

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA E DE MATERIAIS

ADRIANO GONÇALVES DOS PASSOS

**OTIMIZAÇÃO GLOBAL EFICIENTE APLICADA A
PROJETOS DE LAMINADOS DE RIGIDEZ VARIÁVEL**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA
2016

ADRIANO GONÇALVES DOS PASSOS

**OTIMIZAÇÃO GLOBAL EFICIENTE APLICADA A
PROJETOS DE LAMINADOS DE RIGIDEZ VARIÁVEL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia – Área de concentração: Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antônio Luersen

CURITIBA
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

P289o Passos, Adriano Gonçalves dos
2016 Otimização global eficiente aplicada a projetos de laminados de rigidez variável / Adriano Gonçalves dos Passos.-- 2016.
85 p.: il.; 30 cm

Texto em português com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais. Área de concentração: Mecânica dos sólidos, Curitiba, 2016.
Bibliografia: p. 75-79.

1. Engenharia mecânica - Dissertações. 2. Otimização estrutural. 3. Krigagem. 4. Materiais laminados. 5. Fibras de carbono. I. Luersen, Marco Antônio. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais. III. Título.

CDD: Ed. 22 -- 620.1

Biblioteca Ecoville da UTFPR, Câmpus Curitiba

À minha mãe Sheila, que sempre me apoiou e sozinha me fez ser quem sou.

Ao meu amor Vanessa, por ser minha companheira e me inspirar.

Aos meus professores, pelas lições de vida.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar aqui meus sinceros agradecimentos a todos os que colaboraram para o sucesso deste trabalho:

Inicialmente, ao Professor Marco Antônio Luersen que me orientou com grande entusiasmo e dedicação.

Aos colegas de laboratório, em especial ao Professor João Luiz do Vale que, de alguma forma, sempre me ajudaram.

Aos meus amigos que, entusiastas, torceram por mim.

E acima de tudo, aos meus familiares que sempre me incentivaram a continuar, pela paciência nas horas difíceis e pela compreensão nos momentos de ausência durante essa etapa.

*“Nós vivemos em uma sociedade
extraordinariamente dependente
da ciência e tecnologia,
em que quase ninguém sabe nada
sobre ciência e tecnologia.”*

– Carl Sagan

RESUMO

PASSOS, Adriano Gonçalves dos. OTIMIZAÇÃO GLOBAL EFICIENTE APLICADA A PROJETOS DE LAMINADOS DE RIGIDEZ VARIÁVEL. 85 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

A otimização global eficiente (EGO, do inglês *efficient global optimization*), apresentada por Donald R. Jones no final da década de 90, tem como proposta solucionar problemas de otimização nos quais, devido a um elevado custo computacional da função objetivo, o número de avaliações desta é severamente limitado. EGO baseia-se na otimização pelo uso de superfícies de resposta ou metamodelos, que são funções de baixo custo computacional que se ajustam aos dados “experimentais” (de experimentos físicos, cálculos analíticos ou simulações numéricas) obtidos em pontos escolhidos no domínio de projeto. Como no trabalho original de Jones, o metamodelo de Kriging é aqui utilizado. A eficiência e robustez do método reside no balanceamento entre a necessidade de minimização (ou maximização) da superfície de resposta média com a necessidade de melhoria da aproximação que esta fornece. Nesta dissertação, usa-se o EGO para encontrar as orientações curvas de laminados de rigidez variável com geometrias relativamente complexas. Os problemas mostrados possuem número moderado de variáveis (em geral 12) e geometrias que variam de uma simples placa quadrada com furo central a painéis reforçados semelhantes a seções de fuselagem de uma aeronave comercial. Através desses problemas, são abordadas a otimização global com e sem restrições e a otimização multiobjetivo sem restrições. Para contemplar restrições e multiobjetivos, foi necessária a implementação de modificações no algoritmo original de Jones. Para a maior parte dos problemas, o orçamento computacional é restringido em apenas 60 avaliações dos modelos de alta fidelidade (modelos de elementos finitos desenvolvidos no software ANSYS). Os resultados obtidos mostram que o *framework* proposto é capaz de encontrar bons projetos para um orçamento computacional limitado. Em relação aos compósitos de rigidez variável, o uso de fibras curvas mostrou ganhos estruturais substanciais. Por exemplo, para a estrutura semelhante à de uma fuselagem de aeronave, chegou-se a observar um aumento de até 47% na carga de flambagem sob carregamento de compressão uniaxial, quando comparada à mesma estrutura com apenas fibras retas comerciais.

Palavras-chave: Algoritmo Eficiente de Otimização, Kriging, Laminados de Rigidez Variável, Fibras Curvas

ABSTRACT

PASSOS, Adriano Gonçalves dos. EFFICIENT GLOBAL OPTIMIZATION APPLIED TO VARIABLE STIFFNESS COMPOSITES DESIGN. 85 f. MSc Dissertation – Postgraduate Program in Mechanical and Materials Engineering, Federal University of Technology – Paraná. Curitiba, 2016.

The efficient global optimization (EGO), presented by Donald R. Jones at the end of the 90s, propose to solve optimization problems where, due to the high computational burden of the cost function, the number of evaluations is severely limited. EGO is based on the concept of surrogate models, that are fast-to-compute functions that adjust the “experimental” data (physical, analytic or simulations). In the current work, as well as in the Jones’s one, the Kriging metamodel is used. The efficiency and robustness of the method lays at the balance between exploration and exploitation of the surrogate response. Here, EGO is used to find the optimized parameters for curved fiber structures with relatively complex geometry. The number of variables are moderately (in general 12) for the various problems presented and the geometries vary from simple square plates with a central hole to an airplane fuselage-like section. Trough these problems, single objective optimizations with and without constraints and an unconstrained multiobjective optimization are performed. For the constraints and multiobjectives, adaptations to the original framework were made. For most of the problems, the computational budget is set to just 60 evaluations of the high fidelity model (finite element model built using ANSYS software). The results showed that the framework is capable of finding good designs with a limited computational budget. Considering the variable stiffness composites, the use of curved fibers presented substantial structural improvements. For example, for the fuselage-like structure, it was observed an improvement of 47% in the buckling load when compared to straight fibers optimal solution.

Keywords: Efficient Global Optimization, Kriging, Variable Stifness Composites, Curved Fibers

NOMENCLATURAS

Letras gregas

Símbolo	Descrição	Dimensão	Unidade
\mathbf{C}	Matriz de correlação do metamodelo de Kriging	–	–
μ	Média de um processo aleatório gaussiano	*	*
Φ	Função distribuição acumulada (CDF)	*	*
Φ	Função distribuição acumulada	–	–
ϕ	Função densidade de probabilidade (PDF)	*	*
ϕ	Função densidade de probabilidade	–	–
σ	Tensão normal	F/L^2	MPa
σ	Variância de um processo aleatório gaussiano	*	*
τ	Tensão de cisalhamento	F/L^2	MPa
θ	Hiperparâmetro da correlação do modelo de Kriging	*	*
θ_x	Rotação em torno do eixo x	–	rad
θ_y	Rotação em torno do eixo y	–	rad
θ_z	Rotação em torno do eixo z	–	rad

Letras romanas

Símbolo	Descrição	Dimensão	Unidade
\mathbb{N}	Conjunto dos números Naturais	–	–
\mathbb{R}	Conjunto dos números Reais	–	–
\mathbf{x}^*	Ponto ótimo	–	–
\mathbf{X}	Conjunto de vetores de projeto	–	–
\mathbf{x}	Vetor de projeto	–	–
\mathbf{y}	Conjunto de processos aleatórios de média $\mathbf{1}\mu$ e variância $\mathbf{1}\sigma^2$	–	–
\hat{f}	Metamodelo genérico da função f	–	–
d	Dimensão do espaço solução (número de variáveis do problema)	–	–
E^*	Rigidez equivalente normalizada do laminado	1	MPa/MPa
E^{eq}	Rigidez equivalente do laminado	F/L^2	MPa
F	Metamodelo de Kriging de uma função f	–	–
f	Função	–	–
G	Metamodelo de Kriging de uma restrição g	–	–
g	Restrição de desigualdade	–	–
h	Restrição de igualdade	–	–
n	Número inteiro arbitrário ou números de pontos amostrados	–	–
N_{cr}^*	Carregamento crítico de flambagem normalizado	1	–
$N_{\text{cr}}^{\text{av}}$	Carregamento crítico de flambagem médio	F/L	N/mm
P_{cr}	Força crítica de flambagem	F	N
S	Resistência ao cisalhamento	F/L^2	MPa
T	Ângulo de laminação	1	°

t	Espessura do laminado	L	mm
T_0	Ângulo 0 (central) de laminação de fibras curvas	1	°
T_1	Ângulo 1 (periférico) de laminação de fibras curvas	1	°
u	Deslocamento na direção x	L	mm
v	Deslocamento na direção y	L	mm
w	Deslocamento na direção z	L	mm
X_c	Resistência em compressão na direção das fibras	F/L^2	MPa
X_t	Resistência em tração na direção das fibras	F/L^2	MPa
Y	Processo aleatório de média μ e variância σ^2	–	–
Y_c	Resistência em compressão na direção transversal às fibras	F/L^2	MPa
y_R	Realização do processo aleatório Y	–	–
Y_t	Resistência em tração na direção transversal às fibras	F/L^2	MPa

Sobrescrito

Símbolo	Descrição	Dimensão	Unidade
$()^{(k)}$	Índice indicando a k -ésima lâmina	–	–

Subscritos

Símbolo	Descrição	Dimensão	Unidade
$()_1$	Subíndice indicando a direção 1 (longitudinal às fibras)	–	–
$()_2$	Subíndice indicando a direção 2 (perpendicular às fibras no plano do laminado)	–	–
$()_3$	Subíndice indicando a direção 3 (perpendicular ao plano do laminado)	–	–
$()_x$	Subíndice indicando a direção x	–	–
$()_y$	Subíndice indicando a direção y	–	–
$()_z$	Subíndice indicando a direção z	–	–
$()_{xy}$	Subíndice indicando o plano xy	–	–
$()_{xz}$	Subíndice indicando o plano xz	–	–
$()_{yz}$	Subíndice indicando o plano yz	–	–
$[]_S$	Laminado simétrico	–	–

* Dimensão e unidade dependem das variáveis de projeto e funções objetivos.

LISTA DE SIGLAS

FAA	Administração Federal de Aviação – <i>Federal Aviation Administration</i>
FI	Índice de Falha – <i>Failure Index</i>
RF	Fator de Reserva – <i>Reserve Factor</i>
IRF	Inverso do Fator de Reserva – <i>Inverse Reserve Factor</i>
MoS	Margem de Segurança – <i>Margin of Safety</i>
AFP	Posicionamento Automatizado de Fibras – <i>Automated Fiber Placement</i>
DOE	Projeto dos experimentos – <i>Design of experiments</i>
LHS	Amostra hipercubo latino – <i>Latin hypercube sample</i>
PI	Probabilidade de Melhoria – <i>Probability of Improvement</i>
EI	Melhoria Esperada – <i>Expected Improvement</i>
CDF	Função Distribuição Acumulada – <i>Cumulative Distribution Function</i>
PDF	Função Densidade de Probabilidade – <i>Probability Density Function</i>
EGO	Otimização Global Eficiente – <i>Efficient Global Optimization</i>

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Exemplo do funcionamento do algoritmo de otimização rgenoud.	7
Figura 2.2 – Ângulo de laminação e eixos principais de uma lâmina.	9
Figura 2.3 – Comparação entre o inverso do fator de reserva com o índice de falha para o critério de Tsai-Wu.	12
Figura 2.4 – Representação da flambagem linear para uma coluna perfeita.	13
Figura 3.1 – Equipamento de posicionamento automatizado de fibras.	15
Figura 3.2 – Lâmina com fibras curvas.	16
Figura 3.3 – Largura de aplicação versus largura teórica	17
Figura 3.4 – Diagrama em caixa que sumariza a melhoria obtida pelo uso de fibras curvas.	19
Figura 3.5 – Número de trabalhos encontrados pela ferramenta de busca <code>google.scholar</code> relativos ao escopo deste trabalho e separados por ano de publicação.	20
Figura 4.1 – Exemplo de um cubo latino aleatório.	22
Figura 4.2 – Quadrados latinos de diferentes qualidades.	23
Figura 4.3 – Aproximação de uma função unidimensional por modelos de base radial.	28
Figura 4.4 – Núcleos de covariância disponíveis no pacote <code>DiceKriging</code>	30
Figura 4.5 – Aproximação de função unidimensional por metamodelos de Kriging.	32
Figura 5.1 – Minimização da <i>função enganosa</i> utilizando a estratégia de preenchi- mento por minimização do preditor de Kriging.	35
Figura 5.2 – Probabilidade de se encontrar valores inferiores a $\mu - \sigma$ dada uma dis- tribuição normal de média μ e desvio padrão σ	36
Figura 5.3 – Probabilidade de melhoria da função enganosa para diferentes alvos.	37
Figura 5.4 – Minimização da função <i>enganosa</i> utilizando a estratégia de minimiza- ção por preenchimento e maximização da probabilidade de melhoria.	38
Figura 5.5 – Minimização da função <i>enganosa</i> utilizando a estratégia de minimiza- ção por preenchimento e maximização da melhoria esperada.	40
Figura 5.6 – Fluxograma do algoritmo eficiente de otimização global.	41
Figura 5.7 – Fluxograma do algoritmo eficiente de otimização global com restrições.	43
Figura 5.8 – Amostras em uma otimização multiobjetivo com um conjunto de Pa- reto de 5 pontos não dominados.	45
Figura 5.9 – Fluxograma do algoritmo eficiente de otimização global com dois obje- tivos.	46
Figura 5.10 – Função Branin-Hoo.	47
Figura 5.11 – Função Griewank.	47
Figura 5.12 – Otimização global da função Branin-Hoo.	49

Figura 5.13–Função Branin-Hoo com restrição	50
Figura 5.14–Otimização global da função Branin-Hoo com restrição simples.	50
Figura 5.15–Função Branin-Hoo com restrição desconexa.	52
Figura 5.16–Otimização global da função Branin-Hoo com restrição simples.	52
Figura 5.17–Evolução da construção da frente de Pareto na otimização multiobje- tivo das funções Branin-Hoo e Griewank.	54
Figura 6.1 – Modelo e condições de contorno utilizados no primeiro caso de validação.	56
Figura 6.2 – Maiores N_{cr}^* encontrados com uso de diferentes técnicas de otimização após 25 execuções independentes para o caso de Validação 1.	59
Figura 6.3 – Melhores orientações encontradas pelo EGO para o Caso de Validação 1.	60
Figura 6.4 – Modelo utilizado para obtenção da resposta de alta fidelidade.	61
Figura 6.5 – Condições de contorno aplicadas no modelo de alta fidelidade	62
Figura 6.6 – Evolução do algoritmo de otimização para 25 execuções independentes.	64
Figura 6.7 – Modelo utilizado para obtenção da resposta de alta fidelidade e condi- ções de contorno impostas ao laminado reforçado com furo oblongo	66
Figura 6.8 – Evolução do fator de reserva $RF^{(\lambda N)}$ para 25 execuções independentes da otimização sem restrições.	67
Figura 6.9 – Evolução do deslocamento máximo w_{max} para 25 execuções indepen- dentes da otimização com restrições	68
Figura 6.10–Comportamento da restrição de flambagem $RF^{(\lambda N)}$ durante o processo de otimização para 25 execuções independentes.	69
Figura 6.11–Comportamento da restrição de falha de Tsai-Wu $RF^{(TW)}$ durante o processo de otimização para 25 execuções independentes.	69
Figura 6.12–Evolução da porcentagem total dos pontos amostrados que atendem ambas as restrições a cada iteração para 25 execuções independentes.	70
Figura 6.13–Frente de Pareto típica resultante de uma execução do algoritmo pro- posto.	71
Figura 6.14–Resultados de 25 execuções independentes de otimização multiobjetivo para a inicialização $\alpha = 0$	71
Figura 6.15–Resultados de 25 execuções independentes de otimização multiobjetivo para a inicialização $\alpha = 1$	72
Figura A.1–Comportamento à flambagem do painel submetido à compressão uniaxial.	82
Figura A.2–Comportamento à flambagem do painel submetido à cisalhamento.	82
Figura A.3–Comportamento ao fator de reserva de Tsai-Wu do painel submetido à pressão interna.	83
Figura A.4–Comportamento ao deslocamento fora do plano do painel submetido à pressão interna.	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Simbologia das tensões limites de resistência de uma lâmina.	10
Tabela 4.1 – Núcleos de covariância disponíveis no pacote <code>DiceKriging</code>	30
Tabela 6.1 – Propriedades elásticas da lâmina HexTowAS4/CYCOM977-3	57
Tabela 6.2 – Melhores N_{cr}^* encontrados e correspondentes empilhamentos e E_y^* para o caso de Validação 1.	59
Tabela 6.3 – Propriedades elásticas de uma lâmina de carbono-epoxy para o Caso de Validação 2.	61
Tabela 6.4 – Melhores resultados obtidos para as três condições de contorno.	63
Tabela 6.5 – Propriedades elásticas e de falha de lâmina carbono-epoxy.	65
Tabela 6.6 – Melhores orientações obtidas para o problema de otimização sem restrições.	67
Tabela 6.7 – Melhores orientações obtidas para o problema de otimização com restrições.	69
Tabela 6.8 – Melhores orientações obtidas para o problema de otimização multiobjetivo.	72

LISTA DE CÓDIGOS

Código 3.1 – Busca de número de artigos encontrados na plataforma <code>google.scholar</code>	20
Código 4.1 – Predição de um metamodelo de base radial.	27
Código 4.2 – Construção de um metamodelo de base radial.	27
Código 5.1 – EGO sem restrições para a função Branin-Hoo.	48
Código 5.2 – EGO com restrição simples para a função Branin-Hoo.	49
Código 5.3 – EGO com restrição desconexa para a função Branin-Hoo.	51
Código 5.4 – EGO em otimização multiobjetivo das funções Branin-Hoo e Griewank.	53

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Contexto	1
1.2	Objetivo	2
1.3	Organização do Texto da Dissertação	3
2	DEFINIÇÕES E CONSIDERAÇÕES INICIAIS	5
2.1	Otimização	5
2.2	Algoritmo Genético com Uso de Derivadas	6
2.3	Materiais Compósitos Laminados	8
2.4	Fator de Reserva	11
2.5	Flambagem	11
3	OTIMIZAÇÃO DE FIBRAS CURVAS	15
3.1	Parametrização da Orientação das Fibras	16
3.2	Restrições de Manufatura	17
3.3	Revisão Bibliográfica	18
4	METAMODELO DE KRIGING	21
4.1	Projeto de Experimentos	21
4.2	Técnicas de Estimção de Parâmetros e Validação	25
4.3	Funções de Base Radial	26
4.4	Construção do Metamodelo de Kriging	28
5	OTIMIZAÇÃO GLOBAL EFICIENTE	35
5.1	Critérios de Preenchimento	35
5.2	Algoritmo Eficiente de Otimização Global	39
5.3	Tratamento das Restrições	41
5.4	Otimização Multiobjetivo	43
5.5	Demonstrações em funções teste	46
6	RESULTADOS NUMÉRICOS	55
6.1	Caso de Validação 1	56
6.2	Caso de Validação 2	60
6.3	Laminado Reforçado com Furo Oblongo	65
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
7.1	Síntese e Conclusões Gerais	73

7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	74
	Referências Bibliográficas	75
APÊNDICE A	COMPORTAMENTO DE LAMINADOS REFORÇADOS COM FIBRAS CURVAS	81
Índice Remissivo		85

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO

A simulação numérica se tornou uma ferramenta padrão no desenvolvimento de projetos de engenharia. Usada principalmente como uma alternativa rápida e barata quando comparada à construção de protótipos e à execução de experimentos, ela é, em alguns casos, a única alternativa viável (ex., simulação dos efeitos da emissão de CO₂ no aquecimento global ou resposta estrutural da vedação de um reator nuclear) (ROUSTANT et al., 2012).

O aumento de complexidade de problemas físicos ou de engenharia, e respectivos modelos matemáticos, acarreta um aumento significativo do tempo de execução das suas simulações computacionais. Usualmente, usa-se o termo função onerosa ou cara (do ponto de vista de tempo computacional) para identificar tais problemas. O estudo de diferentes concepções de um projeto baseado na exploração exaustiva das possibilidades factíveis é, em geral, impossível sob restrições realísticas de tempo. Para isso, deve-se empregar alguma estratégia sistemática de otimização, um algoritmo capaz de realizar a busca do mínimo (ou máximo) global ou local de maneira eficiente, reduzindo drasticamente o número de acessos à função custosa. Segundo Mullen (2014) e Arora (2004), os exemplos mais comuns de implementações de algoritmos de otimização estocásticos são: algoritmo de recozimento simulado, evolucionários, enxame de partículas e *branch and bound*. Dentre os algoritmos de otimização determinísticos, destacam-se os que se baseiam em derivadas como Newton-Raphson, gradientes conjugados e BFGS.

Para problemas com grande número de variáveis ou com tempo de execução extremamente longo, estratégias ainda mais eficientes devem ser empregadas a fim de reduzir o custo computacional. Aproximações matemáticas da relação entrada/saída (modelos substitutos ou metamodelos, em inglês, *surrogate models* ou *metamodels*) vêm sendo cada vez mais usados como ferramenta guia de algoritmos de otimização eficientes. Após a escolha de uma classe de metamodelos, com base em algum conhecimento prévio, eles são construídos com um conjunto inicial de dados e possivelmente aprimorados com a assimilação de novos dados durante o processo de otimização. Classes típicas de metamodelos são regressões polinomiais, *splines*, redes neurais e Kriging (ROUSTANT et al., 2012).

Derivado originalmente para resolver problemas no ramo das geociências, Krieg (1951) desenvolveu um método de interpolação espacial com o objetivo de prever concentrações de ouro em um complexo de minas na África do Sul. Posteriormente, o método denominado de Kriging foi refinado e tornou-se ponto de partida para o nascimento da

geoestatística (MATHERON, 1963). Assumindo uma função desconhecida (*black box*) $y : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, Kriging consiste em fazer previsões de valores desconhecidos de $y(\mathbf{x}^{(0)})$ para um dado $\mathbf{x} \in D$ usando observações conhecidas $\mathbf{y} = \{y^{(1)}, \dots, y^{(n)}\}$ em um conjunto de experimentos $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}\} (n \in \mathbb{N})$. Com o passar do tempo, o metamodelo de Kriging foi incorporado ao processo de otimização de problemas de engenharia. Provavelmente, o avanço mais notável se dá com o trabalho de Jones et al. (1998), onde é proposta uma metodologia eficiente de otimização baseada em metamodelos de Kriging. Esta metodologia, chamada de algoritmo eficiente de otimização (EGO, do inglês *efficient global optimization*), é o foco desta dissertação.

Combinado ao avanço da simulação numérica, a evolução nos processos de fabricação de componentes em material compósito vem aumentando a flexibilidade dos projetos de engenharia. Em especial, indústrias de ponta como o segmento aeroespacial vem se beneficiando desses avanços. Em 2011, a empresa Boeing lançou sua mais nova aeronave, o Boeing 787 Dreamliner, que foi um sucesso comercial da indústria aeronáutica. Um dos motivos do sucesso foi a aposta no uso de compósitos como material primário, totalizando 50% do peso da aeronave (SCHOFIELD, 2012). O uso extensivo de compósitos resultou na significativa redução de peso e conseqüentemente do consumo específico de combustível, que caiu mais de 20% quando comparado com o Boeing 767 (SCHOFIELD, 2012). A grande flexibilidade de projeto obtida com o uso de compósitos vem da ortotropia dos materiais usados, geralmente fibras longas e contínuas de alta resistência e baixo peso. O projetista, além de ter liberdade praticamente irrestrita na concepção das formas dos componentes, conta com a possibilidade de arranjo da orientação das camadas do laminado com intuito de adequá-lo, da melhor forma possível, à condição de carregamento. Durante as últimas décadas, a melhoria dos processos de fabricação possibilitou o posicionamento automatizado de fibras, que oferece a capacidade de guiar feixes de fibras individuais pelo molde da peça e é hoje amplamente utilizado na fabricação de componentes de geometria complexa. Isto permite que os feixes de fibras sigam um caminho curvilíneo, resultando em um laminado de rigidez variável e assim podendo obter uma distribuição de tensões e deformações mais favorável à aplicação requerida. Com tamanha flexibilidade (grande número de variáveis), faz-se indispensável o uso de técnicas sofisticadas de otimização no cenário competitivo atual. Em (GHIASI et al., 2010), pode ser vista uma extensa revisão bibliográfica de diferentes técnicas de otimização de compósitos de rigidez variável.

1.2 OBJETIVO

Neste trabalho é realizada a elaboração e teste de uma metodologia eficiente de otimização das orientações das fibras curvas em componentes de material compósito. Para isso, são usadas as seguintes técnicas: algoritmo genético, projeto de experimentos (hipercubo latino), simulação por elementos finitos, metamodelos e equações de parametrização

da trajetória das fibras curvas.

O uso de metamodelos aumenta a eficiência do processo de otimização de laminados com fibras curvas pela redução do número de acessos à função objetivo. Para isso, é empregado o algoritmo eficiente de otimização (EGO) proposto por Jones et al. (1998) que maximiza iterativamente um critério de atualização do metamodelo de Kriging.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO DA DISSERTAÇÃO

Este texto está estruturado da seguinte maneira:

- 1 INTRODUÇÃO:** tem o intuito de mostrar um breve panorama do estudo, mostrando a relevância do tema, em especial na indústria aeroespacial. Além disso, são expostos os objetivos e ambições do trabalho desenvolvido.
- 2 DEFINIÇÕES E CONSIDERAÇÕES INICIAIS:** apresenta algumas definições básicas usadas durante o texto e fornece uma breve fundamentação teórica de assuntos secundários, mas de suporte, ao tema principal do trabalho. A principal intenção é ambientar o leitor quanto aos termos utilizados, bem como fornecer uma quantidade substancial de referências (em especial, livros) sobre os assuntos secundários abordados no restante do texto. Os assuntos principais (fibras curvas, Kriging e EGO) são abordados em capítulos próprios.
- 3 OTIMIZAÇÃO DE FIBRAS CURVAS:** apresenta ao leitor os conceitos e vantagens da laminação com fibras curvas, bem como suas limitações na fabricação de um componente real. Por fim, traz uma revisão bibliográfica para mostrar o estado da arte na otimização de fibras curvas. É também realizada uma análise quantitativa do número de trabalhos publicados que contêm termos chave do trabalho.
- 4 METAMODELO DE KRIGING:** destina-se à construção dos conhecimentos necessários para a otimização global eficiente. Inicialmente são abordados os conceitos de projeto de experimentos, passo extremamente importante para a construção de metamodelos. Na sequência, cria-se uma base para o entendimento do modelo de Kriging com a explicação de técnicas de estimativa de parâmetros e metamodelos de bases radiais. Finalmente, é detalhado o processo de construção do metamodelo de Kriging.
- 5 OTIMIZAÇÃO GLOBAL EFICIENTE:** ilustra diferentes critérios de preenchimento, conceito central do refino do metamodelo e da otimização global eficiente, seguido do algoritmo propriamente dito. Além disso, o capítulo aborda as peculiaridades da otimização global com restrições e da otimização global multiobjetivo. Finalmente, os algoritmos são demonstrados em funções analíticas comumente empregadas como teste no campo da otimização.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS: traz os resultados de problemas solucionados. Inicialmente, dois casos obtidos na literatura são estudados com objetivo de validar a metodologia empregada. Finalmente, o texto contempla a otimização de um painel reforçado de geometria complexa (similar à uma seção de fuselagem de uma aeronave comercial). Nesse problema, são empregadas também técnicas de otimização global com restrições e multiobjetivo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS: apresenta as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

2 DEFINIÇÕES E CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos e definições básicas usadas no trabalho.

2.1 OTIMIZAÇÃO

Com base em [Arora \(2004\)](#), a seguir são definidos alguns conceitos de otimização:

Problema Geral de Otimização: Um problema geral de otimização pode ser posto como:

$$\text{minimizar: } f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n) \quad (2.1)$$

$$\text{sujeito a: } h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad (i = 1, \dots, p) \quad (2.2)$$

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad (j = 1, \dots, m). \quad (2.3)$$

onde: $f(\mathbf{x})$ é a função custo ou objetivo que está sujeita a p -restrições de igualdade h_i e m -restrições de desigualdade g_j . Mesmo em problemas onde deseja-se maximizar a função custo, é possível a conversão do problema para a minimização de uma função objetivo (em geral, fazendo-se $f(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ ou $f(\mathbf{x}) = 1/f(\mathbf{x})$).

Região Factível: o conjunto (ou região) factível (ou viável) S é definido pelo conjunto dos pontos tais que:

$$S = \begin{cases} \mathbf{x} \mid h_j(\mathbf{x}) = 0, & (j = 1, \dots, p); \\ \mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, & (i = 1, \dots, m). \end{cases} \quad (2.4)$$

Em termos de engenharia, usa-se o termo projeto factível para descrever aqueles que atendem todas as especificações, como por exemplo: fabricação, uso e resistência.

Mínimo Global: ou mínimo absoluto pode ser definido como o ponto \mathbf{x}^* que satisfaz:

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}), \quad (2.5)$$

para todo o conjunto factível S .

Mínimo Local: ou mínimo relativo \mathbf{x}^* é definido quando a Inequação 2.5 é satisfeita apenas para uma pequena vizinhança N de \mathbf{x}^* pertencente ao espaço factível S . Ou seja,

$$N = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S \text{ com } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta\} \quad (2.6)$$

para algum $\delta > 0$ arbitrariamente pequeno.

2.2 ALGORITMO GENÉTICO COM USO DE DERIVADAS

No campo da otimização, algoritmos genéticos pertencem à classe de métodos bioinspirados, baseados em ideias estocásticas,¹ assim como: colônia de formigas, enxame de partículas e recozimento simulado (ARORA, 2004). Em um algoritmo genético, uma população inicial de soluções de um problema de otimização evolui a cada iteração, buscando um conjunto melhor de soluções. Para determinar quais indivíduos são *mais aptos* a passarem suas características (variáveis de entrada) para as próximas gerações de soluções, uma função de aptidão deve ser definida (geralmente a função objetivo do problema de otimização). As variáveis de entrada são codificadas em genes, o que pode ser realizado de inúmeras maneiras. A forma mais simples, é relacionar cada variável de projeto a um gene representado por um número real (codificação real).

O processo evolutivo geralmente começa com uma população gerada aleatoriamente que melhora a cada iteração pela aplicação de operadores. Cada operador pode ser definido de diversas maneiras e os mais comuns são baseados nos conceitos biológicos de mutação, cruzamento e clonagem. Em geral, um algoritmo realiza a clonagem do melhor indivíduo de cada geração para garantir que a próxima geração tenha uma solução no mínimo igual à melhor encontrada até o momento. Os operadores baseados em mutação realizam uma alteração aleatória nos genes do indivíduo, entre as possibilidades podem ser destacadas a mudança entre dois genes do mesmo indivíduo ou a troca do valor de um gene por um valor aleatório dentro do espaço factível. Os operadores de cruzamento misturam os genes de dois ou mais indivíduos para a geração de um novo indivíduo. Pode-se ainda combinar ambos os conceitos na criação de operadores mistos que realizam o cruzamento em combinação de mutações. A formulação de cada operador e sua probabilidade de ser aplicada a um indivíduo tal como o tamanho da população e número de gerações, em geral, são parâmetros que o usuário deve escolher e possuem valores ótimos diferentes para cada tipo de problema a ser resolvido (ARORA, 2004).

Todas as otimizações realizadas neste trabalho utilizam o pacote `rgenoud`, desenvolvido por Mebane e Sekhon (2011) para a linguagem de programação **R** (R Development Core Team, 2014). Segundo Mebane e Sekhon (2011), o pacote foi desenvolvido para resolver problemas difíceis de otimização como funções não lineares, não suaves ou até mesmo descontínuas. As principais dificuldades de se usar algoritmos de otimização baseados apenas em derivadas ocorrem quando a função não é globalmente côncava (ou convexa) podendo causar a existência de múltiplos mínimos locais, pontos de sela, ótimos na fronteira ou descontinuidades. Nesses casos, algoritmos como Newton-Raphson e quasi-Newton geralmente não são empregados com sucesso. O pacote `rgenoud` combina com sucesso o algoritmo genético, para uma busca global, a algoritmos de otimização

¹ Algoritmos de otimização estocásticos são definidos por processos indeterminados, com componentes aleatórios.

locais, baseados em derivadas.

O pacote ainda é capaz de otimizar funções discretas (sem uso de derivadas) ou reais (com ou sem uso de derivadas), porém não é capaz de otimizar funções mistas diretamente. Também é possível: a otimização de vários critérios de aptidão de forma léxica², realizar chamadas recursivas e/ou em paralelo (graças ao gerador interno de números pseudoaleatórios) e a economia do orçamento computacional pela não reavaliação de pontos já visitados (os resultados são armazenados na memória).

O `rgenoud` fornece a possibilidade da otimização local com cinco métodos baseados em derivadas: *BFGS* (HEAD; ZERNER, 1985), *L-BFGS-B* (BYRD et al., 1995), *Nelder-Mead* (NELDER; MEAD, 1965), gradientes conjugados – *CG* (FLETCHER; REEVES, 1964) e *SANN* (BÉLISLE, 1992), aceitando uma função gradiente fornecida pelo usuário ou uso de derivada numérica baseada em Gill (1981). Como ilustrado na Figura 2.1, o algoritmo aplica um método de otimização local no melhor indivíduo de cada geração substituindo esse pelo mínimo local encontrado. Em (a), G_0 representa os pontos da geração inicial, aleatoriamente amostrados, G_0^* é o resultado da busca local partindo do melhor ponto da geração atual (melhor G_0). Em (b), G_1 representa os pontos da nova geração, gerados através dos operadores genéticos aplicados a geração anterior, G_1^* é resultado da busca local aplicada ao melhor indivíduo da geração 1.

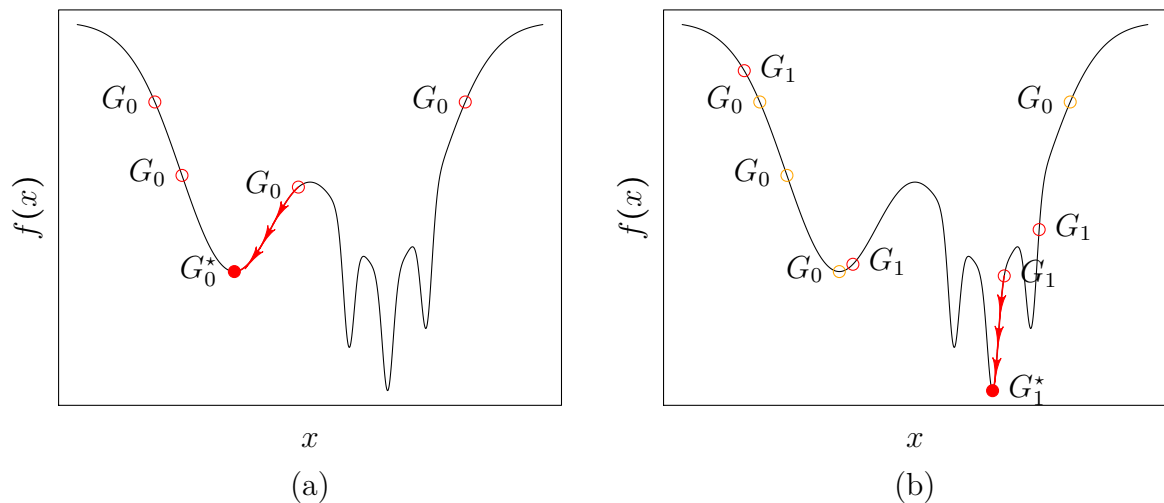


Figura 2.1 – Exemplo do funcionamento do algoritmo de otimização `rgenoud`: (a) geração zero (G_0) e ponto ótimo local (G_0^*), (b) geração um (G_1) e ponto ótimo global da primeira geração (G_1^*).

