UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RICARDO GUIMARÃES SANTANA

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS COM TRANSFORMADA DE LAPLACE

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2013

RICARDO GUIMARÃES SANTANA

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS COM TRANSFORMADA DE LAPLACE

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Viviane Colucci

Co-orientador: Adilandri Mércio Lobeiro

CAMPO MOURÃO

2013

TERMO DE APROVAÇÃO

Ricardo Guimarães Santana

Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias com Transformada de Laplace

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc.Viviane Colucci

Co-orientador: Prof. Dr. Adilandri Mércio Lobeiro

Prof. PhD. Juan Amadeo Soriano Palomino

Campo Mourão, 2013

Dedico esta, e todas as minhas conquistas, inclusive as que ainda estão por vir, a Deus, aos meus queridos e amados pais Valdenison e Márcia, ao meu irmão Rafael e a toda minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por estar ao meu lado em todos os momentos da minha vida, principalmente nos mais difíceis.

Agradeço também aos meus pais por todo o apoio que me deram desde o dia em que comecei minha trajetória acadêmica, ao meu irmão e toda minha família.

Agradeço a professora Viviane pela disposição e paciência na orientação, pelo apoio que tornou a conclusão deste trabalho possível.

Ao professor Adilandri, como co-orientador deste trabalho e coordenador do curso, pelo convívio, pelo apoio, pela compreensão e pela amizade.

Aos professores do curso, todos me deram a oportunidade de agregar um pouco mais de conhecimento, o qual sem duvida nenhuma será muito importante na minha caminhada daqui para frente.

Aos meus amigos de viajem, os quais todos os finais de semana que tínhamos aula encarávamos 130Km de estrada de nossas casas até a instituição onde assistíamos as aulas.

E aos colegas de turma, pelo incentivo e pelo apoio constantes.

“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.” (Pitágoras)

RESUMO

SANTANA, Ricardo Guimarães. Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias com Transformada de Laplace. 58 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

Resolver equações diferenciais não é uma tarefa fácil, existem diversos métodos diferentes, todos têm suas facilidades, dificuldades e limitações. A transformada de Laplace não é diferente, têm suas restrições, isso significa que não é em todas as situações que podemos usá-la, porém ao aplicarmos essa transformada, ela nos disponibiliza uma mudança na forma da equação diferencial, assim facilitando os meios para chegarmos à solução da equação. Neste trabalho foi realizado um estudo detalhado sobre essa transformada, e que existem fórmulas para facilitar o seu uso. Os teoremas de translação nos da suporte para aplicar a transformada em funções que não podemos usar diretamente as fórmulas. Será mostrado o processo de como resolver equações diferenciais com a transformada de Laplace e também algumas situações encontradas na física que podem ser resolvidas com a ajuda dessa transformada.

Palavras-chave: equações, diferenciais, transformada, Laplace

ABSTRACT

SANTANA, Ricardo Guimarães. Solving Ordinary Differential Equations with Laplace transform. 58 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

Solving differential equations is not an easy task, there are several different methods all have their facilities, difficulties and limitations. The Laplace transform is no different, have their restrictions, this means that it is not in all situations we can use it, but to apply this transform, it provides us with a change in the differential equation, thus facilitating the means to get the solution of the equation. In this paper we present a detailed study on this transformed, and that there are formulas to facilitate its use. The theorems in the translational support for applying the transform functions in that we can not directly use the formulas. Will be shown the process of how to solve differential equations with Laplace transforms and also some situations encountered in physics that can be solved with the help of this transform.

Keywords: equations, differential, transform, Laplace

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Mesmo que não percebemos as equações diferencias, fazem parte do nosso dia a dia, no estudo da matemática e são utilizadas em muitas áreas da ciência. “Sempre que indagarmos sobre a evolução de um dado fenômeno susceptível de tratamento matemático, do qual sabemos algo sobre como varia no tempo, estaremos pretendendo resolver uma equação diferencial”(LEITHOLD, 1994, p.1131); na física muitas das fórmulas que usamos para resolver problemas, são equações diferenciais, por exemplo, na física clássica a segunda lei de Newton:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

nada mais é que uma equação diferencial:

$$\vec{F}\,(\vec{r},t) = m\frac{d^2\,\vec{r}}{dt^2}$$

Também são utilizadas para cálculo de decaimento radioativo, controle de tráfego, taxa de crescimento populacional, entre muitas outras coisas.

As equações diferenciais estão totalmente ligadas ao estudo de integrais e derivadas.

Classificamos as equações diferenciais em: equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais. Existem diversas formas de encontrar as soluções dessas equações, como o método das variáveis separáveis, coeficientes constantes, transformada de Laplace, entre outros. Neste trabalho estudaremos apenas as equações diferenciais ordinárias e como método de solução a transformada de Laplace.

A transformada de Laplace é utilizada para estudos de sistemas de controle lineares e invariantes no tempo. Esses sistemas são representados por equações diferenciais em relação a variável tempo, onde muitas vezes os métodos de soluções mais clássicos tornam-se inviáveis. Como por exemplo, um sistema de massa-mola que pode ser representado pela seguinte equação diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx = f(t)$$

A maior vantagem da transformada de Laplace é que ela transforma o problema de uma equação diferencial em um problema de equação algébrica, deixando o problema um pouco mais simples de ser resolvido, já que claramente resolver um problema algébrico é mais simples que resolver um problema com diferenciação.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2.1 DIMENSÃO HISTÓRICA

A história das equações diferenciais está entrelaçada com o estudo do cálculo e também o estudo da física. Grandes nomes de matemáticos e físicos fizeram contribuição para o desenvolvimento desta área da matemática.

Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), foram os primeiros a estudar a área das equações diferencias durante o século XVII. Newton atuou pouco nesta área, porém seus estudos em cálculo e sua compreensão nos princípios básicos da mecânica foram um importante alicerce para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII.

A notação $\dfrac{dy}{dx}$ para derivadas e o sinal de integral são invenções de Leibniz. Em 1691 descobriu o método de separação de variáveis, no mesmo ano também desenvolveu o método de redução de equações homogêneas a equação separáveis. Em 1694 criou o processo para resolver equações lineares de primeira ordem.

Os irmãos Bernoulli, Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) foram importantes para "o desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e para ampliar o campo de suas aplicações"(BOYCE; DIPRIMA, 2006, p. 15). Johann compreendeu os princípios da mecânica e conseguiu modelar matematicamente acontecimentos físicos com o auxílio de equações diferenciais e encontrar suas soluções. Jakob por suas vez resolveu a equação diferencial $y' = [a^3/(b^2.y - a^3)]^{\frac{1}{2}}$. O filho de Johann, Daniel Bernoulli (1700-1782) também estudou equações diferenciais e foi o primeiro a encontrar as funções de Bessel.

Leonhard Euler (1707-1783), inventou métodos para resolver diversos tipos de equações diferenciais, "a chave para seu entendimento era seu conhecimento e percepção de funções"(DINIZ, 2006). Euler descobriu quais as condições para que uma equação diferencial de primeira ordem seja exata, criou o teorema de fatores integrantes, achou a solução geral de equações lineares homogêneas usando os coeficientes constantes e alargou este resultado para equações não homogêneas,além disso, usou séries de potências para resolver equações diferenciais. Também fez contribuições para equações diferenciais parciais. Entre os anos de 1762-1775, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), estudou equações diferenciais e mostrou que a solução de uma equação diferencial linear homogênea de ordem *n* é uma combinação linear de *n* soluções independentes, também desenvolveu o método de variação de parâmetros e ainda fez estudos com equações diferenciais parciais.

