Neste capítulo, apresentaremos uma descrição de transformações que podem ser feitas numa função, e quais são as consequências destas transformações no gráfico desta função. Tal habilidade é muito útil quando desejamos construir o gráfico de uma função que é gerada a partir de outras. Trataremos das translações, verticais e horizontais, bem como das expansões e compressões, também verticais e horizontais. Todos os casos apresentados aqui serão ilustrados através de gráficos retirados do site Webmat[1], da Universidade Federal Fluminense. Entretando, o texto aqui apresentado é de nossa autoria.

7.1 TRANSLAÇÕES

Nesta sessão apresentaremos uma descrição de como é possível obter o gráfico de uma função através da translação do gráfico de uma função original dada. Veremos como o fato de somarmos ou subtrairmos um valor c à expressão que define uma função pode alterar o seu gráfico. Em todos os casos que serão descritos abaixo, consideraremos sempre uma função genérica f definida sobre a reta real $\mathbb{R}$.

a) **Translação para a esquerda:** Consideremos a função g definida por $g(x) := f(x+c)$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$. Neste caso, obtemos o gráfico da função g através de um translação de $|c|$ unidades do gráfico da função f para a esquerda. Observe que para cada valor x no domínio da função g, temos $g(x) = f(x+c)$, ou seja, o valor da função g para o valor da abcissa x é igual ao valor da função f para a abcissa $x+c$. Como isso é válido para qualquer $x \in D(g)$, temos a translação do gráfico para a esquerda. A figura abaixo ilustra essa situação:

[1] http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap01_Calc1.html#I-4_EsticaComprime

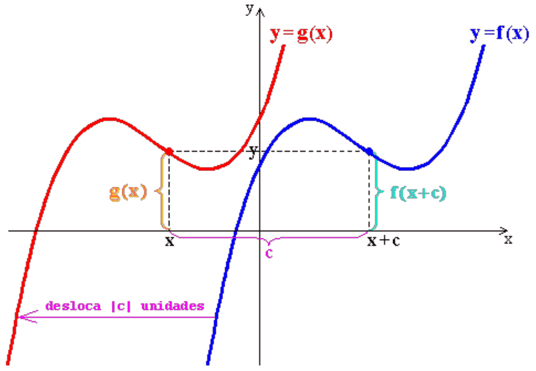


Figura 29: Gráfico das funções g e f

b) **Translação para a direita:** Consideremos a função g definida por $g(x) := f(x-c)$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$. Neste caso, obtemos o gráfico da função g através de um translação de $|c|$ unidades do gráfico da função f para a direita. Observe que para cada valor x no domínio da função g, temos $g(x) = f(x-c)$, ou seja, o valor da função g para o valor da abcissa x é igual ao valor da função f para a abcissa $x-c$. Como isso é válido para qualquer $x \in D(g)$, temos a translação do gráfico para a direita. A figura abaixo ilustra essa situação:

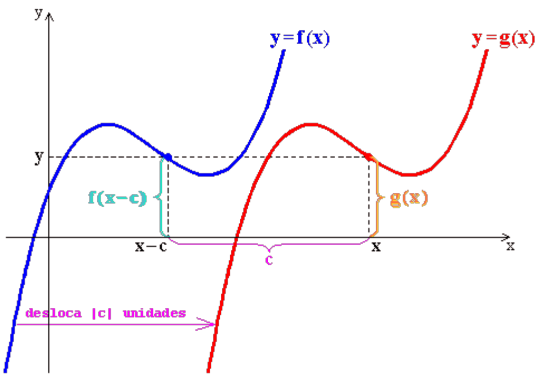


Figura 30: Gráfico das funções g e f

Observamos que não precisamos considerar os casos quando $c \leq 0$, pois eles se enquadram nos casos anteriores. Para isto, basta observar que se $c < 0$, então $d = -c > 0$. Logo, $f(x-c) = f(x+d)$ e $f(x+c) = f(x-d)$, com $d > 0$. E obviamente, se $c = 0$, não há nenhuma translação.