Assim como praticamente todos os métodos de otimização, o `rgenoud` necessita que parâmetros de ajuste sejam definidos pelo usuário. Em geral, não é eficiente utilizar as configurações padrão do algoritmo. Contudo, o enfoque desta dissertação é na redução

² Otimização de múltiplos critérios de aptidão quando o segundo critério só é considerado se a resposta possuir mesma aptidão no primeiro critério e assim por diante.

do custo computacional pelo uso de metamodelos. Como neste trabalho o tempo computacional gasto pelo algoritmo genético é muito inferior à avaliação da função custo para refino do metamodelo, a influência dos parâmetros do algoritmo genético não foi avaliada.

Nesse trabalho, o algoritmo genético com derivadas é empregado nos processos de otimização de funções analíticas (i.e. construção dos metamodelos, maximização da melhoria esperada).

2.3 MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS

Aspectos Gerais

De maneira geral, um material compósito é qualquer material que seja constituído macroscopicamente por pelo menos dois materiais diferentes (JONES, 1998). Entretanto, em engenharia, geralmente restringe-se a definição de material compósito para uma mistura de fibras em uma matriz que resulta em configuração que combina as melhores características dos constituintes e suas propriedades são superiores à dos materiais isolados (KASSAPOGLOU, 2013). Mais especificadamente, compósitos *laminados* são constituídos de camadas finas, empilhadas e completamente unidas. Cada camada (lâmina) do laminado pode ter orientação, espessura e materiais diferentes das demais. Para aplicações de alta performance, é comum o emprego de lâminas com fibras longas e contínuas. A orientação das fibras pode ser unidirecional (mecha – *roving*), bidirecional (tecido plano – *plain wave* ou sarja – *2-2 twill*) ou multidirecional.

Em uma lâmina, os eixos principais são definidos como:

Eixo 1: Direção longitudinal à fibra;

Eixo 2: Direção transversal à fibra, no plano da lâmina;

Eixo 3: Direção perpendicular ao plano da lâmina.

Para um sistema de referências arbitrário (x, y, z) , o ângulo de laminação de uma lâmina é o ângulo formado entre o Eixo x e o Eixo 1 como é mostrado na Figura 2.2.

Note que as fibras possuem apenas definição da direção, o sentido não sendo relevante, ou seja, fibras com orientação θ são idênticas à fibras com orientação $\theta \pm 180^\circ$. Por exemplo, -150° , 30° e 210° representam o mesmo ângulo de laminação. Dessa maneira é usual definir a direção das fibras utilizando apenas o primeiro e o quarto quadrantes do círculo trigonométrico ($\theta \in [-90, 90]$).

Um laminado é descrito pelas características das camadas que o compõem (material, espessura e ângulo de laminação). No caso de todas as camadas terem a mesma espessura e serem constituídas do mesmo material, um laminado com n -lâminas pode ser descrito apenas pelos ângulos de laminação de cada camada, iniciando pela camada com maior valor de coordenada z , $[\theta_1/\theta_2/\theta_3/\dots/\theta_n]$.

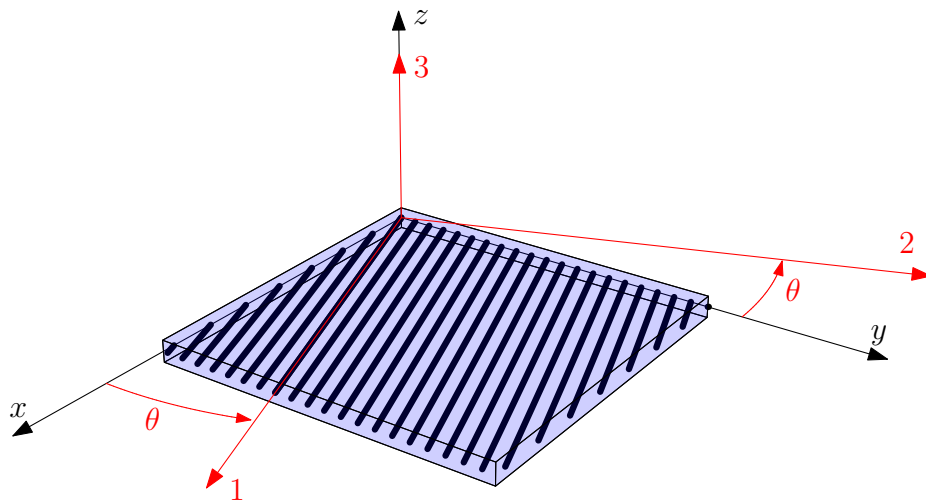


Figura 2.2 – Ângulo de laminação e eixos principais de uma lâmina.

Em diversos casos recomenda-se o uso de uma notação simplificada para a representação do laminado. Os recursos mais usados são (KASSAPOGLOU, 2013):

Laminados simétricos: são laminados que possuem simetria em relação ao plano médio, para cada camada k existe uma camada k' de mesma espessura, material e ângulo de laminação equidistante ao plano de simetria. Ex.: para os casos cujo número de camadas do laminado seja par: $[35/20/40]_S$ é igual a $[35/20/40/40/20/35]$, e para um número ímpar de camadas: $[35/20/\overline{40}]_S$ é igual a $[35/20/40/20/35]$.

Laminados balanceados: são laminados em que, para cada camada orientada em um ângulo $+\theta$, existe uma camada, de mesma espessura e material, orientada na direção $-\theta$. Se as camadas são adjacentes utiliza-se a notação $\pm\theta$ e/ou $\mp\theta$. Ex.: $[\pm 35/\pm 20/\mp 40]$ é igual a $[35/-35/20/-20/-40/40]$. Note que o laminado $[35/-20/-35/40/20/-40]$ também é balanceado mas a notação $\pm\theta$ não pode ser utilizada.

Lâminas repetidas: quando um laminado possui uma sequência de lâminas adjacentes repetidas utiliza-se um subíndice com o número de repetições. Se existem 3 lâminas θ adjacentes, substitui-se por θ_3 . Ex.: $[0_3/-45_2/60_2]$ é igual a $[0/0/0/-45/-45/60/60]$. Além disso, parênteses podem ser utilizados para agrupar um conjunto repetido de lâminas. Ex.: $[45_2/(0_2/60_2/90)_2/45_2]$ é igual a $[45/45/0/0/60/60/90/0/0/60/60/90/45/45]$.

Crítério de Falha de Tsai-Wu

Segundo Kassapoglou (2013), falhas em materiais compósitos são de difícil previsão pois vários mecanismos atuam em conjunto. Diversos modelos foram desenvolvidos com objetivo de prever falhas de componentes deste tipo de material, sendo os mais clássicos: Tensão Máxima, Deformação Máxima e Tsai-Wu. Esses modelos utilizam as tensões

limites de resistência de uma lâmina, as quais são obtidas em ensaios uniaxiais, bi-axiais ou de cisalhamento e são definidas segundo a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Simbologia das tensões limites de resistência de uma lâmina.

Símbolo	Descrição	Constituinte predominante
X_t	Resistência em tração na direção das fibras	Fibra
X_c	Resistência em compressão na direção das fibras	Fibra e matriz
Y_t	Resistência em tração na direção transversal às fibras	Matriz
Y_c	Resistência em compressão na direção transversal às fibras	Matriz
S	Resistência ao cisalhamento	Interface matriz/fibra

O critério de Tsai-Wu (TSAI; WU, 1971) é uma teoria de falha fenomenológica amplamente utilizada para materiais compósitos anisotrópicos que possuem resistências em tração e compressão diferentes. O critério não se baseia apenas no fenômeno físico, mas também contempla o ajuste de um envelope em dados experimentais, e é escrito como

$$\max_{(k)} \left(\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} - F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_2 + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} \right)^{(k)} < 1. \quad (2.7)$$

O critério depende de dados de um ensaio biaxial para a determinação do coeficiente F_{12} , que computa a interação do produto das tensões σ_1 e σ_2 . Uma expressão frequentemente utilizada para F_{12} é

$$F_{12} = \sqrt{\frac{1}{X_t X_c Y_t Y_c}}, \quad (2.8)$$

(KASSAPOGLOU, 2013). Contudo, Narayanaswami e Adelman (1977) afirmam que, na maioria das vezes, o termo F_{12} é insignificante e sugere que seja igualado a zero. Cui et al. (1992) ainda observaram que fazendo-se $F_{12} = 0$ os dados experimentais são ajustados de maneira satisfatória para propósitos de engenharia. Com base nos estudos citados, o relatório técnico público feito por Sun (1996) para a Administração Federal de Aviação norte-americana (FAA) define que F_{12} seja igualado a zero para evitar ambiguidades e é o padrão adotado nesta dissertação.

É importante ressaltar que, para o uso da Equação 2.7, todas as tensões de resistência do material devem ser dadas em módulo. O lado esquerdo da Equação 2.7 é denominado de índice de falha de Tsai-Wu (FI) e pode ser usado para determinar o quão longe da falha o componente se encontra.

Os critérios de falha definem um envelope de tensões ou deformações nas quais o material pode operar em segurança. Uma métrica simples para a caracterização da margem de segurança até a falha pode ser dada pelo fator de reserva e seus derivados, como definido a seguir.

2.4 FATOR DE RESERVA

O fator de reserva (RF) indica a margem de falha. Em outras palavras, a carga aplicada multiplicada pelo fator de reserva resulta na carga de falha,

$$\text{RF} = \frac{N_{\text{falha}}}{N_{\text{aplicado}}}. \quad (2.9)$$

Fatores de reserva maiores que a unidade indicam margem positiva até a falha (componente seguro) e valores menores indicam margem negativa até a falha (componente não seguro). Em um projeto adequado, o fator de reserva deve sempre ser maior do que um e indica a *distância* até a falha.

Em alguns casos, pode ser interessante representar o inverso do fator de reserva (IRF)

$$\text{IRF} = \frac{1}{\text{RF}} = \frac{N_{\text{aplicado}}}{N_{\text{falha}}} \quad (2.10)$$

ou a margem de segurança (MoS), definida como

$$\text{MoS} = \text{RF} - 1. \quad (2.11)$$

Uma margem de segurança positiva indica o quanto de carga pode ser adicionada a estrutura antes de atingir a carga de falha. De maneira análoga, um valor negativo indica quanto de força deve ser reduzida para que o componente não falhe.

Note a linearidade da força aplicada com o inverso do fator de reserva, quando dobra-se o carregamento, o IRF também é dobrado. Essa característica é útil quando deseja-se comparar diferentes critérios de falhas não lineares (em relação ao aumento de carregamento) como o caso do critério de falha de Tsai-Wu, onde o índice de falha não é linearmente proporcional ao carregamento aplicado. A Figura 2.3 ilustra a diferença do uso do índice de falha de Tsai-Wu e do inverso do fator de reserva para um carregamento uniaxial.

2.5 FLAMBAGEM

Uma grande parcela dos componentes usados na indústria aeroespacial consiste em finas e longas estruturas como longarinas, nervuras, reforços, painéis, etc.. Devido à sua baixa estabilidade, tais componentes são suscetíveis à flambagem, sendo necessário considerar este critério no projeto.

Euler, em 1774, realizou a primeira contribuição significativa para a teoria de flambagem como a conhecemos e, apesar de antiga, ainda é uma base válida para os modelos modernos de flambagem (MEGSON, 2013). É empiricamente evidente que, com o

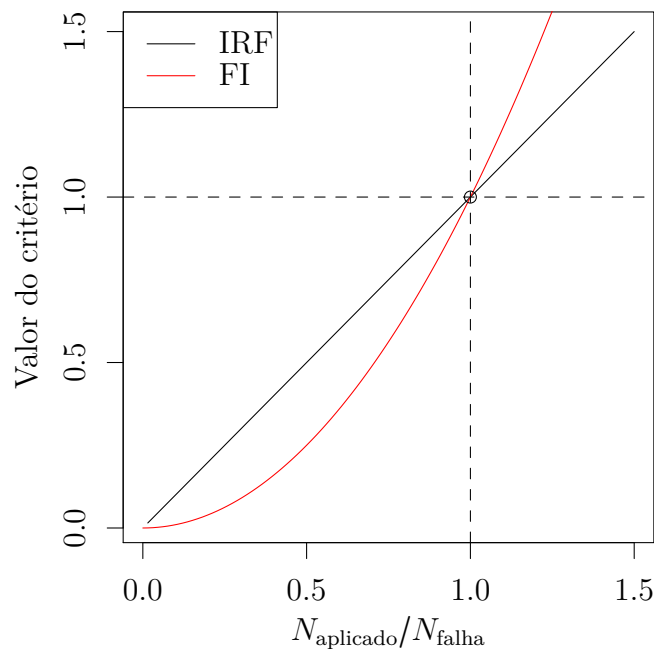


Figura 2.3 – Comparação entre o inverso do fator de reserva (IRF) com o índice de falha (FI) para o critério de Tsai-Wu.

aumento de um carregamento axial aplicado a uma coluna delgada, em algum determinado nível de carga N_{cr} , a coluna irá falhar subitamente. Para esta carga limite, dá-se o nome de carregamento crítico de flambagem. Claramente para que essa falha ocorra, o sistema deve possuir algum grau de assimetria no plano de flambagem, por mais imperceptível que seja. Essa assimetria pode vir de diferentes formas como imperfeições no material, geometria ou carregamento do componente. Segundo [Megson \(2013\)](#), se uma coluna *perfeita* como a mostrada na Figura 2.4 (a) for submetida a um carregamento compressivo P , apenas deslocamento axial ocorrerá, não importando a magnitude de P . Contudo, se a coluna for deslocada lateralmente por uma pequena força ΔF (Figura 2.4 (b)), então, para valores de P *abaixo* de uma carga crítica de flambagem, P_{cr} , a remoção da força de desvio ΔF resultará no retorno da coluna para sua posição *perfeita*, indicando um equilíbrio estável. Se a viga for carregada com a carga crítica P_{cr} , o deslocamento lateral não desaparecerá quando a força F for removida, caracterizando um estado de equilíbrio indiferente. Portanto, a carga crítica de flambagem P_{cr} é associada a este estado indiferente de estabilidade pois cargas $P > P_{cr}$ levariam a um estado de equilíbrio instável. Dessa maneira, a perturbação induzida tende a aumentar mesmo após a remoção da força ΔF .

Diversas equações analíticas foram desenvolvidas para a solução de problemas de flambagem para geometrias relativamente simples como vigas, placas finas e cascas. Contudo, geometrias de elevada complexidade necessitam uma formulação mais abrangente. Baseado no princípio do trabalho virtual combinado com a técnica de elementos finitos,

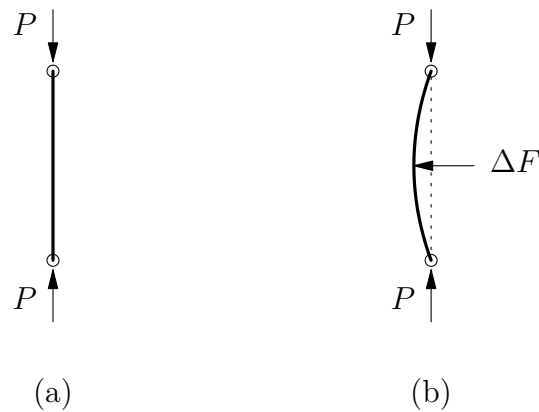


Figura 2.4 – Representação da flambagem linear para uma coluna perfeita.

a solução para a flambagem linear resulta da resolução de um problema de autovetores e autovalores (COOK, 1995)

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

onde \mathbf{K} representa a matriz de rigidez, \mathbf{K}_σ é a matriz de rigidez geométrica e depende das tensões atuantes, λ é o autovalor e representa a razão entre a carga de flambagem e a carga aplicada e \mathbf{u} é o autovetor e descreve o modo de flambagem. Existem n soluções para a Equação 2.12 (onde n é a dimensão das matrizes), porém, o menor autovalor encontrado, e seu autovetor correspondente, referem-se à carga crítica de flambagem e ao modo crítico de flambagem, respectivamente.

3 OTIMIZAÇÃO DE FIBRAS CURVAS

A construção de um laminado com objetivo de melhorar sua performance estrutural vem sendo buscada por diversos autores. Uma das mais modernas formas de se projetar um laminado de alto desempenho é com a variação da rigidez conforme a posição no componente. Essa rigidez variável pode ser obtida, de uma maneira mais simples, variando a espessura do componente ao longo de suas dimensões. Contudo, essa técnica gera descontinuidades, pois a espessura de um laminado está associado ao número inteiro de camadas e, portanto, é discreta (LOPES et al., 2007). Uma outra forma, é através da utilização de fibras curvas que é a maneira abordada por esta dissertação. Assim, rigidez variável e fibras curvas são intercambiáveis neste texto.

Durante as últimas décadas, a indústria aeroespacial tem testemunhado a crescente evolução de processos de automação da produção de compósitos. Um desses processos é o Posicionamento Automatizado de Fibras (AFP, do inglês, *Automated fiber placement*, visualizado na Figura 3.1), que oferece a capacidade de guiar feixes de fibras individuais pelo molde da peça (LOPES et al., 2010). Isso possibilita que os feixes de fibras sigam um caminho curvilíneo e assim os laminados podem obter uma distribuição de tensões e deformações mais favorável à aplicação estrutural requerida.



Figura 3.1 – Equipamento de posicionamento automatizado de fibras (GÜLDÜ, 2014).

Segundo Ghiasi et al. (2010), a pesquisa em laminados de rigidez variável tem atraído menos pesquisadores, em relação aquela com laminados de rigidez constante, devido ao alto custo de projeto e manufatura envolvido. A adição de novas variáveis no processo eleva substancialmente o custo computacional de otimização, requerendo técnicas mais sofisticadas para resolução de problemas relativamente comuns de engenharia (LOPES et al., 2010). Contudo, a crescente necessidade de projetos mais eficientes combinado à significativa melhoria de desempenho provida pelo uso de fibras curvas justifica

seu uso em indústrias de vanguarda como a aeroespacial (GHIASI et al., 2010).

3.1 PARAMETRIZAÇÃO DA ORIENTAÇÃO DAS FIBRAS

Um laminado de rigidez variável pode ser projetado pela escolha de um caminho de referência central (Fig. 3.2a) e a produção do painel completo pelo *offset* desse. Usualmente faz-se o *offset* ao longo de uma das direções principais do painel (x ou y) ou até mesmo na direção normal ao caminho de referência (localmente).

Existem inúmeras maneiras de se parametrizar um caminho de referência contínuo. Contudo, um pequeno número de variáveis é desejado de modo a simplificar o processo de projeto e eventual otimização. Diferentemente de laminados de fibras retas, com fibras curvas, cada camada necessita da definição de dois ou mais parâmetros angulares. A notação empregada neste trabalho é a de que todos os parâmetros angulares de uma mesma camada são dados entre colchetes angulares $\langle \dots \rangle$. Gürdal e Olmedo (1993) propõem um caminho de referência cujo ângulo varia linearmente ao longo de um eixo escolhido (Fig. 3.2a). Neste trabalho, são usadas apenas duas variáveis por camada, sendo que o ângulo, em qualquer posição da lâmina, pode ser escrito como:

$$T(x, y)_x = T(x) = \frac{2(T_1 - T_0)}{b}|x| + T_0, \quad (3.1)$$

em função da variável x com *offset* ao longo de y , onde b é a largura da placa (Fig. 3.2b). Ou ainda:

$$T(x, y)_y = T(y) = \frac{2(T_1 - T_0)}{a}|y| + T_0, \quad (3.2)$$

em função da variável y com *offset* ao longo de x , onde a é a altura da placa (Fig. 3.2c). Os coeficientes usados nas Equações 3.1 e 3.2 representam o ângulo T_0 que as fibras fazem com o eixo x no centro da placa ($x = y = 0$) e o ângulo T_1 que as fibras fazem com o eixo x na borda da placa ($x = b/2$ ou $y = a/2$ dependendo do *offset* escolhido).

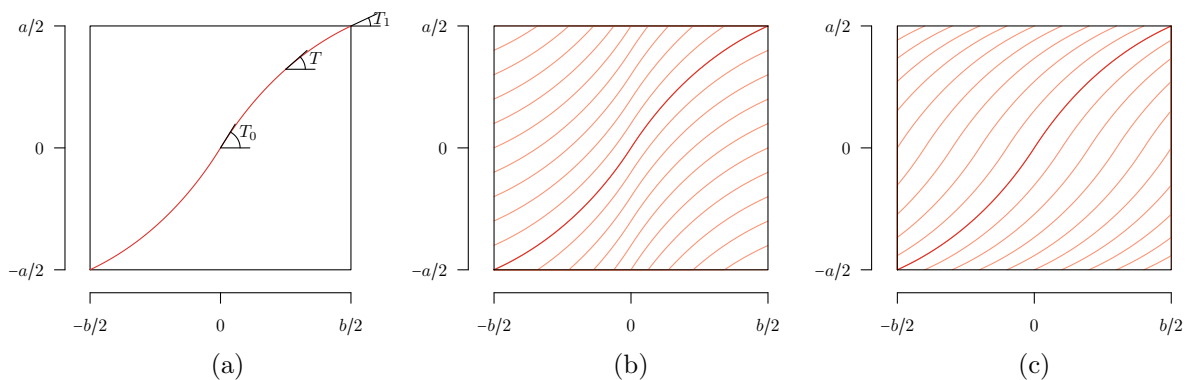


Figura 3.2 – Lâmina com fibras curvas: (a) definição do caminho de referência, (b) *offset* do caminho de referência na direção y , (c) *offset* do caminho de referência na direção x .

3.2 RESTRIÇÕES DE MANUFATURA

Comumente, máquinas de posicionamento automatizado de fibras possuem 7 eixos controlados por computador (TATTING; GÜRDAL, 2002). A construção do componente se dá pela deposição pelo molde de um conjunto de feixes de fibras pré-impregnadas que são posteriormente compactadas por um rolo aquecido. As máquinas modernas tipicamente são capazes de comandar, independentemente, o fluxo de 32 feixes individuais com largura entre 1/8 a 1/2 polegada. Cada feixe é alimentado com uma taxa independente, o que permite que curvas sejam realizadas com uma distorção das fibras muito reduzida. Além disso, os feixes podem ser iniciados/interrompidos independentemente (BLOM et al., 2009).

Apesar dos equipamentos modernos contarem com grande flexibilidade de produção, a parametrização definida pela Equação 3.1 gera descontinuidades nas camadas depositadas no componente. Essa descontinuidade é resultado de o *offset* ser dado em uma direção constante (direção x neste caso). Como é mostrado na Figura 3.3 e implícito na Equação 3.1, a distância entre as bordas de um conjunto de feixe de fibras é constante na direção x (w_e). Contudo, a largura real da faixa aplicada w (perpendicular ao caminho de referência) deve variar conforme a posição, pois as fibras seguem o caminho de referência (trajetória indicada pela linha tracejada). Dessa maneira, ao interceptar a coordenada da borda direita, a aplicação do feixe deve ser interrompida. Como a largura de cada feixe não é infinitesimal, ocorre um efeito de serrilhamento por toda a borda direita da aplicação.

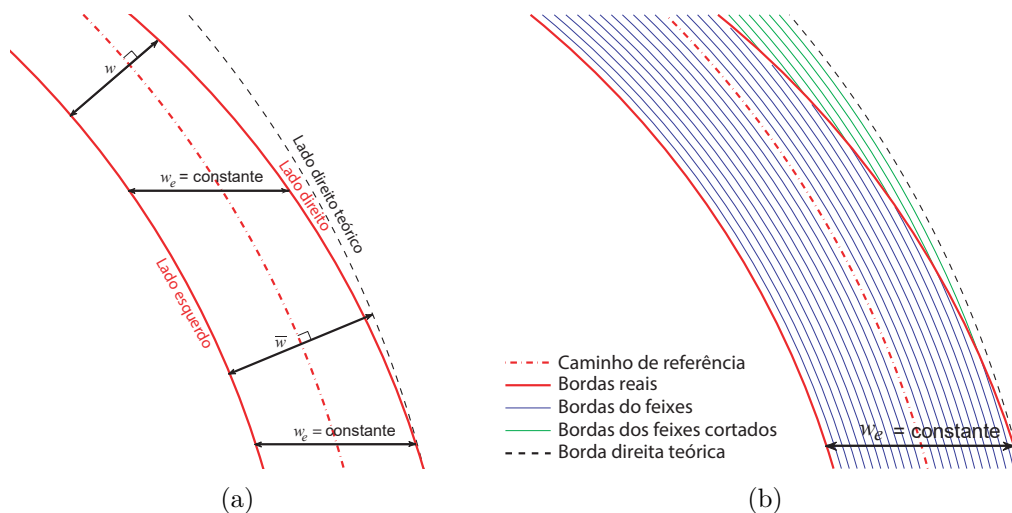


Figura 3.3 – Largura de aplicação versus largura teórica (BLOM et al., 2009): (a) dimensões do conjunto de feixes aplicado, (b) serrilhamento do conjunto de feixes aplicado.

O serrilhamento mostrado na Figura 3.3 (b) pode ser considerado como um defeito estrutural, pois causa uma região de menor resistência devido à descontinuidade das fibras. Kim et al. (2012) fornecem um estudo detalhado de como é possível evitar tais

descontinuidades com o uso de uma técnica diferenciada de aplicação dos feixes. Blom et al. (2009) e Nik et al. (2014b) estudam o efeito da quantidade e da estratégia de interrompimento dos feixes na perda de resistência do componente. Com base em revisão bibliográfica, é recomendado que em situações de projeto a influência das descontinuidades pode ser levada em conta apenas reduzindo as propriedades de resistência das fibras (BLOM et al., 2009). Neste trabalho, devido ao enfoque ser em técnicas de otimização, não são levados em consideração quaisquer defeitos ou descontinuidades oriundas da fabricação.

3.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Diversos trabalhos mostram bons resultados quanto ao uso de laminados com fibras curvas. Esta seção sumariza 19 artigos publicados entre 2003 e 2015 e 1 artigo de 1991. Apesar desta revisão não contemplar todos os artigos publicados sobre o tema, a abrangência é grande o bastante para familiarizar o leitor com o estado da arte do assunto desta dissertação.

Diversas geometrias foram estudadas, entre elas, as mais comumente trabalhadas são placas quadradas (GÜRDAL et al., 2008), (NIK et al., 2012), (RIBEIRO et al., 2013) e (WU et al., 2013), placas quadradas com furo central (HYER; LEE, 1991), (HUANG; HAFTKA, 2005) e (LOPES et al., 2010), placas retangulares (SETOODEH et al., 2006), (LOPES et al., 2008), (SETOODEH et al., 2009), (WU et al., 2012) e (NIK et al., 2014b), placas retangulares com furo (PARNAS et al., 2003) e (MUC; ULATOWSKA, 2010), cascas cilíndricas (BLOM et al., 2010), (NIK et al., 2014a), (LUERSEN et al., 2015) e (RIBEIRO, 2015) e cascas cônicas (BLOM et al., 2008). Brink et al. (2012) simularam uma seção de uma fuselagem com janelas e reforços internos.

Com exceção de Blom et al. (2008), Ribeiro et al. (2013), Ribeiro (2015) e Luersen et al. (2015), que tinham como objetivo a maximização da frequência natural; Huang e Haftka (2005), que maximizaram a tensão de falha; Parnas et al. (2003), que minimizaram o peso com restrição de falha; Setoodeh et al. (2006) e Muc e Ulatowska (2010) que maximizaram a rigidez a flexão; todos os demais trabalhos encontrados tinham como objetivo principal a maximização do carregamento crítico de flambagem.

Em 6 destes trabalhos (HYER; LEE, 1991), (GÜRDAL et al., 2008), (BLOM et al., 2008), (LOPES et al., 2010), (NIK et al., 2014b) e (RIBEIRO, 2015) foram realizadas buscas paramétricas em uma malha fina (i.e. cálculo da função objetivo para um número grande de amostras dispostos em uma amostra fatorial completa). Em Hyer e Lee (1991), utilizou-se apenas uma variável e nos demais, duas. Dois trabalhos (LOPES et al., 2008) e (RIBEIRO et al., 2013) realizaram comparações entre laminados de fibras retas e curvas, sem explicitar a forma na qual os laminados foram escolhidos. Nos demais trabalhos (12

de 20), teve-se como meta, explicitamente, a otimização de uma função objetivo.

O algoritmo de otimização mais empregado dentre os trabalhos citados é o algoritmo genético, que contempla sete dos doze. Dentre estes, se destacam pela combinação do algoritmo genético a outras técnicas os trabalhos de Huang e Haftka (2005), pelo uso de gradientes conjugados para auxiliar na busca local; Nik et al. (2012), que utilizam metamodelagem baseada em regressão polinomial e um projeto de experimentos proveniente de um hipercubo latino; Nik et al. (2014a), que realizam uma comparação na eficiência de quatro tipos de metamodelos (Kriging, funções de base radial, regressão polinomial e regressão de suporte de vetores); e Luersen et al. (2015), pelo uso do metamodelo de Kriging construído a partir de um projeto de experimentos computado por uma sequência de Sobol. Nos trabalhos que explicitamente usaram algum algoritmo de otimização, o número médio de variáveis de projeto empregadas é de 12.

Os resultados obtidos pelos trabalhos são variados, porém, em todos uma melhoria significativa da função objetivo é observada. A compilação dos resultados obtidos pode ser expressa pelo diagrama em caixa representado na Figura 3.4. Nesta figura, pode ser vista a melhoria obtida pelo uso de fibras curvas reportada nos 20 artigos referenciados quando comparada ao uso de fibras retas. Pode-se notar que, em média, os trabalhos obtiveram 50% de melhoria com um deles obtendo mais de 250%. Além disso, nenhum trabalho reportou melhoria máxima menor do que 12%.

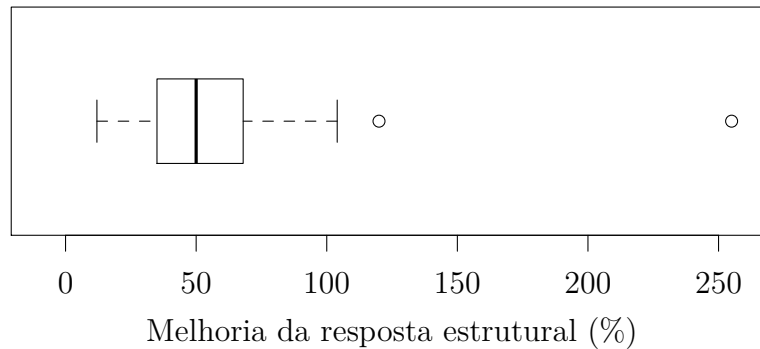


Figura 3.4 – Diagrama em caixa que sumariza a melhoria obtida pelo uso de fibras curvas.

Os trabalhos referenciados nesta seção não contemplam totalmente o estado da arte no assunto. Contudo, uma busca pelo número total de publicações ilustra a crescente relevância dos temas correlatos a otimização tal como a carência de trabalhos especificamente voltados ao uso de metamodelos aplicados à otimização de painéis de fibras curvas. A busca foi conduzida usando a plataforma `google.scholar` em combinação com a ferramenta de planilhas `google.sheets`. O Código 3.1 mostra o comando usado na busca dos artigos onde: `SEARCH_QUERY` deve ser substituído pela *string* de termos que deseja-se buscar (usando mesma sintaxe da busca do google), `YEAR_I` e `YEAR_F` devem ser substituídos pelo ano de início e ano de término da busca.

Código 3.1 – Busca de número de artigos encontrados na plataforma `google.scholar`

```
=importxml("https://scholar.google.com/scholar?q=SEARCH_QUERY&lr=lang_en&as_ylo=
YEAR_I&as_yhi=YEAR_F", "//div[@id='gs_ab_md']")
```

Os gráficos na Figura 3.5 mostram o número de publicações encontradas a cada ano para *strings* com relevância a este trabalho. A busca é configurada para procurar as *strings* em qualquer parte do corpo do texto. Dessa maneira é provável que diversos destes trabalhos apenas cite vagamente os termos da busca, sem efetivamente abordá-los. Porém, acredita-se também que diversos trabalhos estejam excluídos do resultado da busca, pois ela limita-se apenas em artigos publicados na língua inglesa e que sejam “enxergados” pelo buscador `google.scholar`. Considerando ambos os fatores, é razoável afirmar que os dados levantados condizem com a realidade do estado da arte dos assuntos abordados por este trabalho.

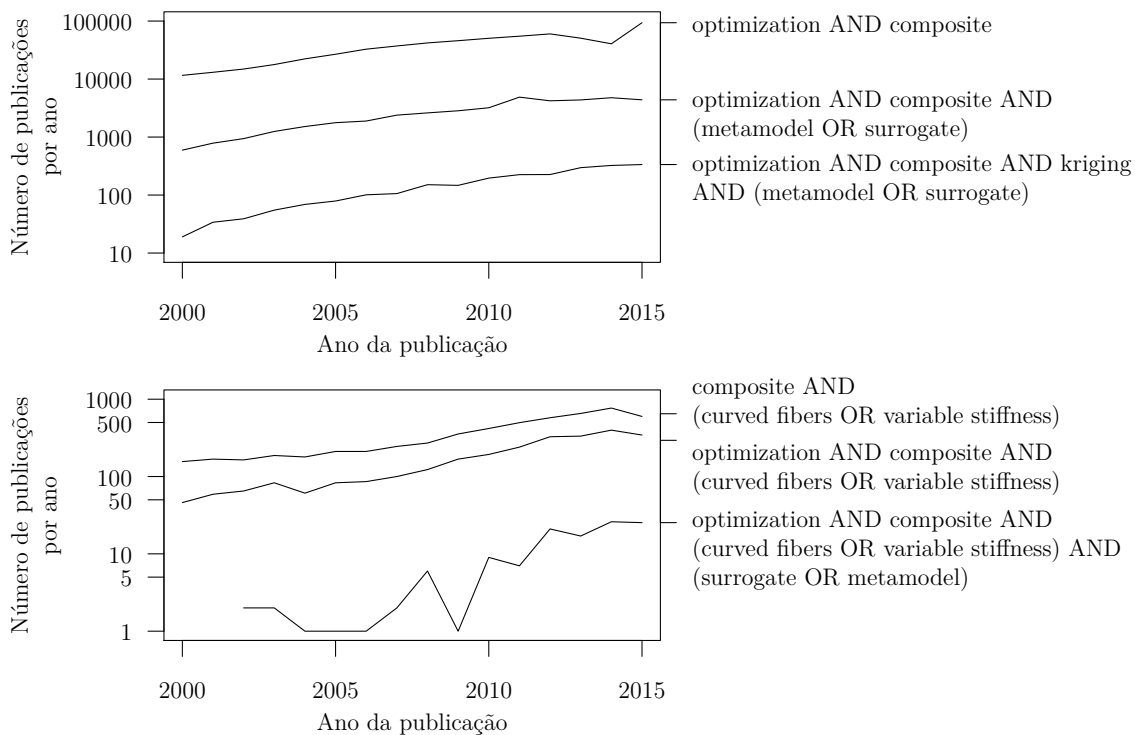


Figura 3.5 – Número de trabalhos encontrados pela ferramenta de busca `google.scholar` relativos ao escopo deste trabalho e separados por ano de publicação.

