UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ELIÉGER DE PAULA

OS LOGARITMOS

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2010

ELIÉGER DE PAULA

OS LOGARITMOS

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Wellington José Corrêa

CAMPO MOURÃO

2010

TERMO DE APROVAÇÃO

Eliéger de Paula

OS LOGARITMOS

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Wellington José Corrêa

Prof. Msc. Diogo Heron Macowski

Prof. Msc. Nayene Michele Pitta Paião

Campo Mourão, 2010

Dedico este trabalho ao meu filho Diego, por compreender minha ausência neste tempo todo e aos meus pais Claudete e Valdir por me apoiarem sempre em todos os momentos de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Aos professores que me influenciaram:
Magda Cardoso e Valdemir Ossuci, com o exemplo de força, superação e determinação, mostram - me que tudo é possível e que para isso é preciso comprometimento.
Ao professor Adilandri Mércio Lobeiro,pela oportunidade de adquirir um conhecimento de qualidade para meu crescimento profissional.
Ao meu orientador Wellington José Corrêa pela dedicação, paciência e principalmente pela motivação nos momentos em que tudo parecia impossível.
Aos meus amigos, Hissay, Bril, Roney e Wilhan, pelas inúmeras viagens que fizemos juntos, pelos perigos e sustos durante este percurso e especialmente pelas risadas, brincadeiras compartilhadas nos momentos difíceis .
Aos colegas de classe pelo companheirismo e a solidariedade, entre eles com carinho o colega Isonei por me presentear com um livro que impulsionou a confecção deste trabalho.
Ao colaborador Edilson com o seu café algumas vezes preparado por ele mesmo, pelos recados e avisos importantes, meu muito obrigado de coração.
Enfim por tudo e por todos que contribuíram de alguma forma para que esta especialização acontecesse. Obrigado.

”Se não puder se destacar pelo talento, vença pelo esforço. Dave Weinbaum”

RESUMO

DE PAULA, Eliéger. OS LOGARITMOS. 52 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2010.

Este trabalho tem como proposta sintetizar o conteúdo de Logaritmo, para uma utilização de consulta rápida de seus Teoremas, propriedades e definições. Apresenta-se o conteúdo de duas formas distintas: primeiro abordamos o conteúdo na visão de Lima (LIMA, 1996), que vislumbra o conteúdo de uma forma mais elementar transmitindo a importância dos logaritmos através da história e ressaltando a posição central ocupada pelos logaritmos na ciência e na sua aplicação. Porém o sistema dos logaritmos possuem alguns inconvenientes e devido a estes inconvenientes, em segundo lugar utilizaremos as ferramentas do cálculo geométrico apresentado por Leithold (LEITHOLD, 2002) que nos auxiliará no entendimento das demonstrações e ao leitor na execução do cálculos aritméticos. Aqui o logaritmo natural é definido como uma integral e a função exponencial natural é definida como a inversa da função logarítmica natural, dessa forma podemos definir uma potência de um número irracional e de um número real. A representação gráfica destas funções também são importantes para uma visualização do contexto comportamental da função. A tábua logarítmica e a régua de cálculo logarítmico são apresentadas como ferramentas motivadoras na aplicação das propriedades logarítmicas. Desse modo queremos deixar uma observação para um bom entendimento no estudo dos logaritmos, uma vez que algumas definições não são válidas para todo e qualquer conjunto, deve atentar para o nível e a limitação do conjunto em que se pretende trabalhar.

Palavras-chave: Logaritmos, Função,Função Inversa, Integral, Exponencial

ABSTRACT

DE PAULA, Eliéger. Title in English. 52 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2010.

This work is proposed to synthesize the contents of Logarithm, to use a quick reference of their Theorems, properties and settings. Displays the contents of two distinct ways: first we discuss the contents of the vision Lima cite Lima1996, which sees the content in a more conveying the importance of elementary logarithms by history and highlighting the central position occupied by the logarithms in science and its application. But the system of logarithms have certain disadvantages and because of these drawbacks, in Secondly we use the tools of geometric computation presented by Leithold cite Leithold2002 that will assist us in understanding of the statements and the reader in implementing the calculations arithmetic. Here the natural logarithm is defined as an integral and the natural exponential function is defined as the inverse of the natural logarithmic, so we can define a power an irrational number and a real number. Graphing these functions are also important for a preview of behavioral context of the function. The board and the logarithmic ruler logarithmic calculus are presented as tools motivating the application of logarithmic properties. Thereby want to leave a note for a good understanding in the study of logarithms, since some definitions are not valid for every whole must pay attention to the level and limiting the pool in which you want to work.

Keywords: Logarithms, Function, Inverse Function, Integral, Exponential

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – RETA REAL DECOMPOSTA DE INTERVALOS JUSTAPOSTOS 22
FIGURA 2 – PARÁBOLA 27
FIGURA 3 – BIUNÍVOCA1 28
FIGURA 4 – PARABOLA2 29
FIGURA 5 – GRÁFICOS DE F E F^{-1} 31
FIGURA 6 – GRÁFICO DA FUNÇÃO $\int_X^1 \frac{1}{T} DT$ 37
FIGURA 7 – GRÁFICO DA FUNÇÃO $\int_1^X \frac{1}{T} DT$ 38
FIGURA 8 – 42
FIGURA 9 – GRÁFICO DA FUNÇÃO LN X 45
FIGURA 10 – OS RESULTADOS DE $2 \times, 2{,}2 \times 3{,}2 \times 4{,}2 \times 5$ 49
FIGURA 11 – 50
FIGURA 12 – 50
FIGURA 13 – 51
FIGURA 14 – TÁBUA LOGARÍTMICA 52

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **8**
1.1 MOTIVAÇÃO 9
1.2 OBJETIVOS 9
1.2.1 Objetivo Geral 9
1.2.2 Objetivos Específicos 9
2 PRELIMINARES **11**
3 LOGARITMOS **13**
3.1 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS 13
3.2 FUNÇÃO LOGARÍTMICA 16
4 FUNÇÃO LOGARÍTMICA NATURAL **26**
4.1 FUNÇÕES INVERSAS 26
4.2 TEOREMAS DA FUNÇÃO INVERSA E A DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA 31
4.3 A FUNÇÃO LOGARÍTMICA NATURAL 35
4.4 CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA 41
4.5 DIFERENCIAÇÃO LOGARÍTMICA E INTEGRAIS QUE RESULTAM NA FUNÇÃO LOGARÍTMICA NATURAL 45
5 CONCLUSÃO **47**
REFERÊNCIAS **48**
ANEXO A – RÉGUA DE CÁLCULOS DE LOGARITMOS **49**
ANEXO B – TÁBUA LOGARÍTMICA **52**

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos logaritmos desempenha fundamental importância em todos os campos da área técnica. Os logaritmos durante três séculos e meio desempenharam com louvor o papel de simplificar o cálculo aritmético, permitindo que operações de multiplicação com muitos algarismos ou potenciação com expoente fracionário fossem realizadas com rapidez e precisão. Atualmente esses cálculos são realizados por máquinas eletrônicas. Apesar disso, os
logaritmos continuam a exercer um papel de grande importância no Ensino da Matemática atual devido a posição central que ocupam nesta ciência e suas aplicações. Essa posição permanente dá-se pelo fato da função logarítmica e sua inversa a função exponencial, constituem a única maneira de se descrever matematicamente a evolução de uma grandeza cuja taxa de crescimento e decrescimento é proporcional a da grandeza existente num dado momento. Assim como imaginado por seu descobridor , Lor Napier, no início do século XVII, o sistema formado pelos logaritmos é simplesmente uma tabela com duas colunas. Cada número real positivo x à esquerda corresponde no mesmo nível à direita, um número real $L(x)$ chamado o logaritmo de x (naquele sistema). No fim do século XVI, com o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação exigiam longos e habilidosos cálculos aritméticos. Neste períodos, duas mentes extraordinárias em trabalhos independentes trazem à tona uma descoberta que iria facilitar os cálculos da época. Pode parecer uma grande coincidência que Jost Bürgi (1552-1632), suíço, fabricante de instrumentos astronômicos, e o matemático inventor, John Napier (1550-1617), um nobre escocês teólogo e matemático, se não fosse o fato de que muitos vinham se ocupando desse problema na época. O trabalhos de ambos resultou nas primeiras tábuas de logaritmos. As tábuas de Napier foram publicadas em 1614, enquanto as de Bürgi em 1620. A influência de Napier no desenvolvimento e publicações do logaritmo era maior que as de Bürgi , devido a seu relacionamento com professores universitários. As tecnologias atuais fizeram com que os cálculos logarítmicos perdessem muito do seu interesse como instrumentos de cálculo, o mesmo aconteceu com outras tabelas matemáticas. Porém o estudo dos logaritmos ainda é e continuará a ser de central importância. Com efeito, embora tenham sidos inventados como acessório para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da Matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos físicos, químicos, biológicos

e econômicos são estreitamente relacionados com os logaritmos. Assim sendo, os logaritmos que no princípio eram importantes apenas por causa das tábuas, mostram ter apreciável valor intrínseco. A palavra *logaritmo* ignifica "número de razão"e foi adotada por Napier depois de ter usado inicialmente a expressão *número artificial*. Briggs introduziu a palavra *mantissa*, que é um termo latino de origem etrusca que significava inicialmente "adição"ou "contrapeso"e que, no século XVI, passou a significar "apêndice". O termo *característica* também foi sugerido por Briggs e foi usada por Vlacq. É curioso que as primeiras tábuas de logaritmos comuns costumavam trazer impressas tanto a característica como a mantissa; só no século XVIII começou a praxe atual de só imprimir a mantissa. O trabalho é dividido como segue: no primeiro capítulo, apresentamos alguns resultados preliminares. No segundo, uma abordagem do logaritmo conforme Lima (LIMA, 1996). Nos capítulos seguintes, os logaritmos são apresentados por meio de ferramentas do cálculo, conforme Leithold (LEITHOLD, 2002).

1.1 MOTIVAÇÃO

O primeiro impulso que trouxe a tona o desejo de realizar este trabalho foi a necessidade de concluir esta especialização porém, já que o desafio era adquirir conhecimento por que não estudar aldo desconhecido. Os logaritmos nunca foram apresentado durante minha vida escolar, já na fase acadêmica tive o prazer de ser apresentado de forma sucinta,claro, mas bastou para instigar a curiosidade sobre o assunto. Apesar de não ser e tão pouco trazer algo esplêndido e inovador apresenta um bom apanhado sobre o assunto. Observando a espetacular modernização que provem da evolução de invenções criadas a partir da necessidade do homem de cada época.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Apresentar os principais teoremas e definições sobre os logaritmos naturais bem como suas propriedades de forma simples, caracterizando a função logarítmica e viabilizando a construção de seu gráfico.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Demonstrar o cálculo rápido de multiplicações e divisões.
- Relacionar os principais Teoremas e Definições de suas Propriedades.

- Visualizar gráficos usuais das funções exemplificando teorias.