Apesar de ter sido destaque na área da mecânica Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) também fez contribuições para equações diferenciais, a transformada de Laplace (TL), esta que será estudada neste trabalho, leva este nome em sua homenagem.

No final do século XIX já havia sido inventadas inúmeras formas de resolver equações diferenciais, porém muitas destas ainda mantinham-se sem soluções. Um método auxiliar para encontrar soluções seria o método de aproximação numérica, que apresentava uma solução aproximada. Em meados de 1900, muitos métodos de integração numérica já existiam, porém resolver esses cálculos a mão não era muito viável e a tecnologia da época era muito antiquada.

Já no século XX os estudos em equações diferenciais parciais tornaram-se importantes para o desenvolvimento da física e da matemática, com isso diversas soluções de equações diferenciais ordinárias, apareceram em muitas situações e foram estudadas exaustivamente. Ainda no século XX, com o objetivo de entender o comportamento de soluções por um ponto de vista geométrico, foi criado os métodos geométricos, principalmente em equações não-lineares.

Atualmente com o avanço da tecnologia, os computadores tornaram-se um importante aliado para estudiosos de todas as áreas e no campo das equações diferenciais não foi diferente. Com ajuda da computação gráfica, pode-se observar que algumas equações diferenciais não-lineares sofrem “fenômenos inesperados, como atratores estranhos, caos e fractais”(BOYCE; DIPRIMA, 2006, p. 16). Essa descoberta deu um novo impulso no estudo de equações diferenciais não-lineares e com isso, ideias novas estão surgindo para diversas aplicações diferentes. As equações diferenciais apesar de ter uma história antiga, ainda hoje continuam sendo fonte de muitas descobertas.

2.2 UMA BREVE INTRODUÇÃO A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Dizemos que uma equação diferencial é

Definição 2.1 (Equação Diferencial) *Uma equação onde as incógnitas são funções e existe ao menos uma derivada ou diferencial destas funções.*

As equações diferenciais são classificadas conforme o seu tipo, sua ordem e sua linearidade.

2.2.1 Tipo

As equações diferenciais são classificadas em dois tipos, as equações diferenciais ordinárias (EDO's) e as equações diferenciais parciais (EDP's).

Equações onde existe derivadas de uma função em relação a uma única variável independente, são chamadas de EDO's.

Exemplo 2.1

$$\begin{array}{lrcl} a) & \dfrac{dy}{dx} & = & x-3 \\ b) & (x-4)dx & = & (3-y)dy \\ c) & \dfrac{d^2u}{dx^2}-\dfrac{du}{dx} & = & 0 \end{array}$$

As equações acima são exemplos de de EDO's. Uma EDP é uma equação onde existe derivadas parciais de uma função em relação a duas ou mais variáveis independentes. Exemplos de EDP's:

Exemplo 2.2

$$\begin{array}{lrcl} a) & \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & -\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ b) & x^3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial u}{\partial y} & = & 0 \end{array}$$

2.2.2 Ordem

A ordem de uma equação diferencial é definida pela maior ordem da derivada da equação apresentada.

Exemplo 2.3

$$\begin{array}{lrcll} a) & y'+3y & = & 2 & \textit{tem ordem 1} \\ b) & y'+y'''+4y & = & 0 & \textit{tem ordem 3} \\ c) & y+3y'' & = & 3 & \textit{tem ordem 2} \end{array}$$

2.2.3 Linearidade

As equações diferenciais podem ser linear ou não-linear. Uma EDO é linear, quando pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x). \tag{2.2.1}$$

Da equação 2.2.1, temos duas propriedades:

i) A potência de y é de grau 1 em todas as derivadas,

ii) Todos os coeficientes dependem apenas de x.

Por outro lado as EDO's que não se encaixam nas propriedades da equação 2.2.1, é chamada de não-linear.

Exemplo 2.4

$$\begin{array}{lrcl} a) & x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx} & = & 0 \quad \textit{é uma equação linear} \\ b) & yy''+4y'+y^2 & = & 0 \quad \textit{é uma equação não-linear} \end{array}$$

Observe que o item a do exemplo 2.4 é linear pois satisfaz as propriedades da equação 2.2.1. Já o item b é não-linear pois o primeiro termo depende de y e ainda no último termo, o y está elevado a uma potência de grau 2.

2.2.4 Solução

A solução de uma equação diferencial é "qualquer função f definida em algum intervalo I, que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade."(ZILL; CULLEN, 2007, p. 4). Para resolver uma equação diferencial utilizamos o cálculo de integrais, e como nem todas as integrais possuem primitivas, assim nem todas as equações diferenciais possuem solução.

Existem muitos métodos para resolver uma equação diferencial, neste trabalho apresentaremos a transformada de Laplace (TL) como um meio para encontrarmos a solução de uma equação diferencial.

3 A TRANSFORMADA DE LAPLACE

3.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

A TL é um operador, assim como a derivada e a integral, como já foi dito na seção 2.1 recebeu este nome em homenagem a Pierre-Simon de Laplace. Porém o seu desenvolvimento "deve-se a muitos nomes além do próprio Laplace, como Cauchy, por seus trabalhos em cálculos de resíduos e explorações em métodos simbólicos"(TONIDANDEL; ARAúJO, 2012). Cauchy utilizava operadores diferenciais nesses seus trabalhos.

Para chegarmos a definição de TL consideremos uma função de duas variáveis $f(x,y)$, se aplicarmos uma integral definida em relação a uma das variáveis em f, teremos uma função definida na outra variável, por exemplo: $\int_0^1 xy\ dx = y/2$. Se definirmos a integral $\int_a^b K(s,t)f(t)dt$, depois de aplicar a integral teremos uma função em relação a s. Nosso interesse é estudar esta última integral no intervalo $[0,\infty)$.

Definição 3.1 *Seja $f(t)$ uma função definida no intervalo $[0,\infty)$, então a integral imprópria*

$$\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt$$

pode ser escrita como um limite:

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b K(s,t)f(t)dt \tag{3.1.1}$$

Se o limite existir, temos que a integral existe ou podemos dizer que é convergente. Quando o limite não existe, a integral não existe ou podemos dizer que é divergente. O limite em 3.1.1 poderá existir apenas para alguns valores de s. Se escolhermos $K(s,t) = e^{-st}$ temos uma integral muito interessante.

Definição 3.2 (Transformada de Laplace) *Seja $f(t)$ uma função definida no intervalo $[0,\infty)$, então a integral*

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{3.1.2}$$

quando existe, é chamada de transformada de Laplace(TL).

