

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

KELLI SCHNEIDER

**ESTUDO DO VETOR GRADIENTE**

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2013

**KELLI SCHNEIDER**

**ESTUDO DO VETOR GRADIENTE**

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Sara Coelho da Silva

**CAMPO MOURÃO**

**2013**

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

Kelli Schneider

Estudo do Vetor Gradiente

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

---

Orientador: Prof. Msc. Sara Coelho da Silva

---

Prof. Msc. Magda Cardoso Mantovani

---

Prof. Msc. Lilian Caroline Xavier Candido

Campo Mourão, 2013

A minha família, e meus amigos, que estiveram juntos comigo. E aos professores que contribuíram para realização deste trabalho.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente à Deus, pois é ele que nos dá a cada novo dia o dom da vida.

Ao meu pai e minha mãe, que além da dedicação, amizade e amor, aconselhou e incentivou meu ingresso na pós-graduação.

A minha avó Anny, que tem na simplicidade sua maior virtude, a quem procurei palavras de consolo e sabedoria.

A todos meus familiares, que sempre demonstraram carinho e atenção e reconheceram minha labuta e conquista.

Aos amigos que fiz na UTFPR de Campo Mourão, em especial a Edilza, Everaldo, Ricardo e Rodrigo, pelos momentos que passamos juntos com gargalhadas, e confidências durante as viagens até Campo Mourão.

A uma pessoa muito importante para essa conquista, minha orientadora Sara, que possui o entusiasmo pela propagação do saber. Que incentivou, acreditou e fomentou conhecimento, e cobrou resultados constantemente. Sinto-me honrada por ter trabalhado com ela.

Aos professores da pós-graduação em matemática, que me concederam um pouco do seu conhecimento sempre que precisei, meu muito obrigado.

“O principio criador reside na matemática, a sua certeza absoluta, enquanto se trata de matemática abstrata, mas diminui na razão direta de sua concretização”  
(Albert Einstein)

## RESUMO

SCHNEIDER, Kelli. Estudo do Vetor Gradiente. 55 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

Este trabalho trata do vetor gradiente, ressaltando suas propriedades principais e aplicações. Para tanto, apresentamos inicialmente alguns conceitos preliminares como vetor, o espaço  $\mathbb{R}^n$ , as funções de varias variáveis reais e as derivadas parciais. Em seguida demonstramos as principais propriedades do gradiente, culminando com a propriedade de tangência que nos dá condições para justificar o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Finalizando, buscamos apresentar aplicações do gradiente em problemas de otimização.

**Palavras-chave:** Vetor Gradiente, derivadas direcionais, Multiplicadores de Lagrange.

## ABSTRACT

SCHNEIDER, Kelli. Study of the Gradient Vector. 55 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

This work deals with the gradient vector, highlighting its main properties and applications. Therefore, we present some preliminary concepts initially as a vector space  $R^n$ , the functions of several real variables and partial derivatives. Then we show the main properties of the gradient, culminating with the property that gives us tangency conditions to justify the method of Lagrange multipliers. Finally, we seek to present applications of gradient in optimization problems.

**Keywords:** Vetor gradient, directional derivatives, Lagrange multipliers.



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – BASE ORTONORMAL .....	10
FIGURA 2 – BASE CANÔNICA .....	11
FIGURA 3 – DECOMPOSIÇÃO NO PLANO EM $R^2$ .....	11
FIGURA 4 – DECOMPOSIÇÃO NO ESPAÇO EM $R^3$ .....	12
FIGURA 5 – DERIVADA PARCIAL EM RELAÇÃO A $X$ .....	15
FIGURA 6 – DERIVADA PARCIAL EM RELAÇÃO A $Y$ .....	16
FIGURA 7 – VETOR $U$ .....	26
FIGURA 8 – A DERIVADA DIRECIONAL .....	27
FIGURA 9 – CURVAS DE NÍVEL DE $F(X, Y) = \frac{1}{16}X^2 + \frac{1}{9}Y^2$ .....	31
FIGURA 10 – ÂNGULOS DIRETORES .....	31
FIGURA 11 – A DERIVADA $R'$ DE UMA FUNÇÃO VETORIAL $R$ .....	36
FIGURA 12 – O VETOR NORMAL E AS RETAS TANGENTES .....	38
FIGURA 13 – PLANO TANGENTE A SUPERFÍCIE $S$ EM $P_0$ , E O VETOR GRADIENTE .....	39
FIGURA 14 – VALORES EXTREMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS .....	40
FIGURA 15 – PONTO CRÍTICO .....	41
FIGURA 16 – MULTIPLICADORES DE LAGRANGE .....	43
FIGURA 17 – PROBLEMA 3 .....	47

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>9</b>
2.1	VETOR	9
2.2	VETORES NO $\mathbb{R}^2$	9
2.3	VETORES NO $\mathbb{R}^3$	12
2.4	FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS	13
2.5	ANÁLISE GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO REAL DE $N$ VARIÁVEIS	14
2.6	DERIVADAS PARCIAIS	15
2.6.1	Derivadas parciais de uma função de duas variáveis	15
2.7	DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR	17
2.8	FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS	19
<b>3</b>	<b>OBJETO DE ESTUDO</b>	<b>22</b>
3.1	A REGRA DA CADEIA	22
3.2	DERIVADAS DIRECIONAIS E O VETOR GRADIENTE	26
3.2.1	Derivadas Direcionais e Gradientes	26
3.3	O GRADIENTE DE $F$ E A TAXA DE VARIAÇÃO MÁXIMA DE $F$	30
3.4	O VETOR GRADIENTE COMO VETOR NORMAL AO PLANO TANGENTE	35
3.5	O GRADIENTE E A OTIMIZAÇÃO	40
3.5.1	Valores Extremos de Funções de Duas Variáveis	40
3.5.2	Os Multiplicadores de Lagrange	42
3.5.3	O Método dos Multiplicadores de Lagrange	43
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>54</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>55</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Desde o princípio, a humanidade procura formas instintivas para obter o melhor resultado possível em qualquer de suas atividades cotidianas, como por exemplo, escolher entre varias possibilidades um trajeto mais rápido ou mais curto entre a casa e o trabalho. Para problemas mais complexos, a intuição foi deixada ao largo para privilegiar o uso de artifícios técnicos desenvolvidos para otimizar essas atividades.

Os procedimentos matemáticos para encontrar o mínimo ou o máximo de funções começaram a ser desenvolvidos em meados do século XIX pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), mas a primeira técnica de otimização remonta ao alemão Johann Freidrich Gauss (1777 – 1857) e é conhecida como *Steepest Descend*, baseada no gradiente das funções.

Nesse contexto, e o que foi exposto nas aulas de topologia em  $\mathbb{R}^n$ , surgiu o interesse de aprofundar mais o conhecimento sobre o vetor gradiente.

Assim sendo, o presente trabalho busca evidenciar as principais propriedades do vetor gradiente  $\nabla f$ , de forma didática e com interpretação geométrica apontando as informações vitais que o gradiente nos fornece sobre a função  $f$  como: o valor das derivadas parciais, a equação do plano tangente e os pontos extremos de  $f$ . Mais ainda, buscamos evidenciar a aplicação das propriedades do vetor gradiente em problemas de otimização, evidenciando a possibilidade da aprendizagem teórica significativa: que faz uso da teoria na resolução de situações do nosso cotidiano.

## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo, será definido o que é um vetor, e sua decomposição no  $\mathbb{R}^2$  e no  $\mathbb{R}^3$ . Será feito também o estudo de funções de várias variáveis, e a representação gráfica de algumas funções, para chegarmos às derivadas parciais.

### 2.1 VETOR

Seja  $AB$  um segmento orientado. O conjunto de todos os segmentos orientados  $XY$  com o mesmo sentido, a mesma direção e o mesmo comprimento, ou seja, equipolentes a  $(XY-AB)$  é dito vetor. Se indicarmos com  $\vec{v}$  este conjunto, poderemos escrever:

$$\vec{v} = \{XY/XY-AB\}$$

dado  $XY$  um segmento qualquer do conjunto.

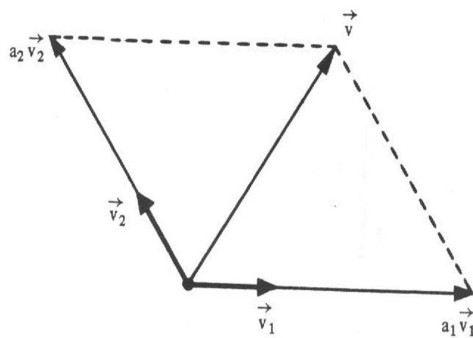
Assim, o segmento  $AB$  determina o vetor  $\vec{AB}$  ou  $B-A$  ou ainda  $\vec{v}$ . De fato, o mesmo vetor  $\vec{AB}$  é determinado por quantidades infinitas de segmentos orientados, chamados representantes desse vetor, os quais são todos equipolentes entre si. Logo, um segmento determina um conjunto que é o vetor, e qualquer um destes representantes determina o mesmo vetor. Por fim, as características de um vetor  $\vec{v}$  são as mesmas de qualquer um de seus representantes, isto é, o módulo, a direção e o sentido.

### 2.2 VETORES NO $\mathbb{R}^2$

Dados dois vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , não colineares, isto é, que não possuem a mesma direção, qualquer vetor  $\vec{v}$  coplanar com  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , em outras palavras, pertencentes ao mesmo plano  $\pi$ , pode ser decomposto segundo as direções de  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ . Então temos que determinar dois vetores cujas direções sejam as de  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  e cuja soma seja  $\vec{v}$ . Portanto, iremos determinar dois números reais  $a_1$  e  $a_2$  tais que:

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$$

Utilizando desta representação do vetor  $\vec{v}$ , podemos afirmar que  $\vec{v}$  é combinação linear de  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , e o conjunto de vetores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  não colineares formam uma base no plano. Logo os números  $a_1$  e  $a_2$  são chamados de coordenadas de  $\vec{v}$  em relação a base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ . Assim, o vetor  $a_1 \vec{v}_1$  é chamado de projeção de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{v}_1$  segundo a direção de  $\vec{v}_2$ , e o vetor  $a_2 \vec{v}_2$  é a projeção de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{v}_2$  segundo a direção de  $\vec{v}_1$ , conforme mostra a figura 1.



**Figura 1: base ortonormal**

**Fonte: (WINTERLE, 2004)**

As bases mais utilizadas são as bases ortonormais, pois facilitam a decomposição.

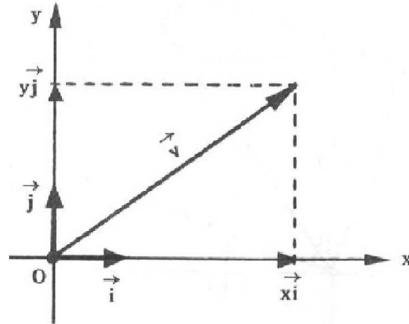
Dado uma base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , esta é dita ortonormal se os seus vetores forem ortogonais e unitários, ou seja,

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \quad \text{e} \quad |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$$

Existem inúmeras bases ortonormais no plano  $xoy$ , mas uma delas é extremamente importante, a base canônica.