- Proporcionar a prática das propriedades estabelecidas com antigos e modernos instrumentos de cálculos logarítmicos.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados preliminares que serão úteis neste trabalho. As demonstrações dos quatro primeiros teoremas a seguir, podem ser encontradas Leithold (LEITHOLD, 2002).

Teorema 2.1 *A função f será contínua no número a se f estiver definida em algum intervalo aberto contendo a e se para todo $\varepsilon > 0$ existir um número $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Teorema 2.2 *Se a função f for contínua no intervalo $[a,b]$, e se $f(a) \neq f(b)$, então, para todo número k entre $f(a)$ e $f(b)$, existirá c, $a < c < b$ tal que $f(c) = k$.*

Teorema 2.3 *Se n for um número racional,*

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

Teorema 2.4 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e seja x qualquer número em $[a,b]$. Se F for a função definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

então, $F'(x) = f(x)$.

Teorema 2.5 *Se f e g forem duas funções, tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo I então haverá uma constante K, tal que*

$$f(x) = g(x) + K$$

para todo x em I.

Definição 2.1 *Se $a > b$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

se $\int_a^b f(x)dx$ *existir.*

Definição 2.2 *Se $f(a)$, existe, então*

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Teorema 2.6 *Se a função f for integrável nos intervalos fechados $[a,b],[a,c]$ e $[c,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

onde $a < c < b$.

Teorema 2.7 *Se f for integrável num intervalo fechado contendo os números a,b e c, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

não importando a ordem de a,b e c.

Teorema 2.8 *Se as funções f e g forem integráveis no intervalo fechado $[a,b]$ e se $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Demonstração*: Consulte Leithold (LEITHOLD, 2002).*

3 LOGARITMOS

Neste capítulo, daremos a definição de logaritmo, bem como a demonstração de suas propriedades, com intuito de fazer um breve preparatório para nosso estudo posterior.

Definição 3.1 *Dados dois números reais, positivos, a e b, com a $\neq$ 1 , chama-se logaritmo de b na base a, o expoente x que se deve elevar a base a , para se obter o número b e será denotado por:*

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

3.1 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS

Iniciaremos esta seção, apresentando algumas propriedades referentes aos logaritmos.

Proposição 3.1 *(Logaritmo do Produto) Num mesmo sistema, o logaritmo de um produto de dois ou mais fatores positivos x_1 e x_2 e igual a soma dos logaritmos dos fatores. Isto é:*

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

Demonstração: Sabemos que $a^{\log_a x_1} = x_1$ e $a^{\log_a x_2} = x_2$.

Calculando o produto de x_1 por x_2, obtemos:

$$x_1 \cdot x_2 = a^{\log_a x_1} \cdot a^{\log_a x_2} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2}$$

Pela definição de logaritmos, temos que

$$x_1 \cdot x_2 = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2} \Leftrightarrow \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

■

Esta propriedade pode ser estendida para o caso do logaritmos do produto de $n(n \geq 2)$ fatores reais e positivos, isto é:
Se $0 < a \neq 1$ e $b_1, b_2, b_3, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$ então:

$$\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot ... \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + ... + \log_a b_n$$

Demonstração: Faremos a demostração por indução sobre n.
Para $n = 2$, é verdadeira, isto é:

$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

suponhamos que a propriedade seja válida para $p \geq 2$ fatores, isto é:
Hipótese $\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot ... \log_a(b_p) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + ... + \log_a b_p$ e mostraremos que a propriedade é válida para $(p+1)$ fatores, isto é:

$$\text{Tese } \log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_p \cdot b_{p+1}) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + ... + \log_a b_p + \log_a b_{p+1}$$

Temos:

1º membro da tese $= \log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_p \cdot b_{p+1}) = \log_a[(b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_p) \cdot b_{p+1}] = \log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_p) + b_{p+1} = \log_a b_1 + \log_a b_2 + ... + \log_a b_b + \log_a b_{p+1} = 2^{\text{o}}$ membro da tese.
Devemos observar que, se $b > 0$ e $c > 0,$ então $b \cdot c > 0$ e vale a identidade

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \text{ com } o < a \neq 1$$

mas, se soubermos apenas que $b \cdot c > 0$, então teremos:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a |b| + \log_a |c| \text{ com } o < a \neq 1 \qquad \blacksquare$$

Exemplos
$\log_5(3.4) = \log_5 3 + \log_5 4$
$\log_4(2.3.4) = \log_4 2 + \log_4 3 + \log_4 3$
$\log_6 3 \cdot (-4) \cdot (-5) = \log_6 3 + \log_6 |-4| + \log_6 |-5|$

Proposição 3.2 *(Logaritmo do Quociente) Num mesmo sistema, o logaritmo do quociente de dois fatores positivos x_1 e x_2, é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo* *do divisor, isto é:*

$$\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

Demonstração: Sabemos que $a^{\log_a x_1} = x_1$ e $a^{\log_a x_2} = x_2$.

Dividindo, membro a membro, estas igualdades, temos:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a^{\log_a x_1}}{a^{\log_a x_2}} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = a^{\log_a x_1} - a^{\log_a x_2}$$

Pela definição de logaritmo, temos:

$$\frac{x_1}{x_2} = a^{\log_a x_1} - a^{\log_a x_2} \Leftrightarrow \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$\blacksquare$

Exemplo

$\log_5 \dfrac{2}{3} = \log_5 2 - \log_5 3$

$\log_5 \dfrac{2\cdot 3}{5} = \log_5 (2\cdot 3) - \log_5 5 = \log_5 2 + \log 53 - \log_5 5$

$\log_5 \dfrac{2}{3\cdot 5} = \log_5 2 - \log_5 (3\cdot 5) = \log_5 2 - [\log_5 3 + \log_5 5] = \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 5$

Proposição 3.3 *(Logaritmo da Potência) Num mesmo sistema, o logaritmo de uma potência,* $b^x, b > 0$*, é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência. Ou seja,*

$$\log_a b^x = x \cdot \log_a b$$

Demonstração: De fato, temos que $\log_a b = c$ e $\log_a b^x = d$. Mostremos que $d = x \cdot c$.

Observe que $a^c = b$ e $a^d = b^x$.

Com isto,

$$a^d = (a^c)^x \Rightarrow a^d = a^{x\cdot c}$$

Aplicando $\log_a$ em ambos os lados da última igualdade, obtemos que $d = x \cdot c$, portanto, $\log_a b^x = x \cdot \log_a b$.

$\blacksquare$

Exemplo

$\log_3 2^5 = 5 \cdot \log_3 2$

$\log_5 \sqrt[3]{2} = \log_5 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_5 2$

$\log_2 \frac{1}{3^4} = \log_2 3^{-4} \cdot = -4 \cdot \log_2 3$

3.2 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Iniciemos o assunto definindo a função logarítmica da seguinte forma:

Definição 3.2 *Uma função real $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, cujo domínio é conjunto $\mathbb{R}^+$, chama-se uma função logarítmica ou um sistema de logaritmos quando tem as seguintes propriedades:*

A)L é uma função crescente, isto é $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$;

B) $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ o número $L(x)$ chama-se o logaritmo de x (Se tivermos contemplando outras funções logarítmicas além de L, diremos que $L(x)$ é o logaritmo de x segundo L, ou no sistema de logaritmos L).

OBS: A função logarítmica só será decrescente quando o x da função estiver entre $0 < x < 1$.

Consequentemente de A e B vem as seguintes propriedades:

Propriedade 1 *Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferente.*

Demonstração: Com efeito, se $x, y \in \mathbb{R}^+$ são diferentes, então ou $x < y$ ou $y < x$. No primeiro caso, resulta de A) que $L(x) < L(y)$. No segundo caso tem-se $L(y) < L(x)$. Em qualquer hipótese, de $x \neq y$ conclui-se que $L(x) \neq L(y)$.

■

Propriedade 2 *O logaritmo de 1 é zero.*

Demonstração: Com efeito, por B) temos

$$L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1),$$

logo $L(1) = 0$.

■

Propriedade 3 *Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.*

Demonstração: Com efeito,sendo L crescente, de $0 < x < 1 < y$ resulta $L(x) < L(1) < L(y)$, isto é,

$$L(x) < 0 < L(y).$$

■

Propriedade 4 *Para todo $x > 0$, tem-se $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.*

Demonstração: Com efeito, de $x\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ resulta que

$$L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) = L(1) = 0,$$

donde

$$L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$$

■

Propriedade 5 *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, vale $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$.*

Demonstração: De fato,

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x.\left(\frac{1}{y}\right)\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) = L(x) - L(y).$$

■

Propriedade 6 *Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional $r = \frac{p}{q}$ tem-se $L(x^r) = r.L(x)$.*

Demonstração: A demonstração da propriedade 6 se faz por etapas.
Em primeiro lugar, observa-se que a propriedade

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

se estende para o produto de um número qualquer de fatores. Por exemplo,

$$L(x.y.z) = L((xy).z) = L(x.y) + L(z) = L(x) + L(y) + L(z).$$

E assim por diante:

$$L(x_1.x_2...x_n) = L(x_1) + L(x_2) + ... + L(x_n).$$

Em particular, se $n \in \mathbb{N}$,

$$L(x^n) = L(x \cdot x \cdot ... \cdot x) = L(x) + L(x) + ... + L(x) = L(x) = n \cdot L(x).$$

Portanto, a propriedade 6 vale quando $r = n$ é um número natural.
Ela também vale quando $r = 0$ pois, para todo número $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se que $x^0 = 1$, logo $L(x^0) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(x)$.
Consideremos agora o caso em que $r = -n, n \in \mathbb{N}$, isto é, onde r é um inteiro negativo. Então, para todo $x > 0$ temos $x^n \cdot x^{-n} = 1$. Logo,

$$L(x^n) + L(x^{-n}) = L(1) = 0,$$

e daí,

$$L(x^{-n}) = -L(x^n) = -nL(x).$$

Finalmente, o caso geral, em que $r = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ temos:

$$(x^r)^q = (x^{\frac{p}{q}})^q = x^p.$$

Logo, $q \cdot L(x^r) = L[(x^r)^q] = L(x^p) = p \cdot L(x)$, em virtude do que já foi aprovado. Da igualdade $q \cdot L(x^r) = p \cdot L(x)$ resulta que $L(x^r) = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot L(x)$, ou seja, que $L(x^r) = r \cdot L(x)$.
Isso determina a demostração da Propriedade 6.

$\blacksquare$

A restrição de que o expoente r seja racional provém do fato de sabermos apenas definir potências com expoente racional. Na verdade, a teoria dos logaritmos fornece a melhor maneira de definir x^r quando r é um número irracional, conforme faremos no próximo capitulo.
Convém enfatizar que as Propriedades 1 a 5, bem como as demais a serem estabelecidas neste capítulo, valem para todas as funções logarítmicas, isto é, resultam apenas das propriedades A), B) e não da maneira particular como os logaritmos venham a ser definidos.

Propriedade 7 *Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é ilimitada, superior e inferiormente.*

A afirmação acima significa que, dados arbitrariamente números reais α e β, é sempre possível achar números positivos x e y tais que $L(x) < \alpha$, e $L(y) > \beta$. Antes de provarmos a Propriedade 7, é instrutivo examinar exemplos de funções conhecidas, como $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^3$.

Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, vemos que $f(x) = \operatorname{sen} x$ é uma função limitada superior e inferiormente.

Por outro lado, temos $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo $g(x) = x^2$ é uma função limitada inferiormente, porém não superiormente pois, dado qualquer número real β é sempre possível achar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 > \beta$: basta tomar $x > \sqrt{\beta}$ se $\beta$for positivo ou zero, ou qualquer x se β for negativo. Finalmente, a função $h(x) = x^3$ é ilimitada superior e inferiormente quando $x \in \mathbb{R}$, como se consta sem dificuldade.

No caso da função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, para provar que ela é ilimitada superiormente, suponhamos que nos seja dado um número real β e que sejamos desafiados a achar um número $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > \beta$. Procederemos da seguinte maneira: tomamos um numero natural n tão grande que $n > \dfrac{\beta}{L(2)}$. Como $L(2)$ é positivo (Propriedade 3), temos $n \cdot L(2) > \beta$. Usando a Propriedade 5 , vemos que $n \cdot L(2) = L(2^n)$. Portanto, $L(2^n) > \beta$. Agora é só escolher $x = 2^n$. Temos $L(x) > \beta$. Isto mostra que L é ilimitada superiormente.

Para provar que L também é limitada inferiormente, basta lembrar que $L\left(\dfrac{1}{x}\right) = -L(x)$. Dado qualquer número real α, como vimos acima, podemos achar $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > -\alpha$. Então, pondo $y = \dfrac{1}{x}$, teremos $L(y) = -L(x) < \alpha$.

Observação 3.1 *Uma função logarítmica L não poderia estar definida para $x = 0$. Com efeito, se tal fosse o caso, para todo $x \geq 0$ teríamos*

$$L(0) = L(x \cdot 0) = L(x) + L(0),$$

donde $L(x) = 0$. Assim, L seria nula, contrariando a propriedade A). Também não é possível estender satisfatoriamente o domínio de uma função logarítmica de modo que $L(x)$ seja um número real, definido para todo $x < 0$.

Evidentemente, se $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica e c é uma constante positiva arbitrária, então a função $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $M(x) = c \cdot L(x)$, é também uma função logarítmica. O teorema abaixo mostra que esta é a única maneira de obter funções logarítmicas uma vez que se conheça uma delas.

Noutras palavras, depois de provarmos o teorema abaixo ficaremos sabendo que, para estudar logaritmos, basta obter uma função crescente $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $L(xy) = L(x) + L(y)$. Todas as demais funções logarítmicas (ou sistemas de logaritmos) resultarão de L pela multiplicação por uma constante conveniente. Assim temos a liberdade de escolher a definição da função L da maneira que nos pareça mais natural, mais intuitiva e que nos permita dar as demonstrações mais simples.

Teorema 3.1 (Teorema) *Dadas as funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que exista um número $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Provaremos, neste caso, que $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$.

Em primeiro lugar, de $L(a) = M(a)$ concluímos que $L(a^r) = M(a^r)$ para todo r racional. Com efeito,

$$L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r).$$

Suponhamos por absurdo, que existisse algum b > 0 tal que $L(b) \neq M(b)$. Para fixar ideias, digamos que fosse $L(b) < M(b)$.

Escolhamos um número natural n tão grande que

$$n \cdot [M(b) - L(b)] > L(a).$$

Então,

$$L(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{L(a)}{n} < M(b) - L(b).$$

Por simplicidade, escrevemos $c = L\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$. Os números $c, 2c, 3c, \ldots$dividem $\mathbb{R}^{+}$ em intervalos justapostos, de mesmo comprimento c. Como $c < M(b) - L(b)$, pelo menos desses números, digamos $m \cdot c$ pertence ao interior do intervalo $(L(b), M(b)$, ou seja $L(b) < m \cdot c < M(b)$. Ora,

$$m.c = L(a^{\frac{1}{n}}) = L(^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}).$$

Então

$$L(b) < L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}) < M(b).$$

Como L é crescente, a primeira das desigualdades acima implica $b < a^{\frac{m}{n}}$. Por outro lado, como M também é crescente, a segunda desigualdade implica $a^{\frac{m}{n}} < b$. Esta contradição mostra

que b não existe: deve-se ter $M(x) = L(x)$para todo $x > 0$.
O caso geral reduz-se ao caso particular acima. Dadas L e M, funções logarítmicas arbitrárias, temos $L(2) > 0$ e $M(2) > 0$ porque $2 > 1$. Seja $c = \dfrac{M(2)}{L(2)}$. Consideremos a função logarítmica $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $N(x) = c.L(x)$. Como $N(2) = c.L(2) = [\dfrac{M(2)}{L(2)}].L(2) = M(2)$, segue-se do que se provou acima que $N(x) = M(x)$ para todo $x > 0$, ou seja, que $M(x) = c.L(x)$para todo $x > 0$, como queríamos demonstrar.

■

As propriedades dos logaritmos acima estabelecidas, servem de fundamento para sua utilização como instrumento de cálculo. Vejamos um exemplo a fim de ilustrar o método.

Suponhamos que se deseje calcular $\sqrt[n]{a}$, onde a é um número real positivo e n um número natural. Para isso, suponhamos conhecida uma função logarítmica L. Pela propriedade 6, temos $L\sqrt[n]{a} = L\dfrac{(a)}{n}$. Consultando uma tábua de valores de L, encontramos os valores de $L(a)$, facilmente o dividimos por n e obtemos $L(\sqrt[n]{a}) = c$, um número conhecido. Novamente usando a tábua (desta vez no sentido inverso) encontramos um número positivo b tal que $L(b) = c$. Pela propriedade 1, de $L(b) = L(\sqrt[n]{a})$ concluímos que $b = \sqrt[n]{a}$. Problema resolvido.

Re-examinando a solução acima surge uma questão. Quem nos garante que, dado o número real c, podemos sempre encontrar $b \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(b) = c$? Noutras palavras, a solução do problemas só estará completa se pudermos assegurar que a função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é sobrejetiva. Este ponto é esclarecido pelo teorema seguinte.

Teorema 3.2 *Toda função logarítmica L é sobrejetiva, isto é dado qualquer número real c, existe sempre um (único) número real positivo x tal que* $L(X) = c$.

Para a prova deste teorema, inicialmente necessitamos do seguinte lema:

Lema 3.1 *Seja* $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função logarítmica. Dados arbitrariamente dois números reais* $u < v$, *existe* $x > 0$ *tal que* $u < L(x) < v$.

Note que este lema significa que todo intervalo aberto $I = (u, v)$ contém ao menos num valor $L(x)$ da função L. Evidentemente trata-se de um resultado preliminar pois o teorema (3.2) assegura que o intervalo I inteiro é formado por valores da função L.

Demonstração do Lema: Fixemos um número natural n maior do que $\frac{(v-u)}{L(2)}$, logo $\frac{L(2)}{n} < v-u$. Escrevamos $c = \frac{L(2)}{n}$. Os múltiplos inteiros

$$m \cdot c = \frac{m}{n}L(2) = L(2^{\frac{m}{n}}), m \in \mathbb{Z},$$

decompõem reta real em intervalos justapostos, cujo comprimento c é menor do que o comprimento $v-u$ do intervalo $I = (u,v)$. Portanto, pelo menos um desses múltiplos $m \cdot c = L(2^{\frac{m}{n}})$ cai no interior do intervalo $I = (u,v)$.

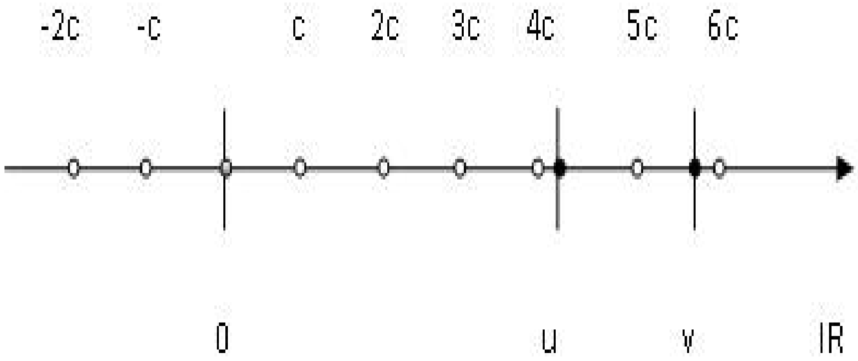


Figura 1: Reta real decomposta de intervalos justapostos

Pondo $x = 2^{\frac{m}{n}}$, temos $u < L(x) < v$. Antes de demonstrar o teorema (3.2), lembremos que todo número real α admite uma representação decimal

$$\alpha = a_0, a_1, a_2 ... a_n ... = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

onde a parte inteira a_0 é um número inteiro qualquer e os algarismos decimais a_n, $n \geq 1$, podem assumir os valores $0, 1, 2, ..., 9$. para todo $n \geq 0$, escreveremos

$$\alpha_n = a_0, a_1, a_2 ... a_n ... = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n}.$$

Tem $\alpha_n \leq \alpha$ e $\alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n}$ para todo $n \geq 0$.
Se um número real x é menor do que α, então deve existir um $n \geq 0$ tal que $x < \alpha_n$. Com efeito, $x < \alpha$ significa que $\alpha - x$ é um número real positivo. Tomemos n tão grande que

$$\frac{1}{10^n} < \alpha - x.$$

Então,

$$\alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n} < \alpha - x,$$

logo, $\alpha - \alpha_n < \alpha - x$. Daí resulta que $x < \alpha_n$.

■

Demonstração do teorema (3.1): Dado Arbitrariamente um número real b, devemos obter um número real positivo α tal que $L(\alpha) = b$. Para achar α, usaremos uma versão moderna de um processo milenar para resolução numérica de equações, que os chineses antigos chamavam de método do elemento celestial. Este método consiste em determinar, um a um, os inteiros

$$a_0, a_1, a_2, ..., a_n ...$$

que compõem a representação decimal de um número real

$$\alpha = a_0, a_1, a_2, ..., a_n ...$$

Em seguida, mostraremos que se tem de fato $L(\alpha) = b$.

Para determinar a parte inteira a_0 , lembramos que L é uma função crescente ilimitada, logo deve existir inteiros K tais que $L(K) > b$. Seja $a_0 + 1$ o menor inteiro tal que $L(a_0 + 1) > b$. Então temos $L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1)$

Em seguida, consideramos os números

$$a_0, a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}, ..., a_0 + \frac{9}{10}, a_0 + 1.$$

Como $L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1)$, deve existir dois elementos consecutivos α_1 e $\alpha_1 + \frac{1}{10}$ nessa sequência, tais que $L(\alpha_1) \leq b < L\left(\alpha_1 + \frac{1}{10}\right)$, isto é, deve existir a_1 inteiro, $0 \leq a_1 \leq 9$, tal que, pondo

$$\alpha_1 = a_0, a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10},$$

tem-se

$$L(\alpha_1) \leq b < L\left(\alpha_1 + \frac{1}{10}\right).$$

Analogamente, consideramos os números

$$\alpha_1,\ \alpha_1 + \frac{1}{10^2},\ \alpha_1 + \frac{2}{10^2},\ \ldots,\ \alpha_1 + \frac{9}{10^2}, \alpha_1 + \frac{1}{10}$$

vemos que existe $a_2, 0 \leq a_2 \leq 9$, tal que, pondo

$$\alpha_1 = a_0,\ a_1 a_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10^2},$$

tem-se

$$L(\alpha_2) \leq b < L\left(\alpha_2 + \frac{1}{10^2}\right).$$

Prosseguindo analogamente, encontramos a representação decimal de um número real

$$\alpha = a_0, a_1, a_2, ..., a_n ... = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

tal que, pondo $\alpha_n = a_0, a_1, a_2, ..., a_n$, tem-se:

$$L(\alpha_n) \leq b < L\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right)$$

para todo $n \geq 0$.

