

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JONNES VALENTIM DE OLIVEIRA

**APLICAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR NA MANIPULAÇÃO DE
IMAGENS**

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2013

JONNES VALENTIM DE OLIVEIRA

**APLICAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR NA MANIPULAÇÃO DE
IMAGENS**

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Priscila Amara Patricio de Melo

CAMPO MOURÃO

2013

TERMO DE APROVAÇÃO

JONNES VALENTIM DE OLIVEIRA

APLICAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR NA MANIPULAÇÃO DE IMAGENS

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Prof. Msc. Priscila Amara
Patricio de Melo

Prof. Msc. Raquel Polizeli

Prof. Msc. Tatiane Cazarin da Silva

Campo Mourão, 2013

Dedico esse trabalho a minha Família, e aos meus amigos de Classe,
aos professores, em especial a minha Orientadora Priscila pela
paciência e dedicação.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS, por ter me dado inteligência, saúde e determinação nos momentos difíceis destes anos;

Aos meus pais Cicero e Cleuza, por terem me dado apoio enquanto cursava esta Pós Graduação;

À minha irmã Marli, por toda ajuda;

Ao meu irmão Marcelo, pelo companherismo;

A minha orientadora Priscila, pela força, paciência e integridade em todas as etapas deste trabalho;

A todos os professores, que compartilharam suas experiências conosco;

A todos os colegas de turma, pelo exemplo de persistência;

A todos que de uma maneira ou outra contribuíram para minha formação.

Nunca imites ninguém. Que a tua produção seja como um novo
fenômeno da natureza.
Leonardo da Vinci

RESUMO

OLIVEIRA, Jonnes Valentim. APLICAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR NA MANIPULAÇÃO DE IMAGENS. 32 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

Esta monografia expõe a necessidade da utilização da Matemática especialmente Álgebra Linear para avanços tecnológicos. Através de tal exposição, este trabalho mostra que com a popularização das fotos digitais, muitas pessoas hoje fazem manipulação de imagens, e estas manipulações são feitas através de técnicas que consistem em alterar a imagem a fim de obter uma nova, usando para isso deslocamento de vértices, Geometria de operadores lineares de R^2 , Independência Linear e Bases em R^2 . Com a realização de tal trabalho, quer se aplicar os conceitos de Álgebra Linear em problemas de Deformações e Morfismos.

Palavras-chave: Transformações Lineares, Deformações, Morfismo, Manipulação de Imagens.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Jonnes Valentim. Application of Eigenvalues and Eigenvectors in the Recognition of Quadrics. 32 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

This monograph presents the necessity of the use of mathematics to technological advances, specifically in the area of Linear Algebra. Through this exhibition, this work shows that with the popularization of digital photos, many people today do image manipulation, and these manipulations are done through techniques that is to change the image in order to get a new one, using it to offset vertices, Geometry of linear operators of R^2 , linear Independence and Basis in R^2 . With the completion of such work, either - apply the concepts of linear algebra problems on Morphisms and Deformations.

Keywords: linear transformation, deformation and morphism, image manipulation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	PRELIMINARES	8
2.1	ESPAÇOS VETORIAIS	8
2.2	TRANSFORMAÇÕES LINEARES	10
2.3	REPRESENTAÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES POR MATRIZES	11
2.4	TRANSFORMAÇÕES: HOMOTETIA, TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO	13
2.4.1	HOMOTETIA	14
2.4.2	TRANSLAÇÃO	14
2.4.3	ROTAÇÃO	15
3	APLICAÇÃO: DEFORMAÇÕES E MORFISMOS	17
3.1	DEFORMAÇÃO E DISTORÇÃO SIMPLES	17
3.1.1	Deformações Dependentes do Tempo	22
3.1.2	Morfismo Dependente do Tempo	28
3.1.3	Morfismo no Plano: Uma sobre o estudo de matrizes com o uso de Planilhas Eletrônicas.	29
4	CONCLUSÃO	31
	REFERÊNCIAS	32

1 INTRODUÇÃO

A computação gráfica é uma área da computação que estuda a geração de imagens, este trabalho aborda a aplicação da álgebra linear nesta área. Por meio da computação gráfica podemos deslocar, rotacionar e redimensionar uma imagem; essas transformações são chamadas de translação, rotação e homotetia, respectivamente.

Segundo Anton e Rorres(2001), a translação significa deslocar uma imagem para outra posição. A rotação é um giro em torno de um eixo coordenado; trata-se de um método mais complexo de transformação, pois envolve trigonometria e transformações lineares. E a homotetia redimensiona uma imagem por meio da ampliação e redução.

Por diversas vezes vemos em filmes ou propagandas uma imagem sendo rapidamente transformada em outra, por exemplo, uma mulher num animal, ou então quando do desaparecimento de uma criança há anos, e uma foto de como ela poderia estar atualmente. Tais processos são possíveis através da utilização de conceitos matemáticos chamados de deformação e morfismo.

O processo de obtenção destas novas imagens é o resultado da deformação de duas imagens, e a junção gerará o morfismo da imagem, ou seja, a nova imagem. Tais conceitos também tem amplo uso na indústria médica, científica e do entretenimento. Estas aplicações só são possíveis, graças a conceitos da álgebra linear.

No Capítulo 2 abordaremos os principais conceitos e propriedades que utilizaremos ao longo desse trabalho.

No Capítulo 3 iremos aplicar conceitos da Álgebra Linear no processo de manipulação de imagens.

Por fim, o último capítulo é reservado às considerações finais.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados básicos da Álgebra Linear que utilizaremos ao longo deste trabalho, como espaço vetorial, combinação linear, independência linear e dependência linear, base, transformação linear e transformação afim.

2.1 ESPAÇOS VETORIAIS

Nesta seção, apresentaremos definições e resultados referentes a espaço vetorial, base, dimensão e subespaço vetorial que serão utilizados no capítulo 3.

Definição 2.1 Um conjunto não vazio V é um espaço vetorial sobre (um corpo) \mathbb{K} se em seus elementos, denominados vetores, estiverem definidos as seguintes duas operações:

(A) A cada par u, v de vetores de V corresponde um vetor $u + v \in V$, chamado de soma de u e v , de modo que:

(A1) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ (propriedade comutativa).

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$ (propriedade associativa).

(A3) exista em V um vetor, denominado vetor nulo e denotado por 0 , tal que $0 + v = v, \forall v \in V$.

(A4) a cada vetor $v \in V$ exista um vetor em V , denotado por $-v$, tal que $v + (-v) = 0$.

(M) A cada par $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, corresponde um vetor $\alpha \cdot v \in V$, denominado produto por escalar de α por v de modo que:

(M1) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall v \in V$ (propriedade associativa).

(M2) $1 \cdot v = v, \forall v \in V$ (onde 1 é o elemento identidade de \mathbb{K}).

(M3) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u, v \in V$.

(M4) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall v \in V$.

Exemplo 2.1 O conjunto dos vetores do espaço $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R} \text{ } i = 1, 2, 3\}$ tem uma estrutura de espaço vetorial sobre \mathbb{R} quando munido das operações:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3), \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Exemplo 2.2 O conjunto das matrizes reais $m \times n$, com a soma e o produto por escalar usuais é um espaço vetorial.