Esta base é formada pelos vetores representados por segmentos orientados com origem em  $(0,0)$  e extremidade nos pontos  $(1,0)$  e  $(0,1)$ . Estes vetores são representados por  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  e constituem a base  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ . Para darmos continuidade, ao mencionarmos base iremos nos referir somente à base canônica. Então, dado um vetor  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , onde  $x$  e  $y$  são as componentes de  $\vec{v}$  em relação à base  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ , o vetor  $x\vec{i}$  será a projeção ortogonal de  $\vec{v}$  sobre

$\vec{i}$ , isto é, sobre o eixo dos  $x$ , e  $y\vec{j}$  como projeção ortogonal de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{j}$ , isto é, sobre o eixo dos  $y$  conforme mostra a figura 2.



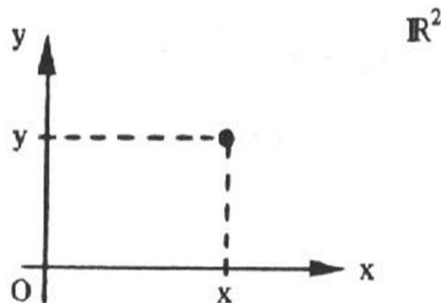
**Figura 2: Base canônica**

Fonte: Winterle (2004)

Assim, estabelecida a base  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ , fica determinada uma correspondência biunívoca entre os vetores do plano e os pares ordenados  $(x, y)$  de números reais. Portanto, a cada vetor do plano pode-se associar um par  $(x, y)$  de números reais que são suas componentes na base dada. Assim, denotamos:  $\vec{v} = (x, y)$ , que chamamos de expressão analítica de  $\vec{v}$ .

A escolha da base  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  deu-se pela simplificação, pois quando nos referimos a um ponto  $P(x, y)$ , podemos identificá-lo como o vetor  $\vec{v} = \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , sendo  $O$  a origem do sistema.

Portanto, o plano bidimensional pode ser definido como um conjunto de pontos ou um conjunto de vetores,  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ , como podemos ver na figura 3.



**Figura 3: Decomposição no plano em  $\mathbb{R}^2$**

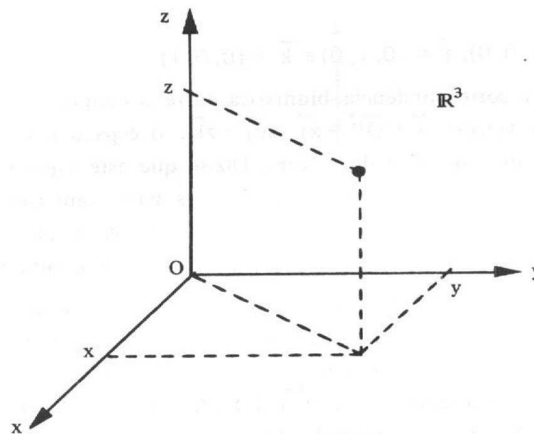
Fonte: Winterle (2004)

### 2.3 VETORES NO $\mathbb{R}^3$

O estudo de vetores feito até aqui, no plano, pode ser realizado no espaço tridimensional, de forma análoga, considerando as adequações necessárias.

Ora, semelhante ao ocorrido em  $\mathbb{R}^2$ , temos uma correspondência biunívoca entre o conjunto de pontos  $P(x, y, z)$  do espaço e o conjunto de vetores  $\vec{v} = \vec{OP} = \vec{x}i + \vec{y}j + \vec{z}k$ . Logo, o espaço pode ser determinado como um conjunto de pontos ou um conjunto de vetores. Então podemos dizer que este espaço tem três dimensões ou que ele é tridimensional, porque qualquer uma de suas bases tem três vetores, e o número de componentes de um vetor é três, como mostra a figura 4.

Da mesma forma, o plano tem dimensão dois ou é bidimensional. Portanto a reta tem uma dimensão, ou seja, ela é unidimensional.



**Figura 4: Decomposição no espaço em  $\mathbb{R}^3$**

**Fonte: Winterle (2004)**

Generalizando, podemos definir o espaço n-dimensional:  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$  e as operações básicas sobre vetores  $u, v \in \mathbb{R}^n$ :

Dados  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  temos:

1. A soma:  $u+v=(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
2. O produto por escalar:  $ku=(kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$
3. O produto escalar ou produto interno:  $\langle u, v \rangle=(x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n)$
4. A norma:  $\|u\|=\sqrt{\langle u, u \rangle}=\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

**Teorema 2.1** Se  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , e se  $\theta$  é o ângulo dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , então:

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta$$

## 2.4 FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Muitas funções dependem de mais de uma variável independente. Tais funções ocorrem em situações práticas, como a área aproximada da superfície do corpo de uma pessoa depende do seu peso e da sua altura, o volume de um cilindro circular reto depende de seu raio e altura, o custo de um determinado produto pode depender do custo do trabalho, preço de materiais e despesas gerais.

Assim as funções reais de várias variáveis reais independentes são definidas basicamente da mesma forma que as de uma variável. Os domínios são conjuntos de  $n$ -uplas ordenados de números reais (triplos, quadruplas,  $n$ -uplas), e as imagens são conjuntos de números reais.

**Definição 2.1** Suponha que  $P \subset \mathbb{R}^n$  seja um conjunto de  $n$ -uplos ordenados de números reais,  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Uma função real  $f$  em  $P$  é uma regra que associa um único número real

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a cada elemento em  $P$ . O conjunto  $P$  é o domínio de  $f$ , e o conjunto de valores  $w$  assumidos por  $f$  é a sua imagem. O símbolo  $w$  é a variável dependente de  $f$ , que, por sua vez, é considerada uma função de  $n$  variáveis independentes  $x_1, \dots, x_n$ . Também chamamos os  $x_j$  de variáveis de entrada da função, e  $w$  é a variável de saída da função.

Como mencionamos anteriormente, dessa definição temos que o domínio de uma função de  $n$  variáveis é um conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^n$  e a imagem é um conjunto de pontos em  $\mathbb{R}$ . Quando  $n = 1$ , temos uma função de uma variável; assim, o domínio é um conjunto de números reais, e a imagem também é um conjunto de números reais. Se  $n = 2$ , temos uma função de duas variáveis e o domínio é um conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^2$  ou, equivalentemente, de pares ordenados de números reais  $(x, y)$ . Se  $f$  for uma função de  $n$  variáveis, então de acordo com a definição 2.1,  $f$  será um conjunto de pares ordenados de forma  $(P, w)$ , onde  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um ponto em  $\mathbb{R}^n$  e  $w$ , um número real. O valor particular de  $w$  que corresponde a um ponto de  $P$  é denotado pelo símbolo  $f(P)$  ou  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Especificamente, se  $n = 2$  e  $P = (x, y)$ , podemos representar o valor funcional por  $f(P)$  ou  $f(x, y)$ . Analogamente, se  $n = 3$  e  $P = (x, y, z)$ , denotamos o valor



funcional por  $f(P)$  ou  $f(x, y, z)$ . Note que se  $n = 1$ ,  $P = x$ ; logo se  $f$  for uma função de uma variável,  $f(P) = f(x)$ . Essa notação é compatível com a notação de funções de uma variável. Portanto, uma função pode ser definida pela equação

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

## 2.5 ANÁLISE GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO REAL DE $N$ VARIÁVEIS

Para visualizarmos graficamente os valores de uma função  $f(x, y)$  existem duas maneiras-padrão, uma é desenhar e identificar curvas no domínio nas quais  $f$  tem valor constante, e a outra, é esboçar a superfície  $z = f(x, y)$  no espaço.

**Definição 2.2** *Seja  $f : C \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de duas variáveis. Então o gráfico de  $f$  é o conjunto*

$$\{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$$

Assim, o conjunto de pontos no plano onde uma função  $f(x, y) = c$ , onde  $c$  é constante, é denominado curva de nível de  $f$ , e o conjunto de todos os pontos  $(x, y, f(x, y))$  no espaço para  $(x, y)$  no domínio de  $f$ , é chamado gráfico de  $f$ . O gráfico de  $f$  é conhecido como superfície da equação  $z = f(x, y)$ . Muitas vezes, a representação geométrica do gráfico de uma função de duas variáveis é bem trabalhosa e existem alguns softwares que auxiliam na visualização destas funções, um deles é o software Maple.

Para funções de três variáveis temos as superfícies de nível, onde,  $f(x, y, z) = c$  prefazem uma superfície no domínio da função.

**Definição 2.3** *Se  $f$  é uma função real de três variáveis com domínio em  $X$ , então o gráfico de  $f$  é o conjunto*

$$Gf = \{(x, y, z, f(x, y, z))\} \subset \mathbb{R}^4$$

Como os gráficos de funções de três variáveis consistem em pontos  $(x, y, z, f(x, y, z))$  em um espaço quadridimensional, não podemos esbozá-los, apenas podemos analisar como a função se comporta analisando suas superfícies de nível tridimensional.

Em funções de  $n$  variáveis, fica impossível desenhar os “espaços de nível”, mas segue a definição:

**Definição 2.4** Se  $f$  é uma função de várias variáveis com domínio  $X$ , então o gráfico de  $f$  é o conjunto

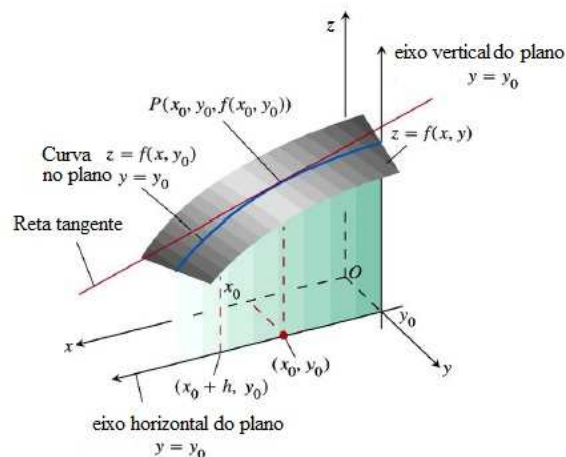
$$G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in X\}.$$

## 2.6 DERIVADAS PARCIAIS

A derivação de uma função de  $n$  variáveis a valores reais reduz-se ao caso unidimensional. Quando fixamos todas as variáveis independentes de uma função exceto uma, e derivamos em relação a essa variável, obtemos uma **derivada parcial**.

### 2.6.1 Derivadas parciais de uma função de duas variáveis

Se  $(x_0, y_0)$  for um ponto no domínio de uma função  $f(x, y)$ , o plano vertical  $y = y_0$  cortará a superfície  $z = f(x, y)$  na curva  $z = f(x, y_0)$ . Como mostra a figura 5.



**Figura 5: Derivada parcial em relação a  $x$**

**Fonte: Thomas (2009)**

Essa curva é o gráfico da função  $z = f(x, y_0)$  no plano  $y = y_0$ . A coordenada horizontal nesse plano é  $x$  e a coordenada vertical é  $z$ . O valor de  $y$  se mantém constante em  $y_0$ ; portanto,  $y$  não é variável. Definimos a derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  no ponto  $(x_0, y_0)$  como a derivada de  $f(x, y_0)$  em relação a  $x$  no ponto  $(x = x_0)$ .

