

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EVERALDO MARTINS DA SILVA

**INTEGRAL DEFINIDA: HISTÓRIA, TEORIA E APLICAÇÃO**

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2013

EVERALDO MARTINS DA SILVA

## **INTEGRAL DEFINIDA: HISTÓRIA, TEORIA E APLICAÇÃO**

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Sara Coelho da Silva

**CAMPO MOURÃO**

**2013**

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

Everaldo Martins da Silva

Integral Definida: História, Teoria e Aplicação

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

---

Orientador: Prof. Msc. Sara Coelho da Silva

---

Prof. Msc. Lilian Caroline Xavier Cândido

---

Prof. Msc. Wellington José Correa

Campo Mourão, 2013

Dedico esse trabalho a todas as pessoas que contribuíram de uma maneira direta e indireta para a realização do mesmo, em especial a Tatiana Martins da Silva.

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus

“ Por me propiciar a realização deste trabalho, pois a Ele devo a minha existência, o pensar, o querer e o fazer”.

À Esposa

“ Célia de Jesus Santos Silva, que junto comigo levantava as 05:40 da manhã todos os sábados, para que eu não saísse sem tomar aquele café com leite quentinho, pela paciência que teve em suportar a minha ausência”.

Aos Companheiros de Viagem

“Edilza Martins da Silva, Kely Shneider, Ricardo Santana, Rodrigo Calisto, que juntos passavamos cerca de 4 horas dentro do carro, levando em consideração que o tempo de aula era 8 horas, portanto o equivalente a metade da carga horária do curso passamos dentro da Paraty do Rodrigo Calisto, que nas idas e vindas foi o único que não dormiu, pois era o nosso motorista”.

À Professora Orientadora

“ Sara Coelho da Silva, que não mediu esforços na orientação, prestando todo o apoio necessário com grande competência, com sinceridade nas suas opiniões sobre o trabalho e sempre com um argumento em que direcionava à uma melhor elaboração dos trabalhos.”

“ Na área da educação, estando bem definida a finalidade do educar, se alcança o conhecimento integral. ”

Autor: Everaldo Martins da Silva

## RESUMO

SILVA, Everaldo Martins. Integral Definida: História, Teoria e Aplicação. 58 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

Esta pesquisa apresenta na forma de revisão bibliográfica, o surgimento e evolução dos estudos sobre a integral definida, destacando os principais matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento, dentre eles alguns pensadores gregos que fizeram expressivas descobertas e, matemáticos como Newton e Leibniz, do século XVII e XVIII, momento histórico em que a matemática consolidou-se em caminhos sólidos e estes matemáticos conseguiram estabelecer uma relação entre a diferenciação e a integração, formulando o Teorema Fundamental do Cálculo. Nesta revisão apresentamos ainda alguns matemáticos que inseriram a noção de limites e somatória ao cálculo integral. Neste trabalho também são apresentadas algumas propriedades da integral definida bem como teoremas e conceitos importantes. Por fim é exposta uma aplicação da integral definida em uma situação problema no cotidiano da Engenharia Civil.

**Palavras-chave:** Área, Integral Definida, Aplicação

## ABSTRACT

SILVA, Everaldo Martins. Definite Integral: History, Theory and Application. 58 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

This research presents, in the form of literature review, the emergence and evolution of studies on the definite integral, highlighting key mathematicians who contributed to its development, including some Greek thinkers who made significant discoveries and mathematicians such as Newton and Leibniz, century seventeenth and eighteenth centuries, the historical moment in which mathematics consolidated into solid paths and these mathematicians were able to establish a relationship between differentiation and integration, formulating the fundamental theorem of calculus. In this review we present still some mathematicians who inserted the notion of limits and sum to integral calculus. This work is also presented some properties of the definite integral and important theorems and concepts. Finally exposed is an application of the definite integral in a problem situation in everyday civil engineering.

**Keywords:** Area, Definite Integral, Application.



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – METODO DE EXAUSTAO .....	10
FIGURA 2 – ARQUIMEDES .....	10
FIGURA 3 – QUADRATURA DA PARÁBOLA .....	11
FIGURA 4 – QUADRATURA DA PARÁBOLA .....	12
FIGURA 5 – CAVALIERI .....	13
FIGURA 6 – FERMAT .....	14
FIGURA 7 – ÁREA SOB CURVA .....	15
FIGURA 8 – NEWTON .....	16
FIGURA 9 – LEIBNIZ .....	17
FIGURA 10 – ÁRVORE GENEALÓGICA DA FAMÍLIA BERNOULLI .....	18
FIGURA 11 – JACQUES .....	19
FIGURA 12 – JOHANN .....	20
FIGURA 13 – AUGUSTIN LOUIS CAUCHY .....	21
FIGURA 14 – INTEGRAL DEFINIDA DE CAUCHY .....	22
FIGURA 15 – GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN .....	23
FIGURA 16 – ÁREA DA REGIÃO $S$ .....	24
FIGURA 17 – EXTREMOS ESQUERDOS E DIREITOS .....	25
FIGURA 18 – DIVISÃO EM $N$ FAIXAS DE INTERVALOS .....	26
FIGURA 19 – APROXIMAÇÃO POR $l$ -ÉSIMA FAIXA $S_l$ .....	27
FIGURA 20 – PONTOS AMOSTRAIS NO $l$ -ÉSIMO SUBINTERVALO .....	28
FIGURA 21 – SOMA DE RIEMANN .....	30
FIGURA 22 – PROPRIEDADE 3.1 DA INTEGRAL .....	31
FIGURA 23 – PROPRIEDADE 3.2 DA INTEGRAL .....	32
FIGURA 24 – PROPRIEDADE 3.5 DA INTEGRAL .....	34
FIGURA 25 – ÁREA = $G(X)$ .....	35
FIGURA 26 – ÁREA SOB $F$ .....	36
FIGURA 27 – ÁREA SOB A CURVA $X^2$ .....	38
FIGURA 28 – ARCO .....	39
FIGURA 29 – APROXIMAÇÃO CURVA POR UM POLÍGONO .....	40
FIGURA 30 – CURVA $C$ .....	41
FIGURA 31 – ARCO $P_{l-1}$ ATÉ $P_l$ .....	41
FIGURA 32 – COMPRIMENTO DO ARCO $Y = \sqrt{X^3}$ .....	43
FIGURA 33 – CONE .....	45
FIGURA 34 – TRONCO .....	46
FIGURA 35 – TRIÂNGULOS SEMELHANTES .....	47
FIGURA 36 – PONTO MÉDIO .....	48
FIGURA 37 – PONTO MÉDIO $F(C_l)$ .....	49
FIGURA 38 – SEMI HIPERBOLÓIDE .....	51
FIGURA 39 – SEMI HIPERBOLÓIDE NA ORIGEM $(0,0,0)$ .....	52
FIGURA 40 – GRÁFICO DO SEMI HIPERBOLÓIDE .....	52
FIGURA 41 – TRIÂNGULO TRIGONOMÉTRICO .....	54

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>CONTEXTO HISTÓRICO DO CÁLCULO INTEGRAL</b>	<b>9</b>
2.1	EUDOXO (406 - 355 A.C.)	9
2.2	ARQUIMEDES (287 - 212 A.C.)	10
2.3	CAVALIERI (1598 - 1647)	13
2.4	FERMAT (1601 - 1665)	14
2.5	ISAAC NEWTON (1642 - 1727)	16
2.6	GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)	17
2.7	FAMÍLIA BERNOULLI	18
2.7.1	Jacques Bernoulli (1654-1705)	19
2.7.2	Johann Bernoulli (1667-1748)	20
2.8	AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789 - 1857)	21
2.9	GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826 - 1866)	23
<b>3</b>	<b>CÁLCULO INTEGRAL</b>	<b>24</b>
3.1	PROPRIEDADES DA INTEGRAL	31
3.2	O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO	34
3.2.1	Comprimento de Arco	39
3.2.2	Área de uma superfície em revolução	44
3.3	APLICAÇÃO DA INTEGRAL	50
3.3.1	Aplicação em Projeto do curso de Engenharia Civil	50
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>57</b>
	REFERÊNCIAS	58

## 1 INTRODUÇÃO

Há pouco de estudos direcionados à aplicação da integral definida, em cursos de graduação, devido ao pouco tempo para exposição de uma ementa extensa e o fato deste conteúdo ser apresentado nos semestres iniciais, quando o aluno ainda não possui os pré-requisitos básicos para poder aplicá-lo em situações reais da sua futura área de atuação. Neste contexto, é comum os alunos sentirem dificuldades de entender o conceito e as técnicas de integração devido muitas vezes às deficiências em matemática básica e à falta de motivação, que levanta sempre o seguinte questionamento: Para que ou aonde eu vou usar esse conteúdo? Esse questionamento se dá devido o fato do direcionamento do estudo para um caminho somente teórico sem exposição das elegantes aplicações da integral definida. Quando o professor mantém um equilíbrio entre teoria e prática fazendo uso de aplicações, se torna mais fácil e motivador o entendimento do aluno, pois o mesmo conseguirá estabelecer uma ligação entre a teoria e prática, fixando assim o conhecimento sólido. Neste trabalho apresentamos um breve relato histórico da integral definida, apontando a possibilidade de humanização deste conteúdo, apresentando a evolução e contribuição de vários matemáticos durante a evolução da humanidade. Já para a aplicabilidade da integral definida relata-se uma aplicação realizada num curso de Engenharia Civil, expondo uma metodologia alternativa para o ensino do Cálculo Integral nos cursos de graduação.

## 2 CONTEXTO HISTÓRICO DO CÁLCULO INTEGRAL

Desde a antiguidade, povos como os mesopotâmicos e babilônicos, faziam uso da essência do cálculo que utilizamos na atualidade. Os mesmos usavam a ideia de área, volume no seu dia a dia.

De acordo com Boyer (1992), a palavra cálculo vem do diminutivo de *calx* que no latim significa pedra. O cálculo que é usado hoje nos cursos de exatas foi construído ao longo dos séculos, tendo vários matemáticos contribuído para o seu desenvolvimento.

Na história do cálculo, os primeiros problemas envolvendo o cálculo da área, volume e comprimento de arcos estavam relacionados a divisão de grandezas. Antífon (430 a.C.) acreditava que por sucessivas duplicações dos números de lados de um polígono regular inscrito em um círculo, a diferença no fim do processo exaurir-se-ia. Essa ideia era a base de um método que tornou-se conhecido e muito usado, sendo denominado o método de exaustão atribuído a Eudoxo (EVES, 2011).

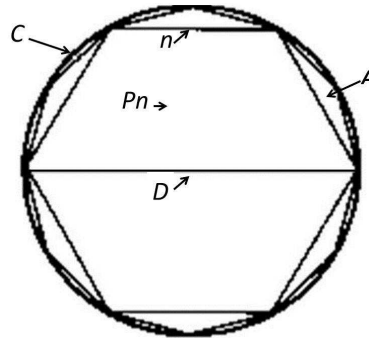
### 2.1 EUDOXO (406 - 355 A.C.)

Eudoxo nasceu em Cnido, atual região da Turquia, em 406 a.C. e não se tem preciso o ano de seu falecimento. Foi discípulo de Platão e suas obras foram de fundamental importância para a matemática. Uma das obras que marcou o rumo do Cálculo Integral foi o “método de exaustão”, cuja sua prova está no livro *Os elementos* de Euclides XII, 2 (BOYER, 1974). Sendo o mesmo definido como:

(...) Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2011, p. 419).

Conforme Boyer (1974), utilizando uma notação moderna, o método de exaustão é descrito da seguinte maneira:

Seja  $C$  o círculo, com diâmetro  $D$  e área  $A$ . Inscrevendo no círculo  $C$  o polígono regular de área  $P_n$  de  $n$  lados, e considerando a área intermediária, fora do polígono mas dentro do círculo, se dobrarmos o número de lados estamos subtraindo dessa área intermediária mais da metade. Logo, pelo processo de exaustão, dobrando sucessivamente o número de lados (isto é, fazendo crescer  $n$ ) a área intermediária pode ser reduzida até que  $P_n - A < \varepsilon$ , onde  $\varepsilon > 0$  é uma grandeza tão pequena quanto se desejar.



**Figura 1: Método de Exaustão**  
**Fonte: Adaptado (BOYER, 1974)**

O método de exaustão proporcionou aos matemáticos desenvolver novas teorias, tendo o mesmo como base (BOYER, 1992).

## 2.2 ARQUIMEDES (287 - 212 A.C.)



**Figura 2: Arquimedes**  
**Fonte: Assis (2008)**

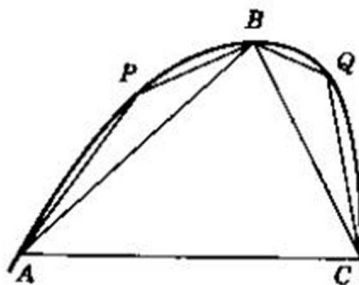
Arquimedes nasceu em 287 a.C. na cidade de Siracusa, filho do astrônomo Fídias, ainda jovem mudou-se para Alexandria, a fim de terminar seus estudos (STRATHERN, 1998).

