UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JULIO CESAR DA SILVA SCHWINGEL

A MATEMÁTICA DA SAMAMBAIA DE BARNSLEY

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2016

JULIO CESAR DA SILVA SCHWINGEL

A MATEMÁTICA DA SAMAMBAIA DE BARNSLEY

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Fabio Antonio Dorini, Dr.

Co-orientadora: Leyza Baldo Dorini, Dra.

CURITIBA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S415m Schwingel, Júlio Cesar da Silva
2016 A matemática da samambaia de Barnsley / Júlio Cesar da Silva Schwingel.-- 2016.
42 f.: il.; 30 cm

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Curitiba, 2016.
Bibliografia: f. 32.

1. Barnsley, M. F. (Michael Fielding), 1946-. Fractals Ewerywhere. 2. Fractais. 3. Samambaia. 4. MATLAB (Programa de computador). 5. Métodos iterativos (Matemática). 6. Geometria. 7. Matemática - Estudo e ensino (Ensino médio). 8. Matemática - Dissertações. I. Dorini, Fábio Antonio, orient. II. Dorini, Leyza Elmeri Baldo, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD: Ed. 22 – 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

Título da Dissertação No. 031

"A matemática da samambaia de Barnsley"

por

Júlio Cesar da Silva Schwingel

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 01 de junho de 2016. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Fabio Antonio Dorini, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Luiz Antonio Ribeiro de Santana, Dr.
(UFPR)

Profa. Diana Rizzotto Rossetto Dra.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Márcio Rostirolla Adames, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

AGRADECIMENTOS

- A Deus, que me abriu todas as portas que me fizeram chegar até aqui.
- Aos meus professores que com dedicação e paciência fizeram parte dessa etapa da minha vida.
- À minha família que sempre me apoiou e acreditou em mim em todos os momentos, incondicionalmente.
- Ao meu orientador, pela colaboração, paciência e por seus conhecimentos repassados durante todo o desenvolvimento do trabalho.
- À CAPES pela bolsa que permitiu dedicar-me ao estudo.
- À UTFPR que abriu suas portas dando suporte ao programa PROFMAT.

RESUMO

SCHWINGEL, Júlio Cesar da Silva. A MATEMÁTICA DA SAMAMBAIA DE BARNSLEY. 42 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

Este trabalho objetiva apresentar as ideias matemáticas principais da Samambaia de Barnsley, um fractal que recria uma imagem que assemelha-se a uma folha de samambaia da variedade *Black Spleenwort* e tem como base quatro transformações afins elementares. Algumas mutações da Samambaia de Barnsley são também apresentadas.

Palavras-chave: Fractais, Samambaia de Barnsley, Matlab.

ABSTRACT

SCHWINGEL, Júlio Cesar da Silva. THE MATHEMATICS OF BARNSLEY'S FERN. 42 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

This work aims to present the main mathematical ideas of Barnsley' Fern, a fractal that recreates an image that resembles a fern leaf of the *Black Spleenwort* variety and is based on four elementary affine transformations. Some mutations of Barnsley' Fern are also presented.

Keywords: Fractals, Barnsley's fern, Matlab

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O termo fractal foi introduzido em 1975 por Benoît Mandelbrot (MANDELBROT, 1991) e é derivado do latim, do adjetivo *fractus*, que significa quebrar, fracionar. Um fractal consiste em um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, sendo cada uma delas semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e de escala. Em muitos casos, podem ser gerados por um padrão repetido, tipicamente por meio de um processo recorrente ou iterativo. Sua popularização ocorreu na década de 80 devido ao avanço da informática, que permitiu maior precisão na confecção de imagens fractais (MANDELBROT, 1991; BARNSLEY, 1988; SERRA; KARAS, 1997).

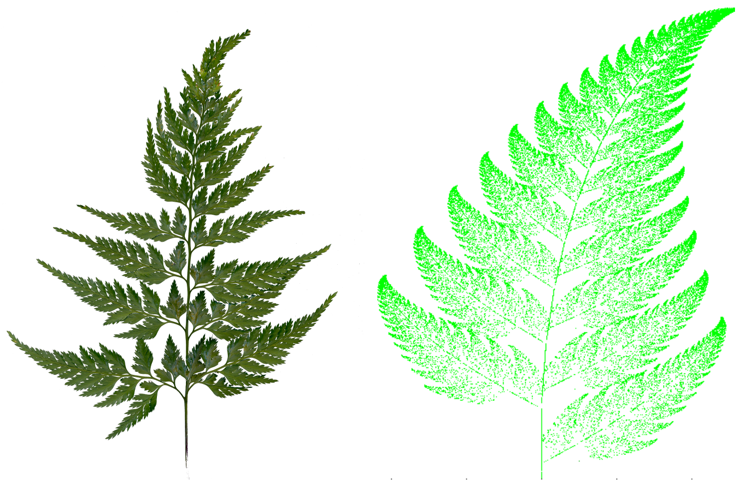
Fractais aproximados (ou pseudo-fractais) apresentam uma estrutura auto-similar ao longo de uma extensa, porém finita, faixa de escalas de observação. Este é o caso das samambaias, cujos folíolos são semelhantes, mas não idênticos, à folha como um todo. Neste contexto, fractais podem ser considerados representações abstratas de estruturas reais presentes na natureza. Um exemplo é a Samambaia de Barnsley que é um fractal que se assemelha a uma samambaia do tipo *Black Spleenwort* (Asplenium adiantum-nigrum, Fig. 1.1)[1] (BARNSLEY, 1988).

Este fractal, proposto inicialmente por Michael Barnsley em 1985, ressalta a beleza e a riqueza da matemática por trás das formas naturais – e pode ser ilustrado através de processos elementares. Por se tratar de tema relativamente novo no campo da matemática, há pouco material de estudo e também poucas referências em português sobre o assunto.

Neste contexto, o presente trabalho objetiva, através de uma matemática que pode ser assimilada por estudantes e professores do Ensino Médio, compreender as ideias principais do fractal denominado Samambaia de Barnsley. Além disso, são explorados os principais pontos de sua implementação computacional tomando-se como base os sistemas de funções iteradas (IFS - do inglês, *Iterated Function Systems*), os quais geram figuras fractais através da repetição em escala de uma mesma figura (BARNSLEY; DEMKO, 1985).

O trabalho está organizado da seguinte maneira: o Capítulo 2 introduz a Samambaia de Barnsley, explica sua construção e apresenta um algoritmo que a aproxima. No Capítulo

[1] `http://hdl.handle.net/10316/28073`



(a) (b)

Figura 1.1: Natureza e fractais: (a) exemplo de samambaia da variedade ***Black Spleenwort*** **e (b) aproximação por meio de um pseudo-fractal.**

3 faz-se uma explanação da matemática envolvida na construção da Samambaia de Barnsley. Algumas mutações são apresentadas no Capítulo 4. Por fim, no Capítulo 5 são apresentandas algumas considerações finais.

2 A SAMAMBAIA DE BARNSLEY

A Samambaia de Barnsley foi apresentada pela primeira vez no artigo inaugural sobre IFS[1], de autoria do matemático britânico Michael Barnsley (BARNSLEY; DEMKO, 1985), e posteriormente publicada em seu livro intitulado *Fractals Ewerywhere* (BARNSLEY, 1988).

Na construção da Samambaia de Barnsley por meio de um IFS, um ponto do plano é repetidamente transformado por meio de quatro transformações afins, com diferentes probabilidades de ocorrência. O algoritmo proposto por Barnsley (BARNSLEY; DEMKO, 1985) pode ser sumarizado da seguinte maneira:

1. quatro funções de transformação, denotadas aqui por T_1, T_2, T_3 e T_4, são definidas:

$$\begin{aligned} T_k : \mathbf{R}^2 &\to \mathbf{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto A_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b_k. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para a Samambaia de Barnsley, foco deste trabalho, são consideradas:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix},\ \text{e}\ b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[1]Um Sistema de Funções Iteradas (IFS - do inglês *Iterated Function System*) é uma técnica de se construir figuras fractais através da repetição em escala de uma mesma figura. Formalmente, é definido por um conjunto finito de aplicações contrativas em um espaço métrico completo

2. a cada uma das transformações afins T_k, $k \in \{1,2,3,4\}$, é atribuída uma probabilidade de aplicação: $p_1 = 85\%$, $p_2 = 7\%$, $p_3 = 7\%$ e $p_4 = 1\%$, respectivamente;

3. escolhe-se um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^2$ qualquer;

4. aplica-se as transformações T_k de forma aleatória, de acordo com sua probabilidade de ocorrência. Isto é, dado $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, e $k \in \{1,2,3,4\}$,

$$x_{n+1} = T(x_n), \qquad \text{Prob}\{T = T_k\} = p_k, \tag{2.2}$$

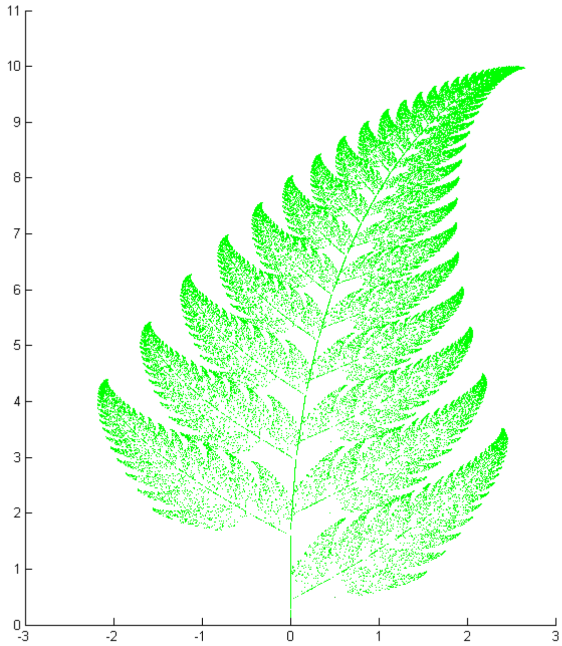
em que $\text{Prob}\{T = T_k\}$ representa a probabilidade de T assumir a transformação afim T_k (na iteração em questão).