4 METAMODELO DE KRIGING

Segundo Forrester et al. (2008), problemas de engenharia complexos que requeiram a construção de um modelo substituto (ou metamodelo) \widehat{f} de baixo custo que emule a resposta de uma função custosa e/ou desconhecida f , vem em uma variedade de formas, porém podem ser generalizados conforme a ideia a seguir.

Considerando uma função contínua $f(\mathbf{x})$ que representa uma qualidade, custo ou métrica de performance de um produto ou processo definido por d -variáveis em um vetor de projeto $\mathbf{x} \in S \subset \mathbb{R}^d$ no qual S é chamado de espaço ou domínio de projeto definido no espaço real d -dimensional. Dado que a única informação que se tem de $f(\mathbf{x})$ são observações discretas em um conjunto de n -pontos: $\{y^{(i)} = f(\mathbf{x}^{(i)}) \mid i = 1, \dots, n\}$ e que em geral essas observações são custosas de serem realizadas, devendo portanto serem realizadas com parcimônia, o objetivo dos metamodelos é, da melhor maneira possível, realizar previsões de baixo custo para valores desconhecidos de $\mathbf{x} \in D$ para a função $f(\mathbf{x})$.

A qualidade da predição realizada por um metamodelo está intimamente relacionada com a distribuição dos pontos experimentais $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}\}$ (FORRESTER et al., 2008). Dessa maneira, o estudo dos metamodelos deve-se iniciar pelo entendimento do conceito de *projeto de experimentos*, que é a escolha dos pontos iniciais ou pontos “experimentais” para a construção do metamodelo.

4.1 PROJETO DE EXPERIMENTOS

Uma característica comum à grande parte dos metamodelos é que os resultados preditos são mais precisos para regiões próximas aos pontos conhecidos da função objetivo. Portanto, é intuitivo que para obter um bom resultado globalmente os pontos amostrados devam ser distribuídos o mais uniformemente possível dentro do espaço de projeto. Diz-se que uma amostra que atenda esse requisito “preenche” o espaço de projeto (*space-filling*). Inúmeros *projetos de experimentos* ou DOE (*design of experiments*) atendem com diferentes graus de sucesso os critérios de qualidade indicados a construção de metamodelos. Entre eles, os mais usados são o fatorial completo, as sequências quasi-aleatórias de Halton, Sobol e Torus, e finalmente, o que é usado neste trabalho, hipercubos latinos.

Segundo Forrester et al. (2008), a maneira mais direta de realizar uma amostra uniforme é usando uma malha retangular de pontos. Cada variável do espaço de projeto x_i é dividida em q_i -compartimentos de tamanhos iguais e todas as combinações possíveis dos compartimentos são computadas. À essa técnica é dado o nome de amostra fatorial completa (*full factorial*).

A abordagem fatorial completa possui duas desvantagens principais. Primeiro, o número de amostras é igual ao produtório do número de partições em cada dimensão, ou seja $n = q_1 \times q_2 \times \dots \times q_d$. Isso, além de limitar as possibilidades do tamanho do conjunto de amostras, eleva rapidamente o número de pontos experimentais em dimensões mais elevadas. Segundo, quando projetados nos eixos das variáveis de projeto, os pontos se sobrepõem e, segundo [Forrester et al. \(2008\)](#), a eficiência da predição é prejudicada por isto (pontos cujas projeções se sobrepõem têm uma menor contribuição na qualidade da predição).

Hipercubos Latinos Aleatórios

A ideia central do hipercubo latino (LHS, do inglês *Latin hypercube sample*) é estratificar cada variável em um número igual ao de pontos que deseja-se amostrar e garantir que cada compartimento contenha uma única projeção ortogonal dos pontos experimentais. Observe que na Figura 4.1, um exemplo de *cubo* latino com 10 pontos amostrais ($d = 3$ e $n = 10$), as projeções dos pontos em cada um dos eixos são únicas. Na Figura 4.1 (b), é utilizada a técnica de visualização chamada de matriz de gráficos de dispersão (*scatterplot matrices*) e pode ser melhor entendida consultando [Wong e Bergeron \(1994\)](#).

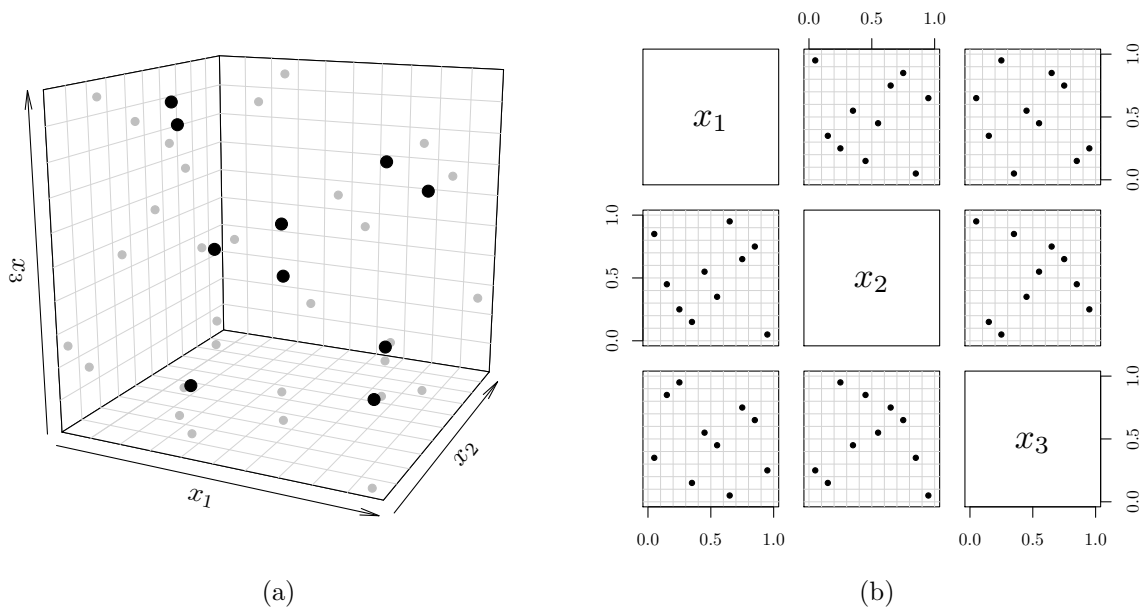


Figura 4.1 – Exemplo de um cubo latino aleatório com $d = 3$ e $n = 10$: (a) representação em três dimensões, (b) gráfico de pares com a projeção em cada uma das seis faces do cubo.

Apesar da abordagem garantir ortogonalidade das amostras, é questionável o espaçamento homogêneo dos pontos no espaço de projeto. Para o exemplo mostrado existem 13168189440000 possibilidades de conjuntos de amostras que respeitam o critério

do hipercubo latino, calculadas pela equação

$$\left(\prod_{i=0}^{n-1} n - i \right)^{d-1} = (n!)^{d-1}, \quad (4.1)$$

e, certamente, grande parte deles não preenchem de maneira uniforme o espaço de projeto. Por exemplo, colocar os pontos amostrais na diagonal principal do espaço de projetos satisfaz a condição de não sobreposição das projeções, porém, intuitivamente, não preenche de maneira uniforme o espaço. Portanto, é necessário definir um critério de uniformidade que consiga ordenar a qualidade do conjunto de amostras. A Figura 4.2 ilustra o aumento da qualidade do conjunto de amostras (da esquerda para direita) em um espaço bidimensional.

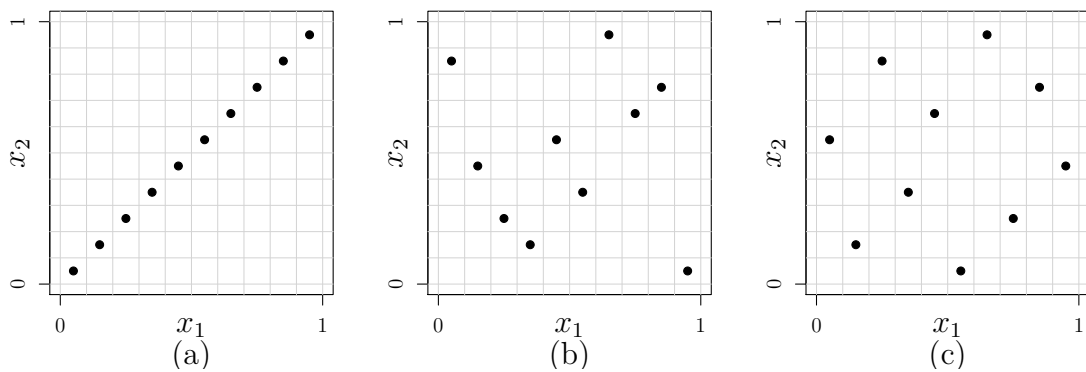


Figura 4.2 – Quadrados latinos de diferentes qualidades: (a) amostra disposta diagonalmente, (b) amostra gerada aleatoriamente, (c) amostra otimizada.

Hipercubos Latinos Ótimos

Segundo [Forrester et al. \(2008\)](#), uma das métricas mais usadas para avaliar a uniformidade da amostra é a técnica de “*max-min*” proposta originalmente por [Johnson et al. \(1990\)](#) e posteriormente melhorada por [Morris e Mitchell \(1995\)](#), podendo ser definida como:

Chama-se de $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_m$ a lista dos valores únicos das distâncias entre todos os pares possíveis de pontos de uma amostra \mathbf{X} , ordenados crescentemente, e J_1, J_2, \dots, J_m a lista cujo valor de J_i é a quantidade de pares separados pela distância d_i . O *ranking* da qualidade da distribuição de \mathbf{X} (da melhor para a pior) é definido por: amostras que maximizam o valor de d_1 , dentro destas, as que minimizam o valor de J_1 , dentro destas, as que maximizam o valor de d_2 , dentro destas, as que minimizam o valor de J_2 , ..., que minimizam o valor de J_m . As distâncias d_i podem ser definidas da maneira mais conveniente para o problema analisado, em geral, utiliza-se:

$$d(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = \left(\sum_{j=1}^k |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}|^p \right)^{1/p}, \quad (4.2)$$

onde k é o número de componentes do vetor \mathbf{x} (dimensão do espaço amostrado). Para $p = 1$ tem-se a norma retangular (ou de Manhattan) e para $p = 2$ tem-se a norma euclidiana ([FORRESTER et al., 2008](#)).

Há pouca evidência na literatura de que uma norma seja mais indicada do que a outra, portanto, recomenda-se o uso de $p = 1$ para redução do custo computacional, especialmente quando o número de pontos do DOE é elevado.

Com objetivo de tornar o processo de otimização do DOE mais eficiente, [Morris e Mitchell \(1995\)](#) propuseram um critério combinado que computa os termos d_i e J_i em um único parâmetro, dado por:

$$\Phi_q(\mathbf{X}) = \left(\sum_{i=1}^m J_i d_i^{-q} \right)^{1/q}. \quad (4.3)$$

[Morris e Mitchell \(1995\)](#) recomendam que se maximize Φ_q para $q = 1, 2, 5, 10, 20, 50$ e 100 e aplique-se o critério *max-min* definido anteriormente para escolha da melhor amostra dentre esses “ótimos”. Em geral, o espaço de possibilidades de hipercubos latinos é tão vasto e sua otimização tão complexa que não é usual tentar encontrar um ótimo global. Ao invés, busca-se o melhor DOE possível dado um orçamento computacional arbitrário ([FORRESTER et al., 2008](#)).

[Liefvendahl e Stocki \(2006\)](#) usam um critério de otimalidade simplificado que se baseia na analogia física de repulsão entre cargas elétricas e pode ser simplesmente definida por

$$G(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}\|^2}. \quad (4.4)$$

[Viana \(2013\)](#) cita outros critérios de otimalidade como energia potencial e entropia. Além disso, ainda compara diversos algoritmos de otimização muito utilizados nesses problemas como, *recozimento simulado*, *columnwise-pairwise*, *algoritmos genéticos*, *branch-and-bound*, *propagação translacional* e *enumeração local sucessiva*. Nesta dissertação, devido sua fácil implementação e eficiência, é empregado algoritmo *columnwise-pairwise*, que pode ser encontrado em [Carnell \(2012\)](#) e é descrito a seguir.

Algoritmo columnwise-pairwise

Dado um DOE \mathbf{X} disposto em uma matriz $n \times d$ (número de amostras versus dimensão das variáveis), o algoritmo *columnwise-pairwise*, ou apenas “CP-sweep”, é definido como a realização de todas as permutações de primeira ordem da i -ésima coluna ($i \in 1, \dots, d$) e a escolha da melhor delas segundo um critério de otimalidade. Ou seja, as amostras são otimizadas coluna por coluna, inicialmente encontra-se a permutação dos elementos de uma mesma coluna (projeção) que maximiza o critério de otimalidade para o DOE. Após, faz-se o sequencialmente o mesmo para as demais colunas de \mathbf{X} . Finalmente, repete-se o algoritmo quantas vezes forem necessárias para um critério de parada ser atingido ([STOCKI, 2005](#)).

Liefvendahl e Stocki (2006) mostram que para conjuntos de amostras com grande número de pontos ($n > 100$) o tempo computacional necessário para a otimização do posicionamento dos pontos, mesmo com uso de algoritmos mais eficientes, torna-se demasiadamente grande. A dificuldade do problema de otimização do hipercubo latino cresce proporcionalmente à potência de 5 do número de pontos ($O(n^5)$). Liefvendahl e Stocki (2006) afirmam que, com o computador usado por eles, a otimização de uma amostra com $n = 100$ e $d = 3$ leva cerca de 3 minutos para ser computada. Já para otimizar um conjunto de amostras com $n = 1000$ e $d = 3$ o tempo necessário se eleva para mais de 8 meses.

Dessa maneira, para conjuntos com grande número de amostras, recomenda-se uma otimização parcial (execução de poucas varreduras) ou ainda o uso de um projeto de experimento quasi-aleatório. As sequências quasi-aleatórias, diferentemente de sequências aleatórias como o hipercubo latino, são definidas por equações determinísticas¹. Segundo Morokoff e Caflisch (1994) sequências quasi-aleatórias combinam as vantagens de uma sequência aleatória (pontos podem ser adicionados incrementalmente) com a vantagem da fatorial completa (preenchimento do espaço de projeto). Na linguagem de programação **R**, o pacote `randtoolbox` (CHRISTOPHE; PETR, 2014) fornece funções no estado da arte para o cálculo eficiente de conjuntos pseudo e quasi-aleatórios.

4.2 TÉCNICAS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS E VALIDAÇÃO

De modo geral, metamodelos possuem parâmetros que devem ser ajustados para a função custo da melhor maneira possível. Esta seção é destinada a uma breve explicação de algumas técnicas de estimativa de parâmetros e validação de metamodelos.

Estimativa de verossimilhança máxima (maximum likelihood estimation – MLE)

Dado um conjunto de parâmetros \mathbf{w} de um metamodelo $\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$, pode-se computar a probabilidade P de um conjunto de dados $\{(\mathbf{x}^{(1)}, y^{(1)} \pm \epsilon), (\mathbf{x}^{(2)}, y^{(2)} \pm \epsilon), \dots, (\mathbf{x}^{(n)}, y^{(n)} \pm \epsilon)\}$ ser resultado do modelo \hat{f} (no qual ϵ é uma pequena e constante margem de erro independente, aleatoriamente distribuída segundo uma distribuição normal de variância σ em cada ponto) por:

$$P = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y^{(i)} - \hat{f}(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{w})}{\sigma} \right)^2 \right] \epsilon \right\}. \quad (4.5)$$

Intuitivamente, isso também deve ser válido para o inverso (a verossimilhança dos parâmetros em relação aos dados fornecidos) (FORRESTER et al., 2008). Portanto, deseja-se estimar os parâmetros \mathbf{w} que maximizam a verossimilhança dos dados observados, ou, para facilitar a otimização, que minimizam o negativo do seu logaritmo natural:

¹ Dadas as mesmas condições iniciais, ou parâmetros de entrada, a amostra gerada sempre será igual.

$$\min_{\mathbf{w}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(y^{(i)} - \widehat{f}(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{w}))^2}{2\sigma^2} - n \ln \epsilon \right). \quad (4.6)$$

Para o caso de um valor constante de σ e ϵ , a Equação 4.6 é simplificada para o conhecido critério dos mínimos quadrados:

$$\min_{\mathbf{w}} \left(\sum_{i=1}^n (y^{(i)} - \widehat{f}(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{w}))^2 \right). \quad (4.7)$$

Validação cruzada

Segundo Forrester et al. (2008), a *validação cruzada* consiste em separar dados conhecidos em q -subconjuntos de forma aleatória, remover um destes subconjuntos e calibrar o metamodelo (estimar os parâmetros de ajuste) com os conjuntos de pontos restantes ($q - 1$). Uma função de perda L é então computada, que mede o erro entre a predição e os dados do subconjunto removido. Esse processo repete-se através de q iterações e a perda L calculada é acumulada a cada iteração. Esse procedimento pode ser considerado a estimativa *sem viés* do *risco real* quando o número de subconjuntos é igual ao número de pontos amostrados. Contudo, Hastie et al. (2009) recomendam que, para manter o tempo computacional reduzido e evitar uma variância elevada, deve-se utilizar q entre 5 e 10.

4.3 FUNÇÕES DE BASE RADIAL

Funções ou metamodelos de base radial baseiam-se na combinação linear de funções simples radialmente simétricas² chamadas de bases. Neste texto são abordados apenas metamodelos interpoladores, o que significa que os dados são considerados não corrompidos por ruído. Contudo, mais informações sobre regressões com funções de base radial podem ser encontradas em Forrester et al. (2008).

Para uma função escalar f , observada sem erro nos pontos experimentais $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}\}^T$ com respostas $\mathbf{y} = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}\}^T$, uma predição \widehat{f} realizada por bases radiais centradas nas amostras pode ser definida como

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\psi} = \sum_{i=1}^{n_c} w_i \psi_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}\|), \quad (4.8)$$

onde \mathbf{w} é um vetor de constantes w_i que “pesam” o efeito de cada base radial e $\boldsymbol{\psi}$ é um vetor contendo as funções de base avaliadas nas distâncias euclidianas entre o ponto a ser predito \mathbf{x} e o centro das bases (neste caso as próprias amostras iniciais $\mathbf{x}^{(i)}$). A abordagem pode ser comparada com a de redes neurais para uma única camada de neurônios radiais, e com função de transferência linear (FANG et al., 2005). Em \mathbf{R} , a predição definida pela Equação 4.8 pode ser escrita como mostrado no Código 4.1.

² Funções cuja resposta é explicitamente função da distância entre a coordenada de entrada e o centro da base.

Código 4.1 – Predição de um metamodelo de base radial.

```

predict <- function(model, x){
  pred <- sum(model$w * model$base(sum((x - model$doe)^2)^0.5)
  return(pred)
}

```

Em geral, as funções de base radial são simples e usa-se apenas uma base para todo o metamodelo (FORRESTER et al., 2008). Entre as bases mais usadas, vale citar as seguintes bases fixas:

- linear: $\psi(r) = r$;
- cúbica: $\psi(r) = r^3$;
- spline: $\psi(r) = r^2 \ln(r)$;

onde $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}\|$.

Para maior flexibilidade e melhoria na generalização da predição, bases paramétricas³ podem ser empregadas, tais como:

- Gaussiana: $\psi(r) = e^{-r^2/(2\sigma^2)}$;
- multiquadrática: $\psi(r) = \sqrt{r^2 + \sigma^2}$;
- multiquadrática inversa: $\psi(r) = 1/\sqrt{r^2 + \sigma^2}$.

A necessidade da estimação dos parâmetros σ (não lineares em relação ao preditor) aumentam significativamente a complexidade do processo de construção do metamodelo, pois requer uso de técnicas mais sofisticadas, como as citadas na seção 4.2.

Independentemente da escolha da função de base radial, \mathbf{w} é simples de ser estimado “realizando” a predição das observações já conhecidas \mathbf{y} por meio de:

$$\widehat{f}(\mathbf{x}^{(j)}) = \sum_{i=1}^n w_i \psi(\|\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{(i)}\|) = y^{(j)}, \quad (4.9)$$

onde $\mathbf{x}^{(i)}$ e $\mathbf{x}^{(j)}$ são, respectivamente, o i -ésimo e o j -ésimo pontos do DOE.

A facilidade na obtenção dos valores de \mathbf{w} está no fato da Equação 4.9 ser uma combinação linear em \mathbf{w} , dessa maneira, podendo ser reescrita como

$$\mathbf{\Psi} \mathbf{w} = \mathbf{y} \quad (4.10)$$

onde $\mathbf{\Psi}$ denota a *matriz de Gram* e é definida como $\mathbf{\Psi} = \psi(\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}\|)$, $i, j = 1 \dots, n$. Em \mathbf{R} , um metamodelo de bases radiais pode ser construído usando o Código 4.2.

Código 4.2 – Construção de um metamodelo de base radial.

```

rbm <- function(doe, response, base){
  Gram <- base(dist(doe, diag=T, upper=T))
  w <- solve(Gram, response)
  return(model=list(base=base, w=w, \textsc{doe}=\textsc{doe}))
}

```

³ Funções bases que possuem parâmetros internos que devem ser estimados em conjunto com os pesos.

Dada uma função teste, definida por:

$$f(x) = (6x - 2)^2 \text{sen}(12x - 4), \quad (4.11)$$

três metamodelos de base radial são construídos com o Código 4.2 (um para cada uma das funções base fixas anteriormente citadas). Os resultados das respectivas predições podem ser vistos na Figura 4.3.

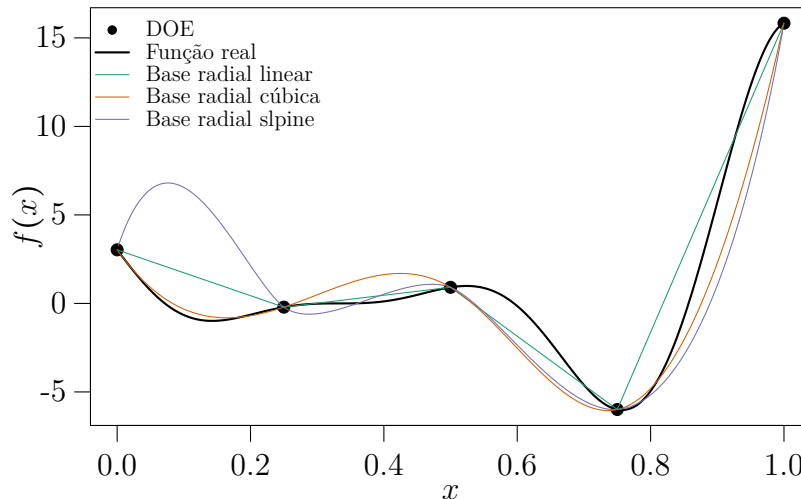


Figura 4.3 – Aproximação de uma função unidimensional por modelos de base radial.

Na Figura 4.3 pode-se notar a qualidade da predição para um número reduzido de pontos experimentais (apenas 5). Em especial, para este problema, nota-se melhor ajuste com o modelo de base cúbica. Segundo Forrester et al. (2008), o uso de bases paramétricas melhora ainda mais a fidelidade do modelo, devido o aumento da flexibilidade do metamodelo. Outra característica interessante dos modelos de base radial é que, pelo fato de tratar-se de um modelo interpolador, o modelo “passa” exatamente sobre os pontos amostrados (i.e., o erro de predição é zero nas amostras). Essa característica é interessante quando deseja-se otimizar problemas cuja medição da função objetivo possui erro aleatório desprezível, como em muitas vezes é o caso de simulações numéricas.

4.4 CONSTRUÇÃO DO METAMODELO DE KRIGING

Esta seção destina-se a explicar a construção do metamodelo de Kriging e baseia-se, principalmente, nas descrições realizadas por Jones (2001), Forrester et al. (2008) e Roustant et al. (2012).

O objetivo do metamodelo de Kriging é prever a resposta y de uma função $y(\mathbf{x}) \in D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ para algum ponto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ qualquer. A função $y(\mathbf{x})$, apesar de determinística, é desconhecida (com exceção da resposta em um número restrito de pontos amostrais). Em Kriging, a resposta y é modelada como um processo aleatório $Y(\mathbf{x})$ normalmente distribuído com média e variância estimados m e s^2 , respectivamente.

Isto é, espera-se que o valor da função para esse ponto tenha tipicamente um valor *médio* $m(\mathbf{x})$ com um desvio esperado proporcional a $s(\mathbf{x})$.

É notável a diferença do método de Kriging com diversos outros metamodelos ou superfícies de resposta. Por exemplo, metamodelos de base radial são determinísticos e a função de predição retorna um valor sem desvios. Já em Kriging, o metamodelo retorna um processo aleatório, informando ao usuário dois valores (média e desvio), que representam o valor y esperado e o nível de confiança que se tem dessa predição.

Núcleos de covariância

Espera-se que as equações que modelam problemas físicos sejam “suaves” devido a natureza contínua dos fenômenos observados. Portanto, é razoável que para distâncias pequenas entre dois pontos de projeto \mathbf{u} e \mathbf{v} a variação das respostas $y(\mathbf{u})$ e $y(\mathbf{v})$ também seja pequena. Em outras palavras, espera-se que para uma pequena distância $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ a correlação entre os processos aleatórios $Y(\mathbf{u})$ e $Y(\mathbf{v})$ seja grande.

A forma como essa correlação se dá é definida pelo núcleo de covariância (*covariance kernel*) e a escolha deste tem um impacto crucial na construção do metamodelo. Algumas recomendações são feitas para a escolha da função *kernel* C , entre elas é importante ressaltar que C deve ser *positivo definido* (ou *negativo definido*, devido à necessidade de inversão durante o processo de construção do metamodelo). Com isso, é de costume definir C como o produto de *núcleos paramétricos unidimensionais* k previamente conhecidos como sendo positivo definidos:

$$c(\mathbf{h}) = C(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sigma^2 \prod_{i=1}^d k(h_i, \theta_i), \quad (4.12)$$

onde $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d) = (\mathbf{u} - \mathbf{v})$ e θ_i é um parâmetro de ajuste do kernel unidimensional.

Entre inúmeras possibilidades de núcleos que atendam os requisitos, os cinco disponíveis em Roustant et al. (2012) estão reproduzidos na Tabela 4.1. Os parâmetros θ_j possuem mesma unidade das variáveis de projeto e podem ser interpretados fisicamente como parâmetros de escala que tornam o *kernel* g adimensional. Esses parâmetros são chamados por Rasmussen e Williams (2006) de *comprimentos de escala característicos*.

Os núcleos citados resultam em diferentes níveis de suavidade para a correlação associada aos processo aleatórios. Segundo Roustant et al. (2012), o núcleo gaussiano provê uma matriz de covariância com derivadas de todas as ordens e portanto é extremamente suave. Com o núcleo Matérn, o processo é apenas diferenciável até uma ordem inferior ao parâmetro ν . Com $\nu = 1/2$ equivalente ao núcleo exponencial, o processo é apenas contínuo não sendo diferenciável na origem. Apesar dos núcleos terem diferentes níveis de diferenciabilidade, todos são contínuos e conseqüentemente apenas correlacionam de maneira adequada grandezas contínuas.

Tabela 4.1 – Núcleos de covariância disponíveis no pacote `DiceKriging` (ROUSTANT et al., 2012).

gaussiano:	$k(h, \theta) = \exp\left(-\frac{h^2}{2\theta^2}\right)$.
Matérn $\nu = 5/2$:	$k(h, \theta) = \left(1 + \frac{\sqrt{5} h }{\theta} + \frac{5h^2}{3\theta^2}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{5} h }{\theta}\right)$.
Matérn $\nu = 3/2$:	$k(h, \theta) = \left(1 + \frac{\sqrt{3} h }{\theta}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{3} h }{\theta}\right)$.
Exponencial:	$k(h, \theta) = \exp\left(-\frac{ h }{\theta}\right)$.
Potência-Exponencial:	$k(h, \theta) = \exp\left(-\left(\frac{ h }{\theta}\right)^p\right)$ com $0 < p \leq 2$.

A Figura 4.4(a) mostra comparativamente os núcleos disponíveis em Roustant et al. (2012). Nota-se que o resultado da correlação definida pelas Equações da Tabela 4.1, para distâncias pequenas, se aproximam de 1 (altamente correlacionado) e para distâncias grandes, tende a zero (sem correlação). A Figura 4.4(b) ilustra a influência do parâmetro θ para o valor da correlação. Esse parâmetro essencialmente ajusta a largura da correlação e afeta o campo de influência que uma determinada variável exerce em relação aos pontos do projeto. Pode também ser visto como o quão *ativa* a função custo é em relação a uma determinada variável. Em outras palavras, se pequenas variações da variável x_k causarem grandes variações de $y(\mathbf{x})$, espera-se que θ_k tenha um valor menor do que os demais pois os pontos do DOE se correlacionam mais fracamente uns aos outros e espera-se sejam pouco correlacionados em relação a essa variável.

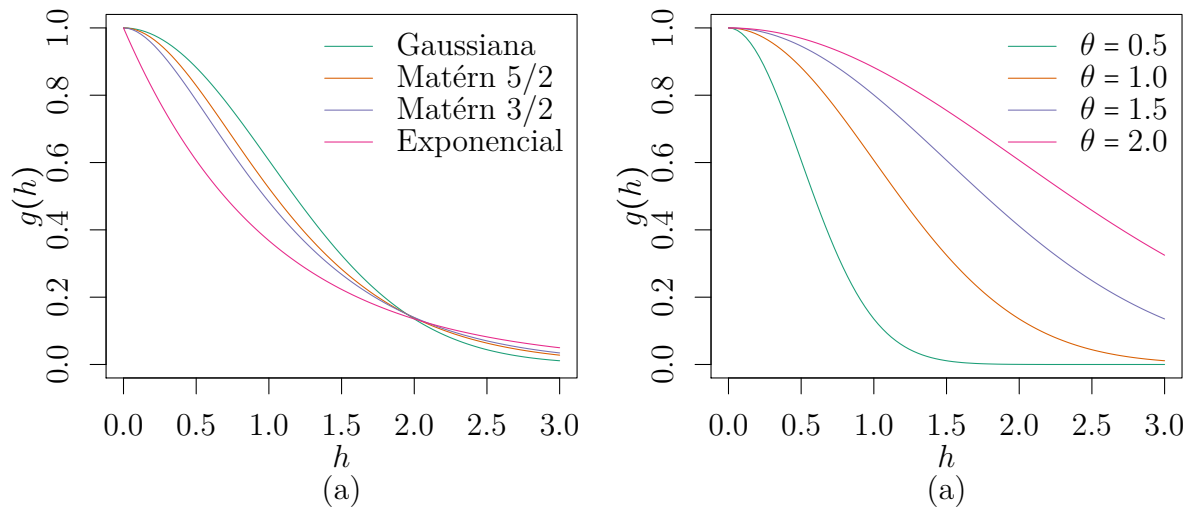


Figura 4.4 – Núcleos de covariância disponíveis no pacote `DiceKriging`: (a) comparação entre os núcleos para $\theta = 1$, (b) efeito do parâmetro θ para o kernel gaussiano.

Kriging Simples

No *Kriging simples* (SK, do inglês *simple Kriging*), assume-se que Y é a soma de uma *função de tendência* determinística totalmente conhecida $\mu(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ e de um processo

estocástico centrado Z :

$$Y(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x}), \quad (4.13)$$

onde o kernel de covariância $C(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de Z é também totalmente conhecido (conhece-se os parâmetros de ajuste). Em outras palavras, Kriging pode ser visto como a soma de uma regressão (μ) a uma interpolação espacial (Z). Aplicando o DOE \mathbf{X} e suas respostas já conhecidas \mathbf{y} à Equação 4.13 e minimizando o erro quadrático médio obtêm-se a média $m_{\text{SK}}(\mathbf{x})$ e a variância $s_{\text{SK}}^2(\mathbf{x})$ da melhor predição linear *não-viciada* $Y(\mathbf{x})$ (baseada nas observações $\mathbf{y} = y(\mathbf{X})$) para qualquer ponto $\mathbf{x} \in D$ dada por:

$$m_{\text{SK}}(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + \mathbf{c}(\mathbf{x})^\top \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \quad (4.14)$$

$$s_{\text{SK}}^2(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \mathbf{c}(\mathbf{x})^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{c}(\mathbf{x}), \quad (4.15)$$

onde

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = (C(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)}), \dots, C(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(i)}), \dots, C(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(n)})) \quad (4.16)$$

é o vetor de covariâncias entre a predição $Y(\mathbf{x})$ e a “predição” nos n -pontos do DOE $Y(\mathbf{X})$,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}) & \dots & C(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(j)}) & \dots & C(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(n)}) \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ C(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(1)}) & & C(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) & & C(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(n)}) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ C(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(1)}) & \dots & C(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(j)}) & \dots & C(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n)}) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

é a matriz de covariância que correlaciona internamente os pontos do DOE e $\boldsymbol{\mu} = \mu(\mathbf{X})$ é o vetor que contém as avaliações da função de tendência nos pontos amostrados. Uma dedução muito mais detalhada do procedimento pode ser vista em [Scheuerer et al. \(2013\)](#). É importante ressaltar que a predição m_{SK} interpola os dados observados (i.e. passa exatamente pelos dados conhecidos). Além disso, a variância s_{SK}^2 é sempre não-negativa e é nula nos pontos experimentais (o preditor tem certeza desses valores, pois já os conhece). Outra característica da variância, é que ela não depende dos valores de \mathbf{y} (homocedasticidade⁴ das observações ou homogeneidade de variância) ([ROUSTANT et al., 2012](#)).

Para demonstrar o poder de generalização do metamodelo de Kriging, mesmo que em sua versão simples, a Equação 4.11 é modelada da mesma maneira como foi feita para funções de base radial. Nesse exemplo é usado o kernel gaussiano para três diferentes valores de θ . A função de regressão é constante e tem valor igual à média das respostas \mathbf{y} (regressão linear ajustada por uma função constante). A Figura 4.5 mostra o resultado do teste.

É evidente a homogeneidade de variância, que de fato não depende de y e sim apenas da distância entre as amostras. Outro ponto relevante é a sensibilidade em relação

⁴ Esta é a hipótese do modelo clássico de regressão linear e pressupõe que a variância de cada termo é algum número constante igual a σ^2 .