Observe que quando a integral imprópria 3.1.2 convergir, obteremos uma função de s. Como notação para TL, usamos letras minusculas para a função a ser transformada e letra maiúscula para função já transformada, por exemplo:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \mathscr{L}\{g(t)\} = G(s), \quad \mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

Exemplo 3.1 *Calcule* $\mathscr{L}\{1\}$

Solução: Pela definição 3.2, temos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ \mathscr{L}\{1\} &= \int_0^\infty e^{-st} 1dt\end{aligned}$$

Agora usando a definição 3.1 e resolvendo a integral definida teremos:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{1\} &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt \qquad \left(u = -st \;\Rightarrow\; \frac{du}{-s} = dt \right) \\ \mathscr{L}\{1\} &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^b \right) \\ \mathscr{L}\{1\} &= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-\frac{e^{-sb}}{s} \right) - \left(-\frac{e^{-s0}}{s} \right) \right]\end{aligned}$$

Observe que no primeiro termo se $s > 0$ o expoente $-sb$ fica negativo e o $e^{-sb} \to 0$ quando $b \to \infty$, quando $s < 0$ a integral não existe, por que o limite vai ser divergente. No segundo termo o expoente $-s0 = 0$ e $e^0 = 1$. Logo ficamos com:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{1\} &= -\frac{0}{s} - \left(-\frac{1}{s} \right) \quad ,s > 0 \\ \mathscr{L}\{1\} &= 0 + \frac{1}{s} \quad ,s > 0 \\ \mathscr{L}\{1\} &= \frac{1}{s} \quad ,s > 0 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

3.1.1 A transformada de Laplace é linear

A TL possui a propriedade da linearidade, por isso para uma soma de funções podemos escrever:

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \mathscr{L}\{\alpha f(t)\} + \mathscr{L}\{\beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Podemos verificar essa propriedade usando a definição 3.2

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right]dt$$

Como a integral é linear podemos escreve-lá da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\alpha f(t)dt+\int_0^\infty e^{-st}\beta g(t)dt\\ \mathscr{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} &= \alpha\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt+\beta\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt\end{aligned}$$

Se as integrais forem convergentes podemos escrevê-las assim

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\}+\beta\mathscr{L}\{g(t)\} \quad \blacksquare$$

3.1.2 Condições suficientes para existência de $\mathscr{L}\{f(t)\}$

As seguintes condições garantem a existência da TL:

i) f é contínua por partes no intervalo $[0,\infty)$,

ii) f é de ordem exponencial para $t > T$.

Dizemos que f é contínua por partes no intervalo $[0,\infty)$, quando em qualquer intervalo $0 \leq a \leq t \leq b$, existir um número finito de descontinuidade sempre de primeira espécie, ou seja, existe os limites laterais.

Definição 3.3 (Ordem Exponencial) *Uma função é de ordem exponencial se existem números* $c, M > 0$ *e* $T > 0$ *tais que*

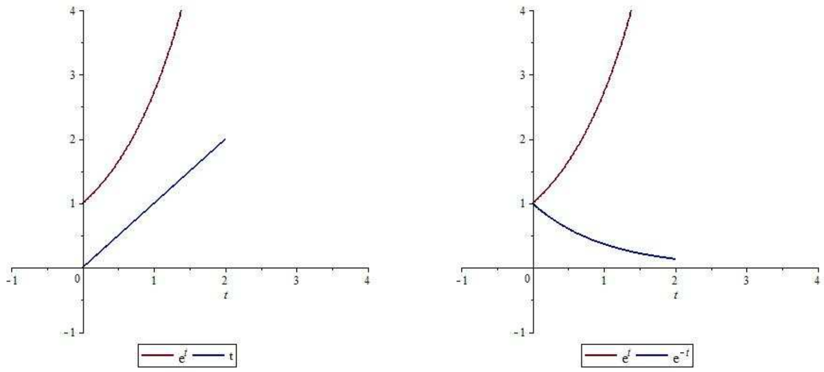
$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad ,\forall \quad t > T.$$

A definição 3.3 quer dizer, que se tivermos uma função crescente, o gráfico desta função no intervalo (T,∞), não cresce mais rápido que o da função Me^{ct}, onde $c > 0$.

Podemos citar as funções $f(t) = t$ e $f(t) = e^{-t}$ como funções de ordem exponenciais, pois

$$|t| \leq e^t, \quad \left|e^{-t}\right| \leq e^t$$

Observe também nos gráficos da figura 1, que a função Me^{ct} cresce mais rapidamente que $f(t) = t$ e $f(t) = e^{-t}$.



(a) $f(t) = t$ (b) $f(t) = e^{-t}$

Figura 1: Funções de Ordem exponencial

Observe que os polinômios são todos de ordem exponencial, para $c > 0$,

$$|t^n| \quad \leq \quad Me^{ct} \quad ou \quad \left|\frac{t^n}{e^{ct}}\right| \leq M \quad , para \quad t > T$$

Teorema 3.1 (Condições Suficiente de Existência) *Seja uma função $f(t)$, contínua por partes no intervalo $[0,\infty)$ e de ordem exponencial para $t > T$, então sua transformada de Laplace existe para todos $s > c$.*

Prova: Usando a definição 3.2, temos que

$$\mathscr{L}\{f(t)\} \quad = \quad \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Podemos reescrever assim,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt \\
\mathscr{L}\{f(t)\} &= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Temos que a integral I_1 existe, pois pode ser escrita como soma de integrais em intervalos, onde $e^{-st} f(t)$ é contínua. Para I_2 temos

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq Me^{ct} \\
\left|\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt\right| &\leq \int_T^\infty e^{-st} Me^{ct} dt \\
\int_T^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt &\leq M \int_T^\infty e^{-st} e^{ct} dt \\
&= M \int_T^\infty e^{-(s-c)t} dt
\end{aligned}$$

Usando a definição 3.1 e resolvendo a integral

$$
\begin{aligned}
& M\lim_{b\to\infty}\int_T^b e^{-(s-c)t}dt \qquad \left(u=-(s-c)t \Rightarrow \frac{du}{-(s-c)}=dt\right)\\
= {} & M\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\bigg|_T^b\right) = M\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-(s-c)b}}{s-c}\right)-\left(-\frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}\right)
\end{aligned}
$$

Observe que quando $s-c>0$, o expoente fica negativo então $e^{-(s-c)b}\to 0$ quando $b\to\infty$. Em outras palavras quando $s>c$ e $b\to\infty$ então $e^{-(s-c)b}\to 0$. Então ficamos com

$$
M\frac{e^{-(s-c)T}}{s-c} \qquad ,s>c
$$

Com isso concluímos que I_2 é convergente quando $s>c$. Portanto, a TL existe para todo $s>c$. ■

Essas condições são suficientes, mas não necessárias para a existência da TL. Existem funções que não satisfazem essas condições, porém sua TL existe.

Exemplo 3.2 *Calcule* $\mathscr{L}\{t\}$

Solução: Usando as definições 3.2 e 3.1

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{-st}t\,dt\\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}t\,dt
\end{aligned}
$$

Usando a integral por partes

$$
\mathscr{L}\{t\} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}t\,dt \qquad \begin{pmatrix} u=t & \Rightarrow & du=dt\\ dv=e^{-st}dt & \Rightarrow & v=-\dfrac{e^{-st}}{s}\end{pmatrix}
$$

Aplicando em $\displaystyle\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{t\} &= \lim_{b\to\infty}\left[t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\bigg|_0^b - \int_0^b\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)dt\right]\\
&= \lim_{b\to\infty}\left[t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\bigg|_0^b + \left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right)\bigg|_0^b\right]\\
&= \lim_{b\to\infty}\left[b\left(-\frac{e^{-sb}}{s}\right)-0\left(-\frac{e^{-s0}}{s}\right)+\left(-\frac{e^{-sb}}{s^2}\right)-\left(-\frac{e^{-s0}}{s^2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Lembrando que $e^{-sb} \to 0$ quando $s > 0$ e $b \to \infty$, então

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{t\} &= 0 - 0 + 0 - \left(-\frac{e^0}{s^2}\right) & ,s > 0 \\
\mathscr{L}\{t\} &= \frac{1}{s^2} & ,s > 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNÇÕES BÁSICAS

O próximo teorema nos traz a generalização da transformada de algumas das funções mais utilizadas. É importante que tenha ficado entendido que s tem que pertencer a um intervalo no qual a TL seja convergente, pois a partir daqui, não faremos mais referência a sua restrição.