Definição 2.2 Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} .

(1) Um vetor $v \in V$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, \dots, v_n \in V$ se existirem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

(2) Seja B um subconjunto de V . Dizemos que B é um conjunto gerador de V (ou que B gera V) se todo elemento de V for uma combinação linear de um número finito de elementos de B .

Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$, o subconjunto V formado por todas as combinações lineares de v_1, v_2, \dots, v_n . Este subconjunto também é \mathbb{K} -espaço vetorial chamado de espaço vetorial gerado por v_1, v_2, \dots, v_n e o denotaremos por $[v_1, v_2, \dots, v_n]$.

Exemplo 2.3 Considere \mathbb{R}^3 como espaço vetorial sobre \mathbb{R} observe que o conjunto

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \text{ é um conjunto gerador de } \mathbb{R}^3.$$

Definição 2.3 Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} e B um subconjunto de V .

(a) Dizemos que B é linearmente independente (ou LI) se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, para $v_i \in B$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, implica que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

(b) O conjunto B é chamado de linearmente dependente (ou LD) se não for linearmente independente.

Definição 2.4 Seja V um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} . Dizemos que um subconjunto B de V é uma base de V se

(i) B for um conjunto gerador de V ; e

(ii) B for linearmente independente.

Exemplo 2.4 O conjunto $\{(1, 1), (0, 1)\}$ é uma base de $V = \mathbb{R}^2$.

De fato: Se $(0, 0) = x(1, 1) + y(0, 1) = (x, x+y)$, então

$$\begin{cases} x &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases}$$

logo $x = y = 0$. Isto é, $\{(1, 1), (0, 1)\}$ é linearmente independente.

Ainda o conjunto $[(1, 1), (0, 1)]$ é gerador de V , pois dado $v = (a, b) \in V$, temos

$$(a, b) = a(1, 1) + (b - a)(0, 1)$$

ou seja, todo vetor de \mathbb{R}^2 é uma combinação linear dos vetores $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

Definição 2.5 *Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Se V admite uma base finita, então chamamos de dimensão de V o número de elementos de tal base. Caso contrário dizemos que a dimensão de V é infinita.*

Definição 2.6 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} . Um subconjunto não vazio, W de V é um subespaço vetorial de V se:*

- (a) *para quaisquer $v_1, v_2 \in W$ tivermos $v_1 + v_2 \in W$;*
- (b) *para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in W$ tivermos $\alpha v \in W$.*

Observe que fazendo $\alpha = 0$ no item (b) temos que qualquer subespaço W de V deve conter o vetor nulo.

2.2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Nesta seção recordaremos definições e resultados referentes a transformações lineares que serão utilizadas no capítulo 3.

Definição 2.7 *Uma transformação afim é uma aplicação definida no caso \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 da forma:*

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Em que a, b, c, d, e e f são escalares.

Definição 2.8 *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{K} . Uma função $T : U \rightarrow V$ é uma transformação linear se*

- (1) *$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, para todos $u_1, u_2 \in U$, e*
- (2) *$T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todo $u \in U$.*

Definição 2.9 *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{K} e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear.*

- (a) *O conjunto $\{u \in U : T(u) = 0\}$ é chamado de núcleo de T e será denotado por $\text{Nuc}T$.*
- (a) *O conjunto $\{v \in V : \exists u \in U \text{ com } T(u) = v\}$ é chamado de imagem de T e será denotado por $\text{Im}T$.*

Não é difícil verificar que $\text{Nuc}T$ e $\text{Im}T$ são subespaços vetoriais de U e V , respectivamente.

Lema 2.1 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre \mathbb{K} e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Se $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de U , então $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ gera $\text{Im}T$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $v \in \text{Im}T$. Então existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$.

Como B é uma base de U temos que existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \\ T(u) &= T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) \\ T(u) &= T(\alpha_1 u_1) + T(\alpha_2 u_2) + \dots + T(\alpha_n u_n) \\ T(u) &= \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \dots + \alpha_n T(u_n) \end{aligned}$$

como $v = T(u) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \dots + \alpha_n T(u_n)$ temos que $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ gera a $\text{Im}T$.

Definição 2.10 *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre \mathbb{K} .*

(i) Seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Se T for bijetora (isto é, injetora e sobrejetora) então dizemos que ela é um isomorfismo.

(ii) Se existir um isomorfismo $T : U \rightarrow V$, então dizemos que U e V são espaços vetoriais isomorfos e indicaremos $U \cong V$.

Lembremos que um operador linear é uma transformação linear $T : V \rightarrow V$. Denotado por $L(V, V)$, o conjunto de todos os operadores lineares de V , onde V é um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} .

2.3 REPRESENTAÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES POR MATRIZES

Sejam V um \mathbb{K} espaço vetorial n -dimensional e W um \mathbb{K} -espaço vetorial m -dimensional. Consideremos $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V e $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ base de W . Dado $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear temos que:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m = \sum_{i=1}^m a_{i1}w_i \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m = \sum_{i=1}^m a_{i2}w_i \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m = \sum_{i=1}^m a_{in}w_i, \end{aligned}$$

para $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Para $v \in V$ temos $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$, onde os α_j 's pertencem a \mathbb{K} , segue que

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) = \alpha_1 (a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m) + \dots + \alpha_n (a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m) = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m$$

Reescrevendo em termos de multiplicação de matrizes temos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}_{B'} = [T(v)]_{B'}$$

isto é, $[T(v)]_{B'} = A \cdot [v]_B$, onde A é a matriz $(a_{ij})_{i,j} \in M_{m \times n}$.

Definição 2.11 A matriz $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ definida acima é chamada de matriz da transformação linear de T com relação as bases B e B' e é denotada por $[T]_{B,B'}$.

Teorema 2.1 A toda matriz $m \times n$ está associada uma transformação linear de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m e a toda transformação linear de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m está associada a uma matriz $m \times n$.

Demonstração:

Sejam $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$ e A a matriz $m \times n$. Definimos

$$L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ por } v \rightarrow A \cdot v$$

onde

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ assim : } L_A(v) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

das propriedades de operações com matrizes:

$L_A(u + kv) = A(u + kv) = Au + Akv = Au + kAv = L_A(u) + kL_A(v)$, e portanto L_A é uma transformação linear.

Por outro lado, dada uma transformação linear, associamos uma matriz da seguinte forma:

Sejam $V = \mathbb{R}_n$, $W = \mathbb{R}_m$ e a transformação linear $T : V \rightarrow W$, onde $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V e $\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$ é uma base de W . Então $T(v_1), \dots, T(v_n)$ são vetores de W e portanto

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m \end{aligned} \tag{1}$$

Onde os coeficientes a_{ij} , com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ são números reais. A transposta da matriz de coeficientes deste sistema, denotada por $[T]_{\beta}^{\alpha}$, é chamada matriz de T em relação às bases α e β .

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

Fica assim estabelecida a bijeção entre transformação lineares e matrizes.

Exemplo 2.5 Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(u) = u + \lambda$, onde λ é um vetor não nulo em \mathbb{R}^2 .