Afirmamos que $L(\alpha) = b$. De fato, se fosse $L(\alpha) < b$, usaríamos o Lema para obter $x > 0$ tal que $L(\alpha) < L(x) < b$. Como L é crescente, isto implicaria $\alpha < x$ então, tomando n tão grande que $x - \alpha > \dfrac{1}{10^n}$ teríamos $\alpha + \frac{1}{10^n} < x$, logo

$$a_n + \tfrac{1}{10^n} \leq \alpha + \tfrac{1}{10^n} < x.$$

Como L é crescente, de $x > \alpha_n + \dfrac{1}{10^n}$ resultaria

$$L(x) > L(a_n + \tfrac{1}{10^n}) > b,$$

um absurdo, pois o número x foi obtido de modo que $L(x) < b$.

Analogamente, não se pode ter $L(\alpha) > b$. Com efeito, usando novamente o Lema, obteríamos $x > 0$ tal que

$$b < L(x) < L(\alpha).$$

Como L é crescente, de $L(x) < L(\alpha)$ concluiríamos que $x < \alpha$. Isto implicaria, entretanto, que $x < a_n$ para algum n. Então $L(x) < L(a_n) \leq b$, contrariando o fato de que x foi obtido de modo a satisfazer $b < L(x)$, concluindo-se portanto, a demonstração do Teorema (3.2).

■

Corolário 3.1 *Toda função logarítmica* $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre* $\mathbb{R}^+$ *e* $\mathbb{R}$.

Demonstração: Qualquer função f da origem a uma tábua de valores. Numa coluna, à esquerda, põem-se os valores da variável x e noutra coluna, à direita, os valores correspondentes de $f(x)$. Para uma função arbitrária f, pode ocorrer que a diferentes valores de x correspondam o mesmo valor $f(x)$.
O corolário acima mostra que toda tábua de logaritmos (tábua de valores de uma função logarítmica) pode ser lida tanto da esquerda para direita, o que é normal, como lida da direita para a esquerda. Dado um número real arbitrário y podemos buscar na tábua o número $x > 0$ do qual y é o logaritmo. Como vimos acima, esta possibilidade é fundamental para o uso dos logaritmos no cálculo aritmético. A "tabela inversa"dos logaritmos, lida da direita para esquerda é, na realidade, a tábua dos valores da função exponencial, que definiremos adiante.
Segue-se ainda do corolário anterior que, dada a função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, existe um único número $a > 0$ tal que $L(a) = 1$. Este número é chamado a base do sistema de logaritmos L. Para explicar a base, muitas vezes se escreve $L_a(x)$ em vez de $L(x)$.

Se L_a e L_b são funções logarítmicas, com $L_a(a) = L_b(b) = 1$ (ou seja, de bases a e b respectivamente) então o Teorema (3.1) assegura a existência de uma constante $c > 0$ tal que $L_b(x) = c \cdot L_a(x)$ para todo $x > 0$. Pondo $x = a$, resulta $L_b(a) = c$. Portanto temos

$$L_b(x) = L_b(a) \cdot L_a(x)$$

para todo $x > 0$. Esta é a fórmula de mudança de base dos logaritmos.
Tradicionalmente , as bases de logaritmos mais comuns são 10 (porque nossos números são escritos usualmente no sistema de enumeração decimal) e $e \approx 2,718281$, base dos logaritmos naturais.

4 FUNÇÃO LOGARÍTMICA NATURAL

Iniciemos este capítulo com uma revisão sobre funções inversas.

4.1 FUNÇÕES INVERSAS

Dadas duas operações inversas, essencialmente uma ”desfaz”a outra. Por exemplo, adição e subtração são operações inversas: se 4 for adicionado a x, a soma será $x+4$; então se 4 for subtraido desta soma, a diferença será x. Na ilustração a seguir, usamos pares de funções associadas as suas operações inversas.

Exemplo 4.1 *Considere as funções abaixo:*

1. *Seja* $f(x) = x+4$ *e* $g(x) = x-4$. *Então,*

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x-4) \\ &= (x-4)+4 \\ &= x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(f(x)) &= g(x+4) \\ &= (x+4)-4 \\ &= x \end{aligned}$$

1. Seja $f(x) = 2x$ e $g(x) = \dfrac{x}{2}$. Então,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(f(x)) &= g(2x) \\ &= \frac{2x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

1. Seja $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$. Então,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(\sqrt[3]{x^3}) & g(f(x)) &= g(x^3) \\ &= 2(\sqrt[3]{x})^3 & &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x & &= x \end{aligned}$$

Cada par de funções f e g da função 1 faz com que sejam verdadeiras as seguintes afirmativas: $f(g(x)) = x$ para x no domínio de g e $g(f(x)) = x$ para x no domínio de f.

Observe que para as funções f e g nessas duas equações, as funções compostas $f(g(x))$ e $g(f(x))$ são iguais, uma relação que em geral não é verdadeira para as funções arbitrárias f e g. Adiante veremos que cada par de funções acima é um conjunto de *funções inversas*, e esta é a razão pela qual as duas equações estão satisfeitas.

Consideremos antes da definição formal da *inversa de uma função*, algumas funções particulares. A figura abaixo mostra um esboço da função definida por $f(x) = x^2$.

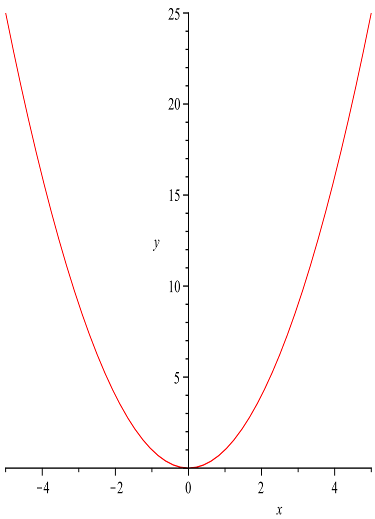


Figura 2: Parábola

O domínio de f é o conjunto dos números reais e a imagem de f é o intervalo $[0, +\infty)$. Observe que como $f(2) = 4$ e $f(-2) = 4$, o número 4 é o valor funcional de dois números distintos no domínio. Além disso, todo número exceto 0 na imagem dessa função é o valor da função de dois números distintos no domínio. Sendo assim, $\frac{25}{4}$ é o valor funcional tanto de $\frac{5}{2}$ como de $\frac{-5}{2}$, 1 é o valor funcional de 1 e -1 e 9 é o valor funcional de 3 e -3.

Uma situação diferente ocorre com a função g definida por $g(x) = x^3$, $-2 \leq x \leq 2$. O domínio de g é o intervalo fechado $[-2, 2]$ e a imagem é $[-8, 8]$. um esboço do gráfico de g está na figura (4.3) abaixo. Essa função é tal que um número em sua imagem é o valor funcional de um e somente um número no domínio. Tal função é chamada de *biunívoca*.

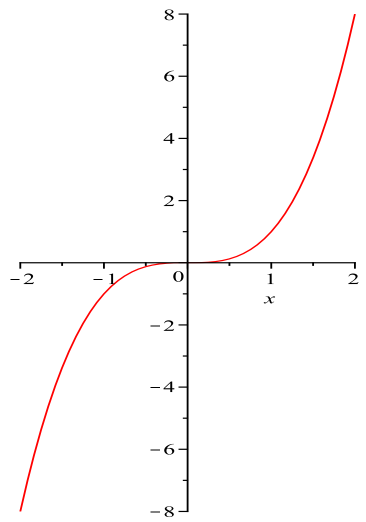


Figura 3: biunívoca1

Definição 4.1 *Dizemos que uma função f é biunívoca se cada número em sua imagem corresponder exatamente a um número em seu domínio; ou seja, para todo x_1 e x_2 no domínio de f*

$$\begin{aligned} &se \quad x_1 \neq x_2, \textit{ então } f(x_1) \neq f(x_2) \\ \iff \quad & f(x_1) = f(x_2) \textit{ quando } x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Conforme está argumentado acima, para função f definida por

$$f(x) = x^2$$

todo número exceto 0, na imagem de f é valor funcional de dois números distintos no domínio. Logo, pela definição anterior, essa função não é biunívoca.

Sabemos que uma reta vertical pode interceptar o gráfico de uma função, desde que dentro do seu domínio, em apenas um ponto. Para uma função biunívoca, também é verdade que uma reta horizontal pode interceptar o gráfico em apenas um ponto. Pode-se verificar esse fato para função biunívoca definida por $g(x) = x^3$, onde $-2 \leq x \leq 2$, cujo gráfico está na figura biunívoca. Além disso, note que para a função da figura parábola definida por $f(x) = x^2$, que não é biunívoca, qualquer reta horizontal acima do eixo x intercepta o gráfico em dois pontos.

Nem sempre é fácil usar a definição (4.1) para provar que uma função é biunívoca. O teorema a seguir fornece um teste que pode ser usado algumas vezes.

Teorema 4.1 *Uma função que seja crescente ou decrescente em um intervalo é biunívoca no intervalo.*

Demonstração: Suponha que a função f seja crescente no intervalo. Se x_1 e x_2 forem dois números no intervalo e $x_1 \neq x_2$; então $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$. Se $x_1 < x_2$, segue da definição (procurar)que $f(x_1) < f(x_2)$, e assim $f(x_1) \neq f(x_2)$. Se $x_2 < x_1$, então $f(x_2) < f(x_1)$ e novamente $f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo, da Definição (4.1) segue que f é biunívoca no intervalo. A demonstração, no caso de f ser decrescente no intervalo é análoga.

