

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA E DE MATERIAIS**

MILTON KIST

**NOVAS METODOLOGIAS DE SIMULAÇÃO DO TIPO
MONTE-CARLO VIA SÉRIES DE NEUMANN APLICADAS A
PROBLEMAS DE FLEXÃO DE PLACAS**

TESE DE DOUTORADO

CURITIBA
2016

MILTON KIST

**NOVAS METODOLOGIAS DE SIMULAÇÃO DO TIPO
MONTE-CARLO VIA SÉRIES DE NEUMANN APLICADAS A
PROBLEMAS DE FLEXÃO DE PLACAS**

Tese de doutorado apresentada junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica e de Materiais

Orientador: Prof. Dr. Claudio R. Ávila da Silva Jr.

CURITIBA
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

K61n
2016 Kist, Milton
Novas metodologias de simulação do tipo Monte-Carlo via
séries de Neumann aplicadas a problemas de flexão de placas /
Milton Kist.-- 2016.
144 f. : il.; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês

Disponível também via World Wide Web

Tese (Doutorado) - Universidade Tecnológica Federal do Pa-
raná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e
de Materiais, Curitiba, 2016

Bibliografia: p. 142-144

1. Análise estocástica. 2. Teoria da previsão. 3. Métodos de
simulação. 4. Kirchhoff, Leis de. 5. Engenharia mecânica – Te-
ses. I. Silva Júnior, Cláudio Roberto Ávila da, orient. II. Universi-
dade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-gradua-
ção em Engenharia Mecânica e de Materiais, inst. III. Título.

CDD: Ed. 22 -- 620.1

Biblioteca Ecoville, Câmpus Curitiba

TERMO DE APROVAÇÃO

MILTON KIST

NOVAS METODOLOGIAS DE SIMULAÇÃO DO TIPO MONTE-CARLO VIA SÉRIES DE NEUMANN APLICADAS A PROBLEMAS DE FLEXÃO DE PLACAS

Esta Tese foi julgada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia, área de concentração em Mecânica dos Sólidos, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais.

Prof. Paulo César Borges, Dr.
Coordenador do Programa

Banca Examinadora

Prof. Claudio R. Ávila da Silva Jr, Dr.
PPGEM/UTFPR – Orientador

Prof. André Teófilo Beck, Dr.
USP

Prof. Hilbeth Azikri , Dr.
PPGEM/UTFPR

Prof. Key Fonseca de Lima, Dr.
PUCPR

Prof. Ivan Moura Belo , Dr.
PPGEM/UTFPR

Curitiba, 04 de Julho de 2016

Ao meu grupo familiar.
Minha esposa e companheira Ester,
pelo amor, apoio, suporte
e por acreditar neste sonho.
Meus filhos Rafael e Camila,
pela compreensão e carinho.

Agradecimentos

Aos meus pais que sempre mostraram aos filhos a importância do estudo, mesmo tendo pouco acesso a educação formal.

Ao meu irmão, professor Dr. Airton Kist, pelo companheirismo nos tempos de graduação e mestrado. Pelo auxílio prestado para um melhor entendimento na geração de códigos no Matlab.

Aos meus colegas da PPGEM, principalmente ao Rodrigo, ao Antônio e ao Waldir, pela amizade e companhia nas incursões para Curitiba.

Aos meus colegas de trabalho, professores da área de Matemática da UFFS Antônio, Ana, Edson, Janice, Lúcia, Marisol, Nilce, Paulo, Pedro, Rosane, Tarcisio, Vitor. Por compreenderem o meu processo de doutoramento sem afastamento institucional, e em alguns momentos assumirem mais atividades para que eu pudesse ficar mais focado nos meus estudos.

Ao meu amigo, ex-colega e professor Dr. Fábio Dorini, por sempre ter me incentivado a buscar o doutoramento. Além de ter me apresentado ao professor Dr. Claudio R. Ávila da Silva Jr. que logo na sequência se tornou meu orientador na PPGEM.

Ao nobre amigo e professor Dr. Ruy Coimbra Charão, um grande incentivador do ensino e da pesquisa, do qual tive o privilégio de ser orientando de iniciação científica, de TCC e da dissertação de mestrado. Que também foi orientador de mestrado (em Matemática) do prof. Claudio Ávila.

Aos professores da PPGEM, principalmente ao Hilbeth, ao Ivan, ao Luersen e ao Ávila que ministraram disciplinas para mim no curso e contribuíram na minha formação.

À PPGEM e à UTFPR-CT, pela oportunidade em poder cursar o curso de doutorado em Engenharia numa instituição pública de qualidade.

Aos professores, integrantes da banca de defesa da tese, que se dispuseram a ler o presente trabalho e por apresentarem suas sugestões de aperfeiçoamento. Um agradecimento também ao prof. Mattioli, pelas valiosas contribuições na qualificação da tese, mas que infelizmente não pôde participar da banca de defesa da tese.

Meu especial agradecimento ao meu orientador, prof. Dr. Claudio R. Ávila da Silva Jr., pelo companheirismo, pela paciência e por ter aceitado o desafio de orientar alguém que não fosse da área da engenharia.

RESUMO

KIST, Milton. **Novas metodologias de simulação do tipo Monte-Carlo via séries de Neumann aplicadas a problemas de flexão de placas**. Tese - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 155p., 2016.

A engenharia é um campo muito rico e vasto em problemas. Mesmo considerando-se apenas o ramo da engenharia estrutural, a quantidade e a variabilidade de problemas continuam sendo muito grande. O aumento da capacidade computacional proporcionou, nos últimos anos, o desenvolvimento de métodos mais complexos e robustos (métodos estocásticos) para resolução de problemas na área de estruturas passando a considerar incerteza. A incerteza pode ser devido à aleatoriedade das propriedades materiais, condições de apoio e carregamento. Muitos dos métodos estocásticos são baseados na simulação de Monte-Carlo, no entanto o método de Monte-Carlo direto possui custo computacional elevado. Visando o desenvolvimento de novas metodologias para resolução de problemas da área de estruturas, neste trabalho de tese apresentam-se três novas metodologias aplicadas a problemas estocásticos de flexão de placas, caracterizando assim a contribuição científica da tese. Estas metodologias, denominadas de Monte Carlo-Neumann, com ajuste no limitante; Monte Carlo-Neumann, mista 1 e Monte Carlo-Neumann, mista 2, utilizam a série de Neumann associada ao método de Monte-Carlo. Para verificar a eficiência quanto a precisão e ao tempo computacional, as metodologias foram aplicadas em problemas estocásticos de flexão de Placas de Kirchhoff em bases de Winkler e de Pasternak, considerando-se aleatoriedade sobre a rigidez da placa e sobre os coeficientes de rigidez da base de apoio.

Palavras Chave: Quantificação de incerteza, Série de Neumann, Métodos estocásticos.

ABSTRACT

KIST, Milton. **New methods of simulation type Monte-Carlo for Neumann series applied to plate bending problems.** Thesis - Graduate Program in Mechanical and Materials Engineering, Federal Technological University of Paraná,, Curitiba, 155p., 2016.

Engineering is a very rich and wide field in problems. Even considering just structural engineering branch, the amount and variability of problems remains very large. The increase of computational capacity provided development of complex and robust methods to solve structural problems considering uncertainty. Uncertainty may be due to material property randomness, support conditions and load. Many of stochastic methods are based on Monte-Carlo simulation, however Monte-Carlo direct method has high computation cost. Aiming the development of new methodologies for solving problems of the structures area, this thesis presents three new methodologies applied to plates stochastic bending problems, characterizing the scientific contribution of the thesis. These methodologies, named Monte Carlo-Neumann λ and Monte Carlo-Neumann, with quotas establishment, Monte Carlo-Neumann, with adjustment in limiting, Monte Carlo-Neumann, mixed 1 and Monte Carlo-Neumann, mixed 2, both based on Neumann series, were applied to stochastic problems of flexion of Kirchhoff plates on Winkler and Pasternak bases, considering uncertainty about plate stiffness and stiffness coefficient of the support base.

Keywords: Quantification of uncertainty, Neumann series, Stochastic methods.

Lista de Figuras

3.1	Placa de Kirchhoff, <i>Belo</i> (2006).	28
3.2	Teorias de deformação de placas, <i>Reddy et al.</i> (2000).	30
3.3	Descontinuidade no deslocamento da fundação de Winkler, adaptação <i>Hidalgo</i> (2015)	36
3.4	Modelo de Fundação de Pasternak, adaptação <i>Hidalgo</i> (2015)	37
5.1	Evolução do valor esperado para o deslocamento via métodos de <i>Monte-Carlo</i> e <i>Monte Carlo - Neumann</i> λ , em $(x, y) = (0.5, 0.5)$	64
5.2	Evolução da variância do deslocamento via métodos de <i>Monte-Carlo</i> e <i>Monte Carlo - Neumann</i> λ , em $(x, y) = (0.5, 0.5)$	65
5.3	Funções valor esperado do deslocamento transversal da placa de Kirchhoff.	66
5.4	Funções variância do deslocamento transversal da placa de Kirchhoff.	66
5.5	Funções desvio relativo em termos da variância e do valor esperado.	67
5.6	Função erro do valor esperado $\mu_{u_{m1\lambda}}(x, y) - \mu_{u_m}(x, y)$	67
5.7	Funções valor esperado μ_{u_m} , $\mu_{u_{\delta i_1}}$ e $\mu_{u_{\delta i_2}}$, em $(x, y) = (0.2, y)$, nas normas $i = 2, 4$	69
5.8	Funções de autocorrelação $\mu_{u_m}^2$, $\mu_{u_{\delta i_1}}^2$ e $\mu_{u_{\delta i_2}}^2$, nas normas $i = 2, 4$	69
5.9	Funções desvio relativo do valor esperado $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_1}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_2}}}$, nas normas $i = 2, 4$	70
5.10	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	70
5.11	Funções desvio relativo da autocorrelação.	71
5.12	Funções valor esperado e erro do valor esperado nas normas $i = 2, 4$	72
5.13	Funções de autocorrelação $\mu_{u_m}^2$, $\mu_{u_{\delta i_{1m}}}^2$ e $\mu_{u_{\delta i_{2m}}}^2$, nas normas $i = 2, 4$	73
5.14	Funções desvios relativos nas normas $i = 2, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$	73
5.15	Funções desvios relativos, sobre a placa, na norma 2.	74
5.16	Funções desvios relativos, nas normas $i = 2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$	75
5.17	Funções de valor esperado μ_{u_m} , $\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}$ e $\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}$ e de autocorrelação $\mu_{u_m}^2$, $\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}^2$ e $\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}^2$, nas normas $i = 2, 4$	76
5.18	Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}}$, nas normas $i = 2, 3, 4$	77
5.19	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	77
5.20	Funções desvio relativo da autocorrelação.	78
5.21	Funções valor esperado e autocorrelação, nas normas $i = 2, 4$	79
5.22	Funções desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 4$	80
5.23	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	80
5.24	Funções desvio relativo da autocorrelação.	81
5.25	Desvios relativos sobre a placa, nas normas $i = 2, 3, 4$	82
5.26	Funções desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$	83
5.27	Funções desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$, novas metodologias.	83
5.28	Funções desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$	84

5.29	Funções desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$, novas metodologias.	85
5.30	Funções desvio relativo e erro do valor esperado na placa de Kirchhoff.	86
5.31	Função erro do valor esperado.	87
5.32	Funções desvio relativo da variância e da autocorrelação na placa de Kirchhoff.	87
5.33	Funções de valor esperado e autocorrelação, nas normas $i = 2, 4$	88
5.34	Funções desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação, nas normas $i = 2, 4$	89
5.35	Funções de desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação, na norma 2.	89
5.36	Funções erro do valor esperado, nas normas $i = 2, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$	90
5.37	Funções desvio relativo do valor esperado em $(x, y) = (0.5, y)$	91
5.38	Funções desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação, na norma $i = 2$	92
5.39	Funções erro do valor esperado e desvio relativo da autocorrelação.	92
5.40	Funções desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$	94
5.41	Funções desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação, na norma $i = 2$	94
5.42	Funções erro do valor esperado e desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$	95
5.43	Funções desvio relativo do valor esperado $\epsilon_{\mu_{u\delta_{i1\lambda}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta_{i2\lambda}}}$ em $(x, y) = (0.5, y)$	96
5.44	Funções desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação, na norma $i = 2$	97
5.45	Funções erro do valor esperado e desvio relativo da autocorrelação.	98
5.46	Funções desvio relativo do valor esperado, caso 2.	99
5.47	Funções desvio relativo do valor esperado, caso 2, novas metodologias.	99
5.48	Funções desvio relativo da autocorrelação, caso 2.	100
5.49	Funções desvio relativo da autocorrelação, caso 2, novas metodologias.	100
6.1	Funções valor esperado e variância pela metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> λ	110
6.2	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	110
6.3	Funções desvio relativo da variância e da autocorrelação.	111
6.4	Funções desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$, nas normas $i=2, 3, 4$	112
6.5	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	112
6.6	Funções desvio relativo da autocorrelação.	113
6.7	Funções valor esperado e variância pela metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> λ	115
6.8	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	116
6.9	Funções desvio relativo da variância e da autocorrelação.	116
6.10	Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{u\delta_{i1\lambda}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta_{i2\lambda}}}$, nas normas $i=2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$	117
6.11	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	118
6.12	Funções desvio relativo da autocorrelação.	118
6.13	Funções valor esperado e variância pela metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> λ	120
6.14	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	121
6.15	Funções desvio relativo da variância e da autocorrelação.	121
6.16	Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{u\delta_{i1\lambda}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta_{i2\lambda}}}$, nas normas $i=2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$	122
6.17	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	123
6.18	Funções desvio relativo da autocorrelação.	124
6.19	Funções valor esperado e variância pela metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> λ	125
6.20	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	126
6.21	Funções desvio relativo da variância e da autocorrelação.	126

6.22	Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{u\delta i_{1\lambda}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta i_{2\lambda}}}$, nas normas $i=2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$	127
6.23	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	128
6.24	Funções desvio relativo da autocorrelação.	129
6.25	Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{u\delta i_{1\lambda}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta i_{2\lambda}}}$, nas normas $i=2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$	130
6.26	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	131
6.27	Funções desvio relativo da autocorrelação.	132
6.28	Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{u\delta i_{1\lambda}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta i_{2\lambda}}}$, nas normas $i=2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$	133
6.29	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	133
6.30	Funções desvio relativo da autocorrelação.	134
6.31	Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{u\delta i_{1\lambda}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta i_{2\lambda}}}$, nas normas $i=2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$	136
6.32	Funções desvio relativo e erro do valor esperado.	136
6.33	Funções desvio relativo da autocorrelação.	137

Lista de Tabelas

5.1	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> (T_{MC}) e <i>Monte Carlo - Neumann</i> λ ($T_{MCN\lambda}$).	68
5.2	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com estabelecimento de cotas, sobre o domínio D	71
5.3	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> T_{MC} e <i>Monte Carlo - Neumann</i> T_i , com estabelecimento de cotas, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	72
5.4	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com ajuste no limitante, sobre o domínio D	74
5.5	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> T_{MC} e <i>Monte Carlo - Neumann</i> T_i , com ajuste no limitante, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	75
5.6	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 1, sobre o domínio D	78
5.7	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> T_{MC} e <i>Monte Carlo - Neumann</i> T_i , mista 1, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	79
5.8	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 2, sobre o domínio D	81
5.9	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> T_{MC} e <i>Monte Carlo - Neumann</i> T_i , mista 2, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	82
5.10	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> (T_{MC}) e <i>Monte Carlo - Neumann</i> λ ($T_{MCN\lambda}$).	88
5.11	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com estabelecimento de cotas, sobre o domínio D	90
5.12	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> T_{MC} e <i>Monte Carlo - Neumann</i> T_i , com estabelecimento de cotas, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	90
5.13	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com ajuste no limitante, sobre o domínio D	93
5.14	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> T_{MC} e <i>Monte Carlo - Neumann</i> T_i , com ajuste no limitante, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	93
5.15	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 1, sobre o domínio D	95
5.16	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> T_{MC} e <i>Monte Carlo - Neumann</i> T_i , mista 1, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	96

5.17	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> , mista 2, sobre o domínio D	97
5.18	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> T_{MC} e <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> T_i , mista 2, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	98
5.19	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> , sobre o domínio D	102
5.20	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> , com ajuste no limitante, sobre o domínio D	103
5.21	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> , mista 1, sobre o domínio D	103
5.22	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> , mista 2, sobre o domínio D	104
5.23	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> , sobre o domínio D	104
5.24	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> , com ajuste no limitante, sobre o domínio D	105
5.25	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> , mista 1, sobre o domínio D	105
5.26	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> , mista 2, sobre o domínio D	105
6.1	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> (T_{MC}) e <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> λ (T_{MCN_λ}).	111
6.2	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> , mista 1, sobre o domínio D	114
6.3	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> T_{MC} e <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> T_i , mista 1, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	114
6.4	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> (T_{MC}) e <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> λ (T_{MCN_λ}).	117
6.5	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> , mista 1, sobre o domínio D	119
6.6	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> T_{MC} e <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> T_i , mista 1, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	119
6.7	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> (T_{MC}) e <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> λ (T_{MCN_λ}).	122
6.8	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> , mista 1, sobre o domínio D	124
6.9	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> T_{MC} e <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> T_i , mista 1, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	124
6.10	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> (T_{MC}) e <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> λ (T_{MCN_λ}).	127
6.11	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> , com estabelecimento de cotas, sobre o domínio D	129
6.12	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo</i> T_{MC} e <i>Monte Carlo</i> - <i>Neumann</i> T_i , com estabelecimento de cotas, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	129

6.13	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com ajuste no limitante, sobre o domínio D	131
6.14	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo T_{MC}</i> e <i>Monte Carlo - Neumann T_i</i> , com ajuste no limitante, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	132
6.15	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 1, sobre o domínio D	134
6.16	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo T_{MC}</i> e <i>Monte Carlo - Neumann T_i</i> , mista 1, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	135
6.17	Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 2, sobre o domínio D	137
6.18	Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de <i>Monte-Carlo T_{MC}</i> e <i>Monte Carlo - Neumann T_i</i> , mista 2, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$	138

Sumário

Introdução	2
1 Teoremas, conceitos e definições básicas	6
2 Metodologias para quantificação de incertezas	11
2.1 Revisão de Literatura	11
2.2 Série de Neumann	14
2.3 Metodologia de simulação de <i>Monte Carlo - Neumann λ</i>	16
2.4 Metodologia de simulação de <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com estabelecimento de cotas	23
3 Teoria de flexão de placas	28
3.1 Problema de Flexão de Placas de Kirchhoff	31
3.2 Modelos de Placas de Kirchhoff (bidimensional) Simplesmente Apoiada	35
3.2.1 Problema de Kirchhoff em fundação Winkler	35
3.2.2 Problema de Kirchhoff em fundação Pasternak	36
3.3 Adaptação das Metodologias de simulação <i>Monte Carlo - Neumann λ</i> e <i>Monte Carlo - Neumann</i> à problemas de placas	46
3.3.1 Metodologia de simulação <i>Monte Carlo - Neumann λ</i>	46
3.3.2 Metodologia de simulação de <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com estabelecimento de cotas	48
4 Novas metodologias do tipo <i>Monte Carlo - Neumann</i>	53
4.1 Metodologia de <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com ajuste no limitante	53
4.2 Metodologia de <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 1	56
4.3 Metodologia de <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 2	59
5 Simulações numéricas aplicadas ao problema de flexão da placa de Kirchhoff apoiada sobre uma base de Winkler	62
5.1 Caso 1: Incerteza sobre a rigidez da placa, $\alpha = \alpha(x, y, \omega)$	64
5.1.1 Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann λ</i>	64
5.1.2 Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com estabelecimento de cotas	68
5.1.3 Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com ajuste no limitante	72
5.1.4 Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 1	76
5.1.5 Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 2	79
5.1.6 Considerações comparativas entre as quatro metodologias envolvendo cotas	82
5.2 Caso 2: Incerteza sobre a rigidez da fundação, $\kappa_w = \kappa_w(x, y, \omega)$	86
5.2.1 Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann λ</i>	86
5.2.2 Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com estabelecimento de cotas	88

5.2.3	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com ajuste no limitante	91
5.2.4	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 1	93
5.2.5	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 2	96
5.2.6	Considerações comparativas entre as quatro metodologias envolvendo cotas, <i>caso 2</i>	99
5.3	Problemas com variabilidades maiores na fundação	101
5.3.1	Primeiro exemplo: $\sigma_{\kappa_w} = \frac{3}{10} \cdot \mu_{\kappa_w}$	102
5.3.2	Segundo exemplo: $\sigma_{\kappa_w} = \frac{1}{2} \cdot \mu_{\kappa_w}$	104
6	Simulações numéricas aplicadas ao problema de flexão da placa de Kirchhoff apoiada sobre uma base de Pasternak	107
6.1	Problema 1: Incerteza sobre $\alpha = \alpha(x, y, w)$, coeficiente de rigidez da placa	109
6.1.1	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> λ	109
6.1.2	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 1	112
6.2	Problema 2: Incerteza sobre $\kappa_p = \kappa_p(x, y, \omega)$, coeficiente de rigidez da base de apoio	114
6.2.1	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> λ	115
6.2.2	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 1	117
6.3	Problema 3: Incerteza sobre $\kappa_w = \kappa_w(x, y, \omega)$ coeficiente de rigidez da base de apoio	120
6.3.1	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> λ	120
6.3.2	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 1	122
6.4	Incerteza sobre os três parâmetros de rigidez	125
6.4.1	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> λ	125
6.4.2	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com estabelecimento de cotas	127
6.4.3	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , com ajuste no limitante	130
6.4.4	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 1	132
6.4.5	Simulação via <i>Monte Carlo - Neumann</i> , mista 2	135
	Considerações Finais	139
	Referências Bibliográficas	142

Introdução

A engenharia mostra-se um campo de trabalho e de pesquisa muito rico e vasto em problemas. Mesmo considerando-se somente o ramo da engenharia estrutural, a variabilidade de problemas continua sendo muito grande. Pelo fato da maior parte dos problemas aplicados, mesmo efetuando-se simplificações, serem complexos ao ponto de não ser possível determinar soluções ou aproximações de soluções analíticas, faz-se necessário o uso métodos computacionais.

No campo das estruturas, os modelos matemáticos atuais, que descrevem os problemas físicos da área, envolvem sistemas com alto grau de complexidade. Devido a complexidade desses modelos, requer-se a utilização de métodos e técnicas numéricas de resolução. Em problemas de engenharia destacam-se os métodos que usam elementos finitos, diferenças finitas, elementos de contorno, volumes finitos, entre outros. A utilização desses métodos, acompanhados de novas técnicas e metodologias, vem ganhando cada vez mais espaço devido ao aumento da capacidade computacional, o que permite resolver-se numericamente problemas cada vez mais complexos.

Antes do avanço tecnológico e conseqüente aumento da capacidade computacional, na maioria dos problemas aplicados, consideravam-se aplicações apenas de cargas determinísticas e desconsideravam-se as variabilidades materiais, efetuando-se simplificações devido a baixa capacidade computacional instalada, apesar dos problemas reais envolverem incerteza. Quando fala-se em incerteza vem logo o questionamento de como quantificar essa incerteza. Nas últimas décadas a quantificação da incerteza, vem sendo amplamente empregada em problemas de engenharia, e em particular, em problemas de estruturas.

O termo incerteza, embora tenha sua denominação originalmente associada a eventos envolvendo problemas de probabilidade, é um termo amplamente empregado em várias áreas do conhecimento. Quando empregado ao campo da engenharia estrutural esse termo passa a ganhar outras conotações. A incerteza se faz presente na variabilidade, por exemplo, dos coeficientes de rigidez do material e da base de apoio, da não homeogeneidade material. Assim, problemas que antes eram tratados por meio de modelos determinísticos, passaram a ser tratados por meio de modelos estocásticos. Desta forma, se passou a assumir incertezas nos problemas estudados.

O aumento da capacidade computacional, aliada a implementação de novas técnicas e metodologias de análise e resolução de problemas de engenharia envolvendo incertezas, fez com que ocorresse nos últimos anos um avanço na aplicação de incerteza para a resolução de problemas de engenharia, bem como para a modelagem. Em engenharia estrutural essas incertezas podem

ser devido à aleatoriedade das propriedades materiais e geométricas (viga, placa, ...), condições de apoio, variabilidade do solo, entre outros.

Uma das primeiras metodologias usadas em problemas de engenharia envolvendo incerteza, foi a simulação de *Monte-Carlo*. E uma de suas aplicações de maior notoriedade ocorreu no Projeto Manhattan, durante a Segunda Guerra Mundial, pelas mãos dos cientistas John Von Neumann e Stanislaw Ulam (a denominação *Monte-Carlo* faz referência aos jogos de azar, que usam sorteios de dados, sendo uma das principais atrações da cidade de *Monte-Carlo*, no principado de Mônaco). Ela envolve a geração de números aleatórios com o objetivo de atribuir valores às variáveis, do sistema a ser investigado. Os números aleatórios podem ser obtidos por meio de simulações computacionais.

A cada amostra, os resultados são armazenados e com o conjunto de realizações estima-se os momentos estatísticos, o que permite calcular estatísticas descritivas, como média (valor esperado), desvio-padrão, autocorrelação, variância, dentre outros. Além do método poder ser aplicado em problemas envolvendo incertezas, é possível também aplicá-lo em problemas que envolvem risco de uma maneira geral, ou seja, em situações onde o comportamento das variáveis, envolvidas nos problemas em questão, não são de natureza determinística.

Embora o método de simulação de *Monte-Carlo* direto (a partir deste momento, sempre que se fizer referência ao termo “*Monte-Carlo* direto”, será adotado de forma simplificada o termo “*Monte-Carlo*”) tenha sido um dos primeiros métodos empregado, envolvendo problemas de incerteza, ele continua sendo utilizado como referência para a avaliação de eficiência de novas metodologias. Devido ao alto custo computacional, o uso do método de *Monte-Carlo* não é recomendado principalmente em problemas que apresentam não linearidades ou dimensões muito altas. Na simulação de *Monte-Carlo* a solução de uma equação diferencial, que descreve um problema estrutural, é aproximada pela solução de um sistema de equações algébricas da forma $KU = F$, onde $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma matriz de rigidez. Neste caso, em se utilizando o método de simulação de *Monte-Carlo*, para cada amostra estrutural, deve-se reavaliar o sistema, o que pode gerar um alto custo computacional caso o número de amostras ou a dimensão do sistema sejam altas.

Objetivando minimizar o custo computacional na resolução dos sistemas lineares associados aos problemas estruturais, a série de Neumann, para um operador linear definido em dimensão finita, $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, surge como alternativa. A utilização da série de Neumann propõe que a inversa do operador K (matriz de rigidez), seja representado por meio de uma série, formada por potências de um dado operador $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Para ser mais efetivo computacionalmente, na determinação da inversa do operador K , deve-se considerar uma aproximação deste operador. Isto é obtido fazendo-se um truncamento da série, pois dependendo do número de termos na série corre-se o risco do número de operações realizadas ser maior do que determinar a solução exata de cada sistema linear.

A utilização da série de Neumann em problemas de engenharia teve uma de suas primeiras ocorrências no trabalho de *Yamazaki* (1989). Nesse trabalho *Yamazaki* utilizou a série de Neumann para determinar uma aproximação da inversa da matriz de rigidez K associada a resolução

do sistema de equações algébricas $KU = F$, que representa a equação de equilíbrio. Assim ele obteve as realizações do processo estocástico de deslocamento, para um problema de elasticidade bidimensional com incerteza no módulo de Young. Comparado ao método *Monte-Carlo*, o novo método se mostrou eficiente, quanto a convergência e ao tempo computacional, desde que limitado aos casos em que a variação das propriedades materiais da placa tenham coeficiente de variação relativamente pequenos.

Na sequência vários autores utilizaram a série de Neumann na resolução de problemas envolvendo estruturas, tanto em vigas como em placas. As incertezas, nesses trabalhos, foram consideradas sobre as propriedades materiais das estruturas, sobre as propriedades geométricas, sobre as condições de apoio entre outros.

Como ponto central para a motivação na definição do tema da presente tese estão os trabalhos recentes, sobre a utilização da série de Neumann associada ao método de *Monte-Carlo* aplicados a problemas de flexão de vigas, desenvolvidos por *Ávila & Beck* (2014), (2015b) e (2015a).

Nesses trabalhos, *Ávila & Beck* estabeleceram duas novas metodologias para o descrever o processo estocástico de resposta do problema de deslocamento transversal de vigas, usando apenas os primeiros termos da série Neumann. Em uma das metodologias eles propuseram o estabelecimento de cotas inferiores e superiores. Na outra metodologia eles utilizaram a série de Neumann com “ $n = 1$ ” para formular um problema de otimização matemática da classe de “distância mínima” entre vetores.

Essas variações da série de Neumann, propostas por *Ávila & Beck*, foram aplicadas apenas a problemas estocásticos de flexão de vigas, tendo apresentado bons resultados no quesito tempo computacional e convergência.

Em buscas feitas na literatura, não foram encontrados trabalhos propondo o emprego da estratégia de cotas superiores e inferiores bem como a utilização da série de Neumann de baixa ordem em problemas de otimização da classe “distância mínima”, para problemas de flexão de placas.

Sendo assim, a presente pesquisa se propõe em contribuir na verificação da eficiência dessas duas metodologias para os problemas estocásticos de flexão transversal de placas de Kirchhoff apoiadas em bases de Winkler e de Pasternak.

Conforme pode ser observado na literatura, a busca por novas metodologias eficientes para a resolução de problemas estocásticos envolvendo estruturas são de suma importância. Para contribuir cientificamente no desenvolvimento de novas metodologias de resolução para problemas estocásticos, na presente tese, propõe-se três novas metodologias envolvendo a série de Neumann e o estabelecimento de cotas, para a aproximação numérica de soluções de problemas de flexão transversal de placas. Estas três metodologias novas, foram aplicadas aos problemas de flexão transversal de placas de Kirchhoff apoiadas em bases de Winkler e de Pasternak.

Visando uma melhor compreensão do trabalho, apresenta-se seu escopo, organizado da seguinte forma. Na introdução, situa-se o desenvolvimento do trabalho, suas contribuições e seu ineditismo. No capítulo 1, apresentam-se alguns resultados básicos e definições que foram utilizadas no trans-

correr do trabalho. Conceitos estes envolvendo principalmente as áreas de estatística, álgebra linear e análise funcional. No capítulo 2, apresenta-se o levantamento bibliográfico sobre alguns trabalhos desenvolvidos, na área de estruturas, usando a série de Neumann associada ao método de *Monte-Carlo*, dando-se uma ênfase maior aos trabalhos de *Ávila & Beck* (2014), (2015b) e (2015a) que usaram duas metodologias baseadas na série de Neumann em problemas de flexão de vigas. Essas metodologias serviram de pano de fundo para o desenvolvimento da presente tese. As duas metodologias para a quantificação de incerteza, aplicadas em problemas de flexão transversal de vigas, a saber, metodologia de *Monte Carlo - Neumann* λ e de *Monte Carlo - Neumann* são descritas em detalhes. No capítulo 3, apresenta-se um estudo qualitativo envolvendo o problema de flexão de placas de Kirchhoff, apoiadas em bases de Winkler e de Pasternak, mostrando a existência e a unicidade de solução para cada um dos dois problemas, preparando os problemas para a busca de soluções. Além de descrever-se as duas metodologias, desenvolvidas por *Ávila & Beck* para a resolução de problemas de flexão de vigas, para soluções numéricas aproximadas em problemas de flexão de placas de Kirchhoff. No capítulo 4, apresentam-se as principais contribuições científicas da tese, caracterizando o ineditismo da pesquisa. São descritas três novas metodologias para resolução de problemas estocásticos de flexão de placas, ambas baseadas em estabelecimento de cotas. Essas três novas metodologias são denominadas de: *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante; *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2. No capítulo 5, apresenta-se a resolução numérica do problema estocástico de flexão transversal da placa de Kirchhoff apoiada em uma base de Winkler, para tanto a resolução foi obtida nas cinco metodologias, as duas desenvolvidas por *Ávila & Beck* e as três propostas no capítulo 4 da presente tese. Na resolução foram consideradas aleatoriedades sobre o coeficiente de rigidez da placa e sobre do coeficiente de rigidez da base, as análises foram feitas considerando-se a aleatoriedade separadamente. No capítulo 6, apresenta-se a resolução numérica do problema estocástico de flexão da placa de Kirchhoff apoiada em uma base de Pasternak. Neste problema foram considerados como termos estocásticos, o coeficiente de rigidez da placa e os dois coeficientes de rigidez da base. Inicialmente considerou-se a aleatoriedade de forma separada, nesta etapa aplicou-se as metodologias de *Monte Carlo - Neumann* λ e *Monte Carlo - Neumann*, mista 1. Na segunda etapa, considerou-se a aleatoriedade sobre os três parâmetros simultaneamente, nesta etapa aplicou-se as cinco metodologias descritas na texto. E finalmente, nas considerações finais, apresentam-se algumas considerações com relação a eficiência das cinco metodologias aplicadas à cada um dos problemas de flexão de placas.

Capítulo 1

Teoremas, conceitos e definições básicas

Neste capítulo apresentam-se alguns resultados e definições básicas, que foram utilizados no presente trabalho de pesquisa. As definições, conceitos e resultados desta seção foram obtidos a partir das referências *Magalhães* (2013), *Brézis* (1984), *Medeiros* (1977), *Golub* (2013), *Lima* (2015) e *Nocedal & Wright* (2006).

Definição 1.1 (σ -álgebra). *Uma classe de subconjuntos do espaço amostral Ω , representado por \mathcal{F} , é denominada uma σ -álgebra se satisfaz as seguintes propriedades:*

(A1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(A2) Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^C \in \mathcal{F}$;

(A3) Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Se em (A3) apenas a união finita pertence a \mathcal{F} , define-se uma classe menos restrita, denominada de álgebra.

Definição 1.2 (Probabilidade). *Uma função P , definida na σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz os seguintes axiomas:*

(A1) $P(\Omega) = 1$;

(A2) Para todo subconjunto $A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0$;

(A3) Para toda sequência $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, mutuamente exclusivos, tem-se

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Definição 1.3 (Espaço de probabilidade). *A terna (Ω, \mathcal{F}, P) é denominada espaço de probabilidade. Os subconjuntos que estão em \mathcal{F} são denominados eventos e é somente a eles que se atribui probabilidade.*

Definição 1.4 (Variável aleatória). *Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade. Denomina-se de variável aleatória, qualquer função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$X^{-1} = \{w \in \Omega : X(w) \in I\} \in \mathcal{F},$$

para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Isto é, X é uma variável aleatória se sua imagem inversa para intervalos $I \subset \mathbb{R}$ pertencem a σ -álgebra \mathcal{F} .

Definição 1.5 (Vetor aleatório). *Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade. Denota-se de vetor aleatório (variável aleatória multivariada), qualquer função $\underline{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, \mathcal{F} -mensurável, definida por: $\underline{X}(w) = (X_1(w), X_2(w), \dots, X_m(w))^T$, onde X_i , com $i = 1, 2, \dots, m$, é uma variável aleatória.*

Definição 1.6 (Valor esperado). *Seja X uma variável aleatória não negativa em (Ω, \mathcal{F}, P) . Define-se valor esperado ou esperança matemática de X por*

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n),$$

em que $\{X_n : n > 0\}$ é uma seqüência monótona não decrescente de variáveis aleatórias simples no mesmo espaço de probabilidade e tal que tem-se a convergência $X_n(w) \rightarrow X(w)$, $\forall w \in \Omega$.

Definição 1.7 (Momentos estatísticos). *Para $k = 1, 2, 3, \dots$, o momento de ordem k da variável X é definido por $E(X^k)$, desde que essa quantidade exista. Se $E(X) = \mu < \infty$, define-se o momento central de ordem k por $E[(X - \mu)^k]$, sempre que a quantidade exista. De modo similar, o momento absoluto de ordem k da variável aleatória X é definido por $E(|X|^k)$.*

Definição 1.8 (Espaço $L^p(D)$). *Seja Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p < \infty$, denomina-se por $L^p(D)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|f\|_p < \infty$ onde:*

$$\|f\|_p = \left[\int_D |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, \quad \text{se,} \quad 1 \leq p < \infty$$

Definição 1.9 (Espaço de Sobolev). *Um espaço de Sobolev de ordem m (m é um inteiro positivo), com $1 \leq p < \infty$ e indicado por $W^{m,p}(D)$, é o conjunto:*

$$W^{m,p}(D) = \{u \in L^p(D) | D^\alpha u \in L^p(D), \quad \forall \alpha \text{ com } |\alpha| \leq m\}$$

em que $D^\alpha u$ são derivadas generalizadas.

Definição 1.10 (Espaço de Hilbert). *Seja H um espaço vetorial munido de produto escalar (u, v) e completo para a norma $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$, sob estas condições, H é denominado de espaço de Hilbert.*

Exemplo 1.11. O espaço $L^2(D)$ munido do produto interno

$$(u, v) = \int_D u(x)v(x)dx$$

é denominado um espaço de Hilbert.

Definição 1.12. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e m um inteiro positivo, denota-se espaço de Hilbert de ordem m o conjunto $H^m(D) = W^{m,p}(D)$

Definição 1.13 (Aplicação bilinear). Seja E um espaço vetorial com a aplicação

$$f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $a = a(u, v)$, “ a ” é denominada uma aplicação bilinear se “ a ” for linear em “ u ” e em “ v ”, isto é:

(i) Se $u_1, u_2, v \in E$ tem-se $a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$

(ii) Se $u, v_1, v_2 \in E$ tem-se $a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Definição 1.14 (Aplicação contínua). Seja E um espaço vetorial com a aplicação

$$f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $f = f(u, v)$, f é denominada uma aplicação contínua se existir $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tal que:

$$|f(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in E.$$

Definição 1.15 (Aplicação coersiva). Seja E um espaço vetorial com a aplicação

$$a : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $a = a(u, v)$, “ a ” é denominada coersiva se existir $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que:

$$a(u, u) \geq \beta \|u\|^2, \quad \forall u \in E.$$

Teorema 1.16 (Lema de Lax-Milgram). Seja H um espaço de Hilbert e a aplicação

$$a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $a = a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coersiva. Então para toda aplicação $l : H \rightarrow \mathbb{R}$, linear e contínua, existe um único $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H.$$

Teorema 1.17 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja H um espaço vetorial munido de produto escalar (u, v) , então vale a desigualdade $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$, $\forall u, v \in H$, denominada de desigualdade de Cauchy-Schwarz*

Definição 1.18 (Transformação Linear). *Sejam E e F espaços vetoriais, $A : E \rightarrow F$ é uma transformação linear se A satisfizer as seguintes condições:*

(i) $A(u + v) = A(u) + A(v)$, $\forall u, v \in E$;

(ii) $A(\alpha u) = \alpha A(u)$, $\forall u \in E, \alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 1.19 (Operador Linear). *Seja E um espaço vetorial, se $A : E \rightarrow E$ satisfizer as condições de uma transformação linear, essa transformação é denominada de operador linear.*

Definição 1.20 (Norma). *Seja E um espaço vetorial, e $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $\|\cdot\|$ é denominada norma se ela satisfizer as três condições a seguir:*

(i) Se $u \in E$ com $u \neq 0$, então $\|u\| > 0$;

(ii) Se $u, v \in E$ então $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, (Desigualdade de Cauchy-Schwarz);

(iii) Se $u \in E$, então $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Na sequência elenca-se algumas normas de operadores lineares em dimensão finita, que foram usadas em aplicações apresentadas no transcórre desta tese.

Definição 1.21. *Seja $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ um operador linear:*

(i) [Norma da soma (norma 1)] $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$;

(ii) [Norma euclidiana (norma 2)] $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda}$, com $\lambda =$ maior valor próprio de $A^T A$;

(iii) [Norma infinito (norma 3)] $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$;

(iv) [Norma de Frobenius (norma 4)] $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$;

(v) [Norma 5] $\|A\|_5 = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$.

Teorema 1.22 (Equivalência de normas). *Duas normas $\|\cdot\|_i$ e $\|\cdot\|_j$ num espaço vetorial E são equivalentes se, e somente se, existirem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, tais que $\alpha \|u\|_i \leq \|u\|_j \leq \beta \|u\|_i$, $\forall u \in E$.*

Com base no teorema de “equivalência de normas” é possível demonstrar que as cinco normas anteriores, são todas equivalentes entre sí. Essa equivalência possibilita usar qualquer uma delas no desenvolvimento dos trabalhos.

Definição 1.23 (Função convexa). *Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, f é dita convexa se para todo $x_1, x_2 \in I$ e todo $\lambda \in [0, 1]$ vale a desigualdade:*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Teorema 1.24. *Sejam $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função afim da forma $h(x) = Ax + b$, onde A é uma matriz de ordem $m \times n$ e b é um vetor $m \times 1$. Então a função composta $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = g[h(x)]$ é uma função convexa.*

Capítulo 2

Metodologias para quantificação de incertezas

Este capítulo destina-se para a revisão de literatura e para a apresentação das duas metodologias desenvolvidas por *Ávila & Beck* em problemas de flexão de vigas.

Inicialmente apresenta-se o levantamento bibliográfico sobre alguns trabalhos desenvolvidos, na área de estruturas, usando a série de Neumann associada ao método de *Monte-Carlo*, dando-se uma ênfase maior aos trabalhos de *Ávila & Beck* (2014), (2015b) e (2015a) que usaram duas metodologias baseadas na série de Neumann em problemas de flexão de vigas. Essas metodologias serviram de inspiração para o desenvolvimento da presente tese.

Na sequência descreve-se, em detalhes, as duas metodologias para a quantificação de incerteza aplicadas em problemas de flexão transversal de vigas. Estas metodologias desenvolvidas por *Ávila & Beck* foram denominadas por: metodologia de *Monte Carlo - Neumann λ* e de *Monte Carlo - Neumann*.

2.1 Revisão de Literatura

A utilização da série de Neumann na resolução de problemas de engenharia teve no trabalho de *Yamazaki* (1989), uma de suas primeiras ocorrências. Neste trabalho ele propôs utilizar a série de Neumann para determinar uma aproximação da inversa da matriz de rigidez K associada a equação de equilíbrio, formulada pelo método dos elementos finitos de um problema estrutural estocástico bidimensional. O método usado consistiu, basicamente, em aproximar a inversa da matriz $(I - \mathcal{P})$, em que $K = K_0(I - \mathcal{P})$, pelos dois primeiros termos da série de Neumann da matriz \mathcal{P} . Isto é, ele aproximou a matriz $(I - \mathcal{P})^{-1}$, por $(I + \mathcal{P})$. Os resultados obtidos com essa técnica comparados aos resultados obtidos pelo método *Monte-Carlo*, definida uma dada precisão, apresentaram uma melhor eficiência computacional, desde que limitado aos casos em que as propriedades materiais do problema possuam coeficientes de variação não muito grandes.

A utilização da série de Neumann em problemas de engenharia teve uma de suas primeiras ocorrências no trabalho de *Yamazaki* (1989). Nesse trabalho *Yamazaki* utilizou a série de Neumann para determinar uma aproximação da inversa da matriz de rigidez K associada a resolução do sistema de equações algébricas $KU = F$, que representa a equação de equilíbrio formulada pelo método dos elementos finitos. Assim ele obteve as realizações do processo estocástico de deslocamento, para um problema de elasticidade bidimensional com incerteza no módulo de Young. Comparado ao método *Monte-Carlo*, o novo método se mostrou eficiente, quanto a convergência e tempo computacional, desde que limitado aos casos em que a variação das propriedades materiais da placa tenham coeficiente de variação relativamente pequenos. Nas simulações numéricas, *Yamazaki* usou apenas os dois primeiros termos da série de Neumann.

Araujo & Awruch (1994), usaram a série de Neumann para determinar uma aproximação da inversa da matriz de rigidez, compararam os resultados obtidos com os resultados via método de *Monte-Carlo*, tendo analisado sua eficiência quanto a precisão e ao tempo computacional. As análises de eficiência foram aplicadas a problemas estruturais dinâmicos e não lineares de vigas, considerando a variabilidade randômica nas propriedades mecânicas do material e considerando a carga de natureza determinística. Nos problemas aplicados, os autores concluíram que para pequenas variações materiais o método, usando série de Neumann, mostrou-se eficiente. Já para grandes variações das propriedades materiais o método de *Monte-Carlo* mostrou-se mais eficiente, pois, o método usando série de Neumann necessitou de um número elevado de termos da série para conseguir uma boa precisão, o que elevou o custo computacional.

Chakraborty & Dey (1995), usaram a série de Neumann num problema de flexão de viga com incerteza sobre o módulo de elasticidade do material e no carregamento. Neste trabalho os autores avaliaram o valor esperado e desvio padrão da flexão, tendo obtido resultados eficientes quanto a precisão e tempo computacional por meio do método usando Neumann, desde que consideradas pequenas variabilidades nas propriedades materiais.

Chakraborty & Dey (1996), obtiveram o valor esperado e o desvio padrão da variabilidade do processo estocástico de deslocamento aplicado a problemas de vigas e de placas considerando incertezas nas propriedades mecânicas das estruturas, nos parâmetros de rigidez da fundação e no processo de carregamento. Usaram a série de Neumann para resolver o sistema associado a cada realização. Os autores ressaltaram que o tempo computacional depende do número de termos da série de Neumann que foram tomados, do número de graus de liberdade no sistema, da variabilidade das entrada (do campo estocástico) e do nível de precisão exigido.

Chakraborty & Dey (1998), formularam o problema dinâmico de flexão de placas, considerando aleatoriedade no carregamento da placa e na base de apoio. A série de Neumann foi aplicada na resolução do sistema linear associada ao problema de deslocamento transversal, em cada realização. Foram usados dois exemplos numéricos para a verificação da eficiência do método usando série de Neumann. No primeiro consideraram uma placa simplesmente apoiada com carregamento harmônico aleatório transversal no centro e no segundo consideraram uma placa fixa sujeita a mo-

vimentação do solo, considerando-se incerteza na base de apoio. Segundo os autores, o método se mostrou eficiente para os dois exemplos numéricos, observaram que quanto maior for a variabilidade sobre os parâmetros, mais termos da série de Neumann precisam ser utilizados, para manter a precisão.

Lei & Qiu (2000), aplicaram a série de Neumann para a análise dinâmica de estruturas com propagação aleatória quanto a vibração, utilizando as equações de movimento. Os resultados obtidos nos exemplos numéricos, mostraram que o método é eficiente, quando comparado com outras metodologias, com relação a convergência e eficiência computacional.

Chakrabort & Sarkar (2000), estimaram os momentos estatísticos do processo estocástico de deslocamento transversal de uma viga curva, apoiada em fundação de base elástica de Winkler, com incerteza na fundação. No exemplo de simulação numérica, segundo os autores, ficou evidenciado que o modelo usando série de Neumann é vantajoso computacionalmente, desde que os parâmetros de entrada aleatórios sejam pequenos.

Chakraborty & Bhattacharyya (2002), determinaram a variabilidade de resposta para problemas tridimensionais estáticos sujeitos a incertezas espaciais das propriedades materiais, as propriedades elásticas foram representadas por processos estocásticos gaussianos. Segundo os autores, o uso da série de Neumann além de trazer economia computacional, permitiu que vários campos estocásticos fossem abordados simultaneamente. A eficiência da metodologia foi verificada por meio de exemplos numéricos.

Li et al. (2006), apresentaram uma metodologia para obter soluções de um sistema linear estocástico de equações algébricas, proveniente da discretização de um problema estocástico. Os autores usaram a série de Neumann para auxiliar na decomposição da matriz de rigidez como uma combinação linear de matrizes determinísticas simétricas, cujos coeficientes eram variáveis aleatórias. Para resolução do sistema os autores trabalham com um processo de diagonalização conjunta da combinação linear das matrizes, processo este que mostrou-se eficiente na resolução do problema proposto.

Wang et al. (2013), descreveram uma metodologia denominada expansão de Neumann generalizada para resolver um sistema linear estocástico. Na metodologia a matriz de rigidez foi escrita como uma combinação linear de matrizes determinísticas simétricas, cujos coeficientes eram variáveis aleatórias. No problema associado ao sistema linear estocástico considerou-se aleatoriedade no módulo de Young. No trabalho, os autores tiveram a preocupação de mostrar analiticamente a convergência do método.

Schevenels et al. (2007), usaram uma metodologia baseada em funções de Green, e a compararam com a série de Neumann para o caso contínuo, em um problema de propagação de ondas numa viga infinita apoiada em uma fundação elástica de Winkler, com incerteza sobre o coeficiente de rigidez da fundação.

Ávila & Beck (2014), propuseram o estabelecimento de cotas inferiores e superiores para o processo estocástico de resposta do problema de deslocamento transversal de vigas e placas (sujeitas

a condições de contorno), usando a série de Neumann de baixa ordem, isto é, usando apenas os primeiros termos da série. Para comprovar a eficiência do método, os autores aplicaram a metodologia ao problema de flexão transversal da viga de Euler-Bernoulli em uma fundação de Winkler, considerando-se incerteza sobre a rigidez da viga e da fundação. As incertezas foram analisados separadamente.

Ávila & Beck (2015b), estabeleceram cotas superiores e inferiores para o problema linear estocástico termo-elástico de deslocamento e de temperatura em uma viga, baseadas na série de Neumann. O estabelecimento de cotas foi feito tanto para o problema de deslocamento quanto para o campo de temperatura. A eficiência do método, quanto a convergência e tempo computacional, foi comprovada pelos autores num problema de viga finita sujeita a um carregamento determinístico termo-mecânico, com incerteza sobre a rigidez do material e sobre condutividade térmica. As incertezas foram analisadas separadamente. Também foram obtidos os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem das cotas.

Ávila & Beck (2015a), utilizaram a série de Neumann com “ $n = 1$ ” para formular um problema de otimização matemática da classe de “distância mínima” entre vetores. A resolução deste problema, permitiu uma modificação da aproximação numérica via série de Neumann, resultando em melhores aproximações numéricas, para as estimativas de valor esperado e variância do processo estocástico de resposta. Para avaliar a eficiência desta metodologia, os autores apresentaram resultados numéricos e tempos de computação de aplicações a dois problemas estocásticos de deslocamento transversal da viga de Euler-Bernoulli. No primeiro problema consideraram a incerteza sobre as propriedades materiais da viga e no segundo problema considerou-se a incerteza no coeficiente de fundação. Foram comparados os desvios relativos, entre as estimativas para valor esperado e variância do processo estocástico de resposta. Tendo sido verificado a eficiência da metodologia quanto a convergência e tempo computacional, comparado ao método *Monte-Carlo*.

Nos trabalhos citados, a série de Neumann geralmente foi utilizada associada ao método de *Monte-Carlo*, objetivando a determinação de alternativas mais eficientes para a resolução de sistemas lineares estocásticos oriundos de problemas de estruturas.

Na sequência apresentam-se com detalhes cada uma dessas duas novas metodologias desenvolvidas por Ávila & Beck. Para tanto, inicialmente serão apresentados alguns elementos/conceitos úteis, que envolvem a série de Neumann, para a abordagem das duas metodologias.

2.2 Série de Neumann

A série de Neumann, na teoria de operadores, consiste em determinar a inversa de um operador por meio de uma série convergente centrada no núcleo do operador. Nos casos de convergência da série, o truncamento da mesma permite obter-se uma boa aproximação da inversa do operador. A série de Neumann truncada vem sendo aplicada em problemas de engenharia, conforme foi descrito na introdução e no capítulo 1, deste trabalho.

No presente trabalho de tese, a série de Neumann foi empregada num operador linear, definido em um espaço de dimensão finita. O objeto matemático foi uma matriz de rigidez, $K \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$. Esta matriz de rigidez, que resulta da k -ésima amostra dos parâmetros que definem o sistema, admite a seguinte decomposição:

$$K(\omega_k) = K_0 - \Delta K(\omega_k), \quad (2.1)$$

com,

$$\begin{cases} K(\omega_k) = K_0(I - \mathcal{P}(\omega_k)); \\ \mathcal{P}(\omega_k) = (K_0)^{-1}\Delta K(\omega_k). \end{cases} \quad (2.2)$$

Definição 2.1 (Série de Neumann). *Sejam, X um espaço normado e $\mathcal{P} : X \rightarrow X$ um operador linear contínuo com $\mathcal{P}^0 = I$ o operador identidade e $\mathcal{P}^{n+1} = \mathcal{P}^n\mathcal{P}$. Denomina-se de série de Neumann do operador \mathcal{P} a série S , descrita por:*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}^n$$

Como, neste trabalho, têm-se como objetivo aproximar de forma eficiente, a inversa do operador $(I - \mathcal{P})$, segue um resultado que garante a existência da inversa e determina a mesma por meio da série de Neumann de um operador linear.

Teorema 2.2. *Seja \mathcal{P} um operador limitado definido num espaço normado X , com $\|\mathcal{P}\| < 1$, nestas condições $(I - \mathcal{P})$ é não singular, e sua inversa é dada por:*

$$(I - \mathcal{P})^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}^n$$

Considerando-se $0 < \|\mathcal{P}\| < 1$, a série $\sum_{q=0}^{+\infty} \|\mathcal{P}\|^q$ se reduz a uma série geométrica convergente cuja soma é dada por:

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \|\mathcal{P}\|^q = \frac{1}{1 - \|\mathcal{P}\|}. \quad (2.3)$$

Além disso,

$$\|(I - \mathcal{P})^{-1}\| = \left\| \sum_{q=0}^{+\infty} \mathcal{P}^q \right\| \leq \sum_{q=0}^{+\infty} \|\mathcal{P}\|^q,$$

isto é, $\|(I - \mathcal{P})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathcal{P}\|}$.

Por (2.3), a série $\sum_{q=0}^{+\infty} \mathcal{P}^q$ converge absolutamente, por consequência a série $\sum_{q=0}^{+\infty} \mathcal{P}^q$ também

converge, com isso tomando-se um número finito de termos da série $\sum_{q=0}^{+\infty} \mathcal{P}^q$, isto é, truncando a série, pode-se obter uma aproximação de $(I - \mathcal{P})^{-1}$. Essa aproximação, para a k -ésima realização, considerando-se o truncamento da série em $q = n$, é definida por:

$$\sum_{q=0}^n \mathcal{P}(\omega_k)^q = (I - \mathcal{P}(\omega_k))_{(n)}^{-1}. \quad (2.4)$$

Como $(K(\omega_k))^{-1} = (K_0(I - \mathcal{P}(\omega_k)))^{-1} = (I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}K_0^{-1}$, segue que,

$$(K(\omega_k))_{(n)}^{-1} = (K_0(I - \mathcal{P}(\omega_k))_{(n)})^{-1} = (I - \mathcal{P}(\omega_k))_{(n)}^{-1}K_0^{-1} = \sum_{q=0}^n \mathcal{P}(\omega_k)^q K_0^{-1}. \quad (2.5)$$

Feita essa breve apresentação sobre a série de Neumann aplicada a operadores, apresentam-se, na sequência, as duas metodologias citadas anteriormente e propostas por *Ávila & Beck* (2014), (2015a) e (2015b). Para a apresentação das duas metodologias parte-se do seguinte problema: para a k -ésima amostra estrutural dos coeficientes de rigidez da viga $\{EI(x, \omega_k)\}$ e da fundação $\{\kappa_\omega(x, \omega_k)\}$, obtêm-se, via método de Galerkin, uma aproximação numérica da solução do seguinte sistema linear,

$$\begin{cases} \text{Para } U_0 \in \mathbb{R}^m, \text{ fixado, determinar } U(\omega_k) \in \mathbb{R}^m \text{ tal que,} \\ U(\omega_k) = (I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}U_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

sendo $U_0 = (K_0)^{-1}F$, $F = (f_1, \dots, f_m)$ (vetor de carregamento), $U_0 = [u_1^0, \dots, u_m^0]^T$ e $P(\omega_k) = (K_0)^{-1}\Delta K(\omega_k)$. As entradas da matriz de rigidez K_0 são avaliadas nos valores esperados dos coeficientes de rigidez (EI , κ_ω); já as entradas da matriz $\Delta K(\omega_k)$ são calculadas a partir da variabilidade aleatória, em torno dos valores esperados dos coeficientes.

2.3 Metodologia de simulação de *Monte Carlo* - *Neumann* λ

Nesta seção apresenta-se a metodologia proposta por *Ávila & Beck* (2015a), que consiste num aprimoramento das aproximações de baixa ordem, da inversa da matriz de rigidez, por meio de um problema de otimização matemática do tipo “distância mínima” entre vetores do \mathbb{R}^m , usando para isso a série de Neumann para operadores.

A metodologia foi aplicada a um problema específico, de resolução do sistema linear estocástico

$$(KU)(\omega_k) = F \Rightarrow U(\omega_k) = H(\omega_k)F, \quad (2.7)$$

com $K(\omega_k) \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ a matriz de rigidez, $[h_{ij}(\omega_k)]_{m \times m} = H(\omega_k) = (\mathcal{K}(\omega_k))^{-1}$, e $U(\omega_k) = [u_1(\omega_k), \dots, u_m(\omega_k)]^T$. Sendo $u_i(\omega_k) = \sum_{j=0}^m h_{ij}(\omega_k)f_j$ a i -ésima entrada do vetor $U(\omega_k)$. Inicial-

mente apresenta-se a formulação matemática do problema abordado por *Ávila & Beck* (2015a) que resulta no sistema linear (2.7).

Considere o problema elíptico, cujos coeficientes são dados por meio de processos estocásticos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; (H^{2m}(D) \cap H_0^m(D))), \text{ tal que,} \\ \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \partial_\alpha (\kappa_{\alpha\beta} \partial_\beta u)(x, \omega) = f(x), \quad \forall (x, \omega) \in D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \\ \text{sujeita às condições de contorno,} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

em que $f(\cdot)$ é um termo de fonte/carregamento e (Ω, \mathcal{F}, P) é um espaço de probabilidade. Já o caráter aleatório é dado pelo conjunto de coeficientes $\{\kappa_{\alpha\beta}\}_{|\alpha|, |\beta| \leq m}$, sem perda de generalidade considera-se $f(\cdot)$ determinística. Em mecânica dos sólidos, estes coeficientes podem estar associados a rigidez ou a condutividade térmica. Usando-se o lema de Lax-Milgram é possível mostrar que o problema (2.8) tem solução única $u(\cdot, \cdot)$.

A metodologia a ser apresentada pertence a classe dos métodos baseados em simulação de *Monte-Carlo*, ou seja, geração/realização de amostras. Desta forma, as propriedades estatísticas da solução do problema, definidas na equação (2.8), são representadas a partir das estimativas dos momentos estatísticos obtidos do conjunto de realizações deste problema. Para tanto, considera-se o conjunto de amostras dos coeficientes da equação diferencial, dados por $\{\kappa_{\alpha\beta}(\omega_i)\}_{i=1}^N$, em que “ N ” é o número de amostras.

Para a k -ésima amostra dos coeficientes e $\omega_k \mapsto \{\kappa_{\alpha\beta}(\omega_k)\}_{\alpha\beta}$, têm-se associado, a k -ésima realização do problema variacional abstrato, que provém do problema estocástico (2.8), dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u \in V, \text{ com } \omega_k \text{ fixo, tal que,} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

sendo $V = H_0^m(D)$, $a = a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear e $l = l(\cdot)$ funcional linear, definidos por:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\omega_k}(u, v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_D \kappa_{\alpha\beta}(x, \omega_k) \cdot \partial_\alpha u(x, \omega_k) \partial_\beta v(x) dx \\ l(v) = \int_D (f \cdot v)(x) dx + \text{as integrais de contorno.} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Assim, para uma amostra fixa de coeficientes $\{\kappa_{\alpha\beta}(x, \omega_k)\}$ a solução do problema variacional abstrato (2.9), corresponde a uma realização do operador definido no problema (2.8).

Para a realização da k -ésima amostra de coeficientes $\{\kappa_{\alpha\beta}(x, \omega_k)\}$, obtém-se, via método de Galerkin, uma solução numérica aproximada (u_m) para o problema (2.9), dada por:

$$u_m(x, \omega_k) = \sum_{i=1}^m u_i(\omega_k) \varphi_i(x) \quad (2.11)$$

onde $\{u_i(\omega_k)\}_{i=1}^m$ são coeficientes a serem determinados.