Dados u, v vetores em \mathbb{R}^2 e $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} T(u + kv) &= u + kv + \lambda \\ &= u + \lambda + kv \\ &= T(u) + k[T(v) - \lambda] \\ &\neq T(u) + kT(v) \end{aligned} \tag{2}$$

Logo T não é uma transformação linear, a aplicação assim definida é chamada de translação.

2.4 TRANSFORMAÇÕES: HOMOTETIA, TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO

Nesta seção, abordaremos os três principais tipos de transformações que utilizaremos na manipulação de imagens.

2.4.1 HOMOTETIA

Significa ampliar ou reduzir distâncias dos pontos de um espaço em relação a um ponto fixo. Homotetia ou mudança de escala consiste em mudar as escalas da imagem ao longo das direções x, y, z por fatores a, b, c respectivamente. Isto significa que um ponto P_i que tem coordenadas (x, y, z) na imagem original, será transformado no novo ponto P_0 de coordenadas (ax, by, cz) na nova imagem. Isto tem o efeito de transformar um cubo unitário da imagem original em um paralelepípedo de dimensões $a \times b \times c$. Para calcularmos a nova matriz de coordenadas da nova imagem devemos multiplicar a matriz de coordenadas da imagem original pela matriz diagonal dos fatores a, b, c .

No Figura 1 vemos a ampliação de uma imagem por Homotetia.

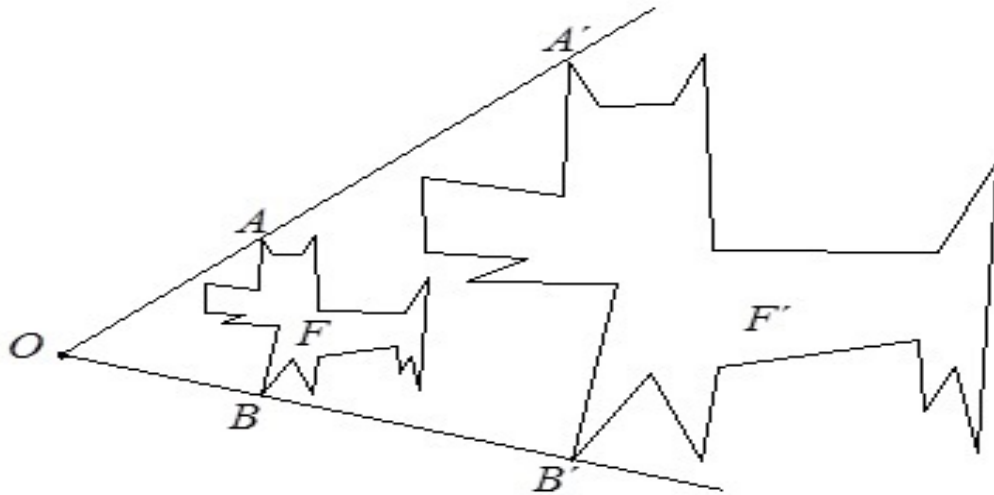


Figura 1: Ampliação da imagem por Homotetia

2.4.2 TRANSLAÇÃO

Significa transladar ou deslocar um objeto para uma nova posição da imagem. Para realizarmos a translação devemos somar a matriz de coordenadas ao chamado vetor translação, definido por uma matriz $3 \times n$, onde n é o número de coordenadas da imagem. De uma forma sucinta, suponha que queiramos mudar uma imagem existente de tal modo que cada ponto P_i com coordenadas (x_i, y_i, z_i) seja movido para um novo ponto P_0 com coordenadas $(x_i + x_o, y_i + y_o, z_i + z_o)$.

Definindo a matriz $3 \times n$, temos:

$$T = \begin{pmatrix} x_0 & x_0 & \dots & x_0 \\ y_0 & y_0 & \dots & y_0 \\ z_0 & z_0 & \dots & z_0 \end{pmatrix}$$

Todos os n pontos da imagem determinados pela matriz de coordenadas P podem ser trasladados por adição matricial por meio da equação $P' = P + T$.

Em termos de transformação afim, a translação corresponde à soma de um vetor de deslocamento b ao vetor que define o ponto que se deseja deslocar, onde na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Onde geometricamente temos a Figura 2

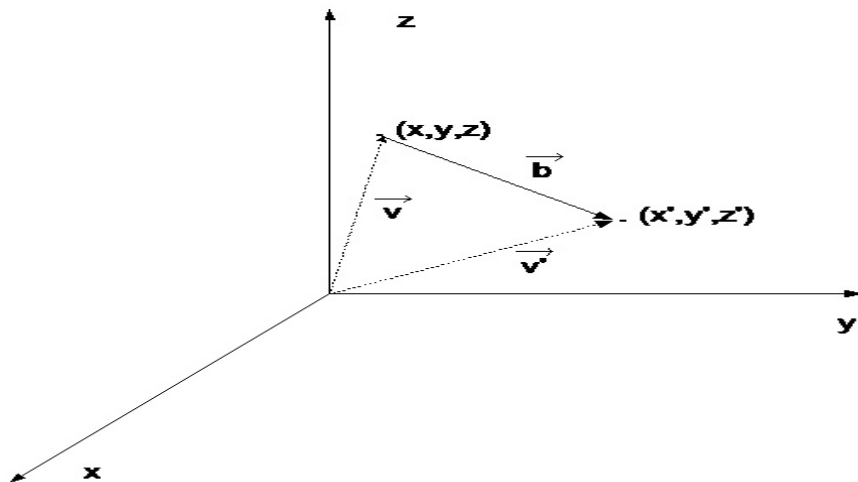


Figura 2: Translação de um ponto

2.4.3 ROTAÇÃO

Consiste em um método da computação gráfica, que envolve trigonometria além de transformações lineares. É um giro de imagem em torno dos eixos x, y, z , no caso de imagem da terceira dimensão. Para cada eixo de rotação temos uma forma de calcular a nova matriz de coordenadas. Segue a rotação em torno do eixo z na Figura3:

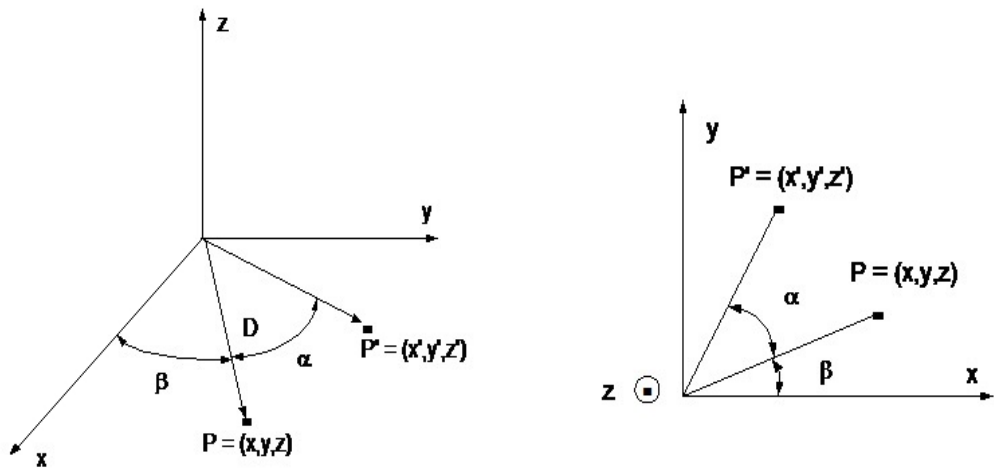


Figura 3: Rotação em torno do eixo Z

Logo temos a forma matricial da transformação por rotação:

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

Analogamente podemos obter rotações em torno dos eixos x e y. As rotações em torno dos três eixos coordenados podem ser combinadas para obter imagens oblíquas de um objeto.