**Definição 2.5** *Derivada parcial em relação a x*

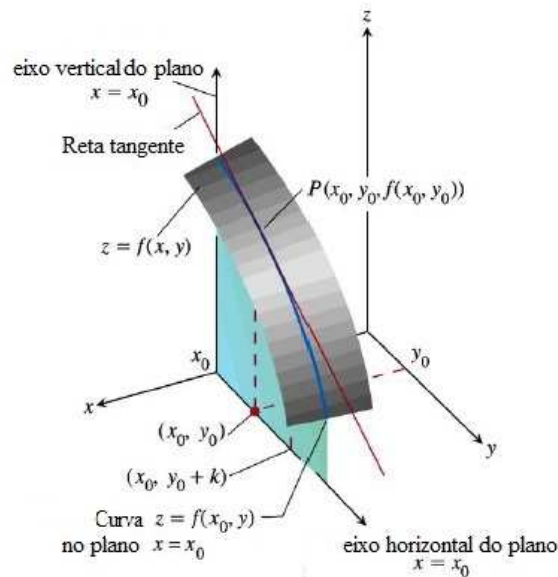
A derivada parcial de  $f(x, y)$  em relação a  $x$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

O coeficiente angular da curva  $z = f(x_0, y_0)$  no ponto  $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  no plano  $y = y_0$  é o valor da derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  em  $(x_0, y_0)$ . A reta tangente á curva em  $P$  é a reta do plano  $y = y_0$  que passam por  $P$  com esse coeficiente angular. A derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}$  em  $(x_0, y_0)$  fornece a taxa de variação de  $f$  em relação a  $x$  quando  $y$  é mantido fixo no valor  $y_0$ . Essa é a taxa de variação de  $f$  na direção de  $i$  em  $(x_0, y_0)$ .

A definição da derivada parcial de  $f(x_0, y_0)$  em relação a  $y$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é similar a definição da derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$ . Mantemos  $x$  fixo no valor  $x_0$  e tomamos a derivada comum de  $f(x_0, y)$  em relação a  $y$ , em  $y_0$ .



**Figura 6:** Derivada parcial em relação a  $y$

Fonte: Thomas (2009)

**Definição 2.6** *Derivada parcial em relação a y*

A derivada parcial de  $f(x, y)$  em relação a  $y$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

O coeficiente angular da curva  $z = f(x_0, y)$  no ponto  $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  no plano vertical  $x = x_0$  é a derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$  em  $(x_0, y_0)$ . A reta tangente á curva  $P$  é a reta no plano  $x = x_0$  que passa por  $P$  com esse coeficiente angular. A derivada parcial fornece a taxa de variação de  $f$  em relação a  $y$  em  $(x_0, y_0)$  quando  $x$  é mantido fixo em  $x_0$ . Essa é a taxa de variação de  $f$  na direção de  $\vec{j}$  em  $(x_0, y_0)$ .

Portanto, as definições de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  fornecem duas maneiras diferentes de derivar  $f$  em um ponto; em relação a  $x$ , de maneira usual tratando  $y$  como uma constante e, em relação a  $y$ , de maneira usual tratando  $x$  como uma constante. Vamos estender agora o conceito de derivada parcial para funções de  $n$  variáveis.

**Definição 2.7** *Seja  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  um ponto em  $\mathbb{R}^n$  e seja  $f$  uma função de  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Então, a derivada parcial de  $f$  em relação a  $x_k$  é a função denotada por  $D_k f$ , tal que seu valor funcional em qualquer ponto  $P$  do domínio de  $f$  seja dado por*

$$D_k f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+j}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_k}$$

se esse limite existir.

Em particular, se  $f$  for uma função de três variáveis  $x, y, z$ , então as derivadas parciais de  $f$  serão dadas por

$$D_1 f(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$D_2 f(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$D_3 f(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

se esses limites existirem.

## 2.7 DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

Se  $f$  é uma função de duas variáveis  $f_x$  e  $f_y$ , e se suas derivadas parciais existirem, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais  $(f_x)_x$ ,  $(f_x)_y$ ,  $(f_y)_x$  e  $(f_y)_y$ , chamadas **derivadas parciais de segunda ordem** de  $f$ . Se  $z = f(x, y)$ , usamos a seguinte notação:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

**Observação 2.1** - As derivadas parciais de segunda ordem  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  são chamadas **derivadas parciais mistas** de  $f$ .

**Teorema 2.2 (Teorema de Clairaut ou Teorema de Schwarz.)** Se  $f(x, y)$  e suas derivadas parciais,  $f_x, f_y, f_{xy}$  e  $f_{yx}$  forem definidas por toda uma região aberta contendo um ponto  $(a, b)$  e todas forem contínuas em  $(a, b)$ , então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

**Prova:** Para valores pequenos  $h, h \neq 0$ , considere a diferença

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a+h, b)] - [f(a, b+h) - f(a, b)]$$

Observe que, se fizermos  $g(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$ , então

$$\Delta(h) = g(a+h) - g(a)$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe um número  $c$  entre  $a$  e  $a+h$  tal que

$$g(a+h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b+h) - f_x(c, b)]$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, novamente, dessa vez em  $f_x$ , obtemos um número  $d$  entre  $b$  e  $b+h$  tal que

$$f_x(c, b+h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Combinando essas equações, obtemos

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

Se  $h \rightarrow 0$ , então  $(c, d) \rightarrow (a, b)$ , assim, da continuidade de  $f_{xy}$  em  $(a, b)$  resulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c,d) \rightarrow (a,b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

Analogamente, escrevendo

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a, b+h)] - [f(a+h, b) - f(a, b)]$$

e usando o Teorema do Valor Médio duas vezes, bem como a continuidade de  $f_{yx}$  em  $(a, b)$ , obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

Segue que  $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ .

Apesar de lidarmos na maioria das vezes com derivadas parciais de primeira e segunda ordem, porque elas aparecem com mais frequência em aplicações, não existe limite teórico para o número de vezes que podemos diferenciar uma função desde que as derivadas envolvidas existam. Assim, obtemos derivadas parciais de terceira e quarta ordens que denotamos por símbolos como

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{yyx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = f_{yyxx}$$

e assim por diante. Como acontece com derivadas de segunda ordem, a ordem de diferenciação é irrelevante, desde que as derivadas na ordem em questão sejam contínuas.

## 2.8 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Vamos estender o conceito de **função derivável** de uma variável para **função diferenciável** de  $n$  variáveis.

Temos que o ponto de partida para a diferenciabilidade não é a razão incremental de Fermat, mas a ideia de incremento. Assim, se uma função de uma variável, ou seja,  $y = f(x)$  for diferenciável em  $x = x_0$ , então a variação no valor de  $f$  que resulta da variação de  $x$  de  $x_0$  para  $x_0 + \Delta x$  é dada por uma equação da forma

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

onde  $\varepsilon \rightarrow 0$  quando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**Definição 2.8** (*Diferenciabilidade de uma função*)

A função  $z = f(x, y)$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$  se  $f_x(x_0, y_0)$  e  $f_y(x_0, y_0)$  existem e  $\Delta z$  satisfaz uma equação da forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

com  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$  quando  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ . Dizemos que  $f$  é diferenciável se ela é diferenciável em todos os pontos de seu domínio.

**Teorema 2.3** (*Teorema do incremento para funções de duas variáveis*)

Suponha que as derivadas parciais de primeira ordem de  $f(x, y)$  sejam definidas em uma região aberta  $R$  que contenha o ponto  $(x_0, y_0)$  e que  $f_x$  e  $f_y$  sejam contínuas em  $x_0, y_0$ . Então a variação

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

no valor de  $f$  que resulta do movimento de  $(x_0, y_0)$  para o outro ponto  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  em  $R$  satisfaz uma equação da forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

com  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$  quando  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ .

**Corolário 2.1** - *A continuidade de derivadas parciais implica em diferenciabilidade.*

Se as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  de uma função  $f(x, y)$  são contínuas ao longo de uma região aberta  $R$ , então  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $R$ .

**Observação 2.2** - *Os resultados obtidos no teorema do incremento para funções de duas variáveis, são verdadeiros para funções de mais de duas variáveis independentes.*

**Teorema 2.4** (*Diferenciabilidade implica continuidade*)

Se uma função  $f(x, y)$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$  então ela é contínua em  $(x_0, y_0)$ .

**Demonstração:** se  $z = f(x, y)$  é diferenciável, então a definição de diferenciabilidade assegura que  $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$  se aproxima de 0 quando  $\Delta x$  e  $\Delta y$  se aproxima

de 0. Isso nos diz que uma função de duas variáveis é contínua em todos os pontos onde ela é diferenciável.

Como podemos observar a partir dos teoremas 2.2 e 2.3, uma função  $f(x,y)$  deve ser contínua em um ponto  $(x_0,y_0)$  se  $f_x$  e  $f_y$  forem contínuas em uma região aberta contendo  $(x_0,y_0)$ . Entretanto, lembramos que ainda é possível que uma função de duas variáveis não seja contínua em um ponto no qual sua primeira derivada parcial exista. Apenas uma derivada parcial em um ponto não é suficiente.

**Observação 2.3** *A existência de derivadas parciais não implica continuidade em relação a todas variáveis simultaneamente, mas do mesmo modo com funções de uma única variável, ela implica a continuidade da função em relação a cada variável separadamente.*



### 3 OBJETO DE ESTUDO

Como vimos, as derivadas parciais  $f_1(x,y)$  e  $f_2(x,y)$  medem taxas de variação dos valores funcionais  $f(x,y)$  na direção dos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente. Agora, vamos determinar as derivadas direcionais, que dão as taxas de variação dessas funções em qualquer direção. E assim, iniciamos o objeto de estudo que é o **Vetor Gradiente**, que dá a direção e o sentido em que a função tem a sua maior taxa de variação. Mas antes, vamos relembrar primeiramente o conceito de Regra da cadeia e, assim, definirmos o vetor gradiente e suas aplicações.

#### 3.1 A REGRA DA CADEIA

Segundo a notação de Leibniz, a regra da cadeia para uma função de uma única variável é a seguinte: se  $y$  for uma função de  $u$  e  $\frac{dy}{du}$  existir, e  $u$  for uma função de  $x$  e  $\frac{du}{dx}$  existir, então  $y$  será uma função de  $x$  e  $\frac{dy}{dx}$  existe, sendo dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Vamos considerar a regra da cadeia para uma função de duas variáveis, onde cada uma delas também é função de duas variáveis.

**Teorema 3.1 A Regra da Cadeia** - Se  $u$  for uma função diferenciável de  $x$  e  $y$ , definida por  $u = f(x,y)$ , onde  $x = F(r,s)$ ,  $y = G(r,s)$  e  $\frac{\partial x}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial s}$  todas existirem, então  $u$  será uma função de  $r$  e  $s$  e

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) \end{aligned}$$

**Prova:** Vamos provar a regra da cadeia para  $\frac{\partial u}{\partial r}$ . A demonstração de  $\frac{\partial u}{\partial s}$  é análoga.