Para a k -ésima amostra, o problema variacional aproximado, via método de Galerkin, é dado por:

$$\begin{cases} \text{Determinar } u_m \in V_m, \text{ para } (\omega_k) \text{ fixada, tal que,} \\ a(u_m, v) = l(v), \forall v \in V_m. \end{cases} \quad (2.12)$$

sendo $V_m = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ um espaço de aproximação de V ($V_m \subset V$), onde $V = \overline{\text{span}\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}}$. Substituindo-se a equação de (2.12) na equação em (2.9), obtém-se o problema que contém o sistema de equações algébricas,

$$\begin{cases} \text{Determinar } U(\omega_k) \in \mathbb{R}^m \text{ para } (\omega_k) \text{ fixada, tal que,} \\ K(\omega_k)U(\omega_k) = F, \end{cases} \quad (2.13)$$

onde $K(\omega_k) \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ é a matriz de rigidez, $F \in \mathbb{R}^m$ é o termo de fonte ou o vetor de carregamento, e $U(\omega_k)$ é um vetor cujas entradas são coeficientes (u_i) da combinação linear expressa em (2.11). Para a k -ésima realização do problema definido em (2.13), a matriz de rigidez e o termo de fonte ou vetor de carga são dados por

$$\begin{cases} K(\omega_k) = [k_{ij}(\omega_k)]_{m \times m}, \quad k_{ij}(\omega_k) = a(\varphi_i, \varphi_j); \\ F = [f_i]_{m \times 1}, \quad f_i = l(\varphi_i). \end{cases} \quad (2.14)$$

Formalmente, a solução do sistema de equações lineares do problema (2.13) é dado por:

$$U(\omega_k) = (K(\omega_k))^{-1}F = H(\omega_k)F \quad (2.15)$$

Na equação (2.15) a matriz $H(\omega_k) = [h_{ij}(\omega_k)]_{m \times m}$ é a inversa da matriz de rigidez $K(\omega_k)$, e as entradas do vetor $U(\omega_k) = [u_1(\omega_k), \dots, u_m(\omega_k)]^T$ são obtidas por

$$u_i(\omega_k) = \sum_{j=1}^m h_{ij}(\omega_k) f_j \quad (2.16)$$

Das equações (2.13) e (2.16), a solução aproximada de Galerkin, para a k -ésima realização do processo de resposta do sistema, $u_m = u_m(x, \omega_k)$, é dada por:

$$u_m(x, \omega_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (h_{ij}(\omega_k) f_j) \varphi_i(x) = (F^T H^T)(\omega_k) \Phi(x) \quad (2.17)$$

onde $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um vetor cujas entradas são funções de interpolação.

Para cada amostra k , é necessário determinar a inversa da matriz de rigidez $K(\omega_k)$, e este fato gera um custo computacional muito alto. Na tentativa de contornar este problema, uma forma para determinar a aproximação de $(K(\omega_k))^{-1}$ com baixo custo computacional e sem comprometer

a precisão da solução, é por meio da série Neumann de baixa ordem, tomando-se para tanto,

$$U(\omega_k) = (K(\omega_k))^{-1}F = (I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}U_0 \quad (2.18)$$

com $U_0 = K_0^{-1}F$ e $U_0 = [u_1^0, \dots, u_m^0]^T$.

Considerando-se $0 < \|\mathcal{P}(\omega_k)\| < 1$, têm-se via série de Neumann a existência da matriz inversa $(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ que é dada pela série $(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} = \sum_{q=0}^{\infty} (\mathcal{P}(\omega_k))^q$, com isso a equação (2.18) pode ser reescrita como:

$$U(\omega_k) = \sum_{q=0}^{\infty} (\mathcal{P}(\omega_k))^q U_0 \quad (2.19)$$

Substituindo-se a equação (2.19) na equação (2.17), obtém-se:

$$u_m(x, \omega_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{q=0}^{\infty} (p_{ij}^q(\omega_k) u_j^0) \varphi_i(x) = (U_0)^T \sum_{q=0}^{\infty} [(P(\omega_k))^q]^T \Phi(x) \quad (2.20)$$

sendo $(P(\omega_k))^q = [p_{ij}^q(\omega_k)]_{m \times m}$.

Como o objetivo é usar a série de Neumann de baixa ordem, é necessário o truncamento da série. Considerando-se esse truncamento na ordem n , pode-se reescrever a equação (2.20) como

$$u_{mn}(x, \omega_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{q=0}^n (p_{ij}^q(\omega_k) u_j^0) \varphi_i(x) = (U_0)^T \sum_{q=0}^n [(P(\omega_k))^q]^T \Phi(x) \quad (2.21)$$

Ávila & Beck (2015a) usaram o truncamento da série de Neumann, apresentada em (2.5), tomando “ $n = 1$ ”, para aproximar a inversa da matriz $(I - \mathcal{P}(\omega_k))$, proveniente da matriz de rigidez do sistema para a k -ésima amostra, $K(\omega_k) = K_0(I - \mathcal{P}(\omega_k))$. A partir desta, define-se um problema de minimização. Este problema visa minimizar a distância entre a aproximação da matriz inversa via série de Neumann, fixando “ $n = 1$ ”, e o valor exato da matriz inversa, na direção do vetor U_0 .

Segue, da igualdade (2.5), via série de Neumann, que $(K(\omega_k))_{(n)}^{-1} = \sum_{q=0}^n \mathcal{P}(\omega_k)^q K_0^{-1}$, por outro lado, têm-se $(K(\omega_k))^{-1}K(\omega_k) = I$. Tomando-se a aproximação, de ordem n , para $(K(\omega_k))^{-1}$, apresentada em (2.5), e multiplicando-se por $K(\omega_k)$ resulta em:

$$\begin{aligned} \left[(K(\omega_k))_{(n)}^{-1} \right] [K(\omega_k)] &= \left[(I - \mathcal{P}(\omega_k))_{(n)}^{-1} K_0^{-1} \right] [K_0(I - \mathcal{P})] \\ &= \left[(I - \mathcal{P}(\omega_k))_{(n)}^{-1} \right] [(I - \mathcal{P})] = I - E_{(n)}(\omega_k), \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $E_{(n)}(\omega_k)$ representa o erro de aproximação da matriz identidade por meio do produto de $K(\omega_k)$ com a aproximação de sua inversa, $(K(\omega_k))_{(n)}^{-1}$. Esse erro evidencia o quanto $(K(\omega_k))_{(n)}^{-1}$ afasta-se

da matriz $(K(\omega_k))^{-1}$ e por consequência remete a um objetivo de querer minimizá-lo, para tanto *Ávila & Beck* (2015a) propõe o seguinte problema de otimização:

$$\begin{cases} \text{Determinar } \lambda^* \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que,} \\ \lambda^* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^2} \{f(\lambda)\}, \end{cases} \quad (2.23)$$

sendo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} \|(I - E_{(n)}(\omega_k, \lambda))U_0 - U_0\|^2, \quad (2.24)$$

considerando-se $\|\cdot\|$ a norma euclidiana em \mathbb{R}^m e $\omega_k \in (\Omega, F, P)$, referente a k -ésima amostra estrutural. Foi proposto pelos autores tomar-se o problema definido em (2.23), fixando-se “ $n = 1$ ”: desta forma a matriz $(I - E_{(1)}(\omega_k, \lambda))$, com $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ é definida por:

$$\begin{aligned} (I - E_{(1)}(\omega_k, \lambda_1, \lambda_2)) &= (\lambda_1 I + \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k))(I - \mathcal{P}(\omega_k)) \\ &= \lambda_1 (I - \mathcal{P}(\omega_k)) + \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k) (I - \mathcal{P}(\omega_k)). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Substituindo-se (2.25) em (2.24), chega-se a seguinte formulação da função f nas variáveis λ_1 e λ_2 ,

$$\begin{aligned} f(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2} \|\lambda_1 (I - \mathcal{P}(\omega_k)) + \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k) (I - \mathcal{P}(\omega_k))\| U_0 - U_0 \|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|[I - \lambda_1 (I - \mathcal{P}(\omega_k))] U_0 - \lambda_2 [\mathcal{P}(\omega_k) (I - \mathcal{P}(\omega_k))] U_0\|^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

O problema (2.23) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \text{Determinar } (\lambda_1^*, \lambda_2^*) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que,} \\ (\lambda_1^*, \lambda_2^*) = \min_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2} \left\{ \frac{1}{2} \|[I - \lambda_1 (I - \mathcal{P}(\omega_k)) - \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k) (I - \mathcal{P}(\omega_k))] U_0\|^2 \right\}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Esta equação define um problema de otimização que visa determinar a distância mínima entre os vetores $(I - E_{(1)}(\omega_k, \lambda_1, \lambda_2))U_0$ e U_0 .

Proposição 2.3. *A função de minimização $f = f(\lambda_1, \lambda_2)$ do problema (2.27) é não negativa e além disso convexa.*

Demonstração. A função f é não negativa, pois trata-se de uma função norma.

Para mostrar que f é convexa, basta observar-se que, tomando $f(\lambda) = h(g(\lambda))$, onde $h(\lambda) = \frac{1}{2}\|\lambda\|^2$,

com $g = g(\lambda)$ dada por:

$$\begin{aligned}
g(\lambda) &= [I - \lambda_1(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0 - \lambda_2[\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0 \\
&= [IU_0 - \lambda_1(I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0 - \lambda_2\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0] \\
&= [-(I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0 - \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0](\lambda_1 \ \lambda_2)^T + IU_0 \\
&= A\lambda + b
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Assim h é convexa e g é linear, e por consequência pelo teorema (1.26), $f(\lambda) = h(g(\lambda))$ é uma função convexa. \square

Pelo fato de f ser não negativa e convexa, a teoria clássica de otimização convexa garante que o minimizador global é obtido pela imposição da estacionariedade, *Nocedal & Wright* (2006). Assim, para determinar-se a resolução do problema (2.27) faz-se necessário resolver a seguinte equação,

$$\nabla_{\lambda}f(\lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0, \tag{2.29}$$

sendo $\nabla_{\lambda}f(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}(\lambda_1, \lambda_2), \frac{\partial f}{\partial \lambda_2}(\lambda_1, \lambda_2) \right)$.

Tomando-se a norma usada em (2.27) como a norma euclidiana tem-se,

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2} ([I - \lambda_1(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0 - \lambda_2[\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0)^T \\
&\quad \cdot ([I - \lambda_1(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0 - \lambda_2[\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0),
\end{aligned} \tag{2.30}$$

para determinar-se os valores de $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ que satisfazem a equação (2.29), necessita-se determinar inicialmente $\nabla_{\lambda}f(\lambda_1, \lambda_2)$, dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} &= \frac{1}{2} [-((I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0)^T([I - \lambda_1(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0 - \lambda_2[\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0) \\
&\quad - ([I - \lambda_1(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0 - \lambda_2[\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0)^T((I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \lambda_2} &= \frac{1}{2} [(\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0)^T([I - \lambda_1(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0 - \lambda_2[\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0) \\
&\quad - ([I - \lambda_1(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0 - \lambda_2[\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0)^T(\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0)]
\end{aligned}$$

Tomando-se as igualdades abaixo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\omega_k) = ((I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0)^T \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0; \\ \phi(\omega_k) = U_0^T \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0; \\ \alpha(\omega_k) = ((I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0)^T (I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0; \\ \gamma(\omega_k) = ((I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0)^T U_0; \\ \theta(\omega_k) = (\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0)^T \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0 \end{array} \right. \quad (2.31)$$

obtêm-se,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{2} (-\gamma + \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \varphi - \gamma^T + \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \varphi^T); \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{2} (-\phi^T + \lambda_1 \varphi^T + \lambda_2 \theta - \phi + \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \theta). \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Impondo-se a igualdade (2.29) em (2.32) chega-se ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\gamma + \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \varphi - \gamma^T + \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \varphi^T = 0 \\ -\phi^T + \lambda_1 \varphi^T + \lambda_2 \theta - \phi + \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \theta = 0. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Pode-se observar de (2.31) que os termos φ , ϕ e γ são escalares, com isso decorrem as igualdades $\varphi^T = \varphi$, $\phi^T = \phi$ e $\gamma^T = \gamma$. Assim o sistema (2.33) pode ser rescrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\gamma + \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \varphi = 0 \\ -\phi + \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \theta = 0. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Resolvendo-se o sistema (2.34) nos parâmetros (λ_1, λ_2) têm-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{\gamma - \varphi \lambda_2}{\alpha} \\ \lambda_2 = \frac{\alpha \phi - \varphi \gamma}{\alpha \theta - \varphi^2} \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Tomando-se $(\lambda_1^*, \lambda_2^*) = (\lambda_1, \lambda_2)$, o sistema (2.35) é a solução do problema (2.27).

Desta forma, a k -ésima realização do sistema linear (2.1), via série de Neumann com “ $n = 1$ ” é dada por:

$$U_{(1)}(\lambda^*, \omega_k) = (I + \mathcal{P}(\omega_k))_{(1)}^{-1} U_0 = (\lambda_1^* I - \lambda_2^* \mathcal{P}(\omega_k)) U_0. \quad (2.36)$$

Substituindo (2.36) em (2.21) obtém-se:

$$\begin{aligned} u_{m1}(x, \lambda^*, \omega_k) &= \lambda_1^* \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m u_j^0 \varphi_i(x) + \lambda_2^* \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_{ij}(\omega_k) u_j^0 \varphi_i(x) \\ &= (\Phi(x))^T U_{(1)}(\lambda^*, \omega_k) = (\Phi(x))^T (\lambda_1^* I + \lambda_2^* \mathcal{P}(\omega_k)) U_0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

sendo $u_{m1}(\cdot, \lambda^*, \cdot)$ a aproximação numérica, para a k -ésima realização, baseada no parâmetro de convergência $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, definidos em (2.35).

Objetivando analisar-se a eficiência da metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ em comparação ao método *Monte-Carlo*, *Ávila & Beck* (2015a), em seus trabalhos fizeram uma aplicação numérica no problema de flexão da viga Euler-Bernoulli estocástico, o qual pode ser definido por:

$$\begin{cases} \text{Determinar } u \in L^2((\Omega, F, P); H^4(0, l)) \text{ tal que,} \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \kappa u = q, \quad \forall (x, \omega) \in (0, l) \times (\Omega, F, P); \\ u(0, \omega) = u(l, \omega) = 0, \quad \frac{d^2 u}{dx^2}(0, \omega) = \frac{d^2 u}{dx^2}(l, \omega) = 0, \quad \forall \omega \in (\Omega, F, P), \end{cases} \quad (2.38)$$

em que (EI) representa a rigidez da viga, (κ) representa o coeficiente de rigidez da fundação, (u) representa o deslocamento transversal da viga e $q = q(x)$ é o termo de carga determinístico. Os coeficientes EI e κ foram considerados estocásticos.

Na comparação feita por *Ávila & Beck* (2015a), do método de *Monte Carlo - Neumann* λ com o método de *Monte-Carlo*, as estimativas dos momentos estatísticos das realizações mostraram bons resultados, nos quesitos tempo computacional e convergência.

Na sequência apresenta-se a segunda metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, que também está baseada na série de Neumann. Nessa metodologia trabalha-se com o estabelecimento de cotas superiores e inferiores para as realizações da aproximação numérica do processo estocástico de deslocamento transversal.

2.4 Metodologia de simulação de *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas

Nesta seção apresenta-se a metodologia proposta nos trabalhos *Ávila & Beck* (2014) e *Ávila & Beck* (2015b). A proposta desta metodologia é o estabelecimento de cotas inferiores e superiores para as realizações da aproximação numérica, via método de Galerkin, para o processo estocástico de deslocamento transversal da viga. A partir do conjunto de realizações dessas cotas, são obtidas as cotas para as estimativas dos momentos estatísticos do processo estocástico de resposta.

A metodologia será abordada com base no trabalho de *Ávila & Beck* (2014). Para tanto, considera-se o problema elíptico (2.8), apresentado na metodologia anterior, cujos coeficientes são dados por meio de processos estocásticos parametrizados.

Utilizando-se um precedente similar ao da metodologia anterior, determina-se o problema variacional abstrato (PVA) associado ao problema (2.8) e aplicando-se o método de Galerkin para determinação da solução numérica do PVA, chega-se à equação (2.17). Usando-se a série Neumann para determinar a inversa da matriz $K(\omega_k) = K_0(I - \mathcal{P}(\omega_k))$, chega-se à equação (2.20). A equação (2.17) vem a ser a solução numérica aproximada para a função amostral do processo estocástico dos campos de deslocamento e de temperatura, dado por $u_m = u_m(x, \omega_k)$, obtida via simulação de

Monte-Carlo. A equação (2.20), pelo fato de envolver uma série, sofre um truncamento, chegando-se assim a equação (2.21), que vem a ser a solução numérica aproximada para a função amostral do processo estocástico dos campos de deslocamento e de temperatura, dado por $u_{mn} = u_{mn}(x, \omega_k)$, obtida via série de Neumann.

Para a k -ésima realização do processo estocástico do campo de deslocamento e de temperatura, a distância entre as realizações do processo de resposta obtidas por simulação de *Monte-Carlo*, equação (2.17), e via série de Neumann, equação (2.21), pode ser estimada por:

$$\begin{aligned}
|(u_m - u_{mn})(x, \omega_k)| &= \left\| \left[\sum_{q=0}^{\infty} (\mathcal{P}(\omega_k))^q(U_0) \right]^T \Phi(x) - \left[\sum_{q=0}^n (\mathcal{P}(\omega_k))^q(U_0) \right]^T \Phi(x) \right\| \\
&= \left\| \left[\sum_{q=n+1}^{\infty} (\mathcal{P}(\omega_k))^q(U_0) \right]^T \Phi(x) \right\| \\
&\leq \sum_{q=n+1}^{\infty} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|^q \|U_0\| \|\Phi(x)\|
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Como têm-se $0 < \|\mathcal{P}(\omega_k)\| < 1$, a série geométrica $\sum_{q=0}^{\infty} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|^q$ converge e por consequência o termo $\sum_{q=n+1}^{\infty} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|^q$ também converge, e sua soma é dada por:

$$\sum_{q=n+1}^{\infty} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|^q = \sum_{q=0}^{\infty} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|^q - \sum_{q=0}^n \|\mathcal{P}(\omega_k)\|^q = \frac{\|\mathcal{P}(\omega_k)\|^{n+1}}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \tag{2.40}$$

Substituindo-se a equação (2.40) na inequação (2.39), chega-se a seguinte desigualdade:

$$|(u_m - u_{mn})(x, \omega_k)| \leq \rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x)\|, \quad \forall (x, \omega_k) \in \bar{D} \times (\Omega, F, P), \tag{2.41}$$

em que, $\rho(n, \omega_k) = \frac{\|\mathcal{P}(\omega_k)\|^{n+1}}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|}$.

Os coeficientes $\rho(\cdot, \cdot)$, dependem do truncamento da série de Neumann usada para determinar a aproximação da inversa da matriz $(I - \mathcal{P}(\omega_k))$, e dos valores numéricos de $\|\mathcal{P}(\omega_k)\|$.

Trabalhando-se com a inequação módulo de (2.41), na solução u_m , chega-se a inequação simultânea:

$$-\rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x)\| \leq (u_m - u_{mn})(x, \omega_k) \leq \rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x)\|$$

assim,

$$u_{mn}(x, \omega_k) - \rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x)\| \leq u_m(x, \omega_k) \leq u_{mn}(x, \omega_k) + \rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x)\|$$

Tomando-se, $\delta_1(\cdot, \cdot)$ e $\delta_2(\cdot, \cdot)$ como sendo, respectivamente, as cotas inferior e superior de $u_m(\cdot, \cdot)$

definidas por:

$$\begin{cases} \delta_1(x, \omega_k) = u_{mn}(x, \omega_k) - \rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x)\| \\ \delta_2(x, \omega_k) = u_{mn}(x, \omega_k) + \rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x)\|, \end{cases} \quad (2.42)$$

segue da inequação (2.41), para a k -ésima realização do processo de resposta do problema estocástico, que

$$\delta_1(x, \omega_k) \leq u_m(x, \omega_k) \leq \delta_2(x, \omega_k), \quad \forall (x, \omega_k) \in \bar{D} \times (\Omega, F, P). \quad (2.43)$$

A partir das funções $\delta_1(\cdot, \cdot)$ e $\delta_2(\cdot, \cdot)$ de (2.42), é possível obter limites inferiores e superiores para o valor esperado, a autocorrelação e variância do processo de resposta, a partir do conjunto de realizações dos limites inferiores e superiores do sistema, $\{\delta_1(x, \omega_k), \delta_2(x, \omega_k)\}_{k=1}^N$, onde N representa o número de realizações.

Para cada realização k , com $k = 1, \dots, N$ é preciso calcular a norma de $\mathcal{P}(\omega_k)$, fato esse que poderia inviabilizar a metodologia das cotas, devido ao alto custo computacional. Têm-se como alternativa para contornar este problema, recorrer-se a equivalência entre normas de matrizes, apresentada no *capítulo 1* do presente trabalho.

Com base na equivalência entre normas, foram propostas por *Ávila & Beck (2014)*, cinco alternativas para avaliar a norma de $\mathcal{P}(\omega_k)$ e os coeficiente $\rho(n, \omega_k)$:

$$\begin{cases} \varrho_1(n, \omega_k) = \frac{(\sqrt{m} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|_1)^{n+1}}{1 - \sqrt{m} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|_1}; \\ \varrho_2(n, \omega_k) = \frac{\|\mathcal{P}(\omega_k)\|_2^{n+1}}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|_2}; \\ \varrho_3(n, \omega_k) = \frac{(\sqrt{m} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|_\infty)^{n+1}}{1 - \sqrt{m} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|_\infty}; \\ \varrho_4(n, \omega_k) = \frac{\|\mathcal{P}(\omega_k)\|_F^{n+1}}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|_F}; \\ \varrho_5(n, \omega_k) = \frac{(m \max_{i,j} \{ |p_{i,j}(\omega_k)| \})^{n+1}}{1 - m(\max_{i,j} \{ |p_{i,j}(\omega_k)| \})}. \end{cases} \quad (2.44)$$

com as normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_F$ e $\|\cdot\|_5$, denominadas, respectivamente, norma 1, norma 2 ou norma euclidiana, norma infinito, norma de Frobenius e norma 5, definidas no *capítulo 1*.

Utilizando-se a teoria de operadores definidos em espaços de dimensão finita, têm-se que diferentes normas, como no caso acima, resultam em diferentes desvios com relação à norma euclidiana. Nos exemplos numéricos, além disso, o custo computacional para avaliar estas normas pode ter relação direta com a norma avaliada. No entanto, o desvio dessas normas no que diz respeito à norma euclidiana depende do problema em questão. Como não é possível, de antemão, prever-se qual será a norma adequada em termos de precisão e de custo computacional, *Ávila & Beck (2014)* recomendam, em cada problema avaliar o desempenho em mais de uma norma.

A partir do conjunto N de realizações, determinados os limites inferiores e superiores para as

realizações de resposta do sistema em cada realização, pode-se calcular limites inferiores e superiores para o valor esperado e a autocorrelação do processo de resposta, conforme conceitos fundamentais.

Uma vez tendo o conjunto de realizações de aproximações numéricas do processo de resposta $(\{u_m(x, \omega_k)\}_{k=1}^N, \forall x \in \bar{D})$, determinam-se, as estimativas para o valor esperado e autocorrelação:

$$\begin{cases} \mu_{u_m}(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_m(x, \omega_k), \forall x \in \bar{D}; \\ \mu_{u_m}^2(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N [u_m(x, \omega_k)]^2, \forall (x, y) \in \bar{D}. \end{cases} \quad (2.45)$$

Inserindo a equação (2.45) na inequação (2.43), obtém-se limites inferior e superior para o valor esperado e a autocorrelação do processo de resposta:

$$\begin{cases} \mu_{\delta_{1i}}(x) \leq \mu_{u_m}(x) \leq \mu_{\delta_{2i}}(x), \forall x \in \bar{D}, i = 1, \dots, 5; \\ \mu_{\delta_{1i}}^2(x) \leq \mu_{u_m}^2(x) \leq \mu_{\delta_{2i}}^2(x), \forall x \in \bar{D}, i = 1, \dots, 5. \end{cases} \quad (2.46)$$

No trabalho de *Ávila & Beck* (2014), foram apresentados dois exemplos numéricos, problemas de flexão de vigas, para analisar a eficiência da metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, apresentada na presente seção. O primeiro foi um problema de flexão transversal da viga Euler-Bernoulli estocástico com fundação de *Winkler* e o segundo foi um problema estocástico de reação e difusão axial envolvendo termo-elasticidade. Em ambos os casos a eficiência da metodologia de simulação *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, foi comparada com a metodologia de simulação de *Monte-Carlo*. Em cada uma das aplicações foi considerada a expansão da série de Neumann com um e dois termos ($n = 0$ e $n = 1$), respectivamente.

No primeiro exemplo numérico, aplicou-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas ao problema de flexão da viga Euler-Bernoulli estocástico com fundação de *Winkler*, o qual foi definido como:

$$\begin{cases} \text{Determinar } u \in L^2((\Omega, F, P); H^4(0, l)) \text{ tal que,} \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \kappa_w u = q, \forall (x, \omega) \in (0, l) \times (\Omega, F, P); \\ u(0, \omega) = u(l, \omega) = 0, \forall \omega \in (\Omega, F, P), \\ \frac{d^2 u}{dx^2}(0, \omega) = \frac{d^2 u}{dx^2}(l, \omega) = 0, \forall \omega \in (\Omega, F, P), \end{cases} \quad (2.47)$$

sendo EI o coeficiente de rigidez da viga, κ_w o coeficiente de rigidez da fundação, u o deslocamento transversal da viga e $q = q(x)$ o carregamento da viga.

A incerteza no problema foi considerada sobre a rigidez da barra EI e sobre a rigidez da fundação κ_w . As incertezas foram analisadas separadamente. Para as duas situações os resultados foram semelhantes no quesito eficiência (tempo computacional e convergência). O desempenho melhor foi obtido usando-se a norma de Frobenius, o custo computacional fica reduzido e o erros de

aproximação, comparando o método de *Monte Carlo - Neumann* com o método de *Monte-Carlo*, foram relativamente pequenos. Utilizando-se, neste mesmo problema, as normas 1 e 2 no método de *Monte Carlo - Neumann*, não foi observado um ganho computacional em comparação ao método de *Monte-Carlo*. Já usando-se a norma 5 ocorreu um ganho relevante no tempo computacional, no entanto observou-se uma perda considerável na convergência da solução.

No segundo exemplo, foi avaliado o problema de reação e difusão axial termo-elástico, o qual foi definido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u \in L^2((\Omega, F, P); H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)) \text{ tal que,} \\ -\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + \kappa u = f, \quad \forall (x, \omega) \in (0, l) \times (\Omega, F, P); \\ u(0, \omega) = u(l, \omega) = 0, \quad \forall \omega \in (\Omega, F, P) \end{array} \right. \quad (2.48)$$

sendo EA o coeficiente de rigidez da membrana (difusão), κ o coeficiente de rigidez (de reação), u o deslocamento axial da viga e $f = f(x)$ o termo de carga.

Nesse problema, para a análise da eficiência, a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, também foi comparada a metodologia de *Monte-Carlo*. Os melhores resultados, quanto ao tempo computacional e a convergência, foram observados aplicando-se a norma de Frobenius (norma 4). Os resultados quanto a convergência ficaram bastante prejudicados utilizando-se a norma 5. Já utilizando-se as normas 1 e 2 o ganho computacional foi muito pequeno quando comparado ao método de *Monte-Carlo*.

Desta forma, para estes dois problemas, a Metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, mostrou-se eficiente em comparação ao método direto de *Monte-Carlo* nos quesitos tempo computacional e convergência.

Capítulo 3

Teoria de flexão de placas

Neste capítulo apresenta-se um estudo sobre problemas de flexão de placas. Inicialmente faz-se uma breve abordagem geral sobre a teoria de placas, para posteriormente focar os estudos em problemas de flexão transversal de placas de Kirchhoff. Estes estudos, das placas de Kirchhoff, contemplam desde uma abordagem qualitativa, até a apresentação e descrição de metodologias visando a determinação de aproximações numéricas para problemas de flexão transversal de placas de Kirchhoff.

Na bibliografia, encontram-se várias teorias de deformação de placas. O interesse neste trabalho é o estudo de deformação de placas finas. Nas placas finas têm-se as teorias de deformação de placas da Kirchhoff (fina clássica), Mindlin e Reddy.

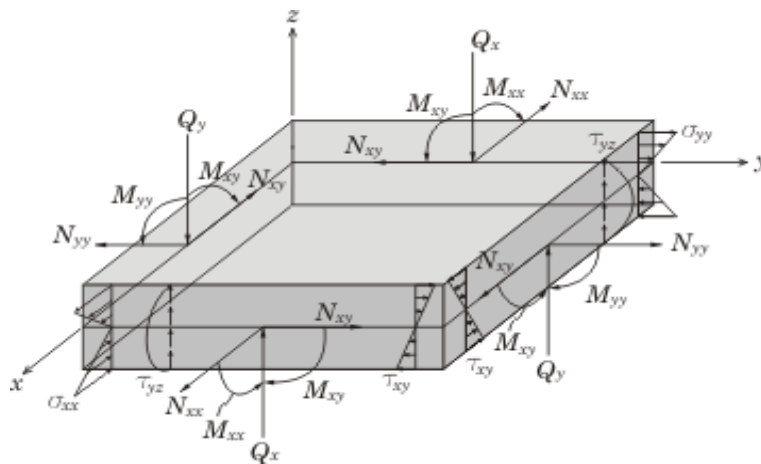


Figura 3.1: Placa de Kirchhoff, *Belo* (2006).

A Figura 3.1 ilustra a ação das tensões normais (σ_{xx} e σ_{yy}) e cisalhantes (τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz}), dos momentos (M_{xx} , M_{yy} , M_{xy}), das resultantes das forças internas (N_{xx} , N_{yy} , N_{xy}) e das forças cisalhantes (Q_x e Q_y), num elemento de placa (placa fina) sob a ação de uma força.

As teorias de placas bi-dimensionais podem ser classificadas em dois tipos, teoria clássica, na qual os efeitos da deformação de cisalhamento transversal são desconsiderados, e as teorias onde

são consideradas as deformações por cisalhamento.

A teoria de placas de Kirchhoff (teoria clássica de placas - CPT), para o flexão normal é baseada no campo de deslocamento:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

sendo (u, v, w) as componentes do deslocamento ao longo das direções (x, y, z) , respectivamente, e w_0 a deflexão transversal do ponto no plano médio ($z = 0$). O campo de deslocamento (3.1) implica que retas perpendiculares ao plano xy permaneçam perpendiculares ao plano médio após a deformação. Essa condição, proposta por Kirchhoff, considera que a deformação deve-se inteiramente à flexão no plano.

No entanto, têm-se outras teorias de placas que consideram a ocorrência de deformações por cisalhamento. Neste grupo destacam-se as teorias de placas de Mindlin e de Reddy. A teoria de placas de Mindlin, conhecida como teoria de deformação de placas por cisalhamento de primeira ordem (first-order shear deformation plate theory - FSDT), se baseia no campo de deslocamento, descrito pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = z \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) = z \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y), \end{cases} \quad (3.2)$$

sendo $\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y}$ as rotações sobre os eixos y e x , respectivamente.

O FSDT estende a cinemática do CPT, incluindo a deformação por cisalhamento nos seus pressupostos cinemáticos, ou seja, a deformação cisalhante é assumida como sendo constante em relação aos eixos coordenados. No FSDT, fatores de correção de cisalhamento são introduzidos para corrigir a discrepância entre a distribuição da força normal e de cisalhamento, e as forças são calculadas utilizando-se as relações de cinemática do FSDT. Os fatores de correção de cisalhamento dependem não só dos parâmetros geométricos, mas também da carga e das condições contorno da placa.

Em ambas as teorias, a não extensão transversal normal pode ser desconsiderada, assumindo-se que a deflexão transversal também varia através da espessura, o que permite o uso das equações constitutivas tridimensionais completas.

As teorias de placas de segunda ordem e de ordem superior, de deformações por cisalhamento, usam teorias de expansão polinomial, de ordem superior, para descrever o deslocamento através da espessura da placa. As teorias de placas de ordem superior, introduzem incógnitas adicionais que são muitas vezes difíceis de serem interpretadas em termos físicos. Já a teoria de placas de segunda

ordem, desconsiderando a extensão transversal, baseia-se no seguinte campo de deslocamento:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = z \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) = z \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} + z^2 \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (3.3)$$

Na literatura, há várias teorias de terceira ordem que descrevem a deflexão de placas. Talvez uma das mais significativas seja a teoria de Reddy. A teoria de deformação de placas de terceira ordem por cisalhamento (TSDT - third-order shear deformation plate theory) de Reddy, desconsiderando a extensão transversal da placa, baseia-se no seguinte campo de deslocamento:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = z \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} - \alpha z^3 \left(\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z) = z \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} - \alpha z^3 \left(\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (3.4)$$

em que $\alpha = \frac{4}{3h^2}$. Pode-se observar que, se $\alpha = 0$, recai-se no campo de deslocamento FSDT. O campo de deslocamento apresenta uma variação quadrática das deformações de cisalhamento transversais (e conseqüentemente, tensões cisalhantes) através da espessura e do desaparecimento de tensões cisalhantes transversais sobre as superfícies superior e inferior da placa, conforme Figura 3.2. Ao contrário do FSDT, o TSDT não requer os fatores de correção de cisalhamento.

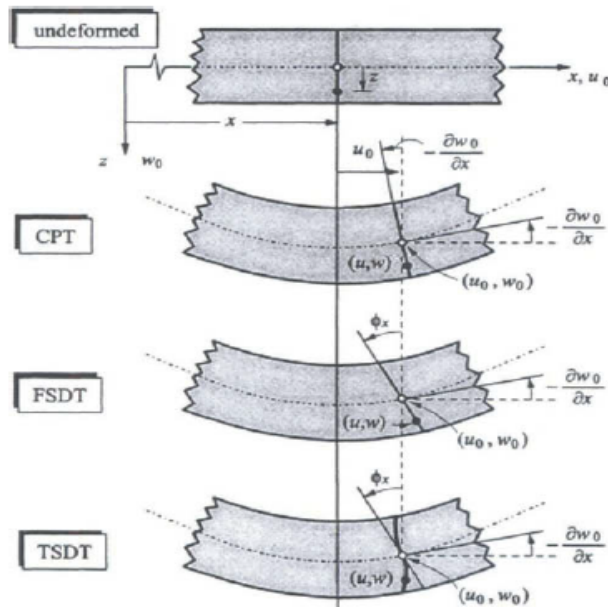


Figura 3.2: Teorias de deformação de placas, *Reddy et al.* (2000).

Feita essa breve exposição sobre teoria de placas, volta-se o olhar especificamente para as placas de Kirchhoff. Embora no presente trabalho de tese, objetiva-se analisar o comportamento de

novas metodologias aplicados a problemas de flexão de placas, é necessário fazer-se um “corte” para o trabalho não ficar amplo demais. Sendo assim, os estudos se concentraram na aplicação das metodologias às teorias de placas de Kirchhoff, ficando em aberto, trabalhos futuros que visem a análise destas metodologias para as demais teorias de placas, a saber, Mindlin e Reddy.

3.1 Problema de Flexão de Placas de Kirchhoff

Nesta seção apresenta-se a formulação matemática do problema de flexão de placas de Kirchhoff, começando pela formulação forte e chegando a formulação fraca, para na sequência, aplicando-se o Teorema de Lax-Milgran mostrar que o problema fraco tem solução única e por consequência o problema forte também possui solução única. Uma vez tendo a garantia da existência e unicidade de soluções, pode-se proceder a obtenção de tal solução.

Uma versão da formulação forte do problema, equação diferencial associada as condições de contorno, que descreve a flexão de placas de Kirchhoff, é dada por:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha(x, y, \omega) \cdot \Delta u(x, y, \omega)) = q(x, y, \omega), & \forall (x, y, \omega) \in D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \\ u(x, y, \omega) = 0, & \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \\ \Delta u(x, y, \omega) = 0, & \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \end{cases} \quad (3.5)$$

sendo $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto com fronteira ∂D regular, u representa o deslocamento transversal, α representa o coeficiente de rigidez à flexão da placa e q o carregamento. As condições de contorno descritas em (3.5) resultam da formulação do problema considerando-se a placa simplesmente apoiada sobre uma base.

Para provar a existência e unicidade de solução do problema (3.5), procede-se a formulação fraca associada ao problema. No entanto, necessita-se definir alguns espaços importantes para tal formulação. Sejam $V = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; Q)$, sendo $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; Q) = \{u : D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} \|u(\omega)\|_{H^2(D)}^2 dP(\omega) < +\infty\}$ e $Q = \{u(\cdot, \cdot, \omega) \in H^2(D) \cap H_0^1(D) \mid \Delta u(\cdot, \cdot, \omega) = 0 \text{ sobre a } \partial D\}$. Assim, para algum $u \in V$ (um processo estocástico), tomando-se $\omega \in (\Omega, \mathcal{F}, P)$ fixo, têm-se $u(\cdot, \cdot, \omega) \in Q$, por outro lado, tomando-se $x \in D$ fixo, tem-se $u(x, y, \cdot) \in (\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Objetivando obter a formulação variacional (formulação fraca) associada ao problema (3.5). Toma-se uma função $v \in V$, com $v(x, y, \omega) \equiv 0$ e $\Delta v(x, y, \omega) \equiv 0$, $\forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$. Multiplicando-se a equação do problema (3.5), pela função v obtém-se:

$$\Delta(\alpha(x, y, \omega) \cdot \Delta u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega) = q(x, y, \omega) \cdot v(x, y, \omega), \quad (3.6)$$

assim, integrando sobre $D \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$ tem-se:

$$\int_{\Omega} \int_D \Delta(\alpha(x, y, \omega) \cdot \Delta u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu = \int_{\Omega} \int_D q(x, y, \omega) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu \quad (3.7)$$

Como:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \cdot v \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \right) \cdot v + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) \right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right),$$

segue que,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \right) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \cdot v \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) \right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_D \Delta(\alpha(x, y, \omega) \cdot \Delta u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu &= \\ &= \int_{\Omega} \int_D \nabla(\nabla(\alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega)) v(x, y, \omega)) dx dy d\mu \\ &\quad - \int_{\Omega} \int_D (\nabla(\alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega))) \cdot (\nabla v(x, y, \omega)) dx dy d\mu \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aplicando-se o teorema da divergência de Gauss, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_D \nabla(\nabla(\alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega)) v(x, y, \omega)) dx dy d\mu &= \\ &= \int_{\Omega} \int_{\partial D} (\nabla(\alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega))) v(x, y, \omega) dS d\mu = 0, \end{aligned}$$

pois, $v(x, y, \omega) = 0, \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$. Logo da igualdade (3.8) segue que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_D \Delta(\alpha(x, y, \omega) \cdot \Delta u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu &= \\ &= - \int_{\Omega} \int_D (\nabla(\alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega))) \cdot (\nabla v(x, y, \omega)) dx dy d\mu \end{aligned} \quad (3.9)$$

Da igualdade:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2},$$

segue que,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^n \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$$

Integrando-se sobre o espaço $D \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$ resulta:

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega} \int_D \nabla(\alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega)) \cdot (\nabla v(x, y, \omega)) dx dy d\mu &= \\
&= - \int_{\Omega} \int_D \nabla((\alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega)) \nabla v(x, y, \omega)) dx dy d\mu \\
&+ \int_{\Omega} \int_D \alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega) \Delta v(x, y, \omega) dx dy d\mu \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Novamente aplicando-se o teorema da divergência de Gauss, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \int_D \nabla((\alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega)) \nabla v(x, y, \omega)) dx dy d\mu &= \\
&= \int_{\Omega} \int_{\partial D} (\alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega)) \nabla v(x, y, \omega) dS d\mu = 0,
\end{aligned}$$

pois, $\Delta u(x, y, \omega) = 0$, $\forall x \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$. Desta forma segue:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \int_D \Delta(\alpha(x, y, \omega) \cdot \Delta u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu &= \\
&= \int_{\Omega} \int_D \alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega) \Delta v(x, y, \omega) dx dy d\mu, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

isto é, chega-se a formulação fraca da equação diferencial associada ao problema (3.5)

$$\int_{\Omega} \int_D \alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega) \Delta v(x, y, \omega) dx dy d\mu = \int_{\Omega} \int_D q(x, y, \omega) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu \quad (3.12)$$

Desta forma o problema variacional abstrato associado à formulação forte do problema de flexão de placas (3.5) é dado por:

$$\begin{cases} \text{Determinar } u \in V \text{ tal que,} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.13)$$

sendo $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, uma forma bilinear dada por:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \int_D \alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega) \Delta v(x, y, \omega) dx dy d\mu \quad (3.14)$$

e $l(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$, um funcional linear dado por:

$$l(v) = \int_{\Omega} \int_D q(x, y, \omega) v(x, y, \omega) dx dy d\mu \quad (3.15)$$

A função (3.14) é de fato uma aplicação bilinear, basta observar-se que ela satisfaz as seguintes condições: $a(u_1 + u_2, v) = a(u_1, v) + a(u_2, v)$, $a(u, v_1 + v_2) = a(u, v_1) + a(u, v_2)$, $a(\alpha u, v) = \alpha a(u, v)$

e $a(u, \beta v) = \beta a(u, v)$, $\forall u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Da mesma forma (3.15) é um funcional linear, basta observar-se que $l(\alpha(v_1 + v_2)) = \alpha(l(v_1) + l(v_2))$, $\forall v_1, v_2 \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Com o objetivo de mostrar a existência de solução única do problema (3.13), e por consequência do problema (3.5), impõe-se algumas hipóteses sobre parâmetros pertencentes aos problemas.

H1: Existem $\underline{\alpha}, \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^+$: $P(\omega \in \Omega : \alpha(x, y, \omega) \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \forall x \in D) = 1$;

H2: $\alpha \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H^2(D))$;

H3: $q \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; L^2(D))$.

A hipótese H1, garante que o coeficiente de rigidez a flexão seja positivo definido, e uniformemente limitado em probabilidade. As hipóteses H2 e H3, garantem que o coeficiente de rigidez a flexão e o carregamento do processo estocástico tenham variância finita. Essas hipóteses são necessárias para a aplicação do lema de Lax-Milgram, usado para mostrar a existência e unicidade de soluções do problema (3.13).

Teorema 3.1. (*Existência e unicidade de solução*) *Considere α e q satisfazendo as hipóteses H1, H2 e H3. Então o problema variacional abstrato (3.13) possui solução única sobre V .*

Demonstração. : Têm-se que V é um espaço de Hilbert e

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $a = a(u, v)$ é uma forma bilinear. Precisa mostrar-se que $a(., .)$ é contínua e coersiva.

Continuidade: Sejam $u, v \in V$, assim

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \int_D \alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega) \Delta v(x, y, \omega) dx dy d\mu \right|,$$

usando-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtém-se:

$$|a(u, v)| \leq \bar{\alpha} \left[\int_{\Omega} \int_D (\Delta u)^2(x, y, \omega) dx dy d\mu \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_{\Omega} \int_D (\Delta v)^2(x, y, \omega) dx dy d\mu \right]^{\frac{1}{2}},$$

isto é, tomando-se $C = \bar{\alpha}$, segue que $|a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V$, o que prova que $a(., .)$ é contínua.

Coersiva: Seja $u \in V$ então:

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \int_D \alpha(x, y, \omega) (\Delta u)^2(x, y, \omega) dx dy d\mu \geq \underline{\alpha} \int_{\Omega} \int_D (\Delta u)^2(x, y, \omega) dx dy d\mu$$

tomando-se $C = \underline{\alpha}$, segue que $a(u, u) \geq C \|u\|_V^2$, o que comprova que $a(., .)$ é coersiva.

Assim, pelo lema de Lax-Milgram, para todo $l : V \rightarrow \mathbb{R}$, linear e contínuo, existe um único $u \in V$, tal que,

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V.$$

□

3.2 Modelos de Placas de Kirchhoff (bidimensional) Simplesmente Apoiada

O problema mecânico linear de flexão da placa de Kirchhoff (bidimensional) descrito para um problema de valor de contorno é dado por:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha(x, y, \omega) \cdot \Delta u(x, y, \omega)) = f(x, y, \omega), & \forall (x, y, \omega) \in D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \\ u(x, y, \omega) = 0, & \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \\ \Delta u(x, y, \omega) = 0, & \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P), \end{cases} \quad (3.16)$$

sendo que $D \subset \mathbb{R}^2$, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, α o coeficiente de rigidez à flexão da placa e f a função de carregamento externo. *Ávila et al.* (2014), em seu trabalho, demonstraram que o problema da forma (3.16) possui solução única sobre o espaço V , sendo $V = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; Q) = \{u : D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} \|u(\omega)\|_{H^2(D)}^2 dP(\omega) < +\infty\}$.

Na sequência apresentam-se dois modelos do problema mecânico linear de flexão transversal da placa de Kirchhoff (bidimensional), considerado-se a influência do solo por meio de um carregamento externo.

3.2.1 Problema de Kirchhoff em fundação Winkler

No modelo de fundação de Winkler, proposto em 1867, considera-se que a força de reação que o solo exerce sobre um determinado ponto do plano é proporcional a deflexão do plano naquele ponto. Com isso o carregamento externo resultante na placa é descrito pela função:

$$f(x, y, w) = q(x, y) - \kappa_w u(x, y, w), \quad (3.17)$$

sendo κ_w o coeficiente de rigidez do solo (base de apoio). Substituindo (3.17) em (3.16), obtém-se a formulação forte do problema de Kirchhoff em fundação de Winkler (base elástica) dado for:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha(x, y, \omega) \cdot \Delta u(x, y, \omega)) + \kappa_w u(x, y, \omega) = q(x, y), & \forall (x, y, \omega) \in D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \\ u(x, y, \omega) = 0, & \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \\ \Delta u(x, y, \omega) = 0, & \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P), \end{cases} \quad (3.18)$$

Considerando-se que as hipóteses H1, H2 e H3, a seguir, sejam satisfeitas,

$$\text{H1: } \begin{cases} \text{Existem } \underline{\alpha}, \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^+ : P(\omega \in \Omega : \alpha(x, y, \omega) \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \forall (x, y) \in D) = 1; \\ \text{Existem } \underline{\kappa_w}, \bar{\kappa_w} \in \mathbb{R}^+ : P(\omega \in \Omega : \kappa_w(x, y, \omega) \in [\underline{\kappa_w}, \bar{\kappa_w}], \forall (x, y) \in D) = 1; \end{cases}$$

$$\text{H2: } \alpha, \kappa_w \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H^2(D));$$

$$\text{H3: } q \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; L^2(D)).$$

Ávila e Beck (2010) provaram, que o problema (3.18) possui solução fraca única sobre o espaço V . A formulação fraca, problema variacional abstrato, associada ao problema de flexão da placa de Kirchhoff em base de Winkler (3.18), é dada por:

$$\begin{cases} \text{Determinar } u \in V \text{ tal que,} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in V, \end{cases} \quad (3.19)$$

sendo $a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, uma forma bilinear dada por:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \int_D [\alpha(x, y, \omega) \Delta u(x, y, \omega) \Delta v(x, y, \omega) + \kappa_w u(x, y, \omega) v(x, y, \omega)] dx dy d\mu \quad (3.20)$$

e $l(.) : V \rightarrow \mathbb{R}$, um funcional linear, dado por:

$$l(v) = \int_{\Omega} \int_D q(x, y) v(x, y, \omega) dx dy d\mu \quad (3.21)$$

Segundo Teodoru *et al.* (2006), a principal deficiência do modelo de Winkler, é a existência de descontinuidades de deslocamento, na interface entre regiões carregadas e não-carregadas, conforme Figura 3.3. A visão da placa está sendo considerada num corte transversal em $y = y_0$.

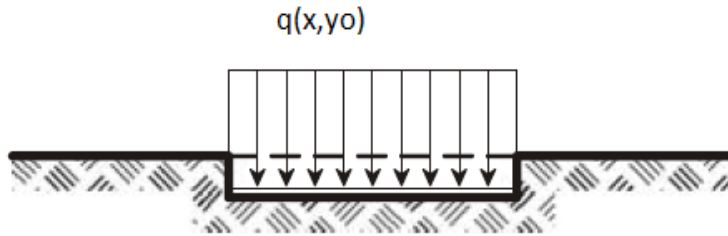


Figura 3.3: Descontinuidade no deslocamento da fundação de Winkler, adaptação Hidalgo (2015)

3.2.2 Problema de Kirchhoff em fundação Pasternak

Pasternak (1954), criou um modelo que restabelece a continuidade na base quando ocorre a flexão transversal da placa, para tanto ele propôs a introdução de um termo difusivo à força de

reação do solo. Com isso, o carregamento externo é dado pelo formação:

$$f(x, y, \omega) = q(x, y) - \kappa_w u(x, y) + \nabla(\kappa_p \nabla u(x, y)), \quad (3.22)$$

Substituindo-se (3.22) em (3.16), obtém-se a formulação forte do problema de Kirchhoff em fundação de Pasternak (base elástica) dado for:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha(x, y, \omega) \cdot \Delta u(x, y, \omega)) - \nabla(\kappa_p \nabla u(x, y, \omega)) \\ + \kappa_w u(x, y, \omega) = q(x, y), & \forall (x, y, \omega) \in D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \\ u(x, y, \omega) = 0, & \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \\ \Delta u(x, y, \omega) = 0, & \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P), \end{cases} \quad (3.23)$$

Sendo assim, os modelos baseados na fundação de Pasternak, possuem dois parâmetros de rigidez a flexão da base de apoio (solo), a saber, κ_w e κ_p . No modelo de Pasternak o parâmetro κ_p representa o módulo de cisalhamento de cada camada virtual que interage com os elementos verticais da base (tipo mola), conforme Figura 3.4, sendo considerada a visão num corte transversal da placa em $y = y_0$.

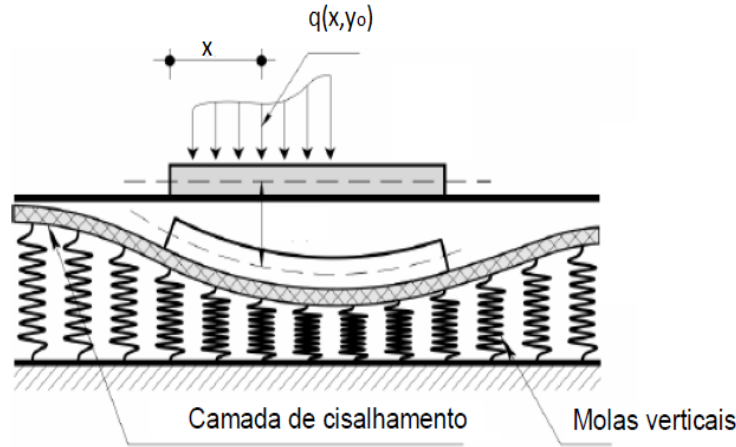


Figura 3.4: Modelo de Fundação de Pasternak, adaptação *Hidalgo* (2015)

Em levantamento bibliográfico feito, não encontrou-se a verificação da existência e unicidade de solução para o problema de flexão da placa de Kirchhoff em base de Pasternak (3.23), portanto faz-se necessário tal verificação.

Para provar a existência e unicidade de solução do problema (3.23), procede-se inicialmente a formulação fraca associada ao problema. Para essa verificação necessita-se a definição de alguns espaços importantes.

Seja $V = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; Q)$, com:

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; Q) = \{u : D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} \|u(\omega)\|_{H^2(D)}^2 dP(\omega) < +\infty\}$$

e $Q = \{u(., ., \omega) \in H^2(D) \cap H_0^1(D) \mid u(x, y, \omega) = 0 \text{ e } \Delta u(x, y, \omega) = 0 \text{ sobre a } \partial D\}$.

Assim, para algum $u \in V$ (um processo estocástico), tomando-se $\omega \in (\Omega, \mathcal{F}, P)$ fixo, tem-se $u(., ., \omega) \in Q$, por outro lado, tomando-se $x \in D$ fixo, tem-se $u(x, y, .) \in (\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Para proceder a formulação variacional (formulação fraca) associada ao problema (3.23), toma-se uma função $v \in V$ qualquer, com $v(x, y, \omega) \equiv 0$ e $\Delta v(x, y, \omega) \equiv 0$, $\forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$. Multiplicando a equação do problema (3.23), pela função v obtém-se:

$$[\Delta(\alpha \Delta u(x, y, \omega)) - \nabla(\kappa_p \nabla u(x, y, \omega)) + \kappa_w u(x, y, \omega)] \cdot v(x, y, \omega) = q(x, y) \cdot v(x, y, \omega), \quad (3.24)$$

sendo $\alpha = \alpha(x, y, \omega)$ o coeficiente de rigidez da placa e $\kappa_p = \kappa_p(x, y, \omega)$ e $\kappa_w = \kappa_w(x, y, \omega)$ coeficientes de rigidez da fundação, podendo os três parâmetros serem estocásticos. Assim, integrando (3.24) sobre $D \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_D q(x, y) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu &= \int_{\Omega} \int_D [\Delta(\alpha \Delta u(x, y, \omega)) - \nabla(\kappa_p \nabla u(x, y, \omega))] \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu \\ &+ \int_{\Omega} \int_D \kappa_w u(x, y, \omega) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como,

$$\begin{aligned} \nabla[\nabla(\alpha \Delta u) \cdot v] &= \nabla[\nabla(\alpha \Delta u)] \cdot v + \nabla(\alpha \Delta u) \cdot \nabla v \\ &= [\Delta(\alpha \Delta u)] \cdot v + \nabla(\alpha \Delta u) \cdot \nabla v, \end{aligned} \quad (3.26)$$

tem-se:

$$[\Delta(\alpha \Delta u)] \cdot v = \nabla[\nabla(\alpha \Delta u) \cdot v] - \nabla(\alpha \Delta u) \cdot \nabla v, \quad (3.27)$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_D \Delta[\alpha \Delta u(x, y, \omega)] \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu &= \int_{\Omega} \int_D \nabla[\nabla(\alpha \Delta u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega)] dx dy d\mu \\ &- \int_{\Omega} \int_D [\nabla(\alpha \Delta u(x, y, \omega))] \cdot (\nabla v(x, y, \omega)) dx dy d\mu \end{aligned} \quad (3.28)$$

Aplicando-se o teorema da divergência de Gauss, sobre a primeira integral do segundo membro de (3.28), tem-se:

$$\int_{\Omega} \int_D \nabla[\nabla(\alpha \Delta u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega)] dx dy d\mu = \int_{\Omega} \int_{\partial D} \nabla(\alpha \Delta u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu = 0, \quad (3.29)$$

pois, $v(x, y, \omega) = 0, \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$. Substituindo (3.29) em (3.28) segue que:

$$\int_{\Omega} \int_D \Delta[\alpha \cdot \Delta u(x, y, \omega)] \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu = - \int_{\Omega} \int_D [\nabla(\alpha \Delta u(x, y, \omega))] \cdot (\nabla v(x, y, \omega)) dx dy d\mu \quad (3.30)$$

Além disso, como:

$$\begin{aligned} \nabla[(\alpha \Delta u) \cdot \nabla v] &= \nabla[(\alpha \Delta u)] \cdot \nabla v + \alpha \Delta u \cdot \nabla(\nabla v) \\ &= \nabla[(\alpha \Delta u)] \cdot \nabla v + \alpha \Delta u \cdot \Delta v, \end{aligned} \quad (3.31)$$

segue que,

$$\nabla[(\alpha \Delta u)] \cdot \nabla v = \nabla[(\alpha \Delta u) \cdot \nabla v] - \alpha \Delta u \cdot \Delta v, \quad (3.32)$$

Integrando-se (3.32) sobre o espaço $D \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$, resulta em:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \int_D \nabla[(\alpha \Delta u(x, y, \omega))] \cdot \nabla v(x, y, \omega) dx dy d\mu &= - \int_{\Omega} \int_D \nabla[(\alpha \Delta u(x, y, \omega)) \cdot \nabla v(x, y, \omega)] dx dy d\mu \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_D \alpha \Delta u(x, y, \omega) \cdot \Delta v(x, y, \omega) dx dy d\mu \end{aligned} \quad (3.33)$$

Novamente aplicando-se o teorema da divergência de Gauss, agora sobre a primeira integral do segundo membro de (3.33), tem-se:

$$\int_{\Omega} \int_D \nabla[(\alpha \Delta u(x, y, \omega)) \cdot \nabla v(x, y, \omega)] dx dy d\mu = \int_{\Omega} \int_{\partial D} (\alpha \Delta u(x, y, \omega)) \cdot \nabla v(x, y, \omega) dx dy d\mu = 0, \quad (3.34)$$

pois, $\Delta u(x, y, \omega) = 0, \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$. Substituindo (3.34) em (3.33), segue:

$$\int_{\Omega} \int_D \Delta[\alpha \cdot \Delta u(x, y, \omega)] \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu = \int_{\Omega} \int_D \alpha \Delta u(x, y, \omega) \cdot \Delta v(x, y, \omega) dx dy d\mu \quad (3.35)$$

Por outro lado, como:

$$\nabla[(\kappa_p \nabla u) \cdot v] = \nabla(\kappa_p \nabla u) \cdot v + \kappa_p \nabla u \cdot \nabla v, \quad (3.36)$$

segue que,

$$\nabla(\kappa_p \nabla u) \cdot v = \nabla[(\kappa_p \nabla u) \cdot v] - \kappa_p \nabla u \cdot \nabla v, \quad (3.37)$$

Integrando-se (3.37) sobre o espaço $D \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$ resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_D \nabla(\kappa_p \nabla u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu &= \int_{\Omega} \int_D \nabla[(\kappa_p \nabla u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega)] dx dy d\mu \\ &\quad - \int_{\Omega} \int_D \kappa_p \nabla u(x, y, \omega) \cdot \nabla v(x, y, \omega) dx dy d\mu \end{aligned} \quad (3.38)$$

Aplicando-se o teorema da divergência de Gauss, sobre a primeira integral do segundo membro de (3.38), tem-se:

$$\int_{\Omega} \int_D \nabla[(\kappa_p \nabla u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega)] dx dy d\mu = \int_{\Omega} \int_{\partial D} (\kappa_p \nabla u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu = 0, \quad (3.39)$$

pois, $v(x, y, \omega) = 0, \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$. Substituindo-se (3.39) em (3.38) segue:

$$\int_{\Omega} \int_D \nabla(\kappa_p \nabla u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu = - \int_{\Omega} \int_D \kappa_p \nabla u(x, y, \omega) \cdot \nabla v(x, y, \omega) dx dy d\mu \quad (3.40)$$

Como:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \int_D [\Delta(\alpha \cdot \Delta u(x, y, \omega)) - \nabla(\kappa_p \nabla u(x, y, \omega))] \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu = \\ &= \int_{\Omega} \int_D \Delta(\alpha \cdot \Delta u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu - \int_{\Omega} \int_D \nabla(\kappa_p \nabla u(x, y, \omega)) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu \end{aligned} \quad (3.41)$$

Substituindo (3.35) e (3.40) em (3.41) obtém-se:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \int_D [\Delta(\alpha \cdot \Delta u(x, y, \omega)) - \nabla(\kappa_p \nabla u(x, y, \omega))] \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu = \\ &= \int_{\Omega} \int_D \alpha \Delta u(x, y, \omega) \cdot \Delta v(x, y, \omega) dx dy d\mu + \int_{\Omega} \int_D \kappa_p \nabla u(x, y, \omega) \cdot \nabla v(x, y, \omega) dx dy d\mu \end{aligned} \quad (3.42)$$

Desta forma, substituindo (3.42) em (3.25) chega-se a formulação fraca da equação diferencial associada ao problema forte (3.23), problema de flexão transversal da placa de Kirchhoff simplesmente apoiada em fundação de Pasternak, dada por:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \int_D [\alpha \Delta u(x, y, \omega) \cdot \Delta v(x, y, \omega) + \kappa_p \nabla u(x, y, \omega) \cdot \nabla v(x, y, \omega) + \kappa_w u(x, y, \omega) \cdot v(x, y, \omega)] dx dy d\mu = \\ &= \int_{\Omega} \int_D q(x, y) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu \end{aligned} \quad (3.43)$$

Pode-se observar, que tomando-se $k_p = k_p(x, y, \omega) \equiv 0$ a equação (3.43) se reduz a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_D [\alpha \Delta u(x, y, \omega) \cdot \Delta v(x, y, \omega) + \kappa_w u(x, y, \omega) \cdot v(x, y, \omega)] dx dy d\mu = \\ = \int_{\Omega} \int_D q(x, y) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu \end{aligned} \quad (3.44)$$

que vem a ser a representação da formulação fraca da equação diferencial associada ao problema (3.18), problema de flexão transversal da placa de Kirchhoff simplesmente apoiada em fundação de Winkler.

O problema variacional abstrato, associado à formulação forte do problema de flexão da placa de Kirchhoff simplesmente apoiada em fundação de Pastenak (3.23) é dado por:

$$\begin{cases} \text{Determinar } u \in V \text{ tal que,} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.45)$$

sendo $a(., .) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, uma forma bilinear dada por:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \int_D [\alpha \Delta u(x, y, \omega) \cdot \Delta v(x, y, \omega) + \kappa_p \nabla u(x, y, \omega) \cdot \nabla v(x, y, \omega) + \kappa_w u(x, y, \omega) \cdot v(x, y, \omega)] dx dy d\mu \quad (3.46)$$

e $l(.) : V \rightarrow \mathbb{R}$, um funcional linear dado por:

$$l(v) = \int_{\Omega} \int_D q(x, y) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu \quad (3.47)$$

Para provar a existência e unicidade de solução do problema de formulação fraca (3.45), e por consequência do problema de formulação forte (3.23), impõe-se algumas hipóteses sobre as funções coeficientes e a função carregamento do problema.

$$\text{H1: } \begin{cases} \text{Existem } \underline{\alpha}, \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^+ : P(\omega \in \Omega : \alpha(x, y, \omega) \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \forall (x, y) \in D) = 1; \\ \text{Existem } \underline{\kappa_p}, \bar{\kappa_p} \in \mathbb{R}^+ : P(\omega \in \Omega : \kappa_p(x, y, \omega) \in [\underline{\kappa_p}, \bar{\kappa_p}], \forall (x, y) \in D) = 1; \\ \text{Existem } \underline{\kappa_w}, \bar{\kappa_w} \in \mathbb{R}^+ : P(\omega \in \Omega : \kappa_w(x, y, \omega) \in [\underline{\kappa_w}, \bar{\kappa_w}], \forall (x, y) \in D) = 1; \end{cases}$$

$$\text{H2: } \alpha, \kappa_p, \kappa_w \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H^2(D));$$

$$\text{H3: } q \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; L^2(D)).$$

A hipótese H1, garante que os coeficientes de rigidez a flexão da placa (α) e de rigidez da fundação (κ_p) e (κ_w) sejam positivo definidos, e uniformemente limitados em probabilidade. As hipóteses H2 e H3, garantem que os coeficientes de rigidez a flexão e da fundação bem como o carregamento do processo estocástico tenham variância finita. Essas hipóteses são necessárias para

a aplicação do lema de Lax-Milgram, que será usado, para mostrar a existência e unicidade de soluções do problema (3.45).