3 APLICAÇÃO: DEFORMAÇÕES E MORFISMOS

As deformações e os morfismos estão entre as mais interessantes técnicas de manipulação de imagens disponíveis para a computação gráfica. A maioria dos aplicativos de computação gráfica permite a manipulação de uma imagem de várias maneiras, tais como a mudança de suas proporções, rotações ou cisalhamentos. Outra técnica básica de manipulação de imagens é a distorção de uma imagem pelo movimento dos vértices de um retângulo que a contém.

Um procedimento mais complicado, chamado deformação, consiste em distorcer várias partes da imagem de maneiras diferentes. Além disto, a deformação de duas imagens por procedimentos complementares com a fusão das deformações obtidas resulta num morfismo das duas imagens.

A principal aplicação de deformações e morfismos tem sido na produção de efeitos especiais no cinema, na televisão e na propaganda. No entanto, também surgiram muitas aplicações científicas e tecnológicas para estas técnicas, por exemplo, o estudo da evolução das formas de organismos vivos, a análise do crescimento e desenvolvimento de organismos vivos, a assistência à cirurgia plástica e de reconstrução, a investigação de variações no projeto de um produto e o envelhecimento de fotografias de pessoas desaparecidas ou de suspeitos da polícia.

3.1 DEFORMAÇÃO E DISTORÇÃO SIMPLES

Uma deformação e distorção simples de imagens se dão quando marcamos uma região triangular do plano, cujos vértices são três pontos não colineares v_1, v_2 e v_3 . Vamos chamar este triângulo de triângulo inicial, se v é um ponto qualquer do triângulo inicial, existem constantes únicas c_1 e c_2 tais que:

$$v - v_3 = c_1(v_1 - v_3) + c_2(v_2 - v_3) \quad (1)$$

Onde c_1 e c_2 são constantes.

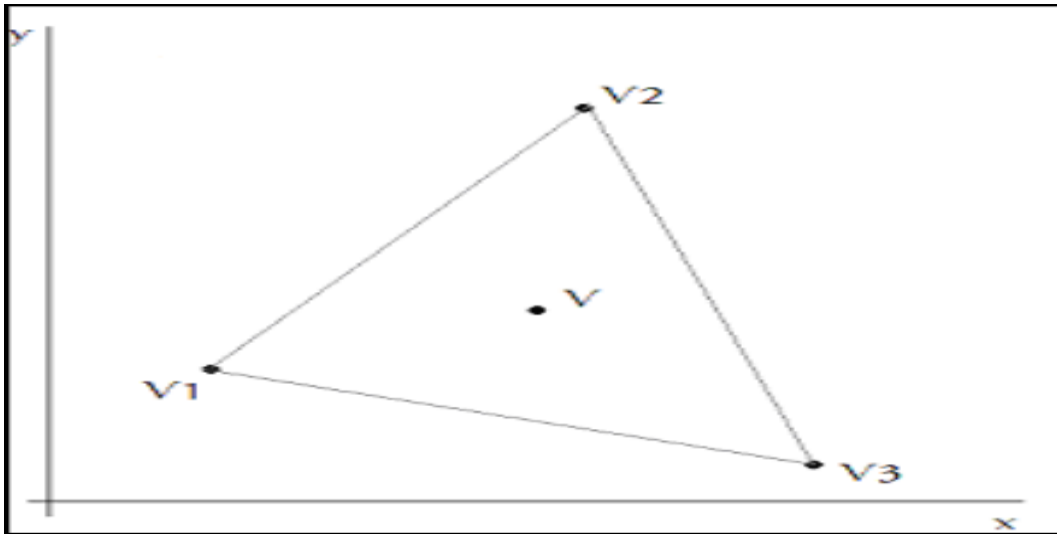


Figura 4: Triângulo Inicial

Fonte: Anton(2001, p.495)

A Equação (1) dá o vetor $v - v_3$ como a única combinação linear dos dois vetores linearmente independentes $v_1 - v_3$ e $v_2 - v_3$ em relação a uma origem em v_3 . Se colocarmos $c_3 = 1 - c_1 - c_2$, então poderemos reescrever (1) como

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 \quad (2)$$

onde

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad (3)$$

Pela definição de c_3

Se (2) e (3) são válidas e se, além disto, os coeficientes c_1, c_2 e c_3 forem não negativos, diremos que v é combinação convexa dos vetores v_1, v_2 e v_3 . Podemos ver que v é um ponto do triângulo determinado por v_1, v_2 e v_3 se, e somente se, é uma combinação convexa destes vetores.

Combinação Convexa: Dada qualquer coleção finita de pontos $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ é dito uma combinação convexa dos pontos (x_1, \dots, x_m) se existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ satisfazendo (i) $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ e (ii) $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, tal que $z = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$.

Em seguida, dados os três pontos não colineares w_1, w_2 e w_3 dos vértices do triângulo final, existe uma única transformação afim que leva v_1 em w_1 , v_2 em w_2 e v_3 em w_3 . Ou seja, existem uma única matriz 2×2 invertível M e um único vetor k tais que:

$$w_i = Mv_i + k$$

para $i = 1, 2, \dots, n$

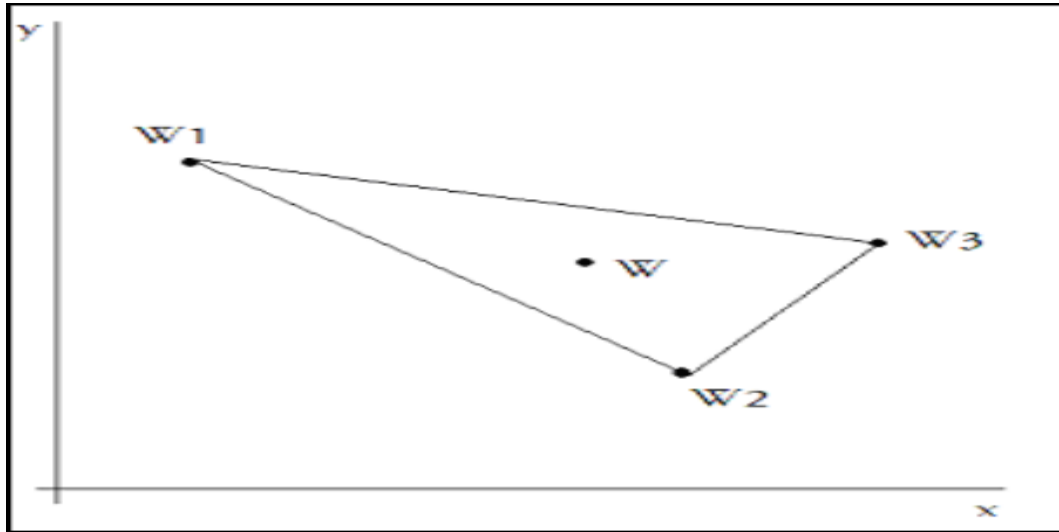


Figura 5: Triângulo Final

Fonte: Anton(2001, p.495)

Então vemos por esta transformação afim, a imagem w do vetor v de (2) é;

$$w = c_1 w_1 = c_2 w_2 + c_3 w_3$$

Esta é uma propriedade básica das transformações afins, que é levar uma combinação convexa de vetores na mesma combinação convexa das imagens dos vetores. O processo similar é feito quando há uma imagem dentro do triângulo, porém o diferencial se dá no que refere se a cor, pois a cada triângulo estará associado um nível da cor da imagem inicial.