Se  $s$  for mantido fixo e  $r$  varia por uma quantidade  $\Delta r$ , então  $x$  variará por quantidade  $\Delta x$  e  $y$  variará por uma quantidade  $\Delta y$ . Assim,

$$\Delta x = F(r + \Delta r, s) - F(r, s) \quad (3.1.1)$$

$$\Delta y = G(r + \Delta r, s) - G(r, s) \quad (3.1.2)$$

Como  $f$  é diferenciável,

$$\Delta f(x, y) = D_1 f(x, y) \Delta x + D_2 f(x, y) \Delta y + a \Delta x + b \Delta y \quad (3.1.3)$$

onde  $a$  e  $b$  tendem a zero quando  $(\Delta x, \Delta y)$  aproxima-se de  $(0, 0)$ . Além disso, vamos exigir que  $a = 0$  e  $b = 0$  quando  $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$ . Faremos essa exigência de tal forma que  $a$  e  $b$ , sendo funções de  $\Delta x$  e  $\Delta y$  serão contínuas em  $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$ .

Se em (3.1.3) substituirmos  $\Delta f(x, y)$  por  $\Delta u$ ,  $D_1 f(x, y)$  por  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $D_2 f(x, y)$  por  $\frac{\partial u}{\partial y}$  e dividirmos ambos os membros por  $\Delta r$  ( $\Delta r \neq 0$ ), obteremos

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta r} + a \frac{\Delta x}{\Delta r} + b \frac{\Delta y}{\Delta r} \quad (3.1.4)$$

Tomando o limite de ambos os membros quando  $\Delta r$  tende a zero, obtemos

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} + \left( \lim_{\Delta r \rightarrow 0} a \right) \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \left( \lim_{\Delta r \rightarrow 0} b \right) \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta r}$$

Como  $u$  é uma função de  $x$  e  $y$  ambas são funções de  $r$  e de  $s$ ,  $u$  será uma função de  $r$  e de  $s$ . Como  $s$  é mantido fixo enquanto  $r$  varia por uma quantidade  $\Delta r$ .

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{u(r + \Delta r, s) - u(r, s)}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.1.5)$$

Também

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{\partial x}{\partial r} \quad e \quad \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} = \frac{\partial y}{\partial r} \quad (3.1.6)$$

Como  $\frac{\partial x}{\partial r}$  e  $\frac{\partial y}{\partial r}$  existem,  $F$  e  $G$  são, cada uma, contínuas em relação à variável  $r$ . Assim, de (3.1.1),

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta x &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} [F(r + \Delta r, s) - F(r, s)] \\ &= F(r, s) - F(r, s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e de (3.1.2),

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} [G(r + \Delta r, s) - G(r, s)] \\ &= G(r, s) - G(r, s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim quando  $\Delta r$  tende a zero, ambos  $\Delta x$  e  $\Delta y$  tendem a zero. E como ambos  $a$  e  $b$  tendem a zero quando  $(\Delta x, \Delta y)$  tendem a  $(0, 0)$  podemos concluir que

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} a = 0 \quad e \quad \lim_{\Delta r \rightarrow 0} b = 0 \quad (3.1.7)$$

Ainda é possível que para certos valores de  $\Delta r$ ,  $\Delta x = 0$  e  $\Delta y = 0$ . Como exigimos em tal caso que  $a = 0$  e  $b = 0$ , os limites em (3.1.7) ainda são zero. Substituindo (3.1.5), (3.1.6) e (3.1.7) em (3.1.4), obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial r} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)$$

como queríamos demonstrar.

**Observação 3.1** - Os símbolos  $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  etc., não devem ser considerados como frações. Os símbolos  $\partial u, \partial x$  etc., não têm significado sozinhos. Para funções de uma variável, a regra da cadeia é facilmente lembrada, se considerarmos uma derivada ordinária como o quociente de duas diferenças; porém não há nenhuma interpretação similar para as derivadas parciais.

**Observação 3.2** - Se  $u = f(x, y)$ ,  $x = F(r, s)$  e  $y = G(r, s)$  então  $u = f(F(r, s), G(r, s))$ . (É incorreto escrever  $u = f(r, s)$  para denotar a função composta.)

Se expressarmos  $f(F(r, s), G(r, s)) = h(r, s)$  então as equações do teorema 2.1 podem ser escritas respectivamente como

$$h_1(r, s) = f_1(x, y)F_1(r, s) + f_2(x, y)G_1(r, s)$$

$$h_2(r, s) = f_1(x, y)F_2(r, s) + f_2(x, y)G_2(r, s)$$

No enunciado do Teorema 3.1, as variáveis independentes são  $r$  e  $s$ , enquanto que  $u$  é a variável dependente. As variáveis  $x$  e  $y$  podem ser chamadas de variáveis intermediárias. Vamos estender a regra da cadeia a  $n$  variáveis intermediárias e  $m$  variáveis independentes.

**Teorema 3.2 A Regra da Cadeia Generalizada** - Suponha que  $u$  seja uma função diferenciável de  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e cada uma dessas variáveis por sua vez seja uma função de  $m$  variáveis  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Suponha ainda que cada uma das derivadas parciais  $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) exista. Então,  $u$  é uma função de  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , e

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y_1} &= \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \right) + \dots + \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \left( \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y_2} &= \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \right) + \dots + \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \left( \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \right) \\ &\vdots \\ \frac{\partial u}{\partial y_m} &= \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial y_m} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial y_m} \right) + \dots + \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \left( \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \right) \end{aligned}$$

A demonstração é uma extensão da prova do teorema 2.1. Observe que na regra da cadeia generalizada há tantos termos no segundo membro de cada equação quantos forem as variáveis intermediárias.

### 3.2 DERIVADAS DIRECIONAIS E O VETOR GRADIENTE

Vendo que as derivadas parciais, desacompanhadas de hipóteses adicionais, apenas fornecem informações sobre a função ao longo de retas paralelas aos eixos, vamos estender a noção de derivadas a outras direções além dessas. Isso nos leva ao importante conceito de derivada direcional, que é o princípio do objetivo a ser apresentado neste trabalho.

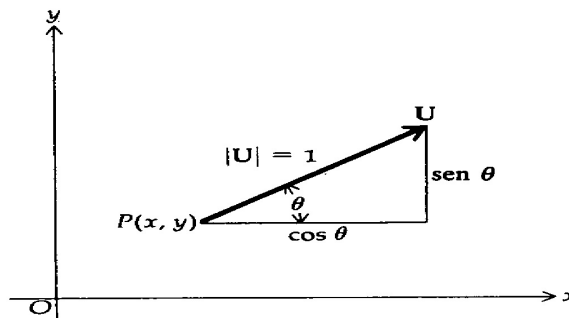
#### 3.2.1 Derivadas Direcionais e Gradientes

Vamos generalizar a definição de uma derivada parcial, a fim de obter a taxa de variação de uma função em relação a qualquer direção e sentido. Isso nos leva ao conceito de **derivada direcional**.

Seja  $f$  uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$  e seja  $P(x, y)$  um ponto do plano  $xy$ . Suponhamos que  $\mathbf{U}$  seja o vetor unitário que faz com a parte positiva do eixo  $x$  um ângulo cuja medida em radianos é  $\theta$ . Então,

$$\mathbf{U} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$$

A figura 7 mostra a representação de  $\mathbf{U}$  com ponto inicial em  $P(x, y)$ .



**Figura 7: Vetor  $U$**

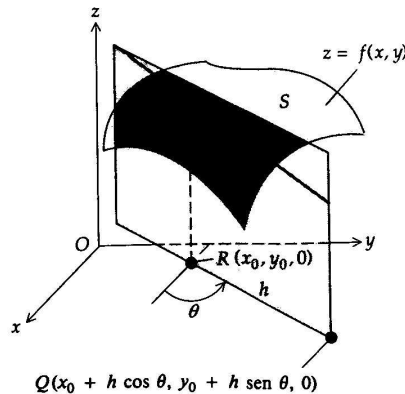
**Fonte: Leithold (1994)**

Considere  $S$  a superfície cuja equação é dada por  $z = f(x, y)$ .

Se  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  é um ponto de superfície  $S$  e, os pontos  $R(x_0, y_0, 0)$  e  $Q(x_0, +h \cos\theta, y_0 + h \sin\theta, 0)$  são pontos no plano  $x, y$ , então o plano que passa por  $R, Q$  e  $P_0$  é paralelo ao eixo  $z$  e faz um ângulo de  $\theta$  rad com a direção positiva do eixo  $x$ . Esse plano intercepta a superfície  $S$

na curva  $C$ . A derivada direcional  $D_u f$ , calculada em  $P_0$ , é a inclinação da reta tangente á curva  $C$ .

A derivada direcional  $D_u f$ , calculada em  $P_0$ , é a inclinação da reta tangente á curva  $C$  em  $P_0$ , no plano de  $R, Q$  e  $P_0$ .



**Figura 8: A derivada direcional**

**Fonte: Leithold (1994)**

**Definição 3.1** *Seja  $f$  uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ . Se  $\mathbf{U}$  for o vetor unitário  $\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$  então a **derivada direcional** de  $f$  na direção de  $\mathbf{U}$ , denotada por  $D_u f$ , será dada por*

$$D_u f(x, y) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - f(x, y)}{h}$$

se o limite existir.

A derivada direcional dá a taxa de variação dos valores funcionais  $f(x, y)$  em relação à direção e sentido do vetor unitário  $\mathbf{U}$ .

Se  $\mathbf{U} = \vec{i}$ , então  $\cos\theta = 1$  e  $\sin\theta = 0$  e, da definição 3.1,

$$D_i f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

que é a derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$ .

Se  $\mathbf{U} = \vec{j}$ , então  $\cos\theta = 0$  e  $\sin\theta = 1$  e,

$$D_j f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - (f(x, y))}{h}$$

que é a derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$ .

Assim sendo,  $f_x$  e  $f_y$  são casos particulares da derivada direcional nas direções dos vetores unitários  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ , respectivamente.

Agora, obteremos uma fórmula que possibilita calcular a derivada direcional de uma maneira mais rápida do que se usar a definição. Seja  $g$  a função de uma única variável  $t$ , com  $x, y$  e  $\theta$  fixos, tal que

$$g(t) = f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \quad (3.2.8)$$

e seja  $\mathbf{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ . Então pela definição de derivada ordinária,

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + (0 + h) \cos \theta, y + (0 + h) \sin \theta) - (f(x + 0 \cos \theta, y + 0 \sin \theta))}{h}$$

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - (f(x, y))}{h}$$

Como o segundo membro acima é  $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ ,

$$g'(0) = D_{\mathbf{u}} f(x, y) \quad (3.2.9)$$

Aplicando a regra da cadeia ao segundo membro de (3.2.8) para encontrar  $g'(t)$ , obtemos;

$$g'(t) = f_1(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \frac{\partial(x + t \cos \theta)}{\partial t} + f_2(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \frac{\partial(y + t \sin \theta)}{\partial t}$$

$$g'(t) = f_1(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \cos \theta + f_2(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \sin \theta$$

Logo,

$$g'(0) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

Dessa equação e de (3.2.9) obtemos o teorema a seguir.

**Teorema 3.3** - Se  $f$  for uma função diferenciável de  $x$  e  $y$  e  $U = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  então  
 $D_u f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$

A derivada direcional pode ser escrita como um produto escalar de dois vetores. Uma vez que

$$f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta = (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \cdot [f_x(x, y) \vec{i} + f_y(x, y) \vec{j}]$$

segue do Teorema 3.3 que

$$D_u f(x, y) = (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \cdot [f_x(x, y) \vec{i} + f_y(x, y) \vec{j}] \quad (3.2.10)$$

O segundo vetor do segundo membro de (3.2.10) é chamado de *gradiente* da função  $f$ . O símbolo usado para o gradiente de  $f$  é  $\nabla f$ , onde  $\nabla$  é delta maiúsculo invertido e lê-se “del” segundo Leithold (1994), ou “nabla” segundo Thomas (2009). Algumas vezes a abreviação *grad*  $f$  é usada.