Teorema 3.2. (*Existência e unicidade de solução*) Considere α , κ_p , κ_w e q satisfazendo as hipóteses $H1$, $H2$ e $H3$. Então o problema variacional abstrato (3.45) possui solução única sobre V .

Demonstração. : Têm-se que V é um espaço de Hilbert e

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por, $a = a(u, v)$ é uma forma bilinear. Precisa mostrar-se que $a(., .)$ é contínua e coersiva.

Continuidade: Sejam $u, v \in V$ assim,

$$\begin{aligned} & |a(u, v)| = \\ & = \left| \int_{\Omega} \int_D [\alpha \Delta u(x, y, \omega) \cdot \Delta v(x, y, \omega) + \kappa_p \nabla u(x, y, \omega) \cdot \nabla v(x, y, \omega) + \kappa_w u(x, y, \omega) \cdot v(x, y, \omega)] dx dy d\mu \right| \\ & \leq \left| \int_{\Omega} \int_D \alpha \Delta u(x, y, \omega) \cdot \Delta v(x, y, \omega) dx dy d\mu \right| + \left| \int_{\Omega} \int_D \kappa_p \nabla u(x, y, \omega) \cdot \nabla v(x, y, \omega) dx dy d\mu \right| \\ & + \left| \int_{\Omega} \int_D \kappa_w u(x, y, \omega) \cdot v(x, y, \omega) dx dy d\mu \right| \\ & \leq \bar{\alpha} \int_{\Omega} \int_D |\Delta u(x, y, \omega) \cdot \Delta v(x, y, \omega)| dx dy d\mu + \bar{\kappa}_p \int_{\Omega} \int_D |\nabla u(x, y, \omega) \cdot \nabla v(x, y, \omega)| dx dy d\mu \\ & + \bar{\kappa}_w \int_{\Omega} \int_D |u(x, y, \omega) \cdot v(x, y, \omega)| dx dy d\mu, \end{aligned}$$

usando-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \bar{\alpha} \int_{\Omega} \int_D |\Delta u(x, y, \omega) \cdot \Delta v(x, y, \omega)| dx dy d\mu + \bar{\kappa}_p \int_{\Omega} \int_D |\nabla u(x, y, \omega) \cdot \nabla v(x, y, \omega)| dx dy d\mu \\ & + \bar{\kappa}_w \int_{\Omega} \int_D |u(x, y, \omega) \cdot v(x, y, \omega)| dx dy d\mu \\ & \leq C \int_{\Omega} \|\Delta u(x, y, \omega)\|_{L^2(D)} \cdot \|\Delta v(x, y, \omega)\|_{L^2(D)} d\mu + C \int_{\Omega} \|\nabla u(x, y, \omega)\|_{L^2(D)} \cdot \|\nabla v(x, y, \omega)\|_{L^2(D)} d\mu \\ & + C \int_{\Omega} \|u(x, y, \omega)\|_{L^2(D)} \cdot \|v(x, y, \omega)\|_{L^2(D)} d\mu \\ & \leq C (\|\Delta u(x, y, \omega)\|_{L^2(D, \Omega)} \cdot \|\Delta v(x, y, \omega)\|_{L^2(D, \Omega)} + \|\nabla u(x, y, \omega)\|_{L^2(D, \Omega)} \cdot \|\nabla v(x, y, \omega)\|_{L^2(D, \Omega)}) \\ & + \|u(x, y, \omega)\|_{L^2(D, \Omega)} \cdot \|v(x, y, \omega)\|_{L^2(D, \Omega)} \end{aligned}$$

$$\leq C \cdot \|u(x, y, \omega)\|_V \cdot \|v(x, y, \omega)\|_V,$$

sendo $C = \max\{\bar{\alpha}, \bar{\kappa}_p, \bar{\kappa}_w\}$. Como $|a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V, \forall u, v \in V$, prova-se que $a(., .)$ é

contínua.

Coersiva: Seja $u \in V$ então:

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= \int_{\Omega} \int_D [\alpha(\Delta u)^2(x, y, \omega) + \kappa_p(\nabla u)^2(x, y, \omega) + \kappa_w u^2(x, y, \omega)] dx dy d\mu \\
&\geq \underline{\alpha} \int_{\Omega} \int_D (\Delta u)^2(x, y, \omega) dx dy d\mu + \underline{\kappa_p} \int_{\Omega} \int_D (\nabla u)^2(x, y, \omega) dx dy d\mu + \underline{\kappa_w} \int_{\Omega} \int_D u^2(x, y, \omega) dx dy d\mu \\
&\geq C_1 \int_{\Omega} \|\Delta u(x, y, \omega)\|_{L^2(D)}^2 d\mu + C_1 \int_{\Omega} \|\nabla u(x, y, \omega)\|_{L^2(D)}^2 d\mu + C_1 \int_{\Omega} \|u(x, y, \omega)\|_{L^2(D)}^2 d\mu \\
&\geq C_1 (\|\Delta u(x, y, \omega)\|_{L^2(D, \Omega)}^2 + \|\nabla u(x, y, \omega)\|_{L^2(D, \Omega)}^2 + \|u(x, y, \omega)\|_{L^2(D, \Omega)}^2) \\
&\geq C_1 \|u(x, y, \omega)\|_V^2
\end{aligned}$$

sendo $C_1 = \min\{\underline{\alpha}, \underline{\kappa_p}, \underline{\kappa_w}\}$, segue que $a(u, u) \geq C_1 \|u\|_V^2$, o que comprova que $a(\cdot, \cdot)$ é coersiva.

Assim pelo lema de Lax-Milgram, para toda $l : V \rightarrow \mathbb{R}$, linear e contínua, existe um único $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V$$

□

Comprovando-se, desta forma, a existência e a unicidade de solução do problema (3.45) e por consequência do problema (3.23). Uma vez tendo-se a garantia da existência e unicidade de solução do problema (3.45), pode-se proceder a determinação da solução do mesmo.

Para a resolução do problema em questão, foi usado, inicialmente, o método de Galerkin para obter soluções numéricas aproximadas para as realizações do processo estocástico de deslocamento transversal. Para tanto, considerou-se $V_m = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ um espaço de aproximação de V , com $V_m \subset V$. A proposta do método de Galerkin é obter o espaço das soluções aproximadas para a k -ésima realização. As soluções numéricas aproximadas possuem a seguinte forma,

$$u_m(x, y, \omega_k) = \sum_{i=1}^m u_i(\omega_k) \varphi_i(x, y), \quad (3.48)$$

sendo que u_i são coeficientes a serem determinados. Substituindo (3.48) no problema (3.23), define-se o problema variacional aproximado para a k -ésima amostra estrutural como sendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fixada } (\omega_k), \text{ determinar } u_m(x, y, \omega_k) \in V_m \text{ tal que,} \\ a(u_m(x, y, \omega_k), \varphi_j) = l(\varphi_j), \quad \forall \varphi_j \in V_m. \end{array} \right. \quad (3.49)$$

Assim

$$\begin{aligned} a(u_m(x, y, \omega_k), \varphi_j) &= a\left(\sum_{i=1}^m u_i(x, y, \omega_k) \varphi_i, \varphi_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^m u_i(\omega_k) a(\varphi_i, \varphi_j) \end{aligned} \quad (3.50)$$

por outro lado

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_D [\alpha(x, y, \omega_k) \Delta \varphi_i \cdot \Delta \varphi_j + \kappa_p(x, y, \omega_k) \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j + \kappa_w(x, y, \omega_k) \varphi_i \cdot \varphi_j] dx dy \quad (3.51)$$

Considerando, $k_{ij}(\omega_k) = a(\varphi_i, \varphi_j)$, $K(\omega_k) = [k_{ij}(\omega_k)]_{m \times m}$, $U(\omega_k) = (u_1(\omega_k), \dots, u_m(\omega_k))^T$ e $F(\omega_k) = (f_1(\omega_k), \dots, f_m(\omega_k))^T$, onde $f_j(\omega_k) = \int_D q(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy = l(\varphi_j)$, tem-se desta forma:

$$a(u_m(x, y, \omega_k), \varphi_j) = \sum_{i=1}^m u_i(\omega_k) k_{ij} \quad (3.52)$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^m u_i(\omega_k) k_{ij} = f_j(\omega_k) \quad (3.53)$$

Desta forma, pode-se reescrever (3.50) como o sistema linear:

$$K(\omega_k)U(\omega_k) = F(\omega_k) \quad (3.54)$$

sendo que para cada ω_k fixo, o problema algébrico (3.54) é um problema determinístico.

Assim fica definido o problema:

$$\begin{cases} \text{Fixada } (\omega_k), \text{ determinar } U(\omega_k) \in \mathbb{R}_m \text{ tal que,} \\ K(\omega_k)U(\omega_k) = F(\omega_k), \end{cases} \quad (3.55)$$

sendo $K(\omega_k) \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$, matriz de rigidez, $F(\omega_k)$ um vetor carregamento e $U(\omega_k)$ uma função de deslocamento vertical. Resolvendo o sistema em (3.55) para cada (ω_k) , tem-se:

$$K(\omega_k)U(\omega_k) = F(\omega_k) \Rightarrow U(\omega_k) = [K(\omega_k)]^{-1}F(\omega_k) \quad (3.56)$$

denominando $H(\omega_k) = [K(\omega_k)]^{-1}$, segue da segunda igualdade de (3.56),

$$u_i(\omega_k) = \sum_{j=1}^m h_{ij}(\omega_k) f_j(\omega_k) \quad (3.57)$$

De (3.55) e (3.57), a solução numérica aproximada para a k -ésima realização, $u_m = u_m(x, \omega_k)$, é dada por:

$$u_m(x, y, \omega_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (h_{ij}(\omega_k) f_j(\omega_k)) \varphi(x, y) = (F^T H^T)(\omega_k) \Phi(x, y) \quad (3.58)$$

sendo $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ um vetor cujas entradas são funções da base de V_m .

Para cada amostra k é necessário determinar a inversa da matriz de rigidez $K(\omega_k)$, e este fato pode gerar um elevado custo computacional. Para contornar este problema, uma forma para determinar a aproximação de $(K(\omega_k))^{-1}$ com baixo custo computacional e sem comprometer a precisão da solução, é por meio da série Neumann de baixa ordem, considerando-se para tanto,

$$U(\omega_k) = (K(\omega_k))^{-1} F = (I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} U_0 \quad (3.59)$$

com $U_0 = K_0^{-1} F$ e $U_0 = [u_1^0, \dots, u_m^0]^T$.

Sendo $0 < \|\mathcal{P}(\omega_k)\| < 1$, têm-se via série de Neumann a existência da matriz inversa $(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ que é dada pela série $(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} = \sum_{q=0}^{\infty} (\mathcal{P}(\omega_k))^q$, com isso a equação (3.59) pode ser reescrita como:

$$U(\omega_k) = \sum_{q=0}^{\infty} (\mathcal{P}(\omega_k))^q U_0 \quad (3.60)$$

Substituindo a equação (3.60) na equação (3.57), obtém-se:

$$u_m(x, y, \omega_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{q=0}^{\infty} (p_{ij}^q(\omega_k) u_j^0) \varphi_i(x, y) = \left[\sum_{q=0}^{\infty} (P(\omega_k))^q \cdot (U_0) \right]^T \Phi(x, y) \quad (3.61)$$

sendo $(P(\omega_k))^q = [p_{ij}^{(q)}(\omega_k)]_{m \times m}$.

Como o objetivo é usar a série de Neumann de baixa ordem, faz-se necessário o truncamento da série. Considerando esse truncamento na ordem n , pode-se reescrever a equação (3.61) como:

$$u_{mn}(x, y, \omega_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{q=0}^n (p_{ij}^q(\omega_k) u_j^0) \varphi_i(x, y) = \left[\sum_{q=0}^n (P(\omega_k))^q \cdot (U_0) \right]^T \Phi(x, y) \quad (3.62)$$

3.3 Adaptação das Metodologias de simulação *Monte Carlo* - *Neumann* λ e *Monte Carlo* - *Neumann* à problemas de placas

Nesta seção apresenta-se a descrição para problemas de placas de Kirchhoff, das duas metodologias desenvolvidas e aplicadas por *Ávila & Beck* (2014), (2015a) (2015b) à resolução de problemas de flexão de vigas, ambas baseadas na expansão em série de Neumann.

3.3.1 Metodologia de simulação *Monte Carlo* - *Neumann* λ

Utilizando-se neste caso a metodologia proposta por *Ávila & Beck* (2015a), com truncamento da série de Neumann em $n = 1$ necessita-se minimizar a função $f = f(\lambda_1, \lambda_2)$, nas variáveis (λ_1, λ_2) :

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \|[I - \lambda_1(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0 - \lambda_2[\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\|^2. \quad (3.63)$$

Para diminuir o número de cálculos e conseqüentemente o custo computacional no cálculo dos parâmetros $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ da presente metodologia, propõe-se alguns pequenos ajustes na forma de calcular esses parâmetros, conforme segue.

Definindo $Q_1 = (I - \mathcal{P})U_0$ e $Q_2 = \mathcal{P}(I - \mathcal{P})U_0$, chega-se aos termos que definem $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, onde $f(\lambda_1^*, \lambda_2^*) = \min f(\lambda_1, \lambda_2)$, como sendo:

$$\begin{cases} \lambda_1^* = \frac{Q_1^T U_0 - Q_1^T Q_2 \lambda_2^*}{Q_1^T Q_1} \\ \lambda_2^* = \frac{Q_1^T Q_1 Q_2^T U_0 - Q_1^T Q_2 Q_1^T U_0}{Q_1^T Q_1 Q_2^T Q_2 - Q_1^T Q_2 Q_1^T Q_2} \end{cases} \quad (3.64)$$

Ainda, redefinindo-se alguns termos em (3.64), uma vez que eles aparecem mais de uma vez, como sendo:

$$Q_1^T U_0 = Q_{10}, \quad Q_1^T Q_1 = Q_{11} \text{ e } Q_1^T Q_2 = Q_{12},$$

é possível reescrever $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ como:

$$\begin{cases} \lambda_1^* = \frac{Q_{10} - Q_{12} \lambda_2^*}{Q_{11}} \\ \lambda_2^* = \frac{Q_{11} Q_2^T U_0 - Q_{12} Q_{10}}{Q_{11} Q_2^T Q_2 - Q_{12} Q_{12}} \end{cases} \quad (3.65)$$

Sendo $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ o vetor que minimiza a função distância (3.63). Têm-se que a solução para $n = 1$

de (3.62) para a k -ésima realização é dada por:

$$\begin{aligned}
u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [(\lambda_1^* I + \lambda_2^* p_{ij}(\omega_k)) u_j^0] \varphi_i(x, y) \\
&= \lambda_1^* \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m u_j^0 \varphi_i(x, y) + \lambda_2^* \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m u_j^0 \varphi_i(x, y) \\
&= [\Phi(x, y)]^T U_{(1\lambda)}(\lambda^*, \omega_k) = [\Phi(x, y)]^T (\lambda_1^* I + \lambda_2^* \mathcal{P}(\omega_k)) U_0
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Estimativas do valor esperado, autocorrelação e variância do processo de resposta

Sendo N o número de realizações do processo estocástico de resposta, o conjunto das N realizações, via método de *Monte-Carlo*, é dado por:

$$(\{u_m(x, y, \omega_k)\}_{k=1}^N, \forall (x, y) \in \bar{D}). \tag{3.67}$$

As estimativas do valor esperado (μ_{u_m}), autocorrelação ($\mu_{u_m}^2$) e da variância ($\sigma_{u_m}^2$) do processo de resposta $u_m(., ., .)$, são dadas pelas equações:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mu_{u_m}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_m(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \\
\mu_{u_m}^2(x, y) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (u_m(x, y, \omega_k))^2, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \\
\sigma_{u_m}^2(x, y) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (u_m(x, y, \omega_k) - \mu_{u_m}(x, y))^2, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}
\end{array} \right. \tag{3.68}$$

De forma análoga, considerando-se N o número de realizações do processo de resposta, o conjunto de realizações obtido a partir destas realizações, via método de *Monte Carlo - Neumann* λ , é dado por:

$$(\{u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k)\}_{k=1}^N, \forall (x, y) \in \bar{D}). \tag{3.69}$$

As estimativas do valor esperado ($\mu_{u_{m1\lambda}}$), autocorrelação ($\mu_{u_{m1\lambda}}^2$) e da variância ($\sigma_{u_{m1\lambda}}^2$) do processo de resposta $u_{m1\lambda}(., ., .)$, são dadas pelas equações:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mu_{u_{m1\lambda}}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \\
\mu_{u_{m1\lambda}}^2(x, y) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k))^2, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \\
\sigma_{u_{m1\lambda}}^2(x, y) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k) - \mu_{u_{m1\lambda}}(x, y))^2, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}
\end{array} \right. \tag{3.70}$$

O método de simulação de *Monte-Carlo* é usado para verificar a precisão e a eficiência da convergência do método *Monte Carlo - Neumann* λ , com relação ao valor esperado, a autocorrelação e a variância. Para verificar estes elementos, as seguintes funções desvio relativo, em termos de valor esperado, da autocorrelação e da variância, são definidos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}}(x, y) = \begin{cases} (100\%) \left[1 - \left(\frac{\mu_{u_{m1\lambda}}}{\mu_{u_m}} \right) (x, y) \right], & \forall (x, y) \in \text{int}(D); \\ 0, & \forall (x, y) \in \partial D; \end{cases} \\ \epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y) = \begin{cases} (100\%) \left[1 - \left(\frac{\mu_{u_{m1\lambda}}^2}{\mu_{u_m}^2} \right) (x, y) \right], & \forall (x, y) \in \text{int}(D); \\ 0, & \forall (x, y) \in \partial D; \end{cases} \\ \epsilon_{\sigma_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y) = \begin{cases} (100\%) \left[1 - \left(\frac{\sigma_{u_{m1\lambda}}^2}{\sigma_{u_m}^2} \right) (x, y) \right], & \forall (x, y) \in \text{int}(D); \\ 0, & \forall (x, y) \in \partial D; \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.71)$$

As funções em (3.71) mostram o quanto as estimativas para o valor esperado, a autocorrelação e a variância, obtidas por meio do parâmetro convergência λ , diferem das mesmas estimativas obtidas através de método de simulação de *Monte-Carlo*.

3.3.2 Metodologia de simulação de *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas

Nesta seção apresenta-se a metodologia denominada *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, proposto inicialmente a problemas de vigas por *Ávila & Beck* (2015b) e *Ávila & Beck* (2014), com truncamento da série de Neumann e estabelecimento de cotas, “envelopando a solução”. A proposta desta metodologia visa o estabelecimento de cotas inferiores e superiores para as realizações da aproximação numérica, via método de Galerkin, para o processo estocástico de deslocamento transversal da placa de Kirchhoff. A partir do conjunto de realizações dessas cotas, são obtidas as cotas para as estimativas de valor esperado e de autocorrelação do processo estocástico de resposta. Além disso, são determinados os desvios relativos na comparação da metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, com a metodologia de *Monte-Carlo*.

Para a k -ésima realização do processo estocástico do campo de deslocamento e de temperatura, a distância entre as realizações de resposta obtidas por simulação de *Monte-Carlo*, equação (3.61),

e via série de Neumann, equação (3.62), pode ser estimada por:

$$\begin{aligned}
|(u_m - u_{mn})(x, y, \omega_k)| &= \left\| \left[\sum_{q=n+1}^{\infty} (\mathcal{P}(\omega_k))^q U_0 \right]^T \Phi(x, y) \right\| \\
&\leq \sum_{q=n+1}^{\infty} \|[(\mathcal{P}(\omega_k))^q U_0]^T \Phi(x, y)\| \\
&\leq \sum_{q=n+1}^{\infty} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|^q \|U_0\| \|\Phi(x, y)\|
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Considerando-se $0 < \|\mathcal{P}(\omega_k)\| < 1$, a série geométrica $\sum_{q=0}^{\infty} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|^q$ converge e por consequência o somatório $\sum_{q=n+1}^{\infty} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|^q$ também converge, sendo que sua soma é dada por:

$$\sum_{q=n+1}^{\infty} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|^q = \sum_{q=0}^{\infty} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|^q - \sum_{q=0}^n \|\mathcal{P}(\omega_k)\|^q = \frac{\|\mathcal{P}(\omega_k)\|^{n+1}}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \tag{3.73}$$

Substituindo a equação (3.73) na inequação (3.72), chega-se a desigualdade:

$$|(u_m - u_{mn})(x, y, \omega_k)| \leq \rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x, y)\|, \quad \forall (x, y, \omega_k) \in \bar{D} \times (\Omega, F, P), \tag{3.74}$$

em que $\rho(n, \omega_k) = \frac{\|\mathcal{P}(\omega_k)\|^{n+1}}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|}$.

Os coeficientes $\rho(\cdot, \cdot)$ dependem dos valores numéricos de $\|\mathcal{P}(\omega_k)\|$ e do truncamento da série de Neumann, usada para determinar a aproximação da inversa da matriz $(I - \mathcal{P}(\omega_k))$, isto é, depende do número de termos, da série de Neumann, usados para aproximar $(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}$. Caso seja tomado $n = 1$ significa que foram usados os dois primeiros termos da série, isto é, assume-se a igualdade $(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} = I + \mathcal{P}(\omega_k)$.

Trabalhando-se com a inequação módulo (3.74), para o estabelecimento de cotas para na solução exata $u_m = u_m(x, y, \omega_k)$, chega-se a inequação:

$$-\rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x, y)\| \leq (u_m - u_{mn})(x, y, \omega_k) \leq \rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x, y)\|$$

assim,

$$u_{mn}(x, y, \omega_k) - \rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x, y)\| \leq u_m(x, y, \omega_k) \leq u_{mn}(x, y, \omega_k) + \rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x, y)\|$$

Tomando-se $u_{\delta_1}(\cdot, \cdot, \cdot)$ e $u_{\delta_2}(\cdot, \cdot, \cdot)$ como sendo as cotas inferiores e superiores de $u_m(\cdot, \cdot, \cdot)$ defi-

nidas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} u_{\delta_1}(x, y, \omega_k) = u_{mn}(x, y, \omega_k) - \rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\ u_{\delta_2}(x, y, \omega_k) = u_{mn}(x, y, \omega_k) + \rho(n, \omega_k) \|U_0\| \|\Phi(x, y)\| \end{cases} \quad (3.75)$$

Segue da inequação (3.74), para a k -ésima realização do processo de resposta do problema estocástico, que:

$$u_{\delta_1}(x, y, \omega_k) \leq u_m(x, y, \omega_k) \leq u_{\delta_2}(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y, \omega_k) \in \bar{D} \times (\Omega, F, P), \quad (3.76)$$

A partir das funções $u_{\delta_1}(\cdot, \cdot, \cdot)$ e $u_{\delta_2}(\cdot, \cdot, \cdot)$ de (3.75), é possível obter limitantes inferior e superior para o valor esperado, autocorrelação e variância do processo de resposta, a partir do conjunto de realizações dos limitantes inferiores e limitantes superiores do sistema, $\{u_{\delta_1}(x, y, \omega_k), u_{\delta_2}(x, y, \omega_k)\}_{k=1}^N$, onde N representa o número de realizações.

Para cada realização k , com $k = 1, \dots, N$, é preciso calcular a norma de $\mathcal{P}(\omega_k)$, fato esse que poderia inviabilizar a metodologia envolvendo cotas, devido ao alto custo computacional para o cálculo de normas de matrizes. Como alternativa para contornar este problema, o uso da equivalência entre normas de matrizes, apresentada no *capítulo 1* do presente trabalho.

Com base na equivalência entre normas, foram propostas por *Ávila & Beck* (2015b), cinco alternativas para avaliar a norma de $\mathcal{P}(\omega_k)$ e por consequência os coeficientes $\rho(n, \omega_k)$:

$$\begin{cases} \varrho_1(n, \omega_k) = \frac{(\sqrt{m} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|_1)^{n+1}}{1 - \sqrt{m} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|_1}; \\ \varrho_2(n, \omega_k) = \frac{\|\mathcal{P}(\omega_k)\|_2^{n+1}}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|_2}; \\ \varrho_3(n, \omega_k) = \frac{(\sqrt{m} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|_\infty)^{n+1}}{1 - \sqrt{m} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|_\infty}; \\ \varrho_4(n, \omega_k) = \frac{\|\mathcal{P}(\omega_k)\|_F^{n+1}}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|_F}. \end{cases} \quad (3.77)$$

com as normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_F$, denominadas, respectivamente, norma 1, norma 2 ou norma euclidiana, norma de Frobenius e norma infinito, sendo consideradas conforme descrito no *capítulo 1*.

Utilizando-se a teoria de operadores definidos em espaços de dimensão finita, têm-se que diferentes normas, conforme as apresentadas em (3.77), resultam em diferentes desvios comparados com a norma euclidiana, usada para determinar a soma da série Neumann. Além disso, o custo computacional para avaliar estas normas pode ter relação direta com a norma avaliada. Já o desvio quanto ao valor esperado e a autocorrelação das soluções, utilizando-se essas normas, podem depender do problema em questão. Pelo fato de não ser possível, de antemão, prever qual é a norma adequada em termos de precisão e de custo computacional, *Ávila & Beck* (2014) recomendam, em cada problema avaliar o desempenho utilizando-se várias normas.

Estimativas do valor esperado e autocorrelação do processo de resposta

Determinados os conjuntos dos limitantes inferiores e superiores para a resolução do sistema em cada uma das (N) realizações, $\{\delta_1(x, y, \omega_k), \delta_2(x, y, \omega_k)\}_{k=1}^N$, $\forall (x, y) \in \bar{D}$, pode-se proceder a determinação das estimativas dos limitantes inferiores e superiores para o valor esperado, autocorrelação e variância do processo de resposta.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mu_{u_{\delta_1}}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{\delta_1}(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \\ \mu_{u_{\delta_2}}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{\delta_2}(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mu_{u_{\delta_1}}^2(x, y) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (u_{\delta_1}(x, y, \omega_k))^2, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \\ \mu_{u_{\delta_2}}^2(x, y) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (u_{\delta_2}(x, y, \omega_k))^2, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.78)$$

Substituindo as equações (3.78) na equação (3.76), obtém-se limitantes inferiores e superiores para valor esperado e a autocorreção do processo de resposta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{u_{\delta_{i_1}}}(x, y) \leq \mu_{u_m}(x, y) \leq \mu_{u_{\delta_{i_2}}}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}, \quad i = 1, \dots, 4; \\ \mu_{u_{\delta_{i_1}}}^2(x, y) \leq \mu_{u_m}^2(x, y) \leq \mu_{u_{\delta_{i_2}}}^2(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}, \quad i = 1, \dots, 4. \end{array} \right. \quad (3.79)$$

Da mesma forma como na metodologia anterior, o método de simulação de *Monte-Carlo* é usado para verificar a precisão e a eficiência da convergência do método *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimentos de cotas, com relação ao valor esperado e a autocorrelação. Para verificar-se esses elementos, as funções desvio relativo, em termos de valor esperado e autocorrelação foram utilizadas, conforme definições dadas na sequência.

Inicialmente definem-se as funções de erro (desvio) relativo para o valor esperado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{\mu_{u_{\delta_{i_1}}}}(x, y) = \begin{cases} (100\%) \left[1 - \left(\frac{\mu_{u_{\delta_{i_1}}}}{\mu_{u_m}} \right) (x, y) \right], & \forall (x, y) \in \text{int}(D); \\ 0, & \forall (x, y) \in \partial D, \quad i = 1, \dots, 4; \end{cases} \\ \epsilon_{\mu_{u_{\delta_{i_2}}}}(x, y) = \begin{cases} (100\%) \left[1 - \left(\frac{\mu_{u_{\delta_{i_2}}}}{\mu_{u_m}} \right) (x, y) \right], & \forall (x, y) \in \text{int}(D); \\ 0, & \forall (x, y) \in \partial D, \quad i = 1, \dots, 4. \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.80)$$

Na sequência definem-se as funções de erro (desvio) relativo para a autocorrelação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{\mu_{u_{\delta i_1}}^2}(x, y) = \begin{cases} (100\%) \left[1 - \left(\frac{\mu_{u_{\delta i_1}}^2}{\mu_{u_m}^2} \right) (x, y) \right], & \forall (x, y) \in \text{int}(D); \\ 0, & \forall (x, y) \in \partial D, i = 1, \dots, 4; \end{cases} \\ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i_2}}^2}(x, y) = \begin{cases} (100\%) \left[1 - \left(\frac{\mu_{u_{\delta i_2}}^2}{\mu_{u_m}^2} \right) (x, y) \right], & \forall (x, y) \in \text{int}(D); \\ 0, & \forall (x, y) \in \partial D, i = 1, \dots, 4. \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.81)$$

As funções em (3.80) mostram o quanto as estimativas para o valor esperado, obtidas por meio das cotas inferiores e superiores via método de simulação de *Monte Carlo - Neumann*, diferem das mesmas estimativas obtidas através de método de simulação de *Monte-Carlo*. As funções (3.81) mostram o quanto as estimativas para autocorrelação, obtidas por meio das cotas inferiores e superiores via método de simulação de *Monte Carlo - Neumann*, diferem das mesmas estimativas obtidas através de método de simulação de *Monte-Carlo*.

Capítulo 4

Novas metodologias do tipo *Monte Carlo - Neumann*

Neste capítulo apresentam-se, três novas propostas metodológicas, obtidas a partir de variações das duas metodologias anteriores, desenvolvidas por *Ávila & Beck*. As três metodologias envolvem o estabelecimento de cotas para as realizações do processo estocástico de resposta para o problema da flexão transversal da placa de Kirchhoff.

A primeira destas metodologias tem uma pequena variação com relação ao metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, ela difere basicamente no quesito de definição do limitante do termo $|(u_m - u_{mn})(x, y, \omega_k)|$. As outras duas metodologias podem ser caracterizadas como metodologias de *Monte Carlo - Neumann*, mistas, uma vez que usam, simultaneamente, idéias das duas metodologias propostas por *Ávila & Beck* (2014), (2015a) e (2015b).

As três novas metodologias, propostas no presente capítulo, foram desenvolvidas para resolução do problema estocástico de flexão transversal da placa de Kirchhoff simplesmente apoiada.

4.1 Metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante

Para as estimativas apresentadas na sequência, tomou-se como referência a solução obtida via método de *Monte-Carlo*, para o deslocamento transversal de uma placa, que pode ser descrita por:

$$u_m(x, y, \omega_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{q=0}^{\infty} (p_{ij}^q(\omega_k) u_j^0) \varphi_i(x, y) = \left[\sum_{q=0}^{\infty} (P(\omega_k))^q U_0 \right]^T \Phi(x, y) \quad (4.1)$$

sendo $(P(\omega_k))^q = \left[p_{ij}^{(q)}(\omega_k) \right]_{m \times m}$, com $0 < \|P(\omega_k)\| < 1$.

Tomando-se o truncamento da série de Neumann em $q = n$, isto é, tomando-se a igualdade

$(I - \mathcal{P}(\omega_k))_{(n)}^{-1} = \sum_{q=0}^n (P(\omega_k))^q$, obtém-se uma solução aproximada u_{mn} , para a função u_m , do deslocamento transversal da placa, dada por:

$$u_{mn}(x, y, \omega_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{q=0}^n (p_{ij}^q(\omega_k) u_j^0) \varphi_i(x, y) = \left[\sum_{q=0}^n (P(\omega_k))^q U_0 \right]^T \Phi(x, y) \quad (4.2)$$

A função (4.2), solução usando-se o truncamento da série de Neumann em $q = n$, representa uma solução aproximada do problema.

Objetivando-se estabelecer cotas para a solução u_m , parte-se da estimativa da distância entre as soluções (4.1) e (4.2):

$$|u_m(x, y, \omega_k) - u_{mn}(x, y, \omega_k)| = \left| \left[\sum_{q=0}^{\infty} (P(\omega_k))^q U_0 \right]^T \Phi(x, y) - \left[\sum_{q=0}^n (P(\omega_k))^q U_0 \right]^T \Phi(x, y) \right| \quad (4.3)$$

Inicia-se o processo estabelecendo limitantes, conforme segue:

$$\begin{aligned} & |u_m(x, y, \omega_k) - u_{mn}(x, y, \omega_k)| = \\ & = \left| \left[\left((I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} - \sum_{q=0}^n (\mathcal{P}^q(\omega_k)) \right) U_0 \right]^T \Phi(x, y) \right| \\ & \leq \left\| \left[(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} - \sum_{q=0}^n (\mathcal{P}^q(\omega_k)) \right] U_0 \right\| \|\Phi(x, y)\| \\ & = \left\| \left[(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} - (I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} (I - \mathcal{P}(\omega_k)) \sum_{q=0}^n (\mathcal{P}^q(\omega_k)) \right] U_0 \right\| \|\Phi(x, y)\| \\ & = \|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} [I - (I - \mathcal{P}(\omega_k))(I + \mathcal{P}(\omega_k) + \dots + \mathcal{P}^n(\omega_k))] U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\ & = \|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} [I - (I + \dots + \mathcal{P}^n(\omega_k)) + (\mathcal{P}(\omega_k) + \dots + \mathcal{P}^{n+1}(\omega_k))] U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\ & = \|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} [\mathcal{P}^{n+1}(\omega_k)] U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\ & \leq \|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}\| \|\mathcal{P}^{n+1}(\omega_k) U_0\| \|\Phi(x, y)\|. \end{aligned}$$

Como:

$$\|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{P}^n(\omega_k)) \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{P}^n(\omega_k)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{P}(\omega_k)\|^n = \frac{1}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|}, \quad (4.4)$$

chega-se a desigualdade:

$$|(u_m - u_{mn})(x, y, \omega_k)| \leq \rho_1(n, \omega_k) \|[\mathcal{P}^{n+1}(\omega_k)]U_0\| \|\Phi(x, y)\|, \quad \forall (x, y, \omega_k) \in \bar{D} \times (\Omega, F, P), \quad (4.5)$$

em que $\rho_1(n, \omega_k) = \frac{1}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|}$.

Os coeficientes $\rho_1(\cdot, \cdot)$ dependem dos valores numéricos de $\|\mathcal{P}(\omega_k)\|$ e do truncamento da série de Neumann, usada para determinar a aproximação da inversa da matriz $(I - \mathcal{P}(\omega_k))$, isto é, dependem do número de termos da série de Neumann, usados para aproximar $(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}$.

Trabalhando-se com a inequação módulo (4.5), e objetivando-se o estabelecimento de cotas para a solução exata, $u_m = u_m(x, y, \omega_k)$, chega-se a inequação:

$$-\rho_1(n, \omega_k) \|[\mathcal{P}^{n+1}(\omega_k)]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \leq (u_m - u_{mn})(x, y, \omega_k) \leq \rho_1(n, \omega_k) \|[\mathcal{P}^{n+1}(\omega_k)]U_0\| \|\Phi(x, y)\|$$

assim,

$$\begin{cases} u_{mn}(x, y, \omega_k) - \rho_1(n, \omega_k) \|[\mathcal{P}^{n+1}(\omega_k)]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \leq u_m(x, y, \omega_k); \\ u_m(x, y, \omega_k) \leq u_{mn}(x, y, \omega_k) + \rho_1(n, \omega_k) \|[\mathcal{P}^{n+1}(\omega_k)]U_0\| \|\Phi(x, y)\|. \end{cases}$$

Tomando-se $u_{\delta_{1m}}(\cdot, \cdot, \cdot)$ e $u_{\delta_{2m}}(\cdot, \cdot, \cdot)$, respectivamente, como sendo as cotas inferiores e superiores de $u_m(\cdot, \cdot, \cdot)$ definidas por:

$$\begin{cases} u_{\delta_{1m}}(x, y, \omega_k) = u_{mn}(x, y, \omega_k) - \rho_1(n, \omega_k) \|[\mathcal{P}^{n+1}(\omega_k)]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\ u_{\delta_{2m}}(x, y, \omega_k) = u_{mn}(x, y, \omega_k) + \rho_1(n, \omega_k) \|[\mathcal{P}^{n+1}(\omega_k)]U_0\| \|\Phi(x, y)\|, \end{cases} \quad (4.6)$$

segue da inequação (4.5), para a k -ésima realização do processo de resposta do problema estocástico, que:

$$u_{\delta_{1m}}(x, y, \omega_k) \leq u_m(x, y, \omega_k) \leq u_{\delta_{2m}}(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y, \omega_k) \in \bar{D} \times (\Omega, F, P), \quad (4.7)$$

Pelo fato desta metodologia também envolver o cálculo de normas, e estas terem um considerável custo computacional, recomenda-se em cada problema avaliar o desempenho utilizando-se mais de uma norma.

A partir das funções $u_{\delta_{1m}}(\cdot, \cdot, \cdot)$ e $u_{\delta_{2m}}(\cdot, \cdot, \cdot)$ de (4.6), obtidas para cada realização N , determinam-se os conjuntos dos limitantes inferiores e superiores para a resolução do sistema, indicados por $\{u_{\delta_{1m}}(x, y, \omega_k), u_{\delta_{2m}}(x, y, \omega_k)\}_{k=1}^N$, $\forall (x, y) \in \bar{D}$. E por consequência pode-se proceder a determinação das estimativas dos limitantes inferiores e superiores para o valor esperado e a autocor-

relação do processo de resposta.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mu_{u_{\delta_{1m}}}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{\delta_{1m}}(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \\ \mu_{u_{\delta_{2m}}}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{\delta_{2m}}(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mu_{u_{\delta_{1m}}}^2(x, y) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (u_{\delta_{1m}}(x, y, \omega_k))^2, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \\ \mu_{u_{\delta_{2m}}}^2(x, y) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (u_{\delta_{2m}}(x, y, \omega_k))^2, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Substituindo-se as equações (4.8) na equação (4.7), obtém-se limitantes inferiores e superiores para o valor esperado e a autocorreção do processo de resposta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{u_{\delta_{i_1m}}}(x, y) \leq \mu_{u_m}(x, y) \leq \mu_{u_{\delta_{i_2m}}}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}, \quad i = 1, \dots, 4; \\ \mu_{u_{\delta_{i_1m}}}^2(x, y) \leq \mu_{u_m}^2(x, y) \leq \mu_{u_{\delta_{i_2m}}}^2(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}, \quad i = 1, \dots, 4. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Para a verificação da precisão e da eficiência na convergência da presente metodologia, compara-se a mesma ao método de simulação de *Monte-Carlo* com relação ao valor esperado e a autocorrelação. Para verificar esses elementos, as funções desvio relativo, em termos de valor esperado e autocorrelação, serão utilizadas funções similares as definidas em (3.80) e (3.81), respectivamente.

4.2 Metodologia de *Monte Carlo* - *Neumann*, mista 1

Nesta metodologia utiliza-se princípios de ambas as metodologias utilizadas por *Ávila & Beck* em (2014) e (2015a), onde parte-se da aproximação da inversa da matriz $(I - \mathcal{P}(\omega_k))$ dada por $(\lambda_1 I + \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k))$, isto é, assume-se a igualdade $(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} = \lambda_1 I + \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k)$, com (λ_1, λ_2) dois parâmetros a serem determinados. A partir desta aproximação estabelece-se um sistema de cotas.

Nas condições descritas, uma solução aproximada para o problema de flexão transversal de placas é dado por: $u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k) = [(\lambda_1 I + \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k))U_0]^T \Phi(x, y)$. Procurando-se estabelecer um sistema de cotas determina-se a distância entre $u_m = u_m(x, y, \omega_k)$, descrita em (4.1), e $u_{m1\lambda} = u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k)$.

$$\begin{aligned} & |u_m(x, y, \omega_k) - u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k)| = \\ & = |[(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} - (\lambda_1 I + \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k))]U_0]^T \Phi(x, y)| \\ & \leq \|[(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} - (\lambda_1 I + \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\ & = \|[(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} - (I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}(I - \mathcal{P}(\omega_k))(\lambda_1 I + \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}[I - (I - \mathcal{P}(\omega_k))(\lambda_1 I + \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\
&= \|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}[I - \lambda_1 I - \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k) + \lambda_1 \mathcal{P}(\omega_k) + \lambda_2 \mathcal{P}^2(\omega_k)]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\
&= \|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}[I - \lambda_1(I - \mathcal{P}(\omega_k)) - \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\
&\leq \|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}\| \|[I - \lambda_1((I - \mathcal{P}(\omega_k)) - \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k))(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\|.
\end{aligned}$$

No intuito de minimizar a distância entre as soluções u_m e $u_{m1\lambda}$ necessita-se minimizar o limitador $\|[I - \lambda_1(I - \mathcal{P}(\omega_k)) - \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\|$, proveniente da diferença $|u_m(x, y, \omega_k) - u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k)|$. Observa-se que isso deve ser feito a partir da minimização do operador:

$$f_1(\lambda_1, \lambda_2) = \|[I - \lambda_1(I - \mathcal{P}(\omega_k)) - \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \quad (4.10)$$

Minimizar o operador (4.10) é equivalente a minimizar o operador:

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \|[I - \lambda_1(I - \mathcal{P}(\omega_k)) - \lambda_2 \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\|^2. \quad (4.11)$$

Conforme já foi provado no *capítulo 2* deste trabalho, a função f definida em (4.11) é não negativa e convexa. Desta forma, ela admite um minimizador global o qual é dado por $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ que satisfaz a equação $\nabla f(\lambda_1, \lambda_2) = 0$. Pode-se observar que o operador f da equação (4.11) é igual ao operador (3.63) obtido por *Ávila & Beck (2015a)*, na metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ . No entanto, obteve-se este operador por meio de caminhos diferentes. Sendo assim a metodologia de cotas, nesta passagem, recai no mesmo problema da metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ , para a determinação dos valores de $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$.

Definindo $Q_1 = (I - \mathcal{P})U_0$ e $Q_2 = \mathcal{P}(I - \mathcal{P})U_0$, chega-se aos valores de $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ como sendo:

$$\begin{cases} \lambda_1^* = \frac{Q_1^T U_0 - Q_1^T Q_2 \lambda_2^*}{Q_1^T Q_1}, \\ \lambda_2^* = \frac{Q_1^T Q_1 Q_2^T U_0 - Q_1^T Q_2 Q_1^T U_0}{Q_1^T Q_1 Q_2^T Q_2 - Q_1^T Q_2 Q_1^T Q_2}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Além disso renomeando mais alguns termos de (4.12):

$$Q_1^T U_0 = Q_{10}, \quad Q_1^T Q_1 = Q_{11} \text{ e } Q_1^T Q_2 = Q_{12},$$

pode-se reescrever (4.12) como:

$$\begin{cases} \lambda_1^* = \frac{Q_{10} - Q_{12}\lambda_2^*}{Q_{11}}; \\ \lambda_2^* = \frac{Q_{11}Q_2^T U_0 - Q_{12}Q_{10}}{Q_{11}Q_2^T Q_2 - Q_{12}Q_{12}}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Como os valores de $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ de (4.13) satisfazem a igualdade:

$$\min_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2} f(\lambda_1, \lambda_2) = \min_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2} f_1(\lambda_1, \lambda_2) \quad (4.14)$$

Com isso, é possível limitar a distância $|u_m(x, y, \omega_k) - u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k)|$:

$$\begin{aligned} & |u_m(x, y, \omega_k) - u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k)| \\ & \leq \|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}\| \|[I - \lambda_1^*(I - \mathcal{P}(\omega_k)) - \lambda_2^* \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\ & \leq \frac{1}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \|[I - \lambda_1^*(I - \mathcal{P}(\omega_k)) - \lambda_2^* \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \end{aligned}$$

Definindo-se $\rho_2 = \|[I - \lambda_1^*(I - \mathcal{P}(\omega_k)) - \lambda_2^* \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| = \|U_0 - \lambda_1^* Q_1 - \lambda_2^* Q_2\|$, obtém-se:

$$|u_m(x, y, \omega_k) - u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k)| \leq \rho_2 \frac{1}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \|\Phi(x, y)\| \quad (4.15)$$

Da inequação (4.15) obtém-se:

$$u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k) - \frac{\rho_2}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \|\Phi(x, y)\| \leq u_m(x, y, \omega_k) \leq u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k) + \frac{\rho_2}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \|\Phi(x, y)\| \quad (4.16)$$

Tomando-se $u_{\delta_{1\lambda}}(\cdot, \cdot, \cdot)$ e $u_{\delta_{2\lambda}}(\cdot, \cdot, \cdot)$, respectivamente, como sendo as cotas inferior e superior de $u_m(\cdot, \cdot, \cdot)$ definidas por:

$$\begin{cases} u_{\delta_{1\lambda}}(x, y, \omega_k) = u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k) - \rho_2 \frac{1}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \|\Phi(x, y)\| \\ u_{\delta_{2\lambda}}(x, y, \omega_k) = u_{m1\lambda}(x, y, \omega_k) + \rho_2 \frac{1}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \|\Phi(x, y)\|, \end{cases} \quad (4.17)$$

segue da inequação (4.16), para a k -ésima realização do processo de resposta do problema estocástico que:

$$u_{\delta_{1\lambda}}(x, y, \omega_k) \leq u_m(x, y, \omega_k) \leq u_{\delta_{2\lambda}}(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y, \omega_k) \in \bar{D} \times (\Omega, F, P), \quad (4.18)$$

Considerando-se o conjunto de realizações das cotas do sistema, $\{u_{\delta_{1\lambda}}(x, \omega_k), u_{\delta_{2\lambda}}(x, \omega_k)\}_{k=1}^N$, onde N representa o número de realizações. É possível obter, de forma similar a metodologia anterior, os limitantes (cotas) inferiores e superiores para o valor esperado e autocorrelação do

processo de resposta, conforme segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mu_{u_{\delta_{1\lambda}}}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{\delta_{1\lambda}}(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \\ \mu_{u_{\delta_{2\lambda}}}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{\delta_{2\lambda}}(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mu_{u_{\delta_{1\lambda}}}^2(x, y) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (u_{\delta_{1\lambda}}(x, y, \omega_k))^2, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \\ \mu_{u_{\delta_{2\lambda}}}^2(x, y) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (u_{\delta_{2\lambda}}(x, y, \omega_k))^2, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Substituindo-se as equações (4.19) na equação (4.18), obtém-se limitantes inferiores e superiores para valor esperado e autocorreção do processo de resposta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{u_{\delta_{i_1\lambda}}}(x, y) \leq \mu_{u_m}(x, y) \leq \mu_{u_{\delta_{i_2\lambda}}}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}, \quad i = 1, \dots, 4; \\ \mu_{u_{\delta_{i_1\lambda}}}^2(x, y) \leq \mu_{u_m}^2(x, y) \leq \mu_{u_{\delta_{i_2\lambda}}}^2(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}, \quad i = 1, \dots, 4. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Outra vez, para a verificação da precisão e da eficiência na convergência da presente metodologia, compara-se a mesma ao método de simulação de *Monte-Carlo* com relação ao valor esperado e a autocorrelação. Para verificar estes elementos, as funções desvio relativo, em termos do valor esperado e da autocorrelação, serão utilizadas funções similares as definidas em (3.80) e (3.81), respectivamente.

4.3 Metodologia de *Monte Carlo* - *Neumann*, mista 2

Nesta metodologia utiliza-se os mesmos princípios da metodologia anterior. Parte-se da aproximação de $(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}$ dada pela igualdade $(I - \mathcal{P}(\omega_k))_1^{-1} = I + \alpha \mathcal{P}(\omega_k)$, com isso uma solução aproximada do problema é dada por, $u_{m\alpha}(x, y, \omega_k) = [(I + \alpha \mathcal{P}(\omega_k))U_0]^T \Phi(x, y)$, sendo α um parâmetro a ser determinado. Na sequência, determina-se um limitante para a distância entre $u_m = u_m(x, y, \omega_k)$ descrita em (4.1) e $u_{m\alpha} = u_{m\alpha}(x, y, \omega_k)$, para posteriormente estabelecer-se cotas para a solução exata, u_m :

$$\begin{aligned} & |u_m(x, y, \omega_k) - u_{m\alpha}(x, y, \omega_k)| = \\ & = |[(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}U_0]^T \Phi(x, y) - [(I + \alpha \mathcal{P}(\omega_k))U_0]^T \Phi(x, y)| \\ & = |[((I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} - (I + \alpha \mathcal{P}(\omega_k)))U_0]^T \Phi(x, y)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|[(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} - (I + \alpha\mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\
&= \|[(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1} - (I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}(I - \mathcal{P}(\omega_k))(I + \alpha\mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\
&= \|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}[I - (I - \mathcal{P}(\omega_k))(I + \alpha\mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\
&= \|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}[\mathcal{P}(\omega_k) - \alpha\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\
&\leq \|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}\| \|[\mathcal{P}(\omega_k) - \alpha\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\|
\end{aligned}$$

Objetivando-se minimizar o limitador $\|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}\| \|[\mathcal{P}(\omega_k) - \alpha\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\|$, da distância entre as soluções u_m e $u_{m\alpha}$, observa-se que o mesmo pode ser feito a partir da minimização do operador:

$$g_1(\alpha) = \|[\mathcal{P}(\omega_k) - \alpha\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \quad (4.21)$$

Observa-se que minimizar o operador (4.21) é equivalente a minimizar o operador:

$$g(\alpha) = \frac{1}{2} \|[\mathcal{P}(\omega_k) - \alpha\mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\|^2 \quad (4.22)$$

Como g , definida em (4.22) é uma função não negativa e convexa, ela admite um minimizador global. Para minimizar a função g basta determinar α tal que $\frac{dg(\alpha)}{d\alpha} = 0$. Impondo que $\frac{dg(\alpha)}{d\alpha} = 0$, obtém-se $\alpha = \alpha^* = \frac{Q^T \mathcal{P}(\omega_k) U_0}{Q^T Q}$, sendo $Q = \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))U_0$. Como α^* , satisfaz a igualdade:

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}} g_1(\alpha) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} g(\alpha), \quad (4.23)$$

é possível limitar a distância $|u_m(x, y, \omega_k) - u_{m\alpha}(x, y, \omega_k)|$ por:

$$\begin{aligned}
&|u_m(x, y, \omega_k) - u_{m\alpha}(x, y, \omega_k)| \\
&\leq \|(I - \mathcal{P}(\omega_k))^{-1}\| \|[\mathcal{P}(\omega_k) - \alpha^* \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\| \\
&\leq \frac{1}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \|[\mathcal{P}(\omega_k) - \alpha^* \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| \|\Phi(x, y)\|
\end{aligned}$$

Tomando-se $\rho_3 = \|[\mathcal{P}(\omega_k) - \alpha^* \mathcal{P}(\omega_k)(I - \mathcal{P}(\omega_k))]U_0\| = \|\mathcal{P}(\omega_k)U_0 - \alpha^* Q U_0\|$, obtém-se:

$$|u_m(x, y, \omega_k) - u_{m\alpha}(x, y, \omega_k)| \leq \rho_3 \frac{1}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \|\Phi(x, y)\| \quad (4.24)$$

Da inequação (4.24) segue:

$$u_{m\alpha}(x, y, \omega_k) - \frac{\rho_3}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \|\Phi(x, y)\| \leq u_m(x, y, \omega_k) \leq u_{m\alpha}(x, y, \omega_k) + \frac{\rho_3}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \|\Phi(x, y)\| \quad (4.25)$$

Tomando-se $u_{\delta_{1\alpha}}(\cdot, \cdot, \cdot)$ e $u_{\delta_{2\alpha}}(\cdot, \cdot, \cdot)$, respectivamente, como sendo as cotas inferior e superior de $u_m(\cdot, \cdot, \cdot)$ definidas por:

$$\begin{cases} u_{\delta_{1\alpha}}(x, y, \omega_k) = u_{m\alpha}(x, y, \omega_k) - \rho_3 \frac{1}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \|\Phi(x, y)\| \\ u_{\delta_{2\alpha}}(x, y, \omega_k) = u_{m\alpha}(x, y, \omega_k) + \rho_3 \frac{1}{1 - \|\mathcal{P}(\omega_k)\|} \|\Phi(x, y)\|, \end{cases} \quad (4.26)$$

segue da inequação (4.25), para a k -ésima realização do processo de resposta do problema estocástico que,

$$u_{\delta_{1\alpha}}(x, y, \omega_k) \leq u_m(x, y, \omega_k) \leq u_{\delta_{2\alpha}}(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y, \omega_k) \in \bar{D} \times (\Omega, F, P), \quad (4.27)$$

A partir do conjunto de realizações das cotas, $\{u_{\delta_{1\alpha}}(x, y, \omega_k), u_{\delta_{2\alpha}}(x, y, \omega_k)\}_{k=1}^N$, onde N representa o número de realizações do problema estocástico, é possível obter-se as cotas inferiores e superiores para valor esperado e autocorrelação do processo de resposta, conforme segue:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{aligned} \mu_{u_{\delta_{1\alpha}}}(x, y) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{\delta_{1\alpha}}(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \\ \mu_{u_{\delta_{2\alpha}}}(x, y) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_{\delta_{2\alpha}}(x, y, \omega_k), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} \mu_{u_{\delta_{1\alpha}}}^2(x, y) &= \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (u_{\delta_{1\alpha}}(x, y, \omega_k))^2, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}; \\ \mu_{u_{\delta_{2\alpha}}}^2(x, y) &= \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (u_{\delta_{2\alpha}}(x, y, \omega_k))^2, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}. \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (4.28)$$

Substituindo-se as equações (4.28) na equação (4.27), obtém-se limitantes inferiores e superiores para valor esperado e autocorrelação do processo de resposta:

$$\begin{cases} \mu_{u_{\delta_{i1\alpha}}}(x, y) \leq \mu_{u_m}(x, y) \leq \mu_{u_{\delta_{i2\alpha}}}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}, \quad i = 1, \dots, 4; \\ \mu_{u_{\delta_{i1\alpha}}}^2(x, y) \leq \mu_{u_m}^2(x, y) \leq \mu_{u_{\delta_{i2\alpha}}}^2(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}, \quad i = 1, \dots, 4. \end{cases} \quad (4.29)$$

Similarmente aos procedimentos adotados nas demais metodologias envolvendo o estabelecimentos de cotas. Para a verificação da precisão e da eficiência na convergência da presente metodologia, compara-se a mesma ao método de simulação de *Monte-Carlo* com relação ao valor esperado e a autocorrelação. Serão utilizadas funções similares as definidas em (3.80) e (3.81), para a verificar-se os desvios relativos em termos do valor esperado e da autocorrelação, respectivamente.

Capítulo 5

Simulações numéricas aplicadas ao problema de flexão da placa de Kirchhoff apoiada sobre uma base de Winkler

Este capítulo é dedicado a simulação numérica do problema de flexão da placa de Kirchhoff estocástica, simplesmente apoiada, apoiada em fundação de Winkler. Para tanto aplica-se, inicialmente, as duas metodologias propostas por *Ávila & Beck* (2014), (2015a) e (2015b) em seus trabalhos, *Monte Carlo - Neumann λ* e *Monte Carlo - Neumann* com estabelecimento de cotas. Além disso são feitas simulações numéricas para três novas propostas de metodologias, aplicadas ao mesmo problema. Todas as cinco metodologias estão descritas nos *capítulos 3* e *4* deste trabalho.

O problema foi separado em duas partes: na primeira parte (*caso 1:*) considerou-se a incerteza sobre a rigidez da placa, isto é, sobre o parâmetro $\alpha(x, y, \omega)$; e na segunda parte (*caso 2:*) a incerteza foi assumida sobre a rigidez da fundação, ou seja, sobre o parâmetro $\kappa_w(x, y, \omega)$. Cada caso foi analisado separadamente.

A formulação matemática, do problema de placa estudado, é descrita por:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha \cdot \Delta u(x, y, \omega)) + \kappa_w u(x, y, \omega) = q(x, y), & \forall (x, y, \omega) \in D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \\ u(x, y, \omega) = 0, & \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \\ \Delta u(x, y, \omega) = 0, & \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \end{cases} \quad (5.1)$$

onde, $\alpha = \alpha(x, y, \omega)$ e $\kappa_w = \kappa_w(x, y, \omega)$ são coeficientes de rigidez a placa e a base de apoio, respectivamente, $u = u(x, y, \omega)$ representa o deslocamento transversal da placa sobre o domínio D e $q = q(x, y)$ o carregamento, que neste problema foi considerado determinístico.

No presente problema numérico considera-se o domínio D dado pelo conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq L_x \text{ e } 0 \leq y \leq L_y\}$, com $L_x = 1\text{m}$ e $L_y = 2\text{m}$ e o carregamento $q(x, y) = 1000 \text{ N/m}^2$, uniformemente distribuído sobre a placa. Nos dois casos analisados (*caso 1:*) e (*caso 2:*), a incerteza foi modelada por processos estocásticos parametrizadas, conforme descrito em *Ávila &*

Beck (2010), desta forma:

$$\begin{aligned} \alpha(x, y, \omega) = \mu_\alpha(x, y) + \frac{\sigma_\alpha}{2} & \left[\xi_1(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \xi_2(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) \right. \\ & \left. + \xi_3(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) + \xi_4(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) \right] \quad \forall (x, y, \omega) \in \bar{D} \times \Omega, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \kappa_w(x, y, \omega) = \mu_\kappa(x, y) + \frac{\sigma_\kappa}{2} & \left[\zeta_1(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \zeta_2(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) \right. \\ & \left. + \zeta_3(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) + \zeta_4(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) \right] \quad \forall (x, y, \omega) \in \bar{D} \times \Omega. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Para a caracterização da incerteza, as amostras dos coeficientes, nos dois casos, foram definidas usando-se vetores aleatórios (randômicos). As componentes destes vetores, $\{\xi(\omega_k)\}$ e $\{\zeta(\omega_k)\}$, no presente problema toma-se variáveis aleatórias uniformes.

$$\{\xi(\omega_k)\}_{k=1}^N = \{\xi_1(\omega_k), \xi_2(\omega_k), \xi_3(\omega_k), \xi_4(\omega_k)\}_{k=1}^N,$$

$$\{\zeta(\omega_k)\}_{k=1}^N = \{\zeta_1(\omega_k), \zeta_2(\omega_k), \zeta_3(\omega_k), \zeta_4(\omega_k)\}_{k=1}^N.$$

As funções base, descritas na aplicação do método de Galerkin, utilizadas foram dadas pelo conjunto:

$$\Phi_m(x, y) = \text{span} \left[\left\{ \sin\left(\frac{s \cdot \pi \cdot x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{r \cdot \pi \cdot y}{L_y}\right) \right\}_{s,r=1}^{N_b} \right], \quad (5.4)$$

sendo $m = N_b^2$, com $m = \dim(\Phi_m)$, em ambos os casos considerou-se $N_b = 3$, sendo assim tem-se $m = 9$. As funções base satisfazem as condições de contorno do problema (5.1) para uma placa simplesmente apoiada. Caso as condições de contorno fossem diferentes outro conjunto de funções base teria que ser definido.

As amostras dos vetores aleatórios e as realizações do processo estocástico de deslocamento transversal da placa foram obtidas por funções do *Matlab R2012a*, em um computador Lenovo, com processador *Intel(R) Core(TM) i5-3320M CPU 2.60GHz*. Para reduzir a correlação espúria produzida pelo processo de geração dos vetores aleatórios programou-se, nesse ambiente, o método “Latin Hypercube Sampling”, *Olsson & Sandberg (2002)*. Nos exemplos, os resultados dos momentos estatísticos (valor esperado, autocorrelação e variância) foram obtidos por meio de um conjunto de trinta mil realizações do processo estocástico de resposta, ($N = 30000$).

5.1 Caso 1: Incerteza sobre a rigidez da placa, $\alpha = \alpha(x, y, \omega)$

Para a análise do *caso 1*, o coeficiente de rigidez da fundação $\kappa_w = \kappa_w(x, y)$ foi considerado determinístico, já o coeficiente de rigidez da placa $\alpha = \alpha(x, y, \omega)$ foi parametrizado pelo processo estocástico descrito em (5.2). Desta forma, para o presente caso, toma-se:

$$\alpha(x, y, \omega) = \mu_\alpha(x, y) + \frac{\sigma_\alpha(x, y)}{2} \left[\xi_1(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \xi_2(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \xi_3(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) + \xi_4(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) \right], \quad \forall (x, y, \omega) \in \bar{D} \times \Omega,$$

onde μ_α é o valor médio, σ_α é o desvio padrão da rigidez à flexão da placa. Os parâmetros determinísticos do problema, para este caso foram considerados como, $\mu_\alpha(x, y) = 2651 \text{ N.m}$, $\sigma_\alpha = \frac{1}{10} \cdot \mu_\alpha$ e $\kappa_w(x, y) = 1000 \text{ N/m}^3$, $\forall (x, y) \in D$.