De acordo com Simmons (1987), Arquimedes morreu aos 75 anos durante a guerra Púnica, assassinado por um soldado.

Assis (2008) afirma que, seus trabalhos eram enviados a matemáticos que viviam ou que estiveram em Alexandria, tendo por hábito enviar inicialmente apenas os enunciados de alguns teoremas, mas sem as demonstrações. Isso pode ter levado alguns matemáticos a roubar os resultados de Arquimedes, afirmando que eram seus.

O método de exaustão de Eudoxo foi aprimorado por Arquimedes. A partir do método de exaustão, começou a se desenhar a noção de limite e, principalmente, de integração, isso revolucionou a matemática, tornando o que hoje é base das disciplinas de cálculo nas universidades com sua aplicabilidade nas mais diversas áreas de conhecimento (SILVA; SILVA, 2010).

Boyer (1974) destaca que a obra *Sobre Espirais* foi pouco lida, mas muito admirada, sendo composta por vinte oito proposições sobre espirais, que relaciona a áreas associadas à espiral. A Proposição 17 trata da quadratura da parábola. Arquimedes provou que a área K de um segmento parabólico APBQC é quatro terços da área de um triângulo tendo a mesma base e mesma altura, conforme a figura 3.

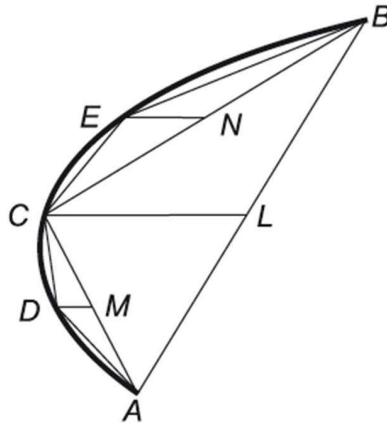


**Figura 3: Quadratura da Parábola**

**Fonte: Adaptado (BOYER, 1974)**

Eves (2011) traz uma demonstração detalhada sobre a quadratura da parábola, como é mostrado a seguir:

Sejam C, D, E os pontos do arco de segmento parabólico, (ver na figura 4) obtidos traçando-se LC, MD, NE paralelos ao eixo da parábola pelos pontos médios L, M, N de AB, CA, CB. Usando a geometria da parábola, Arquimedes mostrou que  $\Delta CDA + \Delta CEB = \frac{\Delta ACB}{4}$ . Repetindo sucessivamente esse raciocínio conclui-se que a área do segmento parabólico é dada por  $\Delta ABC + \frac{\Delta ABC}{4} + \frac{\Delta ABC}{4^2} + \frac{\Delta ABC}{4^3} + \dots = \frac{4}{3}\Delta ABC$  (EVES, 2011, p. 421).



**Figura 4: Quadratura da Parábola**

**Fonte: Adaptado (EVES, 2011)**

Segundo Boyer (1992), alguns estudiosos do século XVII achavam as demonstrações de seus métodos um pouco sem motivação, como se ele ocultasse a receita daquelas descobertas. Mas não era bem isso que Arquimedes queria, tanto que publicou uma obra com o título de *O método*, que continha quinze proposições, deixando evidentes descrições passo a passo de como chegou a suas descobertas.

O autor ainda menciona que Arquimedes enviou esse trabalho em forma de carta para Eratóstenes, que era bibliotecário na universidade de Alexandria. Demorou vários séculos para vir à tona o novo método que Arquimedes utilizava em seus estudos. No ano de 1906 o erudito dinamarquês J. L. Heiberg descobriu a peça que estava faltando no quebra-cabeça: um manuscrito que calava e enterrava qualquer suposição contra a originalidade científica de Arquimedes.

Silva e Silva (2010) ressaltam que na época não havia ainda a imprensa, que surgiu apenas na Idade Média, dificultando e ocultando muita das vezes o fluxo desses conhecimentos entre a população.

De acordo com Eves (2011), um longo período passou-se sem a utilização da teoria da integração. Por volta de 1450 as ideias de Arquimedes chegaram à Europa Ocidental por meio

de uma tradução de seus manuscritos e vários matemáticos utilizaram os métodos de Arquimedes, dentre os quais podemos destacar Johann Kepler.

### 2.3 CAVALIERI (1598 - 1647)



**Figura 5: Bonaventura Cavalieri**

**Fonte: Adaptado (EVES, 2011)**

Bonaventura Cavalieri nasceu em 1598, na cidade de Milão, foi discípulo de Galileu, membro dos Jesuados uma ordem religiosa, viveu em Milão e Roma e foi professor em Bolonha (EVES, 2011).

Boyer (1974) destaca que, dentre as obras de Cavalieri, o livro *Geometria Indivisibilibus Contiutorum nova quadam ratione promota*, publicado em 1635, era baseado essencialmente no argumento sugerido por Oresme, Kepler e Galileu, em que uma área pode ser pensada como sendo formada por segmentos ou “*indivisíveis*”, e que um volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis. Além disso o mesmo continham os indivisíveis ou infinitesimais fixos e aplicações de problemas de mensuração de áreas e volumes. O mesmo contia o postulado fundamental do “*O teorema de Cavalieri*” na qual é definido como:

Se dois sólidos(ou regiões planas) tem alturas iguais, e se secções paralelas as bases e as distâncias iguais delas estão sempre numa dada razão, então os volumes (ou áreas) dos sólidos (ou regiões) também estão nesta mesma razão. (BOYER, 1992, p. 11)



Cavalieri aplicou a ideia dos indivisíveis em inúmeros problemas e se concentrou num teorema geométrico extremamente útil, que na atualidade assemelha-se com a afirmação:  $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ , (BOYER, 1974).

#### 2.4 FERMAT (1601 - 1665)



**Figura 6: Fermat**  
**Fonte: (EVES, 2011)**

Pierre de Fermat nasceu em Beaumont de Lomagne em 17 de agosto de 1601, morreu em 12 de janeiro de 1665. Filho de comerciante de couro, era advogado, reservando o seu tempo de lazer a matemática. Fermat manteve correspondência científica com os principais matemáticos do seu tempo (EVES, 2011).

Simmons (1987) ressalta que suas descobertas são principalmente conhecidas pelas cartas enviadas a amigos e anotações marginais em sua cópia “*Arithmetica de Diofanto*”.

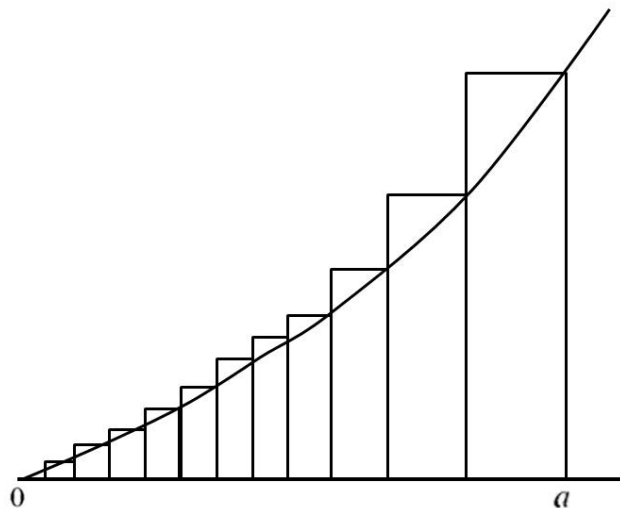
Em Boyer (1974), um amigo de Fermat chamado Mersenne tornou conhecido alguns resultados e descobertas de Fermat, através de suas correspondências e obras, destacando o teorema formulado por Fermat em 1629, que tratava sobre a área sob a curva  $y = x^m$ . Fermat inicialmente usou fórmulas para as somas de potências dos inteiros, ou desigualdades da forma

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m > \frac{n^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + 3^m + \dots + (n-1)^m,$$

Fermat aprimorou a ideia de Cavalieri que restringia  $m = 1$  até  $m = 9$ , formulando assim um método que aplicava a valores de  $m$  tanto fracionários quanto inteiros para cálculo da área sob a curva  $y = x^m$ . O autor descreve que dada uma curva  $y = x^m$ , supondo que a área procurada seja de  $x = 0$  e  $x = a$ . Então Fermat subdividia o intervalo de  $x = 0$  até  $x = a$  em inúmeros subintervalos tomando os pontos com abcissa  $a, aE, aE^2, aE^3, \dots$  onde  $E$  é uma quantidade menor que um. Nos referidos pontos Fermat levantava ordenadas da curva e fazia aproximação da área sob a curva usando retângulos como indica na figura 7, na qual as áreas dos retângulos circunscritos de aproximações iniciando do maior, são obtidas pelos termos de uma progressão geométrica  $a^m(a - aE), a^mE^m(aE - aE^2), a^mE^{2m}(aE^2 - aE^3), \dots$ . A soma a infinito dos termos é dada por,  $\frac{a^{m+1}(1 - E)}{1 - E^{m+1}}$ . Quando o valor de  $E$  tende a um, ou seja, temos os retângulos cada vez mais estreitos, soma das áreas dos mesmos se aproximando da área sob a curva.

Usando notação moderna Simmons (1987) escreve o processo descrito acima usando a seguinte fórmula:

$$\int_0^a x^m dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$



**Figura 7: Área sob Curva**

**Fonte: Adaptado (BOYER, 1974)**

## 2.5 ISAAC NEWTON (1642 - 1727)



**Figura 8: Isaac Newton**

**Fonte: (EVES, 2011)**

Isaac Newton foi um matemático de grande relevância que nasceu na aldeia de Woolsthorpe, norte da Inglaterra, em 1642. Filho de um fazendeiro, estudou em Cambridge e dedicou-se à matemática, lendo obras de matemáticos renomados da época. Newton fez quatro descobertas importantes: o teorema binomial, o cálculo, a lei de gravitação e a natureza das cores. Suas descobertas ficaram conhecidas de modo limitado, na maioria das vezes por meio de perguntas e respostas feitas através de correspondências (SIMMONS, 1987).

Boyer (1974) destaca uma obra importante de Newton, “*De analysi*”, sendo a primeira exposição sistemática do cálculo a principal descoberta de Newton na matemática. Na mesma obra é demonstrado que a área  $A$  sob a curva  $y = ax^{\frac{m}{n}}$  é dada por  $A = \frac{ax^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n} + 1}$

O autor ainda afirma que foi a primeira vez que calculou-se a área pela integral. Newton desenvolveu um algoritmo geral e aplicável a todas as funções, pois o mesmo reunia as operações de diferenciação e integração.

## 2.6 GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)



**Figura 9: Leibniz**

**Fonte: (BOYER, 1974)**

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em 1646 em Leipzig na Alemanha. Era filho de um professor de Filosofia Moral e com oito anos dominava o latim (SIMMONS, 1987).

De acordo com Boyer (1974) Leibniz contribuiu imensamente para o desenvolvimento do cálculo integral. Aos quinze anos entrou para universidade e aos 17 anos obteve o grau de bacharel. Dedicou-se à matemática como Newton, fez leitura de obras de matemáticos importantes, como Pascal, Barrow e o próprio Newton. Em seu estudo para cálculo integral Leibniz desenvolveu notações: para as ordenadas em uma curva usou  $y$  (ou “todos os  $y$ ”) mais tarde criou a notação  $\int y dx$ , o sinal da integral (um  $S$  para soma alongado). Dois anos mais tarde Leibniz publicou na revista *Acta Eruditorum* a explicação sobre cálculo integral, mostrando que o método das quadraturas é oposto ao método das tangentes, isto é, a relação inversa entre a diferenciação e integração, hoje descrita em Stewart (2006) como o Teorema Fundamental do Cálculo:

Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então:  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  onde  $F$  é qualquer antiderivada de  $f$ , isto é, uma função tal que  $F' = f$ .

O cálculo tornou-se algo sólido a partir do século XVII devido a contribuição de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Na atualidade, esta contribuição faz com que eles sejam reconhecidos como criadores do cálculo diferencial e integral.

## 2.7 FAMÍLIA BERNOULLI

Segundo Boyer (1974) a família Bernoulli, assustada com a fúria espanhola em 1576, fugiu para Basileia, tendo doze membros que fizeram grandes contribuições para matemática (ver figura 10). Quatro deles foram sócios da *Académie des Sciences* e dentre eles podemos destacar dois irmãos suíços Jacques Bernoulli e Jean Bernoulli, ambos filhos de Nicolaus (1623 - 1708), também conhecidos pelos nomes equivalentes no idioma alemão Jakob e Johann. Na Academia de Sciences fizeram muitas aplicações em vários problemas e deram uma especial importância ao cálculo. As principais obras da família Bernoulli estão publicadas em artigos e especialmente na revista *Acta Eruditorum*.