**Definição 3.2** Se  $f$  for uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$ , e  $f_x$  e  $f_y$  existirem, então o **gradiente** de  $f$ , denotado por  $\nabla f$ , será definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y) \vec{i} + f_y(x, y) \vec{j}$$

Da definição 3.2, a equação (3.2.10) pode ser escrita como

$$D_u f(x, y) = U \cdot \nabla f(x, y) \quad (3.2.11)$$

Assim sendo, qualquer derivada direcional de uma função diferenciável pode ser obtida usando o produto escalar entre o gradiente e o vetor unitário na direção e sentidos desejados. Esta é somente uma das propriedades do gradiente.

Considerando os conceitos já enunciados e demonstrados podemos então analisar as principais propriedades do nosso objeto de estudo, o gradiente.

Nas seções seguintes apresentaremos as demonstrações e aplicações destas propriedades do gradiente.



### 3.3 O GRADIENTE DE $F$ E A TAXA DE VARIAÇÃO MÁXIMA DE $F$

Seja  $f(x,y)$  uma função diferenciável e  $U$  um vetor unitário. Se  $\alpha$  for a medida em radianos do ângulo entre os dois vetores  $U$  e  $\nabla f$ , a definição do produto escalar nos dá:

$$D_u f(x,y) = U \cdot \nabla f(x,y) = \|U\| \|\nabla f(x,y)\| \cos\alpha$$

Dessa equação, segue que

$$D_u f(x,y) = \|U\| \|\nabla f(x,y)\| \cos\alpha \quad (3.3.12)$$

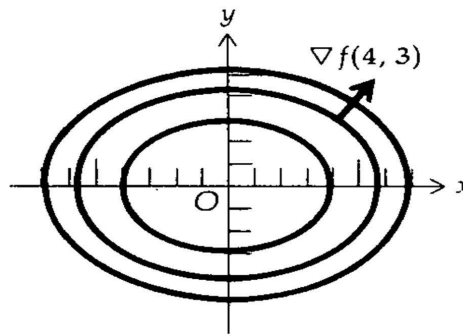
Vemos de (3.3.12) que  $D_u f$  será máxima quando  $\cos\alpha = 1$ , isto é, quando  $U$  estiver na direção e sentido de  $\nabla f$ ; e nesse caso  $D_u f = \|\nabla f\|$ .

Obtemos assim uma das principais propriedades do gradiente:

**Proposição 3.1** *Se  $f(x,y)$  é uma função diferenciável num ponto  $P_0(x_0,y_0)$  e considerarmos  $U$  um vetor unitário na mesma direção do gradiente de  $f$  então,  $D_u f$  é máxima e ainda,  $D_u f = \|\nabla f\|$ . Resumidamente, o gradiente está na direção e sentido em que a função tem a taxa máxima de variação.*

Em particular, num mapa topográfico bidimensional de um terreno onde  $z$  unidades é a elevação num ponto  $(x,y)$  e  $z = f(x,y)$ , a direção e sentido em que a taxa de variação é máxima serão dados por  $\nabla f(x,y)$ ; isto é, o vetor  $\nabla f(x,y)$  aponta para cima na direção e sentido mais íngremes. Isso explica a denominação *gradiente* (a inclinação é mais acentuada na direção do gradiente).

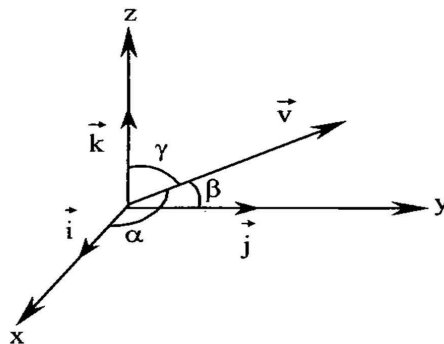
Na figura 9 há um mapa topográfico mostrando as curvas de nível da função  $f(x,y) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ , em 1, 2 e 3. As curvas de nível são elipses. A figura também mostra a representação de  $\nabla f(4,3)$ , tendo  $(4,3)$  como ponto inicial.



**Figura 9:** Curvas de nível de  $f(x, y) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{9}y^2$

Fonte: Leithold (1994)

Vamos estender para uma função de três variáveis a definição de derivada direcional. No espaço tridimensional a direção e o sentido de um vetor são determinados pelos seus co-senos diretores. Dado um vetor  $\vec{v} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , seus ângulos diretores são  $\alpha, \beta, \gamma$ , ilustrados na figura.



**Figura 10:** Ângulos Diretores

Fonte: Winterle (2000)

Para o cálculo dos cosseno-diretores utilizaremos o Teorema 2.1, assim,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{|\vec{v}| |\vec{i}|} = \frac{(x, y, z)(1, 0, 0)}{|\vec{v}| (1)} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{|\vec{v}| |\vec{j}|} = \frac{(x, y, z)(0, 1, 0)}{|\vec{v}| (1)} = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{|\vec{v}| |\vec{k}|} = \frac{(x, y, z) \cdot (0, 0, 1)}{|\vec{v}| (1)} = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

Sendo  $u = (x, y, z)$  unitário teremos,  $\|u\| = 1$  e conseqüentemente,  $\cos \alpha = x$ ,  $\cos \beta = y$  e  $\cos \gamma = z$ .

**Teorema 3.4** *Suponha que  $f$  seja uma fração de três variáveis  $x, y$  e  $z$ . Se  $U$  for o vetor unitário  $\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ , então a **derivada direcional** de  $f$  na direção de  $U$ , denotada por  $D_u f$ , será dada por*

$$D_u f(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \alpha, y + h \cos \beta, z + h \cos \gamma) - f(x, y, z)}{h}$$

se esse limite existir.

A derivada direcional de uma função de três variáveis dá a taxa de variação dos valores funcionais  $f(x, y, z)$  em relação a distância no espaço tridimensional, medida na direção e sentido do vetor unitário  $U$ .

O teorema a seguir, que fornece um método de cálculo da derivada direcional de uma função de três variáveis é demonstrado de forma análoga ao Teorema 3.3.

**Teorema 3.5** *Se  $f$  for uma função diferenciável de  $x, y$  e  $z$  e*

$$U = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

então

$$D_u f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \cos \alpha + f_y(x, y, z) \cos \beta + f_z(x, y, z) \cos \gamma$$

**Definição 3.3** *Se  $f$  for uma função de três variáveis  $x, y$  e  $z$  as derivadas parciais  $f_x, f_y$  e  $f_z$  existirem, então o **gradiente** de  $f$ , denotado por  $\nabla f$ , será definido por*

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \vec{i} + f_y(x, y, z) \vec{j} + f_z(x, y, z) \vec{k}$$

Da mesma forma que para funções de duas variáveis, segue do Teorema 3.4 e da definição 3.4 que se  $U = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ , então

$$D_u f(x, y, z) = U \cdot \nabla f(x, y, z)$$

**Aplicação 3.1** A temperatura em cada ponto  $(x, y)$  de uma placa retângular situada no plano  $xy$ , é determinada por:

$$T(x, y) = x^2 + y^2$$

a) Ache a taxa de variação da temperatura no ponto  $(3, 4)$  na direção e sentido que fazem um ângulo de  $\frac{1}{3}\pi$  rad com o eixo  $x$  positivo.

b) Ache a direção e sentido em que a taxa de variação de temperatura no ponto  $(-3, 1)$  é máxima.

**Solução:**

a) Queremos encontrar  $D_u T(x, y)$  onde

$$\begin{aligned} U &= \cos\frac{1}{3}\pi \vec{i} + \sin\frac{1}{3}\pi \vec{j} \\ &= \frac{1}{2} \vec{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{j} \end{aligned}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \nabla T(x, y) &= T_x(x, y) \vec{i} + T_y(x, y) \vec{j} \\ \nabla T(x, y) &= 2x \vec{i} + 2y \vec{j} \end{aligned}$$

Logo,

$$D_u T(x, y) = U \cdot \nabla T(x, y)$$

$$D_u T(x, y) = \left( \frac{1}{2} \vec{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{j} \right) \cdot (2x \vec{i} + 2y \vec{j})$$

$$D_u T(x, y) = x + \sqrt{3}y$$

Assim,

$$D_u T(3, 4) = 3 + 4\sqrt{3} \approx 9,93$$

Então, em  $(3, 4)$  a temperatura está aumentando à taxa de aproximadamente 9,93 unidades por unidade de variação medido na direção e sentido de  $U$ .

b)  $D_u T(-3, 1)$  será um máximo quando  $U$  estiver na direção e sentido de  $\nabla T(-3, 1)$ . Como  $\nabla T(-3, 1) = -6 \vec{i} + 2 \vec{j}$ , a medida em radianos do ângulo que dá a direção e o sentido de  $\nabla T(-3, 1)$  é  $\theta$ , onde  $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{3}$ . Assim,  $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3}$ . Logo, a taxa de variação da temperatura no ponto  $(-3, 1)$  é máxima quando tomada na direção e sentido que fazem um ângulo de  $\pi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{3} \text{ rad}$  com o eixo  $x$  positivo.

Para o caso tridimensional também vale a propriedade:

**Proposição 3.2** *Se  $f(x, y, z)$  é uma função diferenciável num ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e considerarmos  $U$  um vetor unitário na mesma direção do gradiente de  $f$  então,  $D_u f$  é máxima e ainda,  $D_u f = \|\nabla f\|$ . Em outras palavras, o gradiente está na direção e sentido em que a função tem a taxa máxima de variação.*

**Aplicação 3.2** - *Suponha que a temperatura em um ponto  $(x, y, z)$  do espaço seja dada por  $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ , onde  $T$  é medida em graus celsius e  $x, y, z$  em metros. Em que direção no ponto  $(1, 1, -2)$  a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual a taxa máxima de aumento?*

**Solução:** O gradiente de  $T$  é

$$\begin{aligned} \nabla T &= \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \\ &= -\frac{160x}{1+x^2+2y^2+3z^2)^2} \vec{i} - \frac{320y}{1+x^2+2y^2+3z^2)^2} \vec{j} - \frac{480z}{1+x^2+2y^2+3z^2)^2} \vec{k} \\ &= \frac{160}{1+x^2+2y^2+3z^2)^2} (-x \vec{i} - 2y \vec{j} - 3z \vec{k}) \end{aligned}$$

No ponto  $(1, 1, -2)$ , o vetor gradiente é

$$\nabla T(1, 1, -2) = \frac{160}{256} (-\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}) = \frac{5}{8} (-\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k})$$

Pela proposição 3.2 a temperatura aumenta mais rapidamente na direção e sentido do gradiente  $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8} (-\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k})$  ou ainda de seu versor  $(-\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k})/\sqrt{41}$ .

A taxa máxima de aumento é o módulo do vetor do gradiente

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \frac{5}{8} \left| -\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k} \right| = \frac{5\sqrt{41}}{8}$$

Portanto, a taxa máxima de aumento da temperatura é  $\frac{5\sqrt{41}}{8} \approx 4$  graus  $C^\circ$  por metro.