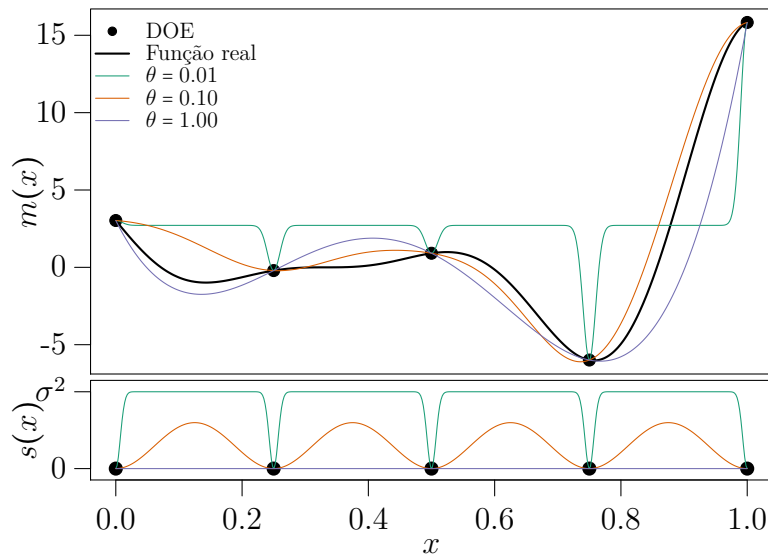


Figura 4.5 – Aproximação de função unidimensional por metamodelos de Kriging: influência do parâmetro θ .

ao valor de θ . Para valores de θ muito pequenos, ao se afastar dos pontos conhecidos, a predição rapidamente retorna ao valor de μ , que neste caso vale 2,712. Já para valores grandes, a variância tende a zero em todo domínio pois o metamodelo está demasiadamente “flexível” (todos os pontos se correlacionam “bem”). Como nenhum dos dois comportamentos é desejável, deve-se usar uma ferramenta que estime, da melhor maneira possível, os hiperparâmetros θ e que encontre o melhor modelo de regressão. Existem diversas maneiras de realizar a estimativa dos hiperparâmetros, sendo a mais comum a maximização da verossimilhança dos dados observados. Esse processo não é abordado por este texto, porém, mais detalhes podem ser encontrados em Jones (2001), Forrester et al. (2008) e Roustant et al. (2012).

Kriging Universal

Kriging universal (UK, do inglês *universal Kriging*) consiste em prover a melhor predição linear não-viciada de $y(\mathbf{x})$ baseada nas observações $\mathbf{y} = y(\mathbf{X})$ enquanto maximiza a verossimilhança dos dados encontrando os coeficientes das funções de regressão tal como os hiperparâmetros do *kernel*.

No UK considera-se que a função de regressão é desconhecida até um certo ponto, porém que tenha a forma

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \beta_i \phi_i(\mathbf{x}), \quad (4.18)$$

onde $p \in \mathbb{N} \neq 0$, ϕ_i são funções de base conhecidas e β_i são coeficientes reais desconhecidos. Quando a função de regressão é constante e apenas um parâmetro β deve ser determinado, o modelo é denominado de *Kriging ordinário* (OK) (ROUSTANT et al., 2012). As equações

que definem a média e a variância do preditor UK são dadas por:

$$m_{\text{UK}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^\top \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{c}(\mathbf{x})^\top \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \quad (4.19)$$

$$s_{\text{UK}}^2(\mathbf{x}) = s_{\text{SK}}^2(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}(\mathbf{x})^\top - \mathbf{c}(\mathbf{x})^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F})^\top (\mathbf{F}^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F})^{-1} (\mathbf{f}(\mathbf{x})^\top - \mathbf{c}(\mathbf{x})^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}) \quad (4.20)$$

onde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_j(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}))$ é o vetor das funções de base avaliadas em \mathbf{x} ,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}^{(1)}) & \dots & f_j(\mathbf{x}^{(1)}) & \dots & f_p(\mathbf{x}^{(1)}) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ f_1(\mathbf{x}^{(i)}) & & f_j(\mathbf{x}^{(i)}) & & f_p(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ f_1(\mathbf{x}^{(n)}) & \dots & f_j(\mathbf{x}^{(n)}) & \dots & f_p(\mathbf{x}^{(n)}) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

é chamada de *matriz experimental* e contem as funções base avaliadas nos pontos do DOE, e dos coeficientes β_i , usualmente obtidos por mínimos quadrados (com relação a \mathbf{C}) e dados por $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y}$ (ROUSTANT et al., 2012).

Neste trabalho, sempre que é usado o Kriging seus preditores (média e variância) são representados simplesmente por $m(\mathbf{x})$ e $s(\mathbf{x})$. Além disso, devido à falta de conhecimento do comportamento da função custo, a função de regressão é considerada constante e dada simplesmente por $\mu(\mathbf{x}) = \beta$ (Kriging ordinário), que pelo método dos mínimos quadrados acaba sendo igual a média das respostas amostradas (i.e., $\beta = \sum_{i=1}^n y_i/n$). O *kernel* utilizado é o Matérn $\mu = 5/2$ pois fornece matrizes de covariância mais bem comportadas quando comparado as demais funções disponíveis (ROUSTANT et al., 2012). Quanto aos hiperparâmetros (θ_i), a estimação é obtida pela maximização da verosimilhança (Equação 4.7) com uso do algoritmo genético `rgenoud`.

5 OTIMIZAÇÃO GLOBAL EFICIENTE

A otimização de funções de alto custo, geralmente relacionadas a soluções numéricas de problemas complexos, cria a necessidade de uma estratégia eficiente para a otimização. Na maioria desses casos, a inexistência de derivadas limita o uso de técnicas baseadas em gradiente. Além disso, o alto custo computacional prejudica a utilização de heurísticas de otimização como algoritmos genéticos quando o número de avaliações é restrito.

Técnicas eficientes de otimização com uso de metamodelos consistem na criação de um metamodelo inicial baseado em um DOE, seguida da melhoria sistemática deste pela adição sequencial de novos pontos experimentais, *denominados pontos de preenchimento (infill points)*.

5.1 CRITÉRIOS DE PREENCHIMENTO

Como o modelo substituto $Y(\mathbf{x})$ é apenas uma aproximação da resposta verdadeira $y(\mathbf{x})$ que deseja-se otimizar, recomenda-se refinar o modelo em regiões de possível mínimo utilizando pontos de preenchimento. Porém, como é mostrado em Jones (2001), o DOE pode gerar um panorama enganoso da função real e direcionar o algoritmo de otimização ao refino de uma região improdutiva como exemplifica a Figura 5.1, que mostra o processo de minimização de uma *função enganosa* dada por

$$f(x) = (6x - 2)^2 \text{sen}(12x - 4). \quad (5.1)$$

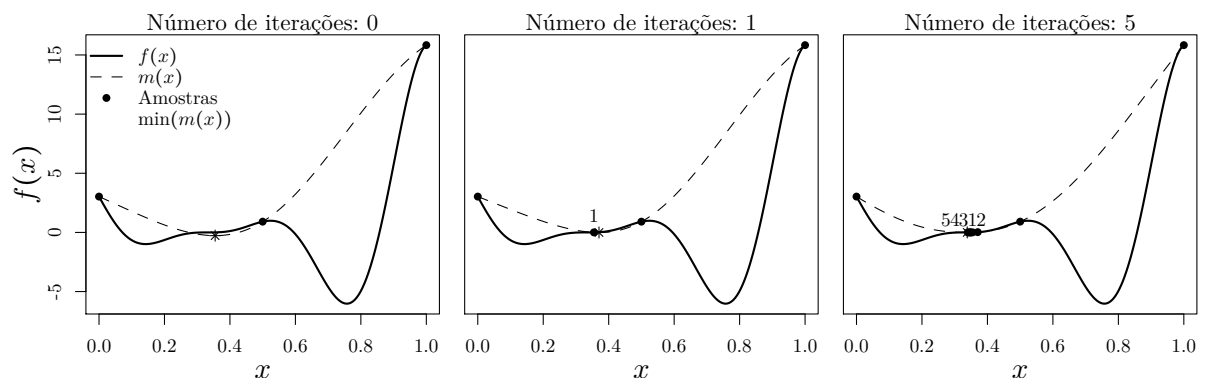


Figura 5.1 – Minimização da *função enganosa* utilizando a estratégia de preenchimento por minimização do preditor de Kriging.

Para o caso da função apresentada, avaliada no DOE $\mathbf{X} = (0,0; 0,5; 1,0)$, a otimização iterativa do metamodelo de Kriging, onde os pontos de preenchimento são dados pelos que minimizam a média do processo $Y(\mathbf{x})$, falha na busca do mínimo global e nem

ao menos encontra um mínimo local. A partir da primeira iteração, o algoritmo de busca refina o modelo com pontos muito próximos dos conhecidos trazendo melhoria quase nula para o modelo. O problema aqui, evidentemente, não está apenas na baixa fidelidade do modelo de Kriging mas sim na ineficiente estratégia de preenchimento dos novos pontos experimentais.

Diversos outros critérios de seleção dos pontos de preenchimento foram desenvolvidos, sendo o critério da melhoria esperada, proposto por Jones et al. (1998), o mais utilizado atualmente. A seguir é apresentado o critério de preenchimento por probabilidade de melhoria (*probability of improvement* – PI), conceito base da melhoria esperada (*Expected Improvement* – EI), seguido da definição dessa última.

Probabilidade de Melhoria

No processo de otimização por preenchimento, deseja-se o uso de uma estratégia que escolha novos pontos experimentais que levem a valores menores da função objetivo, ou seja, que tragam uma melhoria em relação ao melhor ponto observado. Dado que $y_R(\mathbf{x})$ é uma única realização do processo aleatório $Y(\mathbf{x})$, a probabilidade de melhoria calcula a frequência de se observar uma realização $y_R(\mathbf{x})$ igual ou menor do que a de um determinado valor y_{alvo} . Esse cálculo pode ser simplesmente realizado aplicando-se a função distribuição acumulada da distribuição normal Z , dada por:

$$\Phi(Z) = \Phi\left(\frac{y_{\text{alvo}} - \mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_{\text{alvo}} - \mu}{\sigma}\right)^2} d\mu, \quad (5.2)$$

onde μ é a média da distribuição e σ^2 sua variância. A Figura 5.2 exemplifica a probabilidade de se encontrar um valor menor do que $\mu - 1\sigma$.

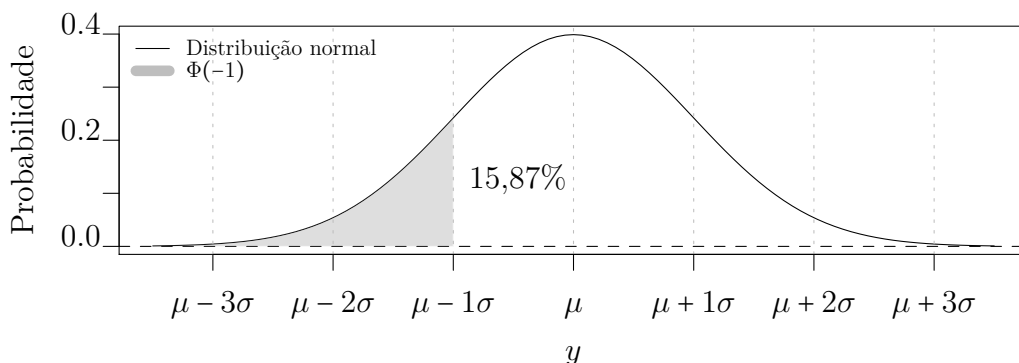


Figura 5.2 – Probabilidade de se encontrar valores inferiores a $\mu - \sigma$ dada uma distribuição normal de média μ e desvio padrão σ .

Adequando a Equação 5.2 para o metamodelo de Kriging, deseja-se calcular a probabilidade de que para um dado \mathbf{x} obtenha-se uma realização $y_R(\mathbf{x})$ menor ou igual do que um patamar escolhido. Dessa maneira, substituem-se: μ e σ^2 pela média e variância

predita do metamodelo em \mathbf{x} ($m(\mathbf{x})$ e $s(\mathbf{x})$, respectivamente), o que resulta em:

$$P[I(\mathbf{x})] = \begin{cases} \Phi\left(\frac{y_{\text{alvo}} - m(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) & \text{se } s > 0 \\ 0 & \text{se } s = 0 \text{ e } m(\mathbf{x}) \geq y_{\text{alvo}} \\ 1 & \text{se } s = 0 \text{ e } m(\mathbf{x}) < y_{\text{alvo}}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Note que s é nulo apenas em pontos conhecidos e pode-se afirmar com certeza (probabilidade zero ou um) se os pontos já amostrados são piores ou melhores do que o alvo, o que faz sentido, pois já conhecemos o valor real da função nesses pontos.

A escolha do y_{alvo} é arbitrária, porém, deseja-se escolher um novo ponto amostral \mathbf{x} que *provavelmente* melhore o valor da função objetivo. Dessa maneira, uma escolha evidente para y_{alvo} seria o menor valor conhecido da função objetivo. O problema de escolher esse valor como alvo é que a máxima probabilidade de melhoria tenderá a pontos muito próximos ao melhor ponto amostrado (Fig. 5.3 a). Isso ocorre pois a função apenas calcula a probabilidade de melhoria, não levando em consideração o quanto de melhoria será causada. Dessa maneira, é mais provável que valores próximos a melhor amostra tragam uma melhoria, por menor que ela seja. A Figura 5.3 ilustra o resultado da escolha de y_{alvo} para três valores diferentes: $y_{\text{alvo}} = \min(\mathbf{y})$; $y_{\text{alvo}} = -2$; e $y_{\text{alvo}} = -6$.

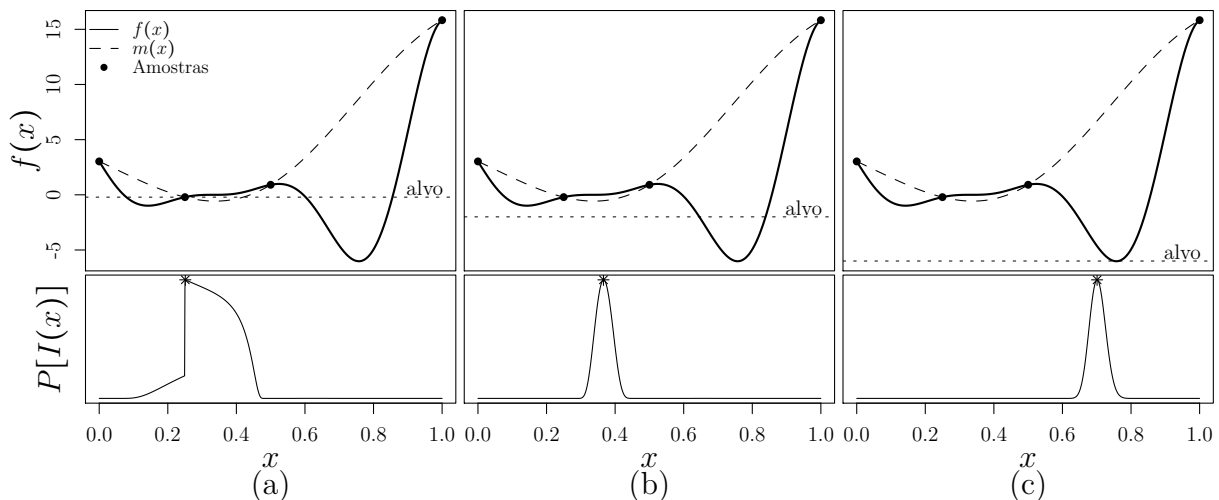


Figura 5.3 – Probabilidade de melhoria da função enganosa para diferentes alvos: (a) $y_{\text{alvo}} = y_{\min}$, (b) $y_{\text{alvo}} = -2$ e (c) $y_{\text{alvo}} = -6$.

O problema principal dessa estratégia de preenchimento é a necessidade de um conhecimento prévio do valor aproximado do mínimo da função objetivo. A escolha de um alvo muito maior do que o mínimo real causará uma parada precoce do algoritmo e a de um alvo muito menor do que o mínimo real fará a variância da predição “dominar” a busca, fazendo que o algoritmo apenas preencha pontos em regiões pouco exploradas (FORRESTER et al., 2008).

Contudo, caso o valor que deseja-se obter seja parcialmente conhecido ou possa ser estimado com confiança, o processo de preenchimento é eficiente como mostra a Figura 5.4. Em apenas três iterações o mínimo global é encontrado.

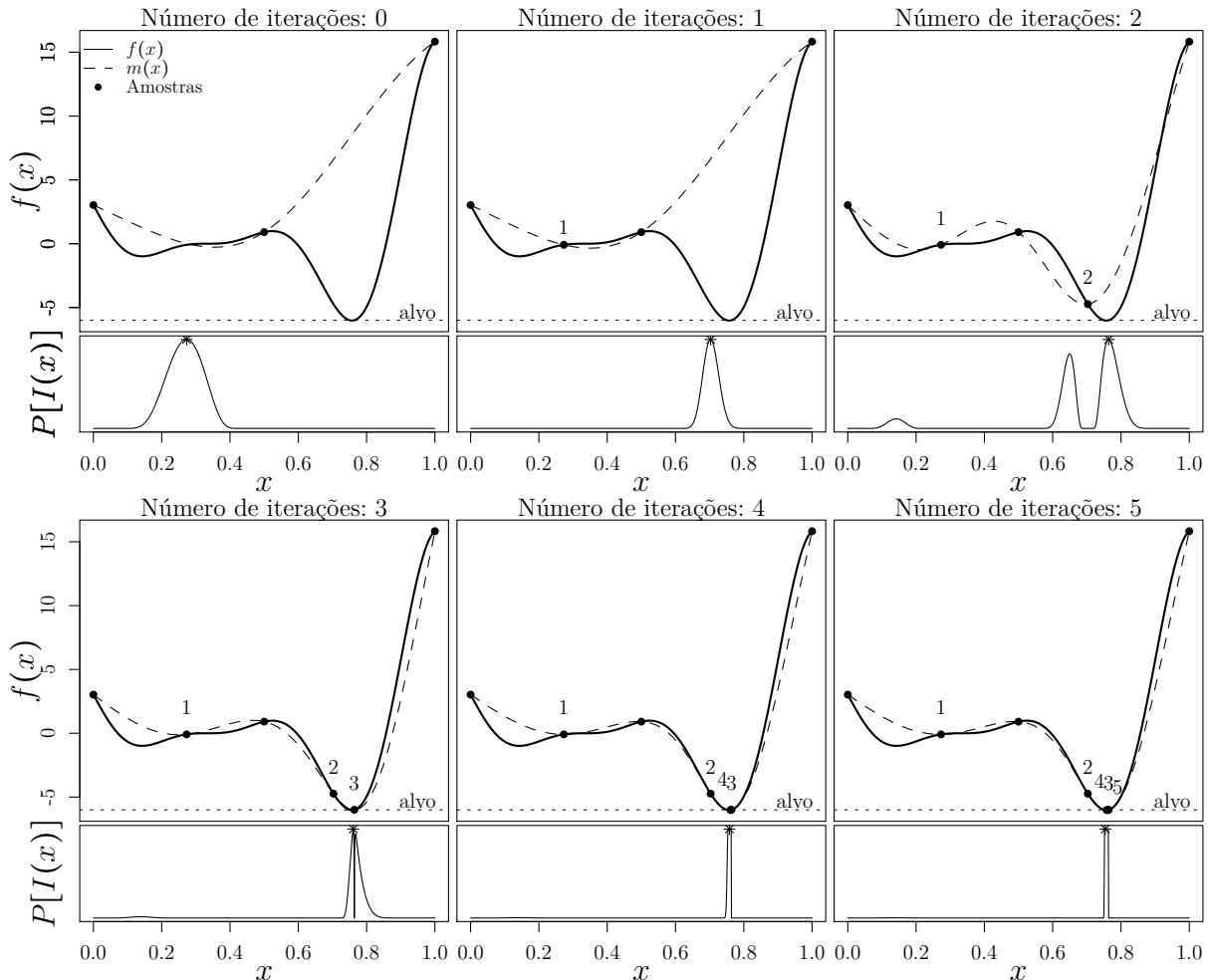


Figura 5.4 – Minimização da função *enganosa* utilizando a estratégia de minimização por preenchimento e maximização da probabilidade de melhoria.

Apesar de eficiente para alguns casos, a necessidade de se conhecer ou estimar o mínimo da função objetivo torna o método, em muitas vezes, impraticável. Nesses casos, ao invés de apenas avaliar locais de possível melhoria deve-se calcular a *quantidade* da melhoria que se espera para um determinado ponto.

Melhoria Esperada

Segundo Roustant et al. (2012), a ideia básica do critério da melhoria esperada (*expected improvement* – EI) é que amostrando um novo ponto \mathbf{x} o modelo será melhorado de $y_{\min} - y(\mathbf{x})$ se $y(\mathbf{x}) < y_{\min}$ ou 0 caso contrário, onde y_{\min} é o menor valor observado da função objetivo e comumente é chamado de *plugin* da melhoria esperada. Obviamente o valor dessa melhoria não é conhecido de antemão, pois $y(\mathbf{x})$ é desconhecido. A me-

lhoria esperada pode ser obtida¹ usando informações dos preditores de Kriging (média e variância) e é definida como

$$E[I(\mathbf{x})] = \begin{cases} (y_{\min} - m(\mathbf{x}))\Phi\left(\frac{y_{\min} - m(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) + s(\mathbf{x})\phi\left(\frac{y_{\min} - m(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) & \text{se } s > 0 \\ 0 & \text{se } s = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

na qual Φ e ϕ são respectivamente a função distribuição acumulada (*cumulative distribution function* CDF) e a função densidade de probabilidade (*probability density function* PDF) da distribuição normal de Gauss. O critério EI tem propriedades importantes para exploração sequencial (preenchimento): ele é nulo em pontos já visitados (evita busca em regiões conhecidas o que garante uma eventual convergência), é positivo para qualquer outra região, sua magnitude aumenta com $s(\mathbf{x})$ (valoriza a busca em regiões pouco exploradas) e aumenta com a redução de $m(\mathbf{x})$ (valoriza a busca em regiões de baixo valor predito). O critério EI é testado para a mesma *função enganosa* usada anteriormente e os resultados podem ser vistos na Figura 5.5.

No exemplo mostrado fica evidente a robustez do critério de preenchimento EI, que é alimentado inicialmente apenas com os mesmos três pontos amostrais (não é necessário fornecer nenhuma informação sobre o mínimo da função). O algoritmo gasta 7 iterações refinando o modelo em uma região inicialmente mais produtiva até que o modelo de Kriging se ajusta quase que perfeitamente com a função real (nessa região). A pequena distância entre os pontos amostrados na região esquerda do domínio reduz significativamente o valor de $s(\mathbf{x})$ desta área, direcionando a busca para a parte central da região direita do domínio ($x \approx 0,75$), ainda não explorada.

5.2 ALGORITMO EFICIENTE DE OTIMIZAÇÃO GLOBAL

O algoritmo de otimização empregado neste trabalho é aquele proposto por Jones et al. (1998), comumente chamado de algoritmo eficiente de otimização global (*Efficient Global Optimization* – EGO). Partindo de um conjunto inicial de amostras \mathbf{X} (usualmente um hipercubo latino), o EGO sequencialmente maximiza a melhoria esperada (EI) e atualiza o modelo de Kriging a cada iteração (incluindo as estimativas dos parâmetros β e θ) podendo ser descrito como:

1. Avalie y para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$;
2. Enquanto um critério de parada não for satisfeito:
 - a) Construa o metamodelo de Kriging;
 - b) Maximize o critério de preenchimento EI e combine o ponto de ótimo com os pontos anteriores: $\mathbf{X} = \mathbf{X} \cup \mathbf{x}^* \mid \mathbf{x}^* = \arg \max(E[I(\mathbf{x})])$;

¹ Para maiores detalhes sobre a construção do critério da melhoria esperada consultar Forrester et al. (2008) pg. 84 à 92.

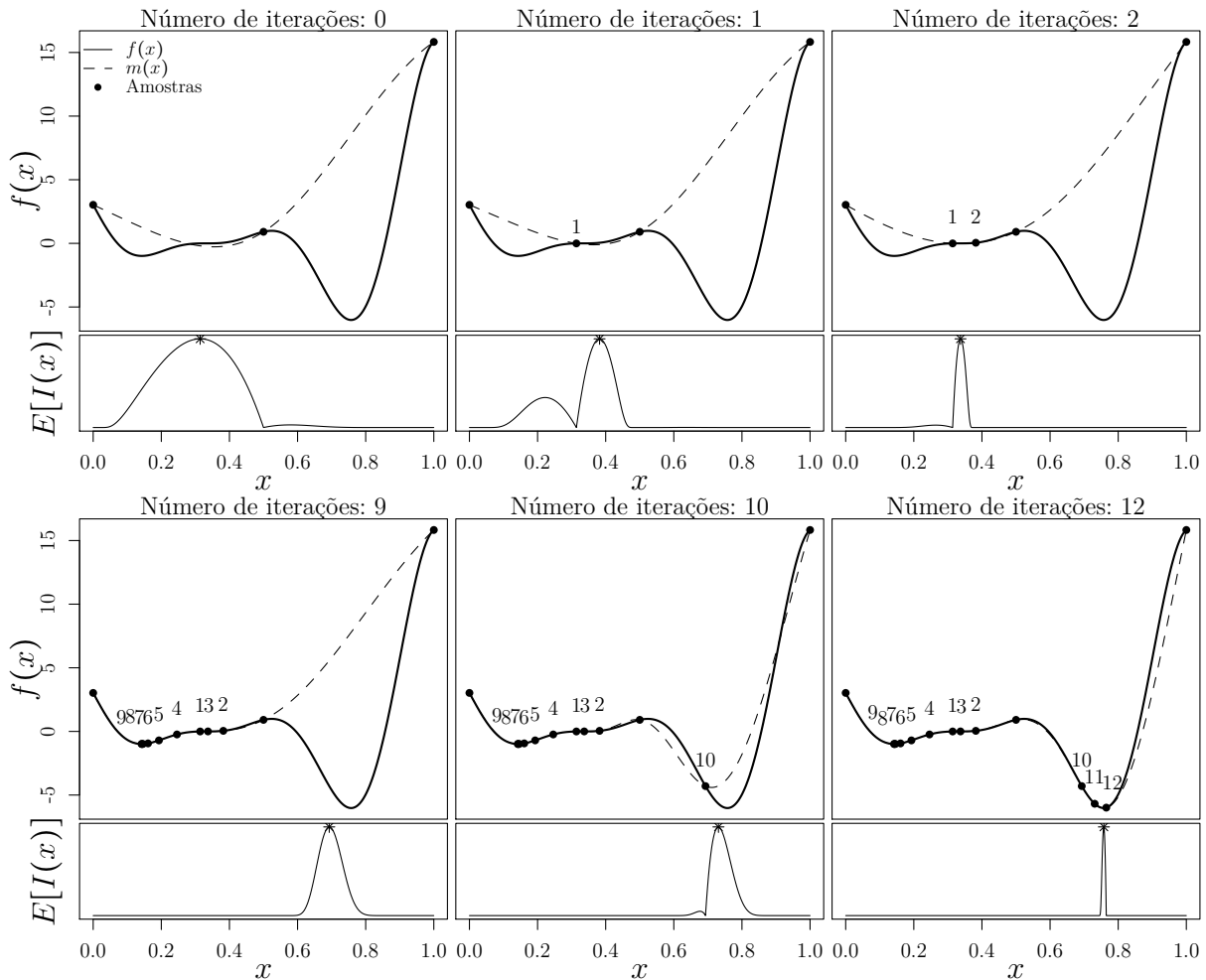


Figura 5.5 – Minimização da função *enganosa* utilizando a estratégia de minimização por preenchimento e maximização da melhoria esperada.

- c) Avalie a função objetivo no novo ponto e incorpore aos conjuntos dos valores já conhecidos: $\mathbf{y} = \mathbf{y} \cup f(\mathbf{x}^*)$;

ou, como mostrado no fluxograma da Figura 5.6.

O critério de parada pode ter diversas formas como: número de acessos à função objetivo, tempo computacional, variância média do metamodelo, variação entre projetos encontrados em duas iterações subsequentes, etc.. Neste trabalho, o critério adotado é um limite máximo no número de acessos à função objetivo. Note que por se tratar de uma heurística, o algoritmo não garante otimalidade do valor encontrado. Contudo, devido à formulação da melhoria esperada, para um número arbitrariamente grande de avaliações, o algoritmo tem convergência garantida pois não há riscos do EGO ficar “preso” em uma determinada região do espaço de projeto (FORRESTER et al., 2008). Apesar de que com um orçamento computacional finito não há garantias da otimalidade, a pesquisa bibliográfica e testes realizados neste trabalho sugerem uma rápida taxa de convergência do algoritmo, de forma que, com um orçamento computacional muito reduzido, possam ser obtidos bons resultados de projeto.

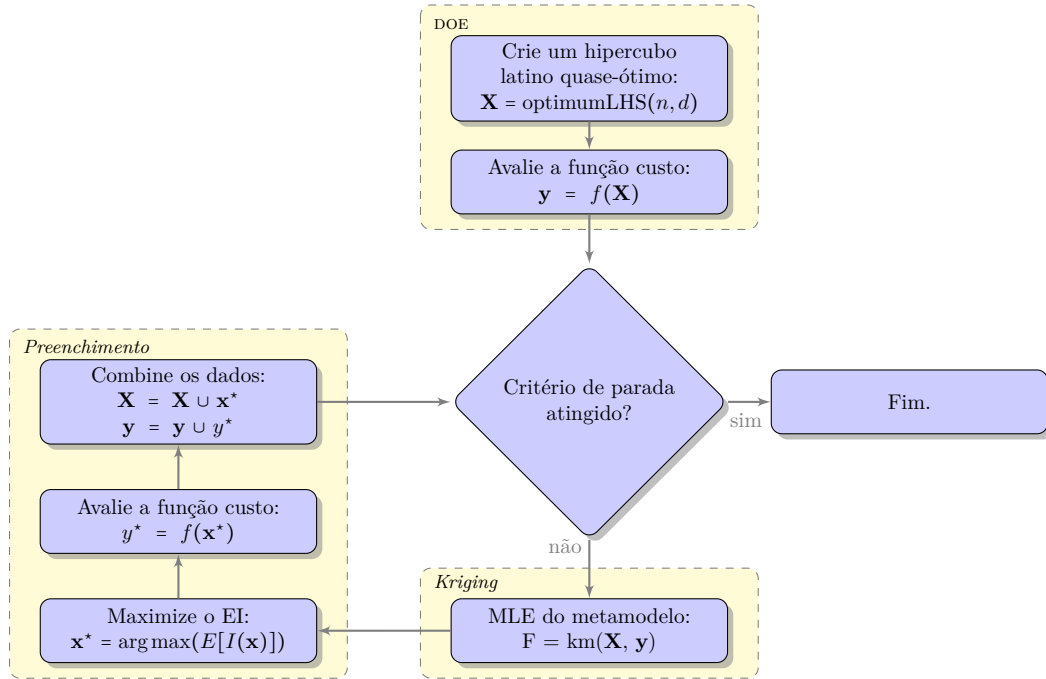


Figura 5.6 – Fluxograma do algoritmo eficiente de otimização global.

Devido a limitações do algoritmo proposto em (JONES et al., 1998) e da implementação disponível em (ROUSTANT et al., 2012), modificações foram realizadas para contemplar a otimização global com restrições de desigualdade e a otimização multiobjetivo sem restrições. Essas modificações, são descritas nas seções 5.3 e 5.4, respectivamente.

5.3 TRATAMENTO DAS RESTRIÇÕES

Na seção 5.1 foi discutido o critério de preenchimento pela probabilidade de melhoria $P[I(\mathbf{x})]$. Considerando uma função de restrição $g(\mathbf{x}) \leq 0$, modelada por um processo gaussiano (nesse caso um modelo de Kriging) $G(\mathbf{x})$, pode-se calcular a probabilidade $P[G(\mathbf{x})]$ de que a restrição seja menor ou igual a 0 (“melhore” o valor da restrição em relação a um $g_{\text{alvo}} = 0$). Para um problema de otimização com m -restrições do tipo $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$, a melhoria esperada de uma função com restrições $E^C[I(\mathbf{x})]$ pode ser escrita como a esperança da melhoria combinada à probabilidade de atendimento das m -restrições:

$$E^C[I(\mathbf{x})] = E[I(\mathbf{x}) \cap G_1(\mathbf{x}) \cap \dots \cap G_j(\mathbf{x}) \cap \dots \cap G_m(\mathbf{x})] = E[I^{\mathbb{F}}(\mathbf{x})] \prod_{j=1}^m P[G_j(\mathbf{x})]. \quad (5.5)$$

A função $E[I^{\mathbb{F}}(\mathbf{x})]$ é a melhoria esperada do metamodelo de Kriging construído sobre a função objetivo modificada para receber um *plugin* igual ao melhor ponto factível (i.e., na Equação 5.4, $y_{\min} = y_{\min}^{\mathbb{F}}$ com o sobrescrito \mathbb{F} representando pontos dentro da região factível). No caso de não haver nenhum *ponto factível*, a função melhoria esperada retorna 1 para permitir que o algoritmo de busca procure por pontos com maior probabilidade de serem factíveis ($\arg \max(\prod_{j=1}^m P[G_j(\mathbf{x})])$). A modificação da Equação 5.4 pode ser escrita

como:

$$E[I^{\mathbb{F}}(\mathbf{x})] = \begin{cases} (y_{\min}^{\mathbb{F}} - m(\mathbf{x}))\Phi\left(\frac{y_{\min}^{\mathbb{F}} - m(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) + s(\mathbf{x})\phi\left(\frac{y_{\min}^{\mathbb{F}} - m(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})}\right) & \text{se } \exists y_{\min}^{\mathbb{F}} \text{ e } s > 0, \\ 0 & \text{se } \exists y_{\min}^{\mathbb{F}} \text{ e } s = 0, \\ 1 & \text{se } \nexists y_{\min}^{\mathbb{F}}. \end{cases} \quad (5.6)$$

As funções $P[G_j(\mathbf{x})]$ calculam a probabilidade de cada uma das m -restrições serem atendidas e podem ser calculadas modificando a Equação 5.3, fazendo-se $y_{\text{alvo}} = 0$ (para o problema geral de otimização onde $g_j(x) \leq 0$) e mudando a igualdade da segunda para a terceira sentença da equação (se o ponto é conhecido e atende as restrições sua probabilidade de ser factível é igual a 1). As modificações podem ser escritas como:

$$P[G_j(\mathbf{x})] = \begin{cases} \Phi\left(\frac{-m_j(\mathbf{x})}{s_j(\mathbf{x})}\right) & \text{se } s > 0 \\ 0 & \text{se } s_j(\mathbf{x}) = 0 \text{ e } m_j(\mathbf{x}) > 0 \\ 1 & \text{se } s_j(\mathbf{x}) = 0 \text{ e } m_j(\mathbf{x}) \leq 0, \end{cases} \quad (5.7)$$

sendo $m_j(\mathbf{x})$ e $s_j(\mathbf{x})$ a média e variância da predição do metamodelo de Kriging da restrição $g_j(\mathbf{x})$.