Teorema 3.2 (Fórmula Geral das Funções Básicas)

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \mathscr{L}\{1\} &=& \dfrac{1}{s} \\
b) & \mathscr{L}\{t^n\} &=& \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad onde \quad n \in \mathbb{Z} \\
c) & \mathscr{L}\{t^n\} &=& \dfrac{n\Gamma(n)}{s^{n+1}}, \quad onde \quad n \in \mathscr{Q} \quad e \quad \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \\
d) & \mathscr{L}\{e^{at}\} &=& \dfrac{1}{s-a} \\
e) & \mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\} &=& \dfrac{k}{s^2+k^2} \\
f) & \mathscr{L}\{\cos kt\} &=& \dfrac{s}{s^2+k^2} \\
g) & \mathscr{L}\{\operatorname{senh} kt\} &=& \dfrac{k}{s^2-k^2} \\
h) & \mathscr{L}\{\cosh kt\} &=& \dfrac{s}{s^2-k^2}
\end{array}$$

O item $a)$ do teorema 3.2 já foi mostrado no exemplo 3.1.

A função gama é muito parecida com a integral da TL, nesta seção usaremos a função gama como um auxílio para demonstrar os itens $b)$ e $c)$ do teorema 3.2. Euler definiu a função gama da seguinte forma

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{3.2.3}$$

Para que essa integral convirja é necessário que $x - 1 > -1$ ou $x > 0$. Através da função 3.2.3, chegamos a conclusão que:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{3.2.4}$$

Prova: Usando a equação 3.2.3, podemos escrever assim

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \\
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x+1-1}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}t^{x}dt
\end{aligned}$$

Por meio da definição 3.1 temos

$$\Gamma(x+1) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}t^x dt$$

Agora fazendo $u = t^x \Rightarrow du = xt^{x-1}dt$ e $dv = e^{-t}dt \Rightarrow v = -e^{-t}$ e usando a integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \lim_{b\to\infty}\left[-t^x e^{-t}\Big|_0^b + \int_0^b e^{-t}xt^{x-1}dt\right] \\
&= -\lim_{b\to\infty}\left(t^x e^{-t}\Big|_0^b\right) + x\underbrace{\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}t^{x-1}dt}_{\Gamma(x)} \\
&= -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{t^x}{e^t}\Big|_0^b\right) + x\Gamma(x) \\
&= -\lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{b^x}{e^b}\right) - \left(\frac{0^x}{e^0}\right)\right] + x\Gamma(x) \\
&= -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^x}{e^b}\right) + x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

Observe que $\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^x}{e^b}\right)$ é uma indeterminação, para resolver aplicamos a regra de L'Hospital x vezes, assim concluímos que

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{c}{e^b}\right) = 0$$

Então,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= 0 + x\Gamma(x) \\
\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Calculando a função gama para $x = 1$, temos

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt$$

A função acima é a mesma função do exemplo 3.1, porém com $s = 1$. Então temos que

$$\Gamma(1) = 1$$

Agora por 3.2.4 podemos dizer que

$$\begin{array}{lllllllll}
\Gamma(2) & = & \Gamma(1+1) & = & 1\Gamma(1) & = & 1 & & \\
\Gamma(3) & = & \Gamma(2+1) & = & 2\Gamma(2) & = & 2.1 & = & 2 \\
\Gamma(4) & = & \Gamma(3+1) & = & 3\Gamma(3) & = & 3.2.1 & = & 6 \\
\Gamma(5) & = & \Gamma(4+1) & = & 4\Gamma(4) & = & 4.3.2.1 & = & 24
\end{array}$$

Então repetindo este processo até $x = n$, com $n \in \mathbb{Z}$ temos que

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Agora calculemos $\Gamma(1/2)$, então

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

Usando a mudança de variável

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt \qquad \left(t = u^2 \quad \Rightarrow \quad dt = 2udu \right) \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-u^2} \left(u^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2udu \\
&= 2\int_0^\infty e^{-u^2} du
\end{aligned}$$

Analogamente fazendo $t = v^2$, temos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-v^2} dv$$

Então

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\int_0^\infty e^{-u^2} du . 2\int_0^\infty e^{-v^2} dv \\
\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} dudv
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Com o auxilo das coordenadas polares $u^2+v^2=r^2$, $u=r\cos\theta$, $v=r\,\text{sen}\,\theta$ e $dudv=Jdrd\theta$. Para calcular o jacobiano temos que calcular o determinante da seguinte matriz

$$J=\begin{bmatrix} du/dr & dv/dr \\ du/d\theta & dv/d\theta \end{bmatrix}$$

Então

$$J=\begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}=r\text{cos}^2\theta+r\,\text{sen}^2\theta=r\left(\cos^2\theta+\text{sen}^2\right)=r$$

Lembrando que pelas identidades trigonométricas $\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta=1$.

Quando $u=0\Rightarrow r\cos\theta=0$ para $r=0$ ou $\theta=\pi/2$. Quando $u\to\infty\Rightarrow r\cos\theta\to\infty$ para $r\to\infty$. Voltando em 3.2.5, temos

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdrd\theta \tag{3.2.6}$$

Calculando primeiramente $\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr$, então

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-r^2}rdr \quad \left(w=-r^2 \Rightarrow -\frac{dw}{2}=rdr\right)$$

Quando $r=0\Rightarrow w=0$ e quando $r=b\Rightarrow w=-b^2$, logo

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr &= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b^2} e^w dw \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} e^w\Big|_0^{-b^2} \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-b^2}-e^0\right) \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{b^2}}-1\right)\end{aligned}$$

Quando $b\to\infty\Rightarrow 1/e^{b^2}\to 0$, então ficamos com

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr &= -\frac{1}{2}(0-1) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Então voltando esse resultado na equação 3.2.6 e calculando a segunda integral

$$\begin{aligned}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 4\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \\ &= \pi\end{aligned}$$

Então

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{3.2.7}$$

Exemplo 3.3 *Calcule* $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ *e* $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.

Solução: Usando a equação 3.2.4 e o resultado 3.2.7 temos

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{5}{2}.\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Para a demonstração do item $c)$ do teorema 3.2, usamos a definição 3.2

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt \quad \left(st = u \;\Rightarrow\; t = \frac{u}{s} \;\Rightarrow\; dt = \frac{du}{s} \right)$$

Usando a mudança de variáveis e sabendo que quando $t = 0 \Rightarrow u = 0$ e $t \to \infty \Rightarrow u \to \infty$, então

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{du}{s} \\ &= \int_0^\infty e^{-u}\frac{u^n}{s^n}\frac{du}{s} \\ &= \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^n du\end{aligned}$$

Veja que a integral $\int_0^\infty e^{-u}u^n du$ é igual a $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x dt$, então podemos reescreve-la da seguinte forma

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

Lembrando que se $n \in \mathbb{Z}$ então

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Se $n \in \mathscr{Q}$ então

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n\Gamma(n)}{s^{n+1}} \quad ,onde \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \blacksquare$$

Para demonstrar o item $d)$ do teorema 3.2 podemos fazer assim:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{e^{at}\} &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}e^{at}dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-a)t}dt \qquad \left(u = -(s-a)t \;\Rightarrow\; \frac{du}{-(s-a)} = dt \right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Bigg|_0^b \right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-\frac{e^{-(s-a)b}}{s-a} \right) - \left(-\frac{e^{-(s-a)0}}{s-a} \right) \right] \\
&= 0 + \frac{e^0}{s-a} \\
&= \frac{1}{s-a} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Podemos fazer a demostração dos itens $e)$ e $f)$ de maneiras diferentes, usando a definição da TL ou usando informações simples do conjunto dos números complexos. Neste trabalho apresentaremos a demonstração através dos números complexos.