O código seguinte (em Matlab, adaptado de (MOLER, 2011)) fornece uma aproximação da Samambaia de Barnsley.

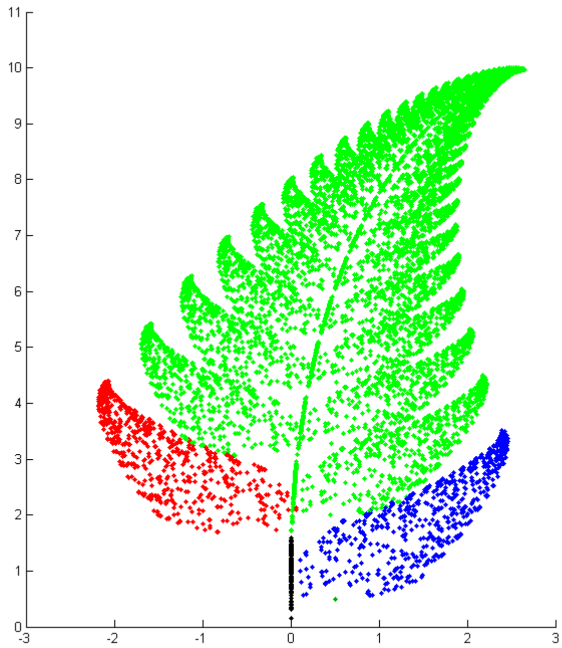
```
1  set(gcf,'color','white')
2  x = [0.5; 0.5];
3  hold on;
4  plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','k');
5  p = [.85 .92 .99 1.00];
6  A1 = [ .85  .04; -.04  .85]; b1 = [0; 1.6];
7  A2 = [ .20 -.26;  .23  .22]; b2 = [0; 1.6];
8  A3 = [-.15  .28;  .26  .24]; b3 = [0; .44];
9  A4 = [   0    0;    0  .16];
10 for k=1:70000
11     r = rand;
12     if r < p(1)
13         x = A1*x + b1; plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','g')
14     elseif r < p(2)
15         x = A2*x + b2; plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','g')
16     elseif r < p(3)
17         x = A3*x + b3; plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','g')
18     else
19         x = A4*x;      plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','g')
20     end
21 end
22 axis([-3 3 -0.5 10.5]);
```

Resultados teóricos mais avançados (fora do escopo deste trabalho) garantem que, independentemente do x_0 escolhido, a partir de um certo $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande os pontos da sequência $(x_n)_{n \geq N}$ definidos em (2.2) estão próximos do conjunto denominado Samambaia de Barnsley (BARNSLEY; DEMKO, 1985; BARNSLEY, 1988).

A Fig. 2.1(a) ilustra a saída da implementação acima. A Fig 2.1(b) considera 10.000 iterações (trocar 70.000 por 10.000 na linha 10 do código), associando-se a cada ponto gerado uma cor correspondente à transformação utilizada: verde para T_1; vermelho para T_2 (trocar 'g' por 'r' na linha 15 do código); azul para T_3 (trocar 'g' por 'b' na linha 17); e preto para T_4 (trocar 'g' por 'k' na linha 19) - o código-fonte para geração da Fig 2.1(b) pode ser encontrado no Anexo A - Programa 1.



(a) $x_0 = (0.5, 0.5)^t$, 70.000 iterações.

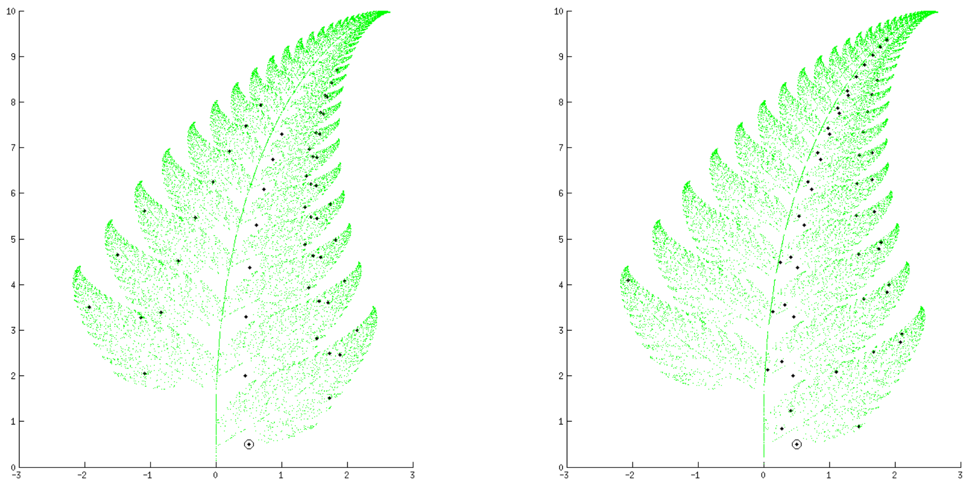


(b) $x_0 = (0.5, 0.5)^t$, 10.000 iterações.

Figura 2.1: Ilustrações da Samambaia de Barnsley.

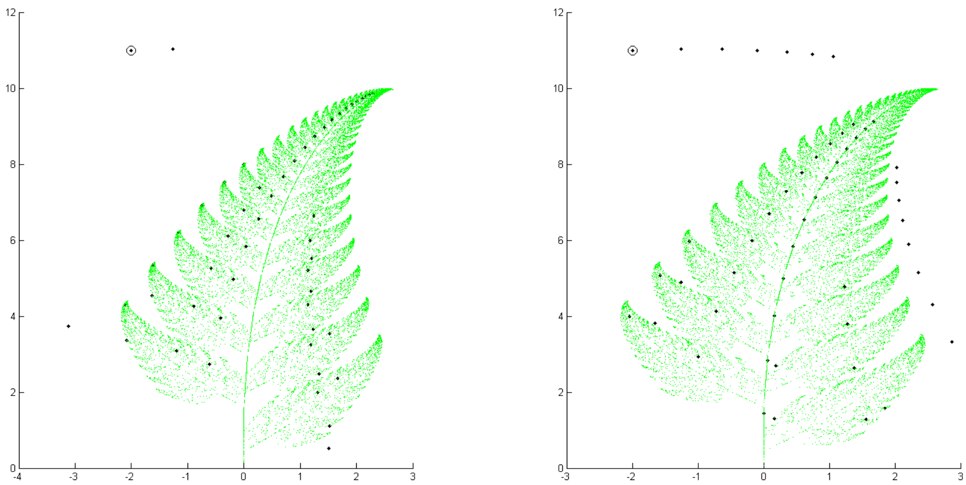
Observe na Fig 2.1(b) que os pontos gerados por T_1 são responsáveis pela formação dos ramos cada vez menores (corpo e ponta da samambaia), os gerados por T_2 formam o primeiro ramo esquerdo, os gerados por T_3 formam o primeiro ramo direito, e os pontos gerados por T_4 formam a haste da samambaia.

As Figs. 2.2–2.5 ilustram aproximações da Samambaia de Barnsley geradas a partir de diferentes x_0 (as primeiras 50 iterações são indicadas por pontos pretos). O código-fonte para gerar estas figuras pode ser encontrado no Anexo A - Programa 2.



(a) Aproximação 1 (b) Aproximação 2

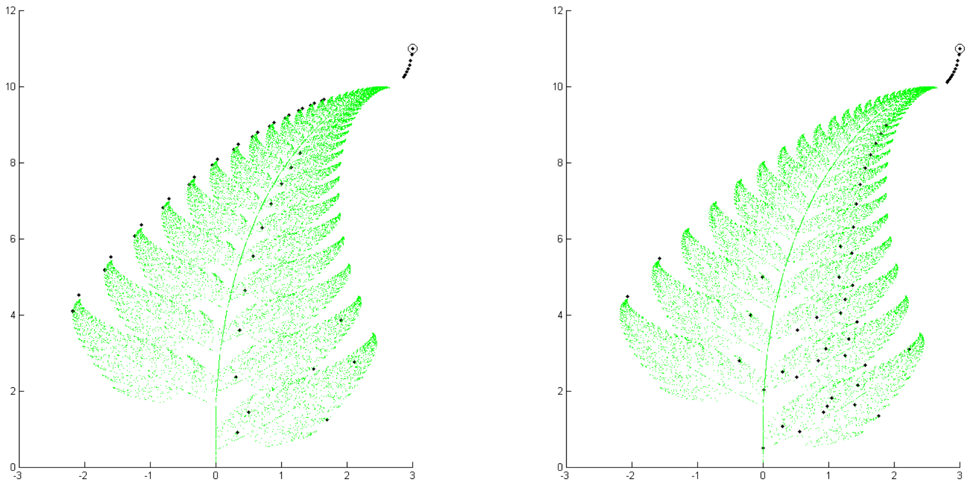
Figura 2.2: Ilustração da Samambaia de Barnsley considerando $x_0 = (0.5, 0.5)^t$ **e** 20.000 **iterações.**