■

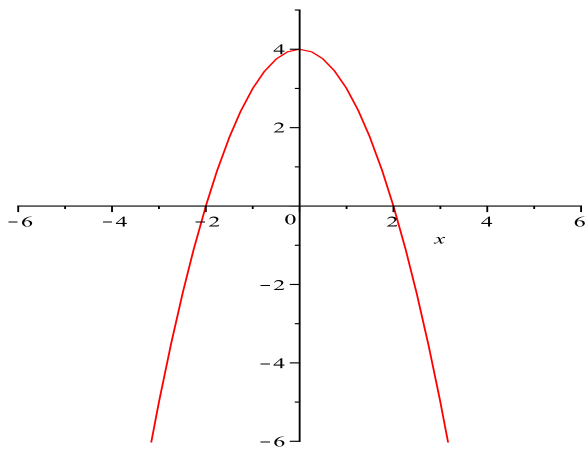


Figura 4: parabola2

Definição 4.2 *Se f for uma função biunívoca, então existirá uma função f^{-1}, chamada de **inversa** de f, tal que*

$$x = f^{-1} \text{ se e somente se } y = f(x).$$

O domínio de f^{-1} se é a imagem de f^{-1} é o domínio de f

É essencial, na Definição acima, que f seja uma função biunívoca. Essa condição assegura que $f^{-1}(y)$ seja única para cada valor de y.
Eliminamos y entre as equações da definição, substituindo y por $f(x)$ na equação $f^{-1}(y) = x$ para obter

$$f^{-1}(f(x)) = x, \tag{1}$$

onde x está no domínio de f.
Eliminamos x entre o mesmo par de equações, substituindo x por $f^{-1}(y)$ na equação $f(x) = y$ onde obtemos $f(f^{-1}(y)) = y$, onde y está no domínio de f^{-1}. Como o símbolo usado para a variável independente é arbitrário, podemos substituir y por x para obter

$$f(f^{-1}(x)) = x, \tag{2}$$

onde x está no domínio de f^{-1}.
De (1) e (2), vemos que se f^{-1} for a inversa da função f, então a inversa de f^{-1} será f. Vamos estabelecer formalmente esses resultados com o teorema a seguir.

Teorema 4.2 *Se f for uma função biunívoca tendo f^{-1} como sua inversa, então f^{-1} será mais uma função biunívoca tendo f como sua inversa. Além disso,*
$f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x no domínio de f e $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo x no domínio de f^{-1}

Quando nos referimos a uma função e à sua inversa, usamos a terminologia *funções inversas*. Se uma função f tiver uma inversa, então $f^{-1}(x)$ poderá ser encontrada pelo método usado na ilustração a seguir.
Cada uma das funções f do exemplo (4.1) é biunívoca. Logo, $f^{-1}(x)$ existe. Para cada função f calculamos $f^{-1}(x)$ a partir da definição de $f(x)$, substituindo $f(x)$ por y e resolvendo a equação resultante em x. Esse procedimento dá a equação $x = f^{-1}(y)$. Temos, então, a definição de $f^{-1}(y)$, da qual obtemos $f^{-1}(x)$.

Exemplo 4.2 *Observe neste exemplo, que a função f^{-1} em cada parte é a função g na parte correspondente do exemplo (4.1).*

$$\begin{aligned} f(x) &= x+4 \\ y &= x+4 \\ x &= y-4 \\ f^{-1}(y) &= y-4 \\ f^{-1}(x) &= x-4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(x) &= 2x \\ y &= 2x \\ x &= \frac{y}{2} \\ f^{-1}(y) &= \frac{y}{2} \\ f^{-1}(x) &= \frac{x}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ y &= x^3 \\ x &= \sqrt[3]{x} \\ f^{-1}(y) &= \sqrt[3]{y} \\ f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Temos a seguir, o teorema sobre a inversa de uma função que é monótona e contínua num intervalo fechado.

Teorema 4.3 *Suponha que o domínio da função f seja o intervalo fechado $[a,b]$, Então,*

1. *se f for contínua e crescente $[a,b]$, f terá uma inversa f^{-1} que estará definida em $[f(a), f(b)]$;*

2. *se f for contínua e decrescente em $[a,b]$, f terá uma inversa f^{-1} que estará definida em $[f(a), F(b)]$.*

Demonstração: Para a parte (i), se f for contínua em $[a,b]$ e se k for qualquer número tal que $f(a) < k < f(b)$, então, pelo teorema do valor intermediário (2.2), existirá um número c em (a,b) tal que $f(c) = k$. Logo, a imagem de f é o intervalo fechado $[f(a), f(b)]$. Como f é crescente em $[a,b]$, f será biunívoca e assim, terá uma inversa f^{-1}. Como o domínio de f^{-1} é a imagem de f, f^{-1} está definida em $[f(a), f(b)]$.

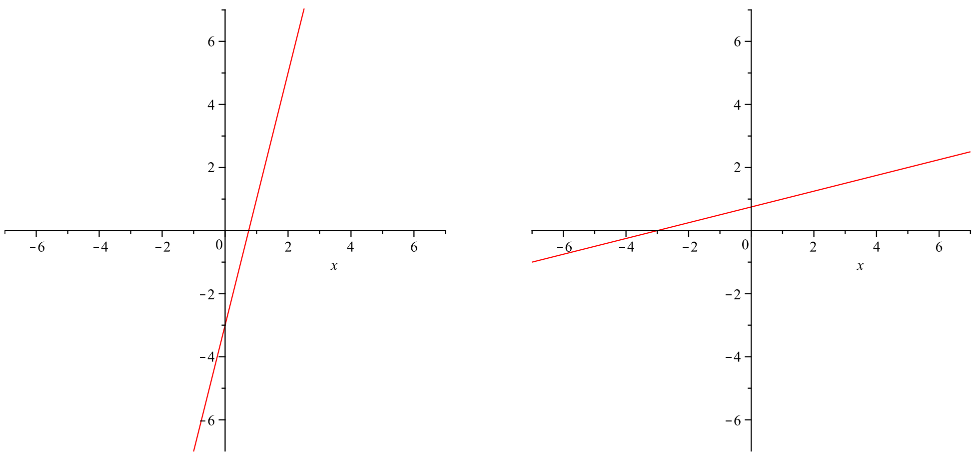
A demonstração da parte (ii) é similar. Entretanto, como f é decrescente em $[a,b]$, $f(a), f(b)$; assim, a imagem de f é $[f(b), f(a)]$. Logo, f^{-1} está definida em $[f(b), f(a)]$.

$\blacksquare$

4.2 TEOREMAS DA FUNÇÃO INVERSA E A DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA

A partir das propriedades de f podemos obter informações sobre a continuidade e a diferenciabilidadde de f^{-1}, apesar de $f^{-1}(x)$ não ser definida explicitamente por uma equação. Os *teoremas da função inversa* dessa secção fornecem meios para obtermos essas informações. Antes de enunciar o teorema da função inversa para funções crescentes, apresentaremos duas ilustrações dando exemplos de uma função e de sua inversa que satisfazem as condições do teorema.

Tomando como exemplo a função f e a sua inversa f^{-1} definidas por
$f(x) = 4x - 3$ e $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4}$, observemos seus gráficos:



(a) reta $f(x) = 4x - 3$ (b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{4}$

Figura 5: Gráficos de f e f^{-1}

Nas figuras, os gráficos de f e f^{-1} são dados no mesmo conjunto de eixos. Vemos que tanto f como f^{-1} são contínuas e crescentes em domínios.

Teorema 4.4 *Vamos supor que a função f seja contínua e crescente no intervalo fechado $[a,b]$. Então, se f^{-1} for sua inversa, que está definida em $[f(a), f(b)]$,*
(i) f^{-1} é crescente em $[f(a), f(b)]$.
(ii) f^{-1} é contínua em $[f(a), f(b)]$.

Demonstração: (i) A existência de f^{-1} é garantida pelo teorema (4.3). Para provar que f^{-1} é crescente em $[f(a), f(b)]$, devemos mostrar que
se $y_1 < y_2$ então $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$
onde y_1 e y_2 são dois números em $[f(a), f(b)]$. Como f^{-1} é definida em $[f(a), f(b)]$, existem números x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.
Portanto,

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1) = f^{-1}(f(x_1)) \qquad &\text{e} \qquad f^{-1}(y_2) = f^{-1}(f(x_2) \\ \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) = x_1 \qquad &\text{e} \qquad f^{-1}(y_2) = x_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Se $x_2 < x_2$, então como f é crescente em $[a,b]$, $f(x_2) < f(x_1)$ ou, equivalentemente, $y_2 < y_1$. Mas $y_1 < y_2$; logo, x_2 não pode ser menor do que x_1.
Se $x_2 = x_1$, então como f é uma função, $f(x_1) = f(x_2)$ ou, equivalente, $y_1 = y_2$, mas isto também contradiz o fato de que $y_1 < y_2$. Logo, $x_2 \neq x_1$.
Assim, se x_2 não for menor do que x_1 e $x_2 \neq x_1$, segue que $x_1 < x_2$; portanto, das duas relações em (3), $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Assim, provam que f^{-1} é crescente em $[f(a), f(b)]$.

(ii) Para provar que f^{-1} é contínua no intervalo fechado $[f(a), f(b)]$, precisamos mostrar que se r for qualquer número no intervalo aberto $(f(a), f(b))$, então f^{-1} será contínua em r e f^{-1} será contínua à direita de $f(a)$ e à esquerda de $f(b)$.
Provamos que f^{-1} é contínua em qualquer r no intervalo aberto $(f(a), f(b))$, mostrando que o Teorema (2.1) é valido em r. Queremos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de forma que tanto $f^{-1}(r) - \varepsilon$ como $f^{-1}(r) + \varepsilon$ estejam ambos em $[a,b]$, existe um $\delta > 0$ tal que se $|y - r| < \delta$, então,

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(r)| < \varepsilon.$$

Seja $f^{-1}(r) = s$. Então, $f(s) = r$. Como, de (i), f^{-1} é crescente em $[f(a, f(b))]$, concluímos que $a < s < b$. Logo,

$$a \leq s - \varepsilon < s < s + \varepsilon \leq b;$$

Como f é crescente em $[a,b]$,

$$f(a) \leq f(s - \varepsilon) < r < f(s + \varepsilon) \leq f(b). \tag{4}$$

Seja δ o menor dentre os números $r - f(s-\varepsilon)$ e $f(s+\varepsilon) - r$; assim, $\delta \leq r - f(s-\varepsilon)$ assim $\delta \leq f(s+\varepsilon) - r$ ou, equivalente,

$$f(s-\varepsilon) \leq r - \delta \quad \text{ e } r+\delta \leq f(s+\varepsilon). \tag{5}$$

Se $|y-r| < \delta$, então $-\delta y - r < \delta$ ou, equivalentemente,

$$r - \delta < y < r + \delta$$

Dessa desigualdade e de (4) e (5), temos que

$$\text{se } |y-r| < \delta \text{ então } f(a) \leq f(s-\varepsilon) < y < f(s+\varepsilon) \leq f(b).$$

Como f^{-1} é crescente em $[f(a), f(b)]$ segue, do que está acima, que

$$\begin{array}{rlll} & \text{se } |y-r| < \delta & \text{então} & f^{-1}(f(s-\varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(s+\varepsilon)) \\ \Leftrightarrow & \text{se } |y-r| < \delta & \text{então} & s-\varepsilon < f^{-1}(y) < s+\varepsilon \\ \Leftrightarrow & \text{se } |y-r| < \delta & \text{então} & -\varepsilon < f^{-1}(y) - s < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \text{se } |y-r| < \delta & \text{então} & |f^{-1}(y) - f^{-1}(r)| < \varepsilon. \end{array}$$

Assim f^{-1} é contínua em $(f(a), f(b))$. Pode-se mostrar que f^{-1} é contínua em à direita de $f(a)$ e a esquerda de $f(b)$, completando a demonstração.