Consideremos o item $d)$ do teorema 3.3, agora fazendo $a = ik$ com $i = \sqrt{-1}$, assim teremos e^{ikt}, então

$$\mathscr{L}\left\{e^{ikt}\right\} = \frac{1}{s-ik} = \frac{s+ik}{(s-ik)(s+ik)} = \frac{s+ik}{s^2+k^2} = \frac{s}{s^2+k^2} + i\frac{k}{s^2+k^2}$$

Pela linearidade da TL e com $e^{ikt} = \cos kt + i \operatorname{sen} kt$, então

$$\mathscr{L}\left\{e^{ikt}\right\} = \mathscr{L}\{\cos kt + i \operatorname{sen} kt\} = \mathscr{L}\{\cos kt\} + i\mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\}$$

Equacionando a parte real e imaginária teremos duas equações, assim obtemos as transformações dos itens $e)$ e $f)$,

$$e) \quad \mathscr{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2} \,, \qquad\qquad f) \quad \mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \frac{k}{s^2+k^2} \quad \blacksquare$$

Para demonstrar o item $g)$ consideremos que

$$\operatorname{senh} kt = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$$

Então

$$\mathscr{L}\{\operatorname{senh} kt\} = \mathscr{L}\left\{\frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}\right\}$$

Pela linearidade da TL, temos

$$\mathscr{L}\{\operatorname{senh} kt\} = \frac{1}{2}\left(\mathscr{L}\left\{e^{kt}\right\} - \mathscr{L}\left\{e^{-kt}\right\}\right)$$

Usando o item $d)$ do teorema 3.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\operatorname{senh} kt\} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{s+k-(s-k)}{(s-k)(s+k)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2k}{s^2-k^2}\right] \\
&= \frac{k}{s^2-k^2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Agora para demostrar o item $h)$, temos que

$$\cosh kt = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$$

Então

$$\mathscr{L}\{\cosh kt\} = \mathscr{L}\left\{\frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}\right\}$$

Pela linearidade da TL, temos

$$\mathscr{L}\{\cosh kt\} = \frac{1}{2}\left(\mathscr{L}\left\{e^{kt}\right\} + \mathscr{L}\left\{e^{-kt}\right\}\right)$$

Usando o item $d)$ do teorema 3.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\cosh kt\} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{s+k+s-k}{(s-k)(s+k)}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2-k^2}\right]\\
&= \frac{s}{s^2-k^2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.3 TRANSFORMADA INVERSA

A transformada inversa é o contrário da TL, agora temos $F(s)$ e temos que encontrar uma $f(t)$, onde sua TL é igual a $F(s)$. Usamos a seguinte notação para transformada inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Onde podemos dizer "que $f(t)$ é a transformada de Laplace inversa de F(s)"(ZILL; CULLEN, 2007, p. 362). Assim semelhante ao teorema 3.2 podemos escrever o seguinte teorema para transformada inversa

Teorema 3.3 (Transformadas Inversas das Funções Básicas)

$$\begin{aligned}
a) &\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1\\
b) &\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n, \quad onde \quad n \in \mathbb{Z}\\
c) &\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}\\
d) &\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \operatorname{sen} kt\\
e) &\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos kt\\
f) &\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} = \operatorname{senh} kt\\
g) &\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\} = \cosh kt
\end{aligned}$$

A transformada inversa também é uma integral, porém o cálculo desse tipo de integral requer a utilização de muitos conceitos sobre variáveis complexas, o que está além do assunto deste trabalho. Para cálculos de transformadas inversas usaremos os resultados do teorema 3.3.

Exemplo 3.4 *Calcule* $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$

Solução: Veja que para usar a parte $b)$ do teorema 3.3, temos que $n = 3$, então multiplicando e dividindo por 3!. Segue que:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{3!}\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{1}{3!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} = \frac{1}{3!}t^3 = \frac{t^3}{6} \quad \blacksquare$$

3.3.1 Transformada de Laplace inversa é linear

A TL inversa é uma transformada linear, então podemos escrever assim:

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3.3.2 Frações Parciais

O uso de frações parciais é muito importante para o cálculo da TL inversa, por isso relembraremos os casos básicos dessa teoria, que são: fatores lineares distintos, fatores lineares repetidos e fator quadrático irredutível.

Relembraremos primeiro o caso de fatores lineares distintos, então considere o seguinte caso:

Exemplo 3.5 *Calcule* $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+2)(s+4)}\right\}$

Solução: Suponhamos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s+2)(s+4)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4} = \frac{A(s+2)(s+4) + Bs(s+4) + Cs(s+2)}{s(s+2)(s+4)} \\ \frac{1}{s(s+2)(s+4)} &= \frac{As^2 + Bs^2 + Cs^2 + 6As + 4Bs + 2Cs + 8A}{s(s+2)(s+4)}\end{aligned}$$

Por igualdade de frações

$$1 = As^2 + Bs^2 + Cs^2 + 6As + 4Bs + 2Cs + 8A$$

Usando igualdade de polinômios, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 6A + 4B + 2C = 0 \\ 8A = 1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de equações, temos que $A = 1/8$, $B = -1/4$ e $C = 1/8$. Agora voltando os valores de A, B e C temos

$$\frac{1}{s(s+2)(s+4)} = \frac{\frac{1}{8}}{s} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{s+2} + \frac{\frac{1}{8}}{s+4}$$

Aplicando a TL inversa, usando sua linearidade e os itens $a)$ e $c)$ do teorema 3.3 temos:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)(s+4)}\right\} &= \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{e^{-4t}}{8} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O segundo caso é com fatores lineares repetidos, sendo assim considere o seguinte caso:

Exemplo 3.6 *Calcule* $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}$

Solução: Suponhamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2(s+2)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} = \frac{As(s+2)+B(s+2)+Cs^2}{s^2(s+2)} \\ \frac{1}{s^2(s+2)} &= \frac{As^2+2As+Bs+2B+Cs^2}{s^2(s+2)} \end{aligned}$$

Por igualdade de frações temos

$$1 = As^2 + Cs^2 + 2As + Bs + 2B$$

Usando igualdade de polinômios

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B = 0 \\ 2B = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações acima, temos que $A = -1/4$, $B = 1/2$ e $C = 1/4$. Voltando os valores de A, B e C temos

$$\frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2} + \frac{\frac{1}{4}}{s+2}$$

Aplicando a TL inversa, usando sua linearidade da TL inversa e os itens $b)$ e $c)$ do teorema

3.3, concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\} &= -\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\
&= \frac{t}{2}+\frac{e^{-2t}-1}{4} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

O último caso de frações parciais é o de fator quadrático irredutível, isto significa que o fator quadrático não possui raiz real. Observe o próximo exemplo:

Exemplo 3.7 *Calcule* $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-3}{s(s^2+9)}\right\}$

Solução: Suponhamos que

$$\begin{aligned}
\frac{2s-3}{s(s^2+9)} &= \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+9} = \frac{A(s^2+9)+(Bs+C)s}{s(s^2+9)} \\
\frac{2s-3}{s(s^2+9)} &= \frac{As^2+Bs^2+Cs+9A}{s(s^2+9)}
\end{aligned}$$