Gradiente da melhoria esperada restrita

De modo a evitar o uso de derivada numérica, aumentando assim a eficiência do algoritmo genético com derivadas do pacote `rgeoud`, deve-se fornecer o gradiente da função a ser otimizada ($E^{\mathbb{C}}[I(\mathbf{x})]$). No cálculo do gradiente da função combinada com restrições deve-se apenas aplicar a regra do produto:

$$\begin{aligned} \nabla E^{\mathbb{C}}[I(\mathbf{x})] &= \nabla \left(E[I^{\mathbb{F}}(\mathbf{x})] \prod_{j=1}^m P[G_j(\mathbf{x})] \right) \\ \nabla E^{\mathbb{C}}[I(\mathbf{x})] &= \nabla E[I(\mathbf{x})] \prod_{j=1}^m P[G_j(\mathbf{x})] + \\ &+ E[I(\mathbf{x})] \sum_{k=1}^m \left(\prod_{j=1}^{k-1} (P[G_j(\mathbf{x})]) \nabla P[G_k(\mathbf{x})] \prod_{j=k+1}^m (P[G_j(\mathbf{x})]) \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

O gradiente analítico da melhoria esperada sem restrição ($\nabla E[I(\mathbf{x})]$) é fornecido no pacote `DiceOptim` pela função `EI.grad`. Contudo, o gradiente analítico da probabilidade de melhoria não é fornecido diretamente pelo pacote e pode ser obtido por:

$$\begin{aligned} \nabla P[G_j(\mathbf{x})] &= \nabla \left(\Phi\left(\frac{-m_j(\mathbf{x})}{s_j(\mathbf{x})}\right) \right) \\ \nabla P[G_j(\mathbf{x})] &= \phi\left(\frac{-m_j(\mathbf{x})}{s_j(\mathbf{x})}\right) \frac{m_j(\mathbf{x})\nabla s_j(\mathbf{x}) - s_j(\mathbf{x})\nabla m_j(\mathbf{x})}{s_j^2(\mathbf{x})}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Em resumo, o EGO com restrições pode ser descrito como:

1. Avalie $y = f(\mathbf{x})$ e $y_{g_i} = g_i(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$;
2. Enquanto um critério de parada não for satisfeito:
 - a) Construa os metamodelos de Kriging F e G_i , para as respostas y e y_{g_i} , respectivamente;
 - b) Maximize o critério de preenchimento EI com restrições e combine o ponto de ótimo com os pontos anteriores: $\mathbf{X} = \mathbf{X} \cup \mathbf{x}^* \mid \mathbf{x}^* = \arg \max(E^C[I(\mathbf{x})])$;
 - c) Avalie a função objetivo e as restrições no novo ponto e incorpore aos conjuntos dos valores já conhecidos: $\mathbf{y} = \mathbf{y} \cup f(\mathbf{x}^*)$ e $\mathbf{y}_{g_i} = \mathbf{y}_{g_i} \cup g_{g_i}(\mathbf{x}^*)$;
 - d) Re-estime os parâmetros do metamodelo.

Ou, como mostrado no fluxograma da Figura 5.7.

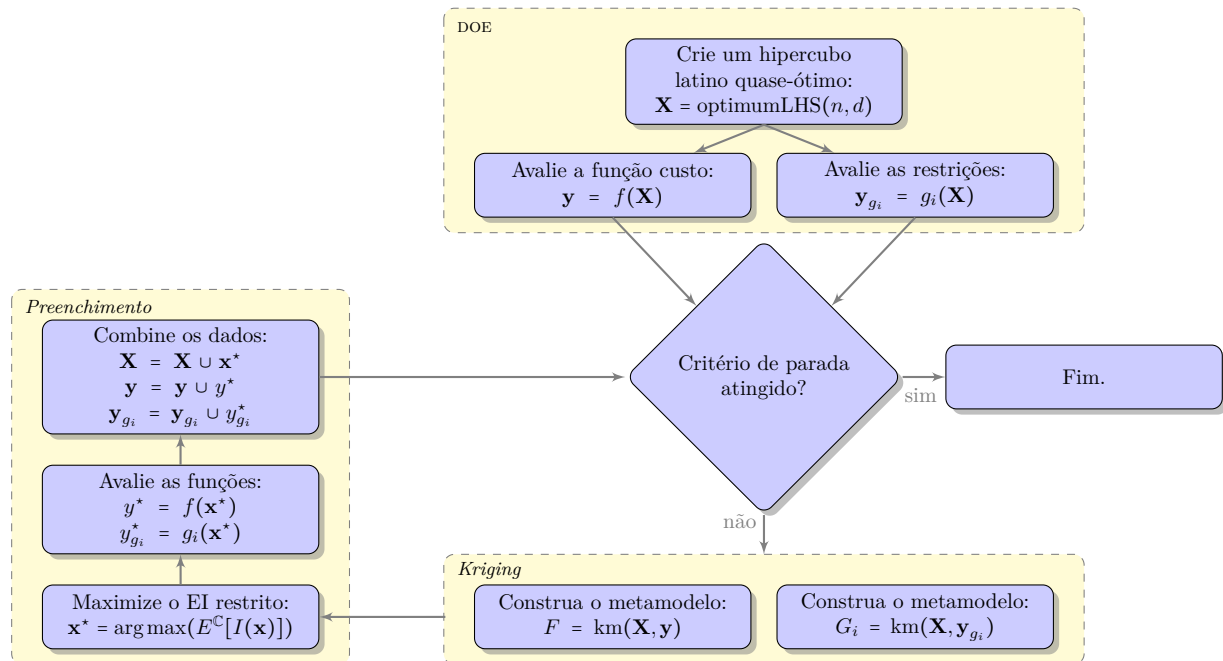


Figura 5.7 – Fluxograma do algoritmo eficiente de otimização global com restrições.

5.4 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

Problemas complexos de engenharia quase sempre estão relacionados à otimização de múltiplos critérios de aptidão que, em geral, são conflitantes entre si. Por exemplo, objetivos comumente relacionados a projetos aeronáuticos são: baixo peso, baixo custo, sistemas robustos e de alta performance. Esses objetivos são claramente conflitantes e uma solução que maximize um dos critérios certamente causará impacto negativo nos demais. Em geral, o que o projetista faz é balancear os objetivos conflitantes e decidir qual solução atende da melhor maneira possível a combinação desses (FORRESTER et al., 2008). Contudo, a escolha de uma solução que atenda de maneira satisfatória todos os objetivos não é simples. Em problemas de engenharia, o mapeamento entre o espaço de

projetos ou decisão (variáveis de entrada) e o espaço dos objetivos (respostas) é, em geral, altamente não linear. Sendo assim, encontrar as variáveis de entrada que levem à uma dada combinação de respostas é, quando possível, de elevada dificuldade (FORRESTER et al., 2008).

Uma técnica muito utilizada na otimização multiobjetivo são os conjuntos de Pareto. Em um conjunto de Pareto, cada um dos projetos é ótimo em algum sentido, sem precisar levar em consideração o peso de cada objetivo. Segundo Forrester et al. (2008), de maneira mais formal, um conjunto de Pareto contém apenas projetos que são suficientemente otimizados tal que, para melhorar o desempenho de qualquer projeto, em qualquer critério, a performance em pelo menos um dos demais objetivos é reduzida. Em outras palavras, os pontos de um conjunto de Pareto são considerados *não dominados* de modo que não há nenhum projeto que seja melhor em mais de um objetivo quando comparado a outro.

Um conjunto ou *frente de Pareto* é visualizado comumente em um gráfico que tenha em seus eixos a resposta para cada objetivo (objetivo A versus objetivo B, por exemplo). Para um problema onde deseja-se minimizar duas funções objetivo o conjunto pode ser representado em um gráfico bidimensional como mostrado na Figura 5.8. Nela, são representados 15 projetos e suas respectivas respostas. Os pontos que fazem parte do conjunto de Pareto (pontos não dominados) são representados por pontos cheios e os que não fazem parte (pontos dominados) por pontos vazios. A linha cheia representa a frente de Pareto e a região hachurada com linhas cheias mostra a parte do espaço objetivo onde possíveis projetos aumentariam o conjunto de Pareto sem excluir (dominar) nenhum ponto já existente (i.e., aumentariam o número de projetos da frente de Pareto). Já a região hachurada em tracejado representa a parte do espaço que um possível projeto dominaria pelo menos um ponto da frente atual (i.e., obteria melhor desempenho em ambos os critérios).

Segundo Forrester et al. (2008), existem inúmeras dificuldades técnicas para a construção de um conjunto de Pareto. Os projetos devem ser ótimos em algum critério e é desejável que estejam igualmente distribuídos pela frente Pareto. Em geral, tais requisitos elevam o custo computacional substancialmente. Além disso, usualmente, deseja-se que o conjunto contenha uma grande variedade de diferentes projetos, contudo, devido à alta não linearidade do mapeamento entrada-saída, a obtenção disso não é simples.

A abordagem mais simples para a construção do conjunto de Pareto é a combinação linear das funções objetivo em uma única função, por meio de escalares, denominados pesos, que variam durante o processo de otimização. Essa abordagem possibilita que técnicas de otimização para um único objetivo sejam empregadas. Contudo, não há nenhuma clareza sobre como deve ser realizado a escolha dos pesos nem de como alterá-los de modo a varrer de maneira uniforme o espaço objetivo (varia de problema para problema). Téc-

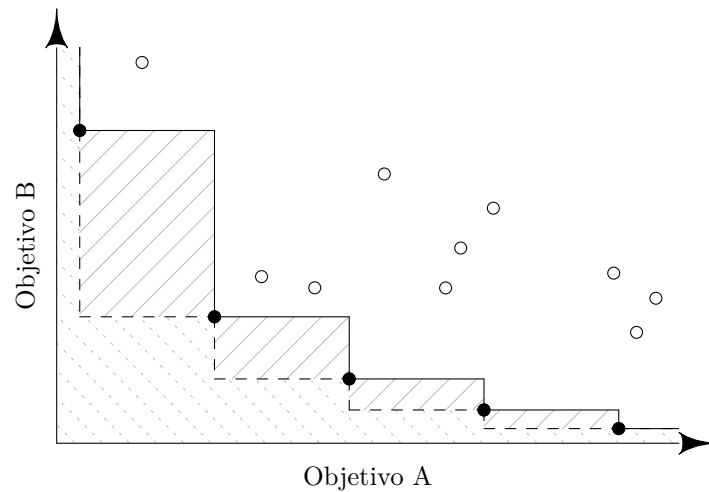


Figura 5.8 – Amostras em uma otimização multiobjetivo com um conjunto de Pareto de 5 pontos não dominados.

nicas mais sofisticadas de construção de conjuntos de Pareto existem², porém não são abordadas no presente estudo.

Uma maneira intuitiva de se conduzir a otimização multiobjetivo é executar m -EGOs independentes usando m -valores diferentes para os pesos. O problema dessa abordagem é que, para uma otimização com p -objetivos e n -pontos (acessos por execução independentes), a complexidade (custo) computacional total é $O(nm^{p-1})$ e facilmente se torna elevado. Dessa maneira, optou-se por uma abordagem diferente: apenas uma otimização é executada e varia-se gradativamente os valores dos pesos a cada iteração do EGO. A vantagem dessa técnica é que não são perdidas as informações da otimização anterior pois um único EGO é executado. Para dois objetivos o EGO multiobjetivo pode ser descrito como:

1. Avalie $y_1 = f_1(\mathbf{x})$ e $y_2 = f_2(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$
2. Enquanto um critério de parada não for satisfeito:
 - a) Construa o metamodelo de Kriging da função combinada $f(x) = \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2$ para um dado valor de: α ;
 - b) Maximize o critério de preenchimento EI e combine o ponto de ótimo com os pontos anteriores: $\mathbf{X} = \mathbf{X} \cup \mathbf{x}^* \mid \mathbf{x}^* = \arg \max(E[I(\mathbf{x})])$;
 - c) Avalie a função objetivo e as restrições no novo ponto e incorpore aos conjuntos dos valores já conhecidos: $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1 \cup f_1(\mathbf{x}^*)$ e $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2 \cup f_2(\mathbf{x}^*)$;
 - d) Varie o valor de α ;

Ou, como mostrado no fluxograma da Figura 5.9.

² O leitor interessado pode encontrar um estudo comparativo entre seis das mais usadas técnicas em Zitzler et al. (2000).

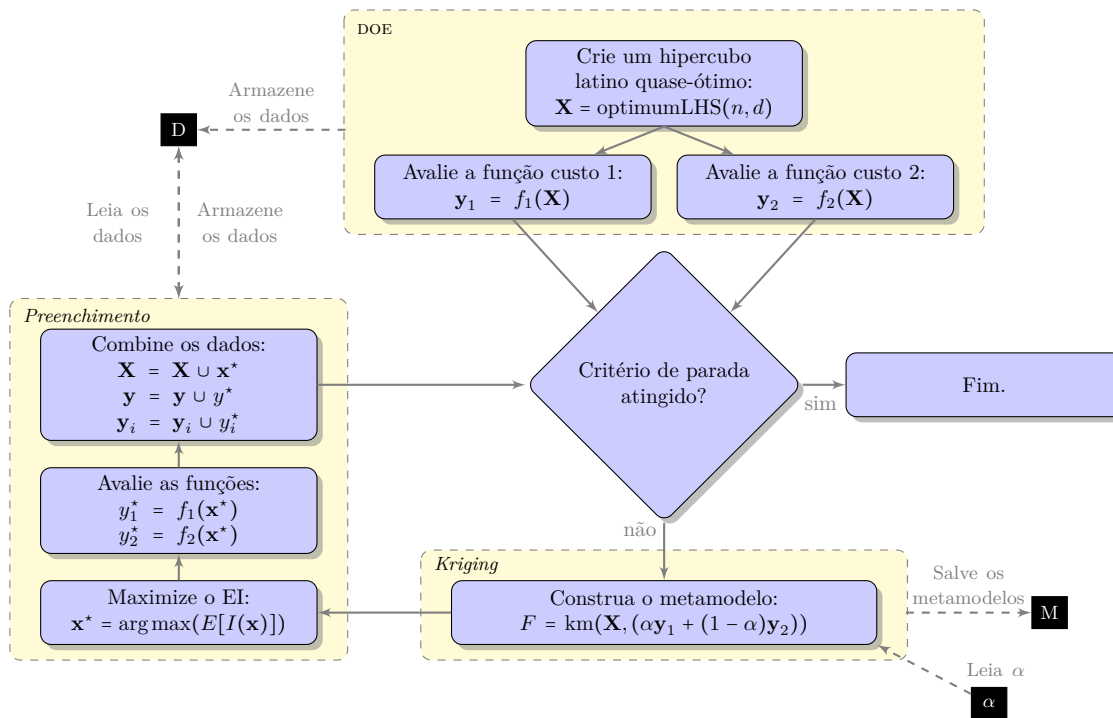


Figura 5.9 – Fluxograma do algoritmo eficiente de otimização global com dois objetivos.

Testes preliminares com dois objetivos mostraram bons resultados com um custo computacional de $O(2n)$ a $O(3n)$ (apenas o dobro ou triplo de uma otimização para um único objetivo). Para isso, α é mantido constante em 0 durante m -avaliações sendo aumentado gradativamente em posteriores m a $2m$ -incrementos iguais até atingir o valor de 1. Observou-se que durante as primeiras m -avaliações o algoritmo encontra o ótimo para a segunda função objetivo (y_2^*), e durante as demais iterações, gradativamente “caminha” pela frente de Pareto em direção ao ótimo do primeiro objetivo (y_1^*).

5.5 DEMONSTRAÇÕES EM FUNÇÕES TESTE

Nesta seção, duas funções testes amplamente empregadas na validação de algoritmos de otimização são utilizadas: Branin-Hoo e Griewank.

A função Branin-Hoo, de duas variáveis, definida como

$$\text{branin}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \left(\bar{x}_2 - \frac{5}{4\pi^2} \bar{x}_1^2 + \frac{5}{\pi} \bar{x}_1 - 6 \right)^2 + 10 \left(1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos(\bar{x}_1) + 10, \quad (5.10)$$

é comumente avaliada no espaço real $\bar{\mathbf{x}} \in [-5; 10] \times [0; 15]$. Neste trabalho faz-se $\bar{x}_1 = 15x_1 - 5$ e $\bar{x}_2 = 15x_2$ para condicionar a função no espaço $\mathbf{x} \in [0; 1]^2$. Nesse espaço reduzido a função possui 3 ótimos globais, posicionados em: $\mathbf{x}_{\min_1} = \{0,961652; 0,150000\}$; $\mathbf{x}_{\min_2} = \{0,123895; 0,816664\}$; $\mathbf{x}_{\min_3} = \{0,542773; 0,150000\}$ que resultam em um valor da função objetivo de $y_{\min} = 0,397887$. A função Branin-Hoo pode ser visualizada na Figura 5.10 onde seus mínimos globais são indicados com um asterisco vermelho.

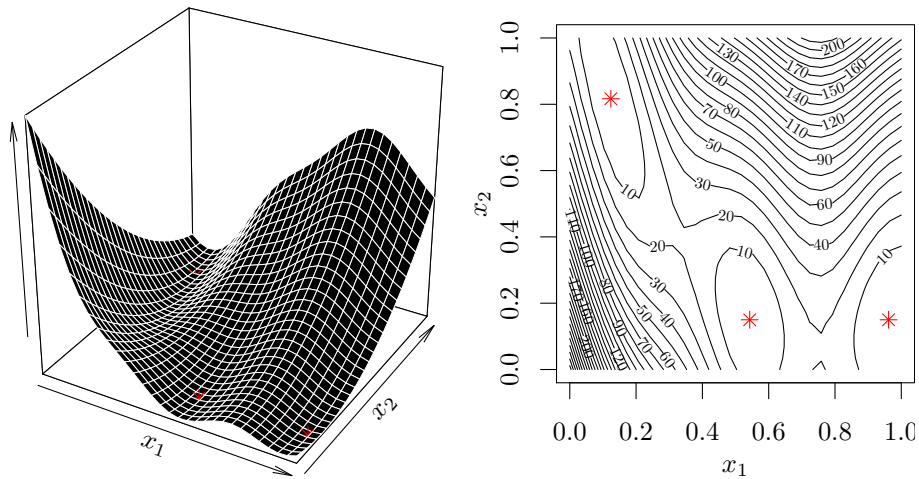


Figura 5.10 – Função Branin-Hoo.

A função Griewank, definida como

$$\text{griewank}(\bar{\mathbf{x}}) = 1 + \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^d \bar{x}_i^2 - \prod_{i=1}^d \cos\left(\frac{\bar{x}_i}{\sqrt{i}}\right), \quad (5.11)$$

é comumente avaliada no espaço real $\bar{\mathbf{x}} \in [-10; 10]^d$. Neste trabalho faz-se $d = 2$, $\bar{x}_1 = 10x_1 - 5$ e $\bar{x}_2 = 10x_2 - 5$ para condicionar a função para o espaço $\mathbf{x} \in [0; 1]^2$. Nesse espaço reduzido a função possui 1 ótimo global em: $\mathbf{x}_{\min_1} = \{0,5; 0,5\}$ que resulta em um valor da função objetivo de $y_{\min} = 0,0$. A Figura 5.11 mostra o comportamento da função para o espaço analisado, onde o ótimo global está indicado com um asterisco vermelho.

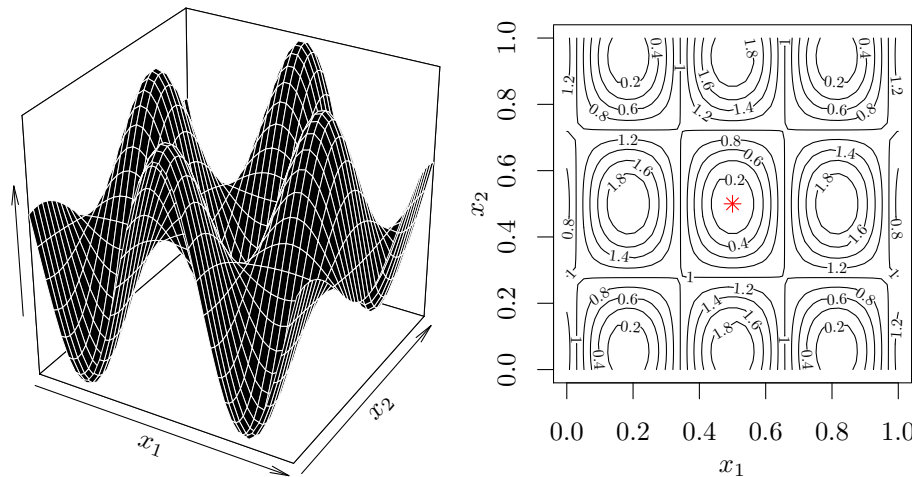


Figura 5.11 – Função Griewank.

EGO sem restrições

Para a demonstração da metodologia proposta, realiza-se inicialmente a minimização sem restrições da função teste Branin-Hoo, cujo problema de otimização pode ser

definido como:

$$\begin{aligned} \text{encontrar: } & \{x_1, x_2\} \in [0, 1]^2, \\ \text{que minimiza: } & \text{branin}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Esse problema pode ser executado em um console do **R** utilizando o Código 5.1.

Código 5.1 – EGO sem restrições para a função Branin-Hoo.

```
f <- test_fun$Branin
doe <- data.frame(optimumLHS(9,2))
names(doe) <- c('x1','x2')
res <- apply(doe, 1, f)
F <- km(design=doe, response=res)
for (i in 1:18){
  x_star <- max_EI(model, lower=c(0,0), upper=c(1,1))$par
  y_star <- fun_cost(x_star)
  model <- km(design=rbind(F@X, x_star), response=c(F@y, y_star))
}
```

A Figura 5.12 mostra algumas iterações do processo de otimização. Curvas de nível em linhas cheias representam a topografia real da função custo, enquanto as pontilhadas indicam a topografia da média do preditor de Kriging.

Inicialmente, o algoritmo é alimentado com 9 pontos construídos a partir de um hipercubo latino ótimo (iteração 0 – DOE) e posteriormente é alimentado, iterativamente, com 18 pontos de preenchimento. Os pontos de preenchimento (representados a cada iteração pelo ponto azul) são escolhidos com base na maximização da *melhoria esperada* (Equação 5.4). Nota-se que já na sétima iteração, o algoritmo adiciona um ponto de preenchimento próximo de um dos três mínimos globais (com um erro menor do que 1% em relação a \mathbf{x}_{\min_3}). Com isso, o algoritmo “se satisfaz” com aquela região e volta a explorar regiões menos conhecidas (parcela da variância domina a busca). Até que, na iteração número 13, um ponto de preenchimento próximo do segundo mínimo global é adicionado. Devido à constante alternância entre minimização local e busca em regiões desconhecidas, o EGO, em apenas 18 acessos, “visita” todos os três mínimos globais com um erro inferior a 0,1%. Além disso, é notável a pouca fidelidade do metamodelo apenas com os pontos iniciais, contudo, à medida que novos pontos de preenchimento são adicionados, o metamodelo torna-se praticamente idêntico à função objetivo em todo o domínio.

EGO com restrição simples

Para ilustrar o funcionamento do EGO com restrições, inicialmente escolhe-se uma restrição simples, definida como o produto das duas variáveis de projeto devendo ser maior ou igual a 0,2. Dessa maneira, o problema de otimização pode ser definido da

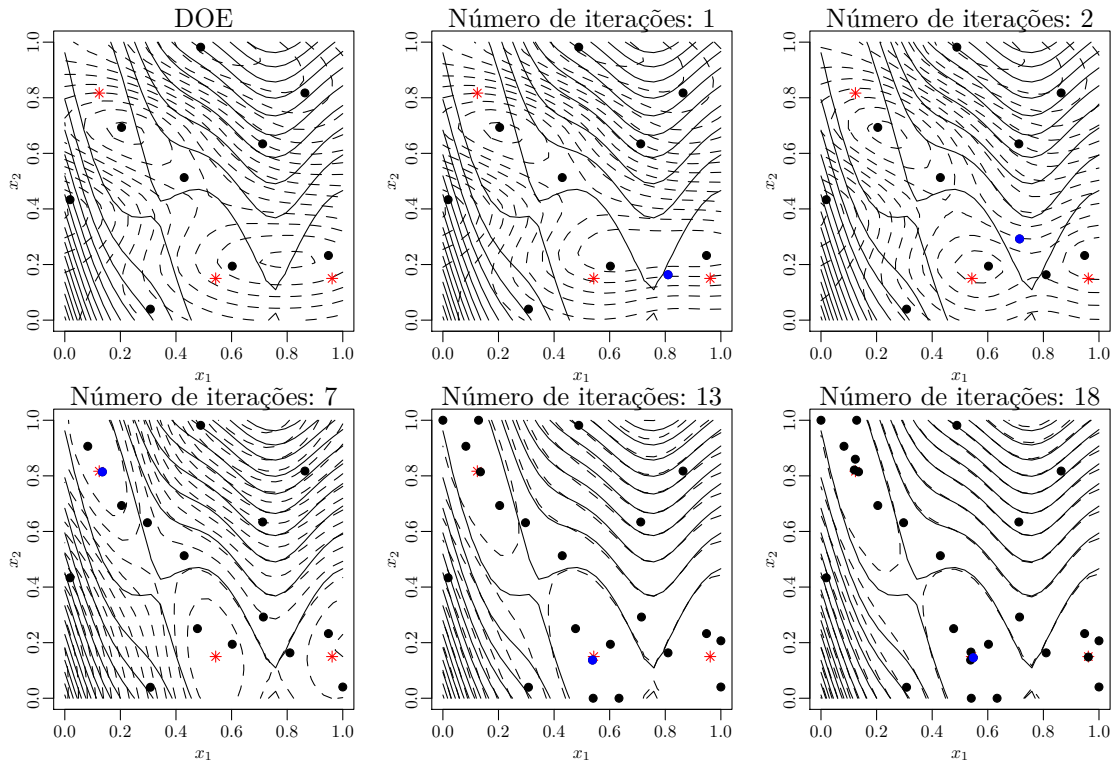


Figura 5.12 – Otimização global da função Branin-Hoo.

maneira padrão como:

$$\begin{aligned}
 &\text{encontrar: } \{x_1, x_2\} \in [0, 1]^2, \\
 &\text{que minimiza: } \text{branin}(x_1, x_2), \\
 &\text{sujeito a: } 0,2 - x_1x_2 \leq 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

A otimização pode ser realizada em um terminal do **R** utilizando o Código 5.2.

Código 5.2 – EGO com restrição simples para a função Branin-Hoo.

```

f <- test_fun$Branin
g <- function(x) 0.2 - prod(x)
doe <- data.frame(optimumLHS(6,2))
names(doe) <- c('x1','x2')
res_f <- apply(doe, 1, f)
res_g <- apply(doe, 1, g)
F <- km(design=doe, response=res_f)
G <- km(design=doe, response=res_g)
for (i in 1:6){
  x_star <- max_cEI(F, c.models=list(G), lower=c(0,0), upper=c(1,1))$par
  y_star_f <- f(x_star)
  y_star_g <- g(x_star)
  F <- km(design=rbind(F@X, x_star), response=c(F@y, y_star_f))
  G <- km(design=rbind(G@X, x_star), response=c(G@y, y_star_g))
}

```

A Figura 5.13 mostra as regiões factível (em preto) e não-factível (em vermelho), bem como o mínimo global restrito (asterisco vermelho).

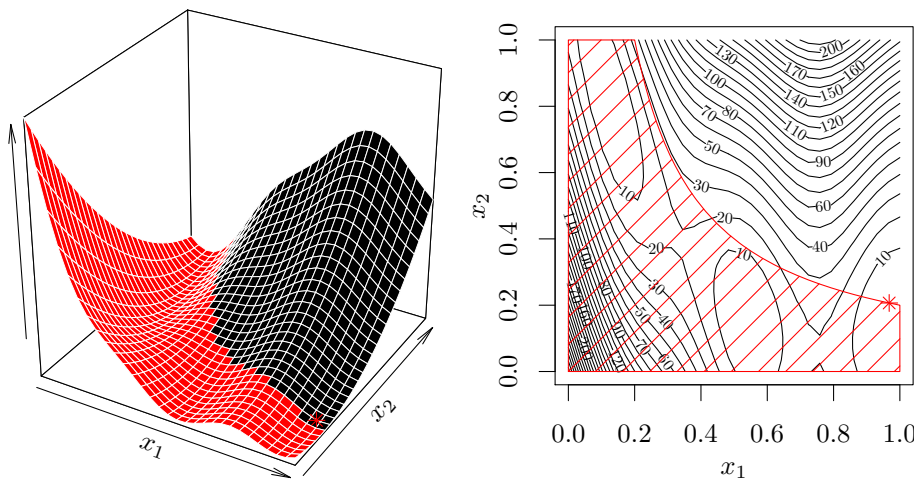


Figura 5.13 – Função Branin-Hoo com restrição

Analogamente ao realizado no problema sem restrições, um hipercubo latino quase-ótimo é gerado para uma estimativa inicial do metamodelo. Contudo, neste exemplo, são destinadas apenas 6 avaliações para o DOE, representadas na Figura 5.14 pela “iteração DOE”. Nas demais iterações, pontos de preenchimento (em azul) são adicionados ao metamodelo pela maximização da *melhoria esperada restrita* (Equação 5.5).

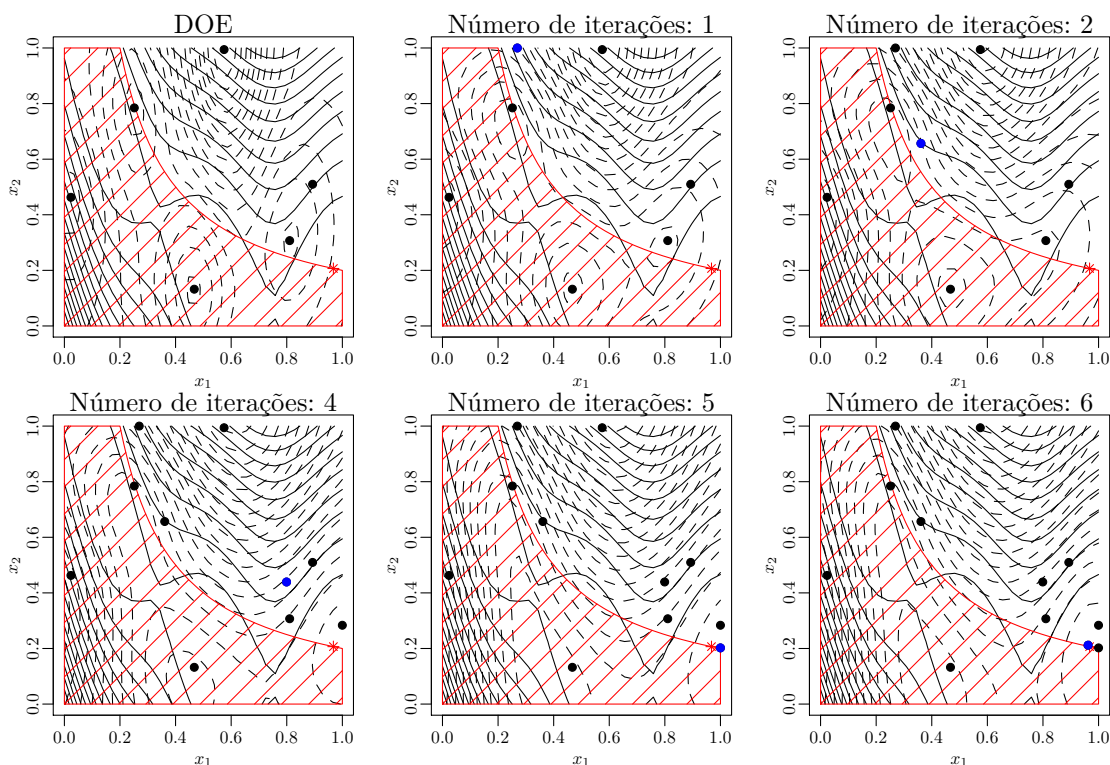


Figura 5.14 – Otimização global da função Branin-Hoo com restrição simples.

Com exceção de 3 dos 6 pontos do DOE, nenhum outro ponto não factível foi avaliado, ou seja, todos os pontos de preenchimento foram colocados em uma região factível. Como é mostrado no exemplo a seguir, isso nem sempre ocorre, pois, inicialmente, o metamodelo não tem fidelidade suficiente para garantir que as restrições sejam atendidas.

EGO com restrição desconexa

Neste exemplo, otimiza-se a mesma função objetivo (Branin-Hoo), porém com uma região factível composta por quatro pequenas regiões desconexas definidas pela função teste Griewank. O problema de minimização da função Branin-Hoo com a restrição de que a função Griewank seja maior ou igual a 1,6 pode ser descrito na forma padrão como:

$$\begin{aligned} \text{encontrar: } & \{x_1, x_2\} \in [0, 1]^2, \\ \text{que minimiza: } & \text{branin}(x_1, x_2), \\ \text{sujeito a: } & 1,6 - \text{griewank}(x_1, x_2) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

O problema de otimização pode ser executado em um terminal do **R** utilizando o Código 5.3.

Código 5.3 – EGO com restrição desconexa para a função Branin-Hoo.

```
f <- test_fun$Branin
g <- function(x) 1.6 - test_fun$Griewank(x*10-5)
doe <- data.frame(optimumLHS(6,2))
names(doe) <- c('x1', 'x2')
res_f <- apply(doe, 1, f)
res_g <- apply(doe, 1, g)
F <- km(design=doe, response=res_f)
G <- km(design=doe, response=res_g)
for (i in 1:6){
  x_star <- max_cEI(F, c.models=list(G), lower=c(0,0), upper=c(1,1))$par
  y_star_f <- f(x_star)
  y_star_g <- g(x_star)
  F <- km(design=rbind(F@X, x_star), response=c(F@y, y_star_f))
  G <- km(design=rbind(G@X, x_star), response=c(G@y, y_star_g))
}
```

A Figura 5.15 mostra as regiões factível (em preto) e não-factível (em vermelho), bem como o mínimo global restrito (asterisco vermelho).

Assim como no exemplo anterior, o DOE é constituído por 6 pontos. Contudo, neste exemplo, nenhum desses pontos é factível, o que causa a Equação 5.6 retornar o valor 1 ($\nexists \mathbf{y}_{\min}^F$). Dessa maneira, a Equação 5.5 é dominada pelo termo das restrições e o algoritmo busca um projeto que tenha a maior probabilidade de ser factível. Para as duas primeiras iterações, o critério de preenchimento se aproxima gradativamente da fronteira real da restrição. Na sequência, o EGO utiliza mais dois pontos de preenchimento na região factível recém encontrada e depois inicia uma busca de uma nova região factível, encontrando-a na quinta iteração. Essa segunda região factível é próxima do mínimo global e o EGO rapidamente o encontra na iteração 9.

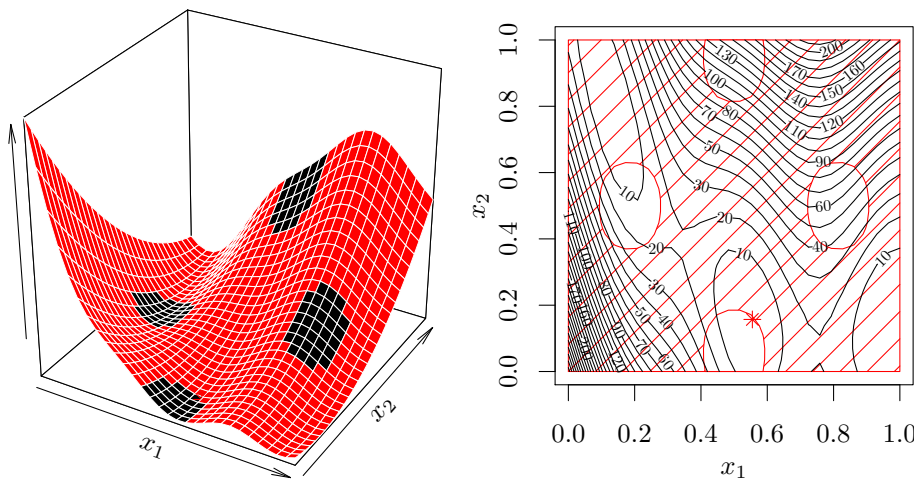


Figura 5.15 – Função Branin-Hoo com restrição desconexa.