### 3.4 O VETOR GRADIENTE COMO VETOR NORMAL AO PLANO TANGENTE

Mostraremos nesta seção que o vetor gradiente é o vetor normal ao plano tangente de  $f$  num ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$ . Para tanto, necessitamos do conceito de derivada de função vetorial.

**Definição 3.4** *Seja  $S$  a superfície dada pela equação  $F(x, y, z) = 0$  e suponha  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  um ponto de  $S$ . Então,  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Suponha ainda que  $C$  seja uma curva em  $S$  dadas pelas equações paramétricas:*

$$C: x = f(t), y = g(t), z = h(t)$$

onde o valor de  $t$  no ponto  $P_0$  é  $t_0$ . A curva  $C$  pode ser escrita como:

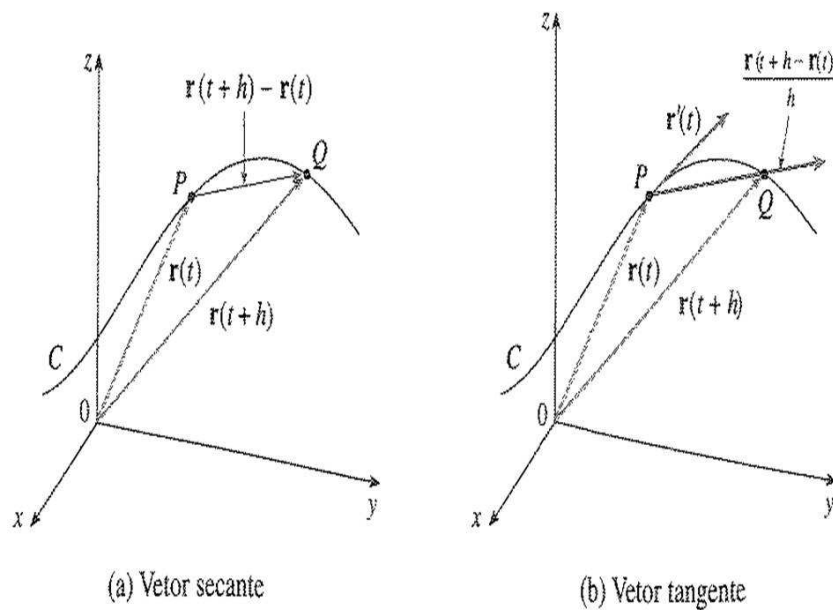
$$r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

A **derivada  $r'$**  de uma função vetorial  $r$  é definida do mesmo modo como foi feito para as funções reais:

$$\frac{dr}{dt} = r'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

se o limite existir.

O significado geométrico dessa definição esta representado na figura 11.



**Figura 11: A derivada  $r'$  de uma função vetorial  $r$**

**Fonte: Stewart (2007)**

Se os pontos  $P$  e  $Q$  têm valores de posição  $r(t)$  e  $r(t+h)$ , então  $\overrightarrow{PQ}$  representa o vetor  $r(t+h) - r(t)$ , que pode ser visto como o vetor secante. Se  $h > 0$ , o múltiplo escalar  $(\frac{1}{h})(r(t+h) - r(t))$  tem a mesma direção e sentido que  $r(t+h) - r(t)$ . Quando  $h \rightarrow 0$ , parece que esse vetor se aproxima de um vetor que está sobre a reta tangente. Por essa razão dizemos que o vetor  $r'(t)$  é chamado de **vetor tangente** à curva definida por  $r$  no ponto  $P$ , desde que exista  $r'(t)$  e  $r'(t) \neq 0$ . A reta tangente a  $C$  em  $P$  é definida como a reta que passa por  $P$  e é paralela ao vetor  $r'(t)$ .

O teorema seguinte fornece um método conveniente para calcular a derivada de uma função vetorial  $r$  por diferenciação de cada componente de  $r$ .

**Teorema 3.6** Se  $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t) \vec{i} + g(t) \vec{j} + h(t) \vec{k}$ , onde  $f, g$  e  $h$  são funções diferenciáveis, então

$$r'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t) \vec{i} + g'(t) \vec{j} + h'(t) \vec{k}$$

**Prova:**

$$r'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [r(t + \Delta t) - r(t)]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\langle f(t + \Delta t), g(t + \Delta t), h(t + \Delta t) \rangle - \langle f(t), g(t), h(t) \rangle] \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle \\
&= \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle
\end{aligned}$$

Como queremos demonstrar.

**Proposição 3.3** *Seja  $S$  a superfície dada pela equação  $F(x, y, z) = 0$  e suponha  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  um ponto de  $S$ . Então,  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Suponha ainda que  $r$  seja uma curva em  $S$  dadas pelas equações paramétricas:*

$$r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

onde o valor de  $t$  no ponto  $P_0$  é  $t_0$ .

*O vetor gradiente de  $F$  em  $P_0$  é ortogonal ao vetor tangente à curva  $r$  no ponto  $P_0$ .*

**Prova:** Sendo  $r$  uma curva em  $S$  temos:

$$F(f(t), g(t), h(t)) = 0.$$

Usando a Regra da Cadeia para estudar a derivada parcial com relação a  $t$  no ponto  $P_0$  temos:

$$F_x(P_0)f'(t_0) + F_y(P_0)g'(t_0) + F_z(P_0)h'(t_0) = 0 \quad (3.4.13)$$

Usando que  $\nabla F(P_0) = (F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0))$  e o Teorema 3.5, a equação 3.4.13 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\nabla F(P_0) \cdot D_t r(t_0) = 0.$$

**Conclusões:**

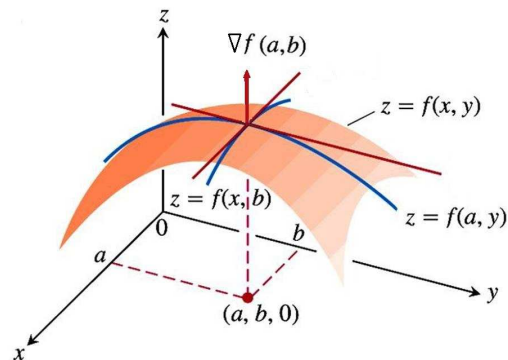
(1) Se uma equação de uma superfície  $S$  é dada por  $z = f(x, y)$  então o plano tangente a  $S$  num ponto  $P_0(a, b, f(a, b))$  tem como vetor normal  $n$  o vetor simultaneamente ortogonal as



retas tangentes as curvas  $C_1(y) = f(a, y)$  e  $C_2(x) = f(x, b)$ . Parametrizando  $C_1$  e  $C_2$  obtemos  $r_1(t)$  e  $r_2(t)$  respectivamente e usando a Proposição 3.3 temos:

$$\nabla F(P_0) \perp D_t r_1(t_0)$$

$$\nabla F(P_0) \perp D_t r_2(t_0)$$



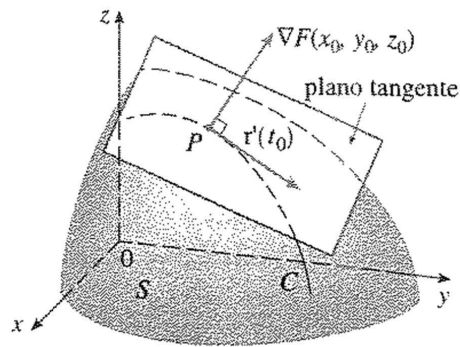
**Figura 12: O vetor normal e as retas tangentes**

**Fonte: Stewart (2007)**

Assim, o plano tangente a  $S$  no ponto  $P_0$  possui como vetor normal  $\nabla F(P_0)$  e sua equação vetorial pode ser dada por:

$$\langle \nabla F(P_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0.$$

(2) Como o vetor tangente  $D_t R(t_0)$  tem a mesma direção que um vetor tangente à curva  $C$  em  $P_0$ , podemos concluir que o gradiente de  $F$  em  $P_0$  é ortogonal ao vetor tangente de qualquer curva  $C$  em  $S$  que passa pelo ponto  $P_0$ , como mostra a figura 13.



**Figura 13: Plano tangente a superfície  $S$  em  $P_0$ , e o vetor gradiente**

**Fonte: Stewart (2007)**

Neste caso, dizemos que o gradiente de  $F$  em  $P_0$  é um **vetor normal** a  $S$  no ponto  $P_0$ .

(3) Para  $f(x, y) = z$  temos  $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$  então,  $F_x = f_x(x_0, y_0)$ ,

$F_y = f_y(x_0, y_0)$ ,  $F_z = -1$ . Logo a equação do plano tangente é dada por:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - 1 \cdot (z - z_0) = 0$$

ou ainda,

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

**Definição 3.5** A *reta normal* a uma superfície  $S$  no ponto  $P_0$  de  $S$  é a reta que passa por  $P_0$  e tem por números direcionais as componentes de qualquer vetor normal a  $S$  em  $P_0$ .

Seja  $F(x, y, z) = 0$  uma equação da superfície  $S$ , as equações simétricas da reta normal a  $S$  em  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  serão:

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

A reta normal em um ponto de uma superfície é perpendicular ao seu plano tangente nesse ponto.

### 3.5 O GRADIENTE E A OTIMIZAÇÃO

No estudo de funções de uma variável real, utilizamos a derivada para determinação de máximos e mínimos. Para as funções de  $n$  variáveis reais, veremos que as derivadas parciais auxiliam na localização dos pontos extremos. Mais precisamente, veremos que o gradiente auxilia na determinação deste pontos e, portanto, o gradiente será uma ferramenta na otimização de funções de  $n$  variáveis.

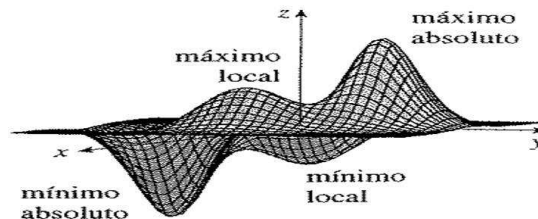
#### 3.5.1 Valores Extremos de Funções de Duas Variáveis

**Definição 3.6** *Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em  $(a,b)$  se  $f(x,y) \leq f(a,b)$  quando  $(x,y)$  está próximo de  $(a,b)$ . O número  $f(a,b)$  é chamado de **valor máximo local**.*

*Se  $f(x,y) \geq f(a,b)$  quando  $(x,y)$  está próximo de  $(a,b)$ , então  $f(a,b)$  é um **valor mínimo local**.*

*Se as inequações da definição valerem para todos os pontos  $(x,y)$  do domínio de  $f$ , então  $f$  tem um **máximo absoluto** (ou **mínimo absoluto**) em  $(a,b)$ .*

Podemos observar esses valores extremos na figura 14.