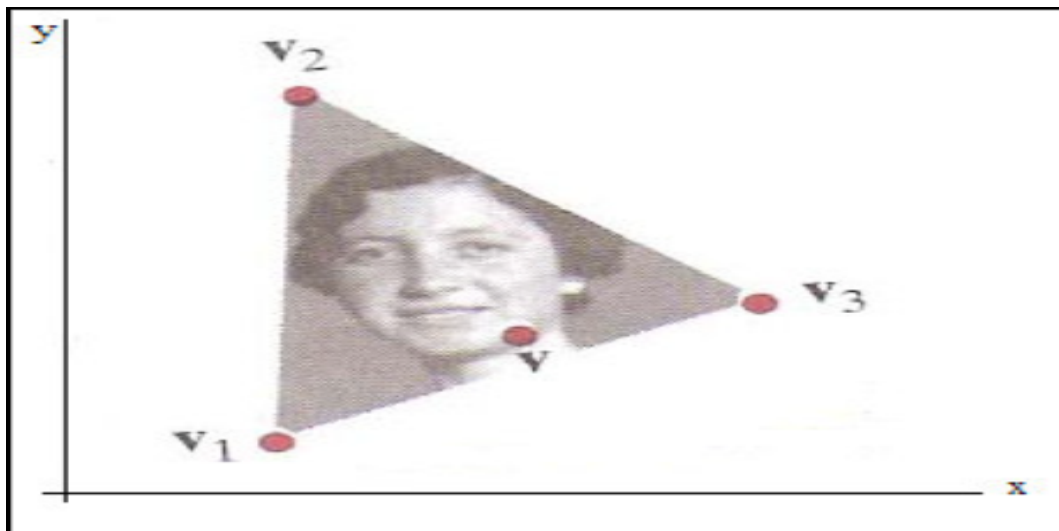


Figura 6: Imagem no Triângulo inicial

Fonte: Anton(2001, p.495)

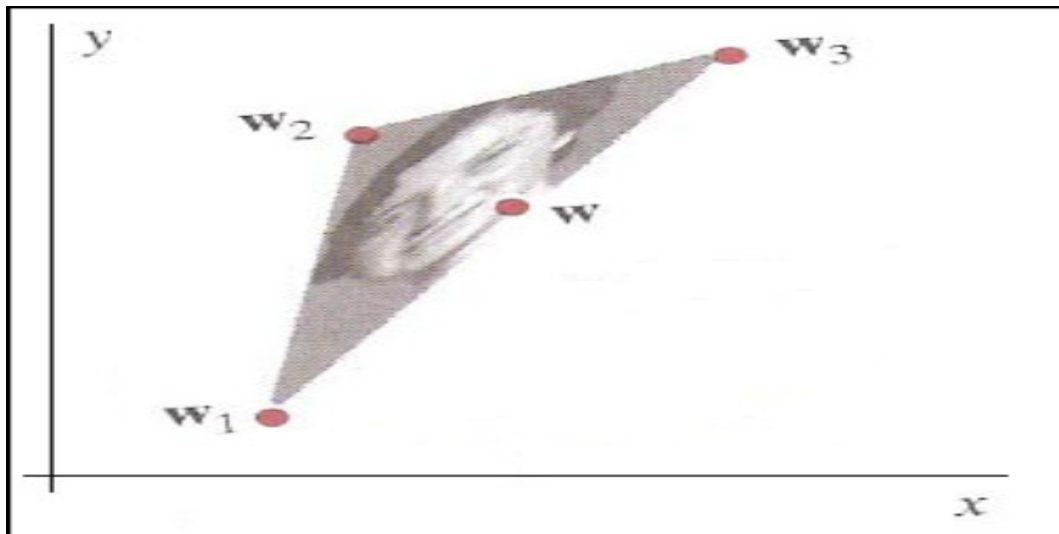


Figura 7: Imagem no triângulo Final

Fonte: Anton(2001, p.495)

Onde foi pego um ponto v da imagem inicial e a ela foi associado uma função escalar (Di) denominada densidade da imagem.

Tal função tem como objetivo relacionar todos os níveis (tons) de cores da imagem inicial com o ponto v . Após este processo já é possível definir uma imagem deformada, relacionando a densidade da imagem final da seguinte forma:

$$Dif(w) = Dio(c_1 + c_2 + c_3)$$

Onde temos:

Dif = Densidade final

Dio = Densidade Inicial

w = Ponto no triângulo final

c_1, c_2 e c_3 = Constantes

Esta equação nos dará os níveis de cor a serem usadas na imagem final, assim conforme os valores das constantes que variam sobre todos os valores não negativos, e a soma for igual a 1, a expressão $w = c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3$ gerará todos os pontos de w do triângulo final e a conseqüentemente gerará os valores da cor correspondentes.

O processo de distorção de imagem, e como também seu envelhecimento depende de escolhas de vértices, e esta escolha é tão importante no resultado final que devemos ficar atento às recomendações, no que se refere à movimentação dos vértices na imagem a ser triangulada.

- Os pontos que ficam nos extremos devem permanecer fixos;
- Os pontos que ficam situados sobre as bordas podem se mover desde que seja sobre a mesma borda;
- Deve se evitar ao máximo que os triângulos formados pela triangulação fiquem sobrepostos, já que quando isso ocorre a deformação resultante será artificial, tendo necessidade então de novas modificações.