(a) Aproximação 1 (b) Aproximação 2

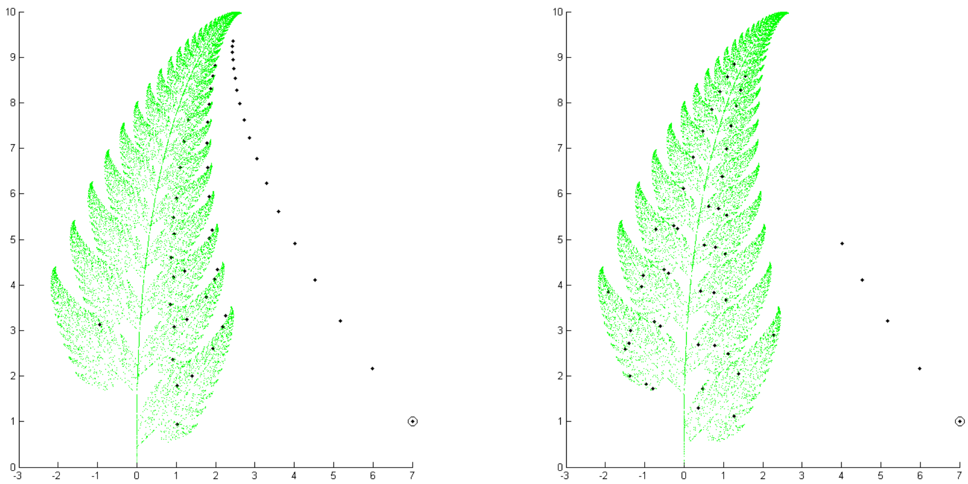
Figura 2.3: Ilustração da Samambaia de Barnsley considerando $x_0 = (-2, 11)^t$ **e** 20.000 **iterações.**

A escolha das probabilidades de ocorrência para cada uma das transformações T_1, T_2, T_3 e T_4 orienta o processo de construção da figura fractal. É importante enfatizar que a esco-



(a) Aproximação 1 (b) Aproximação 2

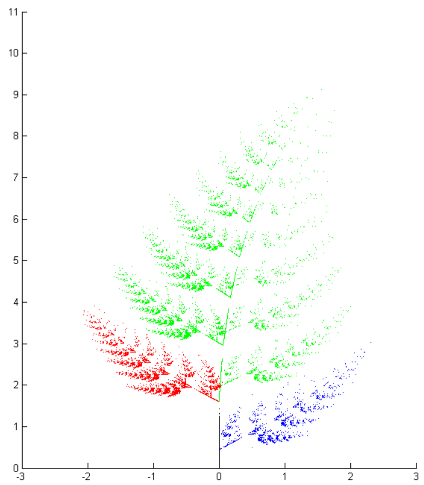
Figura 2.4: Ilustração da Samambaia de Barnsley considerando $x_0 = (3, 11)^t$ e 20.000 iterações.



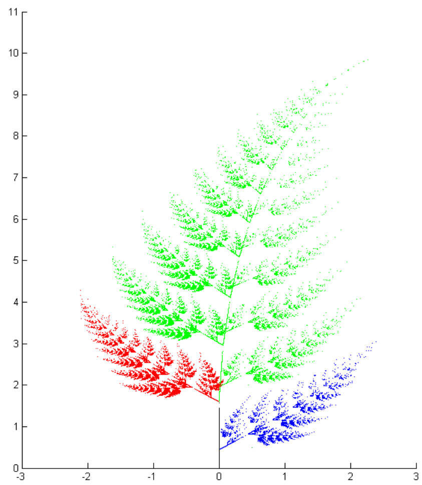
(a) Aproximação 1 (b) Aproximação 2

Figura 2.5: Ilustração da Samambaia de Barnsley considerando $x_0 = (7, 1)^t$ e 20.000 iterações.

lha de outras probabilidades não altera o resultado final, apenas deixa o processo de recriar a samambaia computacionalmente mais lento. A Fig. 2.6 apresenta a Samambaia de Barnsley obtida considerando-se 20.000 e 70.000 iterações, com as probabilidades de ocorrência dadas por $p_1 = 50\%$, $p_2 = 22\%$, $p_3 = 22\%$ e $p_4 = 6\%$, respectivamente. A Fig. 2.7 ilustra a Samambaia de Barnsley obtida com 20.000 e 70.000 iterações, com $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 25\%$. O código-fonte para gerar estas figuras pode ser encontrado no Anexo A - Programa 3.

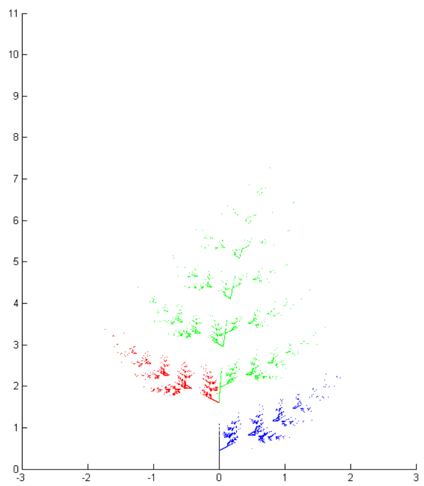


(a) 20.000 iterações

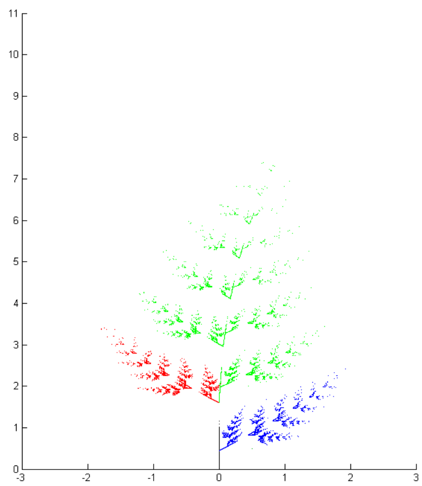


(b) 70.000 iterações

Figura 2.6: Ilustração da Samambaia de Barnsley com probabilidades $p_1 = 50\%$, $p_2 = 22\%$, $p_3 = 22\%$ e $p_4 = 6\%$.



(a) 20.000 iterações



(b) 70.000 iterações

Figura 2.7: Ilustração da samambaia de Barnsley com probabilidades: $p_1 = 25\%$, $p_2 = 25\%$, $p_3 = 25\%$ e $p_4 = 25\%$.

3 UM POUCO DA MATEMÁTICA DA SAMAMBAIA DE BARNSLEY

As transformações em (2.1) são transformações afins, isto é, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, da forma

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+e \\ cx+dy+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

em que a, b, c, d, e, e f são números reais. Rotações, contrações, dilatações, reflexões e translações, ou composições destas, são exemplos clássicos de transformações afins. Outra propriedade importante é que levam retas em retas e preservam razão entre segmentos no plano.

Não é difícil mostrar que toda transformação afim pode ser decomposta como segue (LIMA, 2006):

$$\begin{aligned} &T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta & -s\sin\phi \\ r\sin\theta & s\cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

em que r e s são fatores de contração/dilatação, e θ e ϕ são ângulos de rotação da transformação T. O vetor $(e,f)^t$ associa uma translação à T.

A Tab. 3.1 apresenta os valores particulares de r, s, θ, ϕ, e e f associados às transformações T_1, T_2, T_3 e T_4 da definição da Samambaia de Barnsley em (2.1) (BARNSLEY, 1988).

Tabela 3.1: Parâmetros das transformações afins utilizadas na Samambaia de Barnsley.

Transformação	r	θ (graus)	s	ϕ (graus)	e	f	p (probabilidade)
T_1	0.85	-2.5	0.85	-2.5	0	1.6	0.85
T_2	0.3	49	0.34	49	0	1.6	0.07
T_3	0.3	120	0.37	-50	0	0.44	0.07
T_4	0	0	0.16	0	0	0	0.01

Observe que tais transformações são, em essência, composições de rotações, contrações, reflexões e translações. De fato,

- T_1 realiza uma rotação de $2.5°$ no sentido horário, seguida de contração com fator 0.85, e translação vertical de $b_1 = (0, 1.6)^t$;

- T_2 realiza uma rotação de $49°$ no sentido antihorário, seguida de contração com fator 0.3 na direção do eixo x, e rotação de $49°$ no sentido antihorário seguido de contração com fator 0.34 na direção y. Finalmente, uma translação vertical de $b_2 = (0, 1.6)^t$;

- T_3 realiza uma rotação de $120°$ no sentido antihorário, seguido de contração com fator 0.3 na direção x, e rotação de $50°$ no sentido horário seguido de contração com fator 0.37 em y. Uma translação vertical de $b_2 = (0, 0.44)^t$ é finalmente aplicada. Fica evidente uma componente reflexiva em T_3; e

- T_4 realiza uma projeção sobre o eixo y, seguido de uma contração com fator 0.16.

A Fig. 3.1 ilustra o efeito de cada uma das transformações T_1, T_2, T_3 e T_4 aplicadas sobre um conjunto de 11 pontos cujas coordenadas, se ligadas em ordem, formam o desenho de uma casa (*house*) (MOLER, 2011). A Fig. 3.2 apresenta o resultado da aplicação de T_1, repetidas vezes, sobre tais coordenadas (o código-fonte associado está no Anexo A - Programa 4).

Na sequência, são apresentados alguns resultados relacionados à característica contrativa de cada transformação T_k em (2.1).