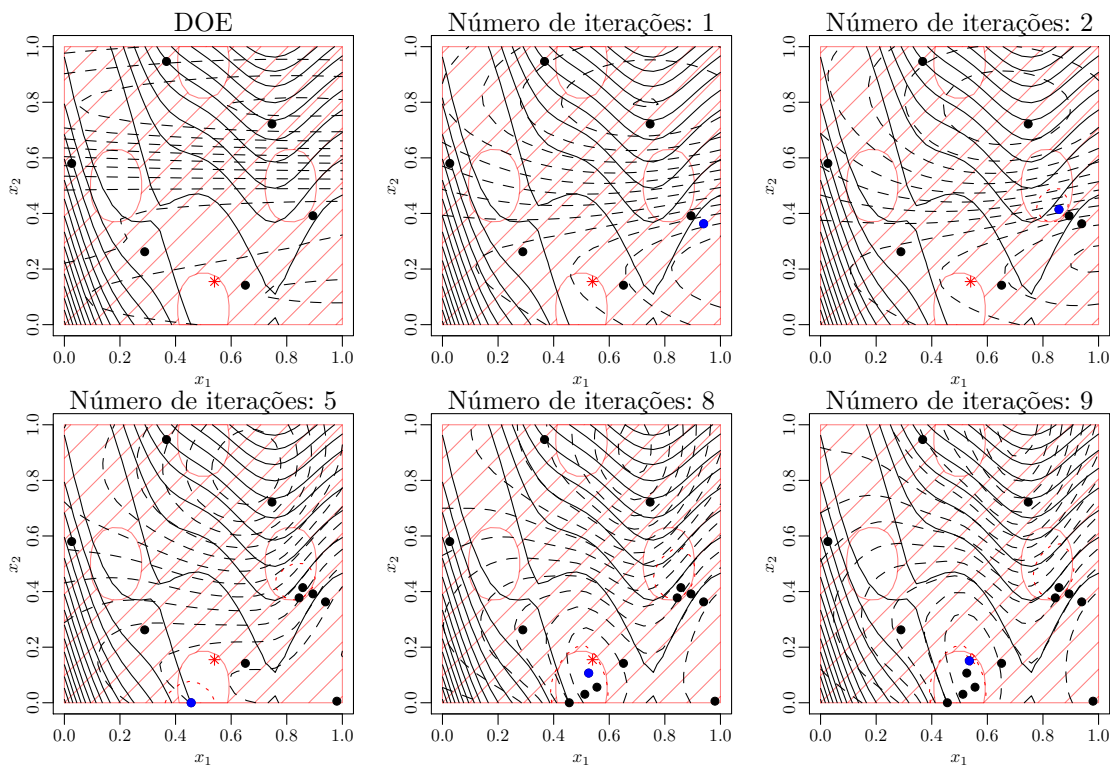


Figura 5.16 – Otimização global da função Branin-Hoo com restrição simples.

EGO multiobjetivo

Este exemplo destina-se a construir a frente de Pareto para o espaço resposta de minimização sem restrição de ambas as funções teste apresentadas (Branin-Hoo e Griewank). O problema pode ser escrito na forma padrão como a otimização de uma função custo que varia com um parâmetro escalar α (peso) a cada iteração do EGO:

$$\begin{aligned} \text{encontrar: } & \{x_1, x_2\} \in [0, 1]^2, \\ \text{que minimiza: } & f(x_1, x_2, \alpha) = (\alpha)\text{branin}(x_1, x_2) + 100(1 - \alpha)\text{griewank}(x_1, x_2), \quad (5.15) \end{aligned}$$

onde $\alpha = (\underbrace{0.000, \dots, 0.000}_{\times 20}, 0.025, 0.050, \dots, 0.975, 1.000)$. Para melhorar o desempenho do algoritmo, a função Griewank foi multiplicada por 100, com o objetivo de fazer sua amplitude de resposta similar a da função Branin-Hoo.

Por ser o problema de maior complexidade demonstrado neste capítulo, a otimização multiobjetivo parte de um DOE com 10 pontos e adiciona iterativamente 60 pontos de preenchimento. Inicialmente, o EGO encontra 20 pontos de preenchimento otimizando apenas a função Griewank pois $\alpha = 0$. Posteriormente, o valor de α é incrementado de 0,025 a cada iteração até, após 40 novos pontos de preenchimentos, atingir o valor 1. O algoritmo computacional usado nesta otimização pode ser visto no Código 5.4

Código 5.4 – EGO em otimização multiobjetivo das funções Branin-Hoo e Griewank.

```
f_1 <- function(x) test_fun$Branin(x)
f_2 <- function(x) test_fun$Griewank(10*x+5)*100
doe <- data.frame(optimumLHS(10,2))
names(doe) <- c('x1','x2')
r_1 <- apply(doe, 1, f_1)
r_2 <- apply(doe, 1, f_2)
data <- cbind(doe,data.frame(r1=r_1,r2=r_2))
alpha <- c(rep(0,19),seq(0,1,,41))
F <- km(design = doe, response = alpha[1]*r_1 + (1-alpha[1])*r_2)
for(i in 1:length(alpha)){
  x_star <- max_EI(F, lower=rep(0,d), upper=rep(1,d))$par
  r_1 <- c(data$r1,f_1(x_star))
  r_2 <- c(data$r2,f_2(x_star))
  F <- km(design = rbind(F@X,x_star), response = alpha[i]*r_1 + (1-alpha[i])*r_2)
  data <- cbind(F@X,data.frame(r1=r_1,r2=r_2))
}
```

Algumas iterações do processo de otimização podem ser visualizadas na Figura 5.17. A linha em vermelho representa a frente de Pareto “real”, obtida pela avaliação de ambas as funções em uma malha de 40000 pontos igualmente espaçados no domínio proposto $[0,1]^2$ (incremento de aproximadamente 0,005 em cada variável). Os pontos cheios representam os projetos que fazem parte do conjunto de Pareto obtidos pelo EGO e, sem preenchimento, os demais projetos avaliados.

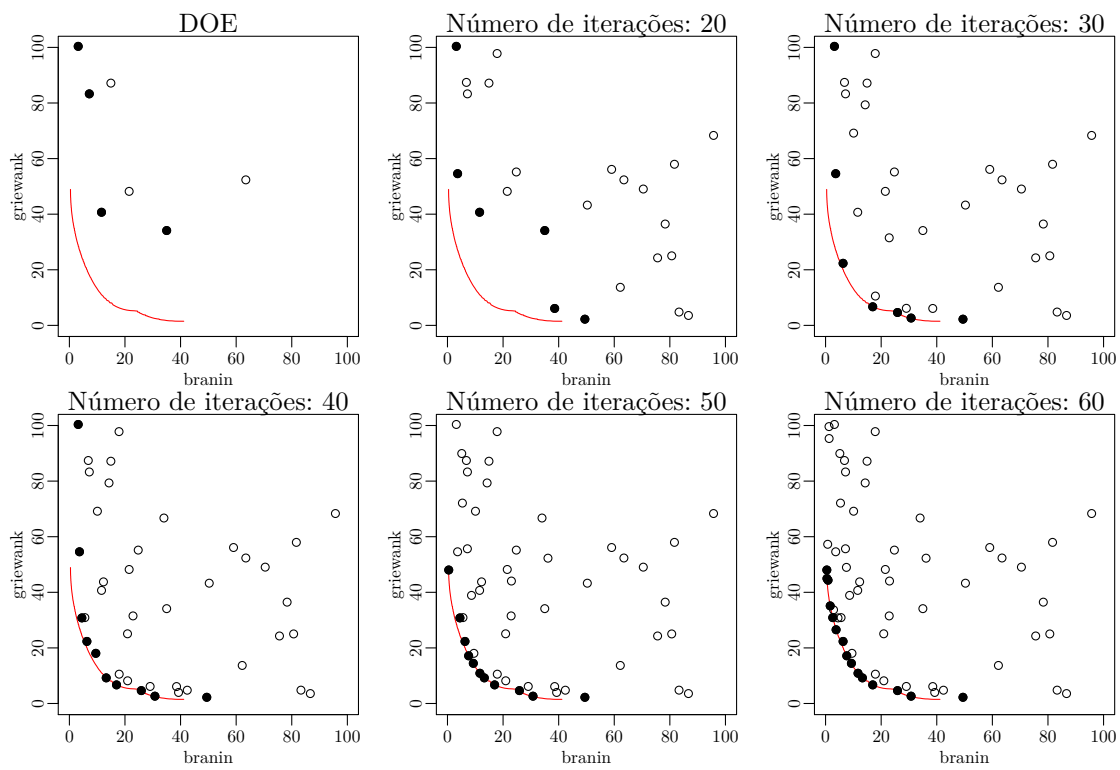


Figura 5.17 – Evolução da construção da frente de Pareto na otimização multiobjetivo das funções Branin-Hoo e Griewank.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados três casos de otimização da orientação de fibras curvas em estruturas compósitas, sendo dois para validação da metodologia e um problema proposto. Os problemas escolhidos são considerados representativos (representam problemas reais de engenharia). Dentre os problemas de validação, um outro fator decisivo na escolha foi a reprodutibilidade (referência fornece todos os dados necessários para a reprodução dos resultados). Os casos estudados podem ser resumidos como:

Validação 1: caso simples de uma placa quadrada com um furo central onde é maximizada a carga de flambagem. Esse problema é apresentado em [Lopes et al. \(2010\)](#);

Validação 2: caso com geometria mais complexa que consiste em um painel reforçado e pode ser visto em [Liu et al. \(2005\)](#). Também nesse caso é maximizada a carga de flambagem;

Laminado Reforçado com Furo Oblongo: estrutura reforçada e com furo oblongo que se assemelha a uma seção de fuselagem de aeronaves comerciais. Para esse caso, três problemas de otimização são propostos:

1. Maximização da carga crítica de flambagem sob carregamento de compressão uniaxial;
2. Minimização do deslocamento máximo devido a uma pressão uniforme sujeito a restrições de flambagem por compressão uniaxial e de falha pelo critério de Tsai-Wu devido à pressão aplicada;
3. Maximização multiobjetivo das cargas críticas de flambagem de carregamentos de compressão uniaxial e cisalhamento.

Em todos os problemas o algoritmo eficiente de otimização global é empregado com um critério de parada de 60 avaliações do modelo de alta fidelidade. Esse critério de parada foi imposto com o intuito de se obter um baixo custo computacional, realístico à aplicações tecnológicas (da ordem de poucas horas para o processo completo de otimização). Dos 60 acessos, 20 são gastos no DOE para a construção do metamodelo inicial e os demais destinados ao refino iterativo do metamodelo, resultando em uma razão de 1/3 entre o número de amostras desses dois conjuntos, conforme sugerida por [Forrester et al. \(2008\)](#). O tempo computacional total do processo de otimização não é computado devido à grande diferença entre os tempos de obtenção da resposta do modelo de alta fidelidade (elementos finitos) e os tempos associados à construção e otimização dos metamodelos (aproximadamente 100 vezes menor). Dessa maneira, o número de acessos à função custo é diretamente utilizado como métrica direta para avaliação dos algoritmos.

Em todos os laminados com fibras curvas, a parametrização definida pela Equação 3.1 com *offset* na direção y é usada. Devido ao uso da técnica de elementos finitos,

o mapeamento da variação contínua da orientação das fibras é feito de forma discreta. Calcula-se a orientação das fibras no centroide de cada elemento e aplica-se esta orientação para o elemento como um todo. Em outras palavras, cada elemento possui uma única orientação principal reta das fibras. Neste trabalho, não se realizou uma análise da influência do número de elementos na precisão do resultado encontrado e para os casos de validação, uma malha similar a encontrada na literatura foi empregada.

6.1 CASO DE VALIDAÇÃO 1

Nesta seção, um problema encontrado em [Lopes et al. \(2010\)](#) é estudado com o objetivo de validação da metodologia proposta. O problema consiste em uma placa com um furo central sujeita a deslocamento axial prescrito em uma de suas arestas.

A Figura 6.1 mostra, em (a), o modelo de elementos finitos empregado e, em (b), a geometria da placa tal como as condições de contorno, onde v e w representam os deslocamentos nas direções y e z , respectivamente. O modelo de alta fidelidade é construído com elementos de casca com 4 nós e 6 graus de liberdade por nó (ANSYS SHELL181). O elemento SHELL181 é um elemento de casca semi-espessa, com formulação mista, assumindo um campo de deformação cisalhante para controle do *locking* ([BATHE; DVORKIN, 1986](#)).

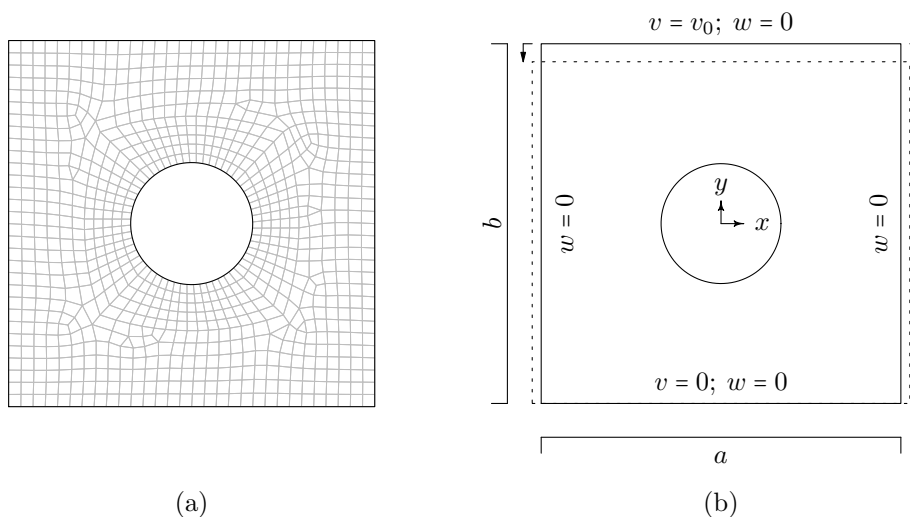


Figura 6.1 – Modelo e condições de contorno utilizados no primeiro caso de validação: (a) Modelo de elementos finitos, (b) geometria e condições de contorno ($a = b = 1000$ mm, diâmetro do furo = $a/3$).

Carregamento crítico de flambagem e rigidez médios

Apesar do carregamento aplicado ser um deslocamento prescrito constante v_0 (ao invés de uma força distribuída constante), pode-se obter o esforço de flambagem crítico

médio N_{cr}^{av} em termos de força por unidade de comprimento por:

$$N_{cr}^{av} = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} N_{y,cr}(x, b/2) dx, \quad (6.1)$$

onde $N_{y,cr}(x, y)$ é o esforço resultante normal por unidade de comprimento N_y (resultante do deslocamento aplicado v_0) multiplicado pelo menor dos autovalores λ encontrado, i.e.: $N_{y,cr}(x, y) = \lambda N_y(x, y)$.

Além disso, é computado o módulo de elasticidade equivalente do painel na direção y , dividindo o valor médio das tensões normais (N_{cr}^{av}/t) pela deformação prescrita (v_0/b),

$$E_y^{eq} = \frac{b}{t a v_0} \int_{-a/2}^{a/2} N_y(x, b/2) dx, \quad (6.2)$$

onde t é a espessura total do laminado.

Para facilitar a comparação dos resultados, a carga crítica e a rigidez média são adimensionalizadas conforme os trabalhos de [Gürdal e Olmedo \(1993\)](#), [Gürdal et al. \(2008\)](#) e [Lopes et al. \(2010\)](#). A carga crítica de flambagem é dividida por aquela de uma placa isotrópica sob mesmo carregamento com módulo de elasticidade igual a E_1

$$N_{cr}^* = \frac{N_{cr}^{av} b^2}{E_1 t^3}, \quad (6.3)$$

e o módulo equivalente do laminado é normalizado pelo módulo de elasticidade de uma lâmina na direção longitudinal.

$$E_y^* = \frac{E_y^{eq}}{E_1}. \quad (6.4)$$

Formulação do problema

A placa é composta por 24 camadas do compósito carbono-epoxy, com empilhamento balanceado e simétrico, assim apenas as orientações de 6 camadas são determinadas no processo de otimização (com duas variáveis por camada). As propriedades elásticas da lâmina utilizadas em [Lopes et al. \(2010\)](#) são fornecidas em [Jegley et al. \(2003\)](#) e reproduzidas na Tabela 6.1. A espessura de cada camada é de 0,2 mm.

Tabela 6.1 – Propriedades elásticas da lâmina HexTowAS4/CYCOM977-3.

Propriedade	E_1	E_2	G_{12}	ν_{12}
Valor	129,8 GPa	9,2 GPa	5,1 GPa	0,36

O problema de otimização consiste em encontrar os parâmetros T_0 e T_1 de cada uma das 6 camadas independentes do laminado que maximizem a carga crítica de flambagem normalizada (N_{cr}^*) e pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \text{encontrar} \quad & \{T_0^{(k)}, T_1^{(k)}\}; \quad (k = 1, \dots, 6) \{T_0^{(k)}, T_1^{(k)}\} \in [0, 90] \\ \text{que maximiza:} \quad & N_{cr}^*(T_0^{(k)}, T_1^{(k)}). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Para avaliar o desempenho do algoritmo EGO implementado no presente trabalho, foram comparadas cinco técnicas de otimização:

Fibras curvas – LOP: Os ângulos de laminação curva (T_0 e T_1) foram variados de 5 em 5 graus para a primeira camada e repetidos para as demais, formando um laminado do tipo $[\pm\langle T_0|T_1 \rangle_6]_S$. A “otimização” consiste na busca exaustiva de uma malha fina em duas variáveis totalizando 361 acessos à função objetivo. A abordagem é idêntica a proposta em (LOPES et al., 2010) contudo, há pequenas divergências no modelo de elementos finitos. Lopes et al. (2010) considera uma contração térmica de $-137,5^\circ\text{C}$ anterior à aplicação do carregamento, o que eleva significativamente a carga crítica de flambagem encontrada. Infelizmente, não foi possível a reprodução dessa etapa, assim, não se comparou diretamente os resultados obtidos em Lopes et al. (2010) com os do presente trabalho. Ao invés disso, repetiu-se a metodologia empregada em Lopes et al. (2010) usando o modelo de elementos finitos desenvolvido nesta dissertação.

Fibras retas – SFI: O ângulo de laminação foi variado de 5 em 5 graus para a primeira camada e repetidos para as demais formando um laminado do tipo $[\pm T_6]_S$. A “otimização” consiste na busca exaustiva de uma malha fina em uma variável totalizando 19 acessos à função objetivo e corresponde aos laminados do tipo $[\pm\langle T_0|T_1 \rangle_6]_S$ previamente calculados onde $T_0 = T_1$.

Fibras curvas – LHS: Os ângulos de laminação curva foram definidos a partir de um hipercubo latino quase-ótimo de 60 pontos em 12 variáveis garantido razoável representatividade do espaço solução. Essa abordagem serve como linha base para avaliar a qualidade dos resultados obtidos e representa uma escolha “aleatória” dos pontos amostrais (i.e., qualquer otimização deve, na média, ser melhor do que uma escolha aleatória de pontos para ser considerada “eficiente”). Os laminados formados são do tipo $[\pm\langle T_0|T_1 \rangle^{(1,\dots,6)}]_S$.

Fibras curvas – GEN: Os ângulos de laminação curva foram definidos com base no algoritmo de otimização genética *genoud* sem o uso de derivadas com tamanho de população de 10 indivíduos que se desenvolvem por 6 gerações. O número total de indivíduos gerados é de 70 (10 iniciais e mais 60 nas gerações subsequentes), contudo, devido à configuração do algoritmo, o número médio de indivíduos únicos é aproximadamente 60 e, conseqüentemente, uma média de 60 avaliações da função objetivo são realizadas. Os laminados formados são do tipo $[\pm\langle T_0|T_1 \rangle^{(1,\dots,6)}]_S$.

Fibras curvas – EGO: Os ângulos de laminação curva foram definidos pelo algoritmo eficiente de otimização, descrito no fluxograma da Figura 5.6. O algoritmo acessa 60 vezes a função objetivo sendo 20 pontos destinados à construção de um hipercubo latino e 40 para o processo de maximização iterativa da melhoria esperada. Os laminados formados são do tipo $[\pm\langle T_0|T_1 \rangle^{(1,\dots,6)}]_S$.

Em todos os casos são computados dois valores: N_{cr}^* e E_y^* . Contudo, a otimização

é realizada considerando apenas o critério de flambagem (N_{cr}^*).

Resultados

A Figura 6.2 mostra resultados obtidos de N_{cr}^* versus E_y^* usando as diferentes estratégias de otimização. Para cada algoritmo, 25 execuções independentes foram conduzidas com o objetivo de avaliar a robustez dos métodos. No gráfico, os pontos representam o melhor resultado encontrado em cada uma das execuções independentes.

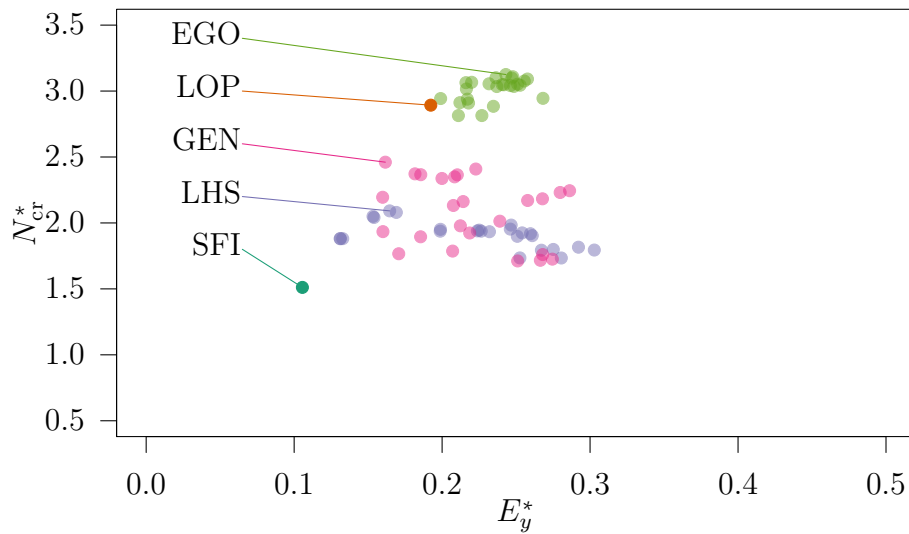


Figura 6.2 – Maiores N_{cr}^* encontrados com uso de diferentes técnicas de otimização após 25 execuções independentes para o caso de Validação 1.

A Tabela 6.2 mostra a sequência de laminação obtida para o melhor ponto de cada técnica. Note que para o laminado com fibras retas a carga crítica de flambagem é maximizada quando todas as camadas são orientadas a $\pm 45^\circ$, o que é consistente com valores encontrados na literatura (GÜRDAL et al., 2008; LOPES et al., 2010). Para o laminado de rigidez variável, o melhor resultado encontrado em Lopes et al. (2010) é marcado na Figura 6.2 como LOP e possui empilhamento $[\pm(00.0|75.0)_6]_S$.

Tabela 6.2 – Melhores N_{cr}^* encontrados e correspondentes empilhamentos e E_y^* para o caso de Validação 1.

	Sequência de laminação	N_{cr}^*	E_y^*
SFI	$[\pm(45 45)/\pm(45 45)/\pm(45 45)/\pm(45 45)/\pm(45 45)/\pm(45 45)]_S$	1,511	0,106
LOP	$[\pm(00 75)/\pm(00 75)/\pm(00 75)/\pm(00 75)/\pm(00 75)/\pm(00 75)]_S$	2,893	0,192
LHS	$[\pm(36 43)/\pm(02 42)/\pm(47 47)/\pm(17 62)/\pm(06 87)/\pm(27 03)]_S$	2,082	0,169
GEN	$[\pm(22 54)/\pm(36 30)/\pm(05 78)/\pm(34 39)/\pm(07 61)/\pm(02 83)]_S$	2,463	0,157
EGO	$[\pm(20 50)/\pm(10 70)/\pm(05 80)/\pm(00 90)/\pm(00 90)/\pm(00 90)]_S$	3,108	0,247

O processo de otimização direta usando algoritmos genéticos (GEN) demonstrou desempenho modesto quando comparada com uma escolha de pontos quase-aleatória

(LHS). Além disso, a baixa robustez que pode ser observada pela alta dispersão das repostas desencoraja o uso do método. Portanto, para um pequeno número de avaliações da função objetivo como é a proposta deste trabalho, o uso direto deste algoritmo não é recomendado. EGO teve o melhor desempenho entre os diferentes métodos, e encontrou um laminado com uma carga de flambagem superior ao proposto por [Lopes et al. \(2010\)](#) ($N_{cr}^* = 3,108$ contra $N_{cr}^* = 2,893$, um aumento de 7,43%).

A melhoria na carga de flambagem, quando comparada com [Lopes et al. \(2010\)](#), se deve principalmente à maior flexibilidade de projeto resultante do aumento do número de variáveis (2 vs. 12). Dessa maneira, é possível adequar o laminado ao carregamento de maneira mais eficiente. As camadas mais externas se aproximam de 45° com intuito de prevenir uma flambagem global da placa. Enquanto isso, as camadas internas se orientam em $[\pm\langle 00.0|90.0 \rangle]$ causando aumento local da rigidez próximo às arestas livres e aliviando o esforço na região central, prevenindo dessa maneira uma flambagem local. Esse comportamento também é observado e discutido em [Lopes et al. \(2010\)](#). A Figura 6.3 mostra duas lâminas, (a mais externa e a mais interna) com a representação das melhores orientações das fibras encontradas pelo EGO.

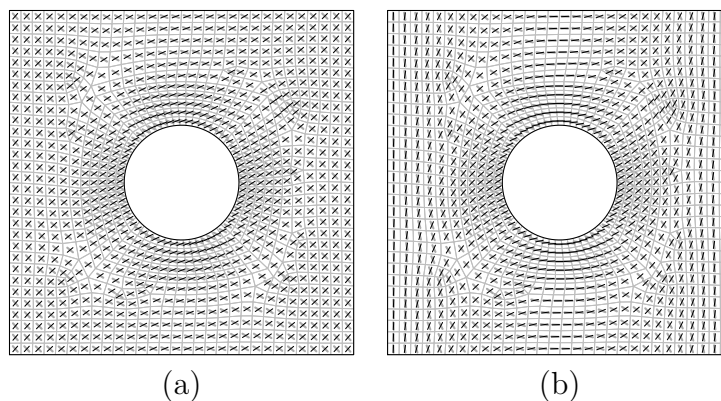


Figura 6.3 – Melhores orientações encontradas pelo EGO para o Caso de Validação 1. (a) camada mais externa $[\pm\langle 20|50 \rangle]$ e (b) camada mais interna $[\pm\langle 00|90 \rangle]$.

6.2 CASO DE VALIDAÇÃO 2

Esta seção aborda a otimização estrutural de um painel reforçado e tem papel de validação da metodologia com base nos resultados reportados em [Liu et al. \(2005\)](#).

Formulação do Problema

O problema de otimização proposto consiste em encontrar os parâmetros T_0 e T_1 , para cada uma das n camadas independentes, que maximizam a força crítica de flambagem

(P_{cr}) :

$$\begin{aligned} &\text{encontrar } \{T_0^{(k)}, T_1^{(k)}\}; \quad (k = 1, \dots, 6 | \{T_0^{(k)}, T_1^{(k)}\} \in [0, 90]) \\ &\text{que maximiza } P_{cr}(T_0^{(k)}, T_1^{(k)}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Com objetivo de avaliar a melhoria de desempenho pelo uso de fibras curvas, em comparação a fibras retas, uma solução “praticamente” ótima é encontrada usando apenas orientações comerciais de fibras retas (0, 45 e 90 graus). Esse ótimo é encontrado por meio de uma busca exaustiva das 729 possibilidades de projeto ($[0_2, \pm 45, 90_2]^6$).

A estrutura, cujo perfil pode ser visto na Figura 6.4, é composta de uma casca e dois reforços em formato de “T” invertido. Os reforços, por sua vez, são fabricados unindo-se dois perfis em “L” e pela aplicação de uma camada extra na interface entre o reforço e a casca (linha em negro).

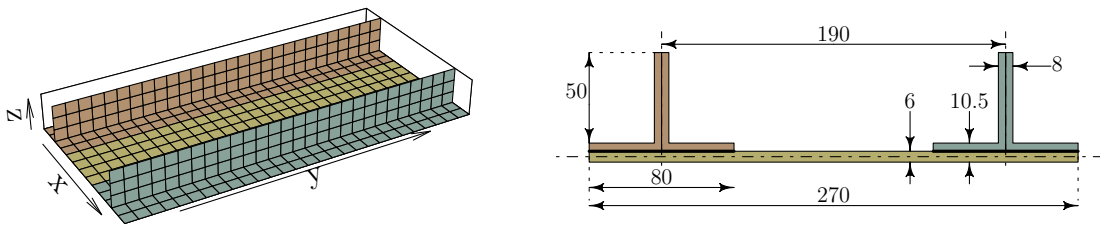


Figura 6.4 – Modelo utilizado para obtenção da resposta de alta fidelidade (dimensões em mm).

As partes que compõem a estrutura são:

Casca: laminado balanceado e simétrico com um total de 24 camadas ($270 \text{ mm} \times 550 \text{ mm}$) com fibras curvas nas orientações $[\pm \langle T_0 | T_1 \rangle^{(1, \dots, 6)}]_S$;

Reforço: duplo perfil “L” ($54 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$) feitos de 16 camadas: $[45/0/-45/0_3/90/0]_S$;

União dos reforços: tira plana ($80 \text{ mm} \times 550 \text{ mm}$) feita de 2 camadas balanceadas a 45° : $[\pm 45]$.

Apenas as orientações das fibras da casca são otimizadas, ou seja, as orientações de 6 camadas independentes devem ser encontradas, totalizando 12 variáveis de projeto. A espessura de cada camada do laminado (para todas as partes) é de 0,25 mm e as propriedades elásticas do material usado estão listadas na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Propriedades elásticas de uma lâmina de carbono-epoxy para o Caso de Validação 2.

Propriedade	E_1	E_2	G_{12}	ν_{12}
Valor	117 GPa	17 GPa	4,6 GPa	0,3

Além da geometria, a Figura 6.4 mostra também a malha usada para a obtenção da resposta da carga de flambagem. O modelo é criado usando os softwares ANSYS

mechanical (ANSYS, 2015b) e ANSYS *Composite PrepPost* (ANSYS, 2015a). Para evitar a necessidade do uso de elementos de contato na interface casca-reforços, a ferramenta “ShareTopo” do ANSYS *DesignModeler* é usada para unir as arestas comuns de maneira que todas as superfícies são combinadas em um único corpo de superfície. Assim, a região entre a casca e os reforços compartilham todos os graus de liberdade (pois compartilha mesmos nós) e o efeito de delaminação não é considerado. Todos os elementos usados são do tipo casca com 4 nós e 6 graus de liberdade por nó (ANSYS SHELL181) e o número total de nós é 520.

A Figura 6.5 mostra as condições de contorno impostas ao modelo, onde u , v e w representam os deslocamentos nas direções x , y , e z , respectivamente, e θ_x e θ_y as rotações em torno dos eixos x e y , respectivamente. Três condições de contorno de compressão uniaxial são consideradas: (a) força prescrita simétrica, (b) força prescrita assimétrica e (c) deslocamento prescrito simétrico.

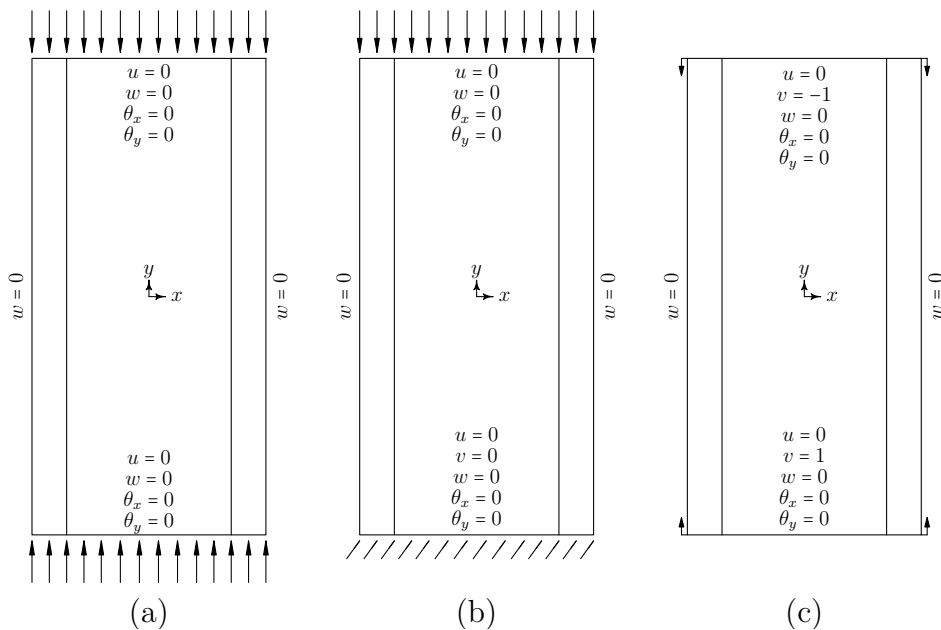


Figura 6.5 – Condições de contorno aplicadas no modelo de alta fidelidade: (a) força prescrita simétrica, (b) força prescrita assimétrica e (c) deslocamento prescrito simétrico.

Mesmo para a situação (c) (deslocamento prescrito uniforme ao longo das arestas mais curtas), o esforço de flambagem deve ser expresso em termos de força para poder ser comparado com os demais. Dessa maneira, a força crítica de flambagem P_{cr} em (c) é computada conforme a equação

$$P_{cr} = \int_{-a/2}^{a/2} N_{y,cr}(x, b/2) dx, \quad (6.7)$$

onde a é o comprimento da aresta mais curta do painel e $N_{y,cr}$ é computado de maneira igual à Equação 6.1. Para as demais condições de contorno, a carga crítica de flambagem

é obtida apenas pela multiplicação do carregamento aplicado pelo menor autovalor obtido do problema de flambagem linear.

Resultados

As melhores orientações obtidas podem ser vistas na Tabela 6.4 tal como a resposta em flambagem. Na tabela, a linha base (laminado ensaiado em Liu et al. (2005)) é designada por BL e (a), (b) e (c) representam cada uma das condições de contorno analisadas. As melhores orientações obtidas para a otimização com fibras retas são designadas por SF e foram as mesmas para todas as condições de contorno (obtendo apenas diferentes respostas da carga de crítica de flambagem). O melhor resultado obtido pela otimização (EGO e 60 avaliações da função custo) com uso da parametrização curva pode ser visto em CF. É notável a melhoria da carga de flambagem obtida com o uso de fibras curvas quando comparada com as fibras retas otimizadas: 18,7%, 18,5% e 17,6% de melhoria foi observado para cada uma das condições de contorno, (a), (b) e (c), respectivamente.

A solução ótima mostrou-se pouco sensível em relação à variação das condições de contorno apresentando coeficientes de variação¹ de 0,74%, 0,86% e 0,73% para cada condição de contorno, respectivamente. Em um procedimento experimental, Liu et al. (2005) obtiveram, para o laminado base, um valor de carga crítica de flambagem de 1160 kN, muito próximo do valor encontrado na simulação numérica aqui realizada.

Tabela 6.4 – Melhores resultados obtidos para as três condições de contorno.