Por igualdade de frações

$$2s-3 = As^2+Bs^2+Cs+9A$$

Agora usando igualdade de polinômios, temos

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ C = 2 \\ 9A = -3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações acima, obtemos que $A=-1/3$, $B=1/3$ e $C=2$. Voltando os valores de A, B e C temos

$$\frac{2s-3}{s(s^2+9)} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{s}+\frac{\frac{1}{3}s}{s^2+9}+\frac{2}{s^2+9}$$

e resolvendo a TL inversa com ajuda dos itens $a)$ e $e)$ e $f)$ do teorema 3.3

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s(s^2+9)}\right\} &= -\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}+2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} \\
&= -\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}+\frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} \\
&= \frac{\cos(3t)+2\,\mathrm{sen}\,(3t)-1}{3} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 3.4 (Conduta de $F(s)$ quando $s \to \infty$) *Seja $f(t)$ continua por partes em $[0,\infty)$ e de ordem exponencial para $t > T$, então*

$$\lim_{s\to\infty} \mathscr{L}^{-1}\{f(t)\} = 0$$

Prova: Como $f(t)$ é continua por partes no intervalo $0 \leq t \leq T$, então é ela é limitada nesse intervalo:

$$|f(t)| \leq M_1 = M_1 e^{0t}$$

Temos ainda

$$|f(t)| \leq M_2 e^{\gamma t}$$

para $t > T$. Se M denota o $\max\{M_1, M_2\}$ e c denota o $\max\{0, \gamma\}$, então

$$\begin{aligned}
|\mathscr{L}\{f(t)\}| &\leq \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt \\
&= M\int_0^\infty e^{-st}e^{ct}dt \\
&= M\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-c)t}dt \\
&= M\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-}(s-c)^t}{s-c}\Big|_0^b\right) \\
&= \frac{M}{s-c}
\end{aligned}$$

Para $s > c$. Como $s \to \infty$, temos que $|\mathscr{L}\{f(t)\}| \to 0$ então $\mathscr{L}\{f(t)\} \to 0$. ■

Exemplo 3.8 *As funções $F_1(s) = s^3$ e $F_2(s) = s/s+1$ não são TL de nenhuma função contínua por partes de ordem exponencial, pois $F_1(s)$ não tende a 0 e $F_2(s)$ também não tende a 0, quando s tende a ∞. Então dizemos que $\mathscr{L}\{F_1(s)\}$ e $\mathscr{L}\{F_2(s)\}$ não existem.*

4 TEOREMAS DE TRANSLAÇÃO E DERIVADA DE UMA TRANSFORMADA

4.1 PRIMEIRO TEOREMA DE TRANSLAÇÃO

Resolver a TL usando a definição 3.2 nem sempre é viável, algumas integrais por partes podem ser demasiadamente difíceis de resolver, como por exemplo: $\mathscr{L}\left\{e^t t^3 \cos 7t\right\}$. Os teoremas que estudaremos a seguir facilitam o cálculo da TL e também possibilita a construção de uma lista mais extensa de transformadas, sem precisar usar a definição de TL.

Teorema 4.1 (Primeiro Teorema de Translação) *Se $a \in \mathbb{R}$, então*

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

onde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$

Prova: A prova é simples, pois pela definição 3.2

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a) \quad \blacksquare$$

Observe na figura 2 que o gráfico de $F(s-a)$ é o gráfico de $F(s)$ deslocado no eixo de s, para direita se $a > 0$ ou para esquerda, se $a < 0$.

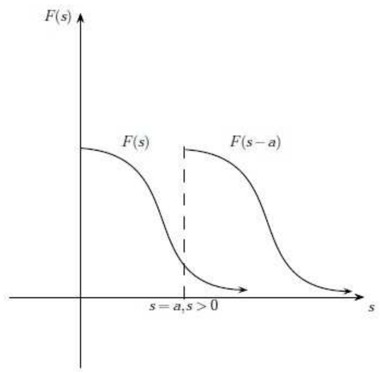


Figura 2: Primeiro Teorema de Translação

Muitas vezes é conveniente utilizar simbolismo

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}_{s\to s-a}$$

Onde $s\to s-a$ significa que temos que substituir s em $F(s)$ por $s-a$.

Exemplo 4.1 *Calcule* $(a)\mathscr{L}\left\{e^{10t}t\right\}$ *e* $(b)\mathscr{L}\{e^{-t}\operatorname{sen}3t\}$

Solução: Os resultados vem do teorema 4.1

$$\begin{array}{lccccccc} (a) & \mathscr{L}\left\{e^{10t}t\right\} & = & \mathscr{L}\{t\}_{s\to s-10} & = & \left.\dfrac{1}{s^2}\right|_{s\to s-10} & = & \dfrac{1}{(s-10)^2} \\ (b) & \mathscr{L}\{e^{-t}\operatorname{sen}3t\} & = & \mathscr{L}\{\operatorname{sen}3t\}_{s\to s+1} & = & \left.\dfrac{3}{s^2+9}\right|_{s\to s+1} & = & \dfrac{3}{(s+1)^2+9} \end{array}$$

O teorema 4.1 possui uma forma inversa que pode ser escrita da seguinte maneira

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}_{s\to s-a} = e^{at}f(t) \tag{4.1.1}$$

onde $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Exemplo 4.2 *Calcule* $(a)\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^3}\right\}$

Solução: Por 4.1.1 temos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\left.\frac{1}{s^3}\right|_{s\to s+2}\right\} = \frac{1}{2!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\left.\frac{2!}{s^3}\right|_{s\to s+2}\right\} = \frac{t^2e^{-2t}}{2} \quad \blacksquare$$

Exemplo 4.3 *Calcule* $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4s+5}\right\}$

Solução: Primeiro completamos o quadrado do denominador

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+4+1}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+1}\right\}$$

Veja que ainda não podemos usar 4.1.1, pois no numerador temos que ter $s+2$, então para que isso aconteça, subtraimos e adicionar 2 no numerador, obtendo

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2-2}{(s+2)^2+1}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+2)^2+1}\right\}$$

Agora usando a linearidade da TL inversa e 4.1.1 temos

$$\begin{aligned} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\left.\frac{s}{s^2+1}\right|_{s\to s+2}\right\} - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\left.\frac{1}{s^2+1}\right|_{s\to s+2}\right\} \\ &= e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\,\mathrm{sen}\, t \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.2 SEGUNDO TEOREMA DE TRANSLAÇÃO

A função degrau unitário é uma função que nos possibilita mostrar uma dualidade, como por exemplo: uma voltagem em circuitos, que pode ser desligada após um certo período. Essa função é definida da seguinte maneira

Definição 4.1 (Função Degrau Unitário) *Dada uma função $\mu(t-a)$ que é definida por*

$$\mu(t-a) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < a \\ 1 & , \quad t \geq a \end{cases}$$

Podemos usar a função degrau unitário para descrever funções definidas por partes em uma forma mais concentrada. Por exemplo:

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & , \quad 0 \leq t < a \\ h(t) & , \quad t \geq a \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Podemos escreve-lá assim

$$f(t) = g(t) - g(t)\mu(t-a) + h(t)\mu(t-a) \tag{4.2.3}$$

Podemos comprovar usando a definição 4.1

$$f(t) = \begin{cases} g(t) - g(t).0 + h(t).0 & , \quad 0 \leq t < a \\ g(t) - g(t)1 + h(t)1 & , \quad t \geq a \end{cases}$$

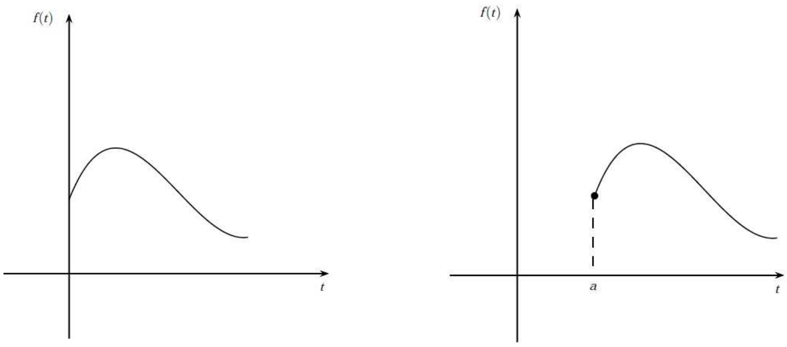
Automaticamente uma função $f(t)$ do tipo

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < a \\ g(t) & , \quad a \leq t < b \\ 0 & , \quad t \geq b \end{cases}$$

Onde podemos escrever

$$f(t) \quad = \quad g(t)\left[\mu(t-a) - \mu(t-b)\right]$$

Observe na figura 3, que quando temos uma função do tipo $f(t-a)$ quando $t \geq 0$ e multiplicamos pela função degrau unitário $\mu(t-a)$, o gráfico da multiplicação é igual ao gráfico de $f(t-a)$ porém transladado em t.