Na sequência analisa-se a solução para o problema (5.1) em cada uma das cinco metodologias propostas neste trabalho e descritas nos *capítulos 3* e *4*.

5.1.1 Simulação via *Monte Carlo - Neumann* λ

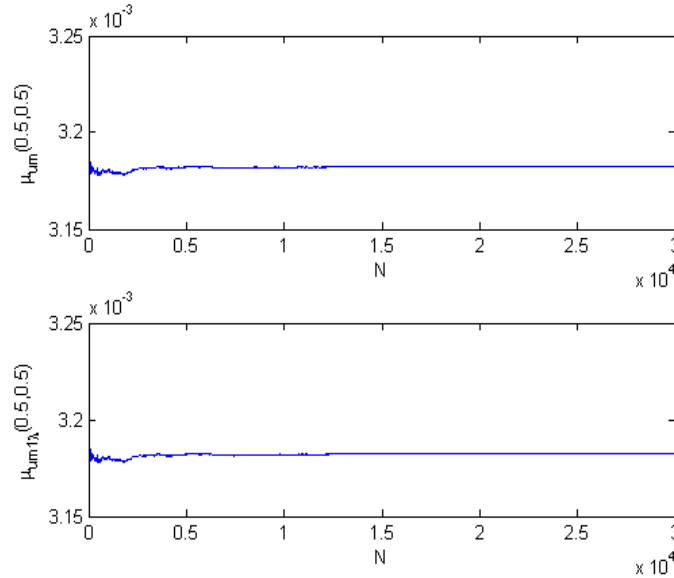


Figura 5.1: Evolução do valor esperado para o deslocamento via métodos de *Monte-Carlo* e *Monte Carlo - Neumann* λ , em $(x, y) = (0.5, 0.5)$.

Nas Figuras 5.1 e 5.2 apresentam-se, respectivamente, as representações gráficas dos comportamentos das estimativas do valor esperado, $\mu_{u_m}(0.5, 0.5)$ e $\mu_{u_{m\lambda}}(0.5, 0.5)$, e da variância, $\sigma_{u_m}^2(0.5, 0.5)$ e $\sigma_{u_{m\lambda}}^2(0.5, 0.5)$, em relação ao número N , de realizações do processo estocástico de deslocamento

transversal da placa, sendo a variável randômica $u_m(0.5, 0.5, \xi)$ relativo a solução exata do problema, pela metodologia de *Monte-Carlo* e $u_{m1\lambda}(0.5, 0.5, \xi)$ relativo a uma solução aproximada do problema, via metodologia de *Monte Carlo - Neumann λ* .

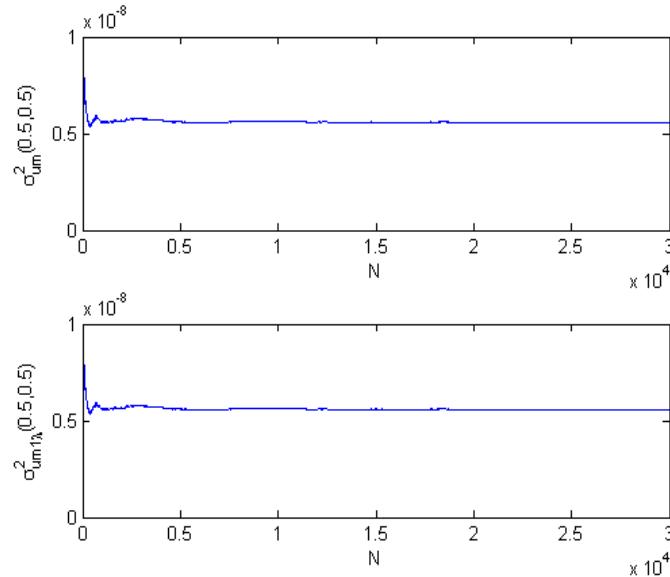
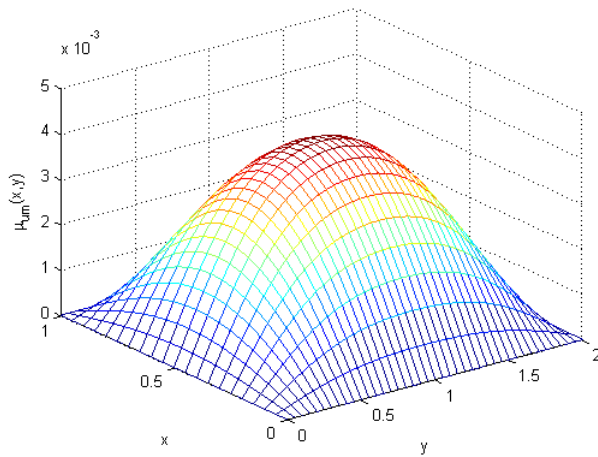
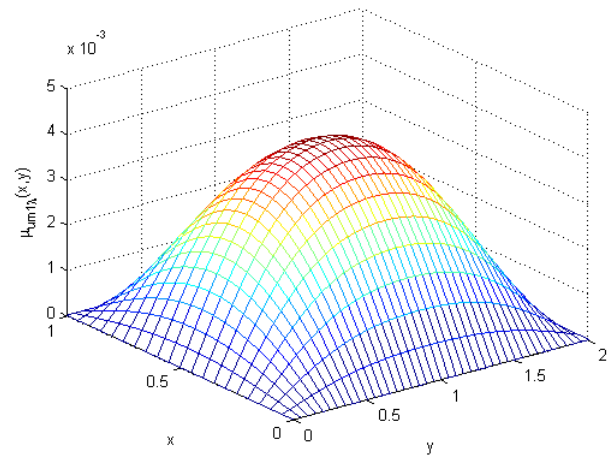


Figura 5.2: Evolução da variância do deslocamento via métodos de *Monte-Carlo* e *Monte Carlo - Neumann λ* , em $(x, y) = (0.5, 0.5)$.

Pode-se observar nas Figuras 5.1 e 5.2 que, para $N \geq 10000$, as estimativas do valor esperado e da variância das variáveis randômicas $u_m(0.5, 0.5, \xi)$ e $u_{m1\lambda}(0.5, 0.5, \xi)$ tendem a se estabilizarem. Em $(x, y) = (0.5, 0.5)$ obtém-se como valor esperado $\mu_{u_m}(0.5, 0.5) = 0.003182747060825$ m, $\mu_{u_{m1\lambda}}(0.5, 0.5) = 0.003182682256614$ m, e como variância, $\sigma_{u_m}^2(0.5, 0.5) = 5.558302018161017 \times 10^{-09}$ m e $\sigma_{u_{m1\lambda}}^2(0.5, 0.5) = 5.558631835701175 \times 10^{-09}$ m.



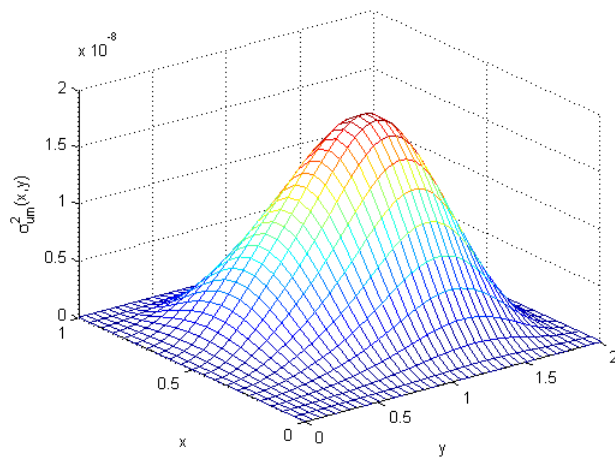
(a) Método *Monte-Carlo*



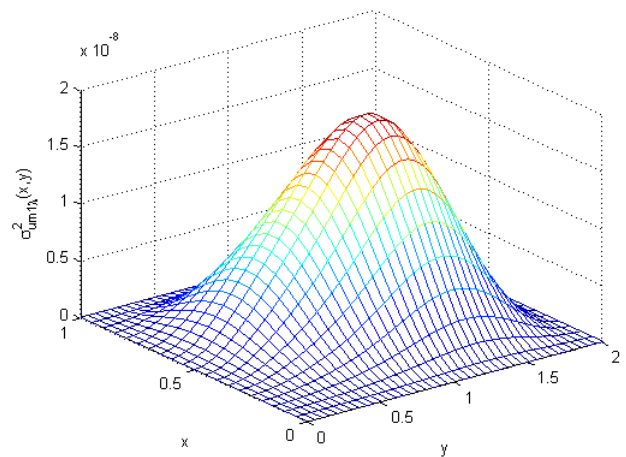
(b) Método *Monte Carlo - Neuman λ*

Figura 5.3: Funções valor esperado do deslocamento transversal da placa de Kirchhoff.

As Figuras 5.3 (a) e (b) são representações gráficas, das superfícies, do valor esperado para o deslocamento transversal da placa de Kirchhoff aplicando-se as metodologias de *Monte-Carlo* e *Monte Carlo - Neumann λ*, respectivamente. Percebe-se que o comportamento com relação as duas metodologias teve comportamento similar. O mesmo pode ser observado com relação a variância, quando analisadas as duas metodologias, conforme fica evidenciado nas Figuras 5.4 (a) e (b).



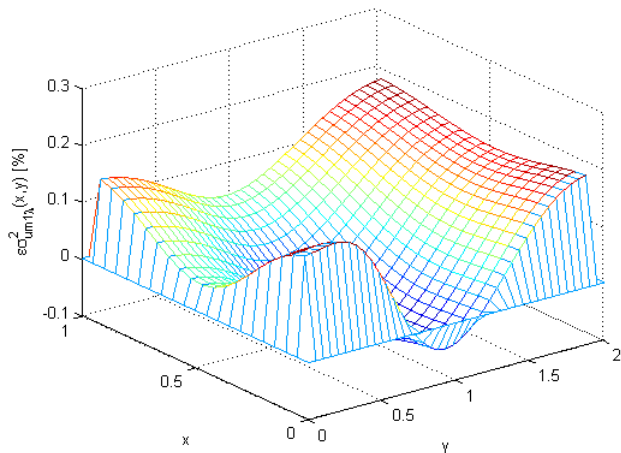
(a) Método *Monte-Carlo*



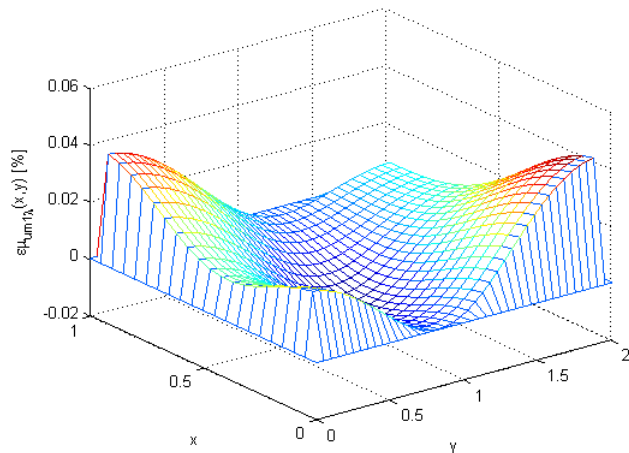
(b) Método *Monte Carlo - Neuman λ*

Figura 5.4: Funções variância do deslocamento transversal da placa de Kirchhoff.

A Figura 5.5 (a), mostra o desvio relativo quanto a variância na comparação da metodologia de *Monte Carlo - Neumann λ* com a metodologia de *Monte-Carlo*. O valor máximo (em módulo) deste desvio é dado por $\max_D\{|\epsilon_{\sigma_{u_{m1\lambda}}^2}(x,y)|\} = 0.187244323936053\%$. A Figura 5.5 (b) mostra o



(a) Desvio relativo da variância $\varepsilon_{\sigma_{m1\lambda}^2}(x, y)$



(b) Desvio relativo do valor esperado $\varepsilon_{\mu_{m1\lambda}}(x, y)$

Figura 5.5: Funções desvio relativo em termos da variância e do valor esperado.

desvio relativo quanto ao valor esperado na comparação das duas metodologias. O valor máximo (em módulo) deste desvio é dado por $\max_D\{|\varepsilon_{\mu_{m1\lambda}}(x, y)|\} = 0.042685933378084\%$. Pelas figuras é possível observar que o desvio relativo com relação ao valor esperado é ligeiramente menor do que o desvio relativo em relação a variância, sobre a placa. O mesmo é possível observar quando são analisados seus valores máximos.

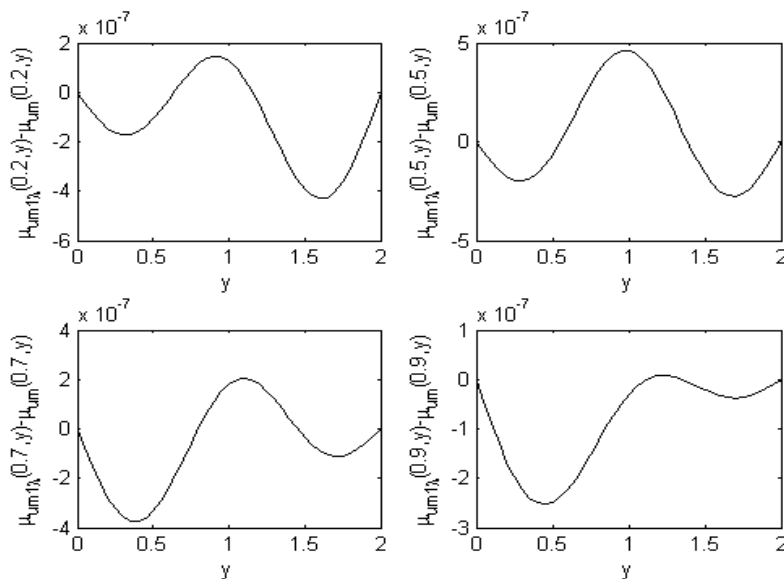


Figura 5.6: Função erro do valor esperado $\mu_{u_{m1\lambda}}(x, y) - \mu_{um}(x, y)$.

Para ilustrar o erro absoluto, com relação ao valor esperado entre os resultados obtidos via métodos de simulação de *Monte Carlo - Neumann λ* e *Monte-Carlo*, foram feitas representações

gráficas de algumas curvas definidas sobre a placa, fixando-se a variável x no conjunto de valores $\{0.2, 0.5, 0.7, 0.9\}$ e variando-se a variável y . A Figura 5.6 apresenta estas curvas que ilustram o erro absoluto quanto ao valor esperado. Neste quesito, observa-se que o erro com relação ao valor esperado fica na ordem de 10^{-7} . A Tabela 5.1 apresenta os tempos computacionais obtidos por

Metodologias	Tempo computacional (em segundos)
T_{MC}	731.48
T_{MCN_λ}	253.47

Tabela 5.1: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* (T_{MC}) e *Monte Carlo - Neumann λ* (T_{MCN_λ}).

meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* (T_{MC}) e *Monte Carlo - Neumann λ* (T_{MCN_λ}). Observa-se que o T_{MCN_λ} é ligeiramente menor que o tempo T_{MC} .

Com relação a precisão, conforme já observado nas representações gráficas dos momentos estatísticos e do desvio relativo na comparação das duas metodologias, percebe-se que os deslocamentos da placa obtidos com a aplicação da metodologia de *Monte Carlo - Neumann λ* estão próximos dos deslocamentos obtidos com o uso do método de *Monte-Carlo*.

Observa-se também, que os desvios relativos, são maiores próximo às regiões de fronteira, justamente onde os deslocamentos são menores.

5.1.2 Simulação via *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas

Esta metodologia, proposta inicialmente a problemas de vigas por *Ávila & Beck* (2014) e (2015b), visa o estabelecimento de cotas inferiores e superiores para as realizações da aproximação numérica, via método de Galerkin, para o processo estocástico de deslocamento transversal da placa de Kirchhoff. A partir do conjunto de realizações destas cotas, são obtidas as cotas para as estimativas dos momentos estatísticos (de valor esperado e de autocorrelação) do processo estocástico de resposta. A metodologia foi analisada em 4 normas, a saber, $i = 1, 2, 3, 4$.

A Figura 5.7, apresenta curvas das funções valor esperado para deslocamento via metodologia de *Monte-Carlo*, μ_{u_m} , e estimativas por cotas inferiores e superiores, via metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, $\mu_{u_{\delta i_1}}(0.2, y)$ e $\mu_{u_{\delta i_2}}(0.2, y)$, usando-se as normas $i = 2$ (norma euclidiana) e $i = 4$ (norma de Frobenius). As simulações das curvas foram obtidas fixando-se a variável x em $x = 0.2$ e variando-se y .

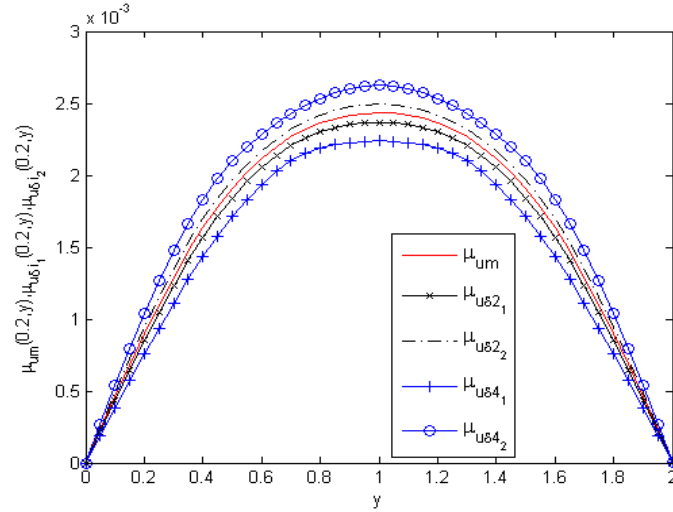
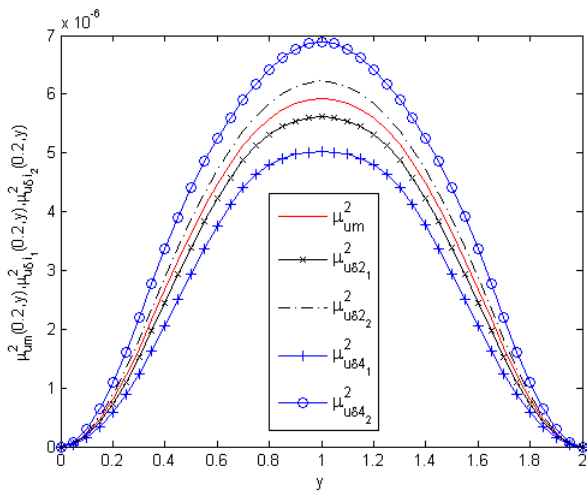
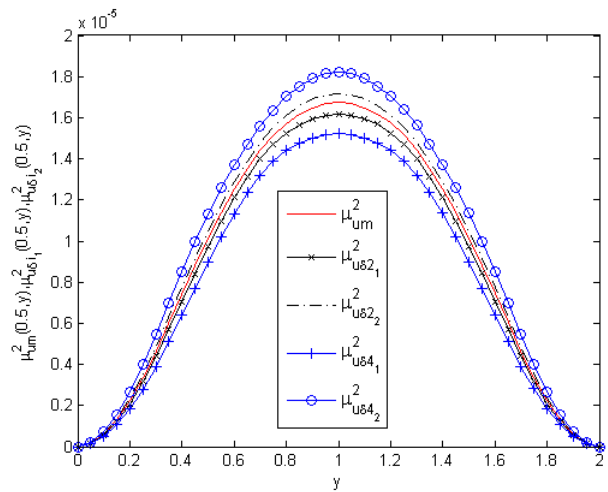


Figura 5.7: Funções valor esperado μ_{u_m} , $\mu_{u_{\delta i_1}}$ e $\mu_{u_{\delta i_2}}$, em $(x, y) = (0.2, y)$, nas normas $i = 2, 4$.



(a) Curvas de autocorrelação em $(x, y) = (0.2, y)$

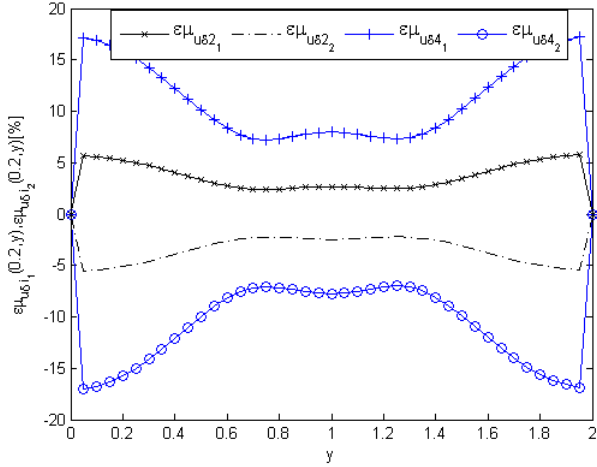


(b) Curvas de autocorrelação em $(x, y) = (0.5, y)$

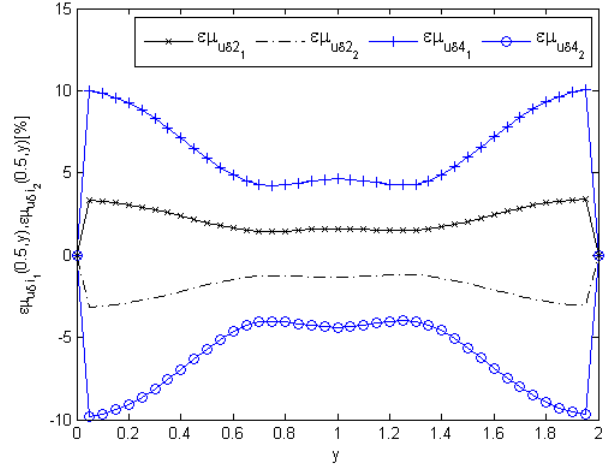
Figura 5.8: Funções de autocorrelação $\mu_{u_m}^2$, $\mu_{u_{\delta i_1}}^2$ e $\mu_{u_{\delta i_2}}^2$, nas normas $i=2, 4$.

As Figuras 5.8 (a) e (b), representam curvas das funções de autocorrelação $\mu_{u_m}^2(x, y)$, $\mu_{u_{\delta i_1}}^2(x, y)$ e $\mu_{u_{\delta i_2}}^2(x, y)$, em $x = 0.2, 0.5$, determinadas nas normas $i=2, 4$. Percebe-se que os valores da autocorrelação ficam na ordem de 10^{-6} e com comportamentos similares em $x = 0.2$ e $x = 0.5$.

Nas Figuras 5.9 (a) e (b) representam-se o desvio relativo do valor esperado para a solução, por meio das estimativas $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_1}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_2}}}$, nas normas $i = 2$ e $i = 4$, na comparação da metodologia de *Monte Carlo - Neumann* com a metodologia de *Monte-Carlo*. Observa-se que na norma 2 os resultados são sensivelmente melhores se comparados com os resultados obtidos usando-se a norma de Frobenius ($i = 4$). Já na Figura 5.10 (a) têm-se, a representação de duas superfícies, na norma $i = 2$, dadas pelas funções $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2_1}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2_2}}}$, que representam o desvio relativo do valor esperado sobre



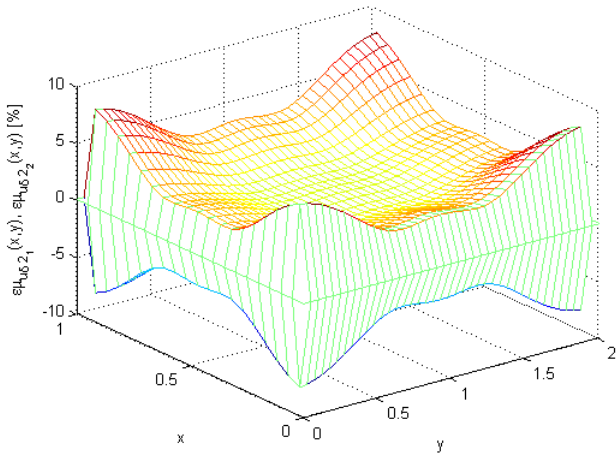
(a) Desvio do valor esperado em $(x, y) = (0.2, y)$



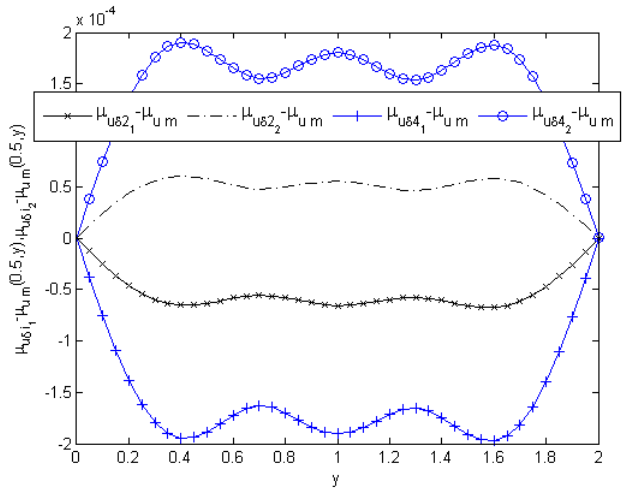
(b) Desvio do valor esperado em $(x, y) = (0.5, y)$

Figura 5.9: Funções desvio relativo do valor esperado $\epsilon_{\mu_{u\delta i_1}}$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta i_2}}$, nas normas $i=2, 4$.

a placa, dos limitantes inferiores e superiores, respectivamente. Observa-se que esse desvio relativo, na norma $i = 2$ chega a valores máximos próximo dos 10%, fato que também pode ser comprovado pelos valores de $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta 2_1}}(x, y)|\}$ com relação aos limitantes inferiores e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta 2_2}}(x, y)|\}$ com relação aos limitantes superiores, na norma 2, conforme Tabela 5.2.



(a) Desvio relativo do valor esperado, norma $i = 2$

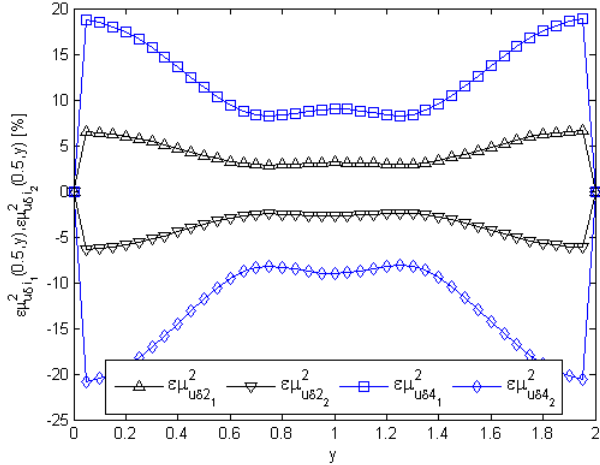


(b) Erro do valor esperado, normas $i = 2, 4$

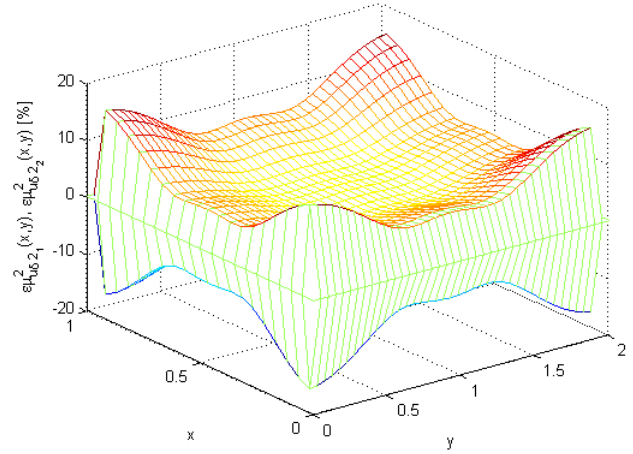
Figura 5.10: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.

A Figura 5.10 (b) representa graficamente as funções erro $\mu_{u\delta i_1} - \mu_{um}$ e $\mu_{u\delta i_2} - \mu_{um}$, em $(x, y) = (0.5, y)$, nas normas $i = 2, 4$. Observa-se, por essa simulação, que o erro do valor esperado assume valores máximos na ordem de 10^{-4} , enquanto, pela representação gráfica da Figura 5.7, o valor esperado assume valores máximos na ordem de 10^{-3} .

A Figura 5.11 (a) representa o desvio relativo, levando-se em consideração, respectivamente, as



(a) Desvio relativo da autocorreção, normas $i = 2, 4$



(b) Desvio relativo da autocorreção, norma $i = 2$

Figura 5.11: Funções desvio relativo da autocorreção.

cotas inferiores e superiores, das funções de autocorreção $\epsilon_{\mu_{u\delta i_1}^2}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta i_2}^2}(x, y)$, em $(x, y) = (0.5, y)$, nas normas $i = 2, 4$. Pode observar-se que usando a norma 2, as estimativas do desvio relativo são menores com relação ao uso da norma de Frobenius ($i = 4$), na Tabela 5.2 os respectivos valores máximos também obedecem esta relação. Na Figura 5.11 (b), onde estão representadas as superfícies do desvio relativo das funções de autocorreção $\epsilon_{\mu_{u\delta 2_1}^2}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta 2_2}^2}(x, y)$, sobre toda placa, na norma 2, observa-se que esse erro chega próximo aos 20%, fato também observado na Tabela 5.2, em seus valores máximos.

Cota	Valor esperado		Autocorreção	
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_1}^2}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_2}^2}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_1}^2}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_2}^2}(x, y) \}$
1	38.481844%	38.294296%	59.124403%	94.183084%
2	8.222167%	7.989742%	15.639740%	16.718704%
3	14.810851%	14.588197%	26.914535%	31.768423%
4	24.810532%	24.602709%	41.857906%	56.789428%

Tabela 5.2: Desvio relativo do valor esperado e da autocorreção da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, sobre o domínio D .

A Tabela 5.2 traz os valores máximos, em módulo, dos desvios relativos quanto ao valor esperado, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta i_1}^2}(x, y)|\}$ com relação aos limitantes inferiores e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta i_2}^2}(x, y)|\}$ com relação aos limitantes superiores e quanto a autocorreção, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta i_1}^2}(x, y)|\}$ com relação aos limitantes inferiores e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta i_2}^2}(x, y)|\}$ com relação aos limitantes superiores, nas quatro normas. Pode-se observar que os desvios são menores quando é utilizada a norma 2.

Na Tabela 5.3, ficam evidenciados os tempos de computação para a resolução do problema 5.1 usando-se a metodologia de *Monte-Carlo* e a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, para as quatro normas. Observa-se que os tempos computacionais da

segunda metodologia são muito próximos, independente da norma utilizada. Percebe-se também que os tempos computacionais usando-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, são menores na comparação com a metodologia *Monte-Carlo*.

Tempo computacional	(em segundos)			
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
742.99	276.56	280.13	287.33	280.86

Tabela 5.3: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , com estabelecimento de cotas, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

5.1.3 Simulação via *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante

Conforme feito na metodologia anterior, nesta metodologia também propõe-se o estabelecimento de cotas inferiores e superiores para o conjunto de realizações da solução do problema estocástico de deslocamento transversal da placa, usando o truncamento da série de Neumann em $n = 1$. A diferença da presente metodologia para a anterior, é basicamente o estabelecimento de outro limitante.

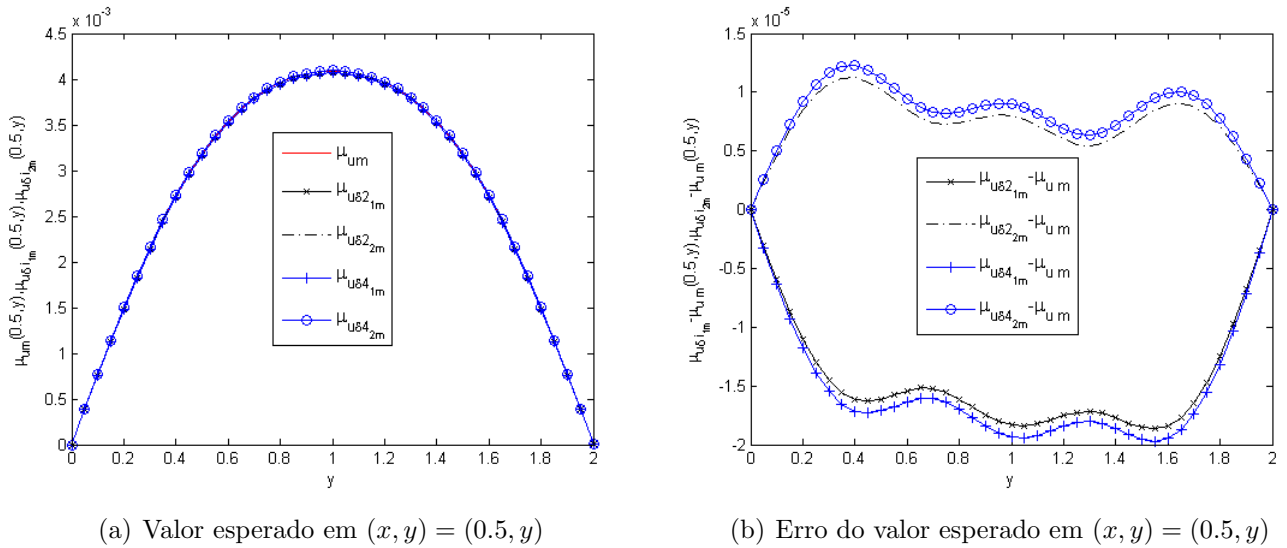
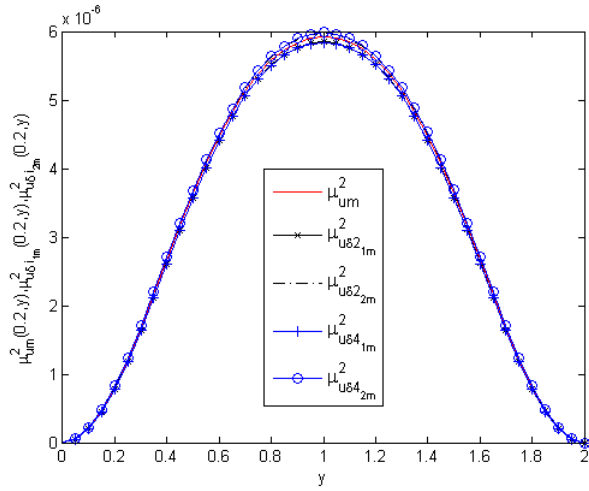


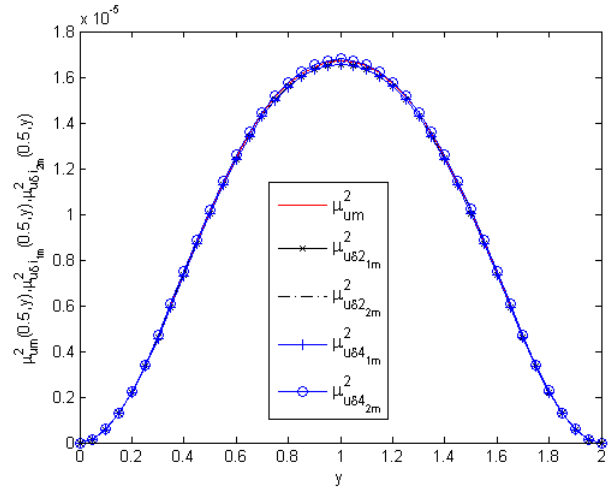
Figura 5.12: Funções valor esperado e erro do valor esperado nas normas $i = 2, 4$.

Na Figura 5.12 (a), ilustram-se curvas que representam as funções valor esperado para o deslocamento via metodologia de *Monte-Carlo* μ_{u_m} , e estimativas de cotas inferiores e superiores, via metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, $\mu_{u_{\delta i_{1m}}}$ e $\mu_{u_{\delta i_{2m}}}$, nas normas $i = 2, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Na Figura 5.12 (b) representam-se curvas, das funções erro $(\mu_{u_{\delta 2_{1m}}} - \mu_{u_m})(x, y)$ e $(\mu_{u_{\delta 2_{2m}}} - \mu_{u_m})(x, y)$, nas normas $i = 2, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Observa-se que as cotas na Figura 5.12 (a), ficaram mais próximas do deslocamento, obtido pelo método direto,

na comparação com as cotas da metodologia anterior. Fato que também fica evidenciado quando analisa-se o erro, simulado na Figura 5.12 (b).



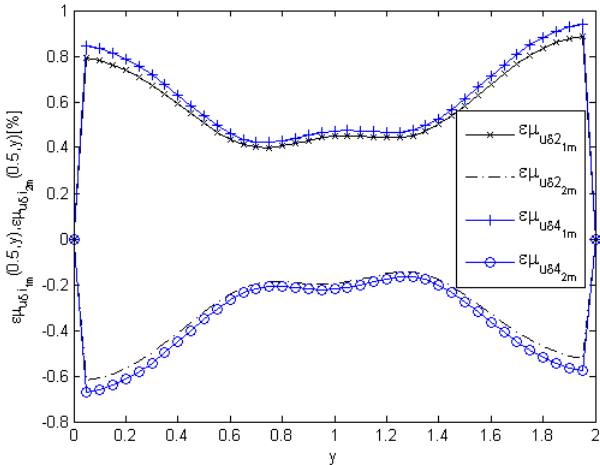
(a) Autocorrelação sobre a curva $(x, y) = (0.2, y)$



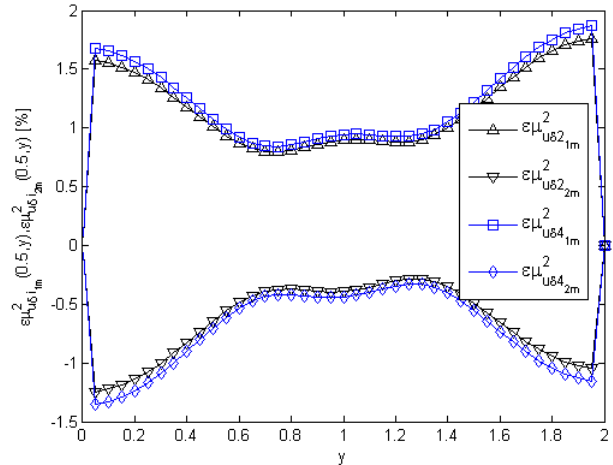
(b) Autocorrelação sobre a curva $(x, y) = (0.5, y)$

Figura 5.13: Funções de autocorrelação $\mu_{u_m}^2$, $\mu_{u_{\delta i_{1m}}}^2$ e $\mu_{u_{\delta i_{2m}}}^2$, nas normas $i=2, 4$.

Similarmente ao observado com relação as funções de valor esperado, nas funções de autocorrelação $\mu_{u_m}^2(x, y)$, $\mu_{u_{\delta i_{1m}}}^2(x, y)$ e $\mu_{u_{\delta i_{2m}}}^2(x, y)$ as curvas praticamente se sobrepõem, fato que fica evidenciado nas Figuras 5.13 (a) e (b), que representam as funções de autocorrelação nas normas $i=2, 4$, em $x = 0.2$ e $x = 0.5$, respectivamente.



(a) Desvio relativo do valor esperado



(b) Desvio relativo da autocorrelação

Figura 5.14: Funções desvios relativos nas normas $i=2, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$.

As Figuras 5.14 (a) e (b), respectivamente, representam graficamente as funções erros relativos do valor esperado e da autocorrelação relacionando-se as metodologias de *Monte Carlo - Neumann*,

com ajuste no limitante e *Monte-Carlo*, por meio das estimativas $\epsilon_{\mu_{u\delta i_{1m}}}$, $\epsilon_{\mu_{u\delta i_{2m}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta i_{1m}}^2}$, $\epsilon_{\mu_{u\delta i_{2m}}^2}$, nas normas $i = 2, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Observa-se que os erros relativos nas normas $i = 2, 4$ estão muito próximos, o mesmo pode ser observado com relação aos seus respectivos valores máximos sobre a placa, conforme Tabela 5.4.

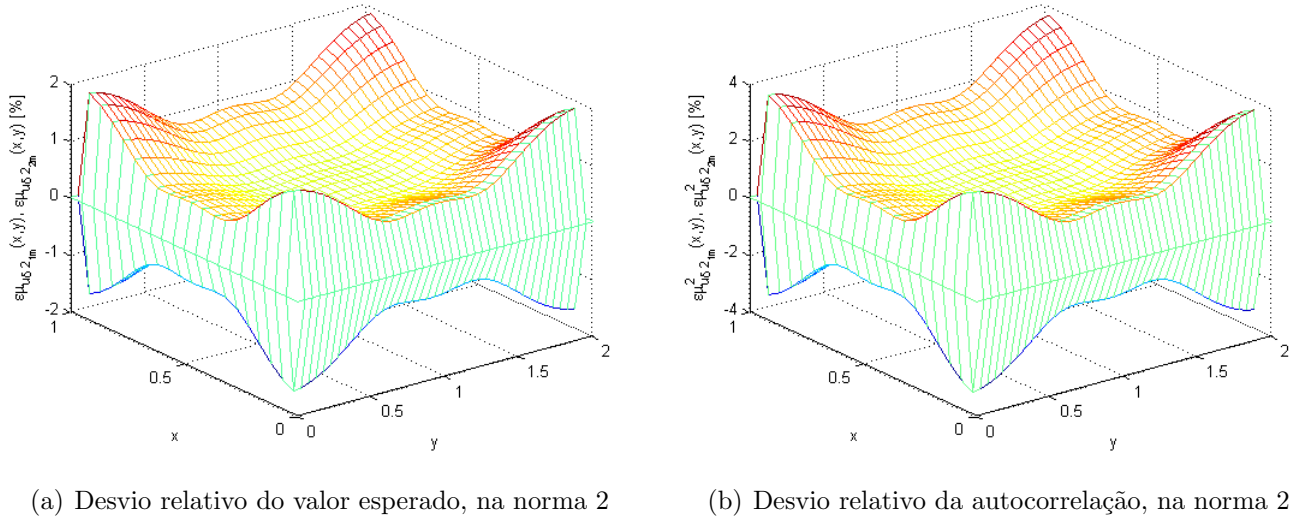


Figura 5.15: Funções desvios relativos, sobre a placa, na norma 2.

A Figura 5.15 (a) representa graficamente superfícies das funções desvio relativo do valor esperado $\epsilon_{\mu_{u\delta 2_{1m}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta 2_{2m}}}(x, y)$, definidas sobre a placa, relativos as cotas inferiores e superiores do valor esperado, na comparação das soluções aproximadas, via metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante e das soluções pelo método direto via metodologia de *Monte-Carlo*.

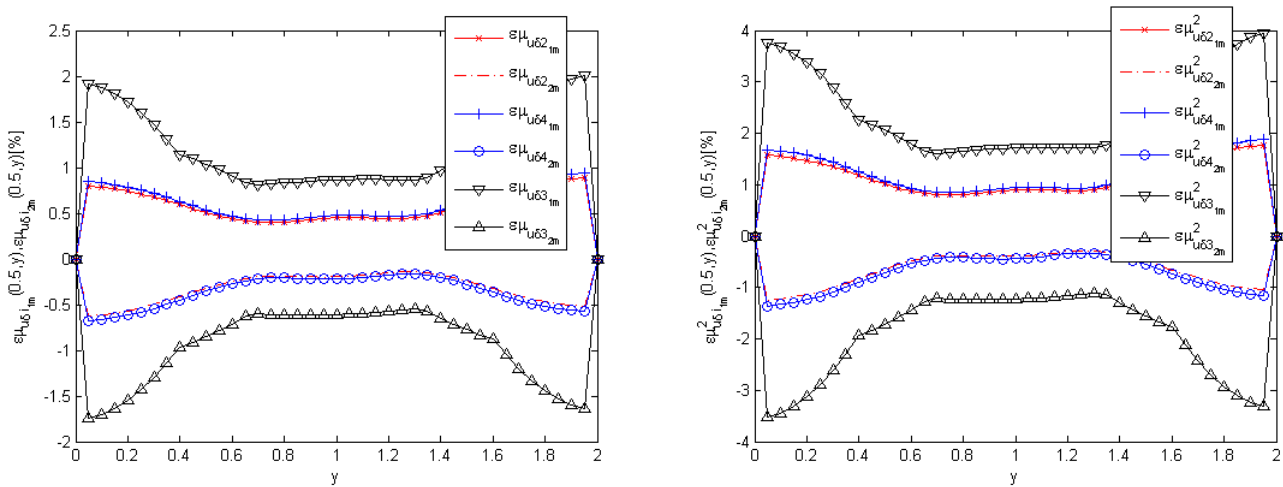
Já a Figura 5.15 (b) traz representações gráficas das funções de desvio relativo da autocorrelação $\epsilon_{\mu_{u\delta 2_{1m}}^2}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta 2_{2m}}^2}(x, y)$. Em ambos os casos as simulações foram feitas considerando-se a norma 2. Observa-se pelas representações gráficas das figuras Figura 5.15 (a) e (b) que os erros relativos de valor esperado chegam a valores máximos em torno dos 2% e os erros relativos de autocorrelação chegam a valores máximos em torno dos 4%. Esses dados também ficam evidenciados quando observa-se seus valores máximos, conforme aparece na Tabela 5.4.

Cota	Valor esperado		Autocorrelação	
	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_{1m}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_{2m}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_{1m}}^2}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_{2m}}^2}(x, y) \}$
1	28.616049%	28.401852%	44.923950%	68.894877%
2	1.945549%	1.701284%	3.832912%	3.445401%
3	5.295460%	5.054929%	10.111323%	10.547373%
4	2.078951%	1.834836%	4.090522%	3.720449%

Tabela 5.4: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, sobre o domínio D .

A Tabela 5.4 traz os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos quanto ao valor es-

perado, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta i_1 m}}(x, y)|\}$ com relação aos limitantes inferiores e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta i_2 m}}(x, y)|\}$ com relação aos limitantes superiores e quanto a autocorrelação, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta i_1 m}^2}(x, y)|\}$ com relação aos limitantes inferiores e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta i_2 m}^2}(x, y)|\}$ com relação aos limitantes superiores, nas quatro normas. Pode observar-se, nesta metodologia, que os desvios nas normas euclidiana e de Frobenius ($i = 2, 4$) são muito próximos, e ligeiramente inferiores aos desvios obtidos com a norma infinito ($i = 3$). Este fato, também fica evidenciado pelas Figuras 5.16 (a) e (b), onde observa-se a representação gráfica das funções desvio relativo quanto ao valor esperado e quanto a autocorrelação nas normas $i = 2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$.



(a) Desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$ (b) Desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$

Figura 5.16: Funções desvios relativos, nas normas $i = 2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$.

Na Tabela 5.5 evidenciam-se os tempos computacionais para a resolução do problema 5.1 usando-se o método direto, metodologia de *Monte-Carlo* e por meio da metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, nas quatro normas. Observa-se que os tempos computacionais da segunda metodologia são muito próximos, independente da norma utilizada. Percebe-se também que os tempos computacionais usando-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, tem um ganho considerável se comparado com a metodologia *Monte-Carlo*.

Tempo computacional	(em segundos)			
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
754.86	250,48	245.27	247.99	245.03

Tabela 5.5: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , com ajuste no limitante, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$

Na aplicação desta metodologia, o valor máximo do desvio relativo do valor esperado é igual a 1.9455% na norma euclidiana ($i = 2$), norma em que foram obtidos os melhores resultados. O que mostra que a metodologia produz resultados melhores que a metodologia anterior.

5.1.4 Simulação via *Monte Carlo* - *Neumann*, mista 1

Esta metodologia, similarmente as duas metodologias anteriores, também trabalha com o estabelecimento de cotas superiores e inferiores para as realizações de aproximação numérica do deslocamento transversal da placa de Kirchhoff.

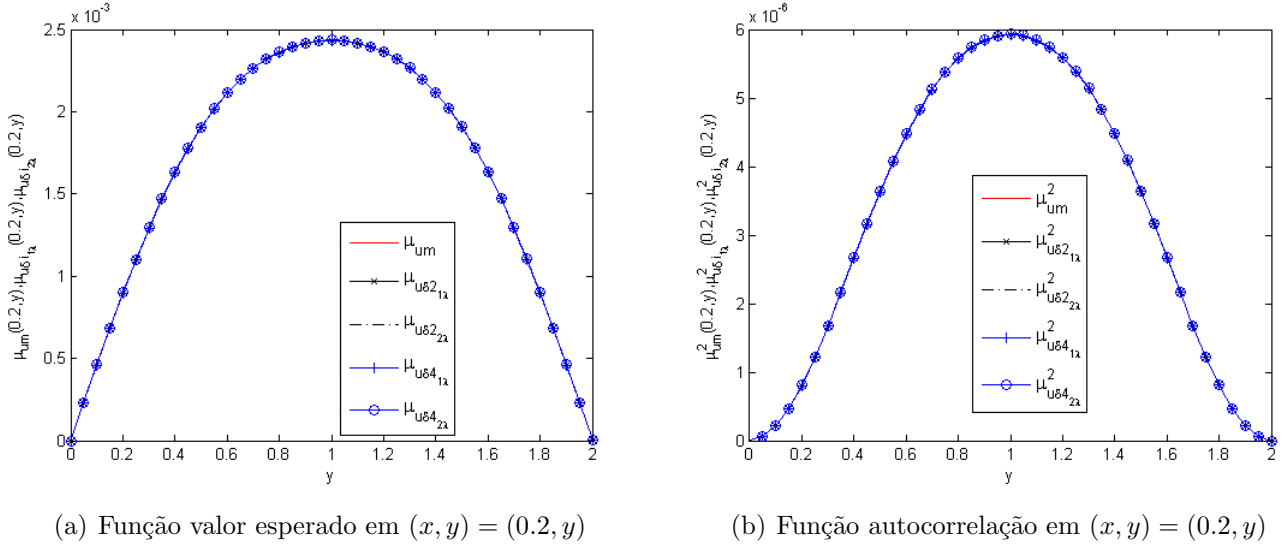
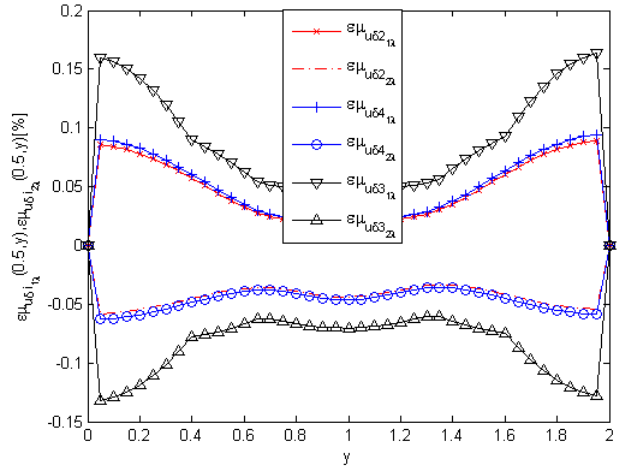
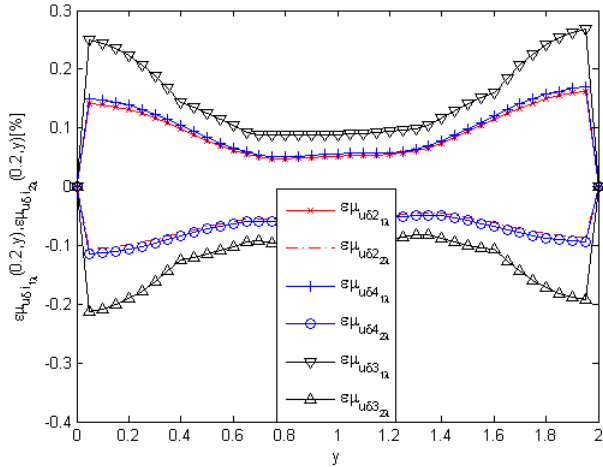


Figura 5.17: Funções de valor esperado μ_{u_m} , $\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}$ e $\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}$ e de autocorrelação $\mu_{u_m}^2$, $\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}^2$ e $\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}^2$, nas normas $i = 2, 4$.

A Figura 5.17 (a), representa graficamente curvas das funções do valor esperado, via metodologia de *Monte-Carlo*, através da função μ_{u_m} , e das estimativas de cotas inferiores e superiores via metodologia de *Monte Carlo* - *Neumann*, mista 1, através das funções $\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}$ e $\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}$, nas normas $i = 2, 4$. Já a Figura 5.17 (b), representa graficamente as funções de autocorrelação $\mu_{u_m}^2(x, y)$, $\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}^2(x, y)$ e $\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}^2(x, y)$ também nas normas $i=2, 4$. Nas duas situações percebe-se que as curvas praticamente se sobrepõem. Esse fato ocorre devido as soluções serem muito próximas, com erros de aproximação muito pequenos em relação aos deslocamentos.

As Figuras 5.18 (a) e (b) representam graficamente as funções desvio relativo do valor esperado, em $x = 0.2$ e $x = 0.5$, respetivamente, na comparação das soluções obtidas pelas metodologias de *Monte Carlo* - *Neumann*, mista 1 e de *Monte-Carlo*, por meio das estimativas $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}}$, nas normas $i = 2, 3, 4$. Pode-se observar nessas simulações que os erros relativos, usando-se as normas $i = 2, 4$ são muito próximos, já os erros relativos usando-se a norma $i = 3$ são ligeiramente maiores. Este fato também pode ser verificado observando-se os valores máximos (em módulo) dessas funções na Tabela 5.6.

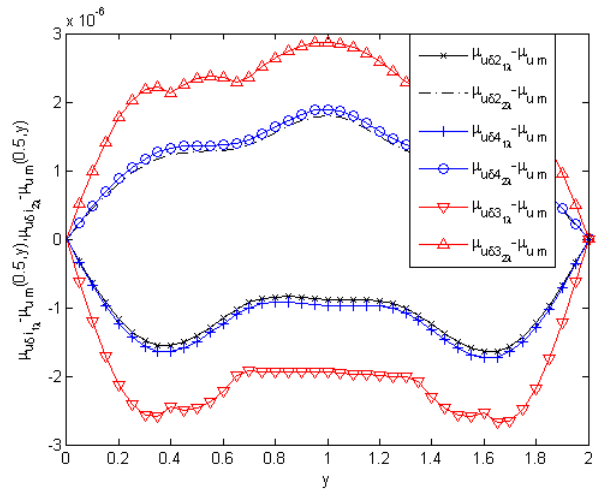
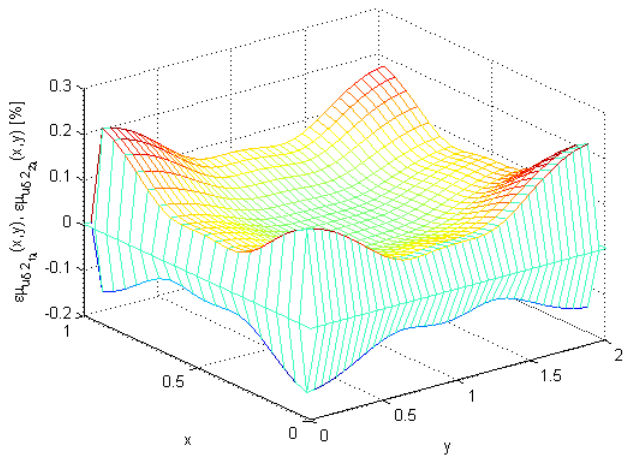
A Figura 5.19 (a) representa graficamente as superfícies dadas pelas funções desvio relativo do valor esperado, em seus limitantes inferiores por $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}}$, e em seus limitantes superiores por $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}}$, definidas sobre toda placa, na norma $i = 2$. Observa-se que o desvio relativo máximo fica em torno dos 0.2%, o que pode ser verificado pela Tabela 5.6. A Figura 5.19 (b) representa graficamente as



(a) Desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.2, y)$ (b) Desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$

Figura 5.18: Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{\delta i_{1\lambda}}}$ e $\epsilon_{\mu_{\delta i_{2\lambda}}}$, nas normas $i=2, 3, 4$.

funções erro do valor esperado, também estabelecendo cotas inferiores $(\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$ e cotas superiores $(\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$, nas normas $i = 2, 3, 4$. Observa-se que o erro está na ordem de 10^{-6} , enquanto o deslocamento atinge valores máximos na ordem de 10^{-3} , embora nas três normas os resultados sejam bons, os melhores resultados são obtidos com o uso das normas $i = 2, 4$.

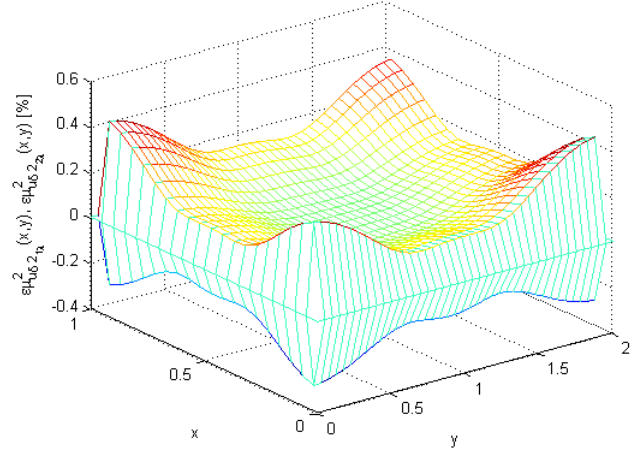
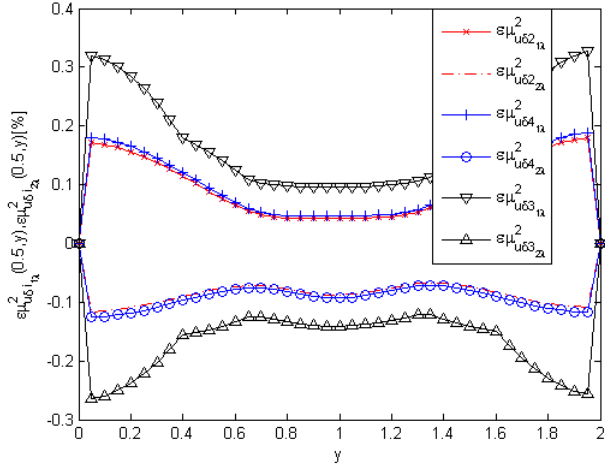


(a) Desvio relativo do valor esperado, norma $i = 2$

(b) Erro do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$.

Figura 5.19: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.

A Figura 5.20 (a) representa graficamente as funções desvio relativo da autocorrelação, $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}^2}(x, y)$ das cotas inferiores e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}^2}(x, y)$ das cotas superiores, nas normas $i = 2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Novamente pode-se observar, que os melhores resultados, com relação ao desvio relativo da autocorrelação, são obtidos nas normas $i = 2, 4$, fato também verificado pela Tabela 5.6, na definição



(a) Desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$

(b) Desvio relativo da autocorrelação, na norma 2

Figura 5.20: Funções desvio relativo da autocorrelação.

dos valores máximos (em módulo) dessas funções. A Figura 5.20 (b) representa o desvio relativo, definido sobre toda placa, das funções de autocorrelação $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 21\lambda}}^2}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 22\lambda}}^2}(x, y)$, na norma 2, observa-se que os valores máximos dessas funções estão próximos 0.4%, o que se comprova pela Tabela 5.6.

Cota	Valor esperado		Autocorrelação	
	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i1\lambda}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i2\lambda}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i1\lambda}}^2}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i2\lambda}}^2}(x, y) \}$
1	3.781402%	3.730218%	7.381003%	7.646212%
2	0.222007%	0.170997%	0.443722%	0.342302%
3	0.451967%	0.400946%	0.901928%	0.804638%
4	0.233926%	0.182916%	0.467511%	0.366227%

Tabela 5.6: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, sobre o domínio D .

A Tabela 5.6 traz os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos com relação ao valor esperado e a autocorrelação, nas quatro normas. Pode-se observar, nesta metodologia, que os desvios nas normas euclidiana e de Frobenius ($i = 2, 4$) são praticamente se iguais.

Da mesma forma como pôde ser observado, na metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, os resultados obtidos com relação aos desvios relativos do valor esperado e da autocorrelação, usando-se as norma $i = 2, 4$ também foram melhores na metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1. Corroboram, nessa análise, as representações gráficas nas figuras: Figura 5.18 (a) e (b), do desvio relativo com relação ao valor esperado; Figura 5.20 (a), do desvio relativo com relação a autocorrelação; e Figura 5.19 (b), do erro com relação ao valor esperado, todas nas normas $i = 2, 3, 4$.

Na Tabela 5.7 evidenciam-se os tempos computacionais para a resolução do problema 5.1

usando-se o método direto e a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, nas quatro normas. Observa-se que os tempos computacionais da segunda metodologia são muito próximos, independente da norma utilizada. Percebe-se também que os tempos computacionais usando-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, também tem um ganho considerável se comparado com a metodologia de *Monte-Carlo*.

Tempo computacional	(em segundos)			
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
720.66	268.04	273.15	270,61	269.01

Tabela 5.7: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , mista 1, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

Nesta metodologia a média (valor esperado) dos parâmetros $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, para o problema do *caso 1*, é dado por: $(\mu_{\lambda_1^*}, \mu_{\lambda_2^*}) = (0.999889772670055, 1.001897253466322)$.