■

Teorema 4.5 (Teorema da Função Inversa) *Suponha que a função f seja contínua e decrescente no intervalo fechado $[a,b]$. Então, se f^{-1} for sua inversa, que está definida em $[f(b), f(a)]$*

1. *f^{-1} é decrescente em $[f(a), f(b)]$;*
2. *f^{-1} é contínua em $[f(a), f(b)]$.*

Demonstração: É similar ao teorema precedente.

O teorema da função inversa será empregado na demonstração do teorema a seguir, o qual expressa relação entre a derivada de uma função e a derivada de sua inversa, caso a função tenha uma inversa. No enunciado e na demonstração desse teorema usaremos a notação de Leibniz para a derivada. Observe como esta notação faz com que ela fique fácil de ser memorizada.

Teorema 4.6 *Suponha que a função f seja monótona e contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e seja $y = f(x)$. Se f for diferenciável em $[a,b]$ e $f'(x) \neq 0$ para todo x em $[a,b]$, então a derivada da função inversa f^{-1}, definida por $x = f^{-1}(y)$ será dada por*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Demonstração: Como f é contínua e monótona em $[a,b]$, pelos teoremas (4.4) e (4.5), f tem uma inversa que contínua e monótona em $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$ se $f(b) < f(a)$).
Se x for um número em $[a,b]$, seja Δx um incremento de $x, \Delta x \neq 0$, tal que $x + \Delta x$ também esteja em $[a,b]$. Então, o incremento correspondente de y será dado por

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (6)$$

$\Delta y \neq 0$ uma vez que $\Delta x \neq 0$ e f é monótona em $[a,b]$; isto é , ou

$$f(x + \Delta x) < f(x) \quad \text{ou} \quad f(x + \Delta x) > f(x) \text{ em } [a,b].$$

Se x estiver em $[a,b]$ e $y = f(x)$,então y estará , $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$). Também, se $x + \Delta x$ estiver em $[a,b]$, então $y + \Delta y$ estará em $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$), pois $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ por (6). Assim,

$$x = f^{-1}(y) \quad \text{e} \quad x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y).$$

Segue dessas duas relações que

$$\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y). \qquad (7)$$

Da definição de derivada,

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y}$$

Substituindo na equação acima (6)e (7) iremos obter

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)}$$

e como $\Delta x \neq 0$,

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \qquad (8)$$

Antes de encontrarmos o limite em (8), vamos mostrar que sob as hipóteses desse teorema

$\Delta x \to 0$ equivale a $\Delta y \to 0$. Primeiro mostraremos que $\lim_{\Delta x \to 0}$. De (7),

$$\lim_{\Delta y \to 0} = \lim_{\Delta y \to 0} [f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)].$$

Como f^{-1} é continua em $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$), o limite do segundo membro da igualdade acima é zero. Assim,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \Delta y = 0. \tag{9}$$

Vamos demonstrar agora que $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. De (6),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)].$$

Como f é contínua em $[a, b]$, o limite do segundo membro da igualdade acima é zero e, portanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Dessa equação e de (9), segue que

$$\Delta x \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta y \to 0.$$

Dessa afirmação e aplicando o teorema de limite de um quociente a (8), temos que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}.$$

Como f é diferenciável em $[a, b]$, o limite no denominador acima é $f'(x)$ ou, equivalente, $\dfrac{dy}{dx}$. Então,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

■

4.3 A FUNÇÃO LOGARÍTMICA NATURAL

A definição da função logarítmica da Álgebra está baseada em potências. As propriedades dos logaritmos são provadas a partir das propriedades correspondentes das potências. Uma de tais propriedades das potências é

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}. \tag{10}$$

Se os expoentes x e y forem inteiros positivos e se a for um número real qualquer, (10), decorrerá da definição de potência de expoente inteiro positivo e da indução matemática. Para os casos em que os expoentes são inteiros quaisquer, positivos, negativos ou zero e $a \neq 0$, então (10) será válida se definirmos potências de expoente negativos e zero por

$$a^0 = 1 \quad \text{e} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n > 0.$$

Se os expoentes forem números racionais e $a \geq 0$, então (10) será válida com $a^{\frac{m}{n}}$ definida por

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Não é tão simples definir a^x quando x for um número irracional. Por exemplo, qual o significado de $2^{\sqrt{3}}$? A definição de logaritmo dada em Álgebra Elementar baseia-se na hipótese de que a^x existe se a for um número positivo qualquer e x, um número real qualquer.

Essa definição estabelece que a equação

$$a^x = N$$

onde a é um número positivo qualquer diferente de 1 e N é um número positivo, pode ser resolvida em x e que x é determinado de modo único por

$$x = \log_a N$$

As seguintes propriedades de logaritmos são provadas a partir das propriedades de potências:

$$\log_a 1 = 0 \qquad (11)$$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \qquad (12)$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \qquad (13)$$

$$\log_a M^n = n \log_a M \qquad (14)$$

$$\log_a a = 1 \qquad (15)$$

Definiremos a função logarítmica usando o Cálculo e provaremos as propriedades dos logaritmos pela definição. Então, a função exponencial será definida em termos da função logarítmica. Essa definição possibilita - nos definir a^x sendo x um número real qualquer e $a > 0$. As propriedades das potências serão então provadas para os casos em que o expoente for qualquer número rel.

Considere a fórmula

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad \neq -1$$

Esta fórmula não é válida para $n = -1$.

Para calcular $\int t^n dt$ quando $n = -1$, precisamos de uma função cuja derivada seja $\frac{1}{x}$. O primeiro teorema fundamental do Cálculo (2.4) dá-nos tal função:

$$\int_a^x \frac{1}{t}\,dt$$

onde a pode ser qualquer número real com o mesmo sinal que x. Para interpretar tal função, seja R_1 a região limitada pela curva $y = \frac{1}{t}$, pelo eixo t, pela reta $t = 1$ a esquerda e pela reta $t = x$ à direita onde $x > 1$. Essa região R_1 está na figura abaixo.A medida da área de R_1 é uma função x; vamos chamá-la de $A(x)$ e defini-la pela integral definida

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

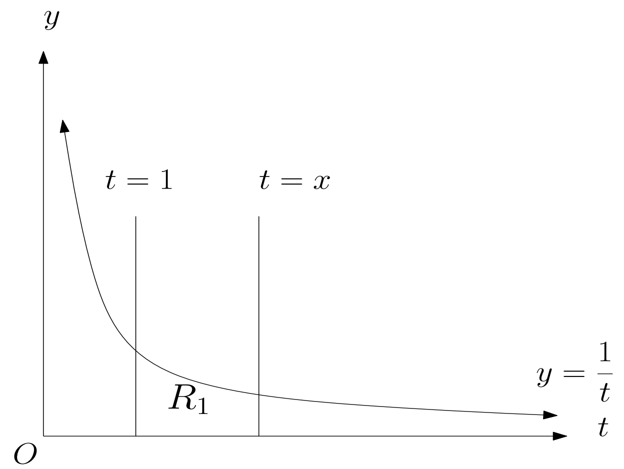


Figura 6: Gráfico da função $\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$

Consideremos agora essa integral no caso em que $0 < x < 1$. Da definição (2.1,

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_1^x \frac{1}{t}dt$$

Então, a integral $\int_1^x \left(\frac{1}{t}\right) dt$ representa a medida da área da região R_2 limitada pela curva $y = \frac{1}{t}$, pelo eixo t, pela reta $t = x$ à esquerda e pela reta $t = 1$ à direita. Assim sendo, $\int_1^x \left(\frac{1}{t}\right) dt$ será então a medida da área da região R_2 da figura abaixo, com sinal negativo.

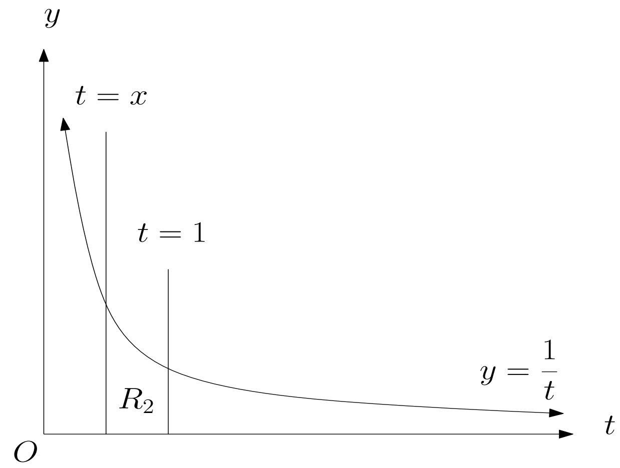


Figura 7: Gráfico da função $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

Para $x = 1$, a integral $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ torna-se $\int_1^1 \frac{1}{t}dt$, que é igual a zero pela definição (2.2). Nesse caso, as limitações à esquerda e a direita da região coincidem e a medida da área é 0.

Assim, a integral $\int_1^x \left(\frac{1}{t}\right) dt$ para $x > 0$ pode ser interpretada em termos da medida da área de uma região. Seu valor depende de x, sendo usada para definir a *função logarítmica natural*.

Definição 4.3 *A **função logarítmica natural** é a função definida por*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt \qquad x > 0$$

O domínio da função logarítmica natural é o conjunto de todos os números positivos. Lê-se $\ln x$ como o "logaritmo natural de x".
A função logarítmica natural é diferenciável, pois aplicando o primeiro teorema fundamental do Cálculo (2.4), obtemos

$$D_x(\ln x) = D_x\left(\int_1^x \frac{1}{t}dt\right) = \frac{1}{x}$$

Desse resultado e da regra da cadeia temos o teorema a seguir.

Teorema 4.7 *Se u for uma função diferenciável de x e $u(x) > 0$, então*

$$D_x(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot D_x u$$

Exemplo 4.3 *Ache $f'(x)$ se*

$$f(x) = \ln(3x^2 - 6x + 8)$$

Solução *Do Teorema (4.7),*

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{3x^2-6x+8}(6x-6) \\
&= \frac{6x-6}{3x^2}-6x+8
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que a função logarítmica natural satisfaz as mesmas propriedade do logaritmo, conhecidas da Álgebra Elementar.

Teorema 4.8 $\ln 1 = 0$

Demonstração: Se $x = 1$ na Definição 2.4,
$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt$
O segundo membro acima é zero, pela Definição (2.2). Assim,

$$\ln 1 = 0.$$

■

O Teorema acima corresponde à propriedade dos logaritmos dada por (11). Os três teoremas seguintes correspondem às propriedades dos logaritmos dadas por $(12), (13)$, e (14).