Proposição 3.1. *Considere o conjunto* $\Omega = \left\{||Ax||_2/||x||_2,\ x \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\right\} \subset [0, +\infty)$*, em que* $A = (a_{ij})$ *é uma matriz* 2×2 *de números reais. Então,* Ω *possui máximo.*

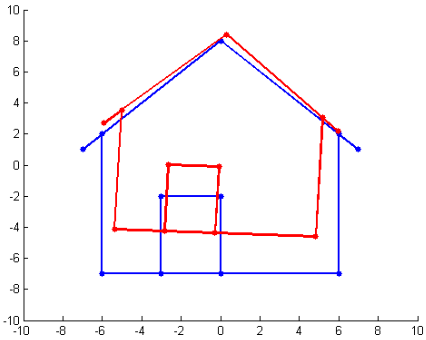
Demonstração:
De fato,

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{||Ax||_2/||x||_2,\ x \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\right\} = \left\{||A\left(x/||x||_2\right)||_2,\ x \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\right\} = \\ &= \left\{||Ay||_2,\ y \in \mathbb{R}^2,\ ||y||_2 = 1\right\} = \left\{\left|\left|A\left(\cos\theta, \sin\theta\right)^t\right|\right|_2,\ \theta \in [0, 2\pi]\right\} = \\ &= \left\{\sqrt{(a_{11}\cos\theta + a_{12}\sin\theta)^2 + (a_{21}\cos\theta + a_{22}\sin\theta)^2},\ \theta \in [0, 2\pi]\right\}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

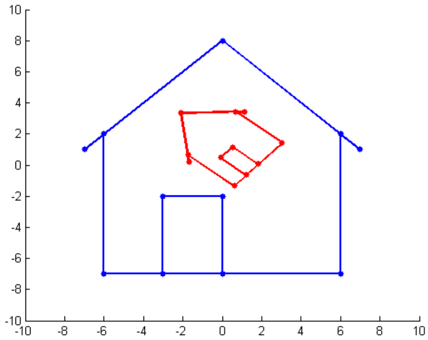
Como a função $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\theta) = \sqrt{(a_{11}\cos\theta + a_{12}\sin\theta)^2 + (a_{21}\cos\theta + a_{22}\sin\theta)^2} \tag{3.4}$$

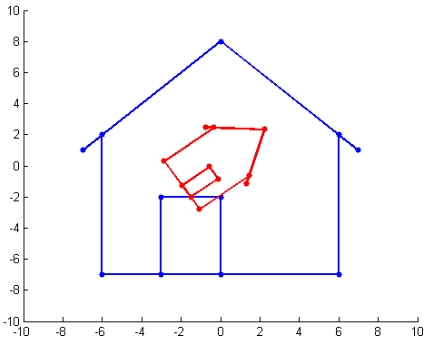
é contínua (pois é composição de funções elementares contínuas), segue do *Teorema de Weierstrass* (LIMA, 2016) que f assume valor máximo em algum ponto do intervalo $[0, 2\pi]$.



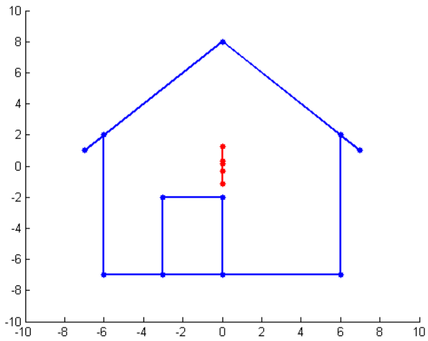
(a) T_1



(b) T_2

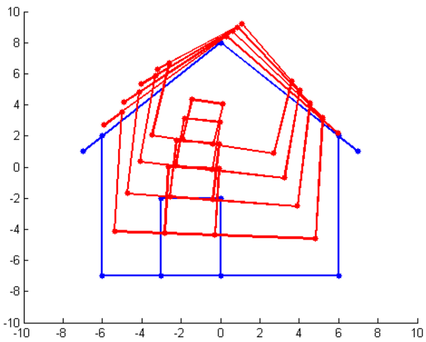


(c) T_3

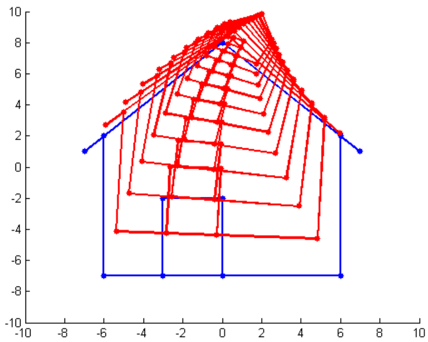


(d) T_4

Figura 3.1: Ilustração (vermelho) do resultado da aplicação das transformações T_1, T_2, T_3 e T_4 sobre a figura *house* (azul).



(a) Qautro iterações de T_1



(b) Dez iterações de T_1

Figura 3.2: Ilustração (vermelho) do resultado da aplicação de T_1 sobre a figura *house* (azul).

Deste modo, existe $\tilde{\theta}$ em $[0,2\pi]$ tal que $f(\tilde{\theta}) = \max\Omega$. □

Da Prop. 3.1 segue que se A é uma matriz 2×2 de números reais, então existem uma constante real $K > 0$ e $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ tais que $||Ax||_2 \leq K||x||_2$ e $||A\tilde{x}||_2 = K||\tilde{x}||_2$, para todo $x \neq 0$ em

$\mathbb{R}^2$. Assim, para as tranformações T_1, T_2, T_3 e T_4 em (2.1) é possível afirmar que

$$||T_k(x) - T_k(y)||_2 = ||(A_k x + b_k) - (A_k y + b_k)||_2 = ||A_k(x-y)||_2 \leq K_k \, ||x-y||_2 \,, \tag{3.5}$$

em que K_k, $k \in \{1,2,3,4\}$, é a constante dada pela referida proposição, isto é,

$$K_k = \max\left\{\sqrt{\left(a_{11}^k \cos\theta + a_{12}^k \sin\theta\right)^2 + \left(a_{21}^k \cos\theta + a_{22}^k \sin\theta\right)^2};\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}, \tag{3.6}$$

em que $A_k = (a_{ij}^k)$. Com o auxílio do software Matlab, cujo script é o que segue,

```
A = [0.85 0.04; -0.04 0.85];
t = [0:0.0001:2*pi];
K = max(sqrt((A(1,1)*cos(t)+A(1,2)*sin(t)).^2+(A(2,1)*cos(t)+A(2,2)*sin(t)).^2));
```

obteve-se os seguintes valores aproximados para as constantes (de contração), K_k:

$$K_1 \approx 0.851,\ \ K_2 \approx 0.341,\ \ K_3 \approx 0.380,\ \text{ e }\ K_4 \approx 0.160. \tag{3.7}$$

Portanto, como cada transformação afim em (2.1) é uma contração, esta terá um único ponto atrator, isto é, independentemente do x_0 escolhido este será atraído por um dos quatro atratores definidos pelas transformações T_1, T_2, T_3 e T_4. De fato, para cada T_k, $k \in \{1,2,3,4\}$ fixo, e denotando como I_2 a matriz identidade de ordem 2, é verdade que

$$\begin{aligned}
x_1^k &= T_k(x_0) = A_k x_0 + b_k,\\
x_2^k &= T_k(x_1^k) = A_k\left(A_k x_0 + b_k\right) + b_k = A_k^2 x_0 + [A_k + I_2]b_k,\\
x_3^k &= T_k(x_2^k) = A_k\left(A_k^2 x_0 + [A_k + I]b_k\right) + b_k = A_k^3 x_0 + \left[A_k^2 + A_k + I_2\right] b_k,\\
&\ \ \vdots\\
x_n^k &= T_k(x_{n-1}^k) = A_k^n x_0 + \left[A_k^{n-1} + A_k^{n-2} + \cdots + A_k^2 + A_k + I_2\right] b_k.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Fazendo $S_n^k = A_k^{n-1} + A_k^{n-2} + \cdots + A_k^2 + A_k + I_2$, segue que

$$A_k S_n^k = S_n^k A_k = A_k^n + A_k^{n-1} + \cdots + A_k^3 + A_k^2 + A_k. \tag{3.9}$$

Assim,

$$S_n^k\,(I_2 - A_k) = S_n^k - A_k S_n^k = I_2 - A_k^n. \tag{3.10}$$

Já que os determinantes $\det(I_2 - A_1) \approx 0.02$, $\det(I_2 - A_2) \approx 0.68$, $\det(I_2 - A_3) \approx 0.80$ e $\det(I_2 - A_4) \approx 0.84$ são ambos não nulos, segue que as matrizes $(I_2 - A_k)$, $k \in \{1,2,3,4\}$, são inversíveis.

Portanto, x_n^k em (3.8) pode ser apresentada como

$$x_n^k = T_k^n(x_0) = A_k^n x_0 + (I_2 - A_k^n)\,(I_2 - A_k)^{-1}\, b_k, \quad k \in \{1,2,3,4\}. \tag{3.11}$$

Usando o fato que A_k, $k \in \{1,2,3,4\}$, é uma matriz de contração com fator K_k, segue que, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ fixo,

$$\begin{aligned} 0 \le ||A_k^n x||_2 = ||A_k\, A_k^{n-1} x||_2 \le K_k\, ||A_k^{n-1} x||_2 = K_k\, ||A_k\, A_k^{n-2} x||_2 \le \\ \le K_k^2\, ||A_k^{n-2} x||_2 \le \ldots \le K_k^{n-1}\, ||A_k x||_2 \le K_k^n\, ||x||_2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Como $0 \le K_k < 1$ e $x \in \mathbb{R}^2$ é fixo, segue que $K_k^n\, ||x||_2$ vai para zero quando n tende ao infinito. Do *Teorema do Confronto* (LIMA, 2016) segue, então, que

$$\lim_{n\to\infty} ||A_k^n x||_2 = 0, \tag{3.13}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$ fixo. Em particular, as escolhas $x = (1,0)^t$ e $x = (0,1)^t$ em (3.13) nos permitem concluir que

$$\lim_{n\to\infty} A_k^n = 0 \quad \text{(matriz nula)}. \tag{3.14}$$

Usando (3.14) em (3.11) implica que

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = \lim_{n\to\infty} \left[A_k^n x_0 + (I_2 - A_k^n)\,(I_2 - A_k)^{-1}\, b_k \right] = (I_2 - A_k)^{-1}\, b_k. \tag{3.15}$$

Os limites em (3.15), pontos atratores de T_k, $k \in \{1,2,3,4\}$, são dados por

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} x_n^1 = (I_2 - A_1)^{-1}\, b_1 \approx \begin{pmatrix} 2.655 \\ 9.958 \end{pmatrix}, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n^2 = (I_2 - A_2)^{-1}\, b_2 \approx \begin{pmatrix} -0.608 \\ 1.872 \end{pmatrix}, \\ &\lim_{n\to\infty} x_n^3 = (I_2 - A_3)^{-1}\, b_3 \approx \begin{pmatrix} 0.154 \\ 0.631 \end{pmatrix}, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n^4 = (I_2 - A_4)^{-1}\, b_4 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

A sequência $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ em (3.8) é chamada *órbita* do referido atrator. A Fig. 3.3(a) ilustra os quatros atratores (quadrados pretos) das transformações T_k, $k \in \{1,2,3,4\}$. Observe que os pontos gerados por T_1 são atraídos para a região da ponta da samambaia, T_2 e T_3 atraem para as regiões no entorno dos caules das primeiras folhas (vermelho e azul, respectivamente), e T_4 atrai para a haste da samambaia (o código-fonte para gerar esta figura pode ser encontrado no Anexo A - Programa 5).