Alg.	C.C.	Sequência de empilhamento	P_{cr} [kN]
BL	a	$[\pm 45/90_2/0/90/\pm 45/90_2/0/90]_S$	1171,1
BL	b	$[\pm 45/90_2/0/90/\pm 45/90_2/0/90]_S$	1179,5
BL	c	$[\pm 45/90_2/0/90/\pm 45/90_2/0/90]_S$	1204,7
SF	a	$[\pm 45_4/0_2/90_2]_S$	1477,3
SF	b	$[\pm 45_4/0_2/90_2]_S$	1443,4
SF	c	$[\pm 45_4/0_2/90_2]_S$	1428,6
CF	a	$[\pm \langle 00 90 \rangle / \pm \langle 20 90 \rangle / \pm \langle 13 10 \rangle / \pm \langle 34 90 \rangle / \pm \langle 34 90 \rangle / \pm \langle 40 90 \rangle]_S$	1738,2
CF	b	$[\pm \langle 19 90 \rangle / \pm \langle 23 84 \rangle / \pm \langle 39 90 \rangle / \pm \langle 42 87 \rangle / \pm \langle 28 90 \rangle / \pm \langle 37 86 \rangle]_S$	1710,4
CF	c	$[\pm \langle 27 90 \rangle / \pm \langle 25 90 \rangle / \pm \langle 28 90 \rangle / \pm \langle 42 90 \rangle / \pm \langle 31 90 \rangle / \pm \langle 22 82 \rangle]_S$	1679,6

A Figura 6.6 mostra a carga crítica de flambagem normalizada pela carga crítica de flambagem do laminado base em função do número de acessos ao modelo de alta fidelidade para as três situações de condições de contorno. Cada gráfico representa a evolução do algoritmo usando diagramas de caixa. Nestes diagramas, a linha em negrito representa a mediana dos dados, os limites da caixa representam os primeiros e terceiros quartis e as linhas externas representam os limites dos dados observados.

¹ O coeficiente de variação é calculado pela razão entre o desvio padrão e a média.

Cada diagrama é construído usando a população da melhor amostra acumulada para cada uma das 25 execuções independentes. Como diferenciar os pontos do DOE pela ordem em que foram amostrados não faz sentido (as amostras até mesmo poderiam ter sido executadas em paralelo), o primeiro diagrama (mais largo) contém apenas o melhor resultado do projeto inicial de cada uma das 25 execuções independentes. Em resumo, cada diagrama de caixa representa uma população de 25 observações independentemente geradas em cada uma das execuções de otimização.

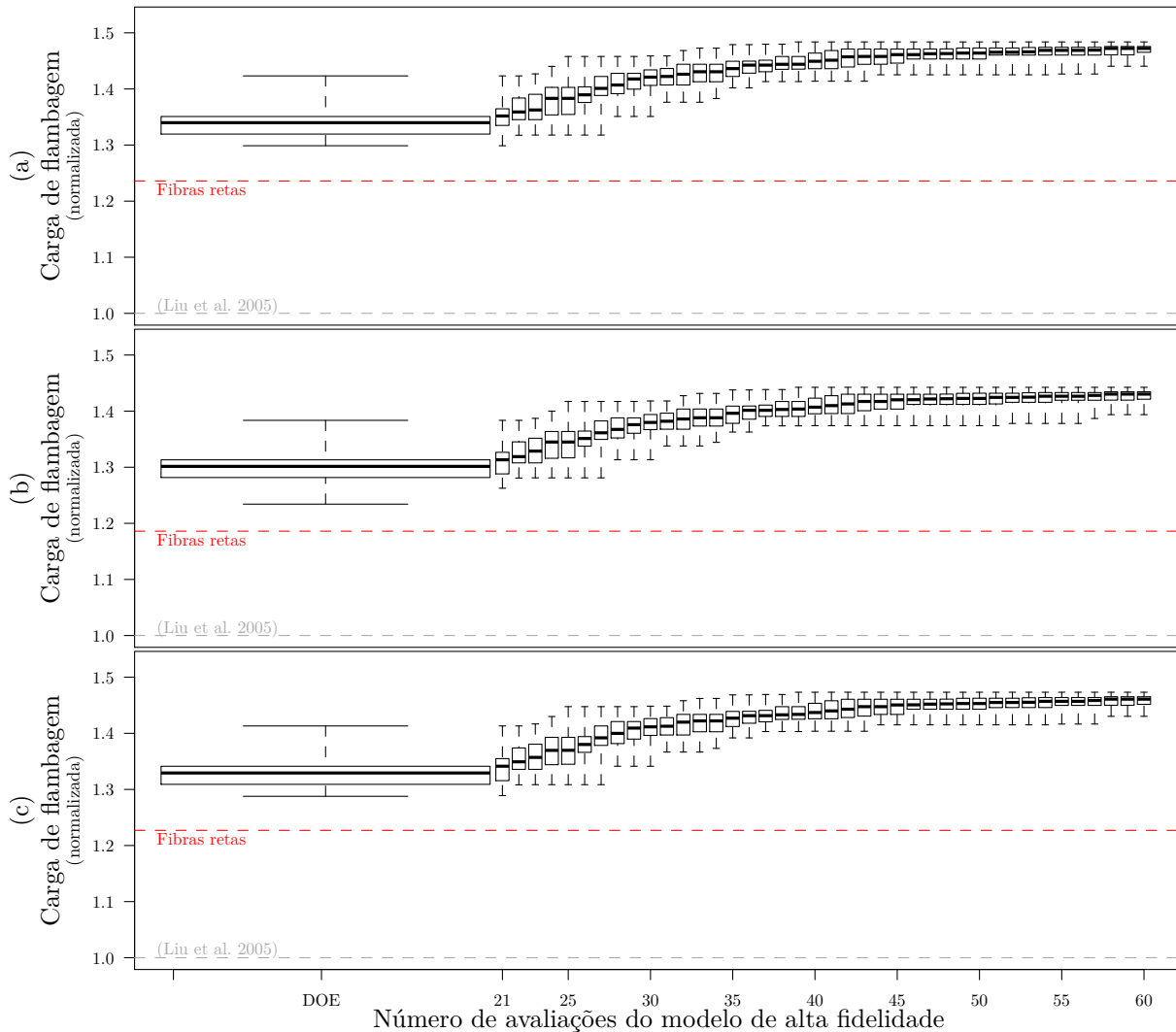


Figura 6.6 – Evolução do algoritmo de otimização para 25 execuções independentes: (a) força prescrita simétrica, (b) força prescrita assimétrica, (c) deslocamento prescrita simétrico.

Pode ser ressaltado que com o uso de fibras curvas obtém-se uma melhoria média de aproximadamente 9% já durante a etapa de avaliação do DOE, quando comparado à solução ótima por fibras retas. Com o aumento de número de pontos experimentais, o algoritmo reduz a dispersão dos resultados de aproximadamente 3% no DOE, para menos de 1% no acesso número 60.

6.3 LAMINADO REFORÇADO COM FURO OBLONGO

Nesta seção é estudado o comportamento mecânico de um painel com um furo oblongo central de dimensões similares às de uma janela na fuselagem de uma aeronave Boeing 787 (467,36 mm × 271,78 mm). Sabe-se que a curvatura do painel influencia significativamente a carga crítica de flambagem, contudo, nesse trabalho, por simplificação o painel é modelado como plano. A estrutura é feita de lâminas de carbono-epoxy de 0,2 mm de espessura, cujas propriedades elásticas e de falha são descritas na Tabela 6.5. Para melhor clareza, o painel pode ser dividido nos seguinte subcomponentes:

Casca: laminado balanceado e simétrico com 24 camadas (600 mm × 1200 mm) com fibras curvas nas orientações a serem determinadas $[\pm\langle T_0|T_1\rangle^{(1,\dots,6)}]_S$;

Reforço horizontal: reforço com perfil “chapéu ômega” (75 mm × 25 mm @ 60°) feito de 8 camadas balanceadas e simétricas com fibras retas e empilhamentos dados por $[\pm 45/0_2]_S$;

Reforço vertical: perfil “C” (15 mm × 60 mm) feito de 8 camadas balanceadas e simétricas com fibras retas e empilhamentos dados por $[\pm 45/0_2]_S$;

Cobertura de união: laminado com duas camadas ($[\pm 45]$) que cobrem ambos os lados do componente para evitar delaminação dos reforços.

Tabela 6.5 – Propriedades elásticas e de falha de lâmina carbono-epoxy em MPa com exceção do coeficiente de Poisson (A simbologia utilizada pode ser lembrada consultando a Tabela 2.1). Valores obtidos em ANSYS (2015a)

Propriedade	E_1	E_2	G_{12}	ν_{12}	X_t	X_c	Y_t	Y_c	S
Valor	121 000	8600	4700	0,27	2231	-1082	29	-100	60

A Figura 6.7 (a) mostra a malha usada na obtenção das respostas estruturais. O modelo de alta fidelidade é construído de maneira similar ao apresentado na seção 6.2. Todos os elementos usados são do tipo casca com 4 nós e 6 graus de liberdade por nó (ANSYS SHELL181) e o número total de nós é 4570. Três diferentes condições de contorno são empregadas nesse estudo: compressão uniaxial (Fig. 6.7-b), cisalhamento (Fig. 6.7-c) e pressão uniforme (Fig. 6.7-d).

Quatro respostas estruturais são analisadas e utilizadas nos problemas de otimização:

1. $RF^{(\lambda N)}$ – fator de reserva para flambagem sob carregamento de compressão uniaxial aplicado na aresta mais curta do painel (Fig. 6.7-b);
2. $RF^{(\lambda S)}$ – fator de reserva para flambagem sob carregamento de cisalhamento aplicado na aresta mais longa do painel (Fig. 6.7-c).

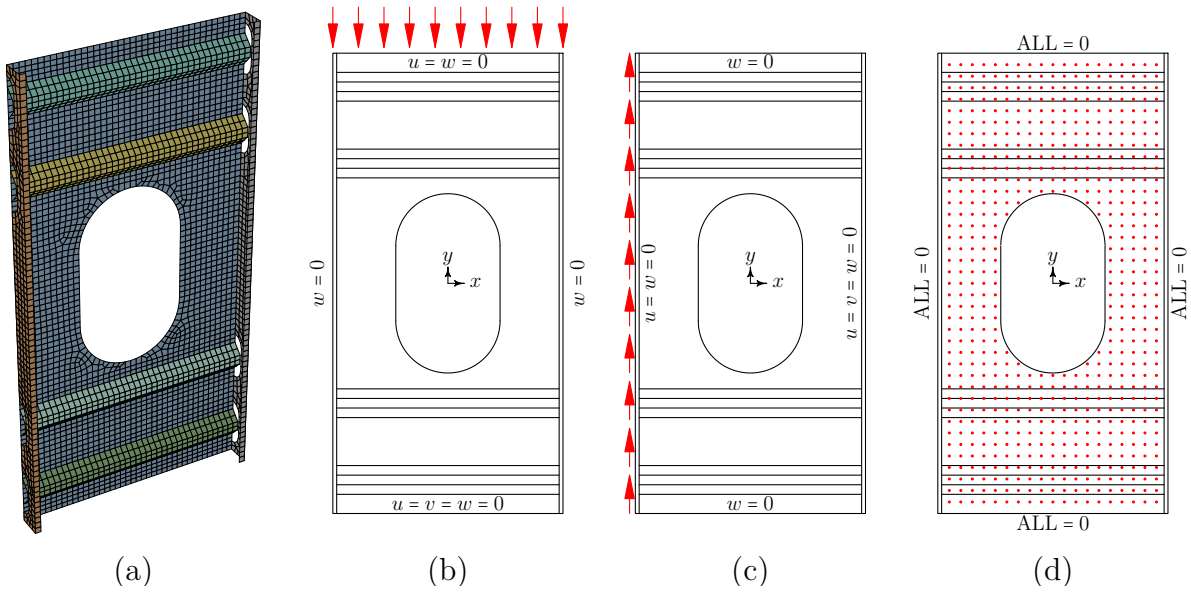


Figura 6.7 – Modelo utilizado para obtenção da resposta de alta fidelidade e condições de contorno impostas ao laminado reforçado com furo oblongo: (a) modelo de elementos finitos, (b) compressão uniaxial (50 kN), (c) cisalhamento (100 kN), (d) pressão uniforme (58 kPa).

3. $RF^{(TW)}$ – fator de reserva para o critério de falha de Tsai-Wu sob carregamento de pressão interna uniforme na casca do painel (Fig. 6.7-d);
4. w_{\max} – deslocamento máximo fora do plano (direção z) para carregamento de pressão interna uniforme na casca do painel (Fig. 6.7-d).

Para melhor visualização do comportamento estrutural com uso de fibras curvas, uma superfície de resposta foi gerada para um laminado com apenas duas variáveis do tipo $[\pm(T_0|T_1)_6]_S$. Esses resultados representativos podem ser vistos no Apêndice A.

Otimização sem restrições

Inicialmente é maximizado o fator de reserva para flambagem sob carregamento de compressão ($RF^{(\lambda N)}$), sem restrições. Com base na geometria e condições de contorno previamente definidas, o problema de otimização pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \text{encontrar: } & \{T_0^{(k)}, T_1^{(k)}\}; \quad (k = 1, \dots, 6 \text{ e } \{T_0^{(k)}, T_1^{(k)}\} \in [0, 90]) \\ \text{que maximiza: } & RF^{(\lambda N)} [\pm(T_0|T_1)^{(k)}]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

A Figura 6.8 mostra a resposta estrutural ($RF^{(\lambda N)}$) em função do número de avaliações do modelo de alta fidelidade usando diagramas de caixa (metodologia idêntica à mostrada na seção anterior). É notável que apenas com os pontos do DOE a resposta já é, em média, 10% superior ao melhor laminado de fibras retas comerciais ($0_2, \pm 45, 90_2$). Com a evolução dos projetos, essa melhoria cresce para um valor de, em média, 45% e o

melhor valor observado dentro das 25 execuções independentes possui aumento de 47% em relação ao ótimo encontrado usando apenas fibras retas.

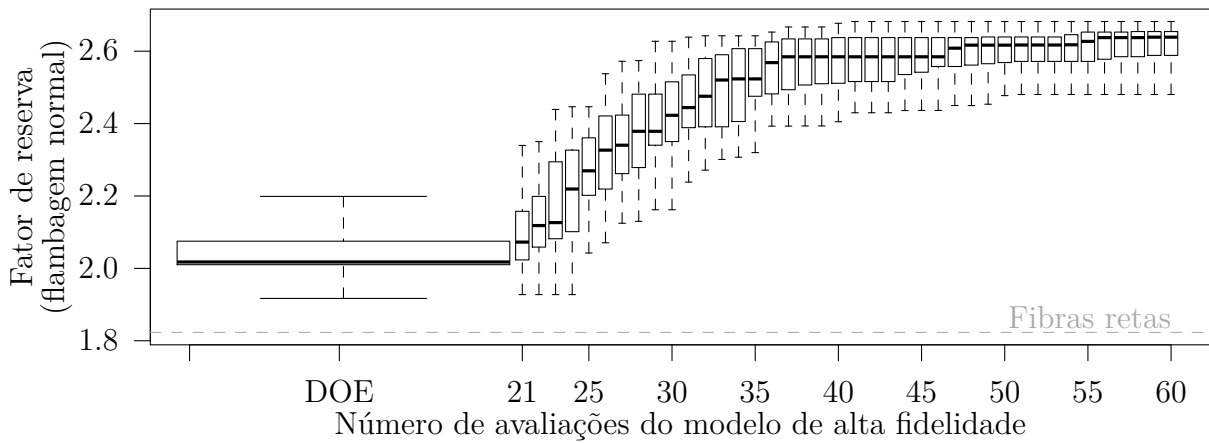


Figura 6.8 – Evolução do fator de reserva $RF^{(\lambda N)}$ para 25 execuções independentes da otimização sem restrições.

Os melhores empilhamentos obtidos para fibras retas, fibras curvas no DOE e fibras curvas no final da otimização podem ser vistos na Tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Melhores orientações obtidas para o problema de otimização sem restrições.

	Sequencia de empilhamento	RF
Fibras retas	$[90_2 / \pm 45 / \pm 45 / \pm 45 / \pm 45 / 0_2]_S$	1,823
Fibras curvas (DOE)	$[\pm \langle 30 87 \rangle / \pm \langle 27 76 \rangle / \pm \langle 16 58 \rangle / \pm \langle 38 51 \rangle / \pm \langle 40 88 \rangle / \pm \langle 14 74 \rangle]_S$	2,199
Fibras curvas (60)	$[\pm \langle 24 61 \rangle / \pm \langle 15 70 \rangle / \pm \langle 00 80 \rangle / \pm \langle 00 90 \rangle / \pm \langle 00 90 \rangle / \pm \langle 00 90 \rangle]_S$	2,682

Otimização com restrições

Neste problema, devem ser determinados os dois parâmetros das 6 camadas independentes da casca do painel que minimiza o deslocamento máximo fora do plano quando uma pressão interna é aplicada. A otimização é sujeita a duas restrições: fator de reserva de flambagem $RF^{(\lambda N)}$ maior ou igual a 2,0 e fator de reserva do critério de falha de Tsai-Wu $RF^{(TW)}$ maior ou igual a 1,5. Na restrição de flambagem, o carregamento empregado é o de compressão uniaxial, e para a restrição de Tsai-Wu, é o de pressão interna. Em todos os casos as condições de contorno são as mesmas indicadas na Figura 6.7. O problema de otimização com restrições é definido como:

$$\begin{aligned}
 &\text{encontrar: } \{T_0^{(k)}, T_1^{(k)}\}; \quad (k = 1, \dots, 6 \text{ e } \{T_0^{(k)}, T_1^{(k)}\} \in [0, 90]) \\
 &\text{que minimiza: } w_{\max} [\pm \langle T_0|T_1 \rangle^{(k)}]; \\
 &\text{sujeito à: } - RF^{(\lambda N)} [\pm \langle T_0|T_1 \rangle^{(k)}] + 2,0 \leq 0 \\
 &\text{e: } - RF^{(TW)} [\pm \langle T_0|T_1 \rangle^{(k)}] + 1,5 \leq 0.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Na Figura 6.9, pode ser visto que, assim como nos exemplos mostrados anteriormente, a resposta estrutural com uso de fibras curvas já se mostra superior àquela com fibras retas nos pontos do DOE. Para esse problema, o algoritmo converge rapidamente, obtendo variação entre as 25 execuções independentes inferior a 1% já para o acesso de número 49. A resposta acumulada mostrada na Figura 6.9 considera apenas pontos factíveis. Nessa figura, o resultado foi normalizado pelo deslocamento máximo do melhor laminado com fibras retas factível encontrado por busca exaustiva no espaço $[0_2, \pm 45, 90_2]^6$.

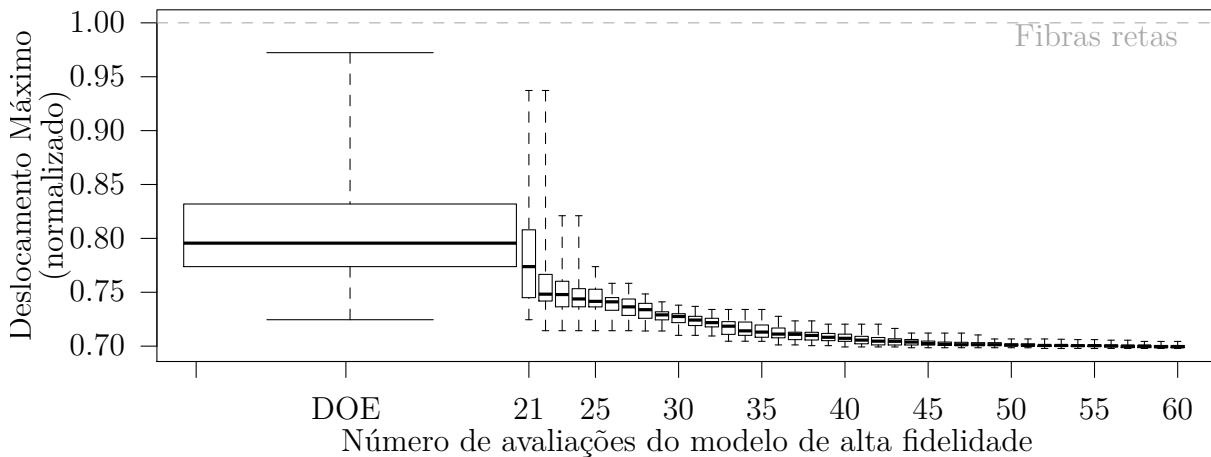


Figura 6.9 – Evolução do deslocamento máximo w_{\max} para 25 execuções independentes da otimização com restrições

As Figuras 6.10 e 6.11 mostram o comportamento das restrições durante o processo de otimização para as 25 execuções independentes. Na primeira restrição, fator de reserva de flambagem ($RF^{(\lambda N)}$), o algoritmo viola diversas vezes a fronteira da região factível. Tal comportamento é justificado pela falta de precisão do modelo substituto. Como mostrado na seção 5.3, o algoritmo maximiza a melhoria esperada restrita e nesse processo é considerada a *probabilidade* das restrições serem atendidas. Como os preditores têm apenas *certeza* dos valores das respostas nos pontos já visitados, é de se esperar que alguns pontos de preenchimento sejam mal preditos. Contudo, no pior caso observado, a violação máxima é de apenas 5%, ocorrendo poucas vezes, normalmente no início do processo de otimização.

As orientações ótimas encontradas, tal como os valores obtidos para cada uma das respostas avaliadas, podem ser vistos na Tabela 6.7. O uso de fibras curvas, nesse problema de otimização com restrição, mostrou um ganho de desempenho de 30% quando comparado ao laminado com fibras retas.

Em relação a atividade das restrições, nota-se que os pontos amostrados durante as 25 execuções independentes são mais propensos a ativarem a restrição de flambagem do que a de Tsai-Wu. Ou seja, no problema analisado, o ótimo global encontra-se mais próximo da fronteira definida pela restrição 1 do que pela 2. Também por isso, a disper-

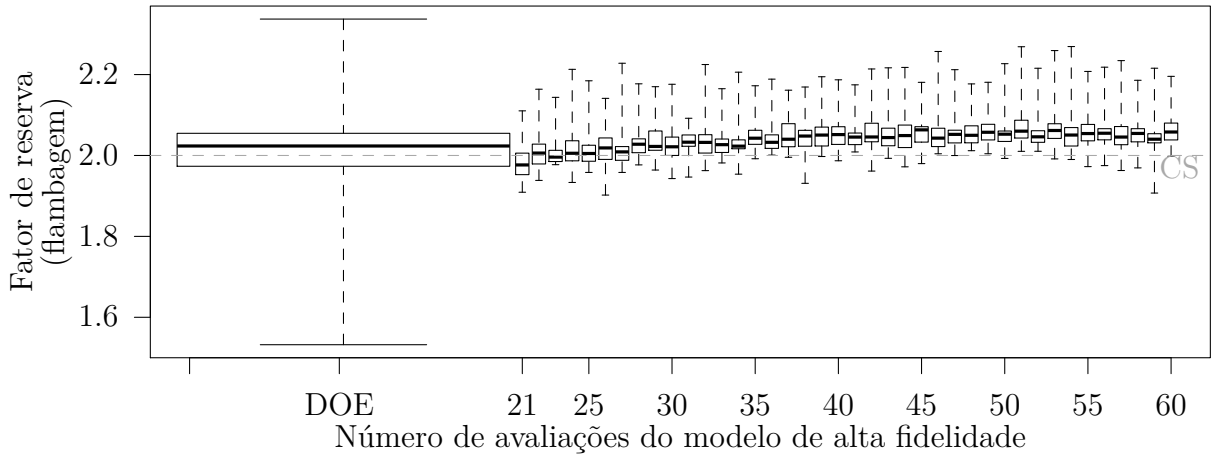


Figura 6.10 – Comportamento da restrição de flambagem $RF^{(\lambda N)}$ durante o processo de otimização para 25 execuções independentes.

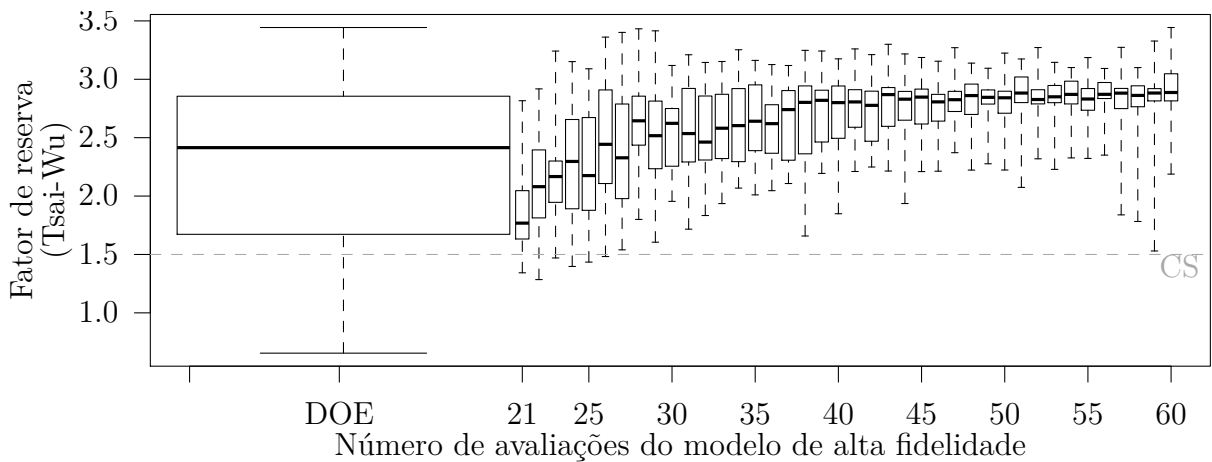


Figura 6.11 – Comportamento da restrição de falha de Tsai-Wu $RF^{(TW)}$ durante o processo de otimização para 25 execuções independentes.

Tabela 6.7 – Melhores orientações obtidas para o problema de otimização com restrições.

Sequência de empilhamento	w_{\max}	$RF^{(\lambda N)}$	$RF^{(TW)}$
$[\pm 45/\pm 45/90_2/0_2/90_2/0_2]_S$	6,073 mm	2,025	1,627
$[\pm(90 00)/\pm(90 00)/\pm(00 00)/\pm(00 00)/\pm(00 15)/\pm(07 38)]_S$	4,238 mm	2,040	2,871

são do valor obtido para o fator de reserva de Tsai-Wu é mais expressiva, o que ainda pode sugerir que, dada a não-convexidade da função objetivo, existam vários mínimos em diferentes distâncias da fronteira 2.

A Figura 6.12 mostra a porcentagem dos pontos que atendem as restrições simultaneamente. É notável a pequena quantidade de pontos do DOE que são factíveis, apenas 83 dos 500 amostrados (16,6%). Contudo, em apenas 4 iterações, esse número já supera a marca de 60%.

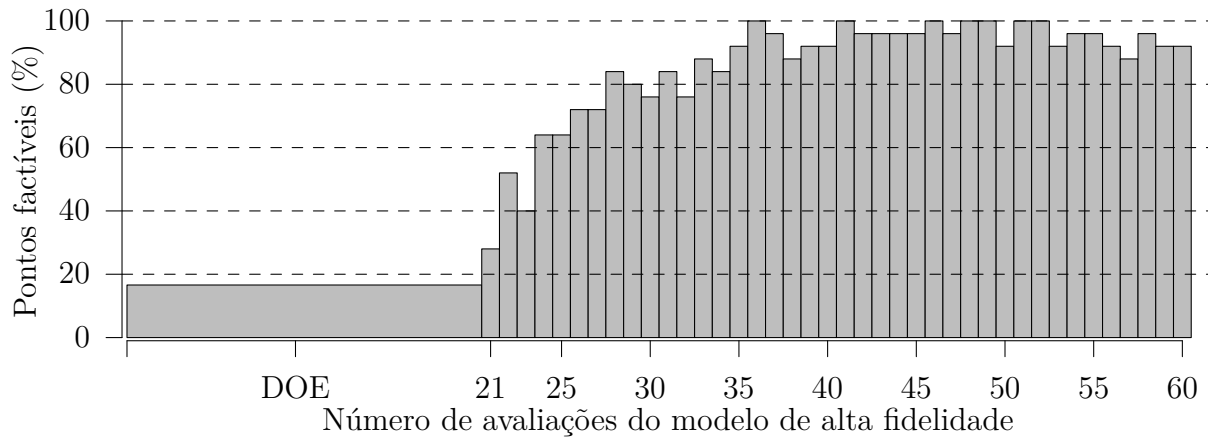


Figura 6.12 – Evolução da porcentagem total dos pontos amostrados que atendem ambas as restrições a cada iteração para 25 execuções independentes.

Otimização Multiobjetivo sem Restrições

Como exemplo de otimização multiobjetivo, propõe-se maximizar dois critérios: $RF^{(\lambda N)}$ e $RF^{(\lambda S)}$. Para tal, os dois critérios são combinados linearmente conforme a seguinte relação.

$$RF^{(\lambda)}(\alpha) = \alpha RF^{(\lambda N)} + (1 - \alpha) RF^{(\lambda S)}, \quad (0 \leq \lambda \leq 1) \quad (6.10)$$

Com o objetivo de construir uma frente de Pareto de maneira eficiente, inicialmente maximiza-se apenas o segundo objetivo ($RF^{(\lambda S)}$) durante 20 iterações do EGO. Após essa etapa, combina-se gradativamente o primeiro objetivo à função custo, de modo que, no espaço de resposta o algoritmo “caminhe” suavemente através da frente de Pareto a cada iteração. Essa ideia pode ser representada pela seguinte sequência de valores de α : $\{0.000, \dots, 0.000, 0.0125, 0.0250, \dots, 0.9875, 1.000\}$.

Nesse problema, foram usados 20 pontos para a construção do DOE, 20 pontos para a otimização do segundo objetivo ($\alpha = 0$) e, finalmente, 80 pontos para construção do restante do conjunto de Pareto ($\alpha = 0,0125 \mapsto 1$), totalizando 120 avaliações de ambas as funções custo. Para valores de $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ a avaliação de uma das funções custo não precisa ser realizada, reduzindo ainda mais o custo computacional. Contudo, por razões didáticas, o valor de ambas as funções foi sempre avaliado.

Dessa maneira, o problema de otimização com multiobjetivos pode ser simplesmente escrito como a maximização de uma função custo composta pelos dois objetivos onde o parâmetro de pesagem α varia com o passar das iterações:

$$\begin{aligned} \text{encontrar: } & \{T_0^{(k)}, T_1^{(k)}\}; \quad (k = 1, \dots, 6 \text{ e } \{T_0^{(k)}, T_1^{(k)}\} \in [0, 90]) \\ \text{que maximiza: } & RF^{(\lambda)}(\alpha) [\pm \langle T_0 | T_1 \rangle^{(k)}]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Assim como para os casos anteriores, 25 execuções independentes do algoritmo foram realizadas. A visualização gráfica de uma dessas execuções pode ser encontrada na Figura 6.13. A figura mostra a resposta estrutural de flambagem em cisalhamento ($RF^{(\lambda S)}$) versus a resposta de flambagem por carga normal ($RF^{(\lambda N)}$). A linha cinza delimita a frente de Pareto encontrada para essa execução e os pontos visitados estão representados por círculos pretos.

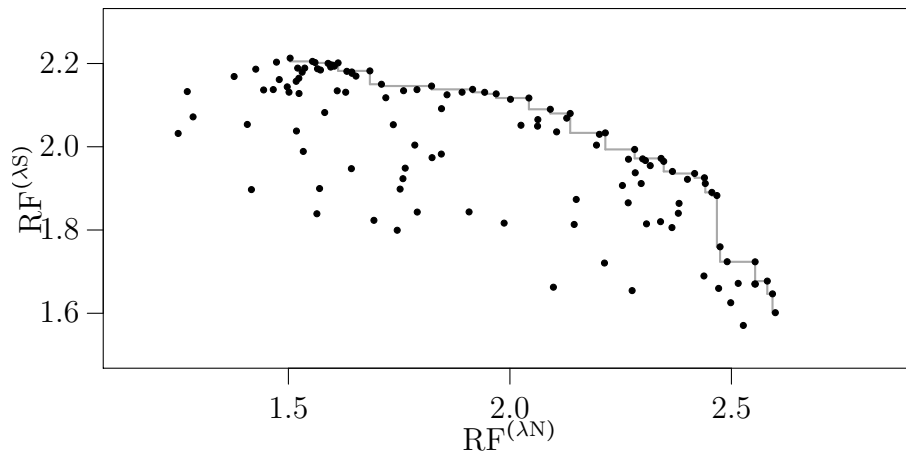


Figura 6.13 – Frente de Pareto típica resultante de uma execução do algoritmo proposto.

Na Figura 6.14, todos os 3000 projetos (25 execuções \times 120 avaliações por execução) são mostrados em preto. Os pontos que pertencem a algum dos 25 conjuntos de Pareto independentes estão destacados com contorno vermelho. Em média, observou-se que as execuções independentes geraram conjuntos de Pareto com $25,5 \pm 3,0$ pontos (aproximadamente 21% dos 120 pontos por execução).

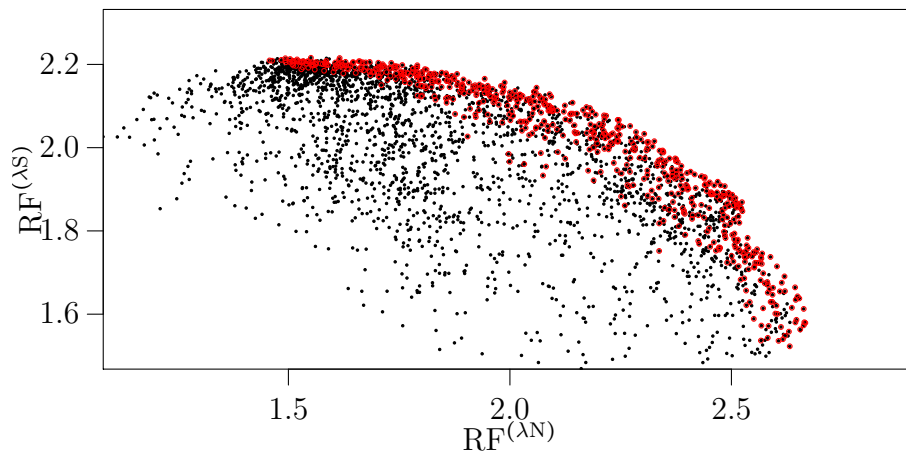


Figura 6.14 – Resultados de 25 execuções independentes de otimização multiobjetivo para a inicialização $\alpha = 0$.

Para avaliar a influência do efeito da escolha do valor inicial de α , realizou-se mais 25 execuções independentes do algoritmo com α sendo iniciado em 1 ($\alpha = 1 \mapsto 0$). A Figura 6.15 apresenta os resultados obtidos de maneira similar a Figura 6.14 porém os pontos que pertencem a um conjunto de Pareto são destacados com a cor azul. Em

média, observou-se que as execuções independentes geraram conjuntos de Pareto com $21,7 \pm 2,9$, valores estatisticamente iguais aos encontrados anteriormente. Visualmente, os pontos destacados em vermelho e em azul cobrem aproximadamente a mesma região e forma.