c) **Translação para cima:** Consideremos a função y definida por $y = g(x) := f(x) + c$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$. Neste caso, obtemos o gráfico da função g através de um translação de $|c|$ unidades do gráfico da função f para cima. Observe que para cada valor x no domínio da função g, temos $g(x) = f(x) + c$, ou seja, o valor da função g para o valor da abcissa x é igual ao valor da função f para a abcissa x mais o valor c. Como isso é válido para qualquer $x \in D(g)$, temos a translação do gráfico para cima. A figura abaixo ilustra essa situação:

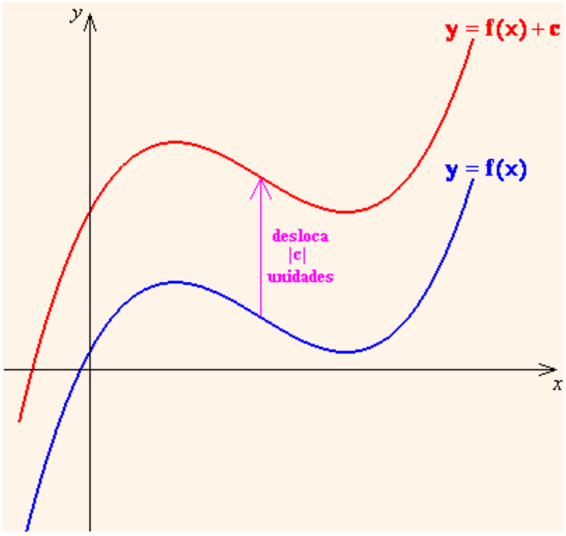


Figura 31: Gráfico das funções $y = g$ **e** f

d) **Translação para baixo:** Consideremos a função y definida por $y = g(x) := f(x) - c$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$. Neste caso, obtemos o gráfico da função g através de um translação de $|c|$ unidades do gráfico da função f para baixo. Observe que para cada valor x no domínio da função g, temos $g(x) = f(x) - c$, ou seja, o valor da função g para o valor da abcissa x é igual ao valor da função f para a abcissa x menos o valor c. Como isso é válido para qualquer $x \in D(g)$, temos a translação do gráfico para baixo. A figura abaixo ilustra essa situação:

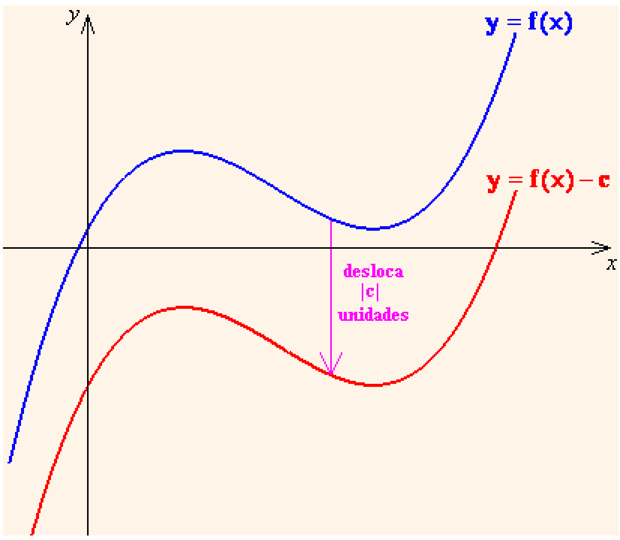


Figura 32: Gráfico das funções $y = g$ **e** f

Novamente, como observado acima, não precisamos considerar os casos quando $c \leq 0$. Basta apenas considerar, se $c < 0$, $d = -c > 0$ e portanto $f(x) - c = f(x) + d$ e $f(x) + c = f(x) - d$, ambos os casos com $d > 0$.