Teorema 4.9 *Se a e b forem números positivos quaisquer, então,*

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Demonstração: Considere a função f definida por

$$f(x) = \ln(ax)$$

onde $x > 0$. Então,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{ax}(a) \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Portanto, as derivadas de $\ln(ax)$ e $\ln x$ são iguais. Assim, do Teorema (2.5) há uma constante k, tal que

$$\ln(ax) = \ln x + k \quad \text{para todo} \quad x > 0. \tag{16}$$

Para determinar k, seja $x = 1$ nessa equação e temos $\ln a = \ln 1 + k$
Como $\ln 1 = 0$,obtemos $k = \ln a$. Substituindo k por $\ln a$em (16), obtemos $\ln(ax) = \ln x + \ln a$ para todo $x > 0$
Agora, tomando $x = b$, temos

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

■

Teorema 4.10 *Se a b forem números positivos quaisquer, então,*

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Demonstração: Como $a = (\frac{a}{b}) \cdot b$,

$$\ln a = \ln\left(\frac{a}{b} \cdot b\right)$$

Aplicando o Teorema (4.9) ao segundo membro da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \ln a &= \ln \frac{a}{b} + \ln b \\ \ln \frac{a}{b} &= \ln a - \ln b \end{aligned}$$

■

Teorema 4.11 *Se a for um número positivo qualquer e r um número racional qualquer, então,*

$$\ln a^r = r \ln a$$

Demonstração: Do Teorema (4.7), se r for um número racional qualquer e $x > 0$,

$$\begin{aligned} D_x(\ln x^r) &= \frac{1}{x^r} \cdot r x^{r-1} \\ &= \frac{r}{x} \end{aligned}$$

e

$$D_x(r \ln x) = \frac{r}{x}.$$

Logo,

$$D_x(\ln x^r) = D_x(r \ln x).$$

Da igualdade acima vemos que as derivadas de $\ln x^r$ e $r \ln x$ são iguais; assim, do Teorema (2.5), decorre que existe uma constante k, tal que

$$\ln x^r = r \ln x + k, \forall x > 0 \tag{17}$$

Para determinar k, vamos substituir x por 1 em (17), obtendo

$$\ln 1^r = r \ln 1 + k$$

Mas $\ln 1 = 0$, logo $k = 0$. Substituindo k por 0 em (17) resulta

$$\ln x^r = r \ln x, \forall x > 0$$

do que segue que se $x = a$, onde a é um número positivo qualquer, então,

$$\ln a^r = r \ln a$$

■

4.4 CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Para fazer um esboço do gráfico da função logarítmica natural precisamos considerar primeiro algumas propriedades dessa função. seja f a função definida por $f(x) = \ln x$, isto é,

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \; x > 0$$

o domínio de f é o conjunto de todos os números positivos. A função f é diferenciável para todo x em seu domínio, e

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Como f é diferenciável para todo $x > 0$, f é uma função crescente.

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Observe que $f''(x) < 0$ quando $x > 0$. Logo, o gráfico de $y = f(x)$ é côncavo para baixo em todo ponto. Como $f(1) = \ln 1$ e $\ln 1 = 0$, o intercepto x do gráfico é 1. Podemos determinar valores numéricos aproximados para $\ln 2$ usando a equação

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\, dt$$

e interceptando a integral definida como o número de unidades de área da região que aparece na figura abaixo.

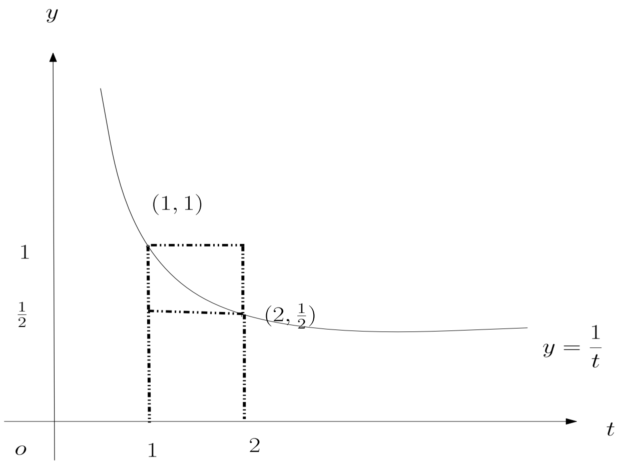


Figura 8:

Dessa figura, vemos que $\ln 2$ está entre as medidas das áreas de retângulos, cada um tendo uma base de 1 unidade de comprimento e alturas com $\dfrac{1}{2}$ e 1 unidade; isto é

$$0,5 < \ln 2 < 1$$

Uma das propriedades pode ser obtida analiticamente, usando o Teorema (2.8), procedendo da seguinte forma: seja $f(t) = \frac{1}{t}$ e $g(t) = \dfrac{1}{2}$. Então $f(t) \geq g(t)$ para todo t em $[1,2]$ e, do Teorema (2.8),

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \geq \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$$

$$\ln 2 \geq \frac{1}{2} \tag{18}$$

Da mesma forma, se $f(t) = \frac{1}{t}$ e $h(t) = 1$, então $h(t) \geq f(t)$ para todo t e, $[1,2]$. Como h e f são contínuas em $[1,2]$, elas são integráveis no intervalo e, usando novamente o Teorema (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} \int_1^2 1dt &\geq \int_1^2 \frac{1}{t}dt \\ 1 &\geq \ln 2. \end{aligned}$$

Combinando essa desigualdade com (18), obtemos

$$0,5 \leq \ln 2 \leq 1 \tag{19}$$

O número $0,5$ é um limite inferior de $\ln 2$, enquanto que 1 é um limite superior. Da mesma forma, podemos obter um limite inferior e outro superior do logaritmo natural de qualquer número real positivo. Mais tarde iremos aprender, aplicando séries infinitas, como calcular o logaritmo natural de qualquer número real positivo, aproximado com um número de casas decimais desejado. O valor de $\ln 2$ com cinco casas decimais é dado por $\ln 2 \simeq 0,69315$
Usando esse valor de $\ln 2$ e aplicando o Teorema (4.11) podemos encontrar um valor aproximado do logaritmo natural de qualquer potência de 2. Por exemplo,

$$\begin{array}{rclrclrclrcl}
\ln 4 & = & \ln 2^2 & \ln 8 & = & \ln 2^3 & \ln \frac{1}{2} & = & \ln 2^{-1} & \ln \frac{1}{4} & = & \ln 2^{-2} \\
& = & 2\ln 2 & & = & 3\ln 2 & & = & -1 \cdot \ln 2 & & = & -2\ln 2 \\
& \simeq & 1,3863 & & \simeq & 2,0795 & & \simeq & -0,69315 & & \simeq & -1,3863
\end{array}$$

Uma calculadora com uma tecla ln também pode ser usada para obter valores fa função logarítmica natural. Vamos determinar agora o comportamento da função logarítmica natural para grandes valores de x, considerando $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$. Como a função logarítmica natural é crescente, se p for qualquer número positivo, temos

$$\text{se } x > 2^p \text{ então } \ln x > \ln 2^p \tag{20}$$

do Teorema (4.11),

$$\ln 2^p = p \ln 2$$

Substituindo esta equação em (20) teremos

$$\text{se } x > 2^p \text{ então } \ln x > p \ln 2$$

Como de (18), $\ln 2 \geq \dfrac{1}{2}$, temos, do estabelecido acima que

$$\text{se } x > 2^{2n} \text{ então } \ln x > n$$

Dessa definição, tomando $N = 2^{2n}$, para qualquer $n > 0$

$$\text{se } x > N \text{ então } \ln x > n$$

Assim, podemos concluir que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \tag{21}$$

Para determinar o comportamento da função logarítmica natural para o valores de x próximos de zero, vamos investigar $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx$. Como $\ln x = \ln(x^{-1})^{-1}$,

$$\ln x = -\ln\frac{1}{x}$$

a expressão "$x \to 0^+$" é equivalente a "$\frac{1}{x} \to +\infty$"; assim, dessa equação escrevemos

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\lim_{\frac{1}{x}\to +\infty} \ln\frac{1}{x} \tag{22}$$

De (21) temos

$$\lim_{\frac{1}{x}\to +\infty} \ln\frac{1}{x} = +\infty$$

Logo, desse resultado e de (22) temos que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \tag{23}$$

De (23) e (21) e do teorema do valor intermediário (**??**), concluímos que a imagem da função logarítmica natural é assintótico à parte negativa do eixo y no quarto quadrante. As propriedades da função logarítmica natural estão resumidas a seguir:

(i) O domínio é o conjunto de todos os números positivos.

(ii) A imagem é o conjunto de todos os números reais.

(iii) A função é crescente em todo seu domínio.

(iv) A função é contínua em todos os números de seu domínio.

(v) O gráfico da função é côncavo para baixo em todos os pontos.

(vi) O gráfico da função é assintótico à parte negativa do eixo y no quarto quadrante.

Usando essas propriedades e colocando no gráfico alguns pontos com um segmento da reta tangente nesses pontos, podemos esboçar o gráfico da função logarítmica natural. Na figura abaixo foram colocados no gráfico os pontos com abscissas $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$ e 8. A inclinação da reta tangente (denotada no gráfico abaixo por *incl*) é encontrada pela fórmula $D_x(\ln x) = \frac{1}{x}$.

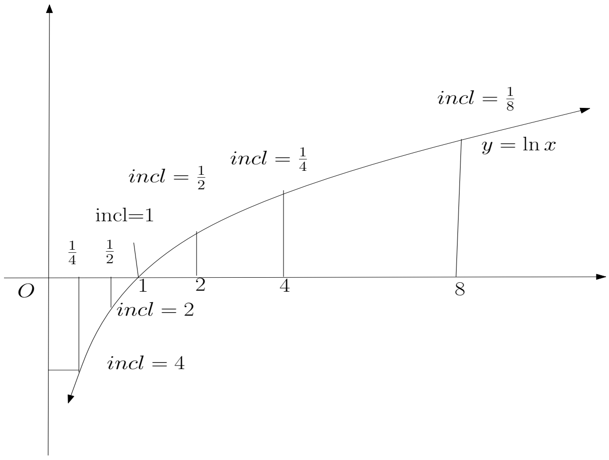


Figura 9: Gráfico da função $\ln x$

4.5 DIFERENCIAÇÃO LOGARÍTMICA E INTEGRAIS QUE RESULTAM NA FUNÇÃO LOGARÍTMICA NATURAL

Para a discussão tanto da diferenciação logarítmica como das integrais que resultam na função logarítmica natural, precisamos de uma fórmula para $D_x(\ln|x|)$. Para encontrar essa fórmula usando o Teorema (4.7), primeiro substituímos $|x|$ por $\sqrt{x^2}$. Assim,

$$\begin{aligned} D_x(\ln|x|) &= D_x(\ln\sqrt{x^2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot D_x(\sqrt{x^2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{x}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Dessa fórmula e da regra da cadeia, obtemos o teorema a seguir.

Teorema 4.12 *Se u for uma função de x, diferenciável,*

$$D_x(\ln|u|) = \frac{1}{u} \cdot D_x u$$

Do Teorema anterior, obtemos o teorema a seguir, para integração indefinida como o número de igualdades de área da região que aparece na figura abaixo.