Um fato importante é que uma transformação afim T é totalmente determinada pela imagem de três pontos não colineares Q_1, Q_2 e Q_3 do plano. De fato, fazendo $Q_i = (x_i, y_i)$,

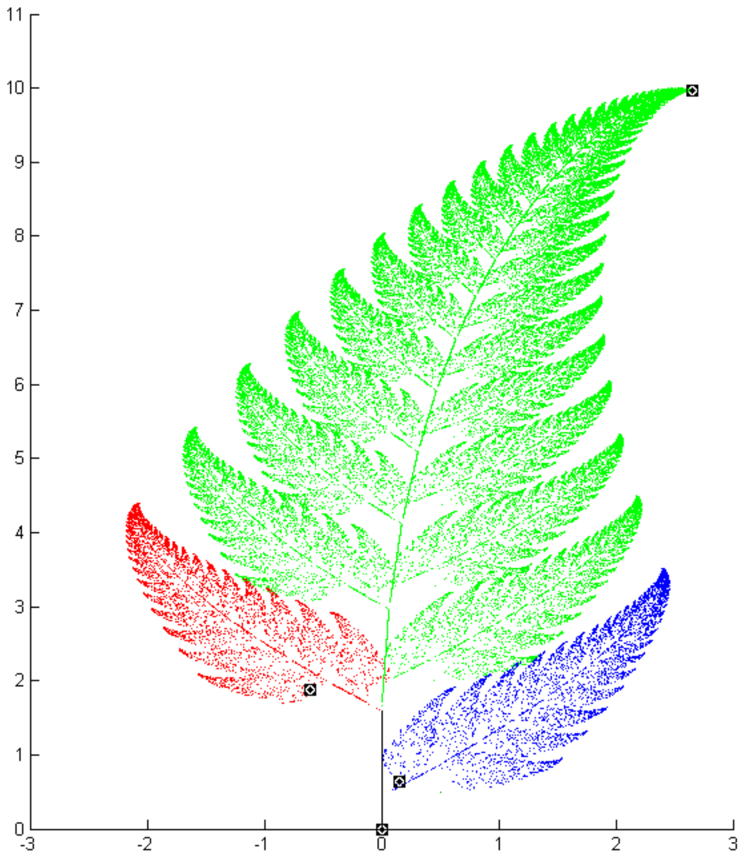


Figura 3.3: Ilustração dos pontos atratores da Samambaia de Barnsley.

$T(Q_i) = (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, $i \in \{1,2,3\}$, os parâmetros a, b, c, d, e e f em (3.1) são as soluções dos sistemas de equações lineares seguintes:

$$\begin{cases} x_1 a + y_1 b + e = \bar{x}_1, \\ x_2 a + y_2 b + e = \bar{x}_2, \\ x_3 a + y_3 b + e = \bar{x}_3, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 c + y_1 d + f = \bar{y}_1, \\ x_2 c + y_2 d + f = \bar{y}_2, \\ x_3 c + y_3 d + f = \bar{y}_3. \end{cases} \tag{3.17}$$

Estes sistemas de equações admitem solução única se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \tag{3.18}$$

já que o determinante não muda se uma linha é subtraída de outra, ou $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \neq 0$, isto é, Q_1, Q_2 e Q_3 são não colineares.

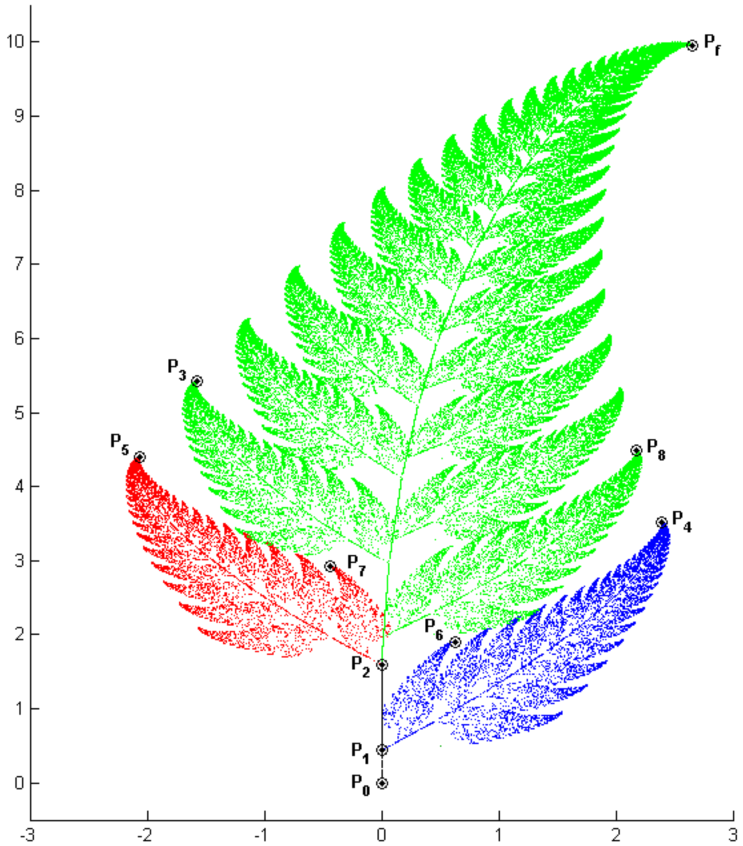


Figura 3.4: Ilustração de pontos característicos importantes da Samambaia de Barnsley.

Este resultado é fundamental para a obtenção das transformações afins T_k em (2.1):

(a) T_1 leva a samambaia toda na parte verde, Fig. 3.4, conduzindo a ponta da samambaia nela mesma e as pontas das folhas vermelha e azul nas pontas das folhas verdes da esquerda e direita mais próximas, respectivamente. Isto é,

$$T_1(P_f) = P_f, \quad T_1(P_5) = P_3 \quad \text{e} \quad T_1(P_4) = P_8. \tag{3.19}$$

(b) T_2 leva a samambaia toda na sua folha vermelha, Fig. 3.4, conduzindo P_f em P_5, P_0 em P_2, e P_4 em P_7. Isto é,

$$T_2(P_f) = P_5, \quad T_2(P_0) = P_2 \quad \text{e} \quad T_2(P_4) = P_7. \tag{3.20}$$

(c) T_3 leva a samambaia toda na sua folha azul, Fig. 3.4, conduzindo P_f em P_4, P_0 em P_1, e P_4

em P_6. Isto é,

$$T_3(P_f) = P_4, \quad T_3(P_0) = P_1 \quad \text{e} \quad T_3(P_4) = P_6. \tag{3.21}$$

(d) T_4 leva a samambaia toda na região preta, caule da samambaia na Fig. 3.4, projetando todos os pontos da samambaia sobre o eixo y antes de aplicar uma contração. Isto é, $T_4(x,y) = (0, \xi y)$, $\xi \in \mathbb{R}$ fixo, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e $T_4(x_f, y_f) = (0, \xi y_2)$, em que (x_f, y_f) e (x_2, y_2) são as coordenadas dos pontos P_f e P_2, respectivamente. A condição $T_4(x_f, y_f) = (0, \xi y_2)$ conduz a um fator de contração de 0.16.

Apenas para fins de verificação, considere as coordenadas (aproximações) dos pontos característicos na Fig. 3.4 (obtidas com auxílio do Programa 6 - Anexo A a partir das próprias transformações T_k):

$P_f = (2.65,\ 9.96)^t$ - ponta da samambaia (ponto fixo, atrator, de T_1);

$P_0 = (0.00,\ 0.00)^t$ - base da haste da samambaia;

$P_1 = T_3(P_0) = (0.00,\ 0.44)^t$ - base da primeira folha (direita);

$P_2 = T_2(P_0) = (0.00,\ 1.60)^t$ - base da primeira folha (esquerda);

$P_3 = T_1(P_5) = (-1.61,\ 5.42)^t$ - ponta da segunda folha (esquerda);

$P_4 = T_3(P_f) = (2.40,\ 3.52)^t$ - ponta da primeira folha (direita);

$P_5 = T_2(P_f) = (-2.06,\ 4.40)^t$ - ponta da primeira folha (esquerda);

$P_6 = T_3(P_4) = (0.62,\ 1.91)^t$ - ponta da folha da primeira folha (direita);

$P_7 = T_2(P_4) = (-0.44,\ 2.92)^t$ - ponta da folha da primeira folha (esquerda);

$P_8 = T_1(P_4) = (2.18,\ 4.50)^t$ - ponta da segunda folha (direita).

Em função das coordenadas dos pontos característicos os sistemas lineares em (3.19) podem ser apresentados por

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2.65a + 9.96b + e &=& 2.65 \\ -2.06a + 4.40b + e &=& -1.61 \\ 2.39a + 3.52b + e &=& 2.18 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{rcr} 2.65c + 9.96d + f &=& 9.96 \\ -2.06c + 4.40d + f &=& 5.42 \\ 2.39c + 3.52d + f &=& 4.50 \end{array} \right. , \tag{3.22}$$

cujas soluções aproximadas (calculadas utilizando o Programa 7 - Anexo A) são $a = 0.85$, $b = 0.04$, $c = -0.04$, $d = 0.85$, $e = -0.02$ e $f = 1.60$, boas aproximações das componentes de T_1.