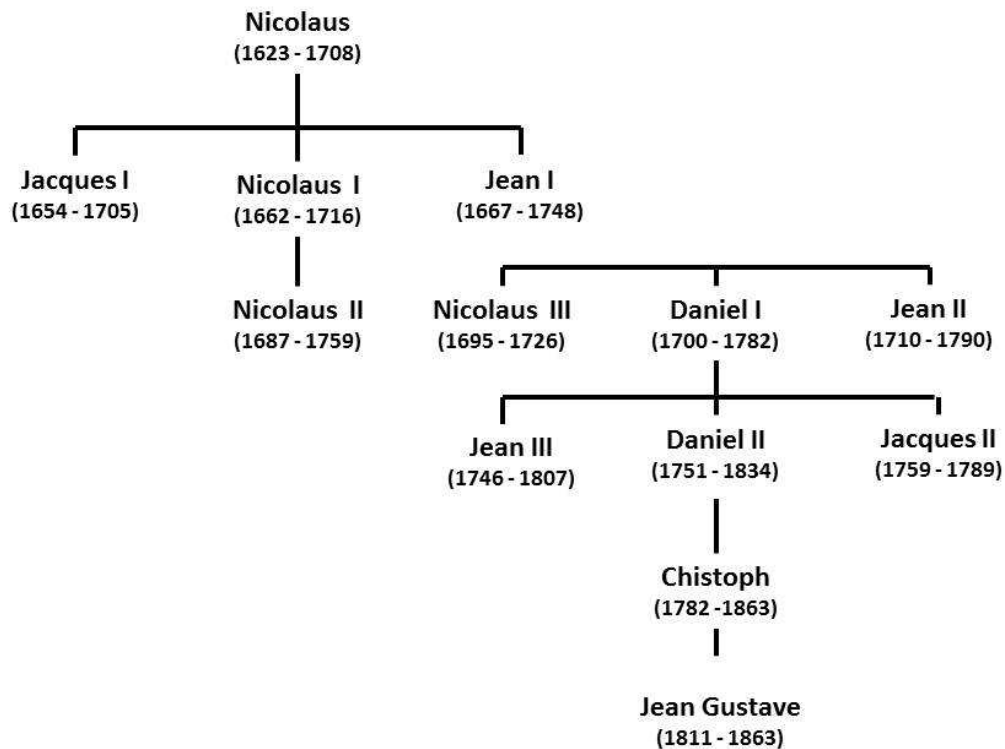


Figura 10: Árvore Genealógica da Família Bernoulli

Fonte: Adaptado (BOYER, 1974)

### 2.7.1 Jacques Bernoulli (1654-1705)



**Figura 11: Jacques Bernoulli**

**Fonte: (EVES, 2011)**

De acordo com Boyer (1974) Jacques Bernoulli nasceu e morreu na Basileia e foi o primeiro da família Bernoulli a atingir a proeminência em matemática. Dedicou-se aos estudos dos infinitésimos, desenvolvendo novos métodos a partir dos estudos de obras de Wallis, Barrow e de artigos de Leibniz.

Hoje existem várias definições no campo da matemática que trazem o nome de Jacques Bernoulli, como podemos citar a distribuição de Bernoulli, o teorema de Bernoulli, equação de Bernoulli, os números de Bernoulli e a lemniscata de Bernoulli. Em uma resolução do problema isócrona publicado na revista *Acta Eruditorum* em 1690, Jacques Bernoulli coloca a palavra *integral* com um sentido ligado ao cálculo, enquanto Leibniz havia chamado de *calculus summatorius*. Por fim os dois concordaram em chamá-la de *calculus integralis* (EVES, 2011).

### 2.7.2 Johann Bernoulli (1667-1748)



**Figura 12: Johann Bernoulli**

**Fonte: (EVES, 2011)**

Conforme Simmons (1987) Johann Bernoulli nasceu em 1667, estudou medicina mas dedicou seu tempo a matemática, foi professor em Groningem na Holanda e após a morte do seu irmão Jacques foi sucessor na Universidade da Basileia.

Boyer (1974) relata que Johann Bernoulli por muito tempo manteve correspondência com o marques francês L'Hospital, um bom matemático amador. Johann Bernoulli fez um acordo com L'Hospital, que comprou suas descobertas mas as publicou mencionando Bernoulli e Leibniz. Portanto, as diversas descobertas de Johann Bernoulli estão registradas nas obras de L'Hospital, destacando-se o primeiro livro-texto de cálculo *Analyse des infiniment petits*. O autor ressalta ainda que Johann Bernoulli teve sua obra que tratava sobre cálculo integral publicada cinquenta anos após a sua descoberta com o título *opera amnia*.

## 2.8 AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789 - 1857)



**Figura 13: Augustin Louis Cauchy**

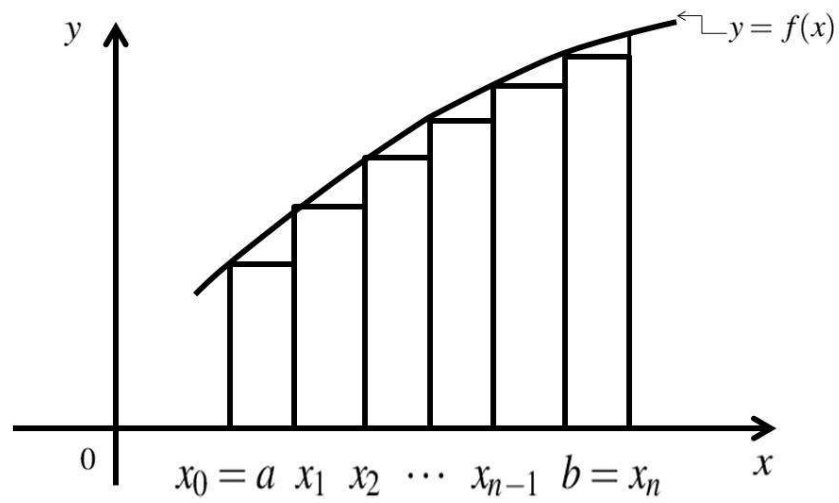
**Fonte: (EVES, 2011)**

Augustin Louis Cauchy foi um importante matemático do século XIX, que nasceu em Paris em 1789, foi professor na Escola Politécnica e dedicou-se à ciência pura. Escreveu sobre a matemática pura e a matemática aplicada, publicando vários livros e artigos sobre os quais foi muito criticado, pois a qualidade destes trabalhos era irregular. Cauchy contribuiu para matemática avançada, com o teorema integral do cálculo e a fórmula integral de Cauchy. O mesmo define a integral definida como sendo a soma de um conjunto infinitamente crescente de partes pequenas tendendo a zero (SIMMONS, 1987).

A integral definida para Cauchy é como um “limite” Para uma função  $y = f(x)$ , contínua no intervalo  $[a, b]$ , Cauchy formava soma de produtos.  $S_n = (x_1 - x_0) \cdot f(x) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot f(x_{n-1})$ , onde  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  Se as diferenças  $x_i - x_{i-1}$ , onde  $i = 1, 2, \dots, n$  decrescente tendendo para 0, o valor de  $S_n$  “acabará atingindo um certo limite”  $S$ , que tenderá unicamente da função  $f(x)$  e dos valores  $a$  e  $b$ . Esse limite chama-se “integral definida”.

(BOYER, 1992, p.87)





**Figura 14: Integral Definida de Cauchy**

**Fonte: Boyer (1992)**

Como a integral definida fica completamente determinada pela função  $f$  e os extremos  $a$  e  $b$ , é correto e suficiente, denotar a integral por  $\int_a^b f$ . Essa notação tem sido muito utilizada nas últimas décadas (BOYER, 1992).

## 2.9 GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826 - 1866)



**Figura 15: Georg Friedrich Bernhard Riemann**

Fonte: (EVES, 2011)

De acordo com Simmons (1987) Riemann nasceu em 1826 na Alemanha. Filho de um pastor, com dezenove anos foi estudar teologia na Universidade de Göttingen e posteriormente mudou-se para a matemática. Em 1851 obteve o seu grau de doutor e aos trinta e nove anos morreu de tuberculose na Itália. Por sua vida curta teve poucas publicações, mas os seus trabalhos tiveram grande importância para a Matemática na Análise, Geometria e Teoria dos Números.

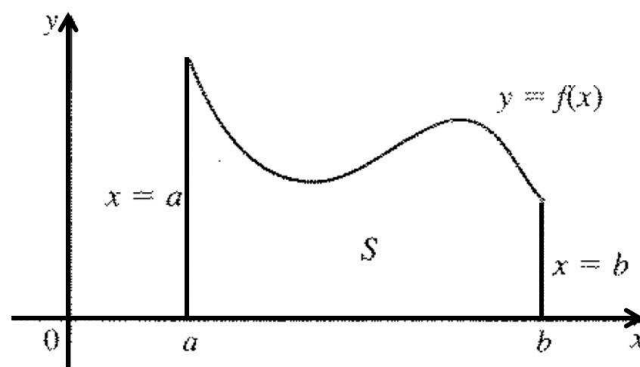
O autor destaca ainda que foi Riemann que inseriu os conceitos de *superfície de Riemann* e consideração topológica na análise. Riemann tornou claro a ideia de integrabilidade, conhecida hoje como *integral de Riemann*, propiciando no século XX que outros matemáticos chegassem em um conceito geral para integral.

Bernhard Riemann tornou-se PhD sob a orientação de Gauss na Universidade de Göttingen e lá permaneceu para lecionar. Nesta época, Gauss o descreveu como “uma mente criativa, ativa e verdadeiramente matemática, e de uma originalidade gloriosamente fértil” (STEWART, 2006)

### 3 CÁLCULO INTEGRAL

Quando pensamos em calcular a área de uma figura regular como a dos retângulos e triângulos, logo pensamos em multiplicarmos largura pelo comprimento no caso dos retângulos ou base por altura e dividir ao meio quando dos triângulos. Mas quando pensamos em uma figura que tenha lados curvos isto se torna complicado, então podemos dividir essa região em retângulos e somarmos as áreas dos mesmos, utilizando a soma de Riemann (THOMAS, 2009).

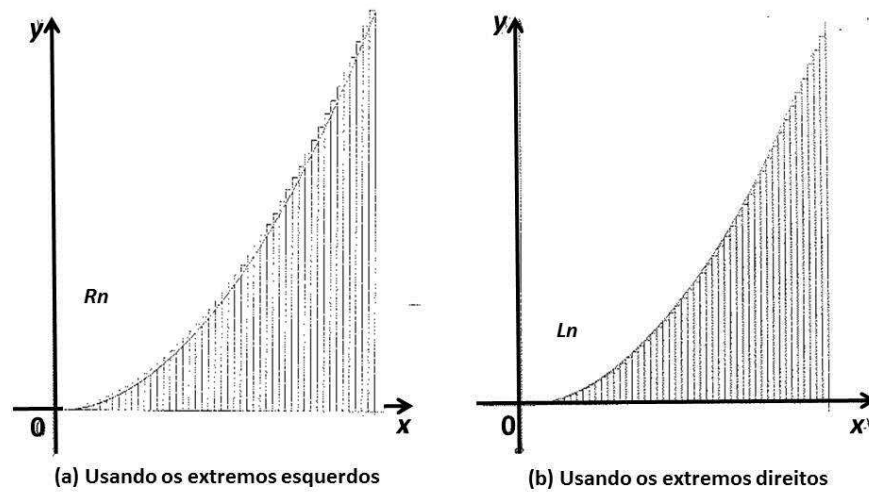
Stewart (2006) trata o tópico da integral definida relacionando o problema da área de uma região  $S$  que está sob a curva  $y = f(x)$  de  $a$  até  $b$ . Isso significa que a região  $S$ , ilustrada na figura 16, está limitada pelo gráfico de uma função contínua de  $f$  [onde  $f(x) \geq 0$ ] e pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ .



**Figura 16: Área da região  $S$**

**Fonte: (STEWART, 2006)**

Para encontrar a área da região  $S$  a dividimos em retângulos de áreas  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ , usando extremos a direita ou extremos a esquerda e fazemos a soma dessas áreas:  $R_n$  ou  $L_n$ , conforme a figura 17.



**Figura 17: Extremos esquerdos e direitos**

Fonte: Adaptado (STEWART, 2006)

$R_n$  é a soma das áreas dos retângulos aproximando pela direita e  $L_n$  é a soma das áreas dos retângulos aproximado pela esquerda, quando aplicando o limite tanto a  $R_n$  e  $L_n$ , com  $dsn$  tendendo ao infinito, resulta ao mesmo número:  $A = \text{área da região}$ , ou seja,  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ .

Aplicando a ideia para regiões gerais de  $S$ , subdivide  $S$  em  $n$  faixas  $S_1, S_2, \dots, S_n$  com larguras igual conforme a figura 18. A largura do intervalo  $[a, b]$  é  $b - a$ ; assim, a largura de cada uma das  $n$  faixas é:

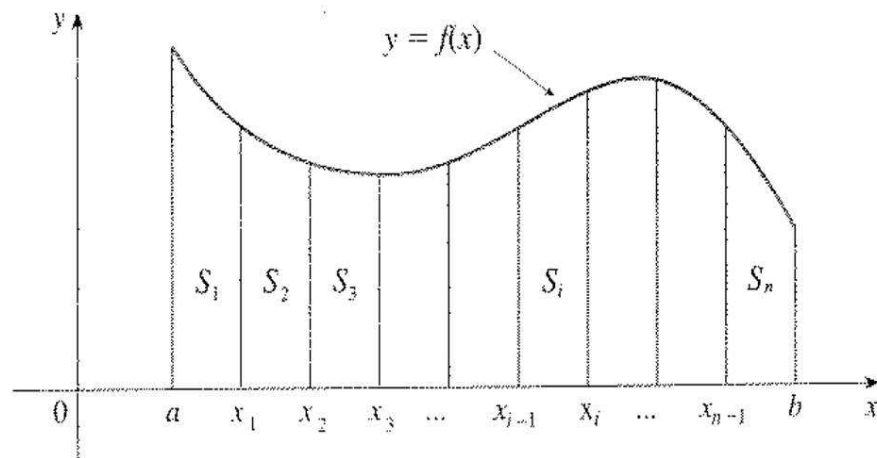
$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Essa faixas dividem o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

onde  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ . Os extremos direitos dos subintervalos são:

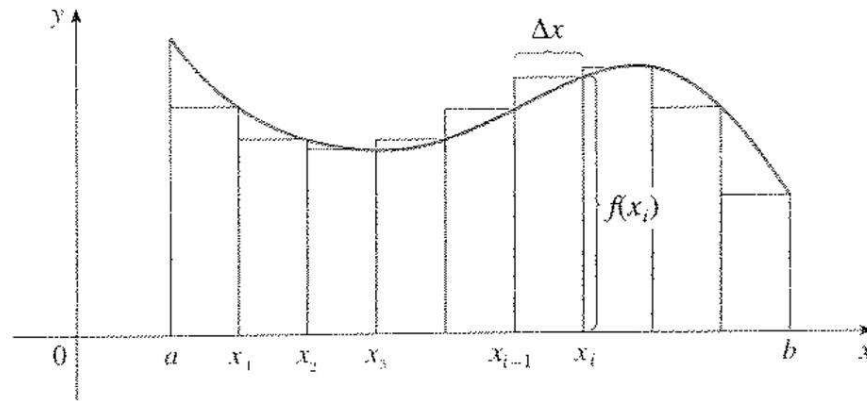
$$x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, x_3 = a + 3\Delta x, \dots$$



**Figura 18: Divisão em  $n$  faixas de intervalos**

**Fonte: (STEWART, 2006)**

Aproxima-se a  $i$ -ésima faixa  $S_i$  por um retângulo com largura  $\Delta x$  e a altura  $f(x_i)$ , que é o valor de  $f$  nos extremos direitos dos subintervalos conforme a figura 19.



**Figura 19: Aproximação por  $i$ -ésima faixa  $S_i$**

**Fonte: (STEWART, 2006)**

Então a área do  $i$ -ésimo retângulo é  $f(x_i)\Delta x$ . Intuitivamente a área de  $S$  é aproximada pela soma das áreas desses retângulos:

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x \quad (3.0.1)$$

Esta intuição fica generalizada na seguinte definição:

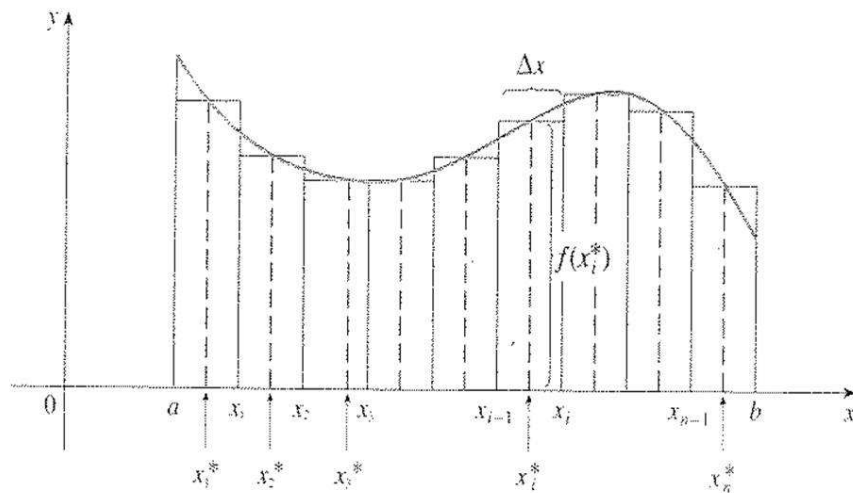
**Definição 3.1** A área  $A$  de uma região  $S$  que está sob o gráfico de uma função contínua  $f$  é dada pelo limite das somas das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x]$$

Agora em vez de usarmos os extremos a esquerdo ou direito, usaremos a altura do  $i$ -ésimo retângulo como o valor de  $f$  em qualquer número  $x_i$  no  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . São chamados de pontos amostrais  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ . Conforme a figura 20, nos retângulos aproximantes os extremos não são os pontos amostrais, então temos uma expressão geral para a área de  $S$ .

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \dots + f(x_n^*)\Delta x]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (3.0.2)$$



**Figura 20: Pontos amostrais no  $i$ -ésimo subintervalo**

Fonte: (STEWART, 2006)

**Exemplo 3.1** Seja  $A$  a área da região que está sob o gráfico de  $f(x) = e^{-x}$  entre  $x = 0$  e  $x = 2$ .

a) Usando os extremos diretos, ache uma expressão para  $A$  como um limite. Não compute o limite.

**Solução**

a) Uma vez que  $a = 0$  e  $b = 2$ , a largura de um subintervalo é dada por  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , temos então  $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$  como  $x_1 = a + \Delta x$ ,  $x_2 = a + 2\Delta x$ ,  $x_3 = a + 3\Delta x, \dots$  temos portanto  $x_1 = \frac{2}{n}, x_2 = \frac{4}{n}, x_3 = \frac{6}{n}, x_i = \frac{2i}{n}$  e  $x_n = \frac{2n}{n}$ . Logo a soma das áreas dos retângulos aproximante é

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

$$R_n = e^{-2/n}\Delta x + e^{-4/n}\Delta x + \dots + e^{-2}\Delta x$$

substituindo os valores de  $x_1, x_2$  e  $x_n$  temos:

$$R_n = e^{-\frac{2}{n}}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-\frac{4}{n}}\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + e^{-\frac{2n}{n}}\left(\frac{2}{n}\right)$$

De acordo com a definição 1, a área é dada por:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} (e^{-\frac{2}{n}} + e^{-\frac{4}{n}} + e^{-\frac{6}{n}} + \dots + e^{-\frac{2n}{n}})$$

Usando a notação somatória podemos escrever

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{-2i/n}$$

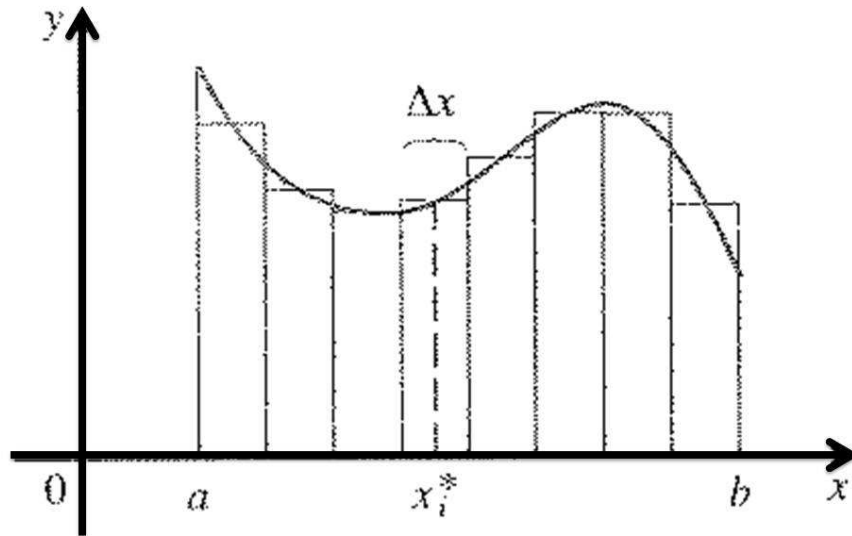
Generalizando o conceito de integral, Stewart (2006) nos dá a seguinte definição:

**Definição 3.2** *Seja  $f$  uma função contínua definida para  $a \leq x \leq b$ . Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de comprimentos iguais  $\Delta x = (b - a)/n$  e considerando  $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$  os extremos desses subintervalos, escolhe-se os pontos amostrais  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  nesses subintervalos de forma que  $x_i^*$  está no  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Então a integral definida de  $f$  de  $a$  para  $b$  é:*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (3.0.3)$$

A soma  $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$  da definição 3.2 é conhecida como soma de Riemann, se  $f$  for positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes conforme a figura 21





**Figura 21: Soma de Riemann**

**Fonte: Adaptado (STEWART, 2006)**

Se  $f(x) \geq 0$ , a soma de Riemann  $\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$  é a soma de áreas de retângulos.

Quando definimos a integral definida como  $\int_a^b f(x)dx$ , implicitamente assumimos que  $a < b$ . Mas a definição como o limite de soma de Riemann tem o mesmo sentido que  $a > b$ . Observe que se invertermos  $a$  e  $b$ , então  $\Delta x$  mudará  $(b - a)/n$  para  $(a - b)/n$ . Portanto

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad (3.0.4)$$

Se temos  $a = b$ , então  $\Delta x = 0$ , e

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad (3.0.5)$$

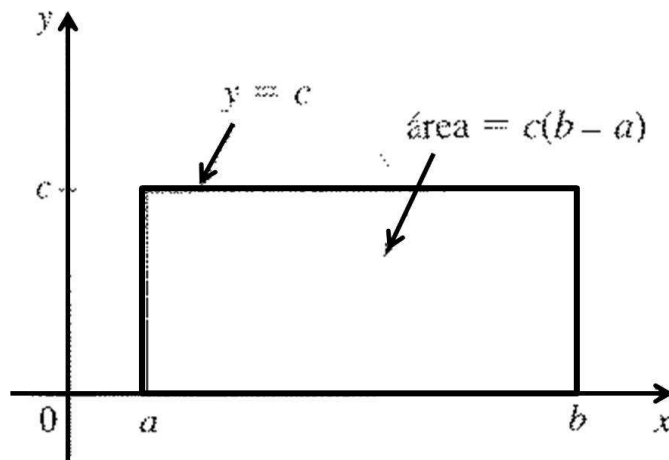
Destacam-se algumas propriedades básicas das integrais, supondo que  $f$  e  $g$  sejam funções contínuas.

### 3.1 PROPRIEDADES DA INTEGRAL

**Propriedade 3.1**  $\int_a^b c \, dx = c(b - a)$ , onde  $c$  é qualquer constante.

**Prova:**

Esta propriedade estabelece se que a integral de uma função constante  $f(x) = c$  é a constante vezes o comprimento do intervalo. Se  $c > 0$  e  $a < b$ , isto é esperado, pois  $c(b - a)$  é a área do retângulo da figura 22.



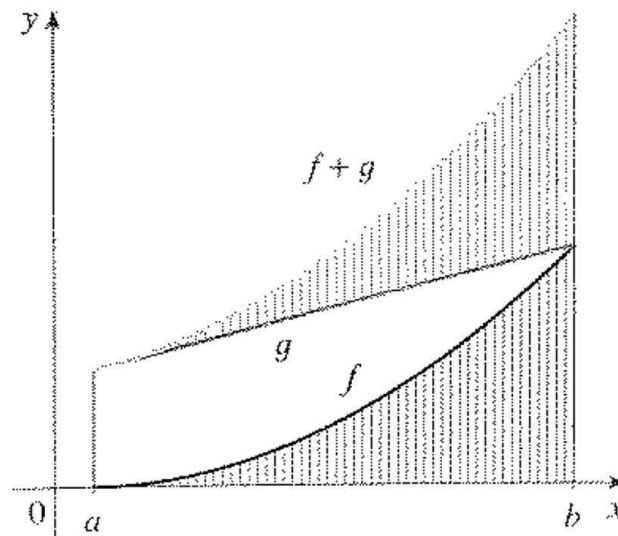
**Figura 22: Propriedade 3.1 da Integral**

**Fonte:** Adaptado (STEWART, 2006)

**Propriedade 3.2**  $\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$

**Prova:**

A propriedade 3.2 estabelece que a integral de uma soma é a soma das integrais. Para as funções positivas define que a área sob  $f + g$  é a área sob  $f$  mais a área sob  $g$ , conforme a figura 23 nos auxilia no entendimento.