Observamos que os gráficos das funções *sen* e *cos* são idênticos, apenas diferem por uma translação horizontal de comprimento π. O gráfico[2] das funções *sen* e *cos* pode ser visto abaixo

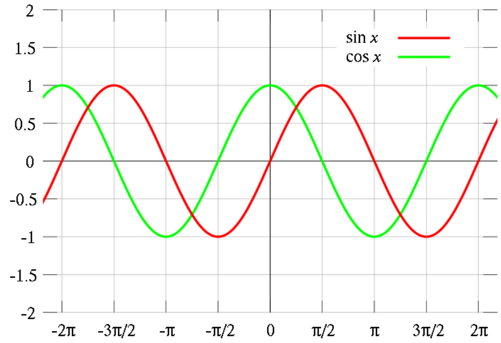


Figura 33: Funções *sen* **e** *cos*

Exemplo 7.1. *Como exemplo, vamos considerar a função f definida por $f(x) = x^2$ e fazer as seguintes translações: primeiro, definimos a função g como $g(x) = (x-1)^2$, que translada em uma unidade para a direita a função f. Em seguida, definimos a função $h(x) = (x-1)^2 - 1$, que translada para baixo em uma unidade a função g. Logo, a função h translada para a direita e para baixo a função original f, ambas translações de uma unidade. A ilustração deste exemplo pode ser vista abaixo:*

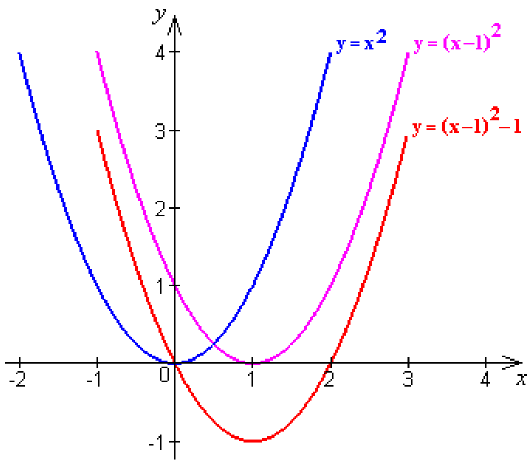


Figura 34: Gráfico das funções f, g **e** h

Para finalizar esta sessão, vamos observar o que acontece com os pontos de máximo e mínimo de uma função quando fazemos translações na mesma. Pelo exemplo anterior, observamos que quando fazemos a translação horizontal, o ponto de mínimo acompanha a translação. O ponto de mínimo da função $f(x) = x^2$ é zero, e o ponto de mínimo da função $g(x) = (x-1)^2$

[2]Site Wikipedia

é $x = 1$. Logo, o ponto de mínimo também foi transladado em uma unidade para a direita. Entretanto, observamos que o valor mínimo da função não foi alterado, em ambos os caso, o valor mínimo continuou sendo $f(0) = g(1) = 0$. De maneira geral, temos que se $f(x_0) = m_0$, ou seja, se x_0 é um ponto de mínimo de uma função f, então se $g(x) = f(x-c)$, temos que

$$g(x_0+c) = f(x_0+c-c) = f(x_0) = m_0,$$

ou seja, $x = x_0 + c$ é ponto de mínimo para g, com valor mínimo m_0, o mesmo da função f.

Já quando realizamos a translação vertical, o ponto de mínimo não se alterou, permaneceu em $x = 1$ mas o valor mínimo se alterou. Para a função h, temos que o valor mínino é $h(1) = -1$, enquanto que para a função g, temos $g(1) = 0$. Logo, o valor mínimo sofreu uma translação para baixo, em uma unidade, assim como a função. Generalizando, se $g(x) = f(x) - c$ e $f(x_0) = m_0$ é um ponto de mínimo, então x_0 é também um ponto de mínimo para g, mas o valor mínimo é agora $g(x_0) = m_0 - c$.

7.2 COMPRESSÕES E EXPANSÕES

Trataremos agora das compressões e das expansões, tanto das verticais como das horizontais. Neste caso, observaremos o que acontece com o gráfico de uma função quando multiplicamos ou dividimos a expressão que a define por um número real positivo, tanto a expressão como um todo, como quando fazemos essa multiplicação ou divisão no argumento da função.

a) **Compressão horizontal:** Consideremos a função y definida por $y = g(x) := f(cx)$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $c > 1$. Neste caso, obtemos o gráfico da função g através de uma compressão horizontal no gráfico da função f. Observe que para cada valor x no domínio da função g, temos $g(x) = f(cx)$, ou seja, o valor da função g para o valor da abcissa x é igual ao valor da função f para a abcissa cx. Como isso é válido para qualquer $x \in D(g)$, temos uma compressão horizontal do gráfico. A figura 35 ilustra essa situação:

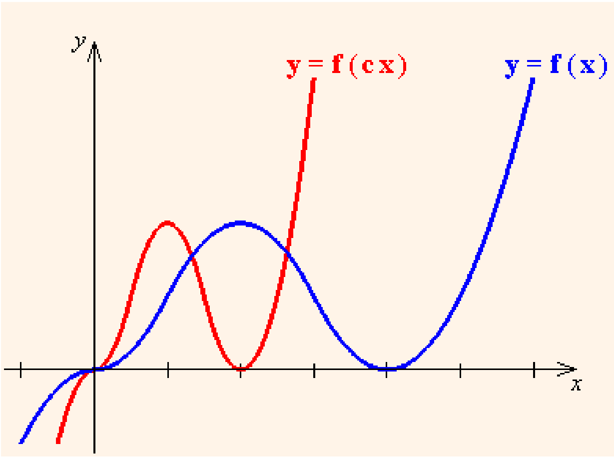


Figura 35: Gráfico das funções f e g

Pelo gráfico acima, podemos observar que os valores de máximo e de mínimo da função não se alteraram, mas os pontos de máximo e de mínimo foram alterados pelo fator c.

b) **Compressão vertical:** Consideremos a função y definida por $y = g(x) := \frac{f(x)}{c}$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $c > 1$. Neste caso, obtemos o gráfico da função g através de uma compressão vertical no gráfico da função f. Observe que para cada valor x no domínio da função g, temos $g(x) = \frac{f(x)}{c}$, ou seja, o valor da função g para o valor da abcissa x é igual ao valor da função f para a abcissa x, dividido por c. Como isso é válido para qualquer $x \in D(g)$, temos uma compressão vertical no gráfico. A figura 36 ilustra essa situação:

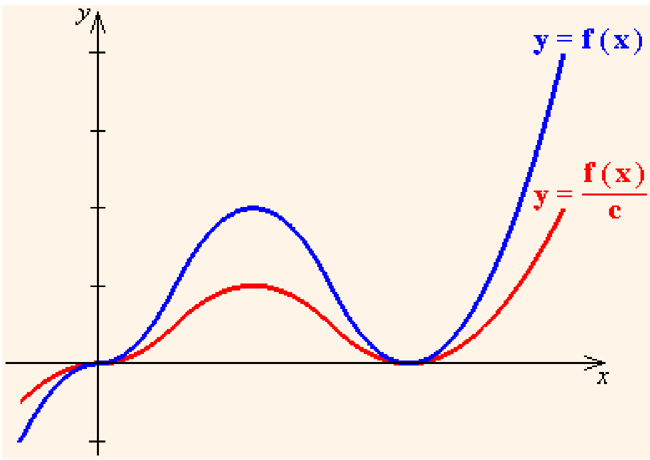


Figura 36: Gráfico das funções f e g

Já neste caso, observamos que os pontos de máximo e de mínimo não se alteraram, mas os valores de máximo e de mínimo sofreram uma alteração pelo fator c.

c) **Expansão horizontal:** Consideremos a função y definida por $y = g(x) := f(\frac{x}{c})$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $c > 1$. Neste caso, obtemos o gráfico da função g através de uma expensão no gráfico da função f. Observe que para cada valor x no domínio da função g, temos $g(x) = f(\frac{x}{c})$, ou seja, o valor da função g para o valor da abcissa x é igual ao valor da função f para a abcissa x/c. Como isso é válido para qualquer $x \in D(g)$, temos uma expansão horizontal no gráfico.