Da mesma forma para os sistemas em (3.20):

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2.65a+9.96b+e & = & -2.06 \\ 0.00a+0.00b+e & = & 0.00 \\ 2.39a+3.52b+e & = & -0.44 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2.65c+9.96d+f & = & 4.40 \\ 0.00c+0.00d+f & = & 1.60 \\ 2.39c+3.52d+f & = & 2.92 \end{array}\right. , \qquad (3.23)$$

cujas soluções aproximadas são $a = 0.20$, $b = -0.26$, $c = 0.23$, $d = 0.22$, $e = 0.00$ e $f = 1.60$, as componentes de T_2.

Os sistemas lineares em (3.21) podem ser reescritos como

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2.65a+9.96b+e & = & 2.40 \\ 0.00a+0.00b+e & = & 0.00 \\ 2.39a+3.52b+e & = & 0.62 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2.65c+9.96d+f & = & 3.52 \\ 0.00c+0.00d+f & = & 0.44 \\ 2.39c+3.52d+f & = & 1.91 \end{array}\right. , \qquad (3.24)$$

cujas soluções aproximadas são $a = -0.16$, $b = 0.28$, $c = 0.26$, $d = 0.24$, $e = 0.00$ e $f = 0.44$, aproximações das componentes de T_3.

4 ALGUMAS MUTAÇÕES DA SAMAMBAIA DE BARNSLEY

Alterando-se os parâmetros das transformações T_k, $k \in \{1,2,3,4\}$, é possível gerar variações interessantes da Samambaia de Barnsley. As relações entre os parâmetros são complexas, ou seja, tais alterações precisam ser planejadas (obviamente, levando em consideração a formalização matemática abordada neste trabalho, mais especificamente no Capítulo 3) para a obtenção de figuras significativas. Por exemplo, ao fazermos $T_2 = T_1$, a Samambaia de Barnsley passa a ter a forma ilustrada na Figura 4.1.

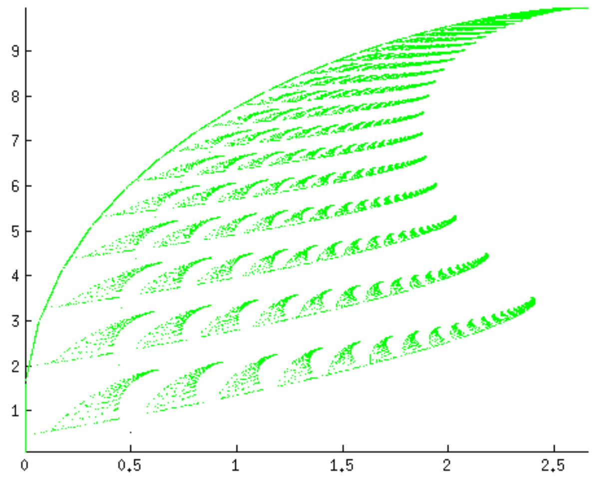


Figura 4.1: Ilustração de uma mutação.

Na sequência, são apresentados quatro exemplos de mutações. A cada uma das transformações afins, T_k, $k \in \{1,2,3,4\}$, é atribuída uma probabilidade de aplicação. Para os três primeiros exemplos, foram consideradas $p_1 = 85\%$, $p_2 = 7\%$, $p_3 = 7\%$ e $p_4 = 1\%$, respectivamente. Para o último exemplo, foram consideradas $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 25\%$.

Os atratores das transformações nos exemplos seguintes são obtidos por (3.15) e as ilustrações foram geradas utilizando o Programa 8 do Anexo A.

4.1 EXEMPLO 1 - VARIAÇÃO PROPOSTA PELOS AUTORES

Considerando-se as transformações T_k em (2.1) com os parâmetros seguintes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.78 & 0.00 \\ -0.06 & 0.84 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 1.60 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0.12 & -0.21 \\ 0.14 & 0.28 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 1.60 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.09 & 0.24 \\ 0.16 & 0.31 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.44 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.16 \end{pmatrix},\ \text{e}\ b_4 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}.$$

obtém-se a ilustração da Fig. 4.2.

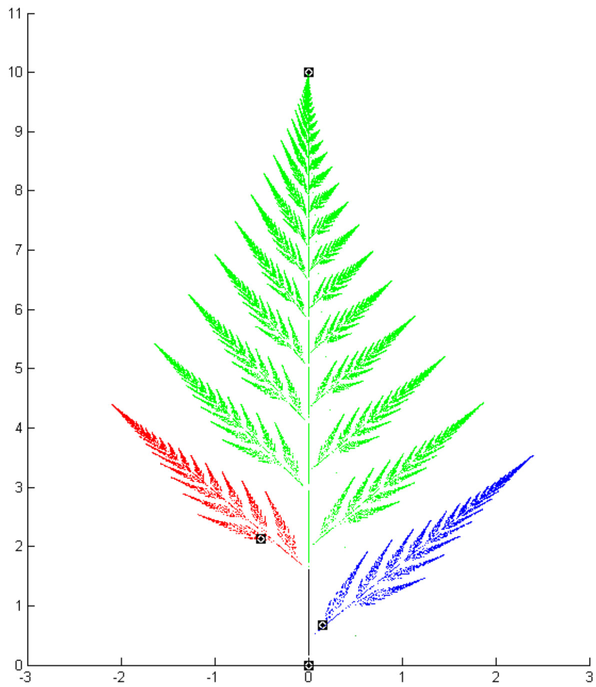


Figura 4.2: Ilustração de um fractal que assemelha-se à uma folha de samambaia; 70.000 **iterações; probabilidades** $p_1 = 85\%$**,** $p_2 = 7\%$**,** $p_3 = 7\%$ **e** $p_4 = 1\%$**.**

4.2 EXEMPLO 2 - *CYCLOSORUS* OU *THELYPTERIDACEAE*

Outra opção consiste em usar as transformações em (2.1) com os seguintes parâmetros[1]:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.01 \\ -0.01 & 0.93 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.50 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0.04 & -0.20 \\ 0.16 & 0.04 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} -0.09 \\ 0.02 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.04 & 0.20 \\ 0.16 & 0.04 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.12 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.25 \end{pmatrix}, \; \text{e} \; b_4 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ -0.40 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, é obtida uma variação que se assemelha a uma samambaia do tipo *Cyclosorus* ou *Thelypteridaceae*, ilustrada na Fig. 4.3.

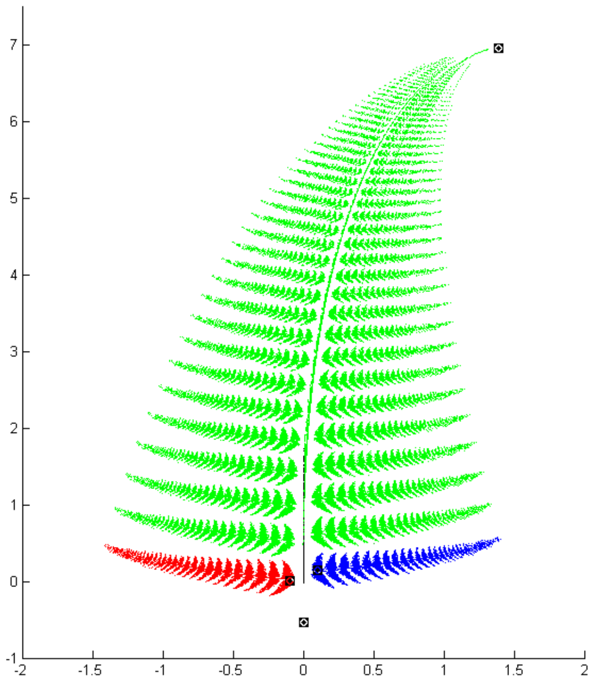


Figura 4.3: Ilustração de um fractal que assemelha-se à samambaia do tipo *Cyclosorus* **ou** *Thelypteridaceae*; 120.000 **iterações; probabilidades** $p_1 = 85\%$, $p_2 = 7\%$, $p_3 = 7\%$ **e** $p_4 = 1\%$.

[1] `http://www.home.aone.net.au/~byzantium/ferns/fractal.html`

4.3 EXEMPLO 3 - *CULCITA*

Utilizando-se os parâmetros abaixo[2], obtem-se uma variação que se assemelha a uma samambaia do tipo *Culcita* ilustrada na Fig. 4.4.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.02 \\ -0.02 & 0.83 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 1.00 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0.01 & -0.28 \\ 0.30 & 0.11 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.60 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.09 & 0.28 \\ 0.30 & 0.09 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.70 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.25 \end{pmatrix},\ \text{e}\ b_4 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ -0.14 \end{pmatrix}.$$

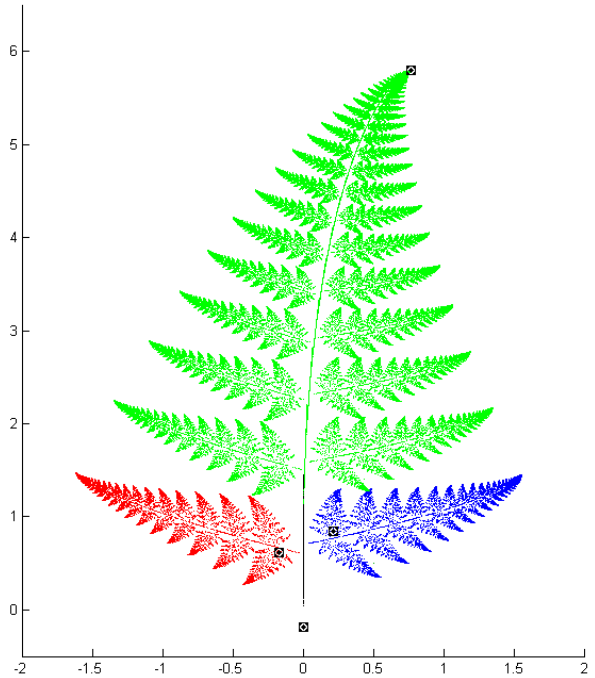


Figura 4.4: Ilustração de um fractal que assemelha-se à samambaia do tipo *Culcita*; 120.000 **iterações; probabilidades** $p_1 = 85\%$**,** $p_2 = 7\%$**,** $p_3 = 7\%$ **e** $p_4 = 1\%$**.**