**Figura 23: Propriedade 3.2 da Integral**

Fonte: Adaptado (STEWART, 2006)

A propriedade 3.2 segue do fato que o limite de uma soma é a soma dos limites:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) + g(x_i)]\Delta x$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x + \sum_{i=1}^n g(x_i)\Delta x \right]$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i)\Delta x$$

Portanto,

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (3.1.6)$$

**Propriedade 3.3**  $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$ , onde  $c$  é qualquer constante.

**Prova:**

A propriedade 3.3 pode ser provada intuitivamente, pois sabemos que multiplicar uma função por um número positivo  $c$  dilata ou comprime verticalmente seu gráfico por um fator de  $c$ . Portanto dilatar ou comprimir cada retângulo aproximante por um fator de  $c$  resulta na multiplicação da área por  $c$ .

**Propriedade 3.4**  $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$

**Prova:**

A propriedade 3.4, pode ser demonstrada usando as propriedades 3.2 e 3.3.

Sabendo que,

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b [f(x) + (-g(x))]dx$$

e usando a propriedade 3.2, temos:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b (-g(x))dx.$$

Fazendo  $c = -1$  na propriedade 3.3, resulta:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - g(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b (-g(x))dx = \\ \int_a^b f(x)dx + (-1) \int_a^b g(x)dx &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

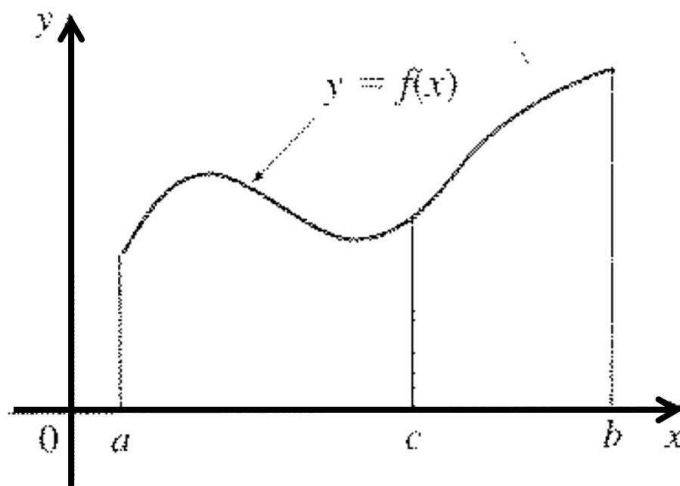
Portanto,

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \quad (3.1.7)$$

**Propriedade 3.5**  $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

**Prova:**

A propriedade 3.5 tem um certo grau de dificuldade para ser provada em geral, mas para o caso onde  $f(x) \geq 0$  e  $a < c < b$ , fazendo uma interpretação geométrica conforme a figura 24, a área sob  $y = f(x)$  de  $a$  até  $c$  mais a área de  $c$  até  $b$  é igual à área total de  $a$  até  $b$ .



**Figura 24: Propriedade 3.5 da Integral**

**Fonte: Adaptado (STEWART, 2006)**

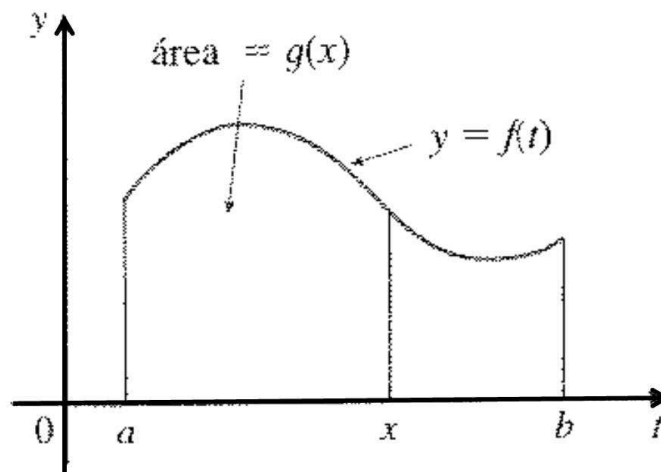
### 3.2 O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma relação entre a diferenciação e a integração. Isaac Barrow Newton(1630-1677) descobriu que a diferenciação e integração estão relacionadas e são processos inversos. Newton e Leibniz usaram a relação de inverso entre diferenciação e integração em vários problemas, desenvolvendo assim um método matemático sistemático que computava as áreas e integrais muito mais facilmente sem que fosse preciso calcular os limites de somas.

O Teorema Fundamental do Cálculo é composto por duas partes. Na primeira parte o Teorema Fundamental lida com funções definidas por uma equação do tipo:

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (3.2.8)$$

Onde  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e  $g$  depende somente de  $x$ , que aparece como a variável superior do limite na integral. Se  $x$  for um número fixo, então a integral  $\int_a^x f(t)dt$  é um número definido. Se variamos  $x$ , o número  $\int_a^x f(t)dt$  também varia e define uma função de  $x$  denotada por  $g(x)$ . Se  $f$  for uma função positiva então  $g(x)$  pode ser interpretada como uma área sob o gráfico de  $f$  de  $a$  até  $x$ , onde  $x$  pode variar de  $a$  até  $b$ , veja na figura 25.



**Figura 25:** Área =  $g(x)$

**Fonte:** Adaptado (STEWART, 2006)

Note que se  $g$  for definida como a integral de  $f$ , então  $g$  resulta em ser uma antiderivada de  $f$ , portanto suspeitamos que  $g' = f$ . Para verificar se é verdadeiro tomamos uma função qualquer contínua  $f$  com  $f(x) \geq 0$ . Então  $g(x) = \int_a^x f(t)dt$  pode ser interpretada como sendo a área sob o gráfico de  $f$  de  $a$  até  $x$ , conforme a figura 25.

A fim de computar  $g'(x)$  da definição de derivada, observamos que para  $h > 0$ ,  $g(x+h) - g(x)$  é obtida subtraindo-se as áreas, que estão sob o gráfico de  $f$  de  $x$  até  $x+h$ , conforme está na figura 26. Para  $h$  pequeno observamos na figura que a área é aproximadamente igual a área do retângulo com altura  $f(x)$  e largura  $h$ :

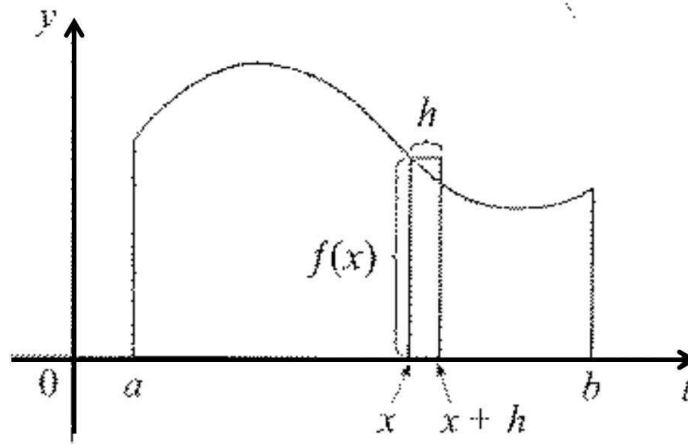
$$g(x+h) - g(x) \approx hf(x)$$

logo

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

e portanto, esperamos que

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$



**Figura 26:** Área sob  $f$

Fonte: Adaptado (STEWART, 2006)

**Teorema 3.1 Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1.** Se  $f$  for contínua de  $[a, b]$ , então a função  $g$  definida por,

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \quad a \leq x \leq b$$

Onde  $g(x) = \int_a^x f(x) dx$  é contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$  e  $g'(x) = f(x)$ .

As integrais computadas como um limite de somas de Riemann consistem num procedimento longo e difícil. A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo nos fornece um método simples para o cálculo de integrais.

**Teorema 3.2 Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2.** Se  $f$  for contínua de  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

onde  $F$  é qualquer antiderivada de  $f$ , isto é, uma função tal que  $F' = f$ .

Prova: Seja  $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Sabemos que pelo Teorema Fundamental do Cálculo parte 1  $g'(x) = f(x)$ ; isto é,  $g$  é uma antiderivada de  $f$ . Se  $F$  for qualquer antiderivada de  $f$  em  $[a, b]$ , então sabemos que, se  $F'(x) = g'(x)$  para todo  $x$  em um intervalo  $(a, b)$ , então  $f - g$  é constante em  $(a, b)$ ; isto é,  $F(x) = g(x) + c$ , onde  $c$  é uma constante e que  $F$  e  $g$  diferem apenas por uma constante:

$$F(x) = g(x) + C \quad (3.2.9)$$

para  $a < x < b$ . Mas  $F$  e  $g$  são contínuas em  $[a, b]$  e, portanto, tomando limites de ambos os lados da equação  $F(x) = g(x) + C$  quanto  $x \rightarrow a^+$  e  $x \rightarrow b^-$ , vemos que também é válido quando  $x = a$  e  $x = b$ .

Quando fazemos  $x = a$  em  $g(x)$ , teremos então:

$$g(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Portanto, usando na equação  $F(x) = g(x) + C$  com  $x = b$  e  $x = a$ , temos:

$$F(b) - F(a) = [g(b) + C] - [g(a) + C]$$

$$F(b) - F(a) = g(b) - g(a)$$

como  $g(a) = 0$ , temos então:

$$F(b) - F(a) = g(b) - 0$$

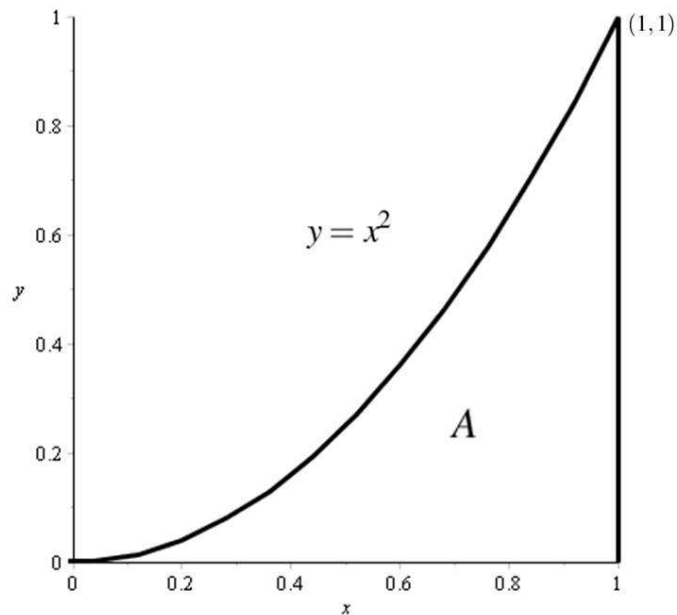
$$F(b) - F(a) = g(b) = \int_a^b f(t)dt$$

O Teorema Fundamental do Cálculo parte 2, estabelece uma antiderivada de  $F$  de  $f$ , portanto podemos calcular  $\int_a^b f(x)dx$  fazendo a subtração dos valores de  $F$  nos extremos do intervalo  $[a, b]$ .

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \quad (3.2.10)$$



**Exemplo 3.2** Ache a área sob a parábola  $y = x^2$  de 0 até 1.



**Figura 27:** Área sob a Curva  $x^2$

**Fonte:** Adaptado (STEWART, 2006)

*Solução:* Para encontrarmos o valor da área da curva usaremos uma antiderivada de  $f(x) = x^2$  dada por  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ . A área pedida é encontrada usando-se o Teorema Fundamental do Cálculo parte 2.

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Portanto,

$$A = \frac{1}{3}$$

Foram Newton e Leibniz que conseguiram identificar a relação inversa entre diferenciação e integração, apresentada nas duas partes do Teorema Fundamental. Justapondo as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo temos:

Se  $f$  contínua no intervalo  $[a, b]$  então.

1. Se  $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ , então  $g'(x) = f(x)$ .

2.  $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$ , quando  $F$  for qualquer antiderivada de  $f$ , isto é,  $F' = f$ .

Percebemos que a parte 1 pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (3.2.11)$$

A parte 1 estabelece que se  $f$  for integrada o resultado da diferenciação retorna a função original de  $f$ , ou seja,  $F'(x) = f(x)$ .

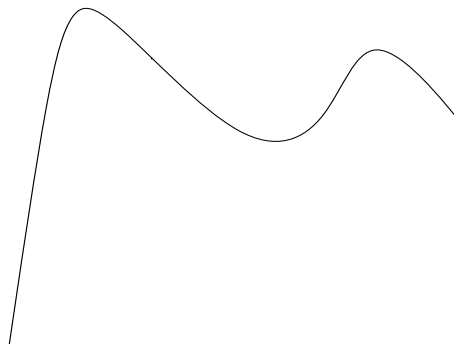
Já a parte 2 pode ser reescrita como:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) \quad (3.2.12)$$

Se tomarmos uma função  $F$ , diferenciando e em seguida integrando a derivada de  $F$ , o resultado é a função original  $F$  aplicada nos extremos de integração, ou seja, o resultado é  $F(b) - F(a)$ . As duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo juntas estabelecem que uma desfaz o que a outra fez, que é uma ideia até hoje inquestionável.