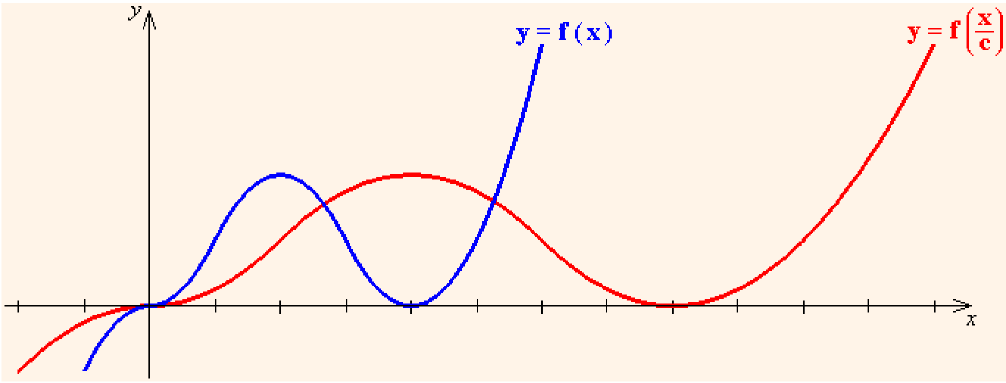


Figura 37: Gráfico das funções f e g

Pelo gráfico acima, podemos observar que os valores de máximo e de mínimo da função não se alteraram, mas os pontos de máximo e de mínimo foram alterados pelo fator c. Isso ocorre pelo fato de que se $f(x_0) = A$ é um ponto de máximo, então $g(x_0/c) = f(cx_0/c) = A$, ou seja, o ponto muda com o fator c, mas o valor da função não se altera.

d) **Expansão vertical:** Consideremos a função $y = g(x) := cf(x)$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $c > 1$. Neste caso, obtemos o gráfico da função g através de uma expensão no gráfico da função f. Observe que para cada valor x no domínio da função g, temos $g(x) = cf(x)$, ou seja, o valor da função g para o valor da abcissa x é igual ao valor da função f para a abcissa x, multiplicado por $c > 1$. Como isso é válido para qualquer $x \in D(g)$, temos uma expansão horizontal no gráfico.

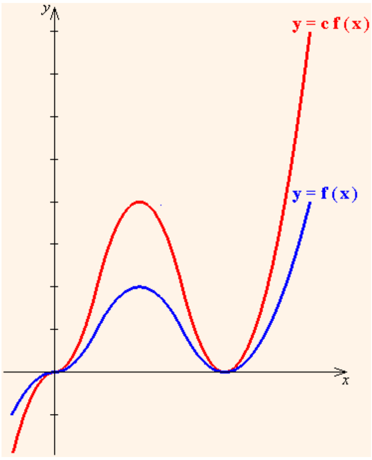


Figura 38: Gráfico das funções f e g

Já neste caso, observamos que os pontos de máximo e de mínimo não se alteraram, mas os valores de máximo e de mínimo sofreram um alteração pelo fator c.

Antes de apresentarmos um exemplo, ressaltamos que se tivermos a constante $c \in \mathbb{R}$ entre zero e um, isto é, $0 < c < 1$, teremos então que existe $d > 1$ tal que $c = 1/d$. E assim, ao invés de uma expansão, teremos uma compressão, e vice e versa.

Exemplo 7.2. *Como exemplo do que vimos, consideremos a função F definida por $F(x) = 4 - x^2$. Vamos fazer o gráfico:*

a) da compressão horizontal $y = F(2x)$

b) da expansão horizontal $y = F(x/2)$

c) da compressão vertical $y = F(x)/2$

d) da expansão vertical $y = 2F(x)$.

Para o item (a), temos:

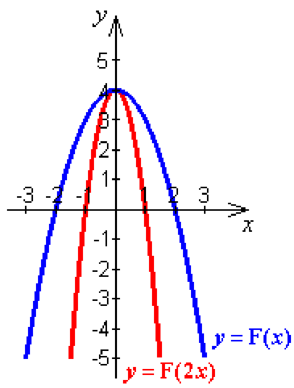


Figura 39: Gráfico das funções do item a)

Para o item (b), temos:

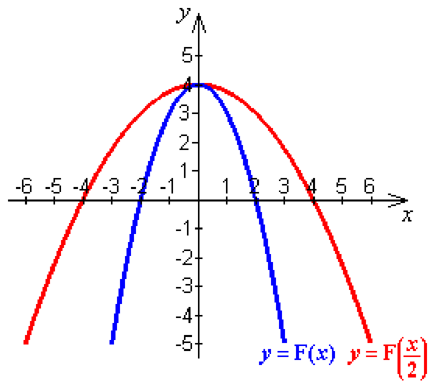


Figura 40: Gráfico das funções do item b)