[2] `http://www.home.aone.net.au/~byzantium/ferns/fractal.html`

4.4 EXEMPLO 4 - *TREE*

Os parâmetros abaixo[3] geram uma variação que se assemelha a árvore, ilustrada na Fig. 4.5.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.42 & -0.42 \\ 0.42 & 0.42 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.20 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0.42 & 0.42 \\ -0.42 & 0.42 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.20 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.00 \\ 0.00 & 0.10 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.20 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 \end{pmatrix},\ \text{e}\ b_4 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}.$$

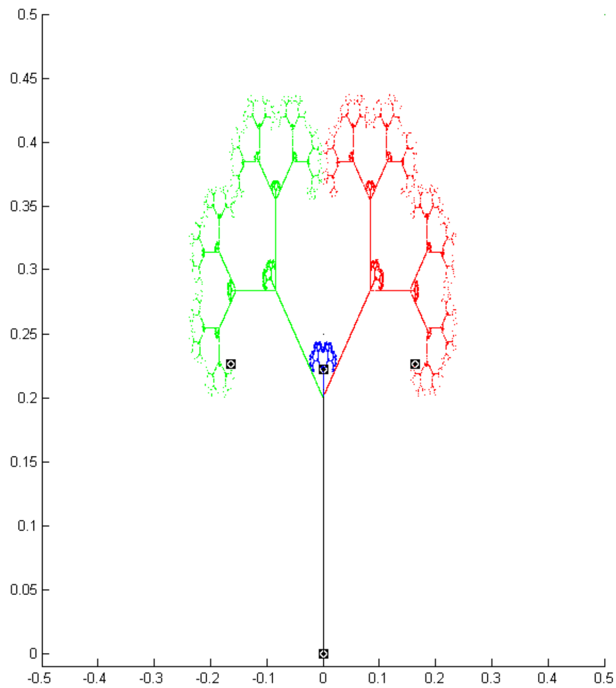


Figura 4.5: Ilustração de um fractal que assemelha-se à uma árvore; 120.000 **iterações; probabilidades** $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 25\%$**.**

[3] https://www.math.washington.edu/~morrow/336_14/papers/irina.pdf

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A geometria fractal é utilizada para descrever diversos fenômenos na natureza, para cuja interpretação são insuficientes as geometrias tradicionais. O fractal denominado Samambaia de Barnsley propõe um modelo matemático para representar/ilustrar um objeto real, despertando assim a curiosidade e trazendo a reflexões a respeito do mundo natural.

O presente trabalho revela percepções matemáticas, ao alcance de estudantes e professores do Ensino Médio, sobre a Samambaia de Barnsley, e, através das análises feitas, põe em evidência as conexões entre a geometria fractal e a álgebra. Dessa maneira, a representação simbólica da realidade é passível de ser feita em linguagem condensada, densa e rigorosa como a Matemática. Também contribui para mostrar a aplicação de conteúdos do Ensino Básico e Superior.

É interessante observar como manifestações naturais possam revelar estruturas, organizações e regularidades matemáticas, assim como fórmulas matemáticas podem recriar (ainda que aproximadamente) estruturas tão complexas quanto a folha de uma samambaia.

A investigação feita e a apresentação do trabalho proporcionam a aquisição de uma perspectiva diferente e mais aprofundada da relação da Natureza com a Matemática.

REFERÊNCIAS

BARNSLEY, M. F. **Fractals Everywhere**. San Diego, CA: Academic Press, Inc, 1988.

BARNSLEY, M. F.; DEMKO, S. Iterated function systems and the global construction of fractals. **Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A**, v. 399, p. 243–275, 1985.

LIMA, E. **Geometria analítica e álgebra Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LIMA, E. **Análise real**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

MANDELBROT, B. B. **Obtectos fractais: forma, acaso e dimensão**. Lisboa: Gradiva Publicações, 1991.

MOLER, C. **Experiments with MATLAB**. Electronic edition published by MathWorks, Inc, 2011. Disponível em: <https://www.mathworks.com/moler/exm/book.pdf>.

SERRA, C.; KARAS, E. **Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos**. Curitiba: Champagnat, 1997.

ANEXO A – PROGRAMAS EM MATLAB

Observação: os programas dispostos neste anexo são contribuições dos autores deste trabalho.

Programa 1. [utilizado na geração da Fig 2.1(b)]

```
shg
clf reset
set(gcf,'color','white')
x = [0.5; 0.5];
hold on;
plot(x(1),x(2),'.','markersize',10,'color','k');
p = [.85 .92 .99 1.00];
A1 = [ .85  .04; -.04  .85]; b1 = [0; 1.6];
A2 = [ .20 -.26;  .23  .22]; b2 = [0; 1.6];
A3 = [-.15  .28;  .26  .24]; b3 = [0; .44];
A4 = [   0    0;    0  .16];
for k=1:10000
    r = rand;
    if r < p(1)
        x = A1*x + b1; plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','g')
    elseif r < p(2)
        x = A2*x + b2; plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','r')
    elseif r < p(3)
        x = A3*x + b3; plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','b')
    else
        x = A4*x;      plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','k')
    end
end
axis([-3 3 -0.5 10.5])
set(1,'Position', [626 235 682 751])
```

Programa 2. [utilizado na geração das Figs. 2.2–2.5]

```
shg, clf reset, set(gcf,'color','white')
x = [7; 1];
hold on
darkgreen = [0 2/3 0];
markersize_value = 10;
plot(x(1),x(2),'o',x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','k');
p = [ 0.85 0.92 0.99 1.00];
A1 = [ .85 .04; -.04 .85]; b1 = [0; 1.6];
A2 = [ .20 -.26; .23 .22]; b2 = [0; 1.6];
A3 = [-.15 .28; .26 .24]; b3 = [0; .44];
A4 = [ 0 0 ; 0 .16];
Total_Iteracoes = 20000;
Total_Iteracoes_Parcial = 50;

for k=1:Total_Iteracoes_Parcial
        r = rand;
    if r < p(1)
        x = A1*x + b1;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','k')
        elseif r < p(2)
        x = A2*x + b2;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','k')
        elseif r < p(3)
        x = A3*x + b3;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','k')
    else
        x = A4*x;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','k')
    end
end

markersize_value = 1;
for k=Total_Iteracoes_Parcial:Total_Iteracoes
        r = rand;
    if r < p(1)
        x = A1*x + b1;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','g')
        elseif r < p(2)
        x = A2*x + b2;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','g')
        elseif r < p(3)
        x = A3*x + b3;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','g')
    else
        x = A4*x;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','g')
    end
end
set(1,'Position', [626 235 682 751])
```

Programa 3. [utilizado na geração das Figs. 2.6–2.7]

```
shg
clf reset
set(gcf,'color','white')
x = [0.5; 0.5];
hold on
darkgreen = [0 2/3 0];
markersize_value = 1;
plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color',darkgreen);
p = [ 0.5 0.85 0.94 1.00];
A1 = [ .85 .04; -.04 .85]; b1 = [0; 1.6];
A2 = [ .20 -.26; .23 .22]; b2 = [0; 1.6];
A3 = [-.15 .28; .26 .24]; b3 = [0; .44];
A4 = [ 0 0 ; 0 .16];
Total_Iteracoes = 70000;
for k=1:Total_Iteracoes
        r = rand;
    if r < p(1)
        x = A1*x + b1;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','g')
        elseif r < p(2)
        x = A2*x + b2;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','r')
        elseif r < p(3)
        x = A3*x + b3;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','b')
    else
        x = A4*x;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','k')
    end
end
axis([-3 3 0 11]),
set(1,'Position', [626 235 682 751])
```

Programa 4. [utilizado na geração das Figs. 3.1–3.2]

```
shg
clf reset
set(gcf,'color','white')

A1 = [ .85  .04; -.04 .85];  b1 = [0; 1.6];
A2 = [ .20 -.26;  .23 .22];  b2 = [0; 1.6];
A3 = [-.15  .28;  .26 .24];  b3 = [0; .44];
A4 = [ 0 0 ; 0 .16]; b4 = [0; 0];

A = A1; % escolha da transformação
b = b1;

% vértices da casa (house)
X = [ -6  -6  -7   0   7   6   6  -3  -3   0   0
      -7   2   1   8   1   2  -7  -7  -2  -2  -7 ];
X(:,12) = X(:,1);

% plot casa original
plot(X(1,:),X(2,:),'.-','markersize',15,'linewidth',2)
axis(10*[-1 1 -1 1])
box off
hold on

N_aplicacoes = 4;

for k = 1:N_aplicacoes
    % aplicando T = Ax + b nos vértices da casa
    X = A*X(:,1:11) + b*ones(1,11);
    X(:,12) = X(:,1);
    % plot casa tranformada por T = Ax + b
    plot(X(1,:),X(2,:),'r.-','markersize',15,'linewidth',2)
end
```