### 3.2.1 Comprimento de Arco

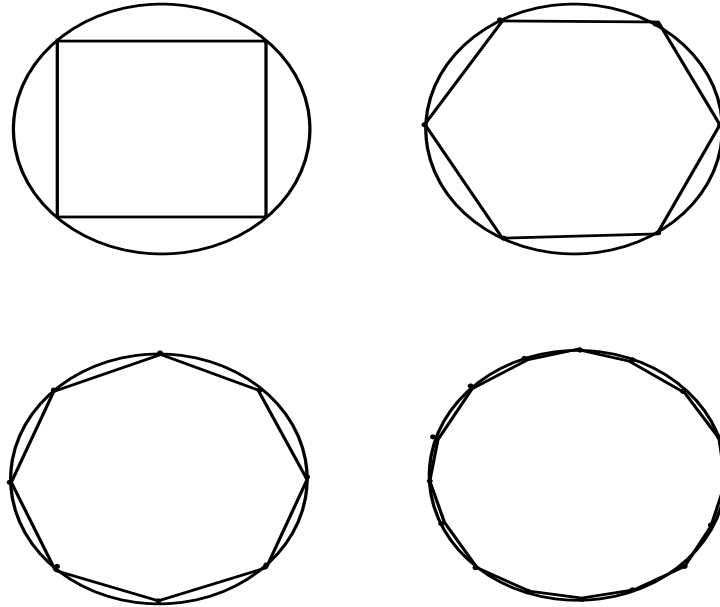
Em Stewart (2006) é considerada uma curva conforme a figura 28. Para calcular o comprimento deste arco podem-se pensar em colocar sobre a curva um barbante e depois medir o comprimento do mesmo. Este é um processo difícil de se obter com exatidão.



**Figura 28: Arco**

Se temos uma curva que é um polígono, podemos encontrar o seu comprimento fazendo a soma dos comprimentos dos segmentos de reta que configuram o polígono. Para definirmos o

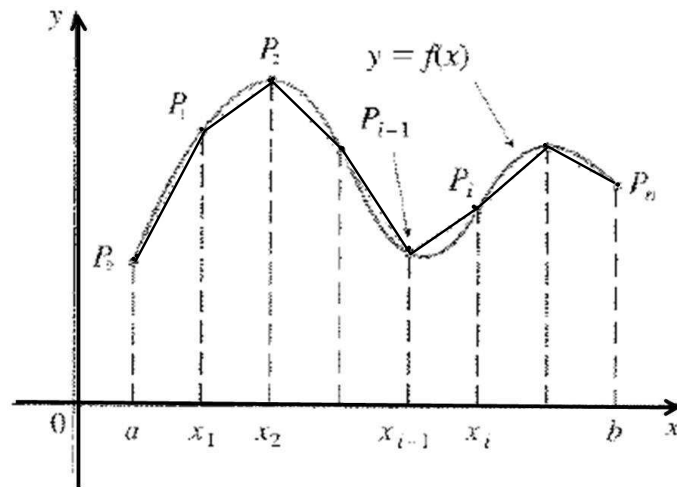
comprimento de uma curva geral, aproximamos na forma de um polígono e então tomamos o limite quando o número de segmentos dos polígono aumenta. Podemos perceber essa situação quando aumentamos o número de lados de um polígono o seu limite é a circunferência, de acordo com a figura 29.



**Figura 29: Aproximação curva por um polígono**

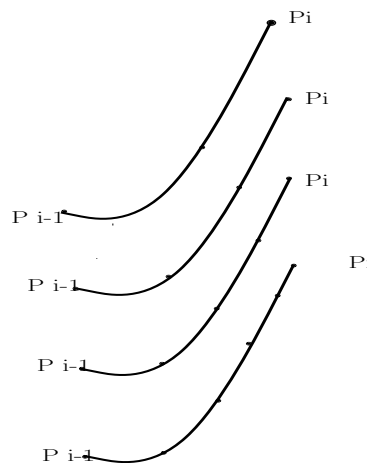
**Fonte: Adaptado (STEWART, 2006)**

Supondo que uma curva  $C$  seja definida pela equação  $y = f(x)$ , onde  $f$  seja contínua e  $a \leq x \leq b$ . Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos obteremos um polígono de aproximação, onde os extremos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  com larguras  $\Delta x$ . Se  $y_i = f(x_i)$ , então o ponto  $P_i(x_i, y_i)$  está em  $C$  e o polígono com vértice  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , conforme a figura 30, é uma aproximação para  $C$ . O comprimento  $L$  de  $C$  se aproxima do mesmo comprimento do polígono e essa aproximação melhora quando aumentamos  $n$ , conforme a figura 31. Portanto o comprimento  $L$  da curva  $C$  com equação  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , pode ser interpretado como o limite dos comprimentos desses polígonos inscritos.



**Figura 30: Curva  $C$**

Fonte: Adaptado (STEWART, 2006)



**Figura 31: Arco  $P_{i-1}$  até  $P_i$**

Fonte: Adaptado (STEWART, 2006)

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| \quad (3.2.13)$$

Percebemos que para encontrarmos o comprimento do arco, dividimos o arco em grande número de partes pequenas, então somamos o comprimento das partes pequenas e obtemos uma aproximação para  $L$  fazendo  $n$  se tornar cada vez maior.

A definição de comprimento de arco dada pela Equação 3.2.13 não é conveniente para o objetivo computacional, mas podemos gerar uma fórmula integral para  $L$  no caso onde  $f$  tem um derivada contínua.

Se tomarmos  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ , então

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Usando o Teorema do Valor Médio para  $f$  no intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , descobrimos que existe um número  $x_i^*$  entre  $x_{i-1}$  e  $x_i$  tal que

$$f(x) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

isto é,

$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\Delta x$$

Então temos

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\Delta x]^2}$$

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \sqrt{(\Delta x)^2}$$

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x \text{ porque } \Delta x > 0$$

Portanto temos,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x$$

Reconhecemos a expressão acima como igual a

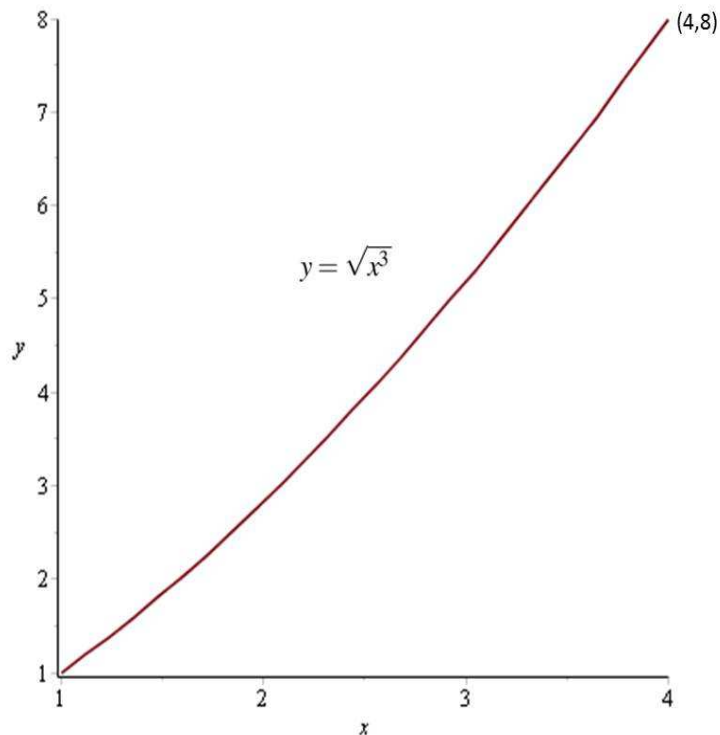
$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \tag{3.2.14}$$

pela definição de integral definida. Essa integral existe porque a função  $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  é contínua. Então provamos o seguinte teorema:

**Teorema 3.3** *Fórmula do Comprimento de Arco.* Se  $f'$  for contínua em  $[a, b]$ , então o comprimento da curva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , é

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

**Exemplo 3.3** Calcule o comprimento do arco da parábola semicúbica  $y = \sqrt{x^3}$  entre  $(1, 1)$  e  $(4, 8)$ , conforme a figura 32.



**Figura 32:** Comprimento do Arco  $y = \sqrt{x^3}$

Fonte: Adaptado (STEWART, 2006)

*Solução:*

Para a porção superior da curva, temos

$$y = \sqrt{x^3} \text{ ou } y = x^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

e assim a fórmula do comprimento de arco dá

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{9x}{4}\right)} dx$$

Se substituirmos  $u = 1 + \frac{9x}{4}$ , então  $du = \frac{9}{4} dx$

$$L = \frac{4}{9} \int_1^4 \sqrt{u} du = \frac{4}{9} \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} du$$

$$L = \frac{4}{9 \cdot \frac{1}{2} + 1} \Big|_1^4 = \frac{4}{9 \cdot \frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{8}{27} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4$$

como  $u = 1 + \frac{9x}{4}$  temos:

$$L = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4$$

$$L = \frac{8}{27} \left[ \left(1 + 9 \cdot \frac{4}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + 9 \cdot \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$L = \frac{8}{27} \left[ (10)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$L = \frac{8}{27} \left[ (\sqrt{10^3}) - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} \right]$$

$$L = \frac{8}{27} \left[ (\sqrt{10^2 \cdot 10^1}) - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{13}{4}\right)^1} \right]$$

$$L = \frac{8}{27} \left[ (\sqrt{10^2 \cdot 10^1}) - \sqrt{\left(\frac{13^2 \cdot 13}{64}\right)} \right]$$

$$L = \frac{8}{27} \left[ 10 \cdot \sqrt{10} - \frac{13}{8} \cdot \sqrt{13} \right]$$

$$L = \frac{1}{27} \left[ 8 \cdot 10 \sqrt{10} - 8 \cdot \frac{13}{8} \cdot \sqrt{13} \right]$$

$$L = \frac{1}{27} \left[ 80 \sqrt{10} - 13 \cdot \sqrt{13} \right]$$

$L \cong 7,633705$  é o comprimento do arco.

### 3.2.2 Área de uma superfície em revolução

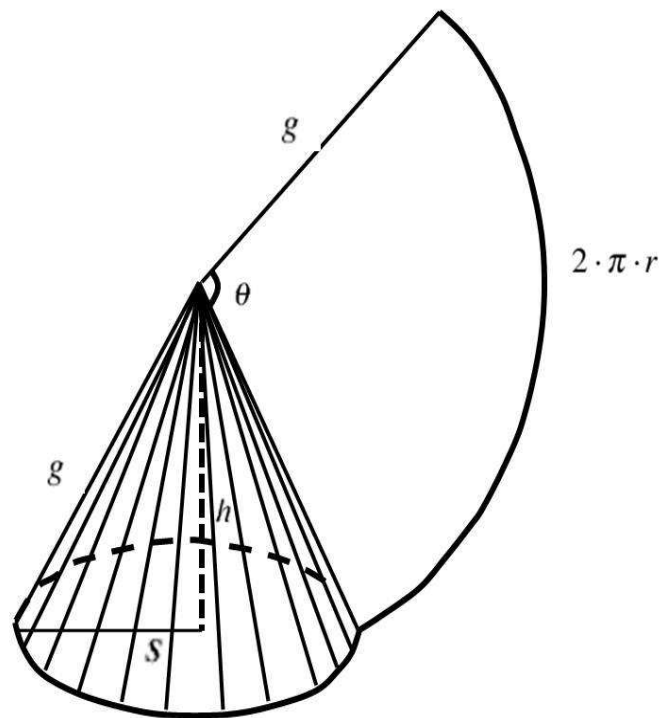
Em Guidorizzi (1995) aborda-se a área da superfície em revolução no teorema a seguir:

**Teorema 3.4** A área da superfície obtida pela rotação do gráfico da  $f$ , em torno do eixo  $x$ , é dada por:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Prova do teorema 3.4:

Considere um cone, de geratriz  $g$  e raio  $r$  como indicado na figura 33:



**Figura 33: Cone**

Fonte: Adaptado (IEZZI, 1977)

A área lateral do cone pode então ser calculada como seguir:

Comprimento	Área
$2 \cdot \pi \cdot g$	$\pi \cdot g^2$
$2 \cdot \pi \cdot r$	$A_l$