Agora vemos nas figuras abaixo uma imagem de um quadrilátero onde escolhemos os vértices, e outra onde é realizada uma triangulação:

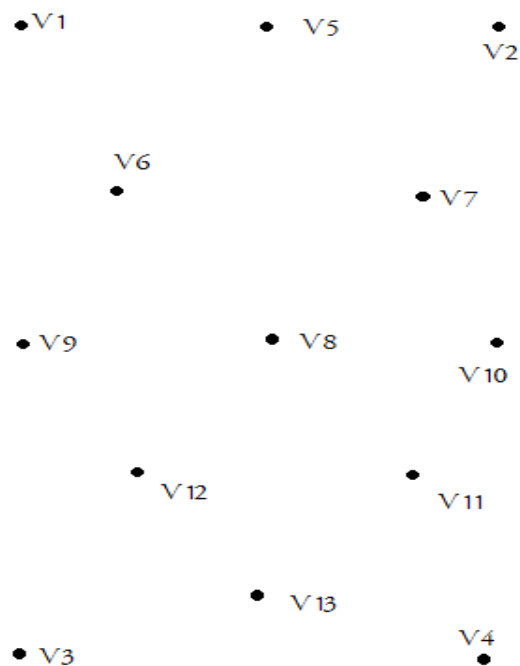


Figura 8: Escolha dos Vértices

Fonte: Anton(2001, p.496)

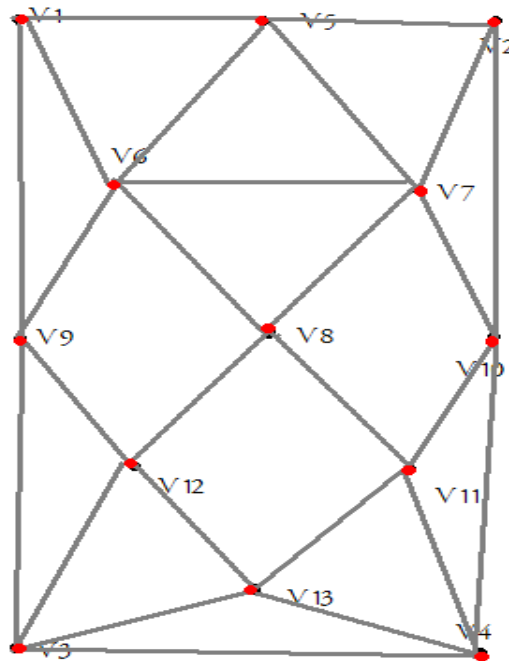


Figura 9: Triângulação

Fonte: Anton(2001, p.496)

3.1.1 Deformações Dependentes do Tempo

Uma deformação dependente do tempo é um conjunto de deformações geradas quando os pontos de vértice da imagem inicial são movidos continuamente ao longo do tempo desde suas posições originais até posições finais especificadas. Isto nós dá uma animação na qual a imagem inicial é deformada continuamente até uma deformação final. Vamos escolher unidades de tempo de tal forma que $T = 0$ corresponde à imagem inicial e $T = 1$ corresponde à deformação final. A maneira mais simples de mover os pontos de vértice do instante de tempo 0 ao instante de tempo 1 é com velocidade constante ao longo de caminhos retos ligando as posições iniciais às posições finais.

Podemos também fazer uma reconstrução como a feita abaixo a partir de um crânio encontrado.



Figura 10: Reconstrução de face a partir de um crânio

Onde pode se recriar a face de um habitante da época dos faraós, com base em diversas variáveis tais como, as características dos povos da região, cor de pele etc, e são estas características que ajudaram na composição das novas imagens. O processo para obtenção tanto da imagem, como a de recriar um rosto passa por diversas etapas, como a escolha dos vértices, triangulação das imagens etc, que são de grande importância no resultado final.

Conforme vimos quando da escolha dos vértices na distorção o processo é similar, mantendo as mesmas condições já vista para deformação e morfismo dependente do tempo, feito isso podemos começar a triangulação. Devemos também levar em conta diversas peculiaridades, que ajudaram no melhor resultado final.

- Os pontos escolhidos para triangulação inicial devem privilegiar características essenciais da imagem (cabelo, boca, testa, nariz, etc);
- Traçamos retas entre os pontos;
- As retas formam os lados de uma coleção de triângulos:
- Cada ponto de vértice é o vértice de pelo menos um triângulo
- A triangulação deve unir todos os vértices.

A triangulação pode ser feita a partir de n pontos de vértice, o que precisamos fazer é somente especificar os pontos a serem triangulados, pois há algoritmos específicos que fazem o trabalho de triangular a imagem.



Figura 11: Imagem na escolha de Vértices



Figura 12: Imagem Triângulada

Caso seja necessário, descobrir quantos triângulos há na triangulação feita, isso se dá pela seguinte fórmula.

$$M = 2n - 2 - k$$

Onde temos:

n = número de pontos de vértices

k = número de vértices que ficam no bordo

Depois de tomados estes cuidados iremos obter a imagem final desejada.



Figura 13: Imagem na escolha de Vértices



Figura 14: Imagem Triângulada



Figura 15: Imagem Final desejada

Em casos de criança desaparecidas o software que faz a foto resultante das deformações e morfismo, utiliza as características da família do desaparecido para poder fazer a triangulação final e assim obter a imagem o mais real possível, veja este caso abaixo:

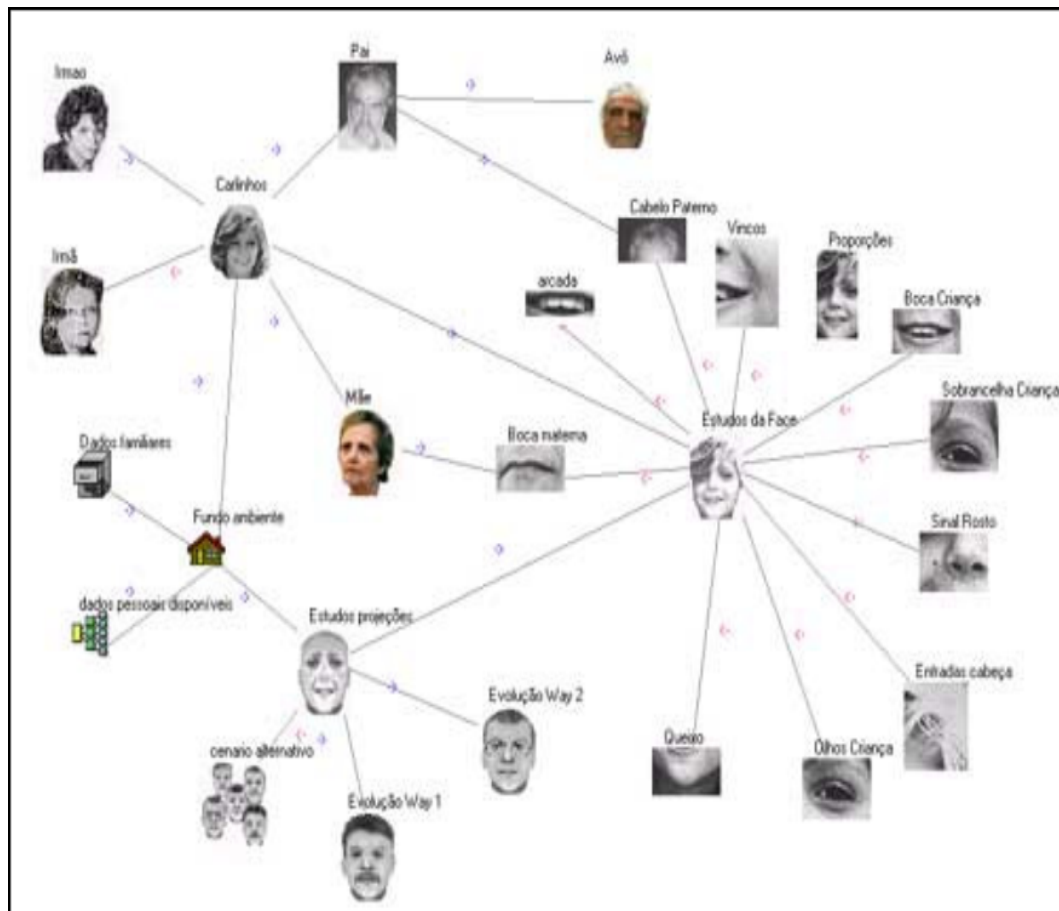


Figura 16: Característica da Família

As possíveis imagens de como a criança estaria hoje:

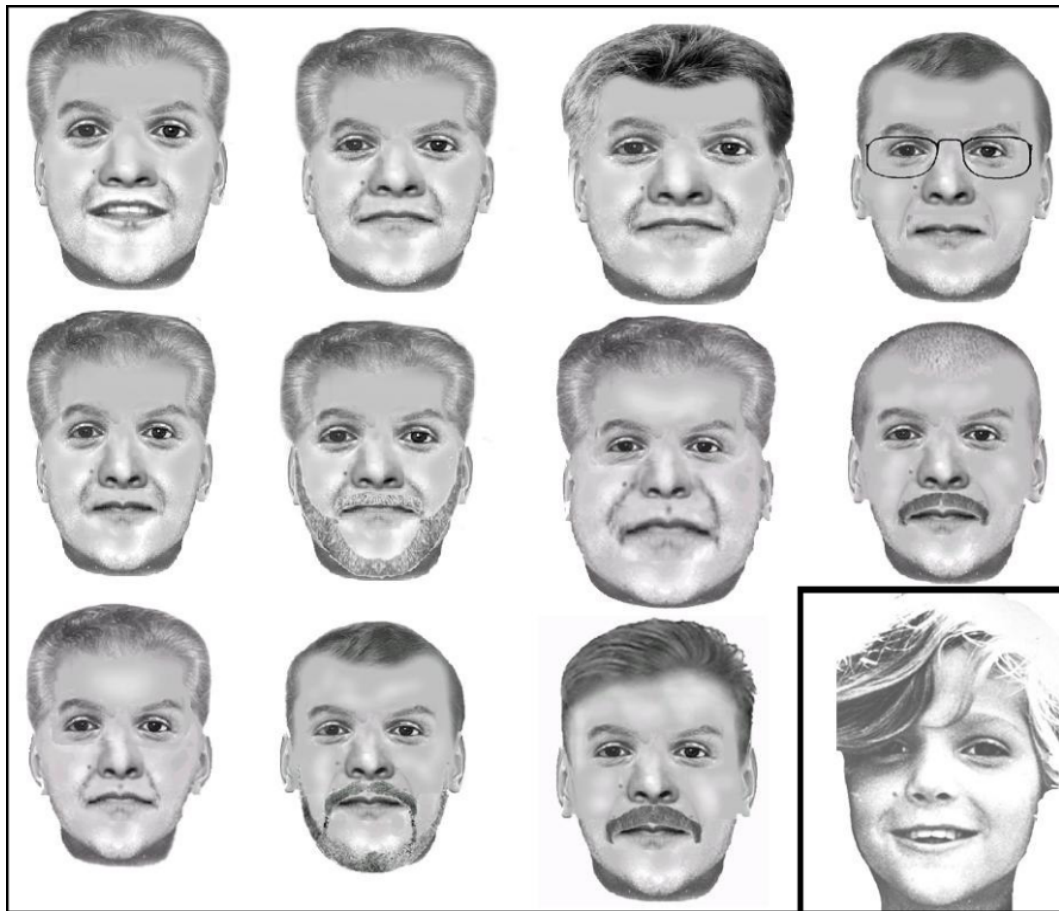


Figura 17: Possíveis Faces

Foram criadas diversas possibilidades de fotos, pois foi levado em consideração todas as características familiares, podendo assim obter a imagem mais próxima do real.

Neste outro exemplo, depois de feito todo o processo pode se obter a imagem (*b*), onde ela estaria com aproximadamente 08 anos, porém quando a garota foi encontrada um pouco mais velha, mas mesmo assim podemos reparar que a imagem é bem próxima do real, mesmo com alguns anos a mais.



Figura 18: Imagem após 08 anos

3.1.2 Morfismo Dependente do Tempo

Um morfismo dependente de tempo pode ser descrito como uma combinação de duas deformações dependentes do tempo de duas imagens distintas, usando duas triangulações, que associam características correspondentes das duas imagens.

Uma das duas imagens é escolhida como a imagem inicial e a outra como a imagem final. Primeiro geramos uma deformação dependendo do tempo de $t = 0$ a $t = 1$ na qual a imagem inicial é deformada para a forma da imagem final. Em seguida geramos uma deformação dependendo do tempo de $t = 0$ a $t = 1$ na qual a imagem final é deformada para a forma da imagem inicial. Finalmente, para cada instante t entre 0 e 1 criamos um morfismo das duas deformações no instante t usando uma média ponderada dos dois níveis de (tons).

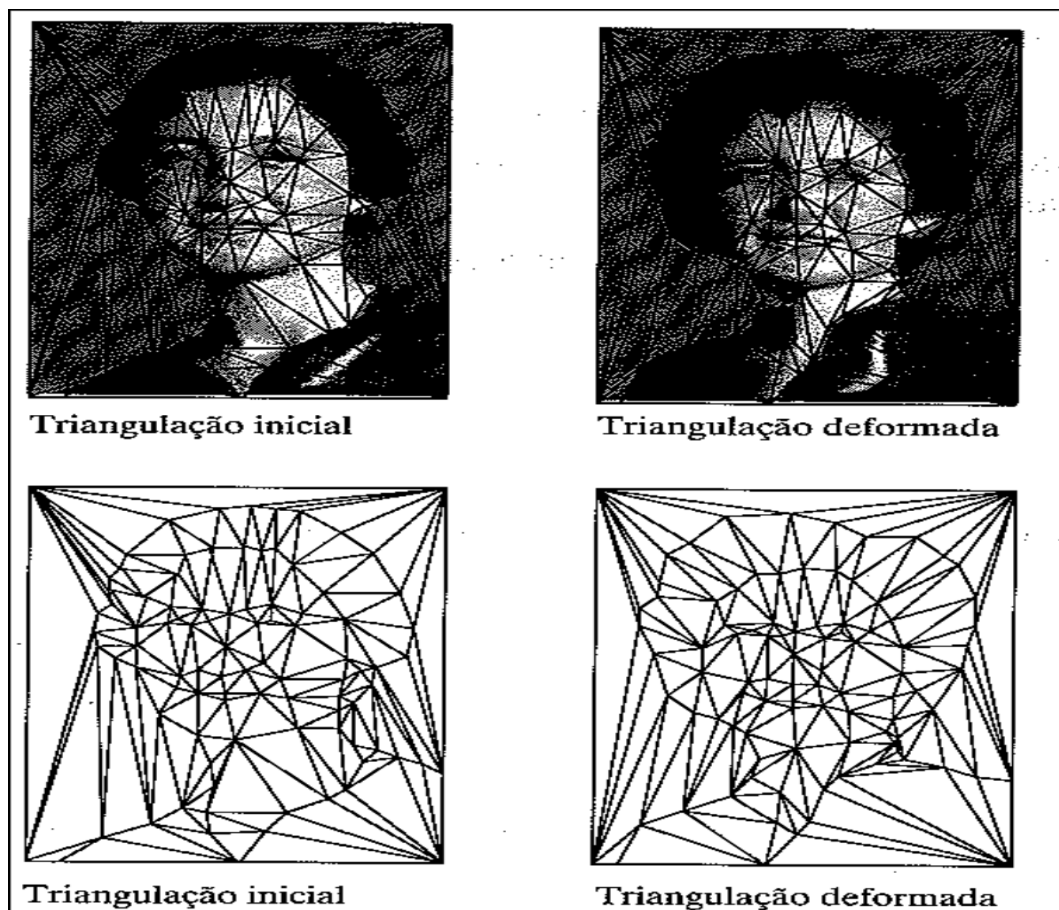


Figura 19: Triangulação Deformada

Fonte: Anton(2001, p.498)