(a) $f(t) = t, t \geq 0$ (b) $f(t-a)\mu(t-a)$

Figura 3: Função Degrau Unitária

No teorema 4.1 vimos que quando $f(t)$ é multiplicado por uma exponencial, então $F(s)$ é transladada em s. Agora veremos que quando $F(s)$ é multiplicado por uma exponencial adequada, então a transformada inversa desse produto é $f(t-a)\mu(t-a)$. Isso é conhecido como o segundo teorema de translação.

Teorema 4.2 (Segundo Teorema de Translação) *Se $a \in \mathbb{R}_+$ então*

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\mu(t-a)\} \quad = \quad e^{-as}F(s)$$

em que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$

Prova: Pelas definições 3.2 e 4.1

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t-a)\mu(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)\mu(t-a)dt \\
&= \int_0^a e^{-st} f(t-a)\underbrace{\mu(t-a)}_{0}dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\underbrace{\mu(t-a)}_{1}dt
\end{aligned}$$

Agora fazendo $v = t - a \Rightarrow dv = dt$, logo

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t-a)\mu(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v)dv \\ &= \int_0^\infty e^{-sv}e^{-sa} f(v)dv \\ &= e^{-sa}\int_0^\infty e^{-sv} f(v)dv \\ &= e^{-sa}\mathscr{L}\{f(t)\} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 4.4 *Calcule* $\mathscr{L}\{(t-1)\mu(t-1)\}$

Solução: Sabendo que $a = 1$, pelo teorema 4.2 temos que

$$\mathscr{L}\{(t-1)\mu(t-1)\} = e^{-s}\mathscr{L}\{t\} = \frac{e^{-s}}{s^2} \quad \blacksquare$$

Para encontrar a TL da função degrau unitário, usamos o teorema 4.2. Para isso fazemos $f(t) = 1$ no teorema 4.2, então $f(t-a) = 1$, $F(s) = \mathscr{L}\{1\} = 1/s$, sendo assim

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\mu(t-1)\} &= e^{-as}F(s) \\ &= \frac{e^{-as}}{s}\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Exemplo 4.5 *Calcule a TL de*

$$f(t) = \begin{cases} 2 \ , & 0 \leq t < 3 \\ -2 \ , & t \geq 3 \end{cases}$$

Solução: Usando dos resultados 4.2.2 e 4.2.3, podemos escrever a função $f(t)$ do seguinte modo

$$f(t) = 2 - 2\mu(t-3) - 2\mu(t-3)$$

Agora usando o resultado 4.2.4

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{2\} - 2\mathscr{L}\{\mu(t-3)\} - 2\mathscr{L}\{\mu(t-3)\} \\ &= \frac{2}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s} = \frac{2-4e^{-3s}}{s} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

A forma inversa do teorema 4.2 pode ser descrita da seguinte forma

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\mu(t-a) \tag{4.2.5}$$

Onde $a > 0$ e $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Exemplo 4.6 *Calcule* $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^3}\right\}$

Solução: Observamos que $a = 2$ e $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{1/s^3\right\} = t^2/2$. Então por 4.2.5

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^3}\right\} = \frac{1}{2!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}_{t\to t-2} = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{t\to t-2} = \frac{1}{2}(t-2)^2\mu(t-2) \quad \blacksquare$$

4.3 DERIVADAS E INTEGRAIS DE TRANSFORMADAS

Sabemos que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, então usando o teorema de Leibniz, para derivar sob o sinal de integração, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st}f(t)\right]dt \end{aligned}$$

Fazendo $u = -st \Rightarrow du/ds = -t$ e resolvendo a derivada temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)dt \\ &= -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt \\ &= -\mathscr{L}\{tf(t)\} \end{aligned}$$

Então concluímos que

$$\mathscr{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}$$

Analogamente podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left\{t^2f(t)\right\} &= \mathscr{L}\{ttf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{tf(t)\} \\ &= \left(-\frac{d}{ds}\right)\left(-\frac{d}{ds}\right)\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}\{f(t)\} \end{aligned}$$

Os dois resultados acima apontam para fórmula geral de $\mathscr{L}\{t^nf(t)\}$.

Teorema 4.3 (Derivadas de Transformadas) *Com* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *então*

$$\mathscr{L}\{t^nf(t)\} = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

onde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

Exemplo 4.7 *Calcule* $\mathscr{L}\{t\cos 2t\}$

Solução: Pelo teorema 4.3, temos $a = 1$ e $f(t) = \cos 2t$, então

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{t\cos 2t\} &= -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{\cos 2t\} \\
&= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \\
&= \frac{(s^2+4).1 - s.(2s)}{(s^2+4)^2} \\
&= \left[\frac{4-s^2}{(s^2+4)^2}\right]
\end{aligned}$$

então

$$\mathscr{L}\{t\cos 2t\} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} \quad \blacksquare$$

Para as integrais de tranformadas, consideremos uma função $f(t)$ que satisfaça as condições do teorema 3.1 e o limite de $f(t)/t$, quando $t \to 0$ para a direita, existe. Então

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)ds \tag{4.3.6}$$

Assim vemos que, a integração da transformação de uma função $f(t)$ corresponde à divisão de $f(t)$ por t. Mostraremos isso usando a definição 3.2 e integrando ambos os lados em relação a s, temos

$$\int_s^\infty F(s)ds = \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right] ds$$

Observe que podemos muda a ordem de integração na equação acima, então teremos

$$\int_s^\infty F(s)ds = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-st} f(t)ds\right] dt = \int_0^\infty f(t)\left[\int_s^\infty e^{-st}ds\right] dt$$

Integrando e^{-st} em relação a s, obtemos $e^{-st}/-t$.Nesse caso a integral sobre s à direita é e^{-st}/t. Portanto

$$\int_s^\infty F(s)ds = \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt = \mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \quad \blacksquare$$

De forma equivalente a equação 4.3.6, podemos dizer que a transformada inversa é escrita da seguinte forma

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(s)ds\right\} = \frac{f(t)}{t} \tag{4.3.7}$$

Exemplo 4.8 *Encontre a transformada inversa da função* $ln\left(1+\frac{k^2}{s^2}\right)$

Solução: Derivando a função

$$-\frac{d}{ds}ln\left(1+\frac{k^2}{s^2}\right) = -\frac{1}{1+\frac{k^2}{s^2}}.(-2)\frac{k^2}{s^3} = \frac{2k^2}{s(s^2+k^2)} = \frac{2}{s}-2\frac{s}{s^2+k^2}$$