Portanto

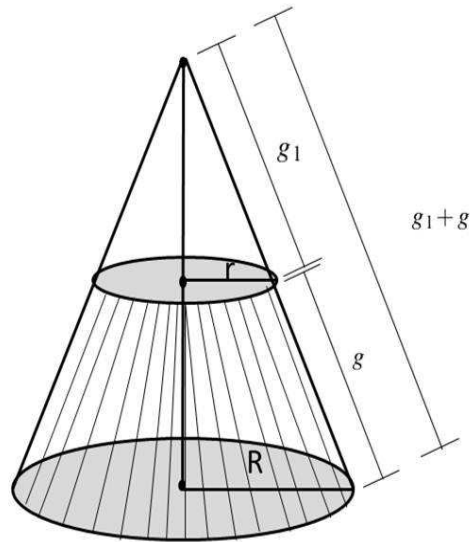
$$A_l \cdot 2 \cdot \pi \cdot g = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \pi \cdot g^2$$

$$A_l = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \pi g^2}{2 \cdot \pi \cdot g}$$



$$A_l = \pi \cdot r \cdot g \quad (3.2.15)$$

Consideremos então a área lateral do tronco de um cone representado na figura 34:



**Figura 34: Tronco**

$$A_{TRONCO} = A_{CONE1} - A_{CONE2}$$

$$A_{TRONCO} = \pi \cdot R \cdot (g_1 + g) - \pi \cdot r \cdot g_1$$

$$A_{TRONCO} = \pi \cdot R \cdot g_1 + \pi \cdot R \cdot g - \pi \cdot r \cdot g_1$$

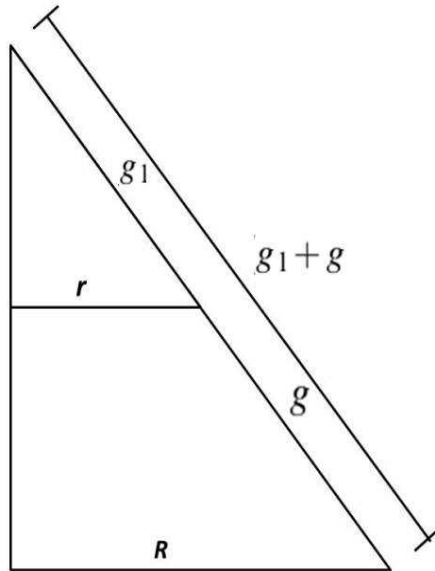
$$A_{TRONCO} = \pi \cdot R \cdot g_1 - \pi \cdot r \cdot g_1 + \pi \cdot R \cdot g$$

$$A_{TRONCO} = \pi \cdot g_1(R - r) + \pi \cdot R \cdot g \quad (3.2.16)$$

Por outro lado, observe que

$$\frac{g_1}{r} = \frac{g_1 + g}{R} \quad (3.2.17)$$

devido a semelhança dos triângulos:



**Figura 35: Triângulos Semelhantes**

Logo da equação 3.2.17 obtemos:

$$g_1 \cdot R = r \cdot (g_1 + g)$$

$$g_1 \cdot R - r \cdot g_1 = r \cdot g$$

$$g_1 \cdot (R - r) = r \cdot g \quad (3.2.18)$$

Substituindo a equação 3.2.18 em 3.2.16, obtemos:

$$A_{TRONCO} = \pi \cdot g_1 (R - r) + \pi \cdot R \cdot g$$

$$g_1 \cdot (R - r) = r \cdot g$$

$$A_{TRONCO} = \pi \cdot R \cdot g + \pi \cdot r \cdot g$$

$$A_{TRONCO} = \pi \cdot g \cdot (R + r)$$

$$A_{TRONCO} = 2 \cdot \pi \cdot g \cdot \left(\frac{R+r}{2}\right)$$

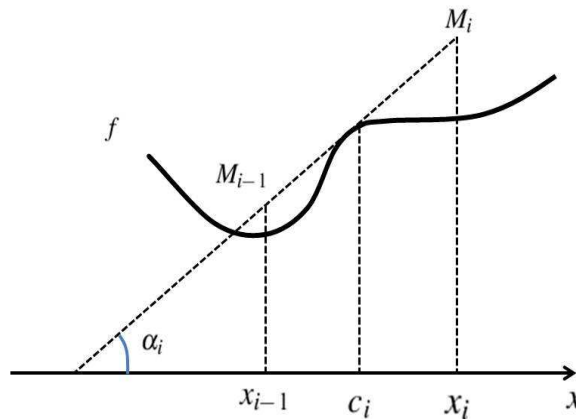
$$s = \frac{R+r}{2}, \text{ então:}$$

Área lateral do tronco de cone é igual:

$$A_{\text{TRONCO}} = 2 \cdot \pi \cdot g \cdot s \quad (3.2.19)$$

Em Guidorizzi (1995) o conceito de área para superfície dada pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do gráfico de uma função  $f$ , com derivada contínua e  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ , é ampliado.

Seja, então,  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$  e  $c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$  é o ponto médio do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ .



**Figura 36: Ponto Médio**

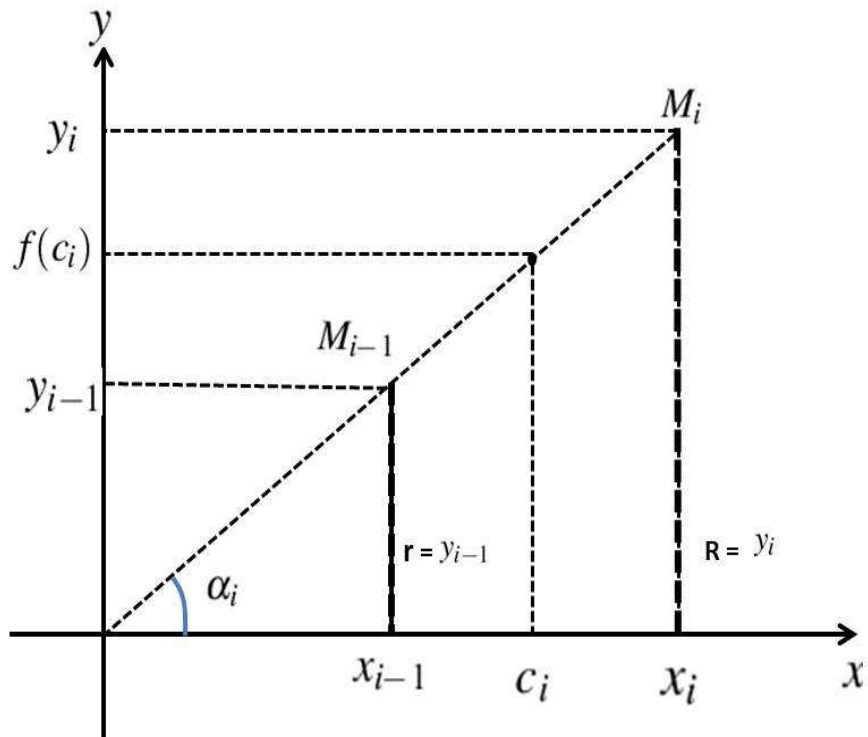
Na figura 36  $f'(c_i) = \operatorname{tg} \alpha_i$ ; o segmento  $\overline{M_{i-1}M_i}$  é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(c_i, f(c_i))$ .

Da definição do cosseno de um ângulo  $\alpha$ , temos:

$$|\cos \alpha_i| = \frac{\Delta x_i}{\overline{M_{i-1}M_i}}$$

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \frac{\Delta x_i}{|\cos \alpha_i|} = \frac{1}{|\cos \alpha_i|} \cdot \Delta x_i = |\sec \alpha_i| \cdot \Delta x_i = \sqrt{\sec^2 \alpha_i} \cdot \Delta x_i = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i} \cdot \Delta x_i$$

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \cdot \Delta x_i \quad (3.2.20)$$



**Figura 37: Ponto Médio  $f(c_i)$**

Logo, a área da superfície gerada por

$$A_{TRONCO} = 2 \cdot \pi \cdot g \cdot s$$

com:

$$s = \frac{y_i + y_{i-1}}{2} = f(c_i), \quad g = \overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{1 + [f'(c_1)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$A_{TRONCO} = 2 \cdot \pi \cdot (\overline{M_{i-1}M_i}) \cdot \left(\frac{y_i + y_{i-1}}{2}\right)$$

$$A_{TRONCO} = 2 \cdot \pi \cdot (\sqrt{1 + [f'(c_1)]^2} \cdot \Delta x_i) \cdot f(c_i)$$

e se temos  $\Delta x_i$  suficientemente pequeno esta área será uma boa aproximação para a “área” da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do trecho do gráfico entre as retas  $x = x_{i-1}$  e  $x_i$ .

Como a função  $2 \cdot \pi \cdot f(c_i) \cdot \sqrt{1 + [f'(c_1)]^2} \cdot \Delta x_i$  é contínua em  $[a, b]$ , teremos

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2 \cdot \pi \cdot f(c_i) \cdot \sqrt{1 + [f'(c_1)]^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b 2 \cdot \pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

Portanto definimos a área da superfície obtida pela rotação do gráfico de  $f$ , em torno do eixo  $x$  como:

$$A = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx \quad (3.2.21)$$

### 3.3 APLICAÇÃO DA INTEGRAL

#### 3.3.1 Aplicação em Projeto do curso de Engenharia Civil

Como apresentamos na introdução, há uma grande necessidade de se trabalhar aplicações do conceito da integral, principalmente como fator motivacional e enriquecimento na aprendizagem significativa.

Esta seção tem como objetivo apresentar um relato de uma experiência com a modelagem matemática no ensino de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral 2, ofertadas no primeiro e segundo semestres respectivamente, na Engenharia Civil. Esta proposta foi executada através dos projetos “Geometria Analítica e Sociedade” e “Aplicações do Cálculo em obras da Engenharia Civil”, integralizando as Atividades Práticas Supervisionadas (APS) que complementam a carga horária das disciplinas ofertadas na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Campo Mourão.

Na disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear, os alunos foram desafiados a elaborar um projeto de construção com impacto social (uma obra voltada para o bem estar da sociedade) e então modelar algebricamente, geometricamente e computacionalmente as cônicas e quádricas presentes nesta obra da construção civil sugerida, fazendo uso dos conceitos teóricos da Geometria Analítica e do software Maple. Para (Biembengut, 2005), uma das vantagens do tema ser escolhido pelos alunos é o fato de eles se sentirem participantes do processo.

Já os alunos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral 2, atuaram como tutores dos alunos do primeiro período envolvidos no projeto “ Geometria Analítica e Sociedade” . Houve 03(três) encontros entre as duas turmas para definição da obra que idealizaria o projeto, quais medidas e escalas deveriam ser utilizadas, qual ponto do sistema tridimensional seria adotado como referencial e quais equações da Geometria Analítica gerariam as quádricas envolvidas. Após a idealização deste projeto, os alunos do 2º período utilizaram os conceitos teóricos do Cálculo Diferencial e Integral para analisar a área e volume das superfícies envolvidas no projeto, fazendo uso da integração e diferenciação e deste modo poder estimar os possíveis gastos de material para realização da obra proposta.

Dentre os projetos vamos destacar “O Projeto de Academia na UTFPR - Campus Campo Mourão”, que tem como objetivo a construção de uma academia de ginástica na UTFPR - Campus Campo Mourão. Isto proporcionaria aos alunos, comunidade a oportunidade de realizar atividades físicas na própria universidade, o que traria benefícios não só aos alunos, como também aos professores e servidores. Além de economia em tempo e transporte, considerou-se o benefício da atividade física para a sociedade envolvida. Para tanto, foi proposta uma academia de dois andares juntamente com uma piscina, em formato hiperbólico, com várias raias para hidroginástica, natação e treinamento para competições onde os discentes representariam a universidade em eventos esportivos.

Nesta seção destacamos somente o cálculo da área da estrutura hiperbólica da piscina proposta, mostrada na figura 38.