3.1.3 Morfismo no Plano: Uma sobre o estudo de matrizes com o uso de Planilhas Eletrônicas.

Representando os vértices da imagem inicial como uma matriz de pontos estendida I e os vértices da imagem final como uma matriz de pontos estendida F , então a matriz de Transação T entre I e F pode ser definida por:

$$T(k) = I + k(F - I), k \in [0, 1]$$

Note que, se $k = 0$ teremos $T(0) = I + 0(F - I) = I$ se $k = 1$ teremos $T(1) = I + 1(F - I) = I + F - I = F$. Para ilustrar, vejamos um exemplo.

Exemplo 3.1 Efetuar o morfismo de fator $k = 0,5$ do Triângulo ABD de vértices $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(1, 3)$ (figura inicial) e do retângulo $AB'C'D'$ de vértices $(1, 1)$, $(5, 1)$, $(5, 4)$ e $(1, 4)$ (figura final). Para utilizar a fórmula do morfismo precisamos que a matriz de pontos estendida dos vértices da figura inicial I e a matriz de pontos estendida dos vértices da figura final F tenham a mesma ordem. Desta forma, como I tem ordem 2×4 e F tem ordem 2×5 , vamos utilizar o ponto médio dos pontos $B = (3, 1)$ e $D = (1, 3)$. A fórmula para cálculo do ponto médio destes pontos é dada por:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

que nos dá o ponto $C = (2, 2)$. Matriz de pontos estendida da figura inicial (Triângulo ABD) acrescido do ponto C :

$$I' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que novamente devemos repetir o primeiro ponto na última coluna. Matriz de pontos estendida da figura final (Retângulo $AB'C'D'$):

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim a matriz $T(k)$, com $k = 0,5$ pode ser calculada da seguinte forma:

$$a_{11} = 1 + 0,5(1 - 1) = 1 + 0 = 1$$

$$a_{21} = 1 + 0,5(1 - 1) = 1 + 0 = 1$$

$$a_{12} = 3 + 0,5(5 - 3) = 3 + 1 = 4$$

$$a_{22} = 1 + 0,5(1 - 1) = 1 + 0 = 1$$

$$a_{13} = 2 + 0,5(5 - 1) = 2 + 2 = 4$$

$$a_{23} = 2 + 0,5(4 - 2) = 2 + 1 = 3$$

$$a_{14} = 1 + 0,5(1 - 1) = 1 + 0 = 1$$

$$a_{24} = 3 + 0,5(4 - 3) = 3 + 0,5 = 3,5$$

$$a_{15} = 1 + 0,5(1 - 1) = 1 + 0 = 1$$

$$a_{25} = 1 + 0,5(1 - 1) = 1 + 0 = 1$$

Logo a matriz de pontos da figura intermediária (Quadrilátero $AB''C''D''$), para $k = 0,5$ será:

$$T(0,5) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3,5 & 1 \end{pmatrix}$$

Na figura abaixo, note que a posição do ponto A é fixa, enquanto o ponto B desloca-se para a posição do ponto B' , o ponto C desloca-se para a posição do ponto C' e o ponto D desloca-se para a posição do ponto D' .

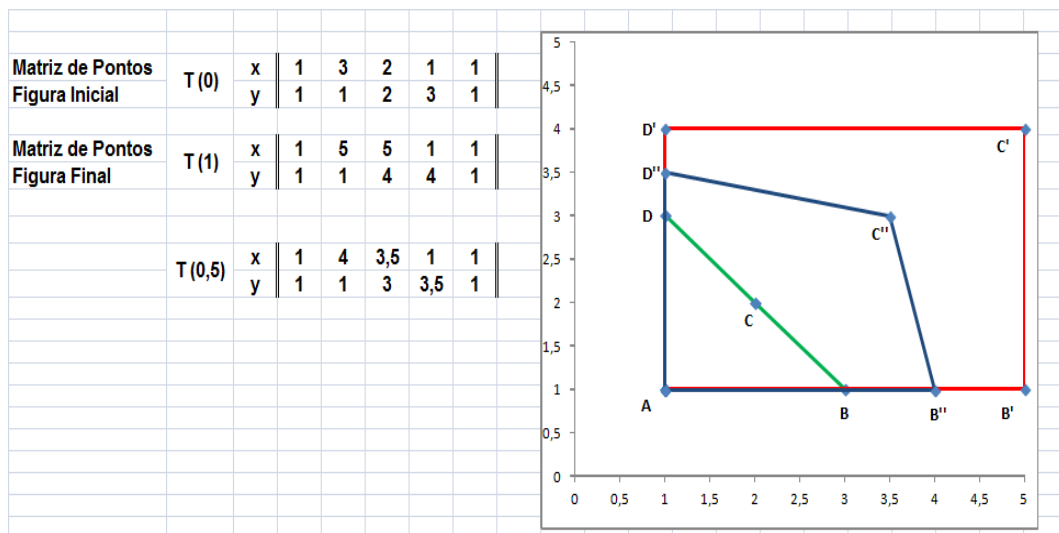


Figura 20: Transição do Triângulo ABC para o Retângulo $AB'C'D'$

Fonte: Conceição(2013 p.51)

4 CONCLUSÃO

Com este trabalho percebemos que os resultados e conceitos da Álgebra Linear, tais como combinação linear, transformações lineares, base e matrizes, desempenham um papel essencial na área de computação gráfica.

Uma das técnicas de manipulação de imagens consiste na distorção de uma imagem pelo movimento dos vértices de um retângulo que a contém. Com as deformações aqui estudadas observamos que elas nos permitem distorcer várias partes da imagem de maneiras diferentes. Já os morfismos nos possibilitam a fusão de duas deformações. Sendo assim, as deformações e os morfismos ficam entre as mais interessantes técnicas de manipulação de imagem.

Observando todos esses aspectos, foi possível enxergar com mais ênfase a aplicação de conceitos matemáticos em problemas cotidianos e sua contribuição para os avanços tecnológicos.

REFERÊNCIAS

ANTON,H;Rorres, C. **Álgebra Linear com Aplicações**.8.ed. Tradução Claus Ivo Doering
Porto Alegre: Bookman,2001.

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1980.

CONCEIÇÃO, Marcos Roberto Fonseca. **Transformação no Plano: Uma Aplicação do estudo de Matrizes com o uso de Planilhas Eletrônicas**.2013. p64. Dissertação - Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande

COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2. ed.
São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.