5.1.5 Simulação via *Monte Carlo - Neumann*, mista 2

A presente metodologia, trabalha com o estabelecimento de cotas superiores e inferiores para as realizações de aproximação numérica do deslocamento transversal da placa de Kirchhoff. A partir do conjunto de realizações são obtidas cotas para as estimativas dos momentos estatísticos (do valor esperado e da autocorrelação) do processo estocástico de resposta. As simulações e análises foram feitas em 4 normas.

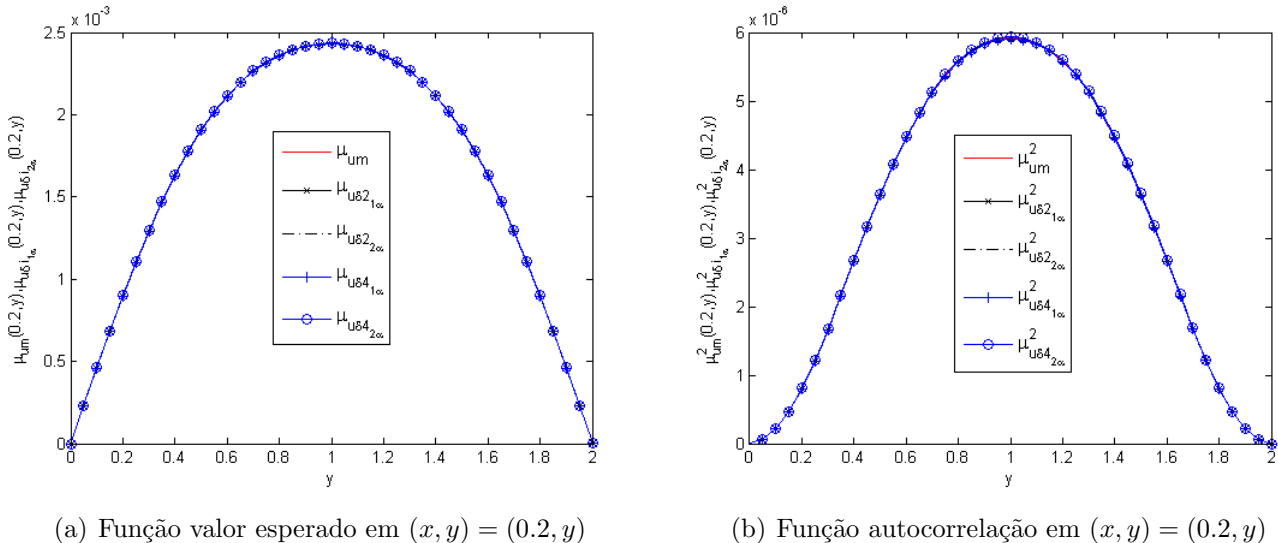
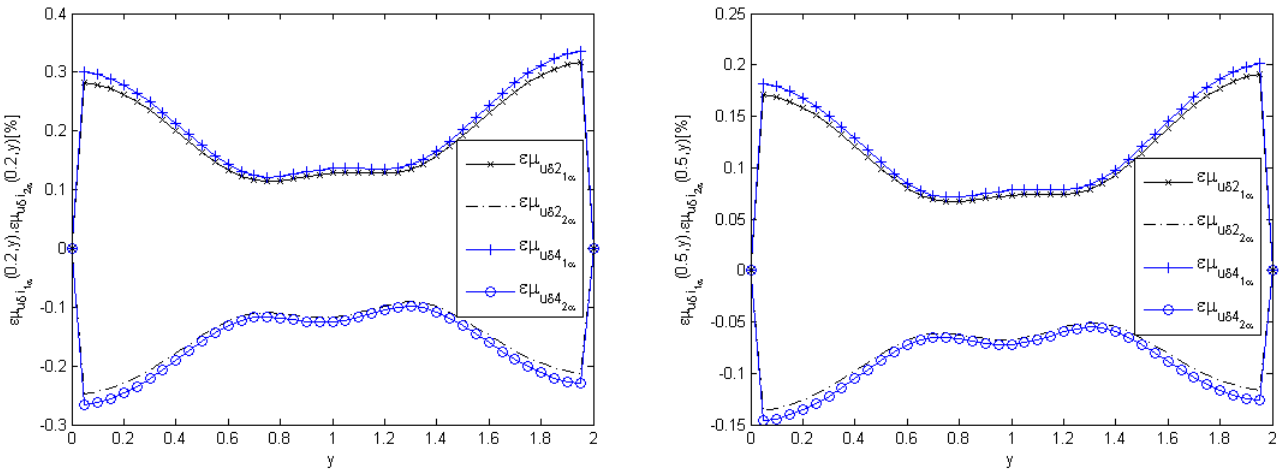


Figura 5.21: Funções valor esperado e autocorrelação, nas normas $i=2, 4$.

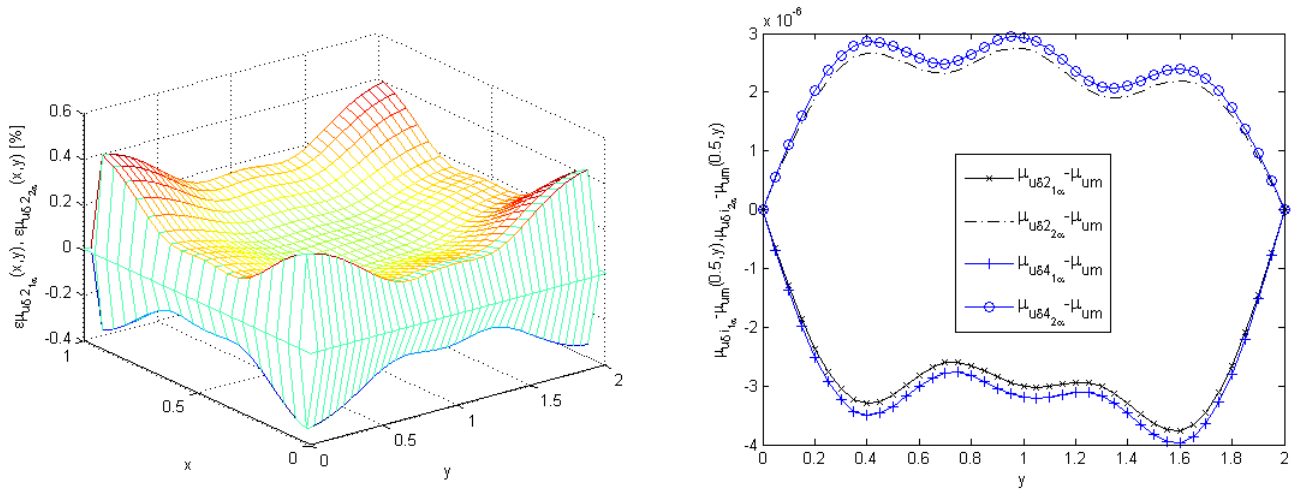
A Figura 5.21 (a), representa graficamente as funções valor esperado do deslocamento transversal, determinadas pela metodologia de *Monte-Carlo*, através da função μ_{u_m} , e pela metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, via estimativas $\mu_{u_{\delta i_{1\alpha}}}$ e $\mu_{u_{\delta i_{2\alpha}}}$, nas normas $i = 2, 4$, em

$(x, y) = (0.2, y)$. A Figura 5.21 (b), representa graficamente as funções de autocorrelação $\mu_{u_m}^2(x, y)$, $\mu_{u_{\delta i_{1\alpha}}}^2(x, y)$ e $\mu_{u_{\delta i_{2\alpha}}}^2(x, y)$, nas normas $i=2, 4$, em $(x, y) = (0.2, y)$. Observa-se que em ambas as figuras as representações gráficas praticamente se sobrepõe. Isso ocorre em virtude dos erros relativos e erros entre as soluções aproximadas e a solução pelo método direto serem muito pequenos. Esse fato pode ser observado: nas Figuras 5.22 (a) e (b), que representam o desvio relativo do valor esperado entre as metodologias de *Monte Carlo - Neumann*, mista 2 e de *Monte-Carlo*, por meio das estimativas $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\alpha}}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\alpha}}}}$, nas normas $i = 2, 4$, em $(x, y) = (0.2, y)$ e $(x, y) = (0.5, y)$; e na Figura 5.23 (b) que representam as funções erro do valor esperado $(\mu_{u_{\delta i_{1\alpha}}} - \mu_{u_m})(x, y)$ e $(\mu_{u_{\delta i_{2\alpha}}} - \mu_{u_m})(x, y)$, nas normas $i = 2, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$.



(a) Desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.2, y)$ (b) Desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$

Figura 5.22: Funções desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 4$.



(a) Desvio relativo do valor esperado, norma 2

(b) Erro do valor esperado, normas $i = 2, 4$

Figura 5.23: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.

A Figura 5.23 (a) representa graficamente as superfícies das funções desvio relativo do valor esperado, $\epsilon_{\mu_{u\delta 21\alpha}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta 22\alpha}}(x, y)$, na norma 2. Observa-se pela representação gráfica, que os desvios relativos máximos ficam em torno de 0.4%, o que também evidencia-se na Tabela 5.8.

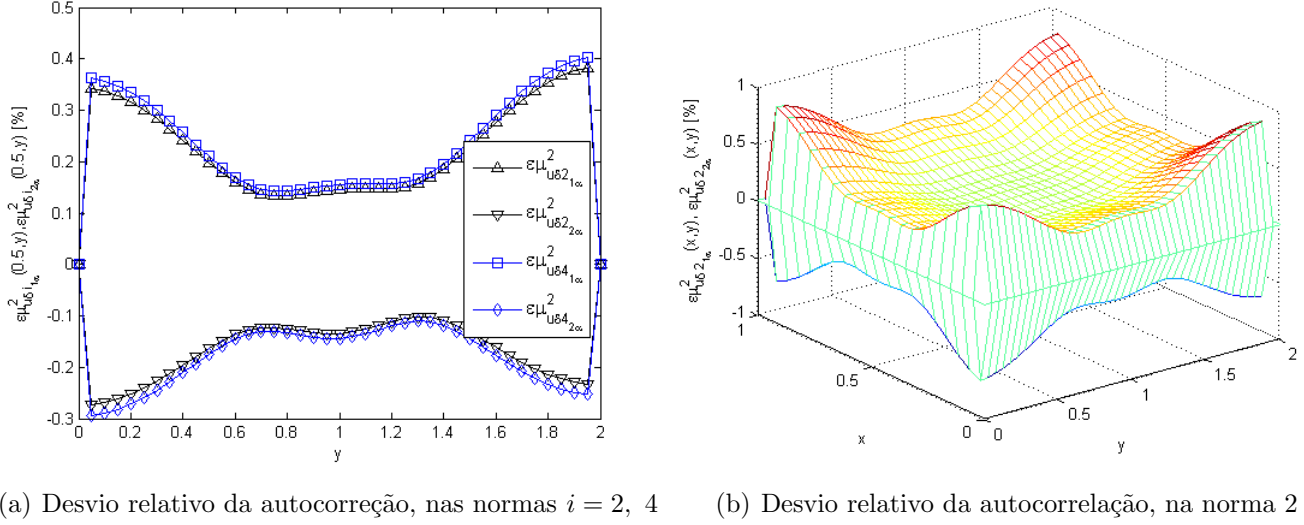


Figura 5.24: Funções desvio relativo da autocorreção.

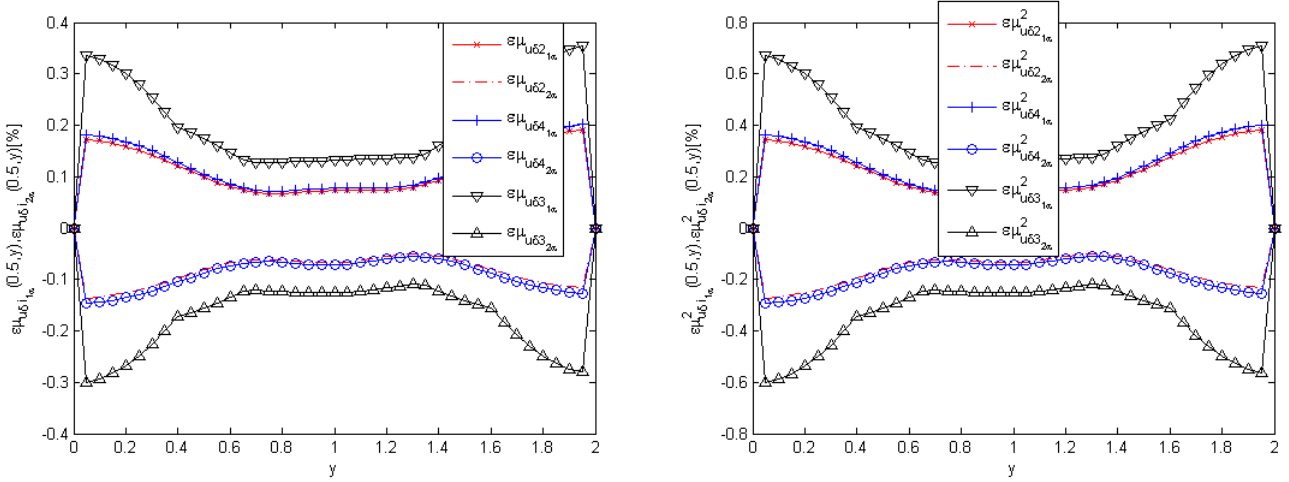
Nas Figuras 5.24 (a) e (b) ficam evidenciadas, por meio de representações gráficas, as funções desvio relativo da autocorreção $\epsilon_{\mu_{u\delta i1\alpha}}^2(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta i2\alpha}}^2(x, y)$, que representam, respectivamente, os erros relativos a aproximação pelas cotas inferiores e pelas cotas superiores. Na Figura 5.24 (b), as superfícies foram obtidas na norma 2, já na Figura 5.24 (a) as curvas foram obtidas nas normas $i = 2, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Observando a Figura 5.24 (a), percebe-se que nesta metodologia as cotas superiores bem como as cotas inferiores estão próximas, fato também verificado quando analisa-se os valores máximos (em módulo) das funções de desvio relativo da autocorreção, conforme Tabela 5.8.

Cota	Valor esperado	Autocorreção		
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i1\alpha}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i2\alpha}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i1\alpha}}^2(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i2\alpha}}^2(x, y) \}$
1	8.006035%	7.937443%	15.010305%	16.866382%
2	0.440130%	0.363379%	0.877466%	0.729094%
3	0.947983%	0.871781%	1.880846%	1.757970%
4	0.465740%	0.389017%	0.928320%	0.780720%

Tabela 5.8: Desvio relativo do valor esperado e da autocorreção da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, sobre o domínio D .

A Tabela 5.8 traz os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos com relação ao valor esperado e com relação a autocorreção, calculadas nas quatro normas. Pode-se observar, pela tabela, que nesta metodologia os desvios nas normas euclidiana e de Frobenius ($i = 2, 4$) são muito próximos, e que são ligeiramente menores que os desvios obtidos quando emprega-se

a norma infinito ($i = 3$). Este fato também fica evidenciado nas Figuras 5.25 (a) e (b), que representam graficamente as funções de desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação nas normas $i = 2, 3, 4$, respectivamente.



(a) Desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$ (b) Desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$

Figura 5.25: Desvios relativos sobre a placa, nas normas $i = 2, 3, 4$.

Na Tabela 5.9 evidenciam-se os tempos computacionais necessários para a resolução do problema 5.1 utilizando-se a metodologia de *Monte-Carlo* e a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, nas quatro normas. Observa-se que os tempos computacionais da segunda metodologia são muito próximos, independente da norma utilizada, sendo bem inferiores aos obtidos com o método direto.

Tempo computacional	(em segundos)			
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
735.09	266.43	265.82	283.51	267.22

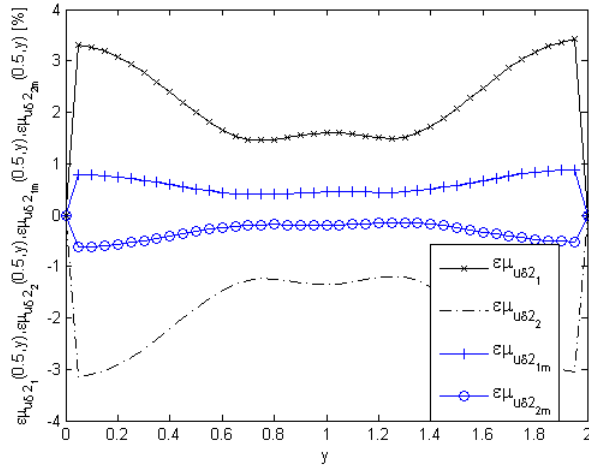
Tabela 5.9: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , mista 2, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

Para a presente metodologia a média (valor esperado) do parâmetro α^* , para o problema do caso 1, é dado por: $\mu_{\alpha^*} = 1.001135742120817$.

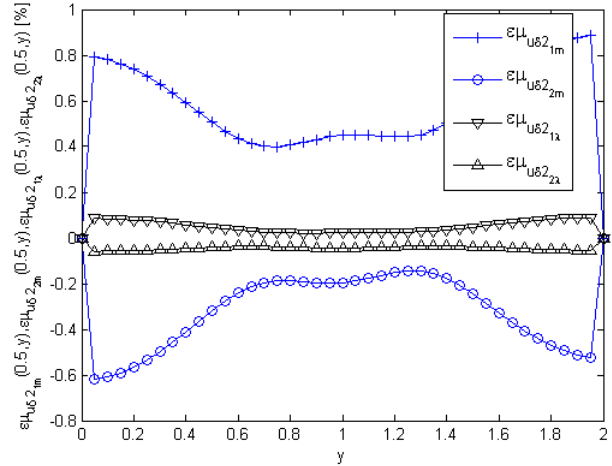
5.1.6 Considerações comparativas entre as quatro metodologias envolvendo cotas

Na Figura 5.26 (a) são representadas graficamente as funções desvio relativo do valor esperado das cotas inferiores, $\epsilon_{\mu_{\delta 2_1}}$ e $\epsilon_{\mu_{\delta 2_{1m}}}$, e as funções desvio relativo do valor esperado das cotas superiores, $\epsilon_{\mu_{\delta 2_2}}$ e $\epsilon_{\mu_{\delta 2_{2m}}}$, das metodologias de *Monte Carlo - Neumann* e *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, . Já na Figura 5.26 (b), são representadas graficamente as funções desvio

relativo do valor esperado das cotas inferiores, $\epsilon_{\mu_{\delta 2_{1m}}}$ e $\epsilon_{\mu_{\delta 2_{1\lambda}}}$, e as funções desvio relativo do valor esperado das cotas superiores, $\epsilon_{\mu_{\delta 2_2}}$ e $\epsilon_{\mu_{\delta 2_{2\lambda}}}$, comparativamente os erros relativos entre as metodologias de *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante e *Monte Carlo - Neumann*, mista 1. Em ambos os casos as simulações foram feitas, de forma comparativa, em $(x, y) = (0.5, y)$, na norma $i = 2$.

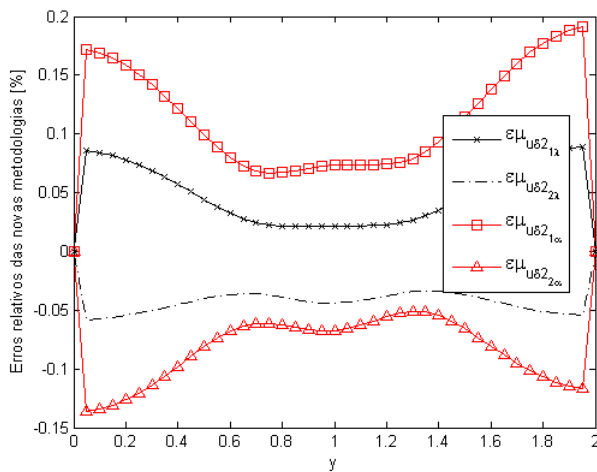


(a) Desvio relativo do valor esperado, na norma 2

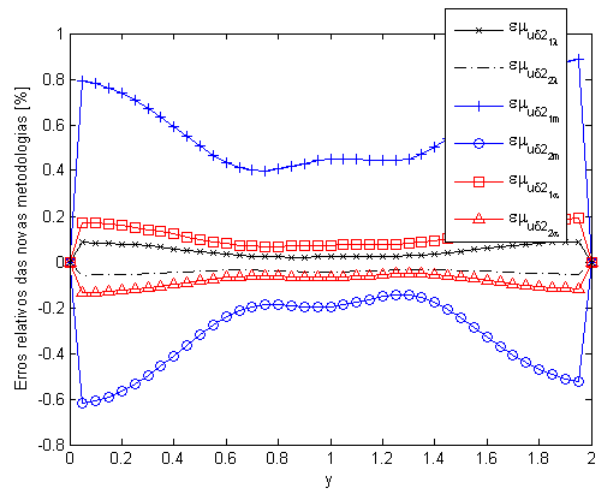


(b) Desvio relativo do valor esperado, na norma 2

Figura 5.26: Funções desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$.



(a) Desvio relativo do valor esperado, na norma 2



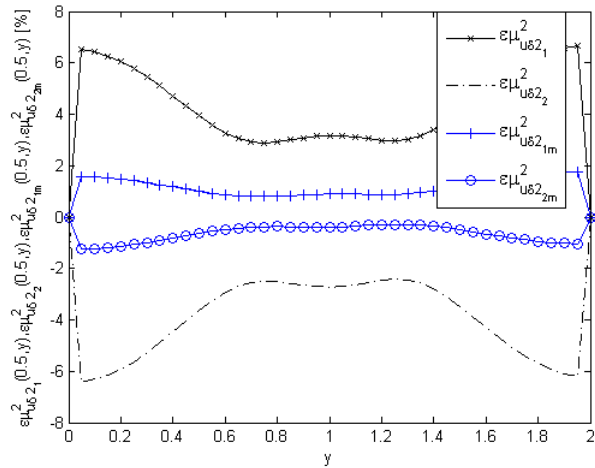
(b) Desvio relativo do valor esperado, na norma 2

Figura 5.27: Funções desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$, novas metodologias.

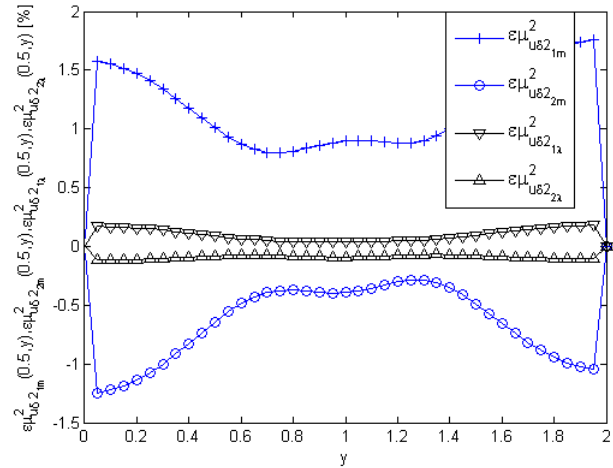
Similarmente as representações gráficas das Figuras 5.26 (a) e (b), nas Figuras 5.27 (a) e (b) estão representadas funções de desvio relativo do valor esperado em $(x, y) = (0.5, y)$, na norma $i = 2$. Na Figura 5.27 são explicitados comparativamente curvas relativas as metodologias de

Monte Carlo - Neumann, mista 1 e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2. Já na Figura 5.27 (b) são representados comparativamente os erros relativos de três metodologias, a saber: *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2.

Nas Figuras 5.28 (a) e (b) e 5.29 (a) e (b) representam-se graficamente de forma comparativa as funções desvio relativo da autocorrelação em $(x, y) = (0.5, y)$, na norma $i = 2$. Na Figura 5.28 (a) compara-se as cotas envolvendo as metodologias *Monte Carlo - Neumann* e *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante. Na Figura 5.28 (b) são comparadas as metodologias *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante e *Monte Carlo - Neumann*, mista 1. Na Figura 5.29 (a) são comparadas as metodologias *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2. Já na Figura 5.29 (b) comparam-se três metodologias *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2.

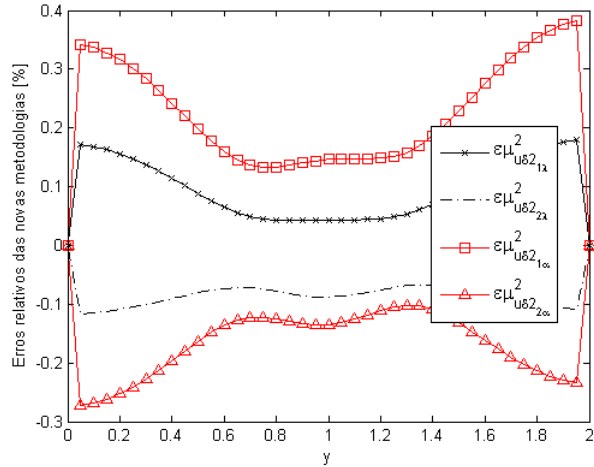


(a) Desvio relativo da autocorrelação, na norma 2

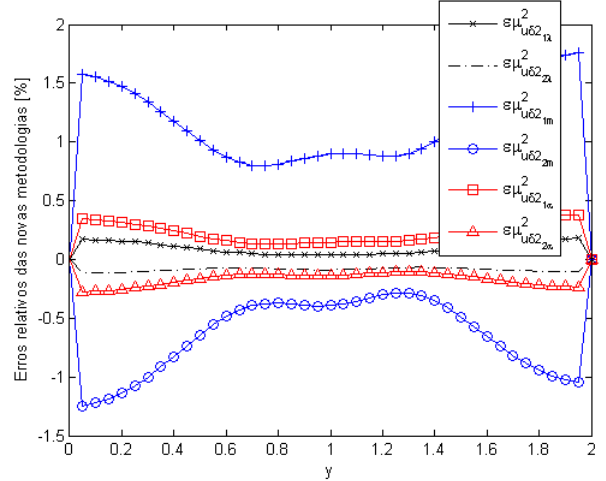


(b) Desvio relativo da autocorrelação, na norma 2

Figura 5.28: Funções desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$.



(a) Desvio relativo da autocorrelação, na norma 2



(b) Desvio relativo da autocorrelação, na norma 2

Figura 5.29: Funções desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$, novas metodologias.

Pelas representações gráficas das Figuras 5.26 (a) e (b), 5.27 (a) e (b), 5.28 (a) e (b) e 5.29 (a) e (b), observa-se, na norma $i = 2$, que em termos de precisão as metodologias *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2 têm os melhores resultados se comparadas com as outras duas metodologias envolvendo cotas, quanto ao valor esperado e a autocorrelação. Se forem analisados os resultados apresentados nas Tabelas 5.2, 5.4, 5.6 e 5.8, percebe-se que essas observações também são válidas para as demais normas, $i = 1, 3, 4$.

Nas quatro metodologias, observa-se que os desvios relativos são maiores nas regiões de fronteira, onde os deslocamentos da placa são menores. Já nas regiões mais centrais da placa onde os deslocamentos são maiores, os desvios relativos assumem valores menores.

Percebe-se também que os desvios relativos máximos (em módulo) com relação ao valor esperado nas quatro metodologias envolvendo cotas são dados por: $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{i1}}} (x, y)|\} = 8.48\%$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{i1m}}} (x, y)|\} = 1.94\%$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{i1\lambda}}} (x, y)|\} = 0.22\%$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{i1\alpha}}} (x, y)|\} = 0.44\%$, nas metodologias *Monte Carlo - Neumann*, *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, *Monte Carlo - Neumann*, mista1 e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, respectivamente. Conforme pode ser observado nas Tabelas 5.2, 5.4, 5.6 e 5.8. Resultados similares podem ser observados nos desvios relativos com relação ao valor esperado.

Com relação aos tempos computacionais, as quatro metodologias tiveram um bom desempenho na comparação com o método direto. Já entre as quatro metodologias envolvendo cotas, a metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante teve um desempenho ligeiramente melhor na comparação com as outras três metodologias, que por sua vez, entre elas, tiveram tempos computacionais muito próximos, conforme verifica-se nas Tabelas 5.3, 5.5, 5.7 e 5.9.

5.2 Caso 2: Incerteza sobre a rigidez da fundação, $\kappa_w = \kappa_w(x, y, \omega)$

Na análise deste caso, o coeficiente de rigidez da placa $\alpha = \alpha(x, y)$ foi considerado determinístico, já o coeficiente de rigidez da fundação $\kappa_w = \kappa_w(x, y, \omega)$ foi considerado estocástico sendo parametrizado pelo processo estocástico descrito em (5.3). Assim, toma-se:

$$\kappa_w(x, y, \omega) = \mu_{\kappa_w}(x, y) + \frac{\sigma_{\kappa_w}(x, y)}{2} \left[\zeta_1(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \zeta_2(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \zeta_3(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) + \zeta_4(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) \right], \quad \forall (x, y, \omega) \in \bar{D} \times \Omega,$$

onde μ_{κ_w} é o valor médio, σ_{κ_w} é o desvio padrão da rigidez ao deslocamento do solo. No presente caso, considera-se $\mu_{\kappa_w}(x, y) = 1000 \text{ N/m}^3$, $\sigma_{\kappa_w} = \frac{1}{10} \cdot \mu_{\kappa_w}$ e $\alpha(x, y) = 2651 \text{ N.m}$, $\forall (x, y) \in D$. Para as funções de base foi considerado $N_b = 3$, com isso têm-se $m = 9$.

Similarmente ao procedimento adotado no *caso 1*, neste caso o problema 5.1 foi analisado em cada uma das cinco metodologias. Para as análises, nas cinco metodologias, considera-se o número de realizações do processo estocástico de reposta dado por $N = 30000$.

5.2.1 Simulação via *Monte Carlo - Neumann λ*

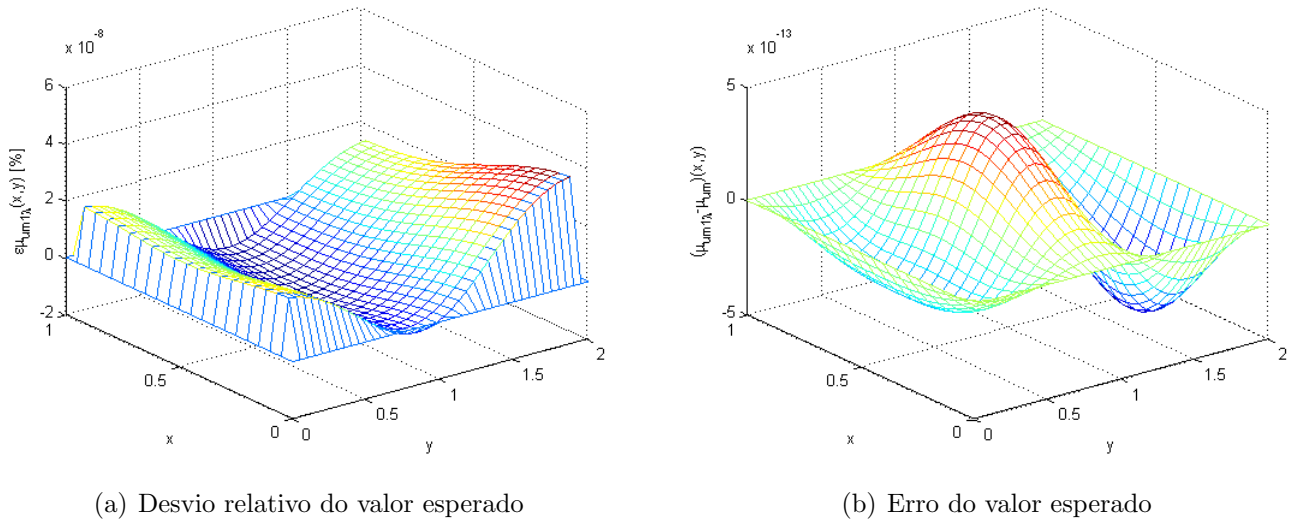


Figura 5.30: Funções desvio relativo e erro do valor esperado na placa de Kirchhoff.

As Figuras 5.30 (a) e (b) apresentam, respectivamente, representações gráficas das funções desvio relativo e erro do valor esperado para do deslocamento transversal da placa de Kirchhoff na comparação da metodologia de *Monte Carlo - Neumann λ* com a metodologia de *Monte-Carlo*.

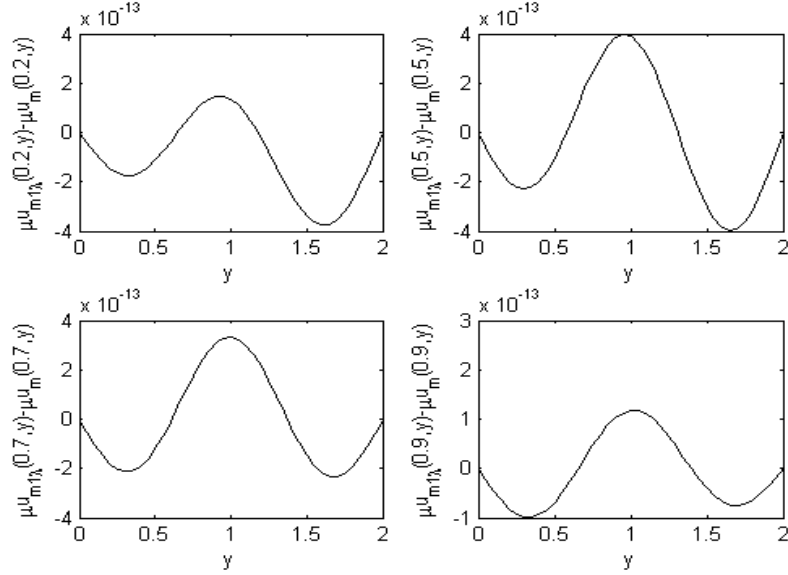
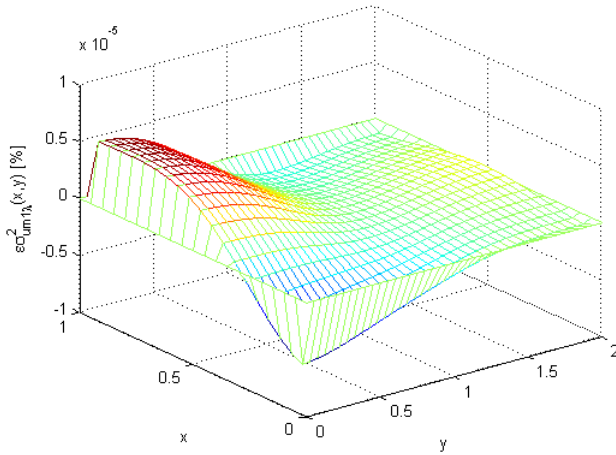
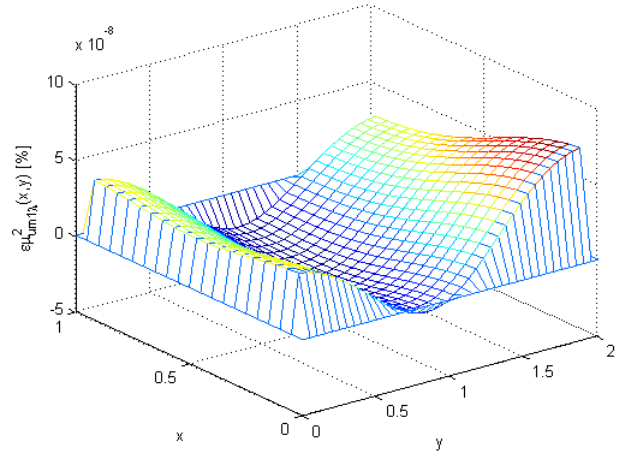


Figura 5.31: Função erro do valor esperado.

Já a Figura 5.31 ilustra algumas curvas, definidas sobre a placa, da função erro do valor esperado $(\mu_{u_{m1\lambda}} - \mu_{u_m})(x, y)$ restringindo-se os valores da variável x ao conjunto $\{0.2, 0.5, 0.7, 0.9\}$ e variando-se a variável y . Observa-se, por essas figuras, que o desvio relativo está na ordem de 10^{-8} e o erro está na ordem de 10^{-13} .



(a) Desvio relativo da variância



(b) Desvio relativo da autocorrelação

Figura 5.32: Funções desvio relativo da variância e da autocorrelação na placa de Kirchhoff.

As Figuras 5.32 (a) e (b) são, respectivamente, representações gráficas das funções desvio relativo da variância, $\epsilon_{\sigma_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y)$, e do erro relativo da autocorrelação, $\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y)$, na comparação das metodologias de *Monte Carlo - Neumann λ* e de *Monte-Carlo*. Observa-se que, quanto a variância, o desvio relativo fica na ordem de 10^{-5} e o erro fica na ordem de 10^{-8} .

Os valores máximos (em módulo) das funções desvios relativos, sobre a placa, são dados por: $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}}(x, y)|\} = 3.56888407 \times 10^{-8}\%$, em relação ao valor esperado; $\max_D\{|\epsilon_{\sigma_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y)|\} = 1.04689789 \times 10^{-5}\%$ em relação a variância; e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y)|\} = 7.13783254 \times 10^{-8}\%$ em relação a autocorrelação, fatos que corroboram com o que pode ser observado nas representações gráficas.

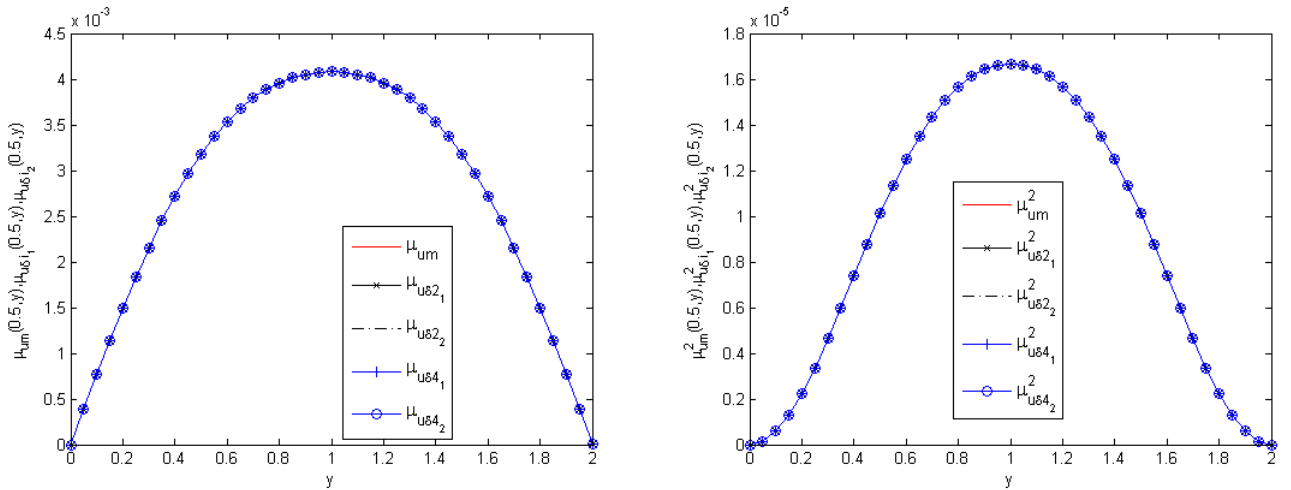
Metodologias	Tempo computacional (em segundos)
T_{MC}	696.79
T_{MCN_λ}	252.50

Tabela 5.10: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* (T_{MC}) e *Monte Carlo - Neumann* λ (T_{MCN_λ}).

A Tabela 5.10 apresenta os tempos computacionais obtidos por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* (MC) e *Monte Carlo - Neumann* λ (MCN_λ).

Percebe-se que no *caso 2*, os erros relativos são bem menores em comparação com os erros relativos obtidos no *caso 1*, o que evidencia que no *caso 2* a metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ se mostrou ainda mais eficiente no quesito precisão.

5.2.2 Simulação via *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas



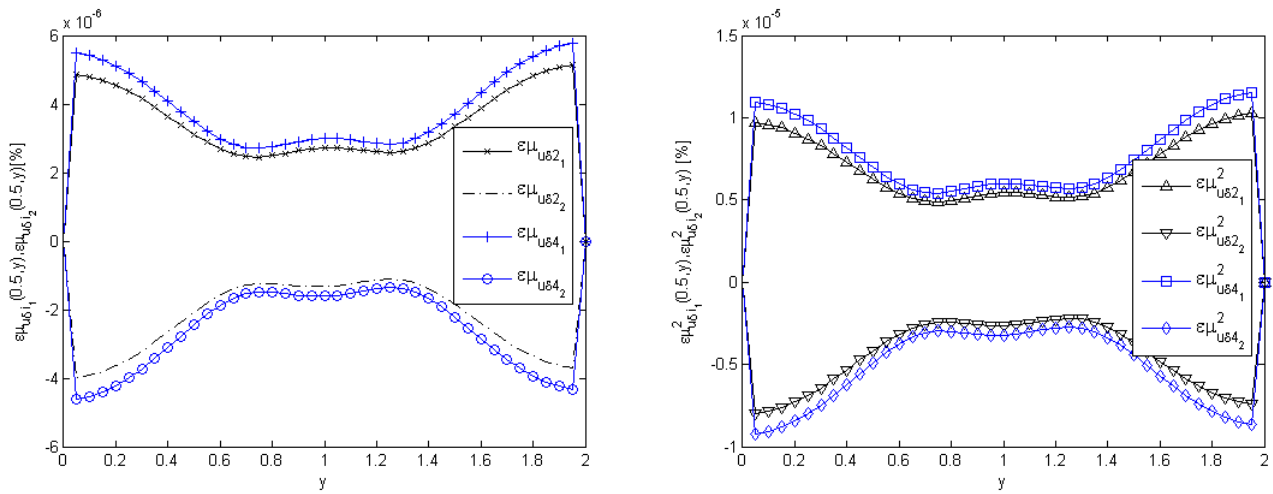
(a) Valor esperado sobre a curva $(x, y) = (0.2, y)$

(b) Autocorrelação sobre a curva $(x, y) = (0.2, y)$

Figura 5.33: Funções de valor esperado e autocorrelação, nas normas $i = 2, 4$.

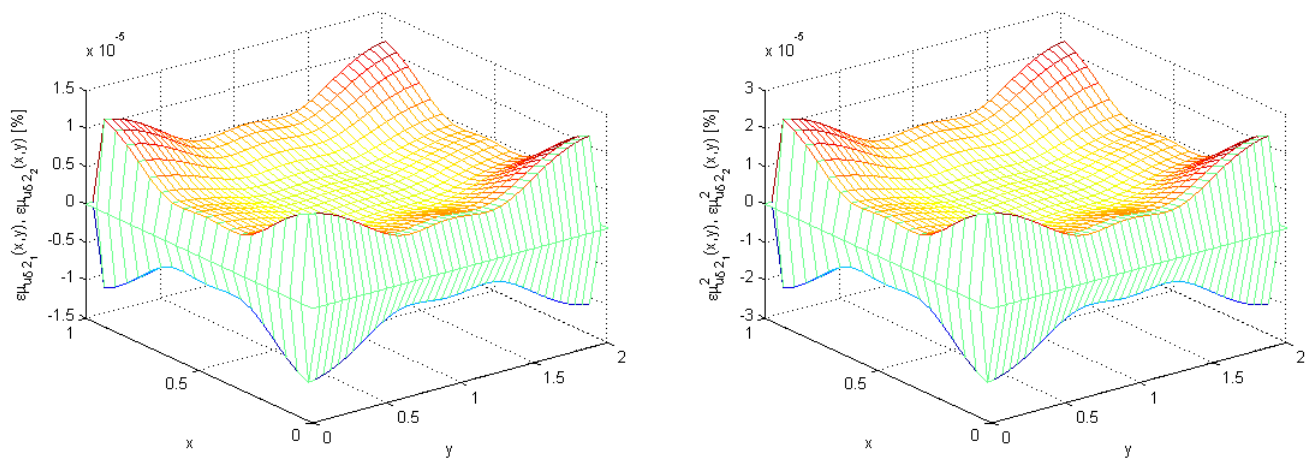
Na Figura 5.33 (a), apresentam-se curvas, em $(x, y) = (0.5, y)$, das estimativas do valor esperado para o deslocamento obtidas, via metodologia de *Monte-Carlo* pela função $\mu_{u_m}(x, y)$, e via cotas inferiores e superiores com a metodologia de *Monte Carlo - Neumann* pelas funções $\mu_{u_{\delta i_1}}(x, y)$ e $\mu_{u_{\delta i_2}}(x, y)$.

Na Figura 5.33 (b) apresentam-se estimativas quanto a autocorrelação, representadas pelas funções $\mu_{u_m}^2(x, y)$, $\mu_{u_{\delta i_1}}^2(x, y)$ e $\mu_{u_{\delta i_2}}^2(x, y)$, também nas duas metodologias. Em ambos os casos as simulações foram feitas usando-se as normas $i=2, 4$. Observa-se que, tanto na Figura 5.33 (a) como na Figura 5.33 (b) as representações gráficas praticamente se sobrepõe. Esse fato se justifica pelas estimativas de desvio relativo do valor esperado, Figuras 5.34 (a) e 5.35 (a), bem como pelas estimativas de desvio relativo da autocorrelação, Figuras 5.34 (b) e 5.35 (b), estarem na ordem de 10^{-5} . Corroboram, também, nestas conclusões o erro observado na representação da Figura 5.36, dadas pelas funções $(\mu_{u_{\delta 2_1}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$ e $(\mu_{u_{\delta 2_2}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$, nas normas $i = 2, 4$.



(a) Desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$ (b) Desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$

Figura 5.34: Funções desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação, nas normas $i = 2, 4$.



(a) Desvio relativo do valor esperado sobre a placa (b) Desvio relativo da autocorrelação sobre a placa

Figura 5.35: Funções de desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação, na norma 2.

A Tabela 5.11 traz os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos com relação ao valor

Cota	Valor esperado	(x10 ⁻⁵)	Autocorrelação	(x10 ⁻⁵)
i	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_1}}(x, y) \}$	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_2}}(x, y) \}$	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_1}^2}(x, y) \}$	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_2}^2}(x, y) \}$
1	8.781102%	8.670687%	17.562180%	17.341379%
2	1.174831%	1.064417%	2.349661%	2.128834%
3	5.673770%	5.563356%	11.347532%	11.126713%
4	1.330319%	1.219906%	2.660638%	2.439812%

Tabela 5.11: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, sobre o domínio D .

esperado e com relação a autocorrelação. Pode-se observar, nesta metodologia, que os desvios menores estão relacionados com as normas $i = 2, 4$, e ficam na ordem de 10^{-5} , fato que também verificou-se em representações gráficas.

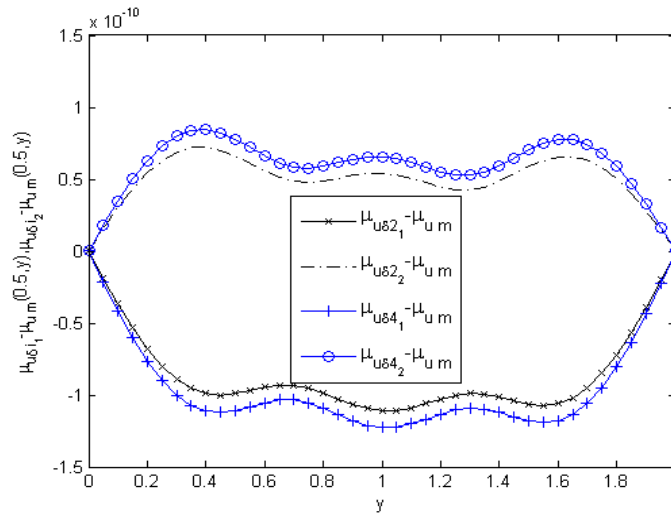


Figura 5.36: Funções erro do valor esperado, nas normas $i = 2, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$.

Na Tabela 5.12 evidenciam-se os tempos computacionais necessários para a resolução do problema 5.1, *caso 2*, usando-se a metodologia de *Monte-Carlo* e a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas. Observa-se que os tempos computacionais da segunda metodologia são muito próximos entre si, independente da norma utilizada, sendo ligeiramente maior apenas na norma de Frobenius ($i = 4$). Percebe-se que os tempos computacionais usando-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, tem um ganho considerável se comparado com a metodologia *Monte-Carlo*.

Tempo computacional	(em segundos)			
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
701.16	272.90	272.18	271.05	291.68

Tabela 5.12: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , com estabelecimento de cotas, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

Observa-se também, que a metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas mostrou-se eficiente no quesito precisão, sendo que o melhor desempenho obteve-se na norma $i = 2$, sendo que nesta norma o desvio relativo máximo (em módulo) do valor esperado é dado por $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_1}}}(x, y)|\} = 1.174831 \times 10^{-5}$.

5.2.3 Simulação via *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante

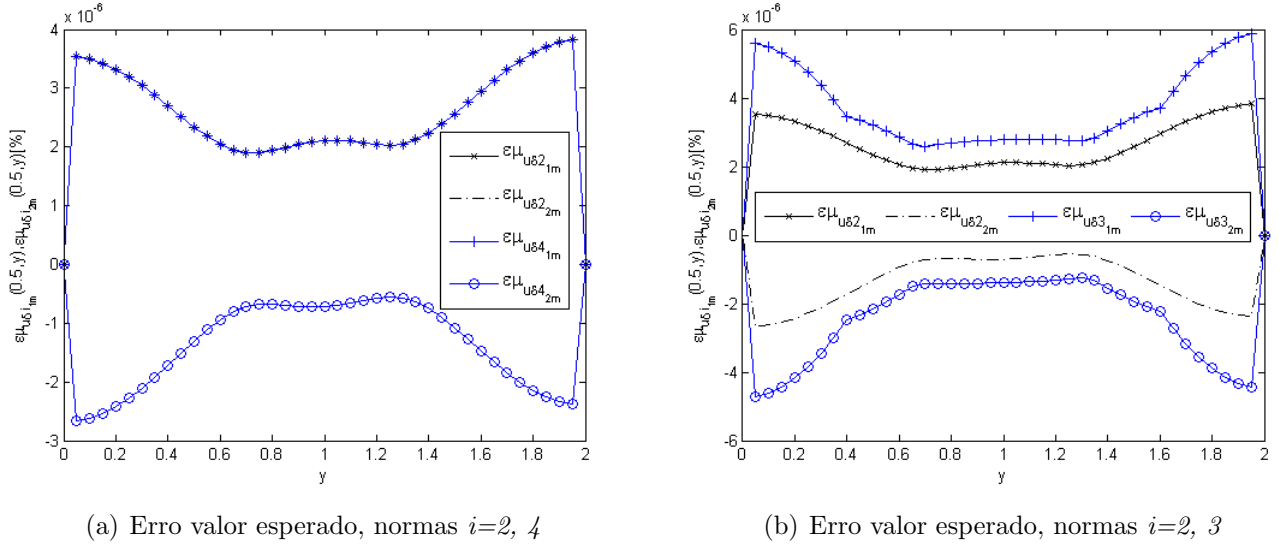


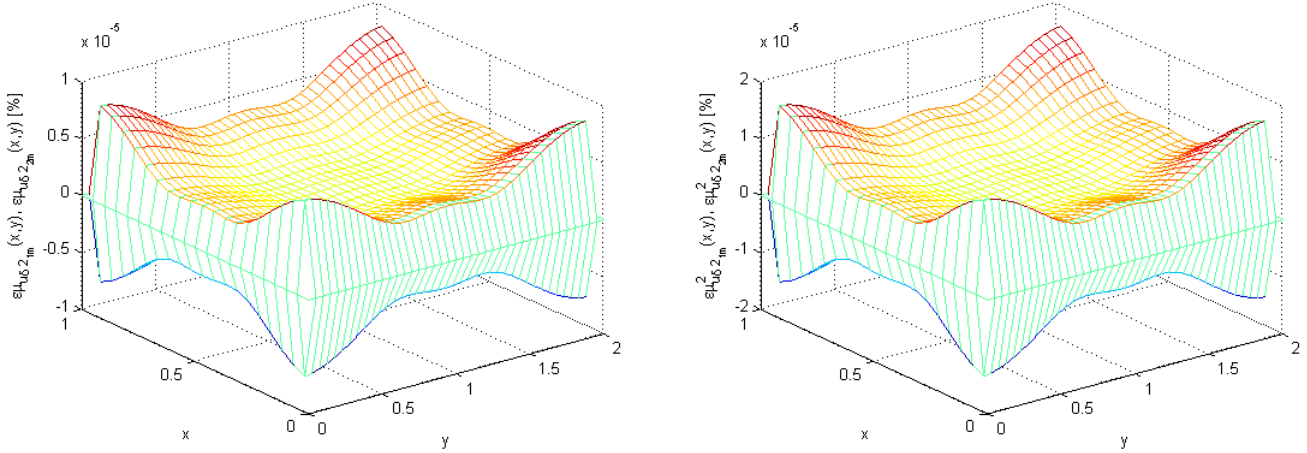
Figura 5.37: Funções desvio relativo do valor esperado em $(x, y) = (0.5, y)$.

As Figuras 5.37 (a) e (b) representam funções desvio relativo do valor esperado entre as metodologias de *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante e de *Monte-Carlo*, obtidas por meio das estimativas, $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_1 m}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_2 m}}}(x, y)$, calculadas em $(x, y) = (0.5, y)$. Na Figura 5.37 (a), empregando-se as normas $i = 2, 4$ e na Figura 5.37 (b), pelas normas $i = 2, 3$.

Na Figura 5.37 (a) as curvas praticamente se sobrepõe, isto é, as cotas superiores estão próximas entre sí, o mesmo ocorrendo com as cotas inferiores. Essa proximidade também pode ser observada quando analisa-se, nas normas $i = 2, 4$, os valores máximos $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_1 m}}}(x, y)|\}$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_2 m}}}(x, y)|\}$, das funções desvio relativo do valor esperado, conforme dados da Tabela 5.13. Na figura 5.37 (b) percebe-se que as estimativas dos erros relativos do valor esperado são menores na norma $i = 2$ em comparação com a norma $i = 3$, fato que também se evidencia nos valores máximos desses desvios, sobre o domínio D , conforme pode se observado na Tabela 5.13.

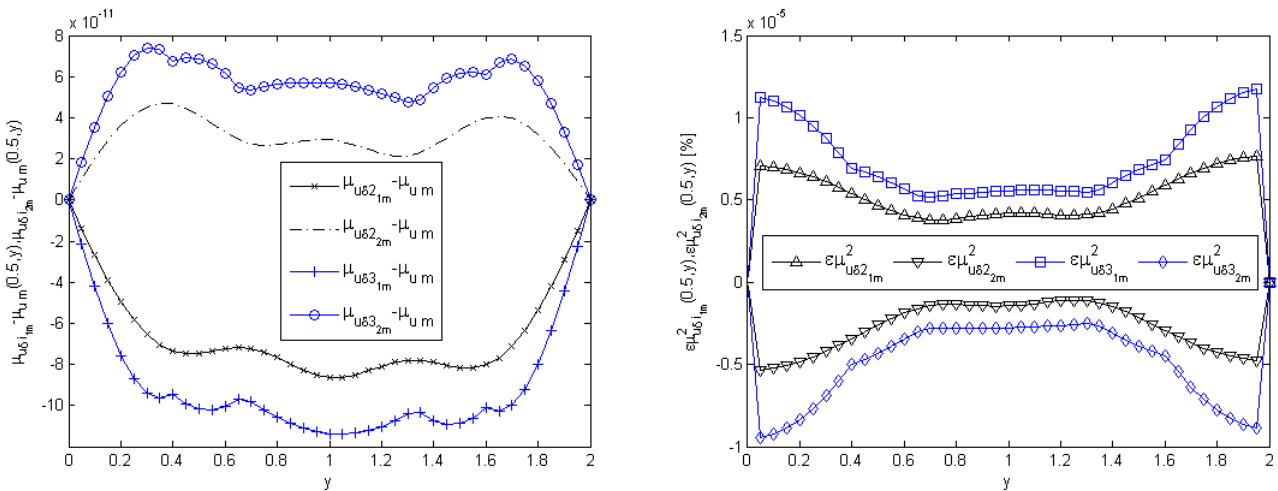
Podemos observar-se, pela Tabela 5.13, que os valores máximos (em módulo) dos erros relativos, com relação ao valor esperado e a autocorrelação estão na ordem de 10^{-5} , fato que também é demonstrado pelas superfícies nas Figuras 5.38 (a) e (b) que representam, respectivamente, as funções desvio relativo do valor esperado, $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2 1 m}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2 2 m}}}(x, y)$ e as funções desvio relativo da autocorrelação $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2 1 m}}^2}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2 2 m}}^2}(x, y)$, na norma $i = 2$.

As Figuras 5.39 (a) e (b) representam curvas em $(x, y) = (0.5, y)$, de funções erro na comparação das metodologias de *Monte Carlo Neumann*, com ajuste no limitante e de *Monte-Carlo*. Na Figura 5.39 (a) evidenciam-se os erros absolutos do valor esperado representados pelas funções $(\mu_{u_{\delta i_{1m}}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$ e $(\mu_{u_{\delta i_{2m}}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$, nas normas $i = 2, 3$, que ficam na ordem de 10^{-11} . Já na Figura 5.39 (b) evidenciam-se os erros relativos da autocorrelação representados por $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1m}}}^2}(0.5, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2m}}}^2}(0.5, y)$, também nas normas $i = 2, 3$, sendo que os erros ficam na ordem de 10^{-5} .



(a) Desvio relativo do valor esperado, na norma $i = 2$ (b) Desvio relativo da autocorrelação, na norma $i = 2$

Figura 5.38: Funções desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação, na norma $i = 2$.



(a) Erro do valor esperado, normas $i = 2, 3$ (b) Desvio relativo da autocorrelação, normas $i = 2, 3$

Figura 5.39: Funções erro do valor esperado e desvio relativo da autocorrelação.

A Tabela 5.13 traz os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos com relação ao valor esperado e com relação a autocorrelação. Pode-se observar, nesta metodologia, que os desvios

Cota	Valor esperado	(x10 ⁻⁵)	Autocorrelação	(x10 ⁻⁵)
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{\delta i_{1m}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{\delta i_{2m}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{\delta i_{1m}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{\delta i_{2m}}}(x, y) \}$
1	7.281122%	7.170707%	14.562224%	14.341416%
2	0.845493%	0.735079%	1.690984%	1.470158%
3	1.519820%	1.409407%	3.039638%	2.818812%
4	0.845499%	0.735085%	1.690996%	1.470170%

Tabela 5.13: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, sobre o domínio D .

menores estão relacionados com as normas 2, 3 e 4, e ficam na ordem de 10^{-5} , no entanto, nas normas euclidiana e de Frobenius ($i = 2, 4$) esses desvios são ligeiramente menores. Esses fatos também ficam evidenciados nas representações gráficas.

Na Tabela 5.14 evidenciam-se os tempos computacionais. Observa-se que os tempos computacionais da metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, estão todos muito próximos, independente da norma utilizada. Percebe-se também, que os tempos computacionais usando-se essa metodologia, tem um ganho considerável se comparado com a metodologia de *Monte-Carlo*.

Tempo computacional	(em segundos)			
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
694.14	219.23	218.66	221.93	218.33

Tabela 5.14: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , com ajuste no limitante, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

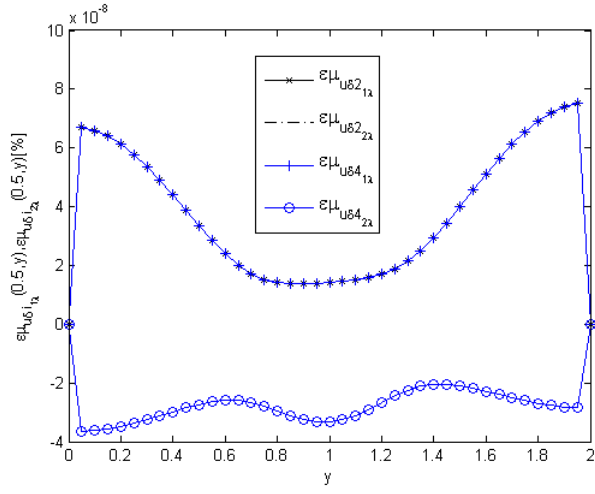
Observa-se também, que neste problema, *caso 2*, a metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, mostrou-se muito eficiente no quesito precisão, em comparação com o *caso 1*. O melhor desempenho obteve-se nas normas $i = 2, 4$, sendo que nessas normas o desvio relativo máximo (em módulo) do valor esperado é dado por $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{\delta i_1}}(x, y)|\} = 0.845 \times 10^{-5}$. Os tempos computacionais também foram um pouco inferiores neste caso, na comparação com o *caso 1*.

5.2.4 Simulação via *Monte Carlo - Neumann*, mista 1

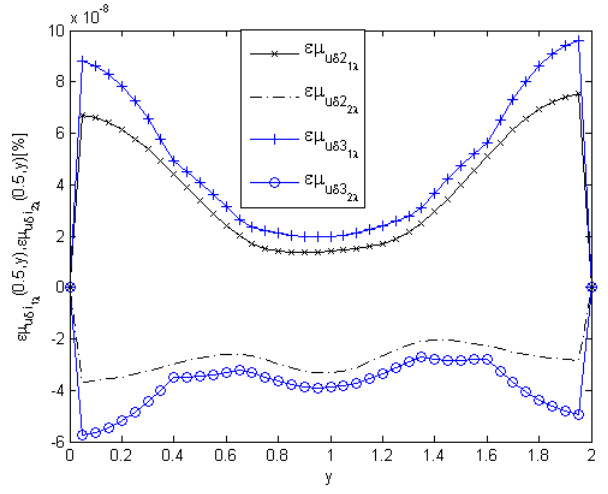
As Figuras 5.40 (a) e (b) representam graficamente os erros relativos do valor esperado na comparação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 com a metodologia *Monte-Carlo*, obtido por meio das estimativas, $\epsilon_{\mu_{\delta i_{1\lambda}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{\delta i_{2\lambda}}}(x, y)$, em $(x, y) = (0.5, y)$.