**Figura 38: Semi Hiperbolóide**

**Fonte:** <http://www.flickr.com/photos/takeshita/2082388398/>

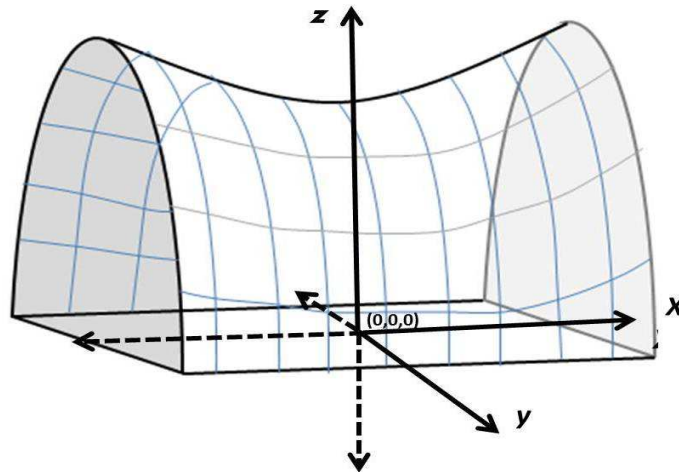


Figura 39: Semi Hiperbolóide na origem  $(0,0,0)$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.3.22)$$

A equação do semi hiperbolóide é dada:

$$-\frac{x^2}{31^2} + \frac{y^2}{9^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1 \text{ com } y = 0 \text{ temos}$$

$$-\frac{x^2}{31^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$$

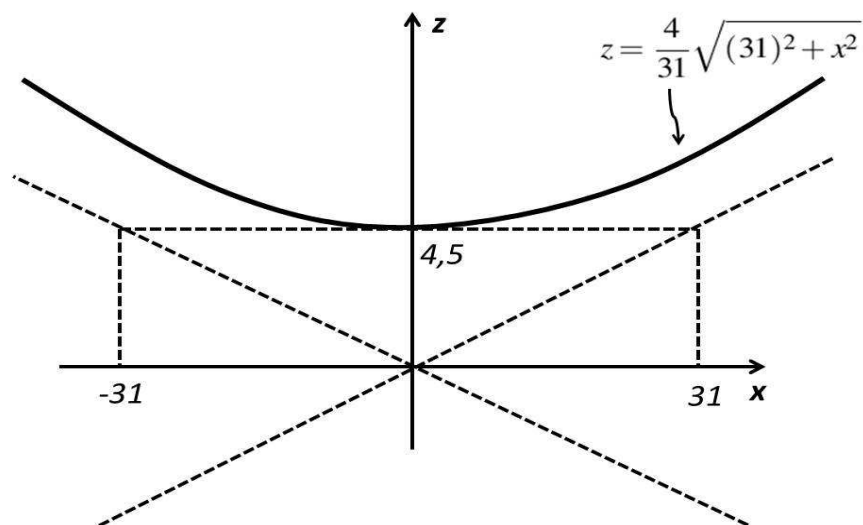


Figura 40: Gráfico do Semi Hiperbolóide

$$\frac{z^2}{4^2} = 1 + \frac{x^2}{31^2}$$

$$z^2 = 4^2 \left[ \frac{(31)^2 + x^2}{31^2} \right]$$

$$z = \sqrt{4^2 \left[ \frac{(31)^2 + x^2}{31^2} \right]}$$

$$z = \frac{4}{31} \sqrt{(31)^2 + x^2}$$

Conforme o teorema 3.4 a área da superfície do hiperbolóide é dada pela equação

$2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$ , como na situação acima trata-se de um semi hiperbolóide ou seja precisamos calcular apenas a metade do valor da área da superfície, portanto teremos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx = \pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

Na figura 40,  $f(x) = z = \frac{4}{31} \sqrt{(31)^2 + x^2}$  em torno do eixo  $x$ , portanto a área é dada por:

$$A = \pi \cdot \int_{-31}^{31} \frac{4}{31} \sqrt{(31)^2 + x^2} \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

$$f'(x) = \frac{4}{31} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{(31)^2 + x^2}} = \frac{4}{31} \cdot \frac{x}{\sqrt{(31)^2 + x^2}}$$

$$A = \pi \cdot \int_{-31}^{31} \frac{4}{31} \sqrt{(31)^2 + x^2} \cdot \sqrt{1 + \left[ \frac{4}{31} \cdot \frac{x}{\sqrt{(31)^2 + x^2}} \right]^2} \cdot dx$$

$$A = \pi \cdot \int_{-31}^{31} \frac{4}{31} \sqrt{(31)^2 + x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{4^2}{31^2} \cdot \frac{x^2}{(31)^2 + x^2}} \cdot dx$$

$$A = \pi \cdot \int_{-31}^{31} \frac{4}{31} \sqrt{(31)^2 + x^2} \cdot \sqrt{\frac{31^2(31^2 + x^2) + 4^2x^2}{31^2(31^2 + x^2)}} \cdot dx$$

$$A = \pi \cdot \int_{-31}^{31} \frac{4}{31} \sqrt{(31)^2 + x^2} \cdot \frac{1}{31} \frac{\sqrt{31^2(31^2 + x^2) + 4^2x^2}}{\sqrt{(31^2 + x^2)}} \cdot dx$$

$$A = \pi \cdot \int_{-31}^{31} \frac{4}{31} \sqrt{(31)^2 + x^2} \cdot \frac{1}{31} \frac{\sqrt{31^4 + 31^2 \cdot x^2 + 4^2x^2}}{\sqrt{(31^2 + x^2)}} \cdot dx$$

$$A = \pi \cdot \int_{-31}^{31} \frac{4}{31} \cdot \frac{1}{31} \sqrt{31^4 + 31^2 \cdot x^2 + 4^2x^2} \cdot dx$$

$$A = \pi \cdot \int_{-31}^{31} \frac{4}{31^2} \cdot \sqrt{31^4 + (31^2 + 4^2) \cdot x^2} \cdot dx$$

$$K = 31^2 + 4^2$$



$$A = \pi \cdot \int_{-31}^{31} \frac{4}{31^2} \cdot \sqrt{(31^2)^2 + K \cdot x^2} \cdot dx$$

$$A = \frac{4}{31^2} \cdot \pi \cdot \int_{-31}^{31} \sqrt{\frac{(31^2)^2 + K \cdot x^2}{K}} \cdot K \cdot dx$$

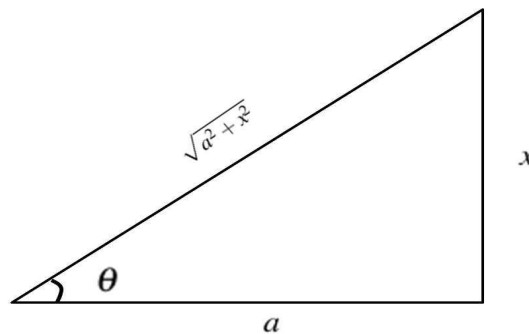
$$A = \frac{4}{31^2} \cdot \pi \cdot \int_{-31}^{31} \sqrt{\frac{(31^4)}{K} + x^2} \cdot \sqrt{K} \cdot dx$$

$$A = \frac{4}{31^2} \cdot \sqrt{K} \cdot \pi \cdot \int_{-31}^{31} \sqrt{\left(\frac{31^2}{\sqrt{K}}\right)^2 + x^2} \cdot dx$$

$$a = \frac{31^2}{\sqrt{31^2 + 4^2}} = \frac{31^2}{\sqrt{K}}$$

$$A = \frac{4}{31^2} \cdot \sqrt{K} \cdot \pi \cdot \int_{-31}^{31} \sqrt{a^2 + x^2} \cdot dx \quad (3.3.23)$$

Utilizando a substituição trigonométrica



**Figura 41: Triângulo Trigonométrico**

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{a}$$

$$x = a \cdot \operatorname{tg} \theta$$

$$dx = a \cdot \sec^2 \theta \, d\theta, \quad \text{onde } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$= \int \sqrt{a^2 + x^2} \cdot dx \quad (3.3.24)$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} \cdot dx = \int \sqrt{a^2 + (a \cdot \operatorname{tg} \theta)^2} \cdot a \cdot \sec^2 \theta \, d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \sqrt{a^2 + a^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \theta} \cdot a \cdot \sec^2 \theta \, d\theta = \\
&= \int \sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} \cdot a \cdot \sec^2 \theta \, d\theta = \\
&= a \cdot \int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \cdot a \cdot \sec^2 \theta \, d\theta = \\
&\text{como, } 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta \\
&= a^2 \cdot \int \sqrt{(\sec^2 \theta)} \cdot \sec^2 \theta \, d\theta = \\
&= a^2 \cdot \int \sec \theta \cdot \sec^2 \theta \, d\theta = \\
&\qquad\qquad\qquad a^2 \cdot \int \sec^3 \theta \cdot d\theta \qquad\qquad\qquad (3.3.25)
\end{aligned}$$

Para resolução da equação 3.3.25 usaremos integração por partes

$$\begin{aligned}
\int u \cdot dv &= u \cdot v - \int v \cdot du \\
\int \sec^3 \theta \cdot d\theta &= \int \sec \theta \cdot \sec^2 \theta \cdot d\theta \\
u &= \sec \theta, \quad du = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta \quad dv = \sec^2 \theta \cdot d\theta, \quad v = \operatorname{tg} \theta \\
\int \sec^3 \theta \cdot d\theta &= \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta - \int \operatorname{tg} \theta \cdot (\sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta) \cdot d\theta \\
\int \sec^3 \theta \cdot d\theta &= \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta - \int \sec \theta \cdot \operatorname{tg}^2 \theta \cdot d\theta \\
1 + \operatorname{tg}^2 \theta &= \sec^2 \theta, \quad \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 \\
\int \sec^3 \theta \cdot d\theta &= \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta - \int \sec \theta \cdot (\sec^2 \theta - 1) \cdot d\theta \\
\int \sec^3 \theta \cdot d\theta &= \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta - \left[ \int (\sec^3 \theta - \sec \theta) \cdot d\theta \right] \\
\int \sec^3 \theta \cdot d\theta &= \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta - \int \sec^3 \theta \cdot d\theta + \int \sec \theta \cdot d\theta \\
\int \sec^3 \theta \cdot d\theta &= \frac{1}{2} \cdot [\sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|] \qquad\qquad\qquad (3.3.26)
\end{aligned}$$

Substituindo 3.3.26 em 3.3.24

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} \cdot dx = a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [\sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|]$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} \cdot dx = a^2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} \cdot \frac{x}{a} + \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| \right] \right\}$$

Portanto, a área é dada por:

$$A = \frac{4}{31^2} \cdot \sqrt{K} \cdot \pi \cdot \int_{-31}^{31} \sqrt{a^2 + x^2} \cdot dx$$

$$A = \frac{4}{31^2} \cdot \sqrt{K} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} \cdot \frac{x}{a} + \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| \right] \right\} \Bigg|_{x=-31}^{x=31}$$

$$A = \frac{4}{31^2} \sqrt{K} \cdot \pi \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} \cdot x + \frac{a^2}{2} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a} \right| \right] \Bigg|_{x=-31}^{x=31}$$

$$A = \frac{4}{31^2} \cdot \sqrt{K} \cdot \pi \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + (31)^2} \cdot 31 + \frac{a^2}{2} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + (31)^2} + 31}{a} \right| \right]$$

$$- \frac{4}{31^2} \cdot \sqrt{K} \cdot \pi \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + (-31)^2} \cdot (-31) + \frac{a^2}{2} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + (-31)^2} + (-31)}{a} \right| \right]$$

Fazendo  $a = \frac{31^2}{\sqrt{31^2 + 4^2}}$ ,  $K = 31^2 + 4^2$ , obtemos:

$$A = 447.9943255 + 447.9943259 = 895.9886514 u \cdot a .$$

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho buscamos evidenciar a utilização da História da Matemática e da Modelagem Matemática como ferramentas motivacionais no ensino de Matemática, mais especificamente no ensino do Cálculo Integral.

Ao realizar o levantamento histórico da integral definida pudemos observar a humanização deste conceito, percebendo que os conceitos teóricos não surgiram como um passe de mágica, mas sim com a contribuição de vários estudiosos ao longo dos séculos. Mais ainda, percebe-se que estes estudiosos foram desafiados à criação do Cálculo Integral para resolução de problemas práticos.

Quanto a Modelagem Matemática, ficou evidente a motivação e o envolvimento dos alunos no desenvolvimento do projeto sugerido. Outro fator importante é o amadurecimento matemático que se percebe nos alunos quanto à representação tridimensional, a manipulação das quádricas e a utilização das técnicas do Cálculo na realização dos cálculos de área e volume.

Enfim, o que ficou claro com esta experiência foi a grande necessidade que o aluno tem de relacionar a disciplina ao mundo real. E que a partir do momento em que o professor se arrisca e busca estabelecer esta relação, o ensino de assuntos tão complexos, como álgebra, geometria e cálculo torna-se muito mais significativo e a aprendizagem dos alunos muito mais prazerosa.

**REFERÊNCIAS**

- ASSIS, A. K. T. **Arquimedes, O centro de gravidade e a lei da alavanca**. São Paulo: Apeiron Montreal, 2008. 248 p.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488 p.
- BOYER, C. B. **Cálculo (Tópico de História da Matemática para uso em sala de aula)**. São Paulo: [s.n.], 1992. 94 p.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Campinas - São Paulo: Unicamp, 2011. 848 p.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1995. 636 p.
- IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática 10 Elementar**. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1977. 440 p.
- SILVA, I. N. da; SILVA, B. M. da. **DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO: CONTRIBUIÇÕES DE ZENON, EUDOXO E ARQUIMEDES**. Monteiro, PB: [s.n.], Novembro 2010. VI EPBEM. Disponível em: <[www.sbempb.com.br/anais/arquivos/trabalhos/CC-19398658.pdf](http://www.sbempb.com.br/anais/arquivos/trabalhos/CC-19398658.pdf)>.
- SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. 1ª. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. 829 p.
- STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- STRATHERN, P. **Arquimedes e a Alavanca em 90 minutos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 1998. 96 p.
- THOMAS, G. B. **Cálculo**. 11. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009. 786 p.