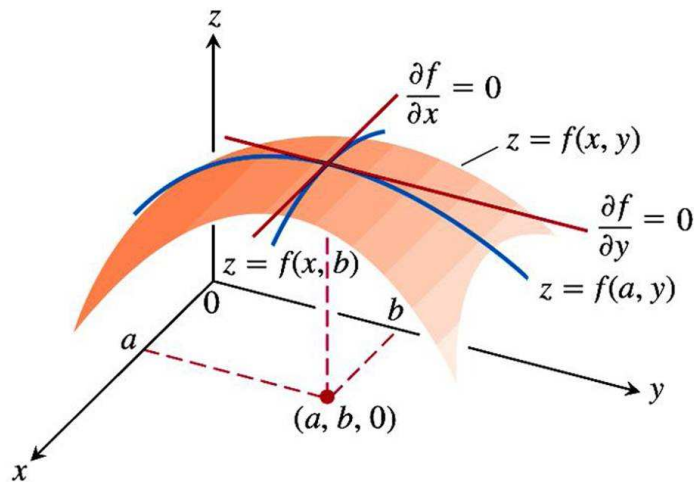
**Figura 14: Valores extremos de funções de duas variáveis**

**Fonte: Leithold (1994)**

**Definição 3.7** *Um ponto  $(x_0, y_0)$  é dito **ponto crítico** de  $f$  se  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$  ou se  $\nabla f(x_0, y_0)$*

não existe.

Como mostra a figura abaixo.



**Figura 15: Ponto crítico**

**Fonte: Thomas (2009)**

A definição 3.7 nos diz que, se  $f$  tem um máximo ou mínimo local em um ponto  $(a, b)$ , então  $(a, b)$  é um ponto crítico de  $f$ . Entretanto, como no cálculo de uma única variável, nem todos pontos críticos correspondem a um máximo ou mínimo local, assim, precisamos ser capazes de determinar se uma função tem um valor de máximo(ou mínimo) em um ponto crítico. O teste abaixo, é análogo ao Teste da Segunda Derivada para as funções de uma única variável.

**Teste da Segunda Derivada:** Suponha que as segundas derivadas parciais de  $f$  sejam contínuas em uma bola aberta de centro  $(a, b)$ , e suponha que  $f_x(a, b) = 0$  e  $f_y(a, b) = 0$ . Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

(a) Se  $D > 0$  e  $f_{xx}(a, b) > 0$  (ou  $f_{yy}(a, b) > 0$ ), então  $f(a, b)$  é um mínimo local.

(b) Se  $D > 0$  e  $f_{xx}(a, b) < 0$  (ou  $f_{yy}(a, b) < 0$ ), então  $f(a, b)$  é um máximo local.

(c) Se  $D < 0$ , então  $f$  tem um ponto de sela em  $(a, b)$ .

(d) Se  $D = 0$  o teste é inconclusivo:  $f$  pode ter um máximo local ou mínimo local em  $(a, b)$ , ou  $(a, b)$  pode ser um ponto de sela de  $f$ .

**Exemplo 3.1** *Suponhamos que uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com  $12m^2$  de papelão. Para determinar o volume máximo de tal caixa utilizamos:*

$$V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \quad A(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

*Na área dos quatro lados  $A$  podemos isolar  $z = (12 - xy)/[2(x + y)]$ , e  $V$  fica*

$$V = xy \cdot \frac{12 - xy}{2(x + y)}$$

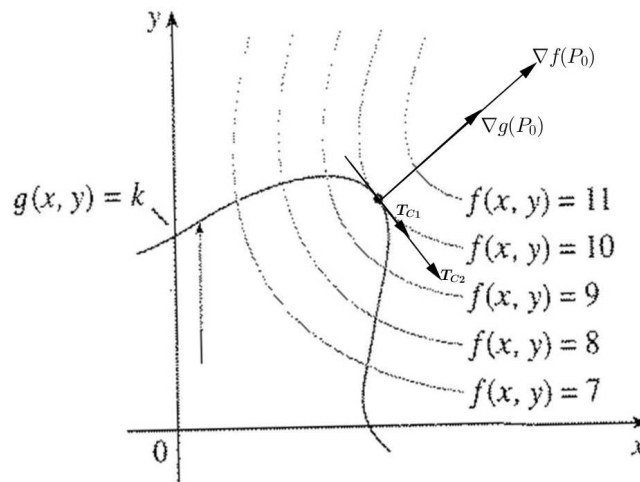
*E usando o Teste da Derivada Segunda obtemos como ponto de máximo  $x = 2, y = 2, z = 1$ . Assim,  $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ , é o volume máximo da caixa feita com  $12m^2$  de papelão.*

*Neste exemplo maximizamos a função volume  $V = xyz$  sujeita à restrição  $2xz + 2yz + xy = 12$ , que expressa a condição da área da superfície ser de  $12m^2$ .*

Na subseção seguinte apresentaremos o **Método de Lagrange** para maximizar uma função genérica  $f(x, y, z)$  sujeita a uma restrição (ou condição) da forma  $g(x, y, z) = k$ . Os problemas de otimização com condição são ditos problemas condicionados.

### 3.5.2 Os Multiplicadores de Lagrange

Considerando  $f, g$  funções de duas variáveis, queremos determinar os valores extremos de  $f(x, y)$  sujeita à restrição da forma  $g(x, y) = k$ . Em outras palavras, queremos achar os valores extremos de  $f(x, y)$  quando o ponto  $(x, y)$  pertencer à curva de nível  $g(x, y) = k$ . A figura a seguir mostra essa curva juntamente com várias outras curvas de nível da função  $f$ .



**Figura 16: Multiplicadores de Lagrange**

**Fonte: Stewart (2007)**

Essas curvas de nível tem equação  $f(x, y) = c$ , onde  $c = 7, 8, 9, 10, 11$ . Maximizar  $f(x, y)$  sujeita a  $g(x, y) = k$  é achar qual o maior valor de  $c$  tal que a curva de nível  $f(x, y) = c$  intercepte  $g(x, y) = k$ . Da figura, vemos que isso acontece quando essas curvas se tocam, ou seja, quando essas curvas têm uma reta tangente em comum  $T_{c_1} = T_{c_2}$ . **Caso contrário, poderíamos aumentar o valor de  $c$ .**

Da seção anterior, sabemos que **o vetor gradiente é ortogonal a direção da reta tangente** no ponto  $(x_0, y_0)$ . Logo, onde as duas curvas se tocam, os vetores gradientes **devem possuir a mesma direção**,  $\nabla f(x_0, y_0) // \nabla g(x_0, y_0)$ , ou seja:  $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$  para algum escalar  $\lambda$ . O número  $\lambda$  é chamado de **Multiplicador de Lagrange**.

### 3.5.3 O Método dos Multiplicadores de Lagrange

Para determinar os valores máximo e mínimo de  $f(x, y, z)$  sujeita a  $g(x, y, z) = k$ , supondo que esses valores extremos existam e que  $\nabla g \neq 0$  sobre a superfície  $g(x, y, z) = k$ , faça o seguinte procedimento:

1. Determine todos os valores de  $x, y, z$  e  $\lambda$  tal que 
$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \text{ e} \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$

$$\text{Ou seja, } \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \\ g(x,y,z) = k \end{cases}$$

2. Calcule  $f$  em todos os pontos  $(x,y,z)$  que resultam do item (1). O maior desses valores será o valor máximo de  $f$ , e o menor será o valor mínimo de  $f$ .

Para funções de duas variáveis, o método de Lagrange é semelhante ao método de funções de três variáveis. Para achar os valores extremos de  $f(x,y)$  sujeita á restrição  $g(x,y) = k$ , olhamos para todos os valores de  $x,y$  e  $\lambda$  tais que

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g_x \quad e \quad g(x,y) = k$$

Isso leva à solução de um sistema de três equações a três incógnitas:

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x,y) = k \end{cases}$$

### Exemplo 3.2 - Aplicativo

*Pretende-se construir uma caixa com materiais que custam 1 real por centímetro quadrado para o fundo, 2 reais por centímetro quadrado para os lados e 5 reais por centímetro quadrado para a tampa. Se o volume total deve ser de  $96\text{cm}^3$ , quais devem ser as dimensões da caixa para que o custo do material seja mínimo?*

#### Solução:

Seja  $x$  a altura da caixa,  $y$  a largura e  $z$  o comprimento. Nesse caso, o volume da caixa é  $V = xyz$  e o custo do material é dado por:

$$C = 1yz + 2(2xy + 2xz) + 5yz = 6yz + 4xy + 4xz$$

Estamos interessados em minimizar a função  $c = 6yz + 4xy + 4xz$  com a restrição de que  $V = xyz = 96$ . As equações de Lagrange são:

$$C_x = \lambda V_x \quad \text{ou} \quad 4y + 4z = \lambda(yz)$$

$$C_y = \lambda V_y \quad \text{ou} \quad 6z + 4x = \lambda(xz)$$

$$C_z = \lambda V_z \quad \text{ou} \quad 6y + 4x = \lambda(XY)$$

e  $xyz = 96$  Explicitando  $\lambda$  nas três primeiras equações, temos:

$$\frac{4y + 4z}{yz} = \frac{6z + 4x}{xz} = \frac{6y + 4x}{xy} = \lambda$$

Multiplicando as expressões por  $xyz$ , obtemos:

$$4xy + 4xz = 6yz + 4xy$$

$$4xy + 4xz = 6yz + 4xz$$

$$6yz + 4yx = 6yz + 4xz$$

Este sistema de equações pode ser simplificado cancelando termos comuns nos dois lados de cada equação para obter:

$$4xz = 6yz$$

$$4xy = 6yz$$

$$4yx = 4xz$$

Dividindo ambos os membros da primeira equação por  $z$ , ambos os membros da segunda por  $y$  e ambos os membros da terceira por  $x$ , obtemos:

$$4x = 6y \quad e \quad 4x = 6z \quad e \quad 4y = 4z$$

e portanto,  $y = \frac{2}{3}x$  e  $z = \frac{2}{3}x$ . Finalmente, substituímos estas expressões na equação de restrição,  $xyz = 96$ , para obter:

$$x \left( \frac{2}{3}x \right) \left( \frac{2}{3}x \right) = 96$$

$$\frac{4}{9}x^3 = 96$$



$$x^3 = 216$$

e portanto  $x = 6$ .

donde,

$$y = z = \frac{2}{3}(6) = 4$$

Assim, o custo é mínimo quando a caixa tem 6 centímetros de comprimento, 4 centímetros de largura e 4 centímetros de altura.

**Exemplo 3.3** *Um fazendeiro precisa cercar um pasto retangular na margem de um rio. A área do pasto é de 3.200 metros quadrados e não é necessário cercar o lado limitado pelo rio. Determine as dimensões do pasto para que o comprimento total da cerca seja mínimo.*

**Solução:**

Vamos chamar os lados da cerca de  $x$  e  $y$ , sendo  $x$  para a largura, e  $y$  para o comprimento, e  $f$  o perímetro da cerca. Nesse caso,

$$f(x, y) = 2x + y$$

O objetivo é minimizar  $f$  com restrição de que a área do pasto deve ser de 3200 metros quadrados, isto é,

$$g(x, y) = x \cdot y = 3200$$

Vamos calcular as derivadas parciais;

$$f_x = 2, \quad f_y = 1, \quad g_x = y \quad e \quad g_y = x$$

Para obter as três equações de Lagrange:

$$1 = \lambda x, \quad 2 = \lambda y \quad e \quad x \cdot y = 3200$$

Combinando as duas primeiras equações, obtemos

$$\lambda = \frac{2}{y} \quad e \quad \lambda = \frac{1}{x}$$

Como  $y \neq 0$  e  $x \neq 0$ , temos

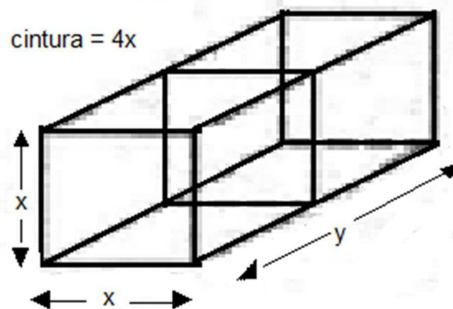
$$\frac{2}{y} = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad y = 2x$$

Fazendo  $2x = y$  na terceira equação de Lagrange, temos

$$x \cdot 2x = 3200 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 3200 \quad \text{ou} \quad x = \pm 40$$

Finalmente, fazendo  $x = 40$  na equação  $y = 2x$ , obtemos  $y = 80$ . Isto significa que  $y = 80$  e  $x = 40$ , são os valores que minimizam a função  $f(x, y) = 2x + y$  com a restrição de que  $x \cdot y = 3200$ . Assim, a área da cerca deve ter 80m de comprimento (ao longo do rio), e 40m de largura, e pode ser cercada com  $80 + 40 + 40 = 160$  metros de cerca.