Na Figura 5.40 (a) as curvas praticamente sobrepõem-se, isto é, tanto as cotas superiores quanto as cotas inferiores estão muito próximas entre si, esta proximidade também pode ser observada quando analisa-se, nas normas $i = 2, 4$, os valores máximos destas funções, em módulo, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{\delta i_{1m}}}(x, y)|\}$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{\delta i_{2m}}}(x, y)|\}$, conforme evidencia-se na Tabela 5.15. Na figura 5.40 (b) pode observar-se que as estimativas dos erros relativos do valor esperado, obtidos com a norma

$i = 2$ são menores do que os obtidos com a norma $i = 3$, o que também fica evidenciado nos valores máximos desses desvios sobre o domínio D , conforme Tabela 5.15.

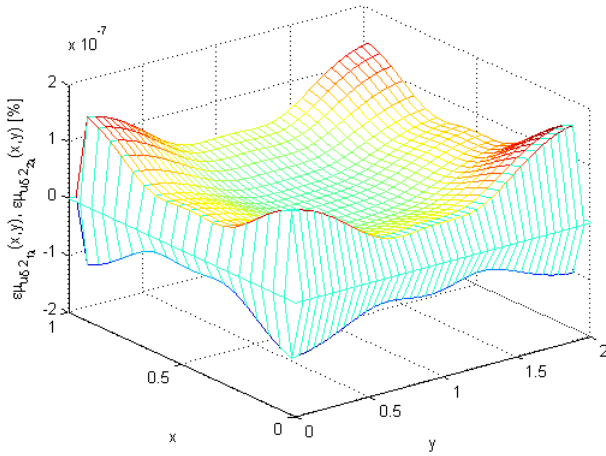


(a) Desvio relativo do valor esperado, normas $i=2, 4$

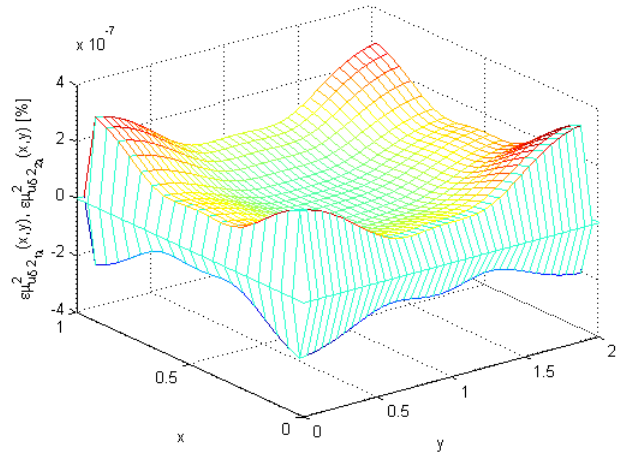


(b) Desvio relativo do valor esperado, normas $i=2, 3$

Figura 5.40: Funções desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$.



(a) Desvio relativo do valor esperado

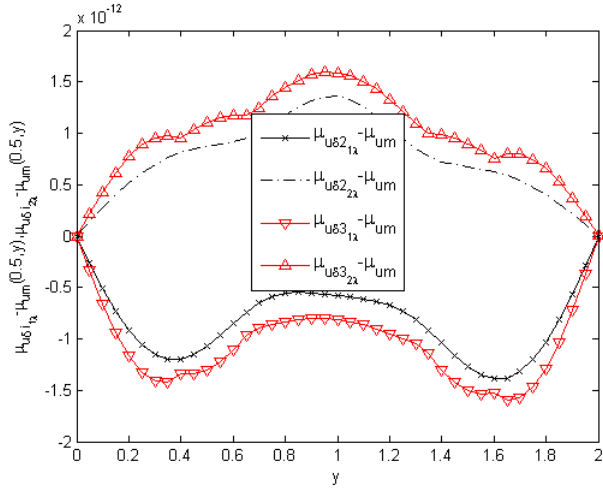


(b) Desvio relativo da autocorrelação

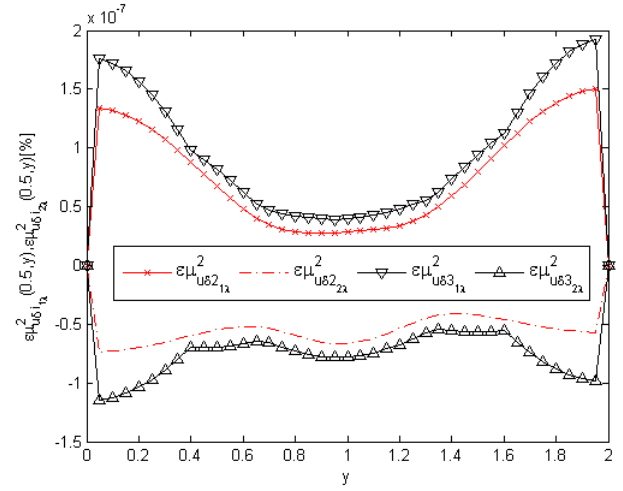
Figura 5.41: Funções desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação, na norma $i = 2$.

Analisando a Tabela 5.15, percebe-se que os valores máximos (em módulo) dos erros relativos, sobre toda placa, com relação ao valor esperado e a autocorrelação assumem valores na ordem de 10^{-7} , fato que também pode ser observado pelas Figuras 5.41 (a) e (b) onde estão representadas, respectivamente, as superfícies das funções desvio relativo do valor esperado, $\epsilon_{\mu_{u\delta_{21\lambda}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta_{22\lambda}}}(x, y)$ e das funções desvio relativo da autocorrelação $\epsilon_{\mu_{u\delta_{21\lambda}}^2}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta_{22\lambda}}^2}(x, y)$, na norma $i = 2$.

As Figuras 5.42 (a) e (b) representam curvas de funções erro, em $(x, y) = (0.5, y)$, na comparação das metodologias de *Monte Carlo Neumann*, mista 1 e de *Monte-Carlo*. Na Figura 5.42 (a) evidencia-se o erro do valor esperado $(\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$ e $(\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$, nas normas $i = 2, 3$, que fica na ordem de 10^{-12} . E na Figura 5.42 (b) evidencia-se o desvio relativo da autocorrelação $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}^2}(0.5, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}^2}(0.5, y)$, também nas normas $i = 2, 3$, sendo que esse erro fica na ordem de 10^{-7} .



(a) Erro do valor esperado, normas $i = 2, 3$



(b) Desvio relativo da autocorrelação, normas $i = 2, 3$

Figura 5.42: Funções erro do valor esperado e desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$.

Cota	Valor esperado	($\times 10^{-7}$)	Autocorrelação	($\times 10^{-7}$)
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}^2}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}^2}(x, y) \}$
1	18.449089%	17.938069%	36.898168%	35.876126%
2	1.652203%	1.141173%	3.304383%	2.282340%
3	2.398141%	1.887115%	4.796272%	3.774219%
4	1.652212%	1.141182%	3.304402%	2.282360%

Tabela 5.15: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, sobre o domínio D .

A Tabela 5.15 traz os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos com relação ao valor esperado dados por $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}}(x, y)|\}$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}}(x, y)|\}$ e com relação a autocorrelação dados por $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}^2}(x, y)|\}$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}^2}(x, y)|\}$, nas quatro normas. Pode-se observar, nesta metodologia, que os desvios menores estão relacionados com as normas 2, 3 e 4, e ficam na ordem de 10^{-7} , no entanto nas normas euclidiana e de Frobenius ($i = 2, 4$) esses desvios são ligeiramente menores. Esses fatos também podem ser observados nas representações gráficas.

Na Tabela 5.16 são apresentados os tempos computacionais necessários para a resolução do problema 5.1, *caso 2*, usando-se a metodologia de *Monte-Carlo* e a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, nas quatro normas. Observa-se que os tempos computacionais da segunda

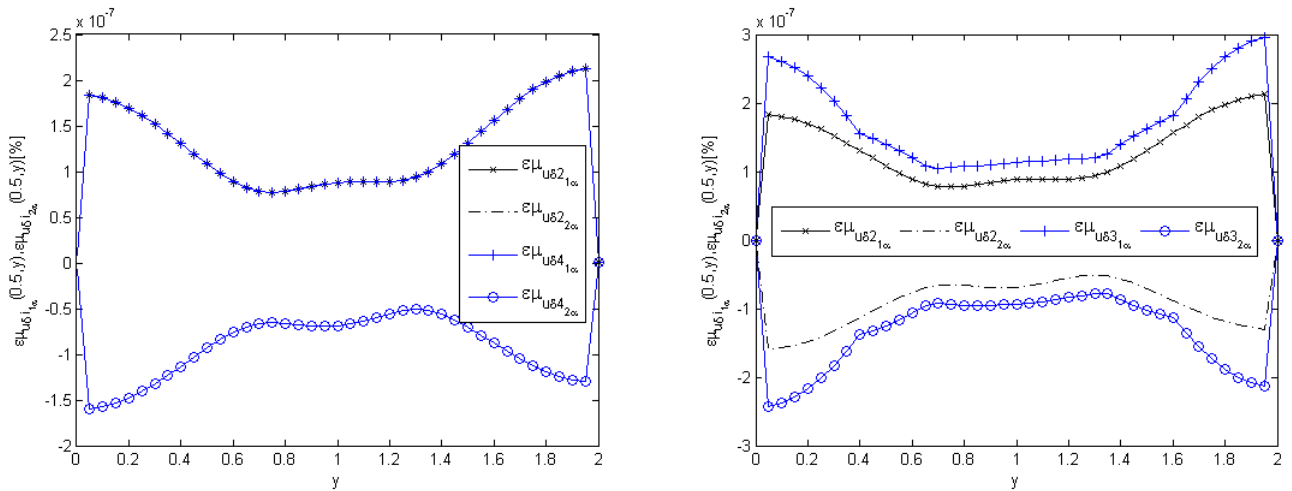
Tempo computacional (em segundos)				
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
702.20	267.60	268.00	270.17	265.74

Tabela 5.16: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , mista 1, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

metodologia são muito próximos, independente da norma utilizada. Percebe-se também que os tempos computacionais usando-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 tem um ganho considerável se comparado com a metodologia *Monte-Carlo*.

Para o *caso 2*;, na presente metodologia a média (valor esperado) dos parâmetros $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ é dado por: $(\mu_{\lambda_1^*}, \mu_{\lambda_2^*}) = (0.999999999487719, 1.000000458608934)$. Percebe-se que estes valores estão muito próximos de 1, diferindo da unidade a partir da sétima casa decimal.

5.2.5 Simulação via *Monte Carlo - Neumann*, mista 2

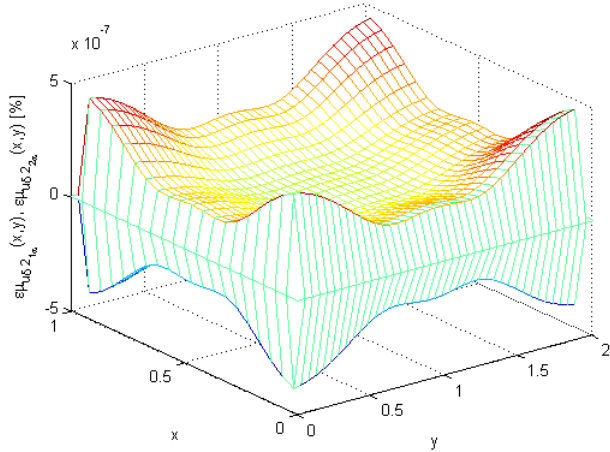


(a) Desvio relativo do valor esperado, normas $i=2, 4$ (b) Desvio relativo do valor esperado, normas $i=2, 3$

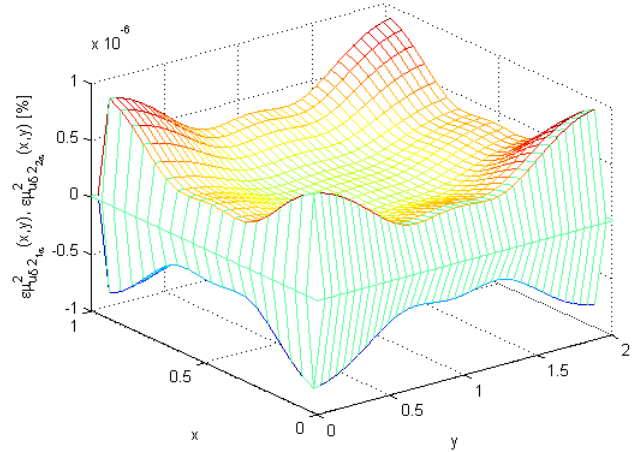
Figura 5.43: Funções desvio relativo do valor esperado $\epsilon_{\mu_{\delta i_{1\lambda}}}$ e $\epsilon_{\mu_{\delta i_{2\lambda}}}$ em $(x, y) = (0.5, y)$.

A Figura 5.43 (a), representa graficamente curvas das funções desvio relativo do valor esperado nas normas $i = 2, 4$. Observa-se que nas cotas inferiores $\epsilon_{\mu_{\delta i_{2\lambda}}}$, bem como nas cotas superiores $\epsilon_{\mu_{\delta i_{1\lambda}}}$ as curvas se sobrepõem, indo de encontro a proximidade dos valores extremos destas funções, observados na Tabela 5.17.

A Figura 5.43 (b), representa graficamente as curvas das funções desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 3$. Pode observar-se que as estimativas dos erros relativos do valor esperado obtidos com a norma $i = 2$ são menores do que os obtidos com a norma $i = 3$, o que também fica evidenciado nos valores extremos dos desvios relativos sobre o domínio D , conforme pode ser observado na Tabela 5.17.



(a) Desvio relativo do valor esperado



(b) Desvio relativo da autocorrelação

Figura 5.44: Funções desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação, na norma $i = 2$.

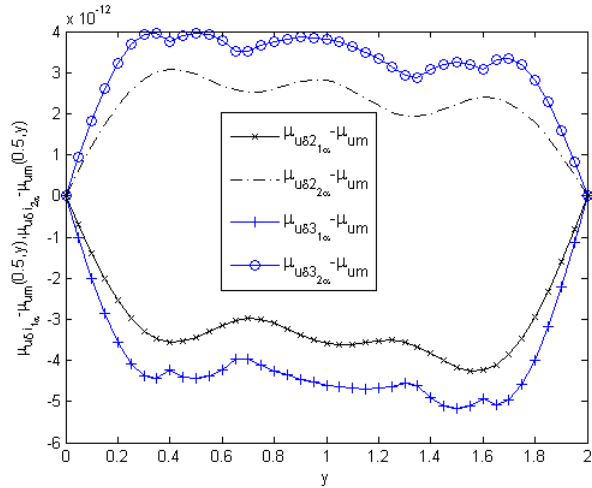
Analisando a Tabela 5.17, percebe-se que os valores extremos dos erros relativos com relação ao valor esperado e a autocorrelação estão na ordem de 10^{-7} , fato que também pode ser observado nas Figuras 5.44 (a) e (b), onde estão representadas, respectivamente, as superfícies das funções desvio relativo do valor esperado, $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 21\lambda}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 22\lambda}}}(x, y)$ e das funções desvio relativo da autocorrelação, $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 21\lambda}}^2}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 22\lambda}}^2}(x, y)$, na norma $i = 2$.

As Figuras 5.45 (a) e (b) representam graficamente erros na comparação das metodologias de *Monte Carlo Neumann*, mista 2 e de *Monte-Carlo*, em $(x, y) = (0.5, y)$. Na Figura 5.45 (a) evidenciam-se o erro do valor esperado, $(\mu_{u_{\delta i\alpha}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$ e $(\mu_{u_{\delta i2\lambda}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$, nas normas $i = 2, 3$, que ficam na ordem de 10^{-12} . E na Figura 5.45 (b) evidenciam-se o desvio relativo da autocorrelação, $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 21\lambda}}^2}(0.5, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 22\lambda}}^2}(0.5, y)$, também nas normas $i = 2, 3$, sendo que esses erros ficam na ordem de 10^{-7} .

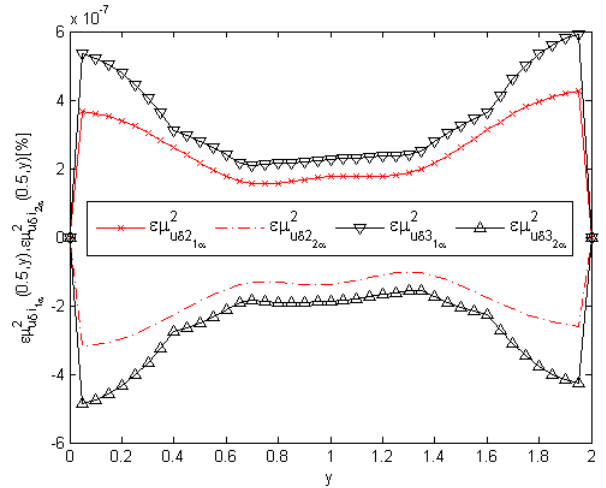
Cota	Valor esperado	(x10 ⁻⁷)	Autocorrelação	(x10 ⁻⁷)
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i\alpha}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i2\lambda}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i\alpha}}^2}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i2\lambda}}^2}(x, y) \}$
1	53.008584%	52.4340268%	106.017154%	104.868045%
2	4.743035%	4.168482%	9.486059%	8.336953%
3	7.620183%	7.045633%	15.240362%	14.091272%
4	4.743069%	4.168512%	9.486124%	8.337019%

Tabela 5.17: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, sobre o domínio D .

A Tabela 5.17 apresenta os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos quanto ao valor esperado e quanto a autocorrelação. Observa-se, nesta metodologia, que os desvios menores estão relacionados com as normas 2, 3 e 4, e ficam na ordem de 10^{-7} , no entanto nas normas euclidiana e de Frobenius ($i = 2, 4$) esses desvios são ligeiramente menores.



(a) Erro do valor esperado, normas $i = 2, 3$



(b) Desvio relativo da autocorrelação, normas $i = 2, 3$

Figura 5.45: Funções erro do valor esperado e desvio relativo da autocorrelação.

Na Tabela 5.18 evidenciam-se os tempos computacionais necessários para a resolução do problema 5.1, *caso 2*, usando-se a metodologia de *Monte-Carlo* e a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, nas quatro normas. Observa-se que os tempos computacionais da segunda metodologia são muito próximos, independente da norma utilizada, apenas nas normas $i = 1, 2$ eles são ligeiramente menores. Percebe-se também que os tempos computacionais usando-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, tem um ganho considerável se comparado com a metodologia *Monte-Carlo*.

Tempo computacional	(em segundos)			
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
701.47	245.48	244.40	265.21	253.98

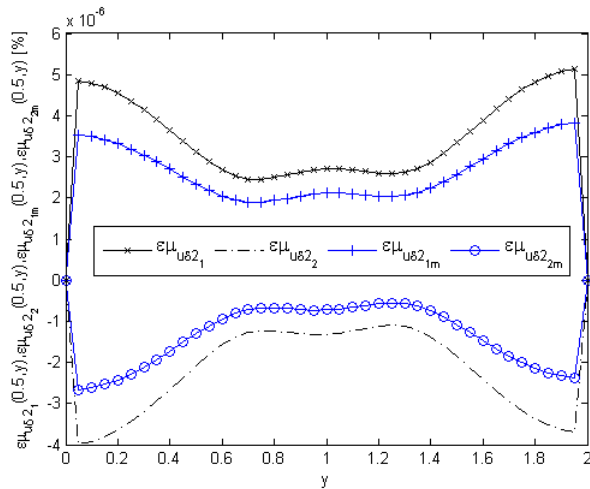
Tabela 5.18: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , mista 2, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

Igualmente ao observado nas metodologias anteriores, para a resolução do problema 5.1 (*caso 2*), a metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, mostrou-se muito eficiente no quesito precisão, em comparação com o *caso 1*, sendo que o melhor desempenho obteve-se nas normas $i = 2, 4$. Nessas normas o desvio relativo máximo (em módulo) do valor esperado é dado por $\max_D \{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{i_1}}}(x, y)|\} = 4.7430 \times 10^{-7}$, ficando muito próximo do desvio relativo quanto ao valor esperado obtido com a metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1.

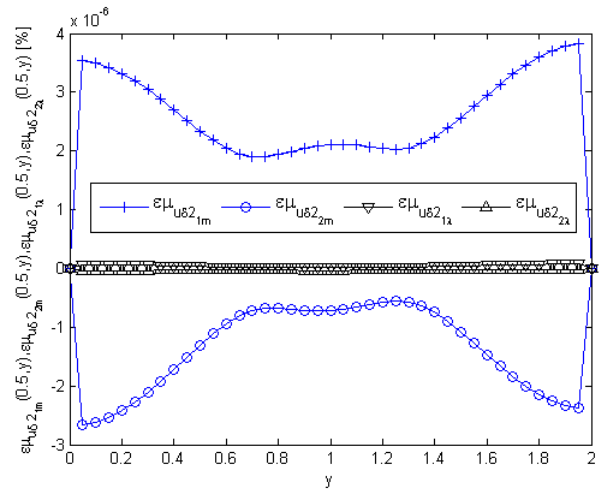
Nesta metodologia, para o problema do *caso 2* a média (valor esperado) do parâmetro α^* é dado por: $\mu_{\alpha^*} = 0.999999491182722$. Percebe-se que este valor também está muito próximo de 1.

5.2.6 Considerações comparativas entre as quatro metodologias envolvendo cotas, caso 2

Na Figuras 5.46 (a) e (b) e 5.47 (a) e (b) estão representadas, comparativamente, as funções de desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$, na norma $i = 2$. Na Figura 5.46 (a) comparam-se curvas relativas as metodologias de *Monte Carlo - Neumann* e *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante. Na Figura 5.46 (b) comparam-se curvas relativas as metodologias de *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante e *Monte Carlo - Neumann*, mista 1.

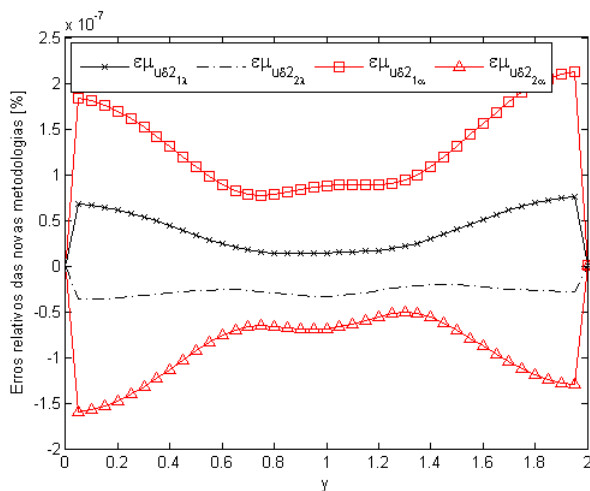


(a) Desvio relativo do valor esperado, na norma 2

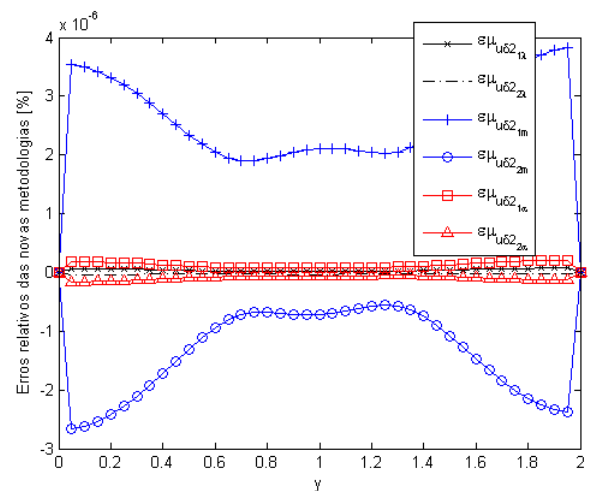


(b) Desvio relativo do valor esperado, na norma 2

Figura 5.46: Funções desvio relativo do valor esperado, caso 2.



(a) Desvio relativo do valor esperado, na norma 2

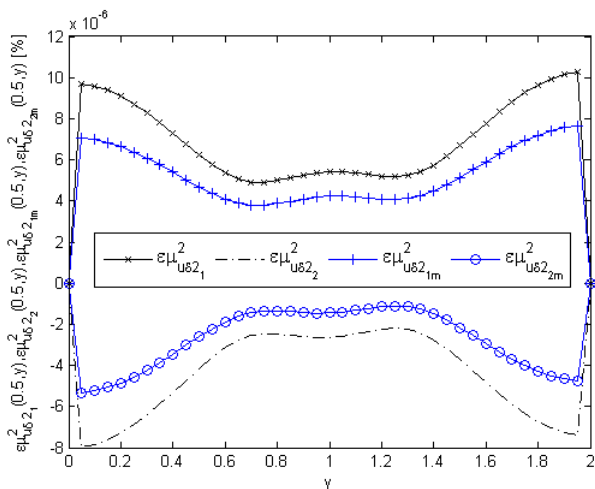


(b) Desvio relativo do valor esperado, na norma 2

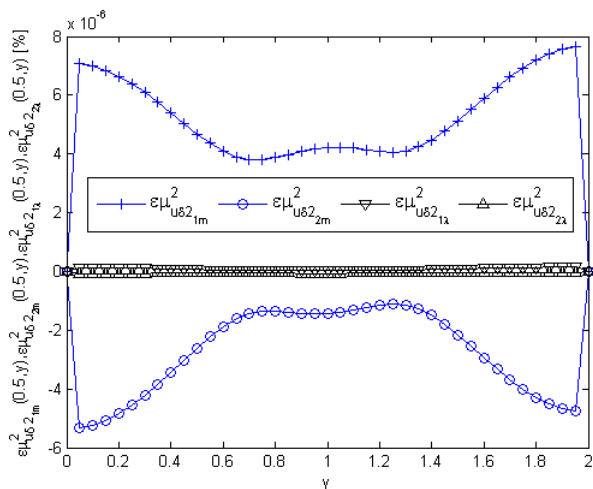
Figura 5.47: Funções desvio relativo do valor esperado, caso 2, novas metodologias.

Na Figura 5.47 (a) comparam-se curvas relativas as metodologias de *Monte Carlo - Neumann*,

mista 1 e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2. Já na Figura 5.47 (b) comparam-se curvas relativas a três metodologias, a saber: *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2. Observa-se que, com relação ao desvio relativo do valor esperado, na norma $i = 2$, os melhores resultados no quesito precisão, foram obtidos pela metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 e os resultados menos precisos foram obtidos pela metodologia *Monte Carlo - Neumann*, quando comparadas as quatro metodologias envolvendo cotas. Analisando-se os resultados apresentados nas Tabelas 5.11, 5.13, 5.15 e 5.17 que, independente da norma $i = 1, 2, 3, 4$, os melhores resultados quanto a precisão também são obtidos pela metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1.

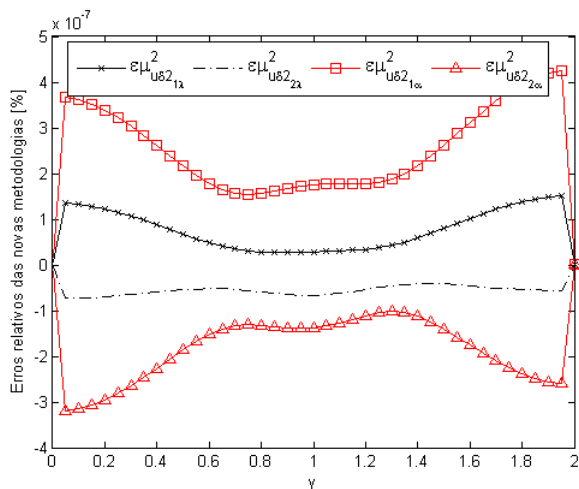


(a) Desvio relativo da autocorrelação, na norma 2

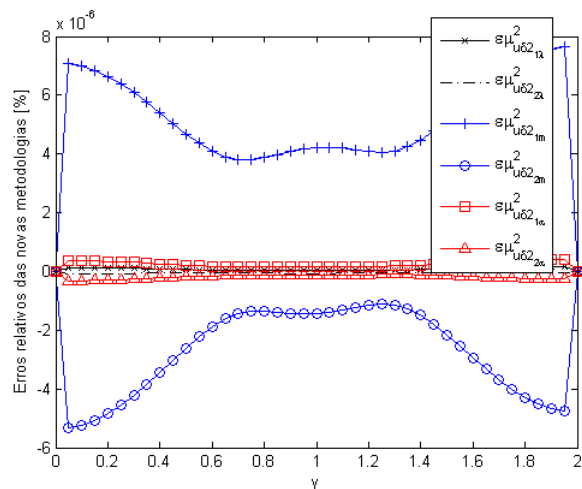


(b) Desvio relativo da autocorrelação, na norma 2

Figura 5.48: Funções desvio relativo da autocorrelação, caso 2.



(a) Desvio relativo da autocorrelação, na norma 2



(b) Desvio relativo da autocorrelação, na norma 2

Figura 5.49: Funções desvio relativo da autocorrelação, caso 2, novas metodologias.

Nas Figuras 5.48 (a) e (b) e 5.49 (a) e (b) representam-se graficamente, de forma comparativa, as estimativas das funções desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$, na norma $i = 2$. Na Figura 5.48 (a) comparam-se as cotas envolvendo as metodologias *Monte Carlo - Neumann* e *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante. Na Figura 5.48 (b) são comparadas as metodologias *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante e *Monte Carlo - Neumann*, mista 1. Na Figura 5.49 (a) são comparadas as metodologias *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2. Já na Figura 5.49 (b) comparam-se três metodologias *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2. Analisando-se estas representações gráficas, observa-se que, na norma $i = 2$, os resultados mais precisos, no quesito desvio relativo da autocorrelação também são obtidos por meio da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 já os resultados menos precisos são obtidos pela metodologia *Monte Carlo - Neumann*. Observando-se os resultados apresentados nas Tabelas 5.11, 5.13, 5.15 e 5.17, percebe-se que essas conclusões também são válidas para as demais normas, $i = 1, 3, 4$, analisadas.

Comparativamente, em relação ao quesito precisão, no *caso 2* todas as metodologias demonstraram um ótimo desempenho em comparação ao *caso 1*. Pôde-se observar que no *caso* os piores desempenhos quanto ao desvio relativo do valor esperado ficaram na ordem de 10^{-5} , muito inferiores em comparação com os mesmos indicadores no *caso 1*. No entanto, detre as quatro metodologias envolvendo cotas, os melhores desempenhos também foram demonstrados pela metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1. Já considerando-se as cinco metodologias, os melhores resultados foram obtidos pela metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ .

5.3 Problemas com variabilidades maiores na fundação

Como a fundação (solo) é mais suscetível a variabilidades, destina-se esta seção para análises envolvendo taxas maiores de incerteza sobre o coeficiente de flexão da base $\kappa_w = \kappa_w(x, y, \omega)$.

Nas análises, o coeficiente de rigidez da placa $\alpha = \alpha(x, y)$ foi considerado determinístico, já o coeficiente de rigidez da fundação $\kappa_w = \kappa_w(x, y, \omega)$ foi considerado estocástico, sendo parametrizado pelo processo estocástico descrito em (5.3). Foram analisados problemas considerando-se duas taxas de incerteza. No primeiro exemplo (problema) considerou-se $\sigma_{\kappa_w} = \frac{3}{10} \cdot \mu_{\kappa_w}$ e no segundo exemplo (problema) considerou-se $\sigma_{\kappa_w} = \frac{5}{10} \cdot \mu_{\kappa_w}$. Em ambos os exemplos, os demais parâmetros do problema de Kirchhoff em fundação de Winkler foram tomados como $\mu_{\kappa_w}(x, y) = 1000 \text{ N/m}^3$ e $\alpha(x, y) = 2651 \text{ N.m}$, $\forall (x, y) \in D$. Já para as funções de base foi considerado $N_b = 3$, com isso têm-se $m = 9$.

Para analisar a eficiência quanto a precisão foram feitos testes nas cinco metodologias, a saber, metodologia de *Monte Carlo - Neumann* λ , metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 e metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 2. Nesses exemplos também foram

adotadas 30000 realizações do processo estocástico de reposta.

5.3.1 Primeiro exemplo: $\sigma_{\kappa_w} = \frac{3}{10} \cdot \mu_{\kappa_w}$

Neste exemplo foram feitas simulações considerando-se a incerteza sobre κ_w de 30%, isto é, tomou-se $\sigma_{\kappa_w} = \frac{3}{10} \cdot \mu_{\kappa_w}$. Na sequência apresentam-se, para cada uma das metodologias, os desvios relativos máximos (em módulo) quanto ao valor esperado e a autocorrelação.

Com a aplicação da metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ o valor máximo (em módulo) do desvio relativo do valor esperado é dado por $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}}(x, y)|\} = 3.217799 \times 10^{-07}\%$. O valor máximo (em módulo) do desvio relativo da autocorrelação é dado por $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y)|\} = 6.435610 \times 10^{-07}\%$.

Na metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas os menores desvios relativos com relação ao valor esperado e a autocorrelação foram obtidos com o uso das normas $i = 2, 4$. Conforme pode ser observado na Tabela 5.19, as estimativas dos valores máximos (em módulo) dos desvios relativos do valor esperado e da autocorrelação, nas normas $i = 2, 4$, são dados por: $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2_1}}}(x, y)|\} = 10.575792 \times 10^{-5}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 4_1}}}(x, y)|\} = 11.975679 \times 10^{-5}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2_1}}^2}(x, y)|\} = 2.115153 \times 10^{-4}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 4_1}}^2}(x, y)|\} = 2.395129 \times 10^{-4}$.

Cota	Valor esperado	(x10 ⁻⁵)	Autocorrelação	(x10 ⁻⁴)
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i_1}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i_2}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i_1}}^2}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i_2}}^2}(x, y) \}$
1	79.085865%	78.092107%	15.817038%	15.618499%
2	10.575792%	9.582069%	2.115153%	1.916412%
3	51.118821%	50.125077%	10.223715%	10.025038%
4	11.975679%	10.981955%	2.395129%	2.196389%

Tabela 5.19: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, sobre o domínio D .

Observando-se a Tabela 5.20, evidenciam-se que com a aplicação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante os menores desvios relativos com relação ao valor esperado e a autocorrelação também foram obtidos com o uso das normas $i = 2, 4$ e estes ficaram muito próximos entre si. Pela Tabela 5.20, as estimativas dos valores máximos (em módulo) dos desvios relativos do valor esperado e da autocorrelação, nas normas $i = 2, 4$, são dados por: $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2_{1m}}}}(x, y)|\} = 7.535923 \times 10^{-5}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 4_{1m}}}}(x, y)|\} = 7.536084 \times 10^{-5}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2_{1m}}^2}}(x, y)|\} = 1.507183 \times 10^{-4}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 4_{1m}}^2}}(x, y)|\} = 1.507216 \times 10^{-4}$.

Cota	Valor esperado (x10 ⁻⁵)	Autocorrelação (x10 ⁻⁴)
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta_{i1m}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta_{i2m}}}(x, y) \}$
1	64.975574%	63.991708%
2	7.535923%	6.552005%
3	13.556073%	12.572162%
4	7.536084%	6.552167%

Tabela 5.20: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, sobre o domínio D .

Pela Tabela 5.21, observa-se que na metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, os melhores resultados quanto aos desvios relativos com relação ao valor esperado e a autocorrelação foram obtidos com o uso das normas $i = 2, 4$. Suas estimativas em termos dos valores máximos (em módulo), são dados, respectivamente, por: $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{21\lambda}}}(x, y)|\} = 1.488576 \times 10^{-6}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{41\lambda}}}(x, y)|\} = 1.488601 \times 10^{-6}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{21\lambda}}^2}(x, y)|\} = 2.977155 \times 10^{-6}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{41\lambda}}^2}(x, y)|\} = 2.977205 \times 10^{-6}$. Nesta metodologia observa-se que na norma $i = 3$, os desvios relativos também ficaram muito próximos aos obtidos com as normas $i = 2, 4$.

Cota	Valor esperado (x10 ⁻⁶)	Autocorrelação (x10 ⁻⁶)
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta_{i1\lambda}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta_{i2\lambda}}}(x, y) \}$
1	16.584031%	16.125286%
2	1.488576%	1.029833%
3	2.164324%	1.705580%
4	1.488601%	1.029859%

Tabela 5.21: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, sobre o domínio D .

Aplicando a metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 2 evidencia-se, pelos dados da Tabela 5.22, que os menores valores (em módulo) dos desvios relativos com relação ao valor esperado e a autocorrelação foram obtidos usando-se as normas $i = 2, 4$. As estimativas dos valores máximos (em módulo) dos desvios relativos do valor esperado e da autocorrelação são dados, respectivamente, por: $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{21\alpha}}}(x, y)|\} = 4.269463 \times 10^{-6}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{41\alpha}}}(x, y)|\} = 4.269551 \times 10^{-6}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{21\alpha}}^2}(x, y)|\} = 8.538928 \times 10^{-6}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{41\alpha}}^2}(x, y)|\} = 8.539106 \times 10^{-6}$. Igualmente ao observado na metodologia anterior, os desvios relativos obtidos com a norma $i = 3$, ficaram muito próximos aos obtidos com as normas $i = 2, 4$.

Cota	Valor esperado	(x10 ⁻⁶)	Autocorrelação	(x10 ⁻⁶)
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i 1\alpha}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i 2\alpha}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i 1\alpha}}^2}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i 2\alpha}}^2}(x, y) \}$
1	47.733589%	47.216479%	95.467157%	94.433009%
2	4.269463%	3.752368%	8.538928%	7.504734%
3	6.864272%	6.347175%	13.728546%	12.694349%
4	4.269551%	3.752456%	8.539106%	7.504912%

Tabela 5.22: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, sobre o domínio D .

5.3.2 Segundo exemplo: $\sigma_{\kappa_w} = \frac{1}{2} \cdot \mu_{\kappa_w}$

Neste exemplo foram feitas simulações considerando-se a incerteza sobre κ_w de 50%, isto é, tomou-se $\sigma_{\kappa_w} = \frac{1}{2} \cdot \mu_{\kappa_w}$. Na sequência apresentam-se, para cada uma das metodologias, os desvios relativos máximos (em módulo) quanto ao valor esperado e a autocorrelação.

Com a metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ o valor máximo (em módulo) do desvio relativo do valor esperado é dado por $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}}(x, y)|\} = 8.924016 \times 10^{-07}\%$. O valor máximo (em módulo) do desvio relativo da autocorrelação é dado por $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y)|\} = 17.848034 \times 10^{-07}\%$.

Na metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas os menores desvios relativos com relação ao valor esperado e a autocorrelação foram obtidos com a utilização das normas $i = 2, 4$. Evidencia-se na Tabela 5.23, que as estimativas dos valores máximos (em módulo) dos desvios relativos do valor esperado e da autocorrelação, nas normas $i = 2, 4$, são dados por: $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 21}}}(x, y)|\} = 29.383620 \times 10^{-5}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 41}}}(x, y)|\} = 33.273553 \times 10^{-5}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 21}}^2}(x, y)|\} = 5.876694 \times 10^{-4}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 41}}^2}(x, y)|\} = 6.654675 \times 10^{-4}$. Observa-se que esses valores de desvios relativos ficaram praticamente 3 vezes superiores aos obtidos no exemplo anterior.

Cota	Valor esperado	(x10 ⁻⁵)	Autocorrelação	(x10 ⁻⁴)
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i 1}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i 2}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i 1}}^2}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u_{\delta i 2}}^2}(x, y) \}$
1	219.838586%	217.078084%	43.966769%	43.416293%
2	29.383620%	26.623274%	5.876694%	5.324653%
3	142.149520%	139.389082%	28.429567%	27.878030%
4	33.273553%	30.513204%	6.654675%	6.102640%

Tabela 5.23: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, sobre o domínio D .

Observando-se a Tabela 5.24, fica evidente que os menores desvios relativos com relação ao valor esperado e a autocorrelação foram obtidos com o uso das normas $i = 2, 4$, no emprego da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante . Pela Tabela 5.24, as estimativas dos valores máximos (em módulo) dos desvios relativos do valor esperado e da autocorrelação, nas normas $i = 2, 4$, são dados por: $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 21m}}}(x, y)|\} = 21.146895 \times 10^{-5}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 41m}}}(x, y)|\} =$

$$21.147653 \times 10^{-5}, \max_D \{|\epsilon_{\mu_{u\delta 21m}}^2(x, y)|\} = 4.229353 \times 10^{-4}, \max_D \{|\epsilon_{\mu_{u\delta 41m}}^2(x, y)|\} = 4.229505 \times 10^{-4}.$$

Cota	Valor esperado	(x10 ⁻⁵)	Autocorrelação	(x10 ⁻⁴)
i	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i1m}}^2(x, y) \}$	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i2m}}^2(x, y) \}$	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i1m}}^2(x, y) \}$	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i2m}}^2(x, y) \}$
1	182.292835%	179.532363%	36.457824%	35.906964%
2	21.146895%	18.386556%	4.229353%	3.677306%
3	38.080619%	35.320266%	7.616064%	7.064054%
4	21.147653%	18.387314%	4.229505%	3.677457%

Tabela 5.24: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, sobre o domínio D .

Na Tabela 5.25, observa-se que pela metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos com relação ao valor esperado e a autocorrelação são muito próximos entre si no uso das normas $i = 2, 3, 4$. No entanto, nas normas $i = 2, 4$ eles são ligeiramente menores. Suas estimativas são dadas, respectivamente, por: $\max_D \{|\epsilon_{\mu_{u\delta 21\lambda}}^2(x, y)|\} = 4.131891 \times 10^{-6}$, $\max_D \{|\epsilon_{\mu_{u\delta 41\lambda}}^2(x, y)|\} = 4.132008 \times 10^{-6}$, $\max_D \{|\epsilon_{\mu_{u\delta 21\lambda}}^2(x, y)|\} = 8.263783 \times 10^{-6}$, $\max_D \{|\epsilon_{\mu_{u\delta 41\lambda}}^2(x, y)|\} = 8.264019 \times 10^{-6}$.

Cota	Valor esperado	(x10 ⁻⁶)	Autocorrelação	(x10 ⁻⁶)
i	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i1\lambda}}^2(x, y) \}$	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i2\lambda}}^2(x, y) \}$	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i1\lambda}}^2(x, y) \}$	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i2\lambda}}^2(x, y) \}$
1	46.181570%	44.904020%	92.363102%	89.808053%
2	4.131891%	2.854326%	8.263783%	5.708655%
3	6.006128%	4.728565%	12.012264%	9.457139%
4	4.132008%	2.854443%	8.264019%	5.708891%

Tabela 5.25: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, sobre o domínio D .

Cota	Valor esperado	(x10 ⁻⁵)	Autocorrelação	(x10 ⁻⁵)
i	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i1\alpha}}^2(x, y) \}$	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i2\alpha}}^2(x, y) \}$	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i1\alpha}}^2(x, y) \}$	$\max_D \{ \epsilon_{\mu_{u\delta i2\alpha}}^2(x, y) \}$
1	13.266526%	13.122882%	26.533030%	26.245801%
2	1.186166%	1.042528%	2.372334%	2.085057%
3	1.908442%	1.764803%	3.816884%	3.529607%
4	1.186208%	1.042569%	2.372416%	2.085139%

Tabela 5.26: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, sobre o domínio D .

Pelos dados da Tabela 5.26, com a metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, evidencia-se, que os menores valores (em módulo) dos desvios relativos com relação ao valor esperado e a autocorrelação nas normas $i = 2, 3, 4$ estão próximos entre si, sendo que na norma $i = 3$ eles são ligeiramente maiores. Conforme Tabela 5.26, as estimativas dos valores máximos (em

módulo) dos desvios relativos do valor esperado e da autocorrelação nas normas $i = 2, 4$ são dados por: $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{\delta 2_1 \alpha}}(x, y)|\} = 11.86166 \times 10^{-6}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{\delta 4_1 \alpha}}(x, y)|\} = 11.86208 \times 10^{-6}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{\delta 2_1 \alpha}^2}(x, y)|\} = 23.72334 \times 10^{-6}$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{\delta 4_1 \alpha}^2}(x, y)|\} = 23.72416 \times 10^{-6}$.

Capítulo 6

Simulações numéricas aplicadas ao problema de flexão da placa de Kirchhoff apoiada sobre uma base de Pasternak

Neste capítulo analisa-se a simulação numérica de um problema de flexão da placa de Kirchhoff estocástica, simplesmente apoiada, apoiada em uma fundação de Pasternak. Para tanto aplicam-se cinco metodologias. Duas metodologias propostas por *Ávila & Beck* (2014), (2015b) e (2015a) em seus trabalhos, *Monte Carlo - Neumann λ* e *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, aplicados a problemas de vigas pelos autores. E as outras três metodologias, envolvendo cotas, oriundas de variações das duas anteriores, denominadas de: *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante; *Monte Carlo - Neumann*, mista 1; e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2. Todas elas descritas nos *capítulos* 3 e 4 do presente trabalho.

O problema da flexão da placa de Kirchhoff foi dividido em três (sub) problemas: no *problema 1*, considerou-se a incerteza sobre a rigidez da placa, isto é, sobre o parâmetro $\alpha = \alpha(x, y, \omega)$; no *problema 2*, considerou-se a incerteza sobre o parâmetro $\kappa_p = \kappa_p(x, y, \omega)$, que é um coeficiente de rigidez da base; e no *problema 3*, considerou-se a incerteza sobre o parâmetro $\kappa_w = \kappa_w(x, y, \omega)$, também coeficiente de rigidez da base. Cada um dos (sub) problemas foi analisado separadamente nas metodologias de *Monte Carlo - Neumann λ* e *Monte Carlo - Neumann*, mista 1.

Na sequência, procedeu-se a análise do desempenho das cinco metodologias, considerando-se a incerteza sobre os três parâmetros, α , κ_p e κ_w , simultaneamente.

A formulação matemática, do problema da placa de Kirchhoff repousado em uma base de Pasternak, é descrita por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta(\alpha \cdot \Delta u(x, y, \omega)) + \nabla(\kappa_p \nabla u(x, y, \omega)) \\ + \kappa_w u(x, y, \omega) = q(x, y), & \forall (x, y, \omega) \in D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \\ u(x, y, \omega) = 0, & \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \\ \Delta u(x, y, \omega) = 0, & \forall (x, y, \omega) \in \partial D \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \end{array} \right. \quad (6.1)$$

onde, $\alpha = \alpha(x, y, \omega)$ é o coeficiente de rigidez da placa, $\kappa_p = \kappa_p(x, y, \omega)$ e $\kappa_w = \kappa_w(x, y, \omega)$ são coeficientes de rigidez da base de apoio, $u = u(x, y, \omega)$ representa o deslocamento transversal estocástico da placa sobre o domínio D e $q = q(x, y)$ o carregamento, que neste caso foi considerado determinístico.

Neste problema numérico, considera-se o domínio D dado pelo conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq L_x \text{ e } 0 \leq y \leq L_y\}$, com $L_x = 1\text{m}$ e $L_y = 2\text{m}$ e o carregamento $q(x, y) = 1000\text{ N}$, uniformemente distribuído sobre a placa. Nos problemas, a incerteza foi modelada por processos estocásticos parametrizados, conforme segue:

$$\alpha(x, y, \omega) = \mu_\alpha(x, y) + \frac{\sigma_\alpha}{2} [\xi_1(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \xi_2(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \xi_3(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) + \xi_4(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right)] \quad \forall (x, y, \omega) \in \bar{D} \times \Omega, \quad (6.2)$$

$$\kappa_p(x, y, \omega) = \mu_{\kappa_p}(x, y) + \frac{\sigma_{\kappa_p}}{2} [\varsigma_1(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \varsigma_2(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \varsigma_3(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) + \varsigma_4(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right)] \quad \forall (x, y, \omega) \in \bar{D} \times \Omega. \quad (6.3)$$

$$\kappa_w(x, y, \omega) = \mu_{\kappa_w}(x, y) + \frac{\sigma_{\kappa_w}}{2} [\zeta_1(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \zeta_2(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \zeta_3(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) + \zeta_4(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right)] \quad \forall (x, y, \omega) \in \bar{D} \times \Omega. \quad (6.4)$$

Para a caracterização da incerteza, as amostras dos coeficientes, nos problemas, foram definidas usando-se vetores aleatórios (randômicos). As componentes destes vetores, $\{\xi(\omega_k)\}$, $\{\zeta(\omega_k)\}$ e $\{\varsigma(\omega_k)\}$, no presente problema, foram consideradas variáveis aleatórias uniformes.

$$\{\xi(\omega_k)\}_{k=1}^N = \{\xi_1(\omega_k), \xi_2(\omega_k), \xi_3(\omega_k), \xi_4(\omega_k)\}_{k=1}^N,$$

$$\{\varsigma(\omega_k)\}_{k=1}^N = \{\varsigma_1(\omega_k), \varsigma_2(\omega_k), \varsigma_3(\omega_k), \varsigma_4(\omega_k)\}_{k=1}^N,$$

$$\{\zeta(\omega_k)\}_{k=1}^N = \{\zeta_1(\omega_k), \zeta_2(\omega_k), \zeta_3(\omega_k), \zeta_4(\omega_k)\}_{k=1}^N.$$

As funções base, descritas e utilizadas na aplicação do método de Galerkin, foram dadas pelo conjunto:

$$\Phi_m(x, y) = \text{span} \left[\left\{ \sin\left(\frac{s \cdot \pi \cdot x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{r \cdot \pi \cdot x}{L_y}\right) \right\}_{s,r=1}^{N_b} \right], \quad (6.5)$$

sendo $m = N_b^2$, com $m = \dim(\Phi_m)$, em ambos os casos considerou-se $N_b = 3$, sendo assim têm-se $m = 9$. As funções base, satisfazem as condições de contorno do problema (6.1) para uma placa

simplesmente apoiada.

As amostras dos vetores aleatórios e as realizações do processo estocástico de deslocamento transversal da placa de Kirchhoff, simplesmente apoiada e apoiada sobre uma base de Pasternak, foram obtidas por funções do *Matlab R2012a*, em um computador Lenovo, com processador *Intel(R) Core(TM) i5-3320M CPU 2.60GHz*. Para reduzir a correlação espúria produzida pelo processo de geração dos vetores aleatórios programou-se, nesse ambiente, o método “Latin Hypercube Sampling”, *Olsson & Sandberg (2002)*. Nos exemplos, os resultados dos momentos estatísticos (valor esperado, autocorrelação e variância) foram obtidos por meio de um conjunto de trinta mil realizações do processo estocástico de resposta, ($N = 30000$).

6.1 Problema 1: Incerteza sobre $\alpha = \alpha(x, y, \omega)$, coeficiente de rigidez da placa

Para a análise deste problema, os coeficientes de rigidez da base $\kappa_p = \kappa_p(x, y)$ e $\kappa_w = \kappa_w(x, y)$ foram considerados determinísticos, já o coeficiente de rigidez à placa $\alpha = \alpha(x, y, \omega)$ foi parametrizado pelo processo estocástico descrito em (6.2). Desta forma, para o presente caso, toma-se:

$$\alpha(x, y, \omega) = \mu_\alpha(x, y) + \frac{\sigma_\alpha(x, y)}{2} [\xi_1(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \xi_2(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \xi_3(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) + \xi_4(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right)], \quad \forall (x, y, \omega) \in \bar{D} \times \Omega,$$

onde μ_α é o valor médio e σ_α é o desvio padrão da rigidez à flexão da placa. Os parâmetros μ_α , σ_α e demais parâmetros determinísticos, para este problema, foram considerados como, $\mu_\alpha(x, y) = 2651 \text{ N.m}$, $\sigma_\alpha = \frac{1}{10} \cdot \mu_\alpha$, $\kappa_p(x, y) = 1000 \text{ N}$ e $\kappa_w(x, y) = 1000 \text{ Pa}$, $\forall (x, y) \in D$.

Na sequência analisa-se a solução para o problema (6.1), com as hipóteses descritas no *problema 1*, nas metodologias de *Monte Carlo - Neumann λ* e *Monte Carlo - Neumann*, mista 1. Optou-se por estas duas metodologias, por elas terem demonstrado melhor desempenho quanto a precisão, além disso tiveram desempenho satisfatório no quesito tempo computacional, na comparação com as outras três metodologias, aplicadas ao problema de flexão da placa de Kirchhoff apoiada em base de Winkler.

6.1.1 Simulação via *Monte Carlo - Neumann λ*

A Figura 6.1 (a) representa, graficamente, a superfície valor esperado para o deslocamento transversal da placa de Kirchhoff, na metodologia de *Monte Carlo - Neumann λ* . Percebe-se que seu comportamento está muito próximo do comportamento da função valor esperado, aplicando-se o método direto. Esse fato fica evidenciado pela análise das Figuras 6.2 (a) e (b) que representam, respectivamente, o desvio relativo do valor esperado e o erro da aproximação, na comparação das

duas metodologias. Observa-se, que o desvio relativo do valor esperado tem valores máximos em torno dos 0.05%, fato também evidenciado pela determinação do valor máximo (em módulo) desta função sobre todo domínio D , $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}}(x,y)|\} = 0.044310124018687\%$, já o erro tem valores máximos na ordem de 10^{-7} , enquanto o deslocamento (valor esperado) tem valores máximos na ordem de 10^{-3} .

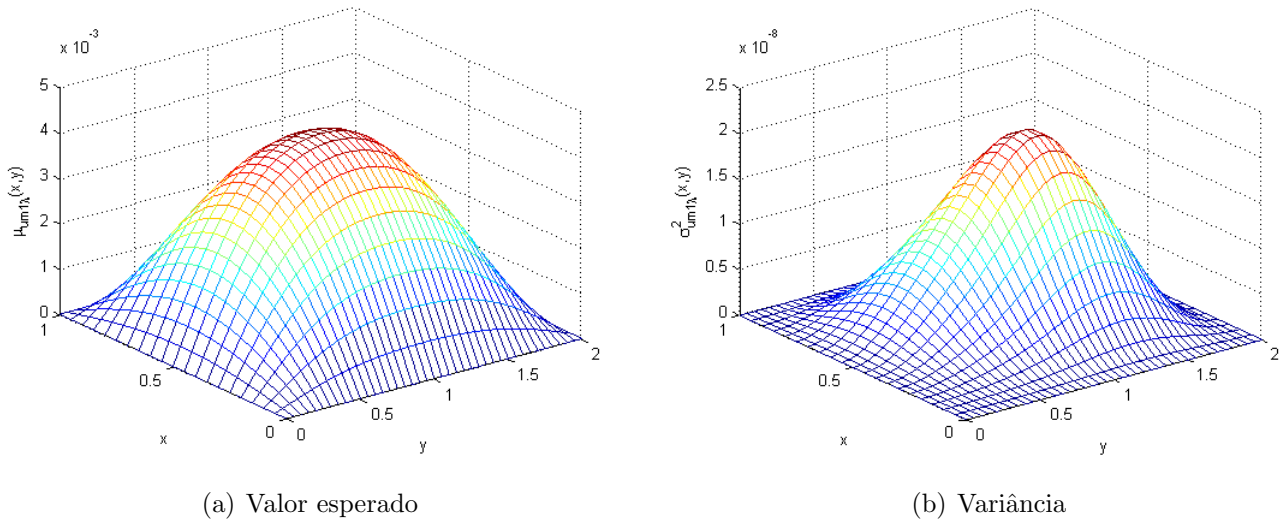


Figura 6.1: Funções valor esperado e variância pela metodologia *Monte Carlo - Neumann λ* .

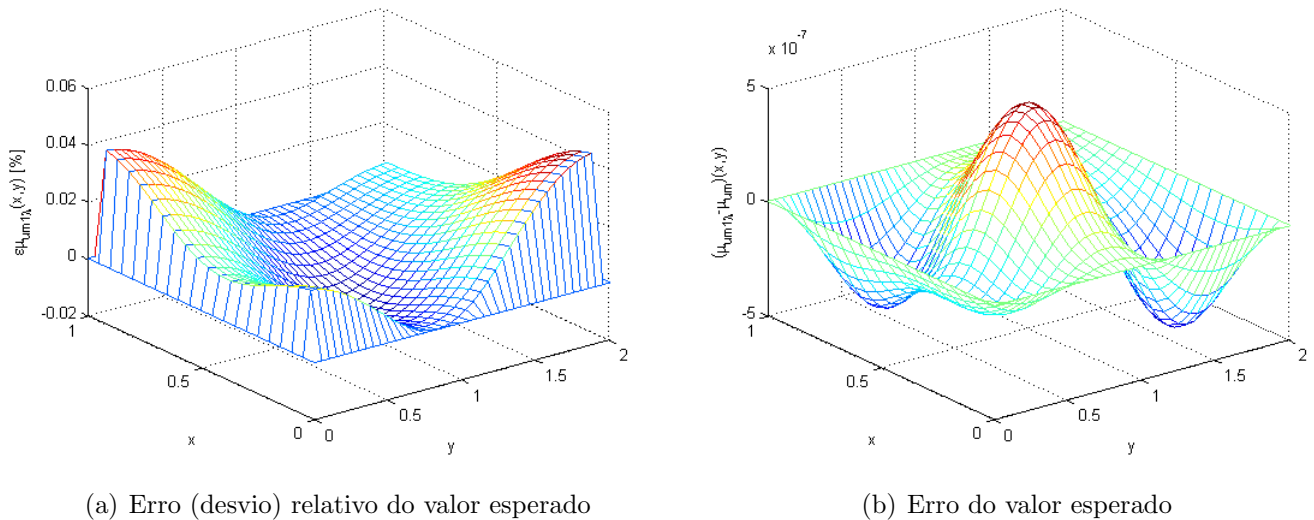
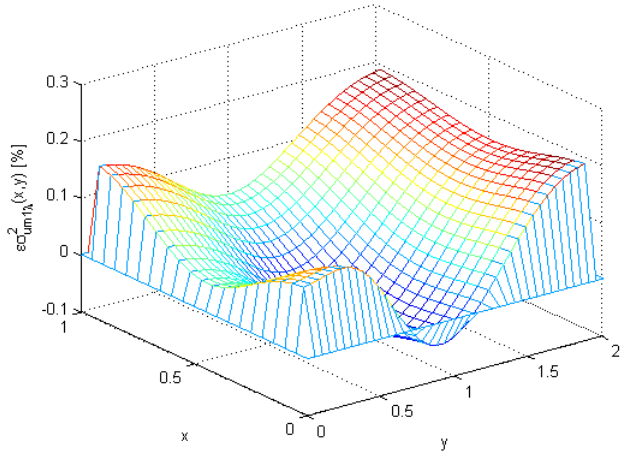


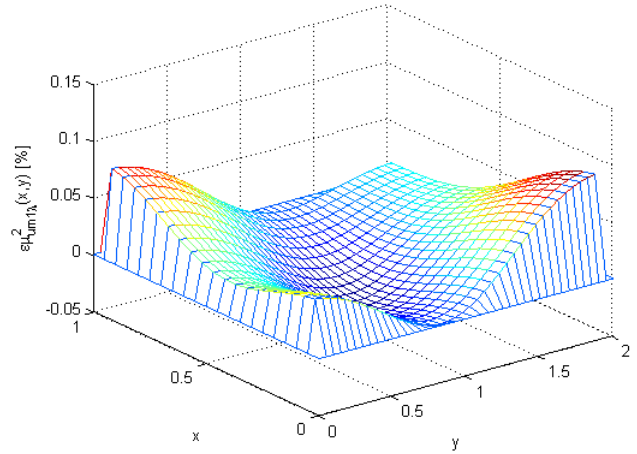
Figura 6.2: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.

Na Figura 6.1 (b), apresenta-se o comportamento da função variância, $\sigma_{u_{m1\lambda}}^2$, pela metodologia *Monte Carlo - Neumann λ* que também tem um comportamento muito próximo da variância usando-se a metodologia de *Monte-Carlo*, através da função $\sigma_{u_m}^2$, fato evidenciado pelo desvio relativo da variância, conforme pode ser observado na Figura 6.3 (a). Este desvio tem seu maior

valor extremo dado por $\max_D\{|\epsilon_{\sigma_{u_{m1\lambda}}^2}(x,y)|\} = 0.196366462567288\%$. Já pela Figura 6.3 (b) observa-se que o desvio relativo quanto a autocorrelação, considerando-se as duas metodologias, tem valores máximos de 0.1%, sendo que o valor máximo (em módulo) deste desvio é dado por $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}}(x,y)|\} = 0.088745443767557\%$.



(a) Desvio relativo da variância



(b) Desvio relativo da autocorrelação

Figura 6.3: Funções desvio relativo da variância e da autocorrelação.