A função $F(s)$ que obtemos é a derivada da função dada, de modo que a última igualdade é a integral de $F(s)$ no intervalo $[s,\infty)$. Usando os item $a)$ e $f)$ do teorema 3.2, temos

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}-s\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = 2-2\cos kt$$

Esta função satisfaz as condições da equação 4.3.7. Então

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{ln\left(1+\frac{k^2}{s^2}\right)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(s)ds\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

Resolvendo temos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{ln\left(1+\frac{k^2}{s^2}\right)\right\} = \frac{2}{t}(1-\cos kt) \quad \blacksquare$$

5 TRANSFORMADA DE DERIVADA, INTEGRAL E FUNÇÃO PERIÓDICA

5.1 TRANSFORMADA DE UMA DERIVADA

Nosso objetivo é resolver equações diferenciais com o auxílio da TL. Para que isso seja possível temos que saber como calcular transformadas do tipo $\mathscr{L}\{dy/dt\}$ e $\mathscr{L}\left\{d^2y/dt^2\right\}$. Então considere f' contínua para $t \geq 0$, por integração por partes temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st} f'(t)dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[e^{-st} f(t)|_0^b - \int_0^b f(t)(-se^{-st})dt\right] \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(e^{-st} f(t)|_0^b\right) + s\underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}_{\mathscr{L}\{f(t)\}} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(e^{-sb} f(b) - e^{-s0} f(0)\right) + s\mathscr{L}\{f(t)\}
\end{aligned}$$

Observe que $e^{-sb} \to 0$ quando $b \to \infty$ e $e^{-s0} = 1$, então

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f'(t)\} &= -f(0) + s\mathscr{L}\{f(t)\} \\
\mathscr{L}\{f'(t)\} &= sF(s) - f(0)
\end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Igualmente temos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[e^{-st} f'(t)|_0^b - \int_0^b f'(t)(-se^{-st})dt\right] \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(e^{-st} f'(t)|_0^b\right) + s\underbrace{\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt}_{\mathscr{L}\{f'(t)\}} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(e^{-sb} f'(b) - e^{-s0} f'(0)\right) + s\mathscr{L}\{f'(t)\}
\end{aligned}$$

Observe que $e^{-sb} \to 0$ quando $b \to \infty$ e $e^{-s0} = 1$, então

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f''(t)\} &= -f'(0) + s[sF(s) - f(0)] \\ \mathscr{L}\{f''(t)\} &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Os resultados 5.1.1 e 5.1.2 são consequência do próximo teorema, o qual nos fornecerá a TL da n-ésima derivada de f.

Teorema 5.1 (Transformada de uma derivada) *Sejam $f(t), f'(t), ..., f^{(n-1)}(t)$ contínuas por partes em $[0,\infty)$, de ordem exponencial, e se $f^n(t)$ for contínua por partes em $[0,\infty)$, então*

$$\mathscr{L}\{f^n(t)\} = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0),$$

em que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

Exemplo 5.1 *Calcule $\mathscr{L}\{kt\cos kt + \operatorname{sen} kt\}$*

Solução: Veja que a soma $kt\cos kt + \operatorname{sen} kt$ é a derivada de $t\operatorname{sen} kt$, então

$$\mathscr{L}\{kt\cos kt + \operatorname{sen} kt\} = \mathscr{L}\left\{\frac{d}{dt}(t\operatorname{sen} kt)\right\}$$

Agora por 5.1.1 e pelo teorema 4.3, então

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{kt\cos kt + \operatorname{sen} kt\} &= s\mathscr{L}\{t\operatorname{sen} kt\} \\ &= s\left(-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\}\right) \\ &= s\left(\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}\right) = \frac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.2 CONVOLUÇÃO

Se temos duas funções f e g contínuas por partes no intervalo $[0,\infty)$, representamos a convolução de f e g como $f*g$ e é dada pela seguinte integral

$$f*g = \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{5.2.3}$$

Exemplo 5.2 *Calcule a convolução de $f(t) = e^t$ e $g(t) = \operatorname{sen} t$*

Solução: Aplicando f e g em 5.2.3, temos

$$\begin{aligned} e^t * \operatorname{sen} t &= \int_0^t e^t \operatorname{sen}(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2}(e^t - \operatorname{sen} t - \cos t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Podemos calcular a TL de uma convolução sem precisar resolver primeiramente sua integral, o próximo teorema nos apresentará este caminho

Teorema 5.2 (Teorema da Convolução) *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções contínuas por partes no intervalo $[0,\infty)$ e de ordem exponencial, então*

$$\mathscr{L}\{f*g\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Prova: Sejam

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau \\ G(s) &= \mathscr{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)d\beta \end{aligned}$$

Fazendo $F(s)G(s)$, obtemos

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)d\beta\right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} f(\tau)g(\beta)d\beta d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} g(\beta)d\beta \end{aligned}$$

Firmando τ e estabelecendo $t = \tau + \beta \Rightarrow dt = d\beta$ então

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-st} g(t-\tau)dt$$

Observe na figura 4, que estamos integrando a região pintada do plano $t\tau$. Como f e g são contínuas por partes no intervalo $[0,\infty)$ e também é de ordem exponencial, então podemos trocar a ordem da integração.

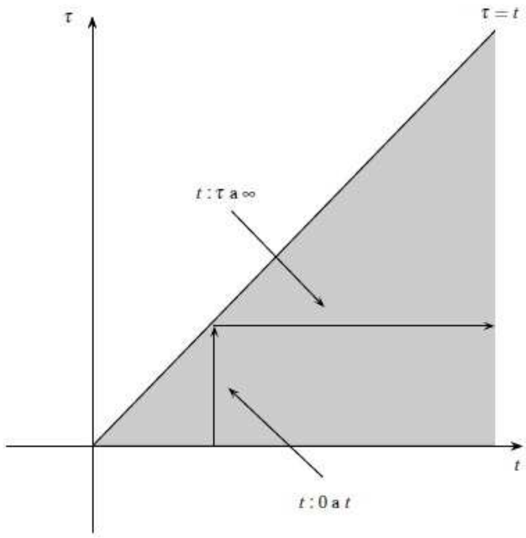


Figura 4: Convolução

$$
\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right]dt \quad = \quad \mathscr{L}\{f*g\} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Se temos $g(t) = 1$ e $G(s) = 1/s$, o teorema 5.2 acarreta que a TL de uma integral é

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{5.2.4}$$

Exemplo 5.3 *Calcule* $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t-\tau)d\tau\right\}$

Solução: Veja que $f(t) = e^t$ e $g(t) = \operatorname{sen} t$, usando o teorema 5.2, temos

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t-\tau)d\tau\right\} &= \mathscr{L}\{e^t\}\mathscr{L}\{\operatorname{sen} t\} \\
&= \frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

A transformada inversa do teorema da convolução é muito utilizado para calcular TL inversa de um produto de duas transformadas. Então pelo teorema 5.2, temos

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} \quad = \quad f*g \tag{5.2.5}$$

Exemplo 5.4 *Calcule* $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\}$

Solução: Temos que

$$F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2+k^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = g(t) = \frac{1}{k}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \frac{1}{k}\operatorname{sen} kt$$

Por 5.2.5 concluimos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+k^2}\right\} = \frac{1}{k^2}\int_0^t \operatorname{sen} k\tau \operatorname{sen} k(t-\tau)d\tau \tag{5.2.6}$$

Considerando as seguintes igualdades trigonométricas

$$\begin{array}{rrcl} (i) & \cos(A+B) & = & \cos A\cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \\ (ii) & \cos(A-B) & = & \cos A\cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \end{array}$$

Subtraindo (i) de (ii), obtemos

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