**Exemplo 3.4** De acordo com o regulamento do correio americano, a soma da cintura com o comprimento de um pacote não pode exceder 108 polegadas no caso de uma remessa de quarta classe. Qual é o maior volume de um pacote retangular com dois lados quadrados para que possa ser enviado como uma remessa de quarta classe? (Veja a figura).



**Figura 17: Problema 3**

**Fonte: Bradley (2001)**

### **Solução:**

Seja a cintura  $= 4x$  e o comprimento do pacote  $y$ , temos que a soma da cintura com o comprimento de um pacote é dado por:

$$f(x, y) = 4x + y = 108$$

Queremos encontrar o maior volume do pacote, ou seja;

$$V(x, y) = x^2 \cdot y$$

Vamos calcular as derivadas parciais:

$$f_x = 4, \quad f_y = 1, \quad V_x = 2xy \quad e \quad V_y = x^2$$

Para obter as três equações de Lagrange, temos;

$$4 = \lambda 2xy, \quad 1 = \lambda x^2 \quad e \quad V = x^2 y$$

Combinando as duas primeiras equações, obtemos:

$$\lambda = \frac{4}{2xy} \quad e \quad \lambda = \frac{1}{x^2}$$

Como  $y \neq 0$  e  $x \neq 0$ , temos;

$$\frac{4}{2xy} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{2}{xy} = \frac{1}{x^2}$$

Logo temos;

$$xy = 2x^2$$

assim;

$$y = 2x$$

Substituindo o valor de  $y$  na função  $f(x, y) = 4x + y$ , temos  $4x + 2x = 108$ , então  $x = 18$ , finalmente fazendo  $x = 18$  na equação  $y = 2x$ , obtemos  $y = 36$ . Substituindo esses valores na terceira equação de Lagrange temos que  $V = 18^2 \cdot 36 = 11.664 \text{ pol}^3$ .

Portanto, o maior volume é de  $11.664 \text{ polegadas}^3$ .

**Exemplo 3.5** Em economia, a utilidade de quantidades  $x$  e  $y$  de dois bens de capital  $G_1$  e  $G_2$  é, algumas vezes, medida por uma função  $U(x, y)$ . Por exemplo,  $G_1$  e  $G_2$  podem ser dois produtos químicos que uma indústria farmacêutica precisa ter a mão e  $U(x, y)$ , o lucro na manufatura de um produto cuja síntese necessita de quantidades diferentes dos produtos químicos, dependendo

do processo utilizado. Se  $G_1$  custa  $a$  dólares por quilograma,  $G_2$  custa  $b$  dólares por quilograma e a quantidade total destinada à compra de  $G_1$  e  $G_2$  juntos é  $c$  dólares, então os administradores da empresa querem maximizar  $U(x, y)$ , dado que  $ax + by = c$ . Assim, eles precisam resolver um problema típico de multiplicadores de Lagrange.

Suponha que

$$U(x, y) = xy + 2x$$

e que a equação  $ax + by = c$  seja simplificada para

$$2x + y = 30$$

Encontre o valor máximo de  $U$  e os valores correspondentes de  $x$  e  $y$  sujeitos a essa última restrição.

**Solução:**

Deve ser encontrado o máximo da função

$$U(x, y) = xy + 2x$$

Sujeita à curva de nível  $k = 0$ , da função

$$g(x, y) = 2x + y - 30$$

De acordo com os multiplicadores de Lagrange, os pontos críticos da função  $U(x, y)$  restrita à curva de nível  $g(x, y) = 0$  são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) = \lambda \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) = \lambda \left( \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \right) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Calculando as derivadas parciais, o sistema acima é:

$$\begin{cases} y+2 = 2\lambda \\ x = \lambda \\ 2x+y-30 = 0 \end{cases}$$

Das duas primeiras equações segue-se que  $y = 2x - 2$ . Substituindo essa igualdade na terceira equação, obtém-se que  $x = 8$ . Assim, o sistema tem solução única dada por  $x = 8$ ,  $y = 14$  e  $\lambda = 8$ , e portanto o único ponto crítico da restrição é o ponto  $(8, 14)$ . Analisando o comportamento da função percebe-se que é esse ponto de máximo da restrição, e o valor máximo de  $U(x, y)$  restrita à reta  $2x + y = 30$  é igual a

$$U(8, 14) = 128.$$

**Exemplo 3.6** *Uma sonda espacial no formato de um elipsoide  $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$  penetra na atmosfera da terra e sua superfície começa se aquecer. Depois de uma hora, a temperatura no ponto  $P(x, y, z)$  sobre a superfície da sonda é  $T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$ . Encontre o ponto mais quente sobre a superfície da sonda.*

**Solução:**

Seja a temperatura sobre a superfície da sonda igual à:

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$$

Temos que minimizar  $T$  com a restrição de que a sonda espacial tenha o formato de um elipsoide, ou seja,

$$E(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16$$

Vamos calcular as derivadas parciais em relação a  $x, y$  e  $z$ ,

$$E(x, y, z) = (8x, 2y, 8z)$$

$$T(x, y, z) = (16x, 4z, 4y - 16)$$

Aplicando o multiplicador de Lagrange temos,

$$\nabla \vec{T} = \lambda \nabla E$$

$$(16x, 4z, 4y - 16) = \lambda (8x, 2y, 8z)$$

$$16x = 8\lambda x, \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$$

Temos que,

$$4z = 2\lambda y$$

$$4z = 4y$$

Portanto,  $z = y$ .

Sendo  $z = y$ , logo,

$$4y - 16 = 8\lambda z$$

$$4y - 16 = 16y$$

$$4y - 16y - 16 = 0$$

$$y = -\frac{4}{3}$$

Seja  $z = y$ , então  $z = -\frac{4}{3}$ . Basta agora encontrar o valor de  $x$ . substituindo os valores de  $y$  e  $z$  na equação  $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ , temos:

$$4x^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = 16$$

$$x = \pm\frac{4}{3}$$

O ponto mais quente sobre a superfície da sonda é  $P = \left(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ .

**Exemplo 3.7** A temperatura em um ponto  $(x, y)$  sobre uma placa metálica é

$T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ . Uma formiga sobre a chapa anda ao redor da circunferência de raio 5 centrada na origem. Quais são as temperaturas máxima e mínima encontradas pela formiga?

**Solução:**

Modelamos os valores dados como um problema de otimização sujeita a uma restrição, portanto, podemos utilizar o Método dos Multiplicadores de Lagrange, onde a temperatura sobre uma placa metálica é dada por:

$$T(x, y) = 4x^2 - 4xy + Y^2$$

Procuramos minimizar  $T$  com a restrição de que a formiga ande ao redor da circunferência de raio 5 centrada na origem, isto é,

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 5$$

Vamos calcular as derivadas parciais,

$$T_x = 8x - 4y, \quad T_y = -4x + 2y, \quad g_x = 2x, \quad e \quad g_y = 2y$$

De acordo com o multiplicador de Lagrange, temos:

$$\nabla \vec{T} = \lambda \nabla g$$

assim,

$$(8x - 4y, 4x + 2y) = \lambda(2x, 2y)$$

$$(8x - 4y, 4x + 2y) = (2\lambda x, 2\lambda y)$$

Então,

$$8x - 4y = 2\lambda x \quad e \quad -4x + 2y = 2\lambda y$$

Isolando  $\lambda$ ,

$$\lambda = \frac{8x - 4y}{2x} \quad e \quad \lambda = \frac{-4x + 2y}{2y}$$

Assim, obtemos:

$$8x - 4y = 2x$$

$$6x = 4y$$

$$x = \frac{2}{3}y$$

Substituindo o valor de  $x = \frac{2}{3}y$  na equação  $x^2 + y^2 = 5$  temos,

$$\left(\frac{2}{3}y\right)^2 + y^2 = 5$$

$$\frac{4}{9}y^2 + y^2 = 5$$

$$\frac{4y^2 + 9y^2}{9} = 5$$

$$13y^2 = 45$$

$$y = \pm \frac{6.7}{3.6}$$

Encontrado o valor de  $y$  vamos descobrir quem é  $x$  então,

$$x = \frac{2}{3} \left( \pm \frac{6.7}{3.6} \right)$$

$$x = \pm \frac{13.4}{10.8}$$

Portanto as temperaturas  $\left(\frac{6.7}{3.6}\right)$ ,  $\left(\frac{13.4}{10.8}\right)$  e  $\left(-\frac{6.7}{3.6}\right)$ ,  $\left(-\frac{13.4}{10.8}\right)$  são de máxima e de mínima encontradas pela formiga.



#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho evidenciamos as propriedades principais do nosso objeto de estudo, o vetor gradiente.

Inicialmente, ao relacionar o conceito de derivada direcional com a definição do vetor gradiente verifica-se que o vetor gradiente, além de facilitar o cálculo da derivada direcional, indica a direção e sentido de maior crescimento de uma função  $f$  a partir de um ponto. Esta propriedade conduziu a algumas aplicações do Cálculo em problemas de otimização, o que motiva o ensino/aprendizagem tornando-os mais significativos.

Outra propriedade evidenciada neste trabalho é o fato de que o vetor gradiente é ortogonal às superfícies (ou curvas) de nível e, por considerações semelhantes, o vetor gradiente é ortogonal ao plano tangente. Devido a esta ortogonalidade, o vetor gradiente nos dá a equação do plano tangente e a equação da reta normal. Mais, ainda, esta propriedade geométrica do vetor gradiente justifica o Método dos Multiplicadores de Lagrange.

Por fim, aplicamos algumas propriedades do vetor gradiente em problemas de otimização, fazendo uso do Método dos Multiplicadores de Lagrange. Assim, pudemos verificar que este método, desenvolvido no final do século XVIII, é imprescindível até hoje, no dia-a-dia de físicos, matemáticos e economistas, possibilitando a resolução de problemas de otimização.

## REFERÊNCIAS

BRADLEY, L. D. H. . G. L. **Cálculo - Um curso moderno e suas aplicações**. 9. ed. [S.l.: s.n.], 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com geometria analítica**. [S.l.]: 3, 1994.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. [S.l.: s.n.], 2007.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. 11. ed. [S.l.]: Addison-Wesley, 2009. 650 p.

WINTERLE, A. S. e P. **Geometria Analítica**. [S.l.]: 2, 2004.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. [S.l.: s.n.], 2000.