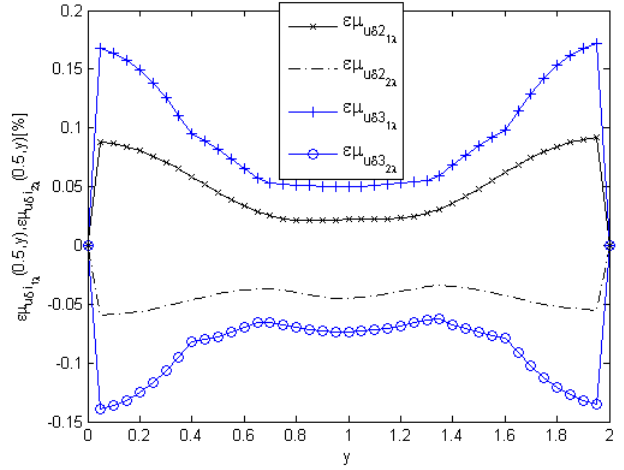
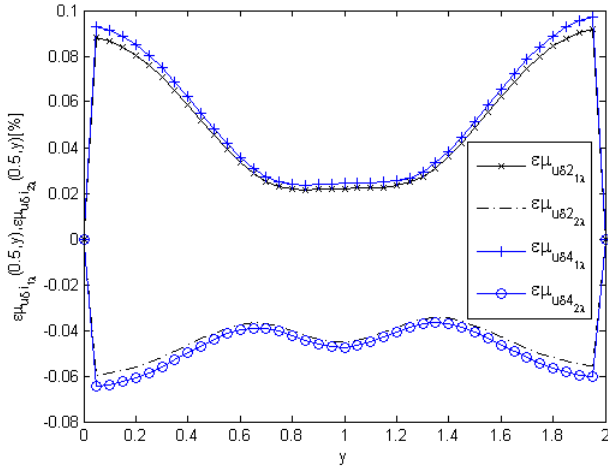
Metodologias	Tempo computacional (em segundos)
T_{MC}	735.70
T_{MCN_λ}	268.69

Tabela 6.1: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* (T_{MC}) e *Monte Carlo - Neumann λ* (T_{MCN_λ}).

Na Tabela 6.1 evidenciam-se os tempos computacionais obtidos por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* (T_{MC}) e *Monte Carlo - Neumann λ* (T_{MCN_λ}). Observa-se que o T_{MCN_λ} é consideravelmente menor que o tempo T_{MC} .

Quanto a precisão, pelas observações feitas anteriormente, no *problema 1* a metodologia de *Monte Carlo - Neumann λ* apresenta desvios pequenos com relação aos momentos estatísticos analisados.

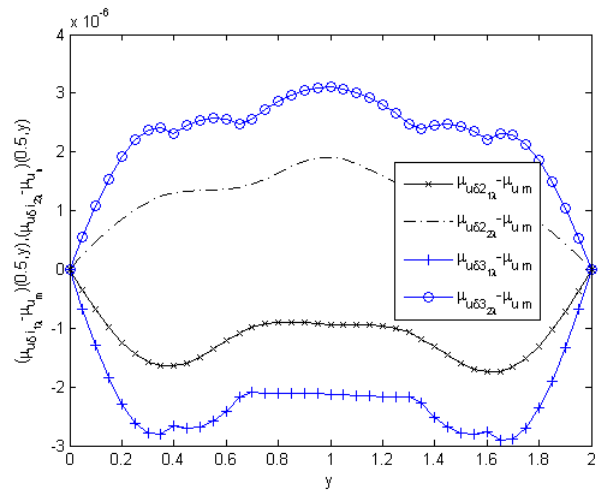
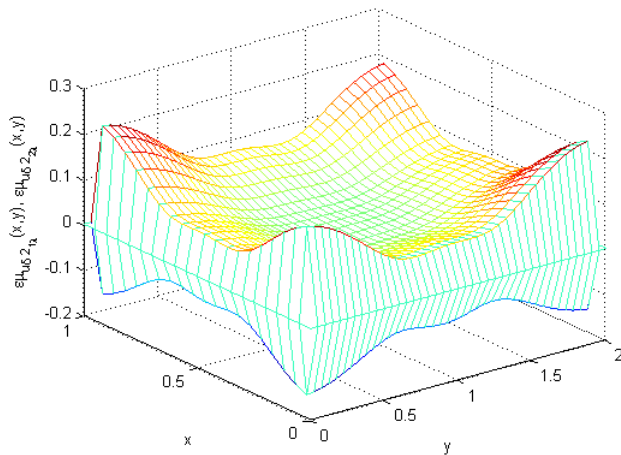
6.1.2 Simulação via Monte Carlo - Neumann, mista 1



(a) Desvio relativo do valor esperado, normas $i = 2, 4$ (b) Desvio relativo do valor esperado, normas $i = 2, 3$

Figura 6.4: Funções desvio relativo do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$, nas normas $i=2, 3, 4$.

As Figuras 6.4 (a) e (b) trazem representações gráficas das funções desvio relativo do valor esperado, com relação as cotas inferiores, $\epsilon_{\mu_{u\delta_{i1\lambda}}}(x, y)$ e com relação as cotas superiores, $\epsilon_{\mu_{u\delta_{i2\lambda}}}(x, y)$. Analizando-se a Figura 6.4 (a), dada nas normas $i = 2, 4$ e a Figura 6.4 (b), dada nas normas $i = 2, 3$, percebe-se que os desvios relativos nas normas $i = 2, 4$, e são ligeiramente menores dos obtidos com a norma $i = 3$ esses desvios são bem menores. Essa diferença comparativa também pode ser observada quando analisa-se os valores máximos, em módulo, dessas funções, conforme demonstrado na Tabela 6.2



(a) Desvio relativo do valor esperado, norma $i = 2$

(b) Erro do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$

Figura 6.5: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.

A Figura 6.5 (a) representa, graficamente, as superfícies dadas pelas funções desvio relativo do valor esperado estimado, nos limitantes inferiores por $\epsilon_{\mu_{u\delta_{21\lambda}}}(x, y)$ e nos limitantes superiores por $\epsilon_{\mu_{u\delta_{22\lambda}}}(x, y)$ definidos sobre a placa, na norma euclidiana ($i = 2$). Observa-se que os valores máximos do desvio relativo ficam em torno dos 0.2%, o que pode ser comprovado pelos seus valores máximos, conforme Tabela 6.2. A Figura 6.5 (b) representa, graficamente, as funções erro do valor esperado, também estabelecidas pelas cotas inferiores $(\mu_{u\delta_{i1\lambda}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$ e pelas cotas superiores $(\mu_{u\delta_{i2\lambda}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$, nas normas $i = 2, 3$. Observa-se que o erro fica na ordem de 10^{-6} , enquanto o deslocamento chega no máximo à ordem de 10^{-3} , sendo que os menores erros são obtidos com o uso da norma $i = 2$.

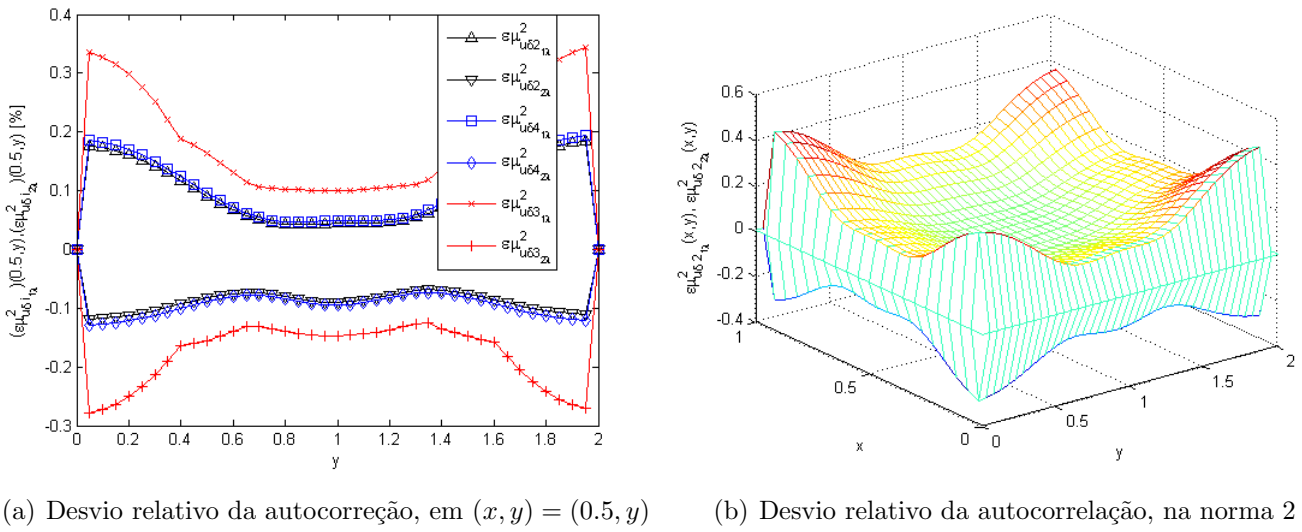


Figura 6.6: Funções desvio relativo da autocorrelação.

A Figura 6.6 (a) representa, graficamente, as funções desvio relativo da autocorrelação dadas por $\epsilon_{\mu_{u\delta_{i1\lambda}}}(x, y)$, considerando-se as cotas inferiores e por $\epsilon_{\mu_{u\delta_{i2\lambda}}}(x, y)$ considerando-se as cotas superiores, nas normas $i = 2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Observa-se, que os menores desvios, com relação ao desvio relativo da autocorrelação, são obtidos com o emprego da norma $i = 2$, fato também comprovado pela Tabela 6.2, na definição dos valores máximos (em módulo) dessas funções. A Figura 6.6 (b), representa o desvio relativo, sobre a placa, das funções de autocorrelação $\epsilon_{\mu_{u\delta_{21\lambda}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta_{22\lambda}}}(x, y)$, na norma euclidiana ($i = 2$), observa-se que os valores máximos dessas funções estão próximos de 0.5%, o que também pode ser confirmado pela Tabela 6.2.

A Tabela 6.2 traz os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos em relação ao valor esperado e em relação a autocorrelação, nas quatro normas. Pode observar-se, nesta metodologia, que os desvios relativos quanto ao valor esperado e quanto à autocorrelação, nas normas $i = 2, 4$ estão muito próximos entre si e os melhores resultados foram obtidos com essas normas. Essas constações são reforçadas pelas representações gráficas das figuras: Figura 6.4 (a) e (b), do desvio relativo com relação ao valor esperado; e Figura 6.6 (a), do desvio relativo com relação a

Cota	Valor esperado		Autocorrelação	
	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{\delta i_{1\lambda}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{\delta i_{2\lambda}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{\delta i_{1\lambda}}^2}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{\delta i_{2\lambda}}^2}(x, y) \}$
1	3.910480%	3.857946%	7.626623%	7.914884%
2	0.228429%	0.1760969%	0.456557%	0.352522 %
3	0.474866%	0.422520%	0.947527%	0.848126%
4	0.240801%	0.188468%	0.481250%	0.377360%

Tabela 6.2: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, sobre o domínio D .

autocorrelação.

Na Tabela 6.3 evidenciam-se os tempos computacionais para a resolução do *problema 1* usando-se as metodologias de *Monte-Carlo* e de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, nas quatro normas. Observa-se que os tempos computacionais da segunda metodologia são todos muito próximos, independente da norma utilizada. Percebe-se também que os tempos computacionais usando-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, são bem menores se comparados com os tempos computacionais obtidos pela metodologia *Monte-Carlo*.

Tempo computacional (em segundos)				
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
770.25	235.54	247.98	258.19	247.35

Tabela 6.3: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , mista 1, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

Quanto a precisão, percebe-se que os erros relativos dos momentos estatísticos da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, ficaram bem próximos dos erros relativos dos momentos estatísticos da metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ , na análise do *problema 1*.

6.2 Problema 2: Incerteza sobre $\kappa_p = \kappa_p(x, y, \omega)$, coeficiente de rigidez da base de apoio

Para a análise deste problema, o coeficiente de rigidez da placa $\alpha = \alpha(x, y)$ e o coeficiente de rigidez da base $\kappa_w = \kappa_w(x, y)$ foram considerados determinísticos, já o outro coeficiente de rigidez da base $\kappa_p = \kappa_p(x, y, \omega)$ foi parametrizado pelo processo estocástico descrito em (6.3). Desta forma, para o presente problema, toma-se:

$$\begin{aligned} \kappa_p(x, y, \omega) = & \mu_{\kappa_p}(x, y) + \frac{\sigma_{\kappa_p}}{2} \left[\varsigma_1(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \varsigma_2(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) \right. \\ & \left. + \varsigma_3(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) + \varsigma_4(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) \right] \quad \forall (x, y, \omega) \in \bar{D} \times \Omega. \end{aligned}$$

onde μ_{κ_p} é o valor médio, σ_{κ_p} é o desvio padrão da rigidez da base de apoio da placa. Os parâmetros μ_{κ_p} , σ_{κ_p} e demais parâmetros determinísticos, para este problema, foram considerados como, $\mu_\alpha(x, y) = 2651 \text{ N.m}$, $\kappa_p(x, y) = 1000 \text{ N}$, $\sigma_{\kappa_w} = \frac{1}{10} \cdot \mu_{\kappa_p}$ e $\kappa_w(x, y) = 1000 \text{ Pa}$, $\forall (x, y) \in D$.

Na sequência, analisa-se a solução para o *problema 2*, nas metodologias de *Monte Carlo - Neumann* λ e *Monte Carlo - Neumann*, mista 1.

6.2.1 Simulação via *Monte Carlo - Neumann* λ

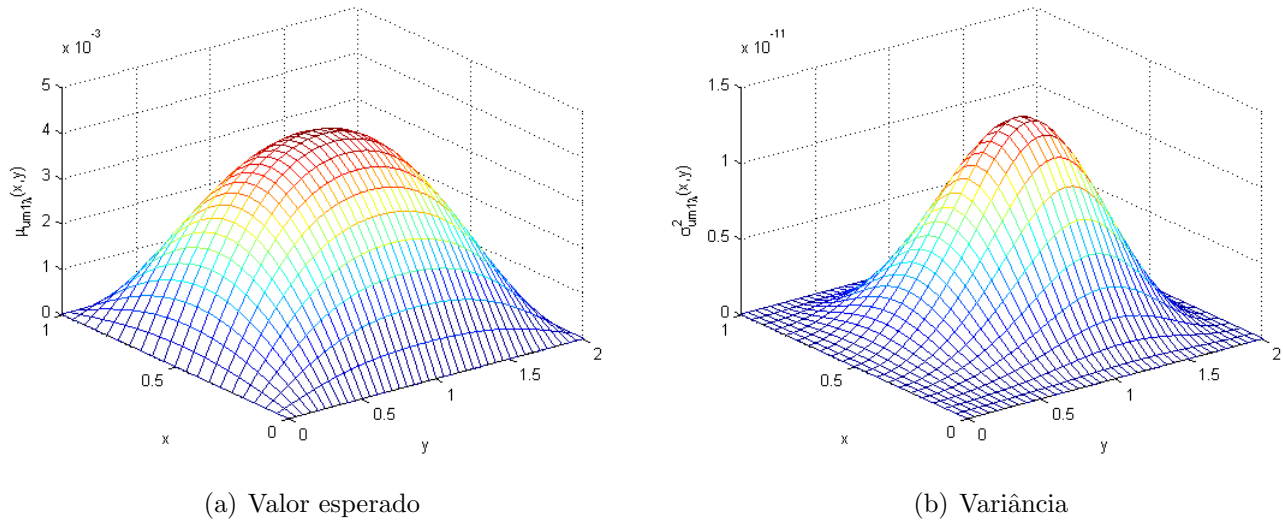
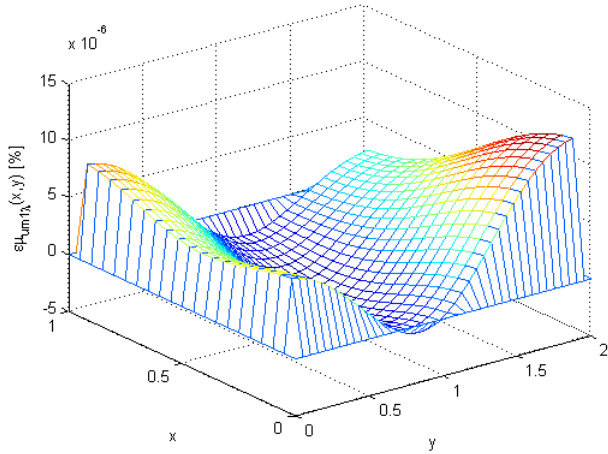
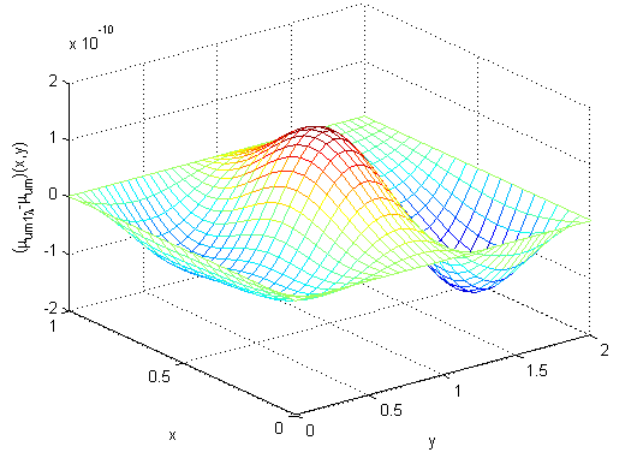


Figura 6.7: Funções valor esperado e variância pela metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ .

A Figura 6.7 (a) representa, graficamente, a superfície do valor esperado para o deslocamento transversal da placa de Kirchhoff aplicando-se metodologia de *Monte Carlo - Neumann* λ . Seu comportamento está muito próximo do comportamento da função valor esperado, aplicando-se o método direto. Esse fato que pode ser observado pela análise das Figuras 6.8 (a) (b) que representam, respectivamente, o desvio relativo e o erro da aproximação do valor esperado, na comparação das duas metodologias. Observa-se, que o desvio relativo tem valores máximos na ordem de $10^{-5}\%$, fato também evidenciado pela determinação do valor máximo da função sobre o domínio D , $\max_D \{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}}(x, y)|\} = 1.205837927287234 \times 10^{-05}\%$. Já o erro tem valores máximos na ordem de 10^{-10} , enquanto o deslocamento (valor esperado) tem valores máximos na ordem de 10^{-3} .

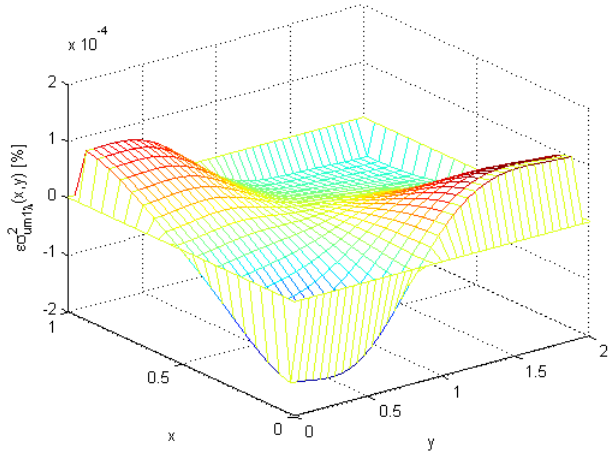


(a) Desvio relativo do valor esperado

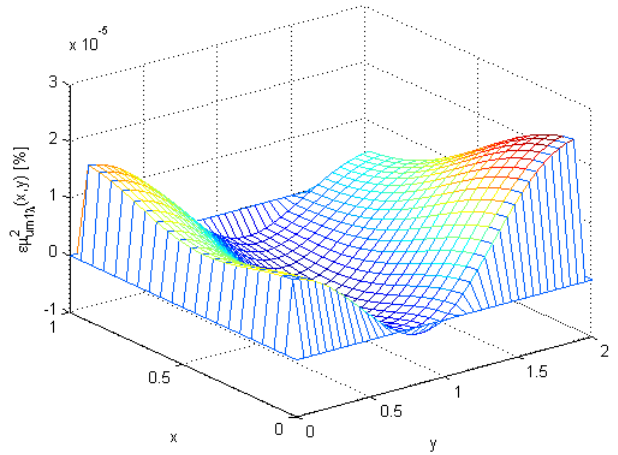


(b) Erro do valor esperado

Figura 6.8: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.



(a) Desvio relativo da variância



(b) Desvio relativo da autocorrelação

Figura 6.9: Funções desvio relativo da variância e da autocorrelação.

Na Figura 6.7 (b), apresenta-se o comportamento da função variância, $\sigma_{u_{m1\lambda}}^2(x, y)$, dada pela metodologia *Monte Carlo - Neumann λ* , que também fica muito próximo do comportamento da função variância, $\sigma_{u_m}^2(x, y)$, dada pela a metodologia de *Monte-Carlo*. Esse fato pode ser verificado pelo desvio relativo da variância, conforme está representado na Figura 6.9 (a), onde os valores máximos desses desvios ficam na ordem de $10^{-4}\%$, sendo o valor máximo, em módulo, desse desvio dado por $\max_D\{|\epsilon_{\sigma_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y)|\} = 1.138360808172756 \times 10^{-04}\%$. Já pela Figura 6.9 (b) observa-se que o desvio relativo quanto a autocorrelação, considerando-se as duas metodologias, tem valores máximos ao redor de $10^{-5}\%$, sendo que o valor máximo (em módulo) desse desvio é dado por $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y)|\} = 2.411681933045529 \times 10^{-05}\%$.

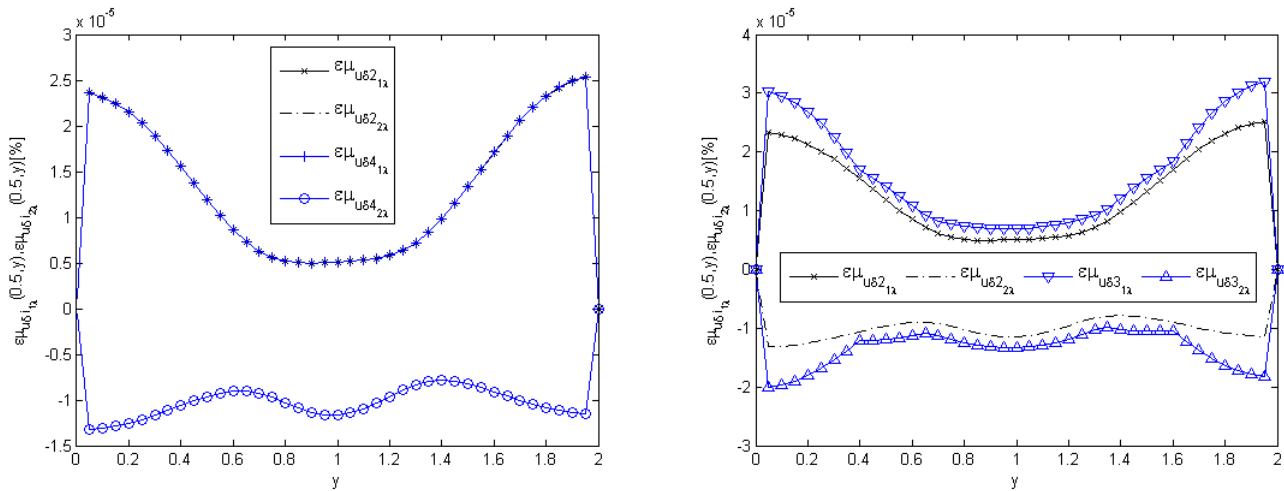
Metodologias	Tempo computacional (em segundos)
T_{MC}	599,57
T_{MCN_λ}	209.69

Tabela 6.4: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* (T_{MC}) e *Monte Carlo - Neumann λ* (T_{MCN_λ}).

Na Tabela 6.4 evidenciam-se os tempos computacionais obtidos por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* (T_{MC}) e *Monte Carlo - Neumann λ* (T_{MCN_λ}). Percebe-se que o T_{MCN_λ} é consideravelmente menor que o tempo T_{MC} .

Observa-se que no *problema 2*, considerando-se incerteza sobre o parâmetro κ_p , os desvios relativos dos momentos estatísticos são consideravelmente menores na comparação dos desvios relativos dos momentos estatísticos obtidos na análise do *problema 1*, em que considera-se a variabilidade sobre o parâmetro α .

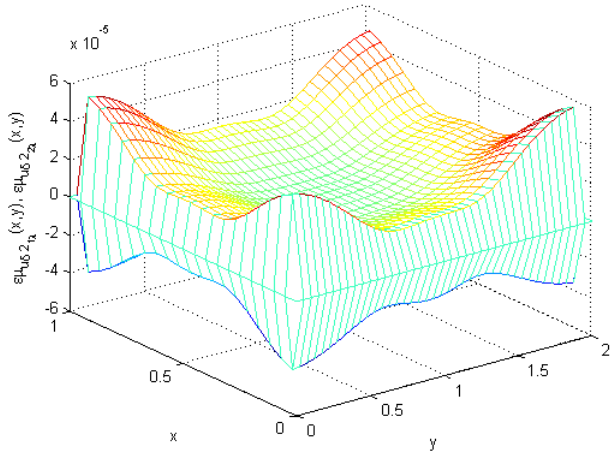
6.2.2 Simulação via *Monte Carlo - Neumann, mista 1*



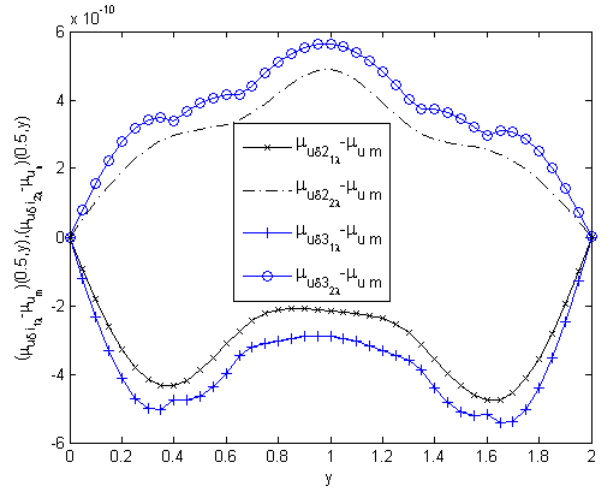
(a) Desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 4$ (b) Desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 3, 4$

Figura 6.10: Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}}$, nas normas $i=2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$.

As Figuras 6.10 (a) e (b) representam graficamente as funções desvio relativo do valor esperado. Sendo $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}}(x, y)$ representando os desvios calculados pelas cotas inferiores e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}}(x, y)$ representando os desvios calculados pelas cotas superiores, em $(x, y) = (0.5, y)$. Percebe-se que os desvios relativos do valor esperado, empregando-se as normas $i = 2, 4$, são idênticos, já com a norma $i = 3$ esses desvios são um pouco maiores. As mesmas percepções ficam evidenciadas na análise dos valores máximos, em módulo, dessas funções, conforme está representado na Tabela 6.5.



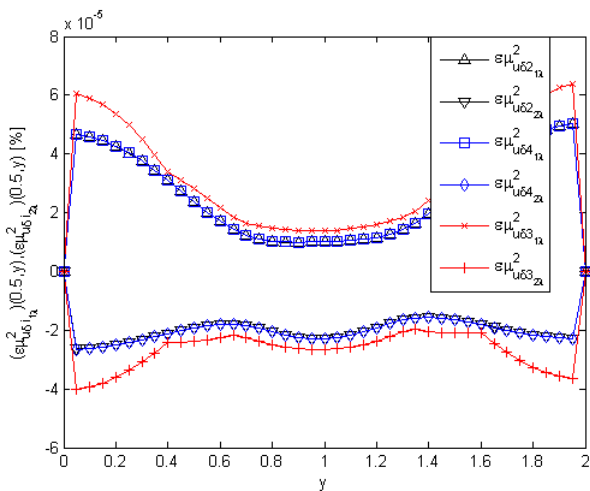
(a) Desvio relativo do valor esperado, norma $i = 2$



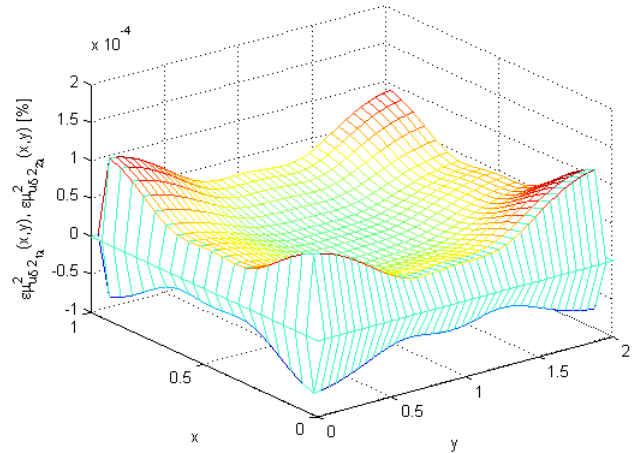
(b) Erro do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$.

Figura 6.11: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.

A Figura 6.11 (a) representa, graficamente, as superfícies dadas pelas funções desvio relativo do valor esperado. Calculadas nos limitantes inferiores por $\epsilon_{\mu_{u\delta_{21\lambda}}}(x, y)$ e nos limitantes superiores por $\epsilon_{\mu_{u\delta_{22\lambda}}}(x, y)$, ambas definidas sobre toda placa, utilizando a norma euclidiana ($i = 2$). Observa-se que o desvio relativo máximo fica na ordem de $10^{-5}\%$, o que se comprova por seus valores máximos, na Tabela 6.5. A Figura 6.11 (b) representa graficamente as funções erro do valor esperado, dado pelas cotas inferiores por $(\mu_{u\delta_{i1\lambda}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$ e dado pelas cotas superiores por $(\mu_{u\delta_{i2\lambda}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$, nas normas $i = 2, 3$. Observa-se que o erro fica na ordem de 10^{-10} , enquanto o deslocamento chega no máximo a valores na ordem de 10^{-3} , sendo que os menores erros absolutos são obtidos com o uso da norma $i = 2$.



(a) Desvio relativo da autocorreção, em $(x, y) = (0.5, y)$



(b) Desvio relativo da autocorreção, na norma 2

Figura 6.12: Funções desvio relativo da autocorreção.

A Figura 6.12 (a) representa graficamente as funções desvio relativo da autocorrelação dadas por $\epsilon_{\mu_{u\delta i_1\lambda}}^2(x, y)$, das cotas inferiores, e por $\epsilon_{\mu_{u\delta i_2\lambda}}^2(x, y)$, das cotas superiores, nas normas $i = 2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Observa-se, que os menores desvios relativos, com relação à autocorrelação, são obtidos na norma euclidiana ($i = 2$), fato também comprovado pela Tabela 6.5, na definição dos valores máximos (em módulo) dessas funções. A Figura 6.12 (b) representa o desvio relativo, sobre a placa, das funções de autocorrelação, $\epsilon_{\mu_{u\delta 2_1\lambda}}^2(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta 2_2\lambda}}^2(x, y)$, na norma euclidiana ($i = 2$), observa-se que os valores extremos dessas funções estão na ordem de $10^{-5}\%$, o que também pode ser confirmado pelos dados da Tabela 6.5.

Cota	Valor esperado	($\times 10^{-5}$)	Autocorrelação	($\times 10^{-5}$)
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_1\lambda}}^2(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_2\lambda}}^2(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_1\lambda}}^2(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_2\lambda}}^2(x, y) \}$
1	67.006182%	65.524920%	134.011763%	131.050324%
2	5.808981%	4.315581%	11.617986%	8.631164%
3	8.258398%	6.777082%	16.516779%	13.554160%
4	5.810544%	4.317145%	11.621113%	8.634291%

Tabela 6.5: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, sobre o domínio D .

A Tabela 6.5 traz os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos com relação ao valor esperado e com relação à autocorrelação, nas quatro normas. Pode-se observar, nesta metodologia, que os desvios relativos quanto ao valor esperado, bem como quanto à autocorrelação, empregando-se as normas $i = 2, 4$ são praticamente iguais e ligeiramente inferiores aos obtidos empregando-se a norma $i = 3$. Essas constações são reforçadas pelas representações gráficas nas figuras: Figura 6.10 (a) e (b), do desvio relativo com relação ao valor esperado; e Figura 6.12 (a), do desvio relativo com relação a autocorrelação.

Na Tabela 6.6 evidenciam-se os tempos computacionais, para a resolução do *problema 2*, usando-se o método direto e o método aproximado. Observa-se que os tempos computacionais obtidos com o método aproximado são muito próximos, independente da norma utilizada. Percebe-se também que os tempos computacionais usando-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, também tem um ganho considerável se comparado com a metodologia *Monte-Carlo*.

Da mesma forma, conforme foi observado na metodologia de *Monte Carlo - Neumann* λ , os desvios relativos, aplicando-se a metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, obtidos no *problema 2*, foram bem inferiores aos obtidos no *problema 1*.

Tempo computacional	(em segundos)			
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
582.24	216.14	216.40	220.52	217.01

Tabela 6.6: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , mista 1, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

6.3 Problema 3: Incerteza sobre $\kappa_w = \kappa_w(x, y, \omega)$ coeficiente de rigidez da base de apoio

Para a análise deste problema, o coeficiente de rigidez da placa, $\alpha = \alpha(x, y)$ e o coeficientes de rigidez da base, $\kappa_p = \kappa_p(x, y)$, foram considerados determinísticos, já um dos coeficiente de rigidez base, $\kappa_w = \kappa_w(x, y, \omega)$ foi parametrizado pelo processo estocástico descrito em (6.4). Desta forma, para o presente problema, toma-se:

$$\begin{aligned} \kappa_w(x, y, \omega) = \mu_{\kappa_w}(x, y) + \frac{\sigma_{\kappa_w}}{2} [\zeta_1(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) + \zeta_2(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) \\ + \zeta_3(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) + \zeta_4(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{L_y}\right)] \quad \forall (x, y, \omega) \in \bar{D} \times \Omega. \end{aligned}$$

onde, μ_{κ_w} é o valor médio e σ_{κ_w} é o desvio padrão da rigidez da base de apoio da placa, relativo ao parâmetro κ_w . Os parâmetros μ_{κ_w} , σ_{κ_w} e demais parâmetros determinísticos, para este problema, foram considerados como, $\mu_\alpha(x, y) = 2651 \text{ N.m}$, $\kappa_w(x, y) = 1000 \text{ Pa}$, $\sigma_{\kappa_w} = \frac{1}{10} \cdot \mu_{\kappa_w}$ e $\kappa_p(x, y) = 1000 \text{ N}$, $\forall (x, y) \in D$.

Na sequência analisa-se a solução para o *problema 3* nas metodologias de *Monte Carlo - Neumann* λ e de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1.

6.3.1 Simulação via *Monte Carlo - Neumann* λ

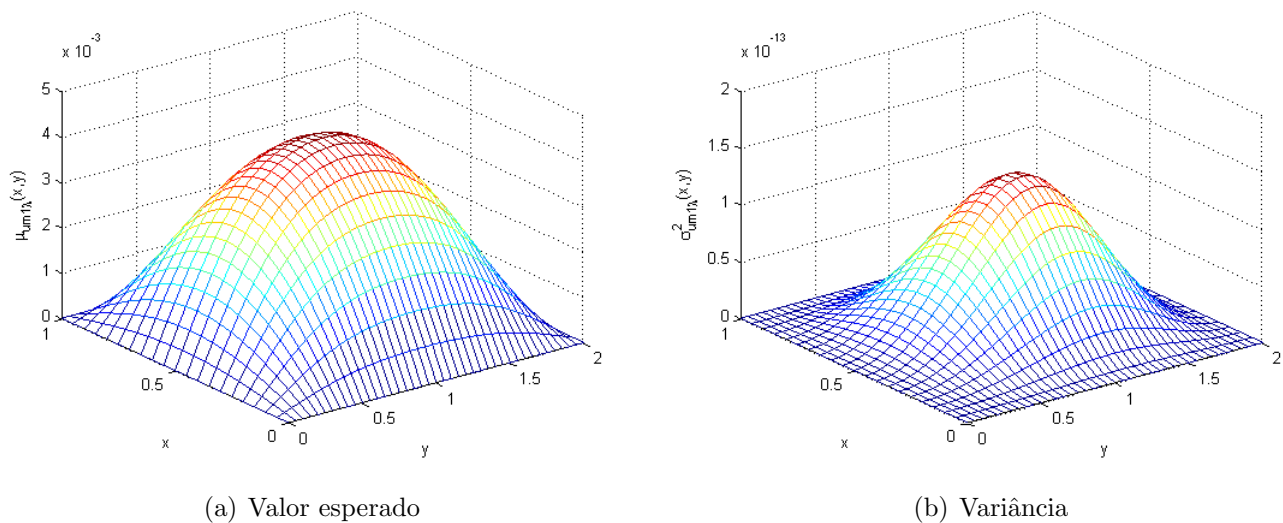
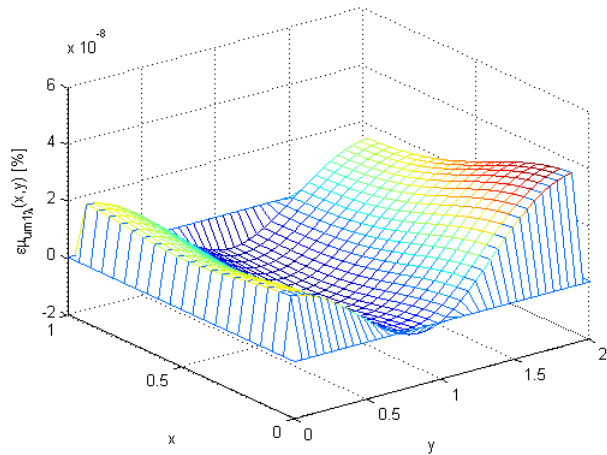


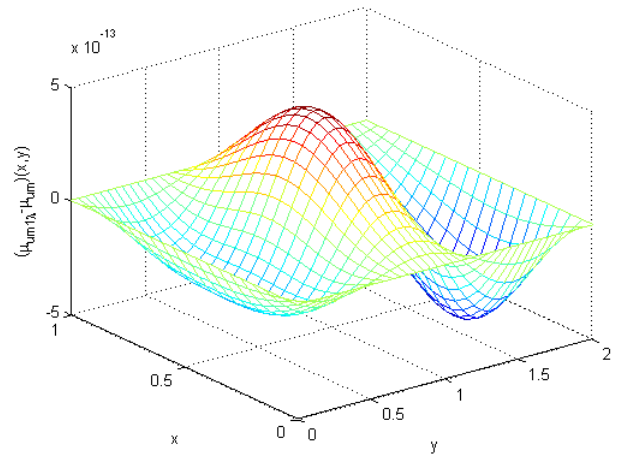
Figura 6.13: Funções valor esperado e variância pela metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ .

A Figura 6.13 (a) representa, graficamente, a superfície da função valor esperado para o deslocamento transversal da placa de Kirchhoff aplicando-se metodologia de *Monte Carlo - Neumann* λ .

Seu comportamento está muito próximo do comportamento da função valor esperado, aplicando-se o método direto. Esta consideração fica evidenciada na análise das Figuras 6.14 (a) e (b), que representam, respectivamente, o desvio relativo e o erro do valor esperado, na comparação das duas metodologias. Observa-se que o desvio relativo tem valores máximos na ordem de $10^{-8}\%$, fato também evidenciado pela determinação do valor máximo desta função sobre D , $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}}(x,y)|\} = 3.712714580217380 \times 10^{-08}\%$, já o erro tem valores máximos na ordem de 10^{-13} enquanto o deslocamento (valor esperado) tem valores máximos na ordem de 10^{-3} .

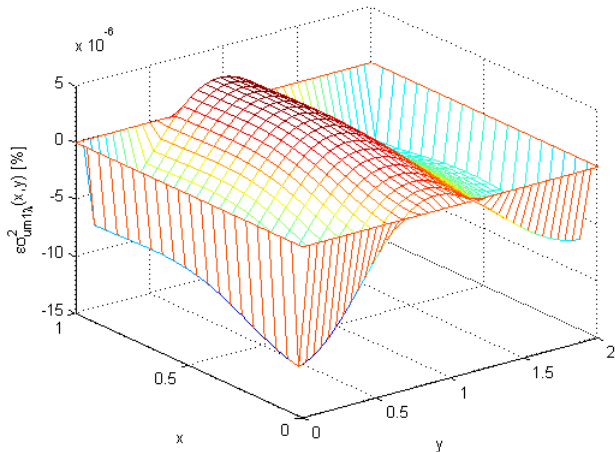


(a) Desvio (erro) relativo do valor esperado

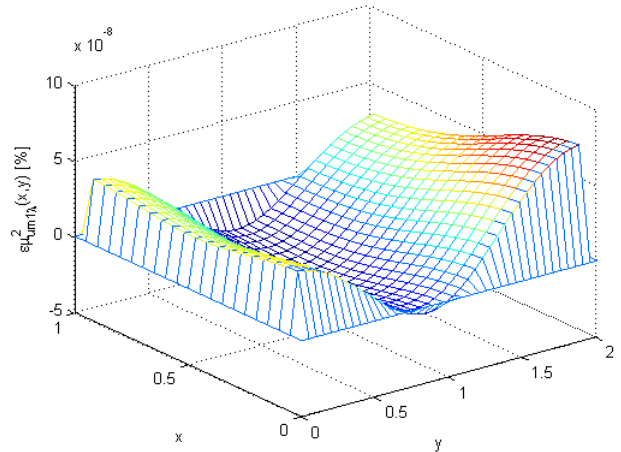


(b) Erro do valor esperado

Figura 6.14: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.



(a) Desvio relativo da variância



(b) Desvio relativo da autocorrelação

Figura 6.15: Funções desvio relativo da variância e da autocorrelação.

Na Figura 6.13 (b), apresenta-se o comportamento da função variância, $\sigma_{u_{m1\lambda}}^2(x,y)$, na metodologia de *Monte Carlo - Neumann* λ . Seu comportamento também fica muito próximo ao

comportamento da função variância, $\sigma_{u_m}^2(x, y)$, dada pelo método direto. Esta constatação, fica evidenciada pelo desvio relativo da variância, conforme pode ser observado na Figura 6.15 (a), onde os valores máximos desses desvios ficam na ordem de $10^{-6}\%$, já o valor máximo do desvio é dado por $\max_D\{|\epsilon_{\sigma_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y)|\} = 11.12369720779327 \times 10^{-06}\%$. Na Figura 6.15 (b), observa-se que o desvio relativo com relação a autocorrelação assume valores máximos na ordem de $10^{-8}\%$, sendo que o valor máximo (em módulo) desse desvio é dado por $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y)|\} = 7.425642323255488 \times 10^{-08}\%$.

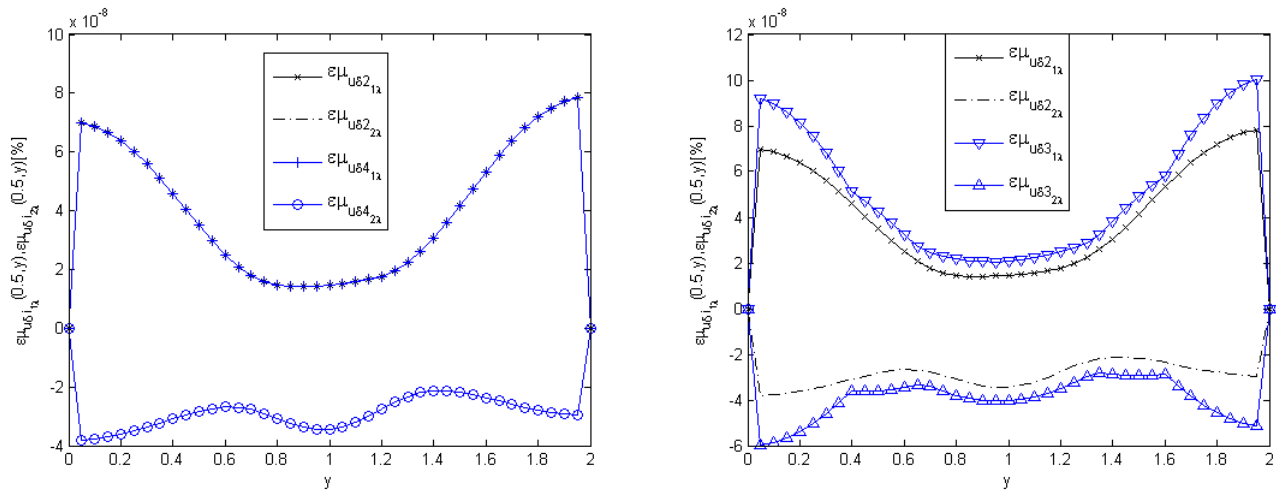
Metodologias	Tempo computacional (em segundos)
T_{MC}	624.88
T_{MCN_λ}	202.89

Tabela 6.7: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* (T_{MC}) e *Monte Carlo - Neumann λ* (T_{MCN_λ}).

Na Tabela 6.7 evidenciam-se os tempos computacionais obtidos por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* (T_{MC}) e *Monte Carlo - Neumann λ* (T_{MCN_λ}). Observa-se que o T_{MCN_λ} é consideravelmente menor que o tempo T_{MC} .

Empregando-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann λ* , no *problema 3* é possível observar que os desvios relativos quanto ao valor esperado e quanto à autocorrelação ficaram na ordem de $10^{-8}\%$.

6.3.2 Simulação via *Monte Carlo - Neumann*, mista 1



(a) Desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 4$ (b) Desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 3, 4$

Figura 6.16: Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{\delta i_{1\lambda}}}$ e $\epsilon_{\mu_{\delta i_{2\lambda}}}$, nas normas $i=2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$.

Nas Figuras 6.16 (a) e (b) estão representadas graficamente as funções desvio relativo do valor esperado dadas por, $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}}(x, y)$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Percebe-se que os desvios relativos obtidos, empregando-se as normas $i = 2, 4$, são idênticos, e ligeiramente menores que os obtidos com a norma $i = 3$. Essas constatações também podem ser confirmadas quando observa-se os valores máximos, em módulo, destas funções, conforme ilustra a Tabela 6.8

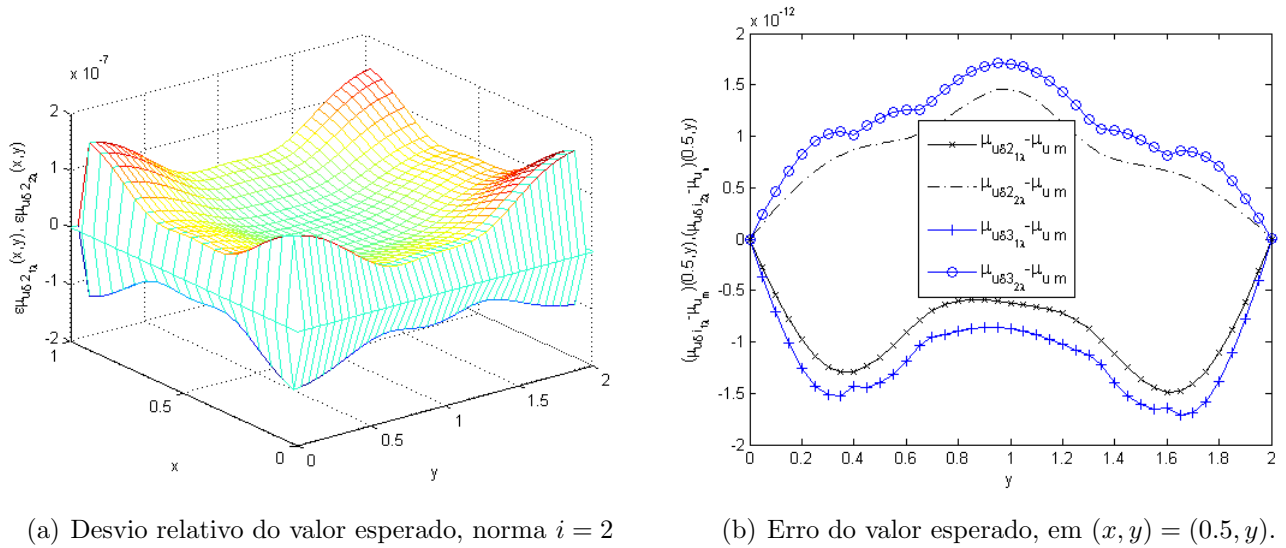
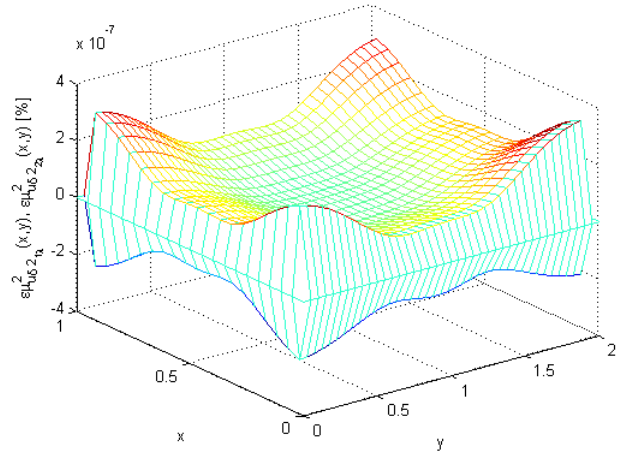
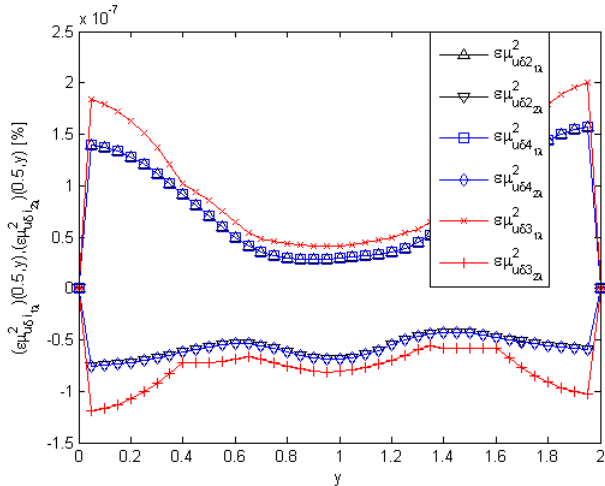


Figura 6.17: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.

A Figura 6.17 (a) representa, graficamente, as superfícies dadas pelas funções desvio relativo do valor esperado dadas por $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2 1 \lambda}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2 2 \lambda}}}(x, y)$, na norma euclidiana ($i = 2$). Observa-se que os valores máximos dos desvios relativos ficam na ordem de $10^{-8}\%$, o que comprova-se também pelos dados da Tabela 6.8. A Figura 6.17 (b) representa, graficamente, as funções erro do valor esperado dadas por, $(\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$ e $(\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$, nas normas $i = 2, 3$. Observa-se que o erro fica na ordem de 10^{-13} , enquanto o deslocamento chega no máximo a valores na ordem de 10^{-3} , sendo que os menores erros absolutos são obtidos quando emprega-se a norma $i = 2$.

A Figura 6.18 (a) representa graficamente as funções desvio relativo da autocorrelação, dadas por, $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}}^2(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}}^2(x, y)$, nas normas $i = 2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Observa-se, que os menores desvios, com relação ao desvio relativo da autocorrelação, são obtidos com o emprego das normas euclidiana e de Frobenius ($i = 2, 4$), fato também ilustrado pela Tabela 6.8, na definição dos valores máximos (em módulo) dessas funções. A Figura 6.18 (b) representa as funções desvio relativo da autocorrelação $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2 1 \lambda}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2 2 \lambda}}}(x, y)$, na norma euclidiana ($i = 2$). Observa-se que os valores máximos (em módulo) dessas funções ficam na ordem de $10^{-7}\%$, o que também pode ser confirmado na Tabela 6.8.

A Tabela 6.8 traz os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos do valor esperado e da autocorrelação. Pode-se observar, nesta metodologia, que os desvios relativos com relação ao valor esperado e à autocorrelação, nas normas $i = 2, 4$ são idênticos e ligeiramente inferiores aos obtidos



(a) Desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$ (b) Desvio relativo da autocorrelação, na norma 2

Figura 6.18: Funções desvio relativo da autocorrelação.

Cota	Valor esperado	($\times 10^{-7}$)	Autocorrelação	($\times 10^{-7}$)
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu u_{\delta i_{1\lambda}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu u_{\delta i_{2\lambda}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu^2_{u_{\delta i_{1\lambda}}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu^2_{u_{\delta i_{2\lambda}}}}(x, y) \}$
1	19.120720%	18.588682%	38.241460%	37.177381%
2	1.718535%	1.185451%	3.437070%	2.370903%
3	2.496602%	1.964569%	4.993201%	3.929137%
4	1.718546%	1.185460%	3.437090%	2.370923%

Tabela 6.8: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, sobre o domínio D .

com o emprego da norma $i = 3$. Essas constações são reforçadas pelas representações gráficas nas figuras: Figura 6.16 (a) e (b), do desvio relativo com relação ao valor esperado; e Figura 6.18 (a), do desvio relativo com relação a autocorrelação.

Na Tabela 6.9 evidenciam-se os tempos computacionais para a resolução do *problema 3* usando-se a metodologia de *Monte-Carlo* e a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1. Observa-se que os tempos computacionais da segunda metodologia são todos próximos, independente da norma utilizada. Percebe-se também que os tempos computacionais usando-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, também tem um ganho considerável se comparados com a metodologia *Monte-Carlo*.

Tempo computacional	(em segundos)			
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
557.38	204.08	205.12	204.83	204.79

Tabela 6.9: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , mista 1, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

6.4 Incerteza sobre os três parâmetros de rigidez

Nesta seção procede-se a análise do desempenho das cinco metodologias, *Monte Carlo - Neumann* λ , *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, considerando-se simultaneamente incerteza sobre os três parâmetros, α , κ_p e κ_w .

Para a análise deste problema, os coeficientes de rigidez α , κ_p e κ_w foram parametrizados pelos processos estocásticos descritos em (6.2), (6.3) e (6.4), respectivamente. Os parâmetros envolvidos no problema foram considerados como, $\mu_\alpha(x, y) = 2651 \text{ N.m}$, $\sigma_\alpha = \frac{1}{10} \cdot \mu_\alpha$, $\kappa_p(x, y) = 1000 \text{ N}$, $\sigma_{\kappa_p} = \frac{1}{10} \cdot \mu_{\kappa_p}$, $\kappa_w(x, y) = 1000 \text{ Pa}$ e $\sigma_{\kappa_w} = \frac{1}{10} \cdot \mu_{\kappa_w}$, $\forall (x, y) \in D$.

Na sequência analisa-se a solução para o problema (6.1), em cada uma das cinco metodologias, considerando-se simultaneamente incertezas sobre os três parâmetros de rigidez.

6.4.1 Simulação via *Monte Carlo - Neumann* λ

A Figura 6.19 (a) representa, graficamente, a superfície da função valor esperado para o deslocamento transversal da placa de Kirchhoff aplicando-se metodologia de *Monte Carlo - Neumann* λ . Observando-se o desvio relativo do valor esperado, ilustrado pela Figura 6.20 (a), e o erro do valor esperado, ilustrado pela Figura 6.20 (b), evidencia-se que o comportamento da função valor esperado ilustrado pela Figura 6.19 (a) está muito próximo do comportamento da função valor esperado, aplicando-se o método direto. Observa-se que o desvio relativo do valor esperado tem valores extremos máximos em torno de 0.04%, fato também evidenciado pela determinação do valor máximo da função sobre o domínio D , $\max_D \{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}}(x, y)|\} = 0.045750985832327\%$. Já o erro tem valores máximos na ordem de 10^{-7} , enquanto o deslocamento (valor esperado) tem valores máximos na ordem de 10^{-3} .

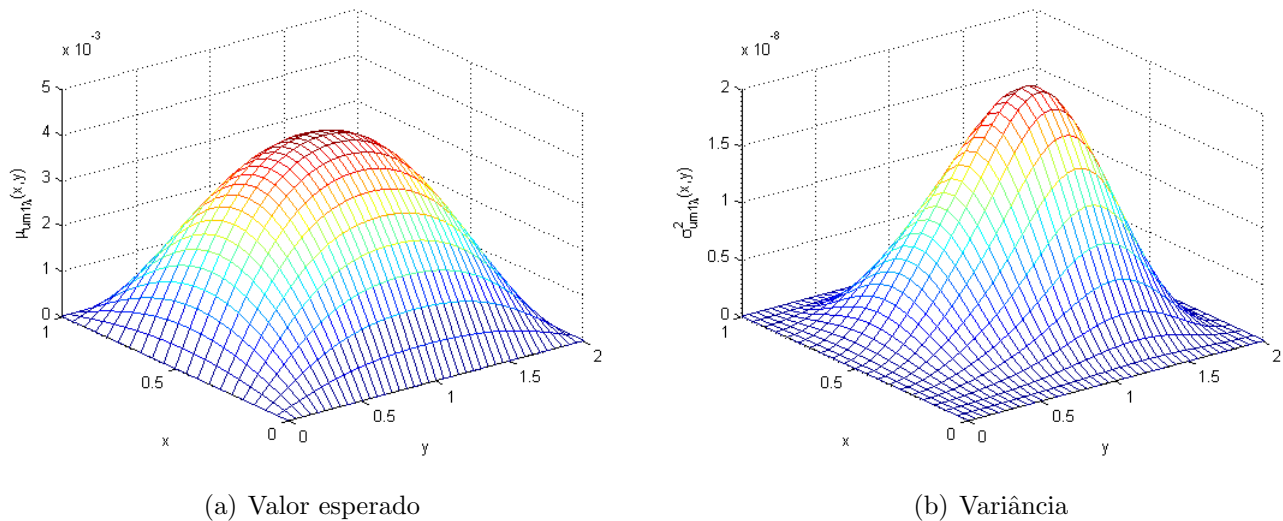
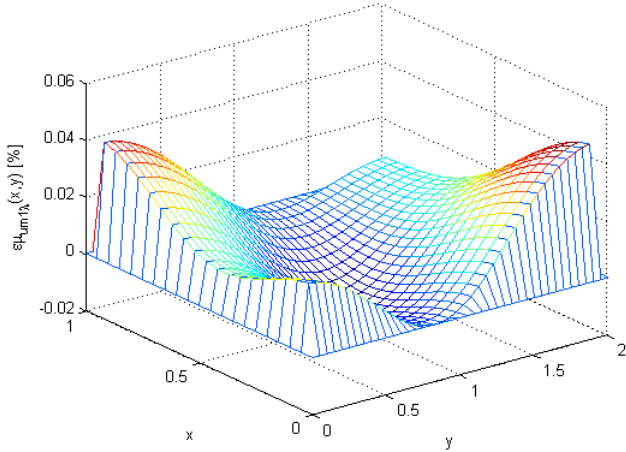
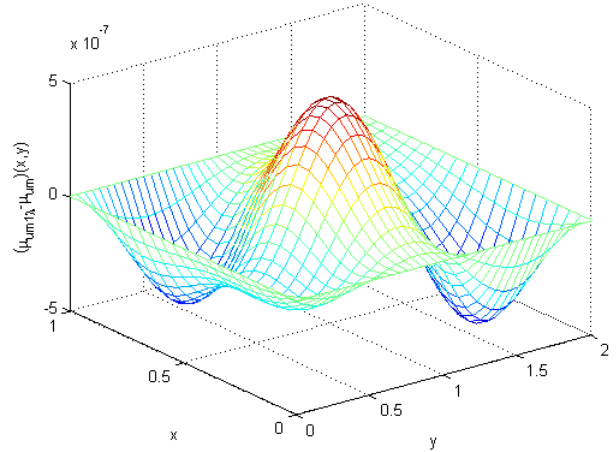


Figura 6.19: Funções valor esperado e variância pela metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ .

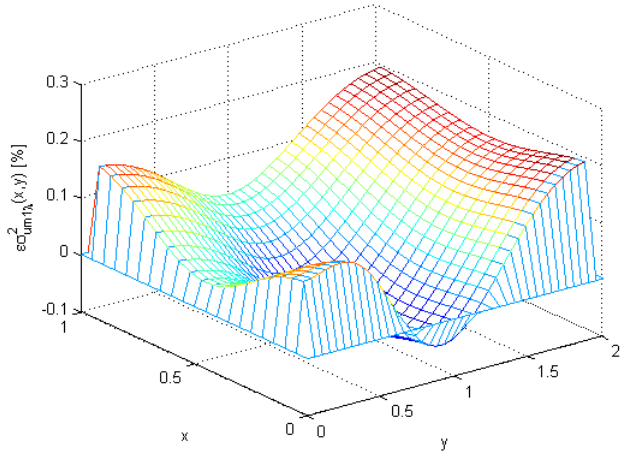


(a) Desvio (erro) relativo do valor esperado

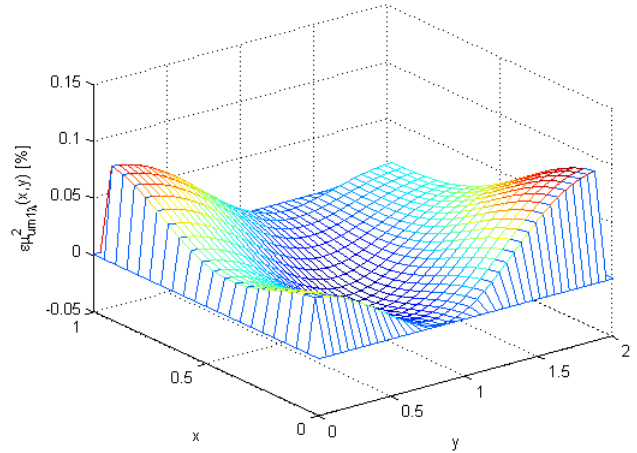


(b) Erro do valor esperado

Figura 6.20: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.