Programa 5. [utilizado na geração da Fig. 3.3]

```
shg
clf reset
set(gcf,'color','white')
x = [0.5; 0.5];
hold on
darkgreen = [0 2/3 0];
markersize_value = 1;
plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color',darkgreen);
p = [ 0.85 0.92 0.99 1.00];
A1 = [ .85 .04; -.04 .85]; b1 = [0; 1.6];
A2 = [ .20 -.26; .23 .22]; b2 = [0; 1.6];
A3 = [-.15 .28; .26 .24]; b3 = [0; .44];
A4 = [ 0 0 ; 0 .16];
Total_Iteracoes = 70000;
for k=1:Total_Iteracoes
        r = rand;
    if r < p(1)
        x = A1*x + b1;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','g')
        elseif r < p(2)
        x = A2*x + b2;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','r')
        elseif r < p(3)
        x = A3*x + b3;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','b')
    else
        x = A4*x;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','k')
    end
end
axis([-3 3 0 11]),
set(1,'Position', [626 235 682 751])

% atratores
atx = [2.655 -0.608 0.154 0]
aty = [9.958 1.872 0.631 0]
plot(atx,aty,'ko')
plot(atx,aty,'k.')
plot(atx,aty,'ks')
```

Programa 6. [utilizado na geração da Fig. 3.4]

```
shg, clf reset, set(gcf,'color','white')
x = [0.5; 0.5];
hold on
darkgreen = [0 2/3 0]; markersize_value = 1;
plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color',darkgreen);
p = [ 0.85 0.92 0.99 1.00];
A1 = [ .85 .04; -.04 .85]; b1 = [0; 1.6];
A2 = [ .20 -.26; .23 .22]; b2 = [0; 1.6];
A3 = [-.15 .28; .26 .24]; b3 = [0; .44];
A4 = [ 0 0 ; 0 .16];
Total_Iteracoes = 120000;
for k=1:Total_Iteracoes
        r = rand;
    if r < p(1)
        x = A1*x + b1;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','g')
        elseif r < p(2)
        x = A2*x + b2;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','r')
        elseif r < p(3)
        x = A3*x + b3;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','b')
    else
        x = A4*x;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','k')
    end
end

Pf = [2.655; 9.958]; P0 = [0; 0];
P1 = A3*P0 + b3; P2 = A2*P0 + b2;
P5 = A2*Pf + b2; P3 = A1*P5 + b1;
P4 = A3*Pf + b3; P6 = A3*P4 + b3;
P7 = A2*P4 + b2; P8 = A1*P4 + b1;

pontos = [Pf P0 P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8];
plot(pontos(1,:),pontos(2,:),'ko')
plot(pontos(1,:),pontos(2,:),'k.')

text(Pf(1)+0.05,Pf(2),'{\bf P_{f}}')
text(P0(1)-0.3,P0(2)-0.05,'{\bf P_{0}}')
text(P1(1)-0.3,P1(2)-0.05,'{\bf P_{1}}')
text(P2(1)-0.3,P2(2)-0.05,'{\bf P_{2}}')
text(P3(1)-0.3,P3(2)+0.15,'{\bf P_{3}}')
text(P4(1)+0.05,P4(2),'{\bf P_{4}}')
text(P5(1)-0.3,P5(2)+0.15,'{\bf P_{5}}')
text(P6(1)-0.3,P6(2)+0.15,'{\bf P_{6}}')
text(P7(1)+0.1,P7(2),'{\bf P_{7}}')
text(P8(1)+0.05,P8(2),'{\bf P_{8}}')

axis([-3 3 -0.5 10.5]), set(1,'Position', [626 235 682 751])
```

Programa 7. [utilizado para verificação de resultados]

```
clear all
Pf = [ 2.65  9.96];  % ponta da samambaia
P0 = [ 0.00  0.00];  % base da samambaia

P1 = [ 0.00  0.44];  % base da primeira folha (direita)
P2 = [ 0.00  1.60];  % base da primeira folha (esquerda)
P3 = [-1.61  5.42];  % ponta da segunda folha (esquerda)
P4 = [ 2.40  3.52];  % ponta da primeira folha (direita)
P5 = [-2.06  4.40];  % ponta da primeira folha (esquerda)
P6 = [ 0.62  1.91];  % ponta da folha da primeira folha (direita)
P7 = [-0.44  2.92];  % ponta da folha da primeira folha (esquerda)
P8 = [ 2.18  4.50];  % ponta da segunda folha (direita)

% Obtenção de T1 = A1x + b1
aux1 = [Pf 1; P5 1; P4 1];
aux2 = [Pf; P3; P8];
coef = (inv(aux1)*aux2)';
A1 = coef(:,1:2)
b1 = coef(:,3)

% Obtenção de T2 = A2x + b2
aux1 = [Pf 1; P0 1; P4 1];
aux2 = [P5; P2; P7];
coef = (inv(aux1)*aux2)';
A2 = coef(:,1:2)
b2 = coef(:,3)

% Obtenção de T3 = A3x + b3
aux1 = [Pf 1; P0 1; P4 1];
aux2 = [P4; P1; P6];
coef = (inv(aux1)*aux2)';
A3 = coef(:,1:2)
b3 = coef(:,3)

% Obtenção de T4 = A4x + b4
A4 = [0 0; 0 P2(1,2)/Pf(1,2)]
b4 = zeros(2,1)

shg
clf reset
set(gcf,'color','white','numbertitle','off','name','Fractal Fern')
x = [0.5; 0.5];
hold on
darkgreen = [0 2/3 0];
markersize_value = 1;
plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color',darkgreen);
p = [ 0.85 0.92 0.99 1.00];

Total_Iteracoes = 10000;
for k=1:Total_Iteracoes
        r = rand;
    if r < p(1)
```

```
            x = A1*x + b1;
            plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','g')
            elseif r < p(2)
            x = A2*x + b2;
            plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','r')
            elseif r < p(3)
            x = A3*x + b3;
            plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','b')
        else
            x = A4*x;
            plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','k')
        end
    end
    axis([-3 3 0 11])
    set(1,'Position', [626 235 682 751])

    % atratores
    atratores(:,1) = inv(eye(2)-A1)*b1;
    atratores(:,2) = inv(eye(2)-A2)*b2;
    atratores(:,3) = inv(eye(2)-A3)*b3;
    atratores(:,4) = inv(eye(2)-A4)*b4;
    plot(atratores(1,:),atratores(2,:),'ko')
    plot(atratores(1,:),atratores(2,:),'k.')
    plot(atratores(1,:),atratores(2,:),'ks')
```

Programa 8. [utilizado para geração das figuras do Capítulo 4]

```
shg
clf reset
set(gcf,'color','white','numbertitle','off','name','Fractal Fern')
x = [0.5; 0.5];
hold on
darkgreen = [0 2/3 0];
markersize_value = 1;
plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color',darkgreen);

samambaia = 5;

switch samambaia
    case 1   % Barnsley
    p = [ 0.85 0.92 0.99 1.00];
    A1 = [ .85 .04; -.04 .85]; b1 = [0; 1.6];
    A2 = [ .20 -.26; .23 .22]; b2 = [0; 1.6];
    A3 = [-.15 .28; .26 .24];  b3 = [0; .44];
    A4 = [ 0 0 ; 0 .16];       b4 = [0; 0];

    case 2   % gerado aleatoriamente pelos autores - Exemplo 01
    p = [ 0.85 0.92 0.99 1.00];
    A1 = [ .78 .0; -.06 .84];  b1 = [0; 1.6];
    A2 = [ .12 -.21; .14 .28]; b2 = [0; 1.6];
    A3 = [-.09 .24; .16 .31];  b3 = [0; .44];
    A4 = [ 0 0 ; 0 .16];       b4 = [0; 0];

    case 3   % Cyclosorus - Exemplo 02
    p = [ 0.85 0.92 0.99 1.00];
    A1 = [ .95 .01; -.01 .93];  b1 = [ 0.00; 0.5];
    A2 = [ .04 -.2; .16 .04];   b2 = [-0.09; 0.02];
    A3 = [-.04 .2; .16 .04];     b3 = [0.08; .12];
    A4 = [ 0 0 ; 0 .25];        b4 = [0; -0.4];

    case 4   % Culcita - Exemplo 03
    p = [ 0.85 0.92 0.99 1.00];
    A1 = [ .85 .02; -.02 .83];  b1 = [ 0; 1];
    A2 = [ .01 -.28; .3 .11];   b2 = [0; 0.6];
    A3 = [-.09 .28; .3 .09];     b3 = [0; .7];
    A4 = [ 0 0 ; 0 .25];        b4 = [0; -0.14];

    case 5   % Tree - Exemplo 04
    p = [ 0.25 0.5 0.75 1.00];
    A1 = [ .42 -0.42; 0.42 0.42]; b1 = [ 0; 0.2];
    A2 = [ .42 0.42; -0.42 0.42]; b2 = [0; 0.2];
    A3 = [ 0.1 0; 0 0.1];         b3 = [0; 0.2];
    A4 = [ 0 0 ; 0 .5];           b4 = [0; 0];

end

Total_Iteracoes = 10000;
for k=1:Total_Iteracoes
        r = rand;
```

```
    if r < p(1)
        x = A1*x + b1;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','g')
        elseif r < p(2)
        x = A2*x + b2;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','r')
        elseif r < p(3)
        x = A3*x + b3;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','b')
    else
        x = A4*x;
        plot(x(1),x(2),'.','markersize',markersize_value,'color','k')
    end
end

switch samambaia
    case 1
        axis([-3 3 0 11])
    case 2
        axis([-3 3 0 11])
    case 3
        axis([-2 2 -1 7.5])
    case 4
        axis([-2 2 -0.5 6.5])
    case 5
        axis([-0.5 0.5 -0.01 0.5])
end
set(1,'Position', [626 235 682 751])

% atratores
atratores(:,1) = inv(eye(2)-A1)*b1;
atratores(:,2) = inv(eye(2)-A2)*b2;
atratores(:,3) = inv(eye(2)-A3)*b3;
atratores(:,4) = inv(eye(2)-A4)*b4;
plot(atratores(1,:),atratores(2,:),'ko')
plot(atratores(1,:),atratores(2,:),'k.')
plot(atratores(1,:),atratores(2,:),'ks')
```