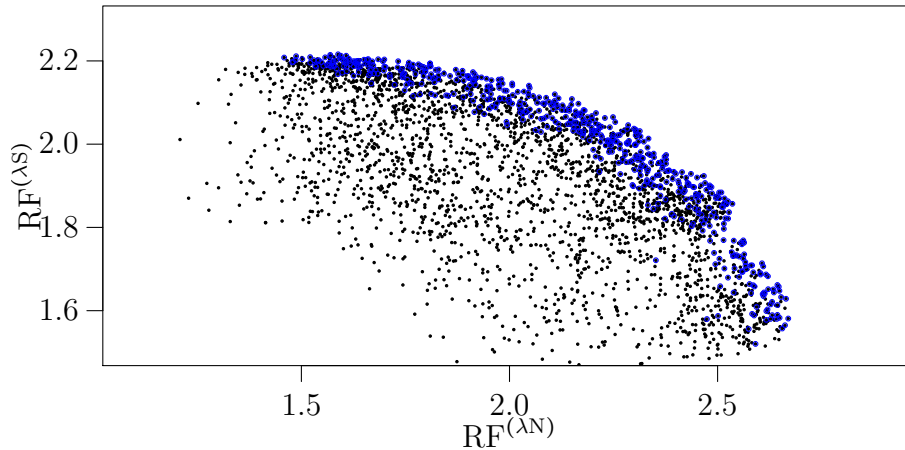


Figura 6.15 – Resultados de 25 execuções independentes de otimização multiobjetivo para a inicialização $\alpha = 1$.

Laminados representativos para valores de $\alpha = 0, 0,5$ e 1 estão listados na Tabela 6.8. Para fibras retas, os projetos que maximizam $RF^{(\lambda^N)}$ e $RF^{(\lambda^S)}$ são similares, variando apenas uma camada. Já para laminados com fibras curvas, observa-se significativa diferença nos projetos que maximizam cada um dos objetivos. Essa diferença deve-se principalmente a elevada flexibilidade dos projetos fibras curvas (tanto pelo uso de orientações contínuas quanto pelo uso de mais variáveis).

Tabela 6.8 – Melhores orientações obtidas para o problema de otimização multiobjetivo.

	α	Sequencia de empilhamento	$RF^{(\lambda^N)}$	$RF^{(\lambda^S)}$
F. retas	0,0	$[90_2 / \pm 45 / \pm 45 / \pm 45 / 0_2 / 0_2]_S$	1,80	2,08
F. retas	1,0	$[90_2 / \pm 45 / \pm 45 / \pm 45 / \pm 45 / 0_2]_S$	1,82	1,97
F. curvas	0,0	$[\pm \langle 90 30 \rangle / \pm \langle 90 33 \rangle / \pm \langle 35 45 \rangle / \pm \langle 00 06 \rangle / \pm \langle 00 00 \rangle / \pm \langle 00 00 \rangle]_S$	1,55	2,22
F. curvas	0,5	$[\pm \langle 32 56 \rangle / \pm \langle 17 63 \rangle / \pm \langle 00 90 \rangle / \pm \langle 00 90 \rangle / \pm \langle 37 00 \rangle / \pm \langle 45 00 \rangle]_S$	2,33	2,02
F. curvas	1,0	$[\pm \langle 32 56 \rangle / \pm \langle 17 63 \rangle / \pm \langle 00 90 \rangle / \pm \langle 00 90 \rangle / \pm \langle 37 00 \rangle / \pm \langle 45 00 \rangle]_S$	2,67	1,58

Técnicas mais sofisticadas de otimização multiobjetivo como NSGA-II (do inglês, *nondominated sorting genetic algorithm*) e MOEA (do inglês, *multiobjective evolutionary algorithms*) são encontradas na literatura. Porém, em geral, esses algoritmos resultam em um custo computacional elevado quando as funções objetivos são onerosas. A combinação de algoritmos eficientes de otimização multiobjetivo com uso de metamodelos ainda é relativamente pouco estudada. Contudo, trabalhos como Shimoyama et al. (2013) e Zhang et al. (2016) demonstram bons resultados com essa combinação.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 SÍNTESE E CONCLUSÕES GERAIS

Na presente dissertação de mestrado é desenvolvida e testada uma eficiente metodologia de otimização das orientações das fibras curvas em componentes de material compósito. Tal metodologia é baseada no algoritmo eficiente de otimização (EGO) proposto por Jones et al. (1998). Modificações no algoritmo original foram implementadas para aplicação em problemas de otimização mais abrangentes como otimização com restrições e multiobjetivo. Para isso, foi necessário um estudo aprofundado do metamodelo de Kriging e de como os preditores são construídos. Como subproduto da dissertação, deve-se ressaltar uma biblioteca de funções em **R**, criada para adaptar e interfacear o algoritmo com problemas de otimização de estruturas em materiais compósitos.

Após diversos testes, modelos de estruturas com fibras curvas são otimizados para demonstrar a capacidade do algoritmo proposto. Inicialmente, problemas encontrados na literatura são usados como base de validação e, posteriormente, um problema de otimização com geometria complexa é otimizado. De maneira geral, pode-se dizer que o algoritmo mostrou grande eficiência na resolução de todos os problemas. O grande destaque se encontra no número reduzido de acessos às funções objetivo pelo uso dos metamodelos. Com apenas 60 acessos para os problemas de único objetivo e 120 para aqueles de múltiplo objetivos, o EGO mostrou-se capaz de encontrar bons projetos de estruturas compósitas com 12 variáveis contínuas. Quando comparado com a otimização direta (sem uso de metamodelos) os benefícios são potencialmente grandes, devido a redução do número de acessos às funções objetivos e/ou de restrições. Segundo Forrester et al. (2008), EGO é capaz de reduzir o número de acessos de dezenas de milhares para dezenas ou poucas centenas. Para funções de teste ou modelos analíticos, a redução do número de acessos não se justifica pelo aumento da complexidade do algoritmo. Contudo, quando as funções custo e/ou restrições são simulações computacionais demoradas ou até mesmo ensaios destrutivos, a economia potencial de tempo e dinheiro pode ser significativa.

Em relação à utilização de compósitos de rigidez variável, o uso de fibras curvas mostrou ganhos estruturais substanciais. Para o primeiro caso de validação, o laminado ótimo encontrado mostrou um desempenho à flambagem 105% superior ao melhor laminado com fibras retas comerciais. Em comparação com o resultado mostrado no trabalho de referência (que também usa fibras curvas), uma melhoria de 7,5% foi observada. Tal melhoria justifica-se pelo aumento do número de variáveis otimizadas: 2 vs. 12. No segundo caso de validação, o uso de fibras curvas superou em até 18,5% os laminados que

usam apenas fibras retas comerciais. Já para o caso do painel reforçado com furo oblongo, a estrutura com a casca feita de fibras curvas obteve um aumento de até 47% na carga de flambagem para um carregamento de compressão uniaxial. No problema de maximização da rigidez com duas restrições de falha (flambagem e critério de Tsai-Wu), o laminado com fibras curvas obteve deslocamento 30% menor quando comparado ao de fibras retas. No caso de otimização multiobjetivo, o uso de fibras curvas forneceu a flexibilidade necessária para a construção de uma frente de Pareto ampla na qual o projetista pode escolher a combinação ideal de objetivos para diferentes aplicações.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As sugestões para os trabalhos futuros podem ser divididas em três categorias principais, descritas a seguir.

Laminados de rigidez variável

1. Estudo de diferentes maneiras de se obter laminados de rigidez variável;
2. Estudo e desenvolvimento de novas formas de parametrização das fibras curvas;
3. Estudo mais aprofundado sobre as restrições de manufaturas e mapeamentos que considerem essas limitações no modelo de elementos finitos;
4. Estudo da influência das discontinuidades oriundas da parametrização escolhida não ser capaz de reproduzir o processo real de aplicação de fibras.

Modelo de Kriging

1. Estudo no tópico do problema de inversão do metamodelo de Kriging (i.e. descobrir quais variáveis de entrada resultam em uma determinada saída). Essa ferramenta pode se mostrar útil na otimização de problemas onde deseja-se encontrar a fronteira de um envelope de projetos factíveis.

Algoritmo EGO

1. Comparação direta do custo computacional do algoritmo proposto com outros métodos de otimização, que fazem uso ou não de diferentes técnicas de metamodelagem;
2. Implementação de uma técnica mais robusta e eficiente para otimização multiobjetivos. A construção de metamodelos independentes para cada objetivo e o uso direto das informações de variância pode ser uma opção viável, em especial para problemas com mais de dois objetivos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS (Ed.). **ANSYS Composite PrepPost User's Guide**. Canonsburg, United States of America, 2015a.

ANSYS (Ed.). **ANSYS Mechanical User's Guide**. Canonsburg, United States of America, 2015b.

ARORA, J. **Introduction to optimum design**. San Diego, United States of America: Academic Press, 2004.

BATHE, K.-J.; DVORKIN, E. N. A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 22, n. 3, p. 697–722, 1986.

BÉLISLE, C. J. Convergence theorems for a class of simulated annealing algorithms on rd. **Journal of Applied Probability**, v. 29, n. 4, p. 885–895, 1992.

BLOM, A. W.; LOPES, C. S.; KROMWIJK, P. J.; GURDAL, Z.; CAMANHO, P. P. A theoretical model to study the influence of tow-drop areas on the stiffness and strength of variable-stiffness laminates. **Journal of composite materials**, v. 43, n. 5, p. 403–425, 2009.

BLOM, A. W.; SETOODEH, S.; HOL, J. M.; GÜRDAL, Z. Design of variable-stiffness conical shells for maximum fundamental eigenfrequency. **Computers & Structures**, v. 86, n. 9, p. 870–878, 2008.

BLOM, A. W.; STICKLER, P. B.; GÜRDAL, Z. Optimization of a composite cylinder under bending by tailoring stiffness properties in circumferential direction. **Composites Part B: Engineering**, v. 41, n. 2, p. 157–165, 2010.

BRINK, W. van den; VANKAN, W.; MAAS, R. Buckling optimized variable stiffness laminates for a composite fuselage window section. In: **Proceedings of the 28th international congress of the aeronautical sciences, Brisbane (Australia)**. [S.l.: s.n.], 2012.

BYRD, R. H.; LU, P.; NOCEDAL, J.; ZHU, C. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 16, n. 5, p. 1190–1208, 1995.

CARNELL, R. **lhs: Latin Hypercube Samples**. [S.l.], 2012. R package version 0.10. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=lhs>>.

CHRISTOPHE, D.; PETR, S. **randtoolbox: Generating and Testing Random Numbers**. Vienna, Austria, 2014. R package version 1.16. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=randtoolbox>>.

COOK, R. **Finite element modeling for stress analysis**. New York: Wiley, 1995. ISBN 978-0471107743.

CUI, W.; WISNOM, M.; JONES, M. A comparison of failure criteria to predict delamination of unidirectional glass/epoxy specimens waisted through the thickness. **Composites**, v. 23, n. 3, p. 158–166, 1992.

FANG, K.-T.; LI, R.; SUDJIANTO, A. **Design and modeling for computer experiments**. [S.l.]: CRC Press, 2005.

FLETCHER, R.; REEVES, C. M. Function minimization by conjugate gradients. **The computer journal**, v. 7, n. 2, p. 149–154, 1964.

FORRESTER, A.; SOBESTER, A.; KEANE, A. **Engineering design via surrogate modelling: a practical guide**. Pondicherry, India: John Wiley & Sons, 2008.

GHIASI, H.; FAYAZBAKHS, K.; PASINI, D.; LESSARD, L. Optimum stacking sequence design of composite materials part ii: Variable stiffness design. **Composite Structures**, v. 93, n. 1, p. 1–13, 2010.

GILL, P. **Practical optimization**. London New York: Academic Press, 1981. ISBN 978-0122839528.

GÜLDÜ, S. **Analysis and Optimization of Cylindrical Structures Manufactured by Automated Fiber Placement Technique**. Tese (Doutorado) — Middle East Technical University, 2014.

GÜRDAL, Z.; OLMEDO, R. In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientations-variable stiffness concept. **AIAA journal**, v. 31, n. 4, p. 751–758, 1993.

GÜRDAL, Z.; TATTING, B. F.; WU, C. Variable stiffness composite panels: effects of stiffness variation on the in-plane and buckling response. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 39, n. 5, p. 911–922, 2008.

HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R.; FRIEDMAN, J.; HASTIE, T.; FRIEDMAN, J.; TIBSHIRANI, R. **The elements of statistical learning**. [S.l.]: Springer, 2009. v. 2.

HEAD, J. D.; ZERNER, M. C. A broyden-fletcher-goldfarb-shanno optimization procedure for molecular geometries. **Chemical physics letters**, v. 122, n. 3, p. 264–270, 1985.

HUANG, J.; HAFTKA, R. Optimization of fiber orientations near a hole for increased load-carrying capacity of composite laminates. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 30, n. 5, p. 335–341, 2005.

HYER, M.; LEE, H. The use of curvilinear fiber format to improve buckling resistance of composite plates with central circular holes. **Composite structures**, v. 18, n. 3, p. 239–261, 1991.

JEGLEY, D. C.; TATTING, B. F.; GÜRDAL, Z. Optimization of elastically tailored tow-placed plates with holes. In: **Proceedings of the Aiaa/Asme/Asce/Ahs/Asc 44th structures, structural dynamics and materials conference, Norfolk, Va.** [S.l.: s.n.], 2003. p. 1420–1413.

JOHNSON, M. E.; MOORE, L. M.; YLVISAKER, D. Minimax and maximin distance designs. **Journal of statistical planning and inference**, v. 26, n. 2, p. 131–148, 1990.

JONES, D. R. A taxonomy of global optimization methods based on response surfaces. **Journal of Global Optimization**, v. 21, n. 4, p. 345–383, 2001.

JONES, D. R.; SCHONLAU, M.; WELCH, W. J. Efficient global optimization of expensive black-box functions. **Journal of Global optimization**, v. 13, n. 4, p. 455–492, 1998.

JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. [S.l.]: CRC press, 1998.

KASSAPOGLOU, C. **Design and analysis of composite structures: with applications to aerospace structures**. Noida, India: John Wiley & Sons, 2013.

KIM, B. C.; POTTER, K.; WEAVER, P. M. Continuous tow shearing for manufacturing variable angle tow composites. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 43, n. 8, p. 1347–1356, 2012.

KRIEG, D. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. **Journal of Chemical, Metallurgical, and Mining Society of South Africa**, v. 52, n. 6, p. 119–139, 1951.

LIEFVENDAHL, M.; STOCKI, R. A study on algorithms for optimization of latin hypercubes. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 136, n. 9, p. 3231–3247, 2006.

LIU, W.; BUTLER, R.; MILEHAM, A.; GREEN, A. Optimum design, experimental testing and post-buckling analysis of thick composite stiffened panels. In: **Proceedings of the Aiaa/Asme/Asce/Ahs/Asc 46th structures, structural dynamics and materials conference**. [S.l.: s.n.], 2005. p. 1826–1837.

LOPES, C.; GÜRDAL, Z.; CAMANHO, P. Variable-stiffness composite panels: Buckling and first-ply failure improvements over straight-fibre laminates. **Computers & Structures**, v. 86, n. 9, p. 897–907, 2008.

LOPES, C.; GÜRDAL, Z.; CAMANHO, P. Tailoring for strength of composite steered-fibre panels with cutouts. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 41, n. 12, p. 1760–1767, 2010.

LOPES, C. S.; CAMANHO, P. P.; GÜRDAL, Z.; TATTING, B. F. Progressive failure analysis of tow-placed, variable-stiffness composite panels. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 44, n. 25, p. 8493–8516, 2007.

LUERSEN, M. A.; STEEVES, C. A.; NAIR, P. B. Curved fiber paths optimization of a composite cylindrical shell via kriging-based approach. **Journal of Composite Materials**, v. 49, n. 29, p. 3583–3597, 2015.

MATHERON, G. Principles of geostatistics. **Economic geology**, v. 58, n. 8, p. 1246–1266, 1963.

MEBANE, W. R.; SEKHON, J. S. Genetic optimization using derivatives: the rgenoud package for R. **Journal of Statistical Software**, v. 42, n. 11, p. 1–26, 2011.

MEGSON, T. H. G. **Introduction to Aircraft Structural Analysis**. Kidlington, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.

- MOROKOFF, W. J.; CAFLISCH, R. E. Quasi-random sequences and their discrepancies. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 15, n. 6, p. 1251–1279, 1994.
- MORRIS, M. D.; MITCHELL, T. J. Exploratory designs for computational experiments. **Journal of statistical planning and inference**, v. 43, n. 3, p. 381–402, 1995.
- MUC, A.; ULATOWSKA, A. Design of plates with curved fibre format. **Composite Structures**, v. 92, n. 7, p. 1728–1733, 2010.
- MULLEN, K. M. Continuous global optimization in R. **Journal of Statistical Software**, v. 60, n. 6, p. 1–45, 2014.
- NARAYANASWAMI, R.; ADELMAN, H. M. Evaluation of the tensor polynomial and hoffman strength theories for composite materials. **Journal of Composite Materials**, v. 11, n. 4, p. 366–377, 1977.
- NELDER, J. A.; MEAD, R. A simplex method for function minimization. **The computer journal**, v. 7, n. 4, p. 308–313, 1965.
- NIK, M. A.; FAYAZBAKHS, K.; PASINI, D.; LESSARD, L. Surrogate-based multi-objective optimization of a composite laminate with curvilinear fibers. **Composite Structures**, v. 94, n. 8, p. 2306–2313, 2012.
- NIK, M. A.; FAYAZBAKHS, K.; PASINI, D.; LESSARD, L. A comparative study of metamodeling methods for the design optimization of variable stiffness composites. **Composite Structures**, v. 107, p. 494–501, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.08.023>>.
- NIK, M. A.; FAYAZBAKHS, K.; PASINI, D.; LESSARD, L. Optimization of variable stiffness composites with embedded defects induced by automated fiber placement. **Composite Structures**, v. 107, p. 160–166, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.07.059>>.
- PARNAS, L.; ORAL, S.; CEYHAN, Ü. Optimum design of composite structures with curved fiber courses. **Composites science and technology**, v. 63, n. 7, p. 1071–1082, 2003.
- R Development Core Team. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna, Austria, 2014. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>.
- RASMUSSEN, C. E.; WILLIAMS, C. K. **Gaussian processes for machine learning**. Cambridge, Mass: MIT Press, 2006.
- RIBEIRO, P. Linear modes of vibration of cylindrical shells in composite laminates reinforced by curvilinear fibres. **Journal of Vibration and Control**, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1177/1077546315571661>>.
- RIBEIRO, P.; AKHAVAN, H.; TETER, A.; SKI, J. W. A review on the mechanical behaviour of curvilinear fibre composite laminated panels. **Journal of Composite Materials**, v. 48, n. 22, p. 2761–2777, 2013.
- ROUSTANT, O.; GINSBOURGER, D.; DEVILLE, Y. DiceKriging, DiceOptim: Two R packages for the analysis of computer experiments by kriging-based metamodeling and optimization. **Journal of Statistical Software**, v. 51, n. 1, p. 1–55, 2012.

- SCHEUERER, M.; SCHABACK, R.; SCHLATHER, M. Interpolation of spatial data—a stochastic or a deterministic problem? **European Journal of Applied Mathematics**, v. 24, n. 4, p. 601–629, 2013.
- SCHOFIELD, A. **ANA Says 787s Exceeding Fuel Efficiency Target**. [S.l.], 2012.
- SETOODEH, S.; ABDALLA, M. M.; GÜRDAL, Z. Design of variable–stiffness laminates using lamination parameters. **Composites Part B: Engineering**, v. 37, n. 4, p. 301–309, 2006.
- SETOODEH, S.; ABDALLA, M. M.; IJSSELMUIDEN, S. T.; GÜRDAL, Z. Design of variable-stiffness composite panels for maximum buckling load. **Composite Structures**, v. 87, n. 1, p. 109–117, 2009.
- SHIMOYAMA, K.; JEONG, S.; OBAYASHI, S. Kriging-surrogate-based optimization considering expected hypervolume improvement in non-constrained many-objective test problems. In: IEEE. **Evolutionary Computation (CEC), 2013 IEEE Congress on**. [S.l.], 2013. p. 658–665.
- STOCKI, R. A method to improve design reliability using optimal latin hypercube sampling. **Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences**, v. 12, n. 4, p. 393, 2005.
- SUN, C.-T. **Comparative evaluation of failure analysis methods for composite laminates**. Washington, United States of America, 1996.
- TATTING, B. F.; GÜRDAL, Z. **Design and manufacture of elastically tailored tow placed plates**. [S.l.]: Citeseer, 2002.
- TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. **Journal of Composite Materials**, v. 5, n. 1, p. 58–80, 1971.
- VIANA, F. A. Things you wanted to know about the latin hypercube design and were afraid to ask. In: **10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization**. [S.l.: s.n.], 2013.
- WONG, P. C.; BERGERON, R. D. 30 years of multidimensional multivariate visualization. In: **Scientific Visualization**. [S.l.: s.n.], 1994. p. 3–33.
- WU, Z.; WEAVER, P. M.; RAJU, G. Postbuckling optimisation of variable angle tow composite plates. **Composite Structures**, v. 103, p. 34–42, 2013.
- WU, Z.; WEAVER, P. M.; RAJU, G.; KIM, B. C. Buckling analysis and optimisation of variable angle tow composite plates. **Thin-Walled Structures**, v. 60, p. 163–172, 2012.
- ZHANG, J.-x.; MA, Y.-z.; ZHU, L.-y. Multiobjective simulation optimization using stochastic kriging. In: SPRINGER. **Proceedings of the 22nd International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management 2015**. [S.l.], 2016. p. 81–91.
- ZITZLER, E.; DEB, K.; THIELE, L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. **Evolutionary computation**, v. 8, n. 2, p. 173–195, 2000.

APÊNDICE A – COMPORTAMENTO DE LAMINADOS REFORÇADOS COM FIBRAS CURVAS

Para entender melhor o comportamento estrutural com uso de fibras curvas, a resposta em flambagem para dois carregamentos foi analisada: compressivo na aresta mais curta; cisalhante na aresta mais longa. Além disso, em um terceiro caso, um carregamento de pressão interna, distribuída igualmente pela casca da estrutura, é aplicado. Desse carregamento, obtêm-se o deslocamento máximo fora do plano tal como o fator de reserva para o critério de falha de Tsai-Wu.

Para possibilitar a visualização dos dados, o laminado foi construído definindo-se apenas uma camada da casca e repetindo-a para as demais ($[\pm(T_0|T_1)_6]_S$), sendo assim definido por apenas dois parâmetros: T_0 e T_1 . Para a construção das superfícies de resposta, um conjunto de amostras construído em fatorial completo com 361 pontos é analisado para cada uma das 4 respostas estruturais. As Figuras A.1 à A.4 (Apêndice A) mostram em (a) as condições de contorno empregadas, em (b) as respectivas respostas estruturais encontradas em função das variáveis de projeto T_0 e T_1 e em (c) as orientações das fibras em cada elemento para o laminado “ótimo”.

Em resumo, quatro respostas estruturais são analisadas:

- RE1:** $RF^{(\lambda N)}$ – fator de reserva para flambagem sob carregamento de compressão uniaxial aplicado na aresta mais curta do painel (Fig. A.1);
- RE2:** $RF^{(\lambda S)}$ – fator de reserva para flambagem sob carregamento de cisalhamento aplicado na aresta mais longa do painel (Fig. A.2).
- RE3:** $RF^{(TW)}$ – fator de reserva para o critério de falha de Tsai-Wu sob carregamento de pressão interna uniforme na casca do painel (Fig. A.3);
- RE4:** w_{\max} – deslocamento máximo fora do plano (direção z) para carregamento de pressão interna uniforme na casa do painel (Fig. A.4).

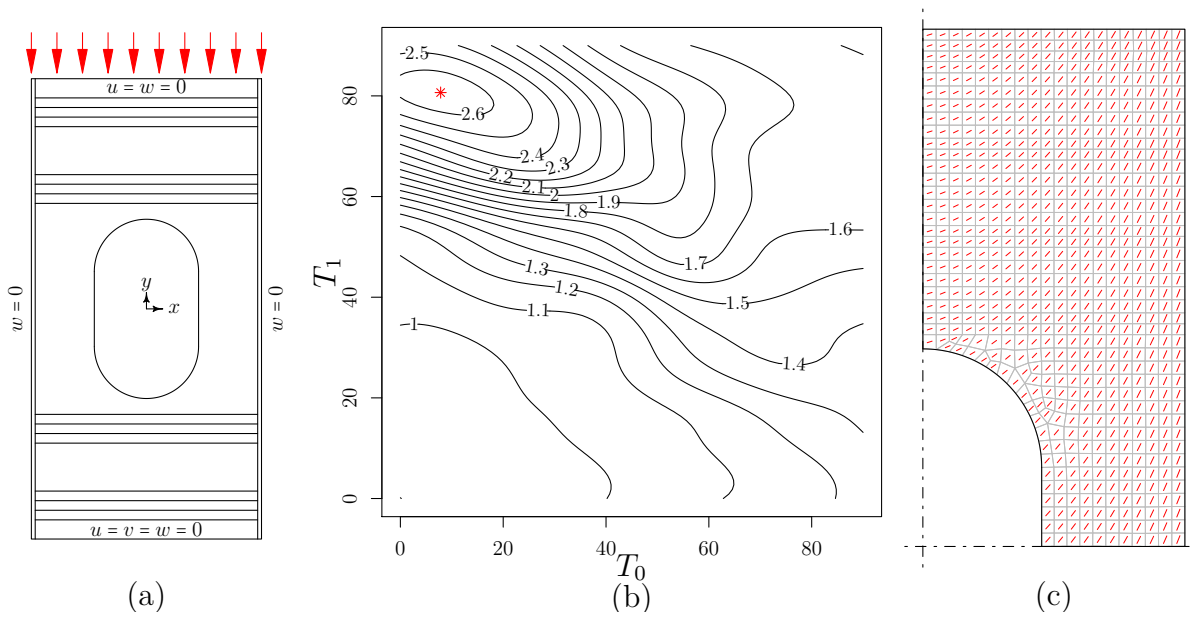


Figura A.1 – Comportamento à flambagem do painel submetido a compressão uniaxial (50 kN): (a) condições de contorno, (b) curvas de nível da função custo e (c) orientação das fibras em cada elemento para parâmetros $\langle 07.8|80.7 \rangle$.

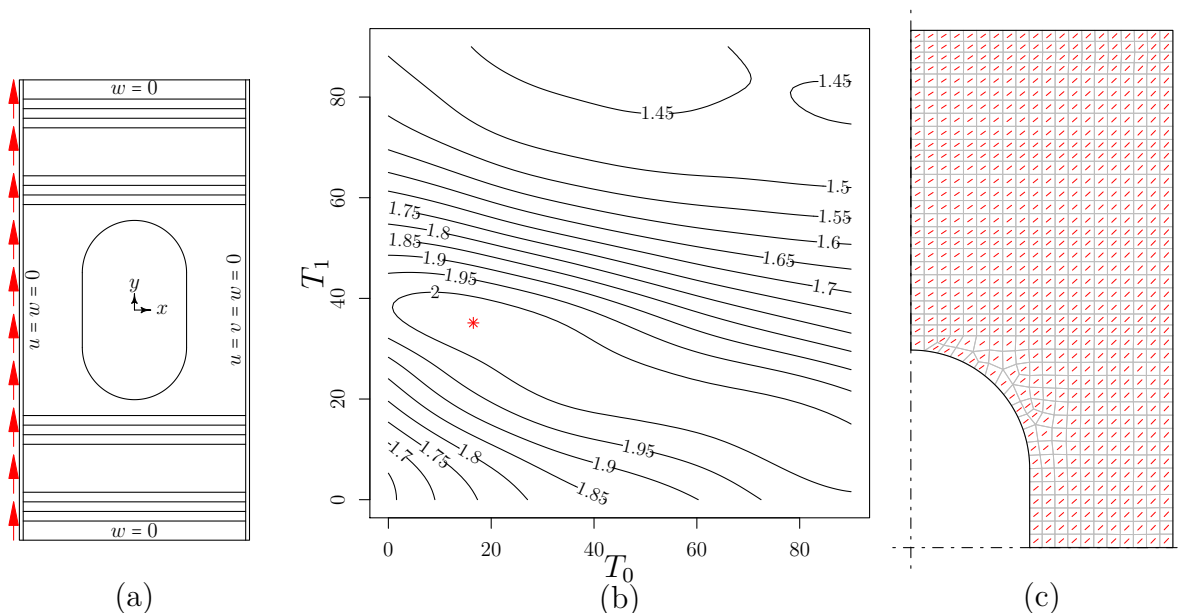


Figura A.2 – Comportamento à flambagem do painel submetido a cisalhamento (100 kN): (a) condições de contorno, (b) curvas de nível da função custo e (c) orientação das fibras em cada elemento para parâmetros $\langle 16.5|35.1 \rangle$.

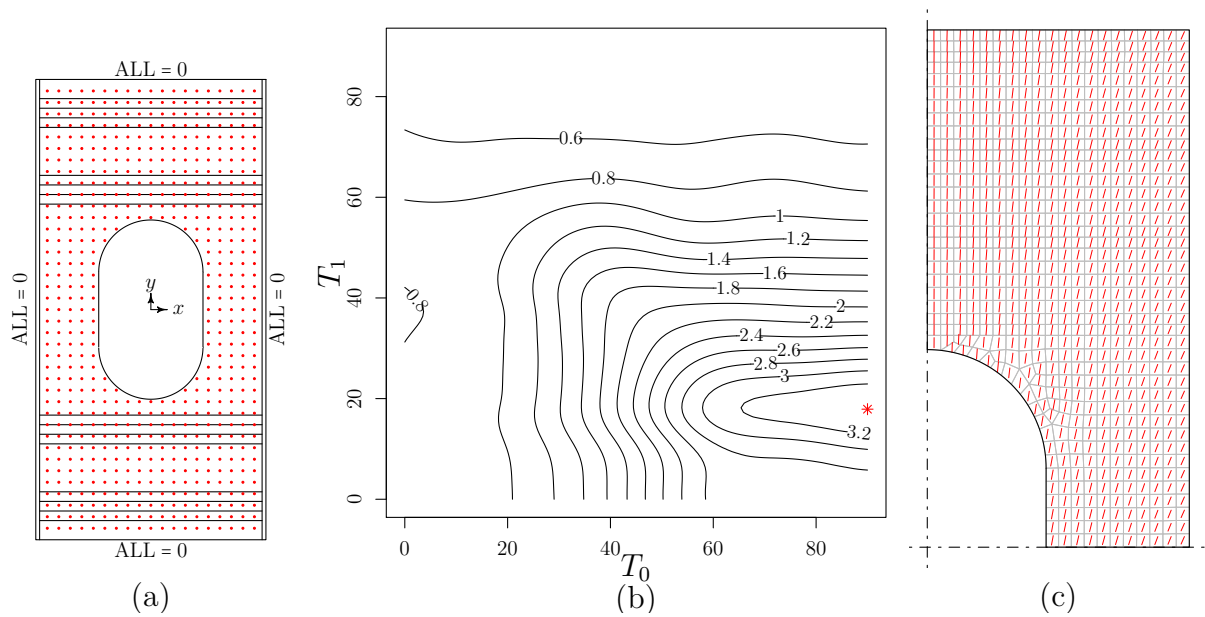


Figura A.3 – Comportamento ao fator de reserva de Tsai-Wu do painel submetido à pressão interna (58 kPa): (a) condições de contorno (b) curvas de nível da função custo e (c) orientação das fibras em cada elemento para parâmetros $\langle 90.0|17.9 \rangle$.

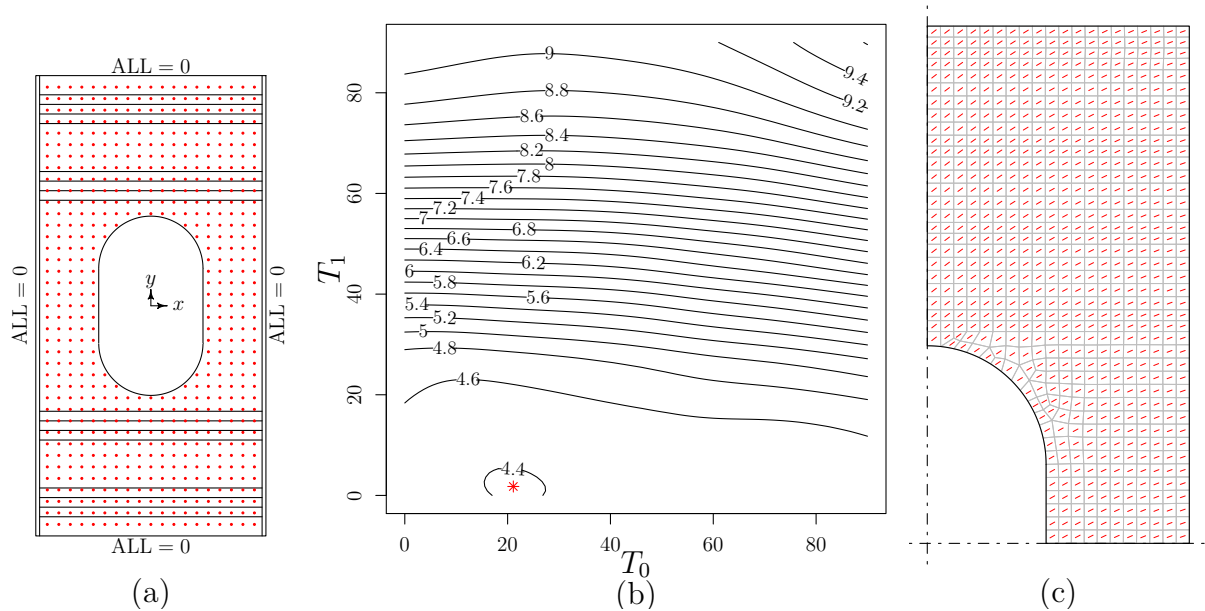


Figura A.4 – Comportamento ao deslocamento fora do plano do painel submetido à pressão interna (58 kPa): (a) condições de contorno, (b) curvas de nível da função custo e (c) orientação das fibras em cada elemento para parâmetros $\langle 22.1|01.8 \rangle$.

ÍNDICE REMISSIVO

- Correlação, 29
- Covariância, 29
- Critérios de falha, 9
 - Fator de reserva, 11
 - Flambagem, 11
 - Inverso do fator de reserva, 11
 - Margem de segurança, 11
 - Tsai-Wu, 10
- Custo, 21
- Esperança, 41
- Função
 - de perda, 26
 - Densidade de probabilidade, 39
 - Distribuição acumulada, 39
 - Enganosa, 35
- Hiperparâmetros, 30
- Kernel, 29
- Laminados especiais
 - Balanceado, 9
 - Simétrico, 9
- Mínimo
 - Global, 5, 35
 - Local, 5, 36
- Max-min, 23
- Melhoria esperada, 38, 48
 - restrita, 50
- não-viciada, 31
- Norma
 - Euclidiana, 24
 - Manhattan, 24
- Notação
 - Fibras curvas, 16
 - Offset, 16
 - Ortogonalidade, 23
 - Ponto factível, 41
 - Pontos de preenchimento, 35
 - Preenchimento, 35
 - Probabilidade de melhoria, 36
 - Projeto de experimentos, 21
 - Hipercubo latino ótimo, 23
 - Hipercubos Latinos aleatórios, 22
 - Região factível, 5
 - rgenoud, 7
 - Risco, 26
 - Viés, sem, 26