(a) Desvio relativo da variância



(b) Desvio relativo da autocorrelação

Figura 6.21: Funções desvio relativo da variância e da autocorrelação.

Na Figura 6.19 (b), apresenta-se o comportamento da função variância, $\sigma_{u_{m1\lambda}}^2(x, y)$, dada pela metodologia *Monte Carlo - Neumann λ* . Seu comportamento também fica muito próximo do comportamento da função variância, $\sigma_{u_m}^2(x, y)$, dada pelo método direto. Essa constatação fica evidenciada quando observa-se o desvio relativo da variância, na Figura 6.21 (a), onde os valores máximos desses desvios ficam na casa dos 0.2%, sendo que o valor máximo deste desvio relativo é dado por $\max_D\{|\epsilon_{\sigma_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y)|\} = 0.200669793594832\%$. Já na Figura 6.21 (b), observa-se que o desvio relativo com relação a autocorrelação, considerando-se as duas metodologias, assume valores máximos em torno de 0.1%, sendo que o valor máximo (em módulo) deste desvio é dado por $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{m1\lambda}}^2}(x, y)|\} = 0.091634090359272\%$.

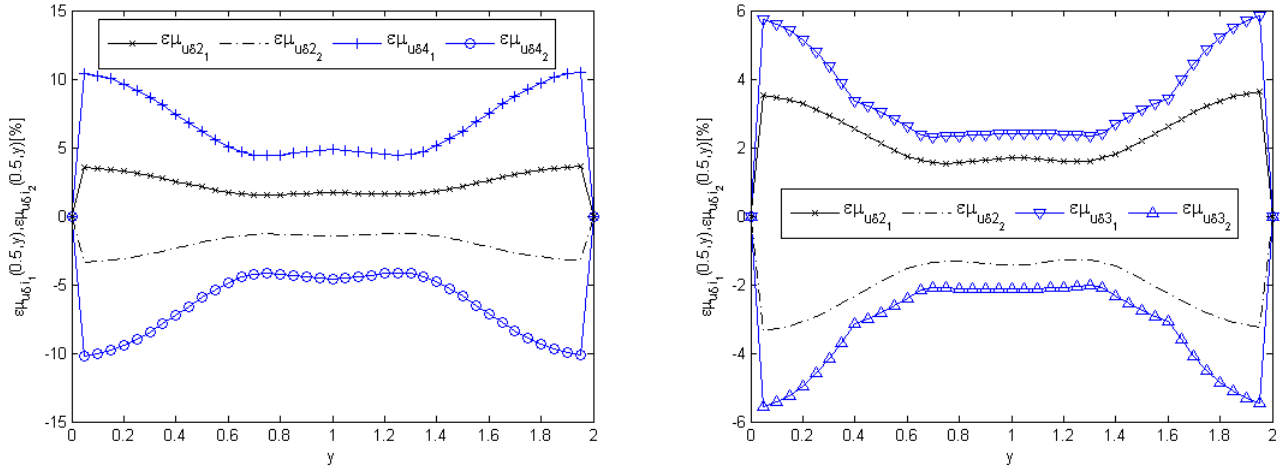
Metodologias	Tempo computacional (em segundos)
T_{MC}	757.12
T_{MCN_λ}	301.81

Tabela 6.10: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* (T_{MC}) e *Monte Carlo - Neumann λ* (T_{MCN_λ}).

Na Tabela 6.10 ilustran-se os tempos computacionais obtidos por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* (T_{MC}) e *Monte Carlo - Neumann λ* (T_{MCN_λ}). Observa-se que o tempo T_{MCN_λ} é consideravelmente menor que o tempo T_{MC} .

No emprego da metodologia *Monte Carlo - Neumann λ* , percebe-se que os resultados são bastante precisos, tendo desvios relativos pequenos, na comparação com a metodologia de *Monte-Carlo*. Observa-se também que quando os parâmetros α , κ_p e κ_w são simultaneamente considerados estocásticos os desvios são um pouco maiores se comparados com os desvios obtidos pela soma dos desvios nos *problemas 1, 2 e 3*, com as incertezas sendo analisadas separadamente.

6.4.2 Simulação via *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas



(a) Desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 4$ (b) Desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 3$

Figura 6.22: Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{\delta_{i1\lambda}}$ e $\epsilon_{\mu_{\delta_{i2\lambda}}$, nas normas $i=2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$.

As Figuras 6.22 (a) e (b) trazem representações gráficas das funções desvio relativo do valor esperado para o deslocamento, dadas por, $\epsilon_{\mu_{\delta_{i1\lambda}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{\delta_{i2\lambda}}}(x, y)$, nas normas $i = 2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Percebe-se, por essas figuras, que os desvios relativos do valor esperado, sobre a curva $(x, y) = (0.5, y)$, chegam aos 10% na norma $i = 4$, aos 6% na norma $i = 3$ e aos 4% na norma $i = 2$. Essa diferença comparativa também pode ser observada quando analisa-se os valores

máximos, em módulo, dessas funções, sobre todo domínio D . Conforme Tabela 6.11, observa-se que $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 4 1 \lambda}}}(x, y)|\} = 25.953176\%$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 3 1 \lambda}}}(x, y)|\} = 16.017564\%$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2 1 \lambda}}}(x, y)|\} = 8.750198\%$. Os desvios máximos ocorrem próximo as regiões de fronteira, onde os deslocamentos são menores.

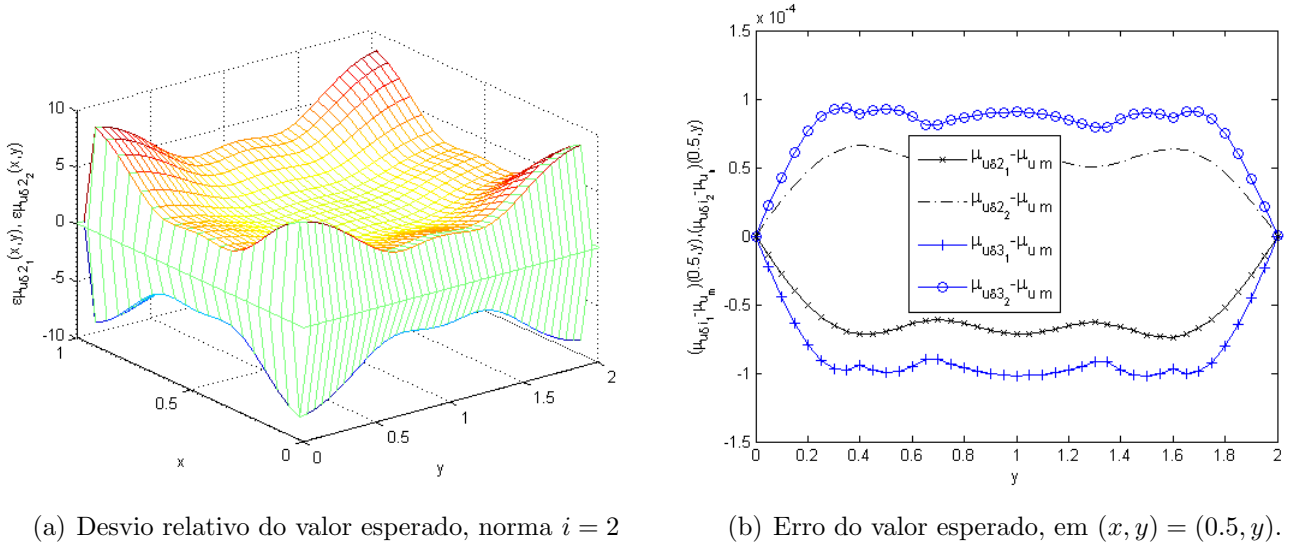
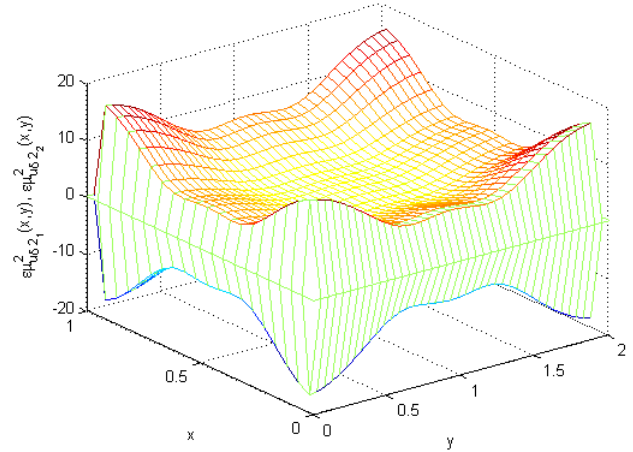
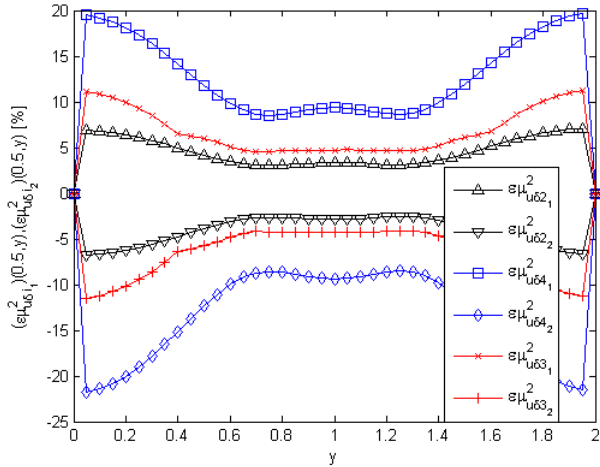


Figura 6.23: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.

A Figura 6.23 (a) representa graficamente as superfícies dadas pelas funções desvio relativo do valor esperado, dadas por $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2 1 \lambda}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i 2 \lambda}}}$, na norma euclidiana ($i = 2$). Observa-se que os desvios relativos atingem valores máximos em torno dos 10%, fato comprovado pelo cálculo dos valores máximos dessas funções, conforme ilustrado na Tabela 6.11. Já a Figura 6.23 (b) representa graficamente as funções erro do valor esperado, dadas por $(\mu_{u_{\delta i 1 \lambda}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$ e por $(\mu_{u_{\delta i 2 \lambda}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$, nas normas $i = 2, 3$. Observa-se que o erro está na ordem de 10^{-4} , relativamente próximo do deslocamento que tem valores máximos na ordem de 10^{-3} , sendo que os menores erros foram obtidos com o uso da norma $i = 2$.

A Figura 6.24 (a) representa, graficamente, as funções desvio relativo da autocorrelação dadas por $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i 1 \lambda}}^2}(x, y)$ e por $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i 2 \lambda}}^2}(x, y)$, nas normas $i = 2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Observa-se, que os menores desvios, com relação ao desvio relativo da autocorrelação, são obtidos com o uso da norma euclidiana ($i = 2$), fato também comprovado pela Tabela 6.11, na definição dos valores máximos (em módulo) dessas funções. A Figura 6.24 (b) representa as funções desvio relativo da autocorrelação $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2 1 \lambda}}^2}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2 2 \lambda}}^2}(x, y)$, na norma euclidiana ($i = 2$). Observa-se que os valores máximos dessas funções estão próximos dos 20%, o que também está ilustrado na Tabela 6.11.

A Tabela 6.11 traz os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos quanto ao valor esperado, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta i 1 \lambda}}}(x, y)|\}$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta i 2 \lambda}}}(x, y)|\}$ e quanto a autocorrelação, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta i 1 \lambda}}^2}(x, y)|\}$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta i 2 \lambda}}^2}(x, y)|\}$. Pode-se observar, nesta metodologia, que os desvios relativos quanto ao valor esperado e à variância, são menores na norma $i = 2$. No entanto, em todas as normas os



(a) Desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$ (b) Desvio relativo da autocorrelação, na norma 2

Figura 6.24: Funções desvio relativo da autocorrelação.

Cota	Valor esperado		Autocorrelação	
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_1}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_2}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_1}^2}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_2}^2}(x, y) \}$
1	40.166552%	39.967597%	60.868165%	99.138846%
2	8.750198%	8.503123%	16.589992%	17.845500%
3	16.017564%	15.781620%	28.869314%	34.601356%
4	25.953176%	25.732450%	43.434829%	59.751604%

Tabela 6.11: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, sobre o domínio D .

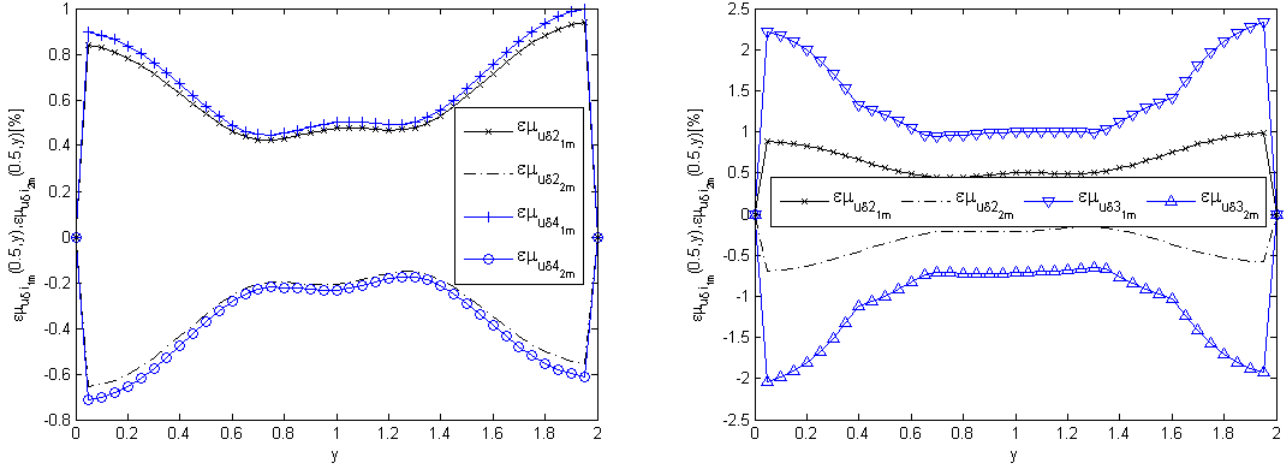
valores dos desvios relativos são relativamente elevados. Essas constações são reforçadas pelas representações gráficas nas figuras: Figura 6.22 (a) e (b), do desvio relativo com relação ao valor esperado; Figura 6.24 (a), do desvio relativo com relação a autocorrelação.

Na Tabela 6.12 evidenciam-se os tempos computacionais para a resolução do problema 6.1 por meio do método direto e do método aproximado. Observa-se que os tempos computacionais da segunda metodologia são todos muito próximos, independente da norma utilizada. Percebe-se também que os tempos computacionais usando-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, tem um ganho considerável se comparado com a metodologia *Monte-Carlo*.

Tempo computacional	(em segundos)			
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
755.99	310,49	310.31	310.26	336.26

Tabela 6.12: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , com estabelecimento de cotas, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

6.4.3 Simulação via *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante



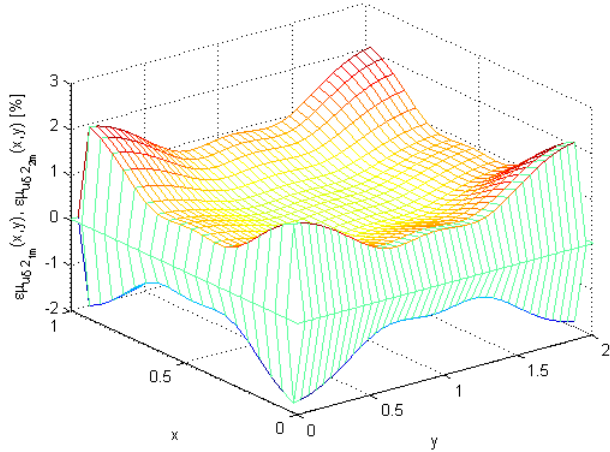
(a) Desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 4$ (b) Desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 3$

Figura 6.25: Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}}$, nas normas $i=2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$.

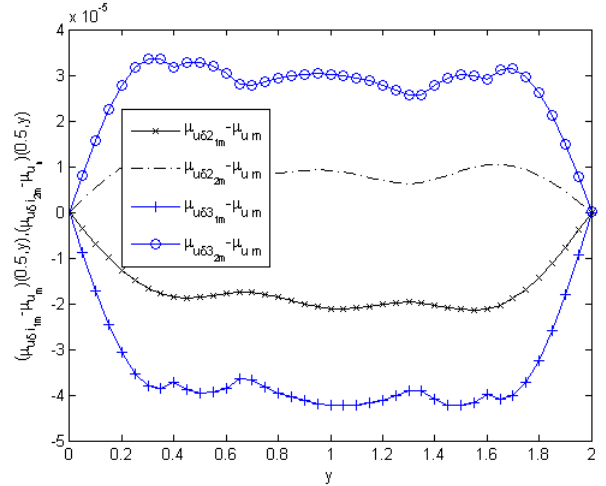
As Figuras 6.25 (a) e (b) ilustram representações gráficas das funções desvio relativo do valor esperado, $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}}(x, y)$. A representação da Figura 6.25 (a) foi determinada usando-se as normas $i = 2, 4$ e a Figura 6.25 (b) usando-se as normas $i = 2, 3$, ambas em $(x, y) = (0.5, y)$. Percebe-se que esses desvios relativos são ligeiramente menores do que os desvios obtidos com a aplicação da metodologia anterior. Analisando-se, comparativamente, essas figuras, percebe-se que os desvios nas normas $i = 2, 4$ chegam a valores máximos de 1%, e na norma $i = 3$ chegam a 2.5%. Essa diferença comparativa também pode ser observada quando analisa-se os valores máximos, em módulo, dessas funções nas respectivas normas, sobre todo domínio D . Conforme Tabela 6.13, observa-se que $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 4_{1\lambda}}}}(x, y)|\} = 2.205746\%$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 3_{1\lambda}}}}(x, y)|\} = 6.171222\%$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2_{1\lambda}}}}(x, y)|\} = 2.063346\%$, sendo que esses valores nas normas $i = 2, 4$ chegam a ser mais de 10 vezes menores se comparados com a metodologia anterior, *Monte Carlo - Neumann*.

A Figura 6.26 (a) representa, graficamente, as superfícies dadas pelas funções desvio relativo do valor esperado, $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2_{1\lambda}}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2_{2\lambda}}}}(x, y)$, na norma euclidiana ($i = 2$). Observa-se que os desvios relativos ficam em torno dos 2%, inferiores aos obtidos na metodologia anterior, fato também confirmado pelos dados da Tabela 6.13. Já a Figura 6.26 (b) representa graficamente as funções erro do valor esperado, estabelecidas pelas cotas inferiores por $(\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$, e pelas cotas superiores por $(\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$, nas normas $i = 2, 3$. Observa-se que o erro está na ordem de 10^{-5} , enquanto os valores máximos de deslocamento (valor esperado) estão na ordem de 10^{-3} . Os menores erros absolutos são obtidos com o uso da norma $i = 2$.

A Figura 6.27 (a) representa, graficamente, as funções desvio relativo da autocorrelação dadas por $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}^2}(x, y)$ e por $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}^2}(x, y)$, nas normas $i = 2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Observa-se, que os



(a) Desvio relativo do valor esperado, norma $i = 2$



(b) Erro do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$.

Figura 6.26: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.

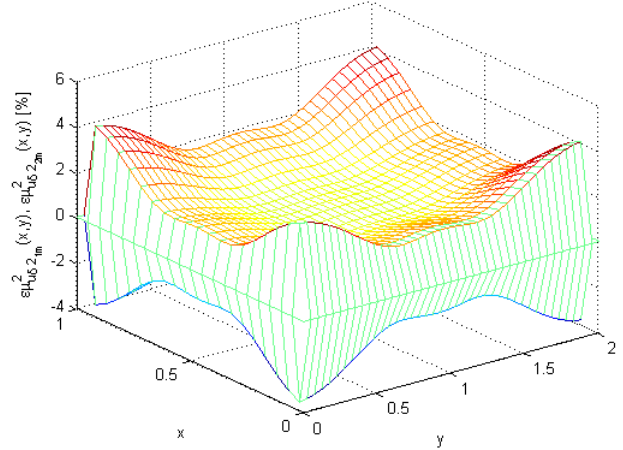
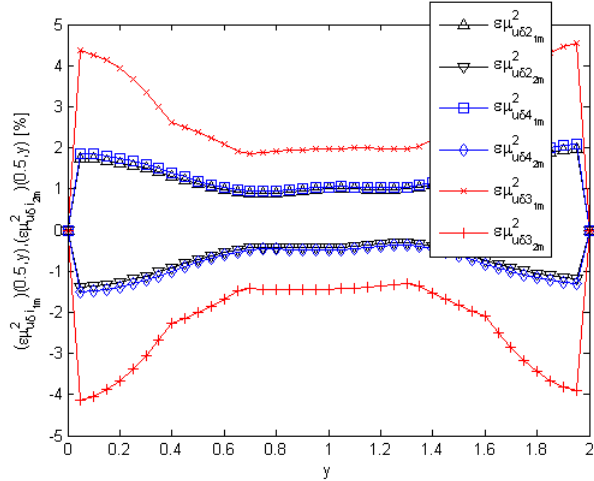
menores desvios, com relação a autocorrelação, são obtidos no emprego das normas $i = 2, 4$, fato também comprovado pelas informações da Tabela 6.13. A Figura 6.27 (b) representa superfícies do desvio relativo, das funções de autocorrelação, $\epsilon_{\mu_{u\delta_{21\lambda}}}^2(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta_{22\lambda}}}^2(x, y)$, na norma euclidiana ($i = 2$). Observa-se que os valores máximos dessas funções estão próximos dos 4%, o que também se confirma pela Tabela 6.13. Neste quesito, também percebe-se que os erros relativos chegam a ser praticamente 10 vezes menores em algumas normas, se comparados a metodologia anterior.

Norma	Valor esperado		Autocorrelação	
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta_{i1m}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta_{i2m}}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta_{i1}}^2}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta_{i2}}^2}(x, y) \}$
1	31.982794%	31.750189%	48.491983%	78.713392%
2	2.063346%	1.806029%	4.063651%	3.661318%
3	6.171222%	5.906626%	11.672572%	12.423599%
4	2.205746%	1.948647%	4.338273%	3.955683%

Tabela 6.13: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, sobre o domínio D .

A Tabela 6.13 traz os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos quanto ao valor esperado, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{i1\lambda}}}(x, y)|\}$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{i2\lambda}}}(x, y)|\}$ e quanto a autocorrelação, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{i1\lambda}}^2}(x, y)|\}$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{i2\lambda}}^2}(x, y)|\}$, calculado nas quatro normas. Pode-se observar, nesta metodologia, que os desvios relativos quanto ao valor esperado, bem como quanto à autocorrelação, são menores nas normas $i = 2, 4$. Essas constações são reforçadas pelas representações gráficas nas figuras: Figura 6.25 (a) e (b), do desvio relativo com relação ao valor esperado; Figura 6.27 (a), do desvio relativo com relação a autocorrelação.

Na Tabela 6.14 evidenciam-se os tempos computacionais para a resolução do problema 6.1 usando-se a metodologia de *Monte-Carlo* e a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste



(a) Desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$ (b) Desvio relativo da autocorrelação, na norma $i=2$

Figura 6.27: Funções desvio relativo da autocorrelação.

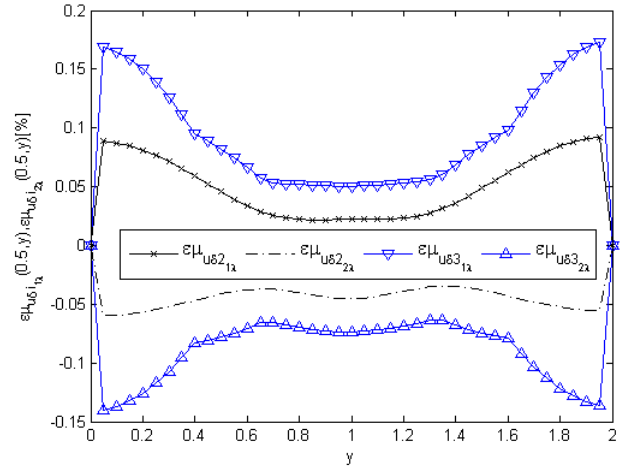
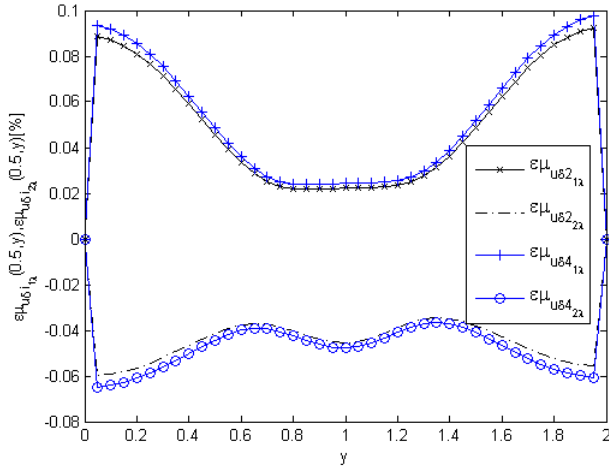
no limitante. Observa-se que os tempos computacionais da segunda metodologia são todos muito próximos, independente da norma utilizada. Percebe-se também que os tempos computacionais usando-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, tem um ganho considerável se comparado com a metodologia *Monte-Carlo*.

Tempo computacional (em segundos)				
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
768.29	289.80	290.08	293.02	290.76

Tabela 6.14: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , com ajuste no limitante, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

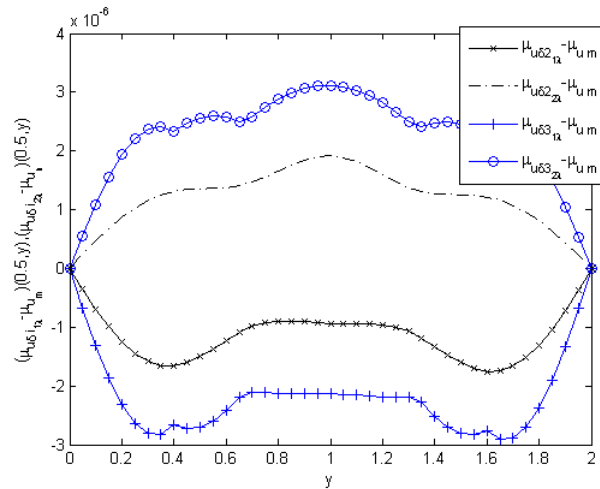
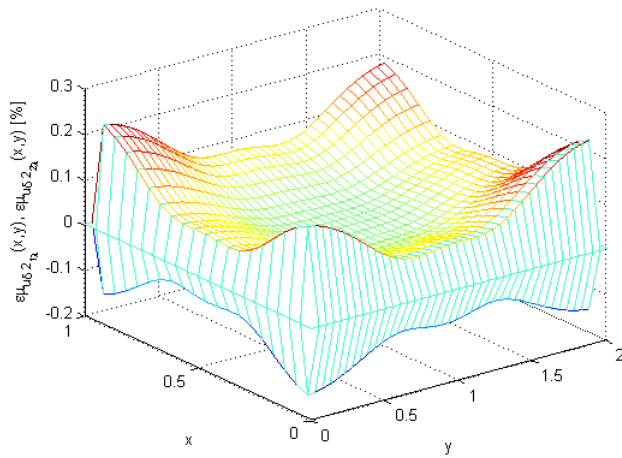
6.4.4 Simulação via *Monte Carlo - Neumann*, mista 1

As Figuras 6.28 (a) e (b) trazem representações gráficas dos desvios relativos do valor esperado dadas pelas funções $\epsilon_{\mu_{u\delta_{i1\lambda}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta_{i2\lambda}}}(x, y)$. As funções representadas na Figura 6.28 (a) foram determinadas nas normas $i = 2, 4$ e na Figura 6.28 (b) foram determinadas nas normas $i = 2, 3$, ambas em $(x, y) = (0.5, y)$. Percebe-se que os desvios relativos nas normas $i = 2, 4$ estão próximos entre si. Analisando-se comparativamente essas figuras, percebe-se que os desvios nas normas $i = 2, 4$ chegam a valores máximos ao redor de 0.1%, e na norma $i = 3$ chegam a valores próximos de 0.18%. Essa análise comparativa também se confirma quando são observados os desvios relativos máximos (em módulo), sobre todo domínio D, conforme ilustra a Tabela 6.15, onde, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{41\lambda}}}(x, y)|\} = 0.242172\%$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{31\lambda}}}(x, y)|\} = 0.477276\%$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta_{21\lambda}}}(x, y)|\} = 0.229765\%$.



(a) Desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 4$ (b) Desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 3$

Figura 6.28: Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{\delta i_{1\lambda}}}$ e $\epsilon_{\mu_{\delta i_{2\lambda}}}$, nas normas $i=2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$.



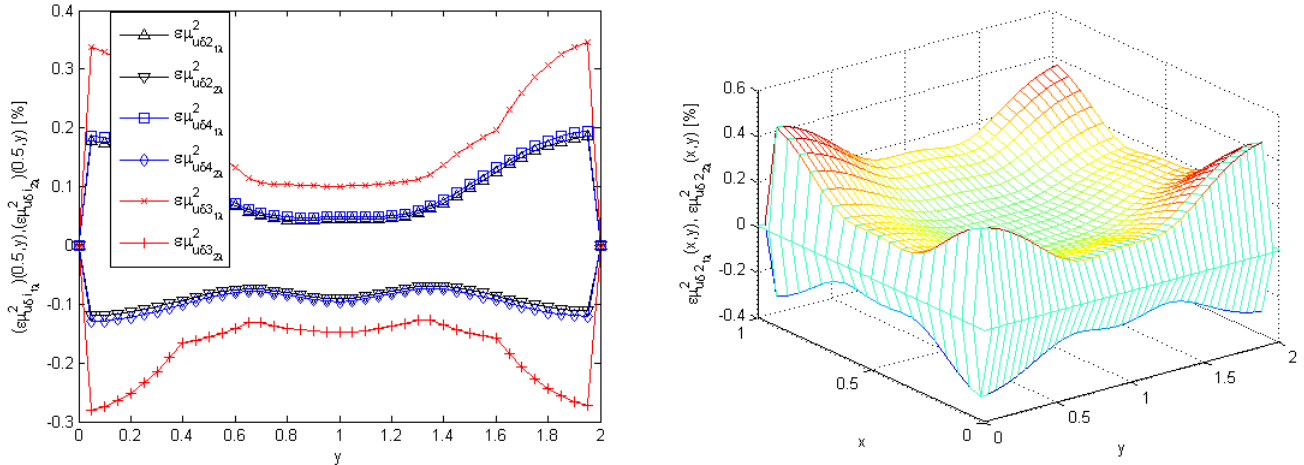
(a) Desvio relativo do valor esperado, norma $i = 2$

(b) Erro do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$.

Figura 6.29: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.

A Figura 6.29 (a) representa, graficamente, as superfícies dadas pelas funções desvio relativo do valor esperado, calculadas nos limitantes inferiores por $\epsilon_{\mu_{\delta 2_{1\lambda}}}$, e nos limitantes superiores por $\epsilon_{\mu_{\delta 2_{2\lambda}}}$, na norma euclidiana ($i = 2$). Observa-se que os desvios relativos ficam em torno dos 0.2%, fato também confirmado pelos dados da Tabela 6.15. Já a Figura 6.29 (b) representa, graficamente, as funções erro do valor esperado, $(\mu_{\delta i_{1\lambda}} - \mu_{um})(0.5, y)$ e $(\mu_{\delta i_{2\lambda}} - \mu_{um})(0.5, y)$, nas normas $i = 2, 3$. Observa-se que o erro fica na ordem de 10^{-6} , enquanto os valores máximos de deslocamento (valor esperado) estão na ordem de 10^{-3} , os menores erros são obtidos com o emprego da norma $i = 2$.

A Figura 6.30 (a) representa graficamente os desvios relativos da autocorrelação, dadas pelas



(a) Desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$ (b) Desvio relativo da autocorrelação, norma $i = 2$

Figura 6.30: Funções desvio relativo da autocorrelação.

funções $\epsilon_{\mu_{u\delta i_1\lambda}}^2(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta i_2\lambda}}^2(x, y)$, nas normas $i = 2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Observa-se, que os menores desvios relativos, com relação a autocorrelação, são obtidos na norma $i = 2$, fato também ilustrado pelos dados da Tabela 6.15. A Figura 6.30 (b) representa o desvio relativo das funções de autocorrelação, dadas por $\epsilon_{\mu_{u\delta 2_1\lambda}}^2(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u\delta 2_2\lambda}}^2(x, y)$, calculadas na norma euclidiana ($i = 2$). Observa-se que os valores máximos dessas funções estão próximos aos 0.4%, o que também pode ser confirmado pelos dados da Tabela 6.15.

Cota	Valor esperado		Autocorrelação	
i	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_1\lambda}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_2\lambda}}(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_1\lambda}}^2(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{u\delta i_2\lambda}}^2(x, y) \}$
1	3.925381%	3.872122%	7.655892%	7.943980%
2	0.229765%	0.176958%	0.459215%	0.354218%
3	0.477276%	0.424438%	0.952373%	0.851962%
4	0.242172%	0.189363%	0.483980%	0.379126%

Tabela 6.15: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, sobre o domínio D .

A Tabela 6.15 ilustra os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos com relação ao valor esperado, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta i_1\lambda}}(x, y)|\}$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta i_2\lambda}}(x, y)|\}$ e com relação a autocorrelação, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta i_1\lambda}}^2(x, y)|\}$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u\delta i_2\lambda}}^2(x, y)|\}$. Pode-se observar que esses desvios relativos são menores quando aplica-se a norma $i = 2$. Essas constações são reforçadas pelas representações gráficas das Figuras 6.28 (a) e (b) e Figuras 6.30 (a).

Na Tabela 6.16 evidenciam-se os tempos computacionais necessários para a resolução numérica do problema 6.1 usando-se o método direto e o método aproximado. Observa-se que os tempos computacionais, usando-se o método aproximado, são todos muito próximos, independente da norma utilizada. Percebe-se também um ganho computacional considerável com a uso da metodologia de

Monte Carlo - Neumann, mista 1, em comparação com a metodologia *Monte-Carlo*.

Tempo computacional (em segundos)				
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
769.34	305.69	306.16	313.63	307.13

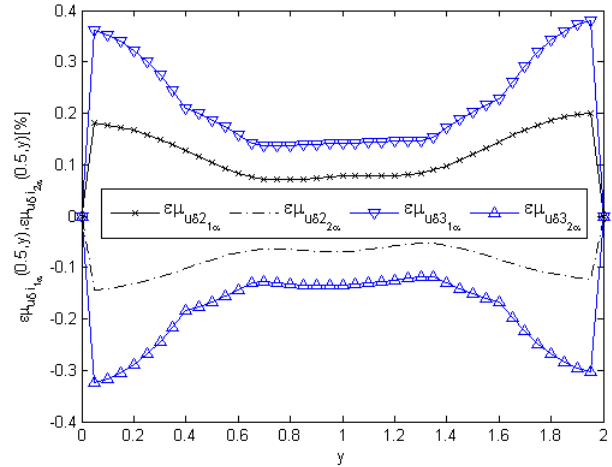
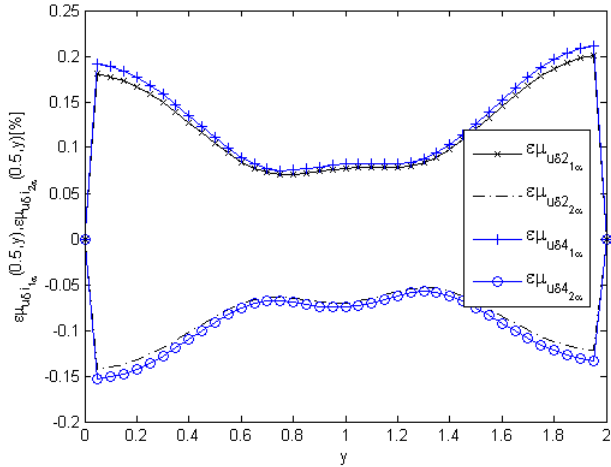
Tabela 6.16: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , mista 1, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

No quesito precisão, pode observar-se que pela metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, os resultados são bastante precisos, tendo desvios relativos pequenos, na comparação com a metodologia de *Monte-Carlo*. Observa-se também que, considerando-se, simultaneamente, incerteza sobre os parâmetros α , κ_p e κ_w , os desvios são um pouco maiores se comparados com os desvios dados pela soma dos desvios obtidos nos *problemas 1, 2 e 3*, considerando as incertezas separadamente.

Nesta metodologia, percebe-se que os resultados para este problema, quanto a precisão, na comparação com as duas metodologias envolvendo cotas, *Monte Carlo - Neumann* e *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, são bem mais precisos. No entanto, ela ainda traz desvios um pouco maiores em comparação aos desvios obtidos na aplicação da metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ . Já no quesito tempo computacional, a metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, tem um desempenho um pouco melhor na comparação com as demais metodologias citadas.

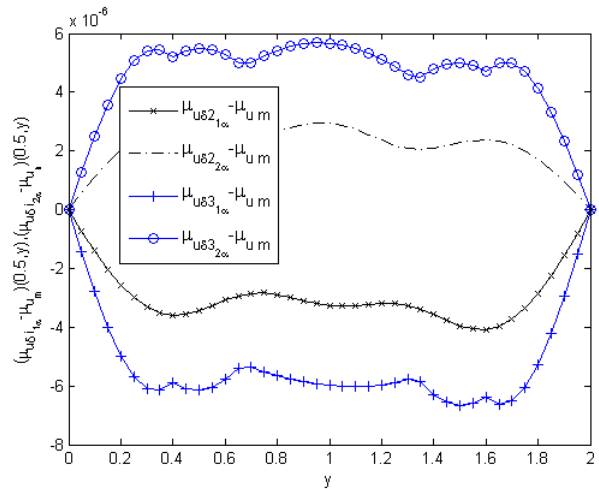
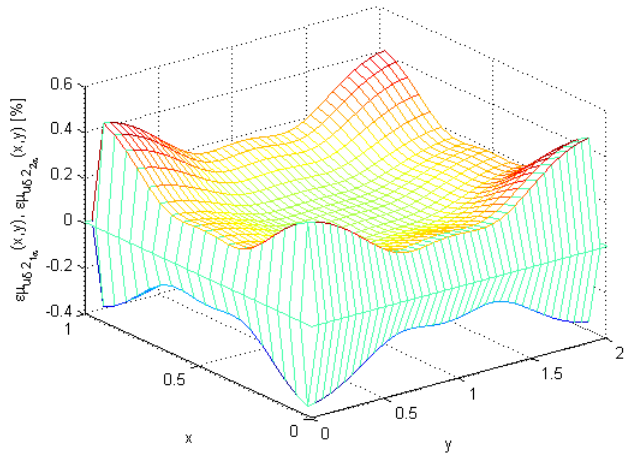
6.4.5 Simulação via *Monte Carlo - Neumann*, mista 2

As Figuras 6.31 (a) e (b) ilustram graficamente os desvios relativos do valor esperado dadas pelas funções $\epsilon_{\mu_{u_{\delta_{i_1\lambda}}}}(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta_{i_2\lambda}}}}(x, y)$. A Figura 6.31 (a) representa curvas determinadas com as normas $i = 2, 4$ e a Figura 6.31 (b) representa curvas determinadas com as normas $i = 2, 3$, ambas em $(x, y) = (0.5, y)$. Percebe-se que os desvios relativos nas normas $i = 2, 4$ ficaram próximos entre si. Analisando-se por essas figuras, percebe-se que os desvios nas normas $i = 2, 4$ chegam a valores máximos em torno de 0.2%, e na norma $i = 3$ estes valores ficam próximos de 0.4%, sendo que, os menores desvios foram obtidos na norma $i = 2$. Essas constatações também se confirmam quando são observados os erros relativos máximos (em módulo) dessas funções, sobre todo domínio D, conforme ilustrado na Tabela 6.17. Onde, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta_{4_1\lambda}}}}(x, y)|\} = 0.489394\%$, $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta_{3_1\lambda}}}}(x, y)|\} = 1.018327\%$ e $\max_D\{|\epsilon_{\mu_{u_{\delta_{2_1\lambda}}}}(x, y)|\} = 0.462315\%$.



(a) Desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 4$ (b) Desvio relativo do valor esperado, nas normas $i = 2, 3$

Figura 6.31: Funções desvio relativo do valor esperado das funções $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}}}$, nas normas $i=2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$.



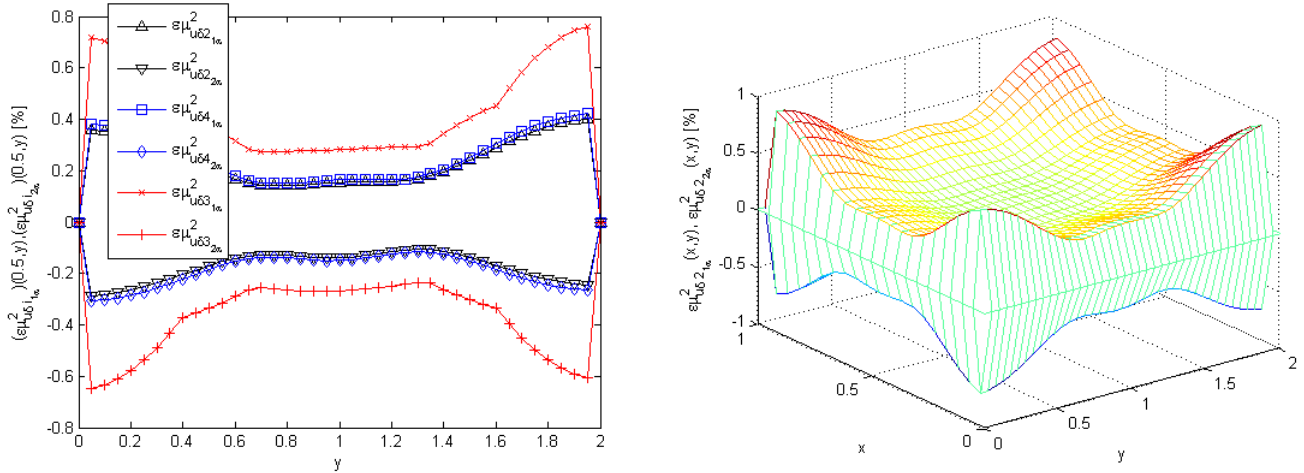
(a) Desvio relativo do valor esperado, norma $i = 2$

(b) Erro do valor esperado, em $(x, y) = (0.5, y)$

Figura 6.32: Funções desvio relativo e erro do valor esperado.

A Figura 6.32 (a) representa, graficamente, as superfícies dadas pelas funções desvio relativo do valor esperado, $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2_{1\lambda}}}}$ e $\epsilon_{\mu_{u_{\delta 2_{2\lambda}}}}$, na norma euclidiana ($i = 2$). Observa-se que os desvios relativos máximos ficam em torno dos 0.4%, fato também ilustrado pela Tabela 6.17. Já a Figura 6.32 (b) representa graficamente as funções erro do valor esperado, $(\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$ e $(\mu_{u_{\delta i_{2\lambda}}} - \mu_{u_m})(0.5, y)$, nas normas $i = 2, 3$. Observa-se que o erro ficou na ordem de 10^{-6} , enquanto os valores máximos de deslocamento (valor esperado) estão na ordem de 10^{-3} , os menores erros foram obtidos com o uso da norma $i = 2$.

A Figura 6.33 (a) representa, graficamente, as funções desvio relativo da autocorrelação, $\epsilon_{\mu_{u_{\delta i_{1\lambda}}}^2}(x, y)$



(a) Desvio relativo da autocorrelação, em $(x, y) = (0.5, y)$ (b) Desvio relativo da autocorrelação, na norma $i = 2$

Figura 6.33: Funções desvio relativo da autocorrelação.

e $\epsilon_{\mu_{\delta i 2 \lambda}}^2(x, y)$, nas normas $i = 2, 3, 4$, em $(x, y) = (0.5, y)$. Observa-se, que os menores desvios relativos, com relação a autocorrelação, são obtidos na norma $i = 2$, fato também ilustrado pelos dados da Tabela 6.17. A Figura 6.33 (b) representa o desvio relativo, das funções de autocorrelação, $\epsilon_{\mu_{\delta 2 1 \lambda}}^2(x, y)$ e $\epsilon_{\mu_{\delta 2 2 \lambda}}^2(x, y)$, na norma euclidiana ($i = 2$). Observa-se que os valores máximos, em módulo, dessas funções estão próximos de 1%, o que também pode ser confirmado pela Tabela 6.17.

Cota	Valor esperado		Autocorrelação	
	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{\delta i 1 \alpha}}^2(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{\delta i 2 \alpha}}^2(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{\delta i 1 \alpha}}^2(x, y) \}$	$\max_D\{ \epsilon_{\mu_{\delta i 2 \alpha}}^2(x, y) \}$
1	8.417416%	8.348133%	15.728668%	17.795882%
2	0.462315%	0.381821%	0.921746%	0.766240%
3	1.018327%	0.938617%	2.019952%	1.894099%
4	0.489394%	0.408939%	0.975521%	0.820868%

Tabela 6.17: Desvio relativo do valor esperado e da autocorrelação da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, sobre o domínio D .

A Tabela 6.17 ilustra os valores máximos (em módulo) dos desvios relativos com relação ao valor esperado e com relação a autocorrelação. Pode-se observar que os desvios relativos quanto ao valor esperado bem como a autocorrelação, são menores na norma $i = 2$. Essas constações são reforçadas pelas representações gráficas nas figuras: Figura 6.31 (a) e (b), do desvio relativo com relação ao valor esperado; Figura 6.33 (a), do desvio relativo com relação a autocorrelação.

Na Tabela 6.18 evidenciam-se os tempos computacionais para a resolução do problema 6.1 usando-se a metodologia de *Monte-Carlo* e a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 2. Percebe-se que os tempos computacionais usando-se a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, são inferiores aos tempos computacionais obtidos com a metodologia *Monte-Carlo*.

Tempo computacional (em segundos)				
T_{MC}	T_1	T_2	T_3	T_4
757.43	306.97	307.93	309.02	314.91

Tabela 6.18: Tempo computacional obtido por meio da simulação das metodologias de *Monte-Carlo* T_{MC} e *Monte Carlo - Neumann* T_i , mista 2, nas normas $i = 1, 2, 3, 4$.

Os desvios relativos dos momentos estatísticos com o uso da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 2, são relativamente pequenos. Estes desvios, ficaram muito próximos dos desvios obtidos com o emprego da metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1. O tempo computacional entre as duas metodologias citadas ficou idêntico.

Considerações Finais

O presente trabalho foi desenvolvido com o objetivo de analisar a eficiência de novas metodologias aplicadas a problemas de flexão de placas de Kirchhoff. Foram estudados e analisados dois problemas estocásticos de flexão da placa de Kirchhoff, o primeiro descrito em 5.1, repousado sobre uma base de Winkler, e o segundo descrito em 6.1, repousado sobre uma base de Pasternak. Inicialmente foi feito um estudo qualitativo com o objetivo de provar a existência e unicidade de soluções dos dois problemas. Na sequência, além da apresentação das duas metodologias desenvolvidas e aplicadas a problemas de vigas, por *Ávila & Beck* (2015a), metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ e *Ávila & Beck* (2014) e (2015b), metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com estabelecimento de cotas, foram propostas mais três novas metodologias. Estas três metodologias foram obtidas a partir de variações das duas primeiras, sendo que todas elas envolvem o estabelecimento de cotas para a solução do problema estocástico de deslocamento transversal. As três novas metodologias foram denominadas: *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante; *Monte Carlo - Neumann*, mista 1; e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2.

Análise do problema de Kirchhoff repousado em base de Winkler

Para analisar a eficiência quanto a precisão e ao tempo computacional, aplicou-se as cinco metodologias na resolução do problema estocástico para o *caso 1*, onde considerou-se apenas o coeficiente de rigidez a flexão da placa (α) estocástico e para o *caso 2*, onde considerou-se apenas o coeficiente de rigidez da base de apoio (κ_w) estocástico.

Com relação as quatro metodologias envolvendo cotas, relativos aos problemas analisados, pôde-se observar que no quesito precisão as metodologias seguem a seguinte ordem de eficiência: 1. *Monte Carlo - Neumann*, mista 1; 2. *Monte Carlo - Neumann*, mista 2; 3. *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante; 4. *Monte Carlo - Neumann*. Esses resultados podem ser observados por análises feitas no próprio texto, em figuras e pelas tabelas constantes no *Capítulo 4*. Agora quando os resultados são comparados com a metodologia *Monte Carlo - Neumann* λ percebe-se que esta metodologia é a mais precisa, tendo desvios um pouco menores do que os obtidos nas metodologias *Monte Carlo - Neumann*, mista 1 e *Monte Carlo - Neumann*, mista 2.

Relativo aos tempos computacionais, não observou-se variações de tempo significativas de uma metodologia para outra, na comparação das cinco metodologias utilizadas no presente trabalho, apenas na metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante, os tempos foram ligeiramente inferiores. No entanto, quando compara-se os tempos computacionais das cinco metodologias

com a metodologia de resolução exata *Monte-Carlo*, percebe-se que os tempos computacionais da metodologia de *Monte-Carlo* são significativamente maiores. Sendo desta forma, viável usar-se as metodologias aproximadas.

Na análise, quanto a precisão, nas quatro metodologias que envolvem o estabelecimento de cotas, pôde-se constatar algumas variações quanto as normas utilizadas. Conforme observa-se nas Tabelas: 5.2, 5.4, 5.6, 5.8, 5.11, 5.13, 5.15 e 5.17. Quando foi utilizada a norma 1, obteve-se os resultados menos precisos, nas quatro metodologias. A norma 2 (norma euclidiana) foi mais precisa na aplicação em todas as quatro metodologias envolvendo cotas, tendo sempre resultados muito próximos a norma 4 (norma de Frobenius). Já com a norma 3 também obteve-se bons resultados, no entanto um pouco inferiores aos obtidos com as normas euclidiana e de Frobenius ($i = 2, 4$). Essas considerações valem tanto para o *caso 1* e o *caso 2* do problema.

Constatou-se também, observando os comportamentos das representações gráficas e os dados das tabelas, que os desvios relativos no *caso 2*, são muito menores se comparados aos desvios relativos obtidos no *caso 1*. No *caso 2*, onde considerou-se a variabilidade sobre o parâmetro κ_w , todas as metodologias se mostraram bastante eficientes, pôde-se observar que os desvios relativos maiores ficaram na ordem de 10^{-5} , o que caracteriza aproximações excelentes.

Como a fundação normalmente é mais suscetível a variabilidades, além de serem feitas simulações considerando-se a taxa de 10% de incerteza sobre o coeficiente de flexão da base $\kappa_w = \kappa_w(x, y, \omega)$, também efetuou-se simulações considerando taxas de incertezas de 30% e 50% sobre κ_w . Percebeu-se que mesmo com variabilidades maiores os desvios relativos quanto ao valor esperado e a autocorrelação se mantiveram pequenos. Observou-se também que quando a incerteza passa de 10% para 30% os erros relativos, com relação ao valor esperado e a autocorrelação, aumentam em média 9 vezes, e quando a incerteza passa de 30% para 50% esses erros relativos aumentam em torno de 3 vezes, isso nas cinco metodologias. Mesmo aumentando a incerteza sobre a rigidez da fundação, a metodologia mais eficiente continua sendo a metodologia de *Monte Carlo - Neumann λ* e a menos eficiente a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*.

Análise do problema de Kirchhoff repousado em base de Pasternak

Foram feitas duas etapas de análises do problema 6.1, na primeira considerou-se a variabilidade sobre os parâmetros de rigidez separadamente e na segunda considerou-se os parâmetros de rigidez simultaneamente.

Na primeira etapa foram analisados três (sub) problemas denominados, *problema 1*, *problema 2* e *problema 3*, nas metodologias de *Monte Carlo - Neumann λ* e de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, que haviam demonstrado maior eficiência no problema 5.1. As duas metodologias mostraram-se bastante eficientes quanto a precisão, fato que pode ser observado quando analisados os desvios relativos dos momentos estatísticos. No entanto, com a metodologia de *Monte Carlo - Neumann λ* obteve-se desvios um pouco menores, isso nos três (sub)problemas. Esta observação pode ser confirmada, por exemplo, pelos valores máximos (em módulo) dos erros relativos quanto ao valor esperado que, no *problema 1* foram 0.0449% e 0.2284%, no *problema 2* foram $1.121 \times 10^{-5}\%$ e

$5.808 \times 10^{-5}\%$ e no *problema 3* foram $3.745 \times 10^{-8}\%$ e $17.185 \times 10^{-8}\%$, aplicando-se as metodologias de *Monte Carlo - Neumann* λ e de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, na norma, respectivamente. Resultados similares foram observados nos erros relativos quanto a autocorrelação, nos *problemas 1, 2 e 3*. A metodologia *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, mostrou melhores resultados na norma $i = 2$, embora nas normas $i = 3, 4$ os resultados também tenham sido bons. No *problema 2* e no *problema 3* as duas metodologias se mostraram mais eficientes do que no *problema 1*. Os tempos computacionais nas duas metodologias ficaram bem próximos.

Na segunda etapa foram aplicadas as cinco metodologias, e em termos de precisão as metodologias seguiram a seguinte ordem de eficiência: 1. *Monte Carlo - Neumann* λ ; 2. *Monte Carlo - Neumann*, mista 1; 3. *Monte Carlo - Neumann*, mista 2; 4. *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante; 5. *Monte Carlo - Neumann*, estabelecimento de cotas. Esses resultados podem ser observados por análises feitas dentro do texto, em figuras e pelas tabelas constantes no *Capítulo 5*. Nas metodologias envolvendo cotas a utilização da norma $i = 2$, mostrou-se mais eficiente em todas elas. Com relação aos tempos computacionais, não teve-se grandes variações de uma metodologia para outra, apenas na metodologia *Monte Carlo - Neumann*, com ajuste no limitante observou-se tempos ligeiramente menores.

Baseado nas análises feitas nos problemas estocásticos de flexão de placas de Kirchhoff, repousado sobre a base de Winkler, problema 5.1, e repousado sobre a base de Pasternak, problema 6.1, percebe-se, dentre as metodologias analisadas neste trabalho, que a mais eficiente foi a metodologia de *Monte Carlo - Neumann* λ , embora a metodologia de *Monte Carlo - Neumann*, mista 1, também tenha mostrado ótimo desempenho. Percebe-se também que quando a variabilidade repousa apenas nos parâmetros de rigidez da base de apoio, as cinco metodologias mostraram-se bastante eficientes. As metodologias envolvendo cotas talvez tenham a seu favor o “envelopamento” da solução via método direto, o que pode trazer alguns benefícios, mas perdem na precisão da aproximação.

A partir do presente trabalho de tese pode-se elencar algumas possibilidades de pesquisas futuras: 1. Analisar os problemas com variações do número (m) de funções de base (atividade já em curso); 2. Analisar as metodologias aplicadas a problemas de flexão de placas de Mindlin e de Reddy; 3. Fazer abordagens de problemas de flexão de placas de Kirchhoff com outras condições de contorno; 4. Estudar o emprego das metodologias para casos particulares da matriz \mathcal{P} ; 5. Verificar a existência de relações entre a ordem dos erros de aproximação com a ordem das matrizes \mathcal{P} .

Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, J.M.; AWRUCH. *On Stochastic Finite Elements for Structural Analysis*. Computers & Structures, v.52, n. 3, p. 41-45, 1994.
- [2] ÁVILA, S.Jr.C.R.; BECK, A.T.; MANTOVANI, G.; AZIKRI, H. *Galerkin Solution of Stochastic Beam Bending on Winkler Foundations*. Computer Modeling in Engineering and Science, v. 1729, p. 1-31, 2010.
- [3] ÁVILA, S.Jr.C.R.; BECK, A.T. *New method for efficient Monte Carlo-Neumann solution of linear Stochastic systems*. Probabilistic Engineering Mechanics, v. 40, p. 90-96, 2015.
- [4] ÁVILA, S.Jr.C.R.; BECK, A.T. *Efficient bounds for the Monte Carlo-Neumann solution of stochastic thermo-elasticity problems*. International Journal of Solids and Structures, v. 58, p. 136-145, 2015.
- [5] ÁVILA, S.Jr.C.R.; BECK, A.T. *Efficient bounds for the Monte Carlo-Neumann solution of stochastic systems*. Applied Mathematics and Computacional, v. 248, p. 672-686, 2014.
- [6] ÁVILA, S.Jr.C.R.; BECK, A.T. *Bending of stochastic Kirchhoff plates on Winkler foundations via Galerkin method and the Askey-Wiener scheme*. Probabilistic Engineering Mechanics, v. 25, p. 172-182, 2010.
- [7] ÁVILA, S.Jr.C.R.; KIST, M.; SANTOS, M.B. *Aplication of Galerkin method to Kirchhoff plates stochastic bending problem*. ISRN Applied Mathematics, v. 2014, 15 pages, 2014.
- [8] BELO, I.M. *Análise Eficiente de Compósitos Laminados Planos Utilizando-se a Formulação de Elementos Finitos Corrigida a-priori sem os Efeitos do Travamento*. Dissertação de mestrado. PUC-Curitiba (PR). 2006.
- [9] BRÉZIS, H. *Análisis funcional - Teoría y aplicaciones*. Madrid: Alianza Editorial S.A., 1984.
- [10] CHAKRABORTY, S.; BHATTACHARYYA, B. *An efficient 3D stochastic finite element method*. International journal of solids and structures, v. 39, p. 2465-2475, 2002.
- [11] CHAKRABORTY, S.; DEY, S.S. *Stochastic finite element method for spatial distribution of material properties and external loading*. Computers & Structures, v.55, n. 1, p. 41-45, 1995.

- [12] CHAKRABORTY, S.; DEY, S.S. *Stochastic finite element simulation of random structure on uncertain foundation under random loading*. Int. J. Mesch.Sci., v. 38, n. 11, p. 1209-1218, 1996.
- [13] CHAKRABORTY, S.; DEY, S.S. *Stochastic finite element dynamic analysis of structures with uncertain parameters*. Int. J. Mesch.Sci., v. 40, n. 11, p. 1071-1087, 1998.
- [14] CHAKRABORTY, S.; SARKAR, S.K. *Analysis of a curved beam on uncertain elastic foundation*. Finite Elements in Analysis Design, v. 36, p. 73-82, 2000.
- [15] GOLUB, G.H.; VAN LOAN, C.F. *Matrix Computations*, Baltimore: Published by The Johns Hopkins University Press, 2013.
- [16] HIDALGO, F.L.C. *Quantificação da incerteza do problema de flexão estocástica de uma viga de Euler-Bernoulli, apoiada em fundação de Pasternak, utilizando o método estocástico de Galerkin e o método dos elementos finitos estocásticos*. Dissertação de mestrado. UTFPR-Curitiba (PR). 2015.
- [17] LEI, Z.; QUI, C. *Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation*. Computers and Structures, v. 77, n. 6, p. 651-657, 2000.
- [18] LI, C.F.; FENG, Y.T.; OWEN, D.R.J. *Explicit solution to the stochastic system of linear algebraic equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., v. 195, p. 6560-6576, 2006.
- [19] LIMA, E.L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2015.
- [20] YAMAZAKI, F.; SHINOZUKA, M.; DASGUPTA, G. *Neumann expansion for stochastic finite element analysis*. Journal of Engineering Mechanics, v. 114, n. 8, p. 1335-1354, 1988.
- [21] MAGALHÃES, M.N. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. São Paulo: Editora da USP, 2013.
- [22] MEDEIROS, L.A.; RIVERA, P.H. *Iniciação aos espaços de Sobolev*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1977.
- [23] MURA, T.; KOYA, T. *Variational Methods in Mechanics*. New York: Published by Oxford University Press, 1992.
- [24] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. *Numerical Optimization*. New York: Published by Springer, 2006.
- [25] OLSSON, A. M. J.; SANDBERG, G. E. *Latin Hypercube Sampling for Stochastic Finite Element Analysis*. Journal of Engineering Mechanics, v. 128, n°1, p. 121-125, 2002.

- [26] SCHEVENELS, M.; LOMBAERT, G.; DEGRANDE, G.; CLOUTEAU, D. *The wave propagation in a beam on a random elastic foundation*. Probabilistic Engineering Mechanics, v. 22, p. 150-158, 2007.
- [27] TEODORU, I.B.; MUSAT V.; VRABIE M. *A finite element study of the bending of beams resting on two-parameter elastic foundation*. Buletinul Institutului Politehnic din Iasi, Tomul LII (LVI), Fasc. 3-4, 2006.
- [28] WANG, C.M.; REDDY, J.N.; LEE, K.H *Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions*. Kidlington (UK): Published by Elsevier, 2000.
- [29] WANG, X.; CEN, S.; LI, C. *Generalized Neumann expansion and application in stochastic finite element methods*. Mathematical Problems in Engineering, v. 2013, 13 pages, 2013.