Teorema 4.13

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

Dos Teoremas (4.13) e (2.3), sendo n um número real qualquer,

$$\int u^n du = \begin{cases} \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C & se \quad n \neq -1 \\ \ln|u| + C & se \quad n = -1 \end{cases}$$

5 CONCLUSÃO

Ao término deste trabalho em que temos apresentado inicialmente um apanhado histórico sobre o surgimento do logaritmo e qual a necessidade que impulsionou os estudos por sua descoberta. Instrumentos foram criados a partir da criação dos logaritmos, alguns deles que facilitaram sua própria utilização como a tábua de logaritmos usada para os cálculos aritméticos mais rápidos e a régua de calculo logarítmico, instrumento muito utilizado por alunos dos cursos de engenharias das universidades durante muitas décadas. Hoje apresentamos estes instrumentos apenas como ferramentas metodológicas para trabalhos práticos na aplicação e verificação das propriedades do logaritmo. Buscou-se também apresentar as principais demonstrações dos teoremas e definições do logaritmo e das funções logarítmicas. Partindo do fato que o estudo dos logaritmos tem muita relevância, desde sua descoberta, e nem mesmo surgimento das máquinas de calcular e os computadores não foram o suficiente para desmerecer os estudos sobre os logaritmos, uma vez que suas variações são partes vitais nos estudos da natureza e da análise. As demonstrações foram colocadas de forma que facilitasse o entendimento e o discernimento das duas abordagens utilizadas aqui. A linha de raciocínio sugerida por Lima (LIMA, 1996), parte do fato que a função logarítmica é caracterizada por propriedades extremamente simples e naturais da definição (3.2). Por outro lado, Leithold (LEITHOLD, 2002) utiliza-se das ferramentas do cálculo diferencial para definir a função logarítmica através de uma integral, donde obtemos todas as propriedades do logaritmo, além do esboço do gráfico do mesmo. Sem dúvida, qualquer que seja a linha de raciocínio adotada, as conhecidas propriedades de logaritmos são estabelecidas.

REFERÊNCIAS

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 2002.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

ANEXO A – RÉGUA DE CÁLCULOS DE LOGARITMOS

Apresentaremos neste anexo a régua de cálculos logaritmos, uma maneira didática e atraente, para expor as propriedades do logaritmo aos leitores. As ilustrações a seguir darão as instruções para utilização da Régua de Cálculo de Logaritmos formalizando aplicabilidade de suas propriedades.

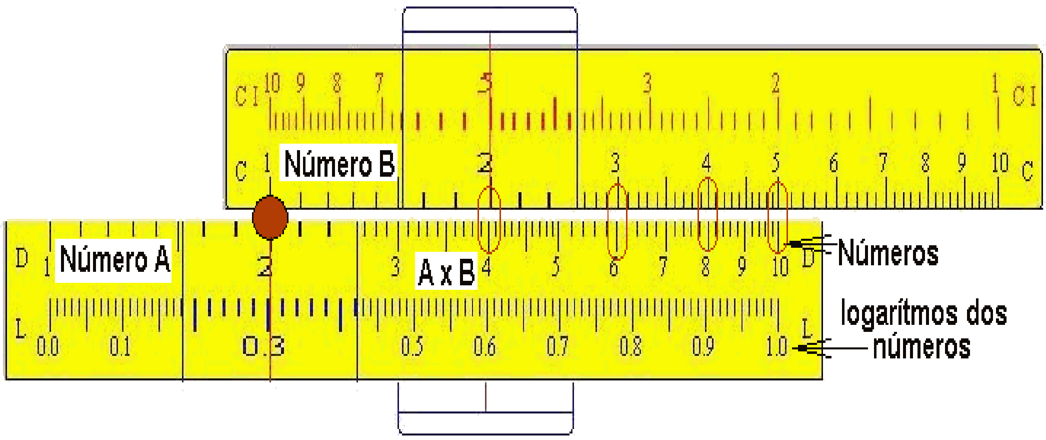


Figura 10: Os resultados de $2\times, 2{,}2\times 3{,}2\times 4{,}2\times 5$

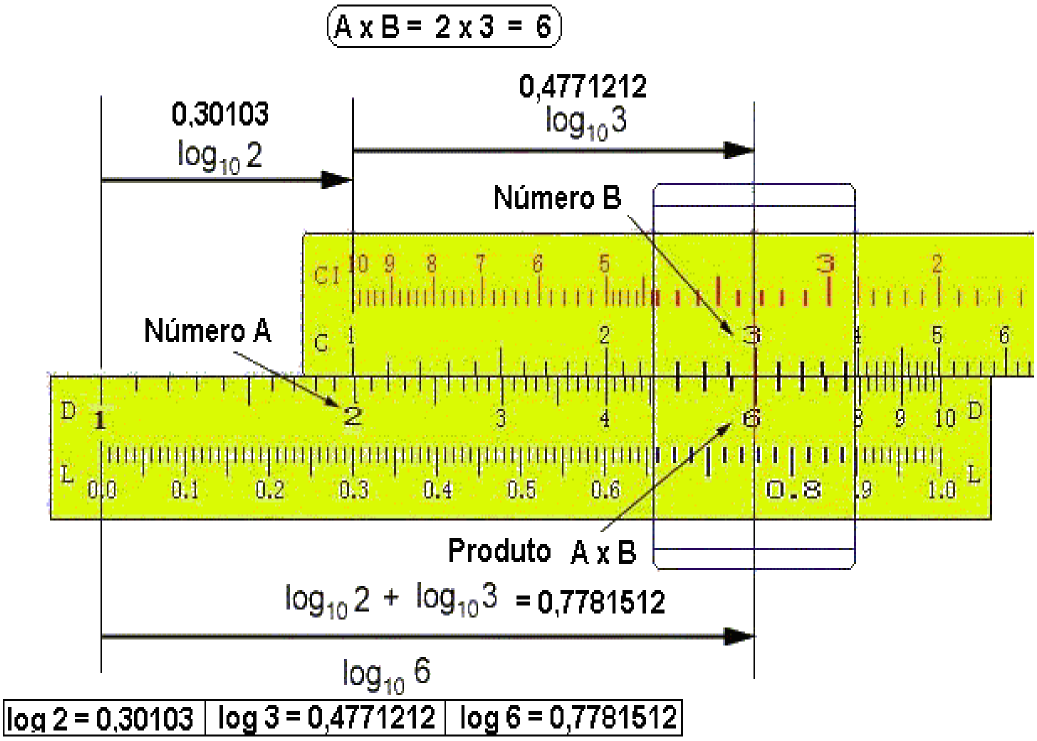


Figura 11:

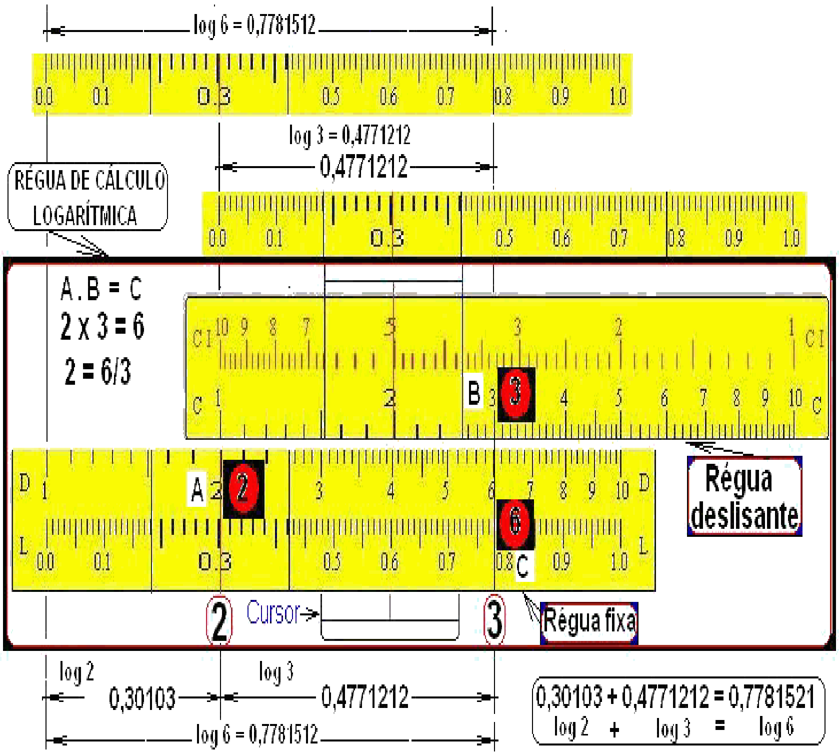


Figura 12:

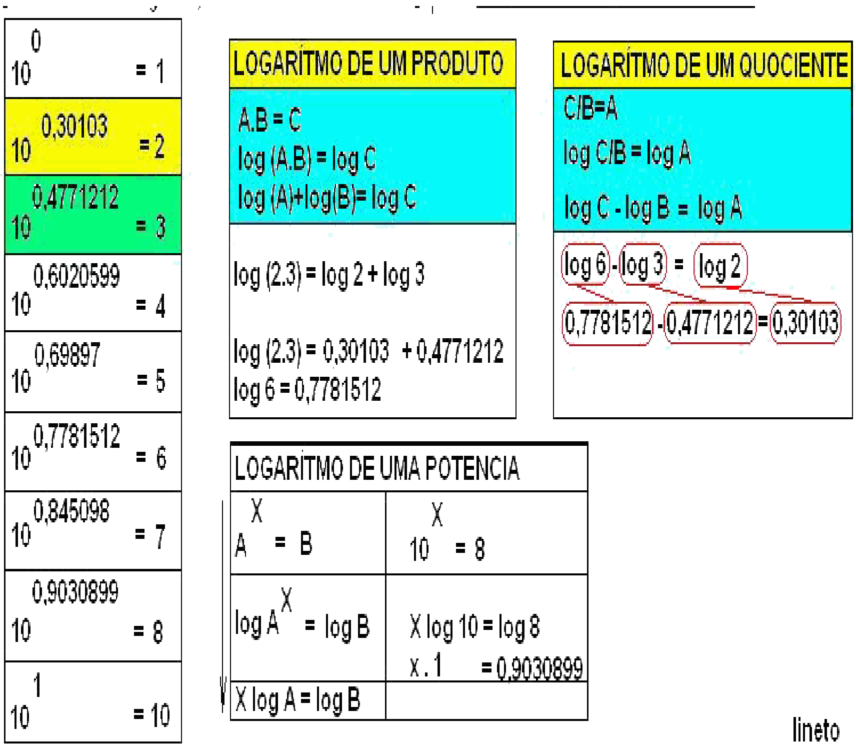


Figura 13:

Aqui, utilizando a régua de cálculo logarítmica fica bem materializada a propriedade do logaritmo de um produto e do logaritmo de um quociente. É só olhar para a régua fixa e a régua deslizante, onde estão desenhados continuamente os logaritmos dos números. Na Régua Fixa em D, temos os números e em L temos os logaritmos correspondentes desses números. Para uma melhor visualização veja a tabela construída à esquerda, com os logaritmos de 0 a 10, utilizando a base 10.

ANEXO B – TÁBUA LOGARÍTMICA

A tábua logarítmica também serve como instrumento didático para apresentações de cálculos logarítmicos, como podemos visualizar nas figuras apresentadas abaixo.

MANTISSAS										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(a)

MANTISSAS										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9150	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(b)

Figura 14: Tábua Logarítmica