Para o item (c), temos:

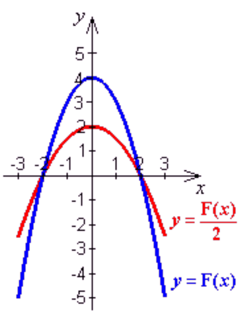


Figura 41: Gráfico das funções do item c)

Para o item (d), temos:

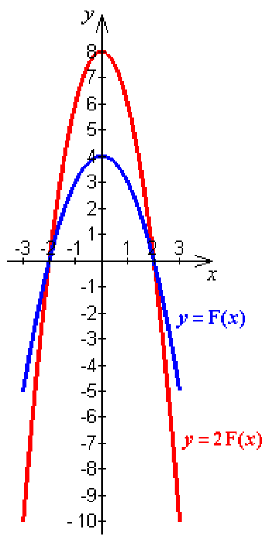


Figura 42: Gráfico das funções do item d)

Observamos que um estudo mais detalhado sobre a construção de gráficos pode ser feito utilizando-se as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral. Em particular a derivada possui diversas aplicações na construção de gráficos de funções reais.

8 CONCLUSÃO

No decorrer do texto aqui apresentado, pudemos rever o conceito de função, em diversas definições, bem como uma série de propriedades que caracterizam o seu comportamento. É claro que existem ainda diversos tópicos relacionados ao estudo de funções que não foram aqui incluídos, como por exemplo, um estudo sobre as funções trigonométricas. Mas, como mencionado na introdução, esperávamos aqui fazer uma obordagem um pouco diferente da geralmente apresentada nos livros universitários. Acreditamos ter obtido sucesso no nosso objetivo principal que era elaborar um material didático de apoio para o professor de matemática da educação básica. Um material de fácil leitura, com explicações detalhadas e diversos exemplos para facilitar a compreeensão dos conteúdos.

Um projeto seguinte para este trabalho, é a utilização deste material como base para cursos de formação continuada de professores. A promoção de tais cursos ajudará a divulgar a pesquisa aqui realizada, e a levará para o contato direto com o professor, que foi o alvo principal deste trabalho.

Em resumo, considerando-se tudo o que foi estudado para a realização desta dissertação, bem como ao longo dos anos das disciplinas do PROFMAT, concluímos que o professor de matemática nunca pode se acomodar e deixar de estudar, pois conceitos matemáticos podem evoluir, bem como a maneira como os trabalhamos dentro da sala de aula pode ser sempre aprimorada, de maneira a potencializar o aprendizado do aluno.

REFERÊNCIAS

BOTELHO, G. M. A. ***A evolução do conceito de função****. Uberlândia: Revista Ciência e Engenharia, 1992.*

BOYER, C. B. ***História da Matemática****. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.*

BRASIL, M. d. E. M. ***Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Médio****. Brasília: MEC, 2000.*

DANTE, L. R. ***MATEMÁTICA, Contexto e Aplicações****. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.*

FLEMMING, D. M. M. B. G. ***Cálculo A: funções, limite, derivação, integração****. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.*

GUIDORIZZI, H. L. ***Um Curso de Cálculo. Volume 1****. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.*

IEZZI G., C. M. ***Fundamentos de Matemática Elementar****. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2001.*

INEP. ***CONTEÚDO DAS PROVAS DO ENEM****. 2011. Disponível em: <http://enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 01 de julho de 2015.*

LIMA, E. L. ***Curso de Análise. Volume 1****. 12. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2007.*

LIMA, E. L. ***Números e Funções Reais****. Rio de Janeiro: SBM, 2013.*

MONTEIRO, L. H. J. ***Elementos de Álgebra****. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.*

MORGADO, A. C. ***Matemática Discreta****. Rio de Janeiro: SBM, 2013.*

NETO, A. C. M. ***Tópicos da Matemática Elementar. Volume 3. Introdução à Análise****. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.*

PARANÁ. ***Diretrizes Currilares de Matemática para a Educação Básica****. Curitiba: Secretaria de Estado da Educação, 2007.*

ZUFFI, E. M. ***Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função****. 9. ed. São Paulo: Educação Matemática em Revista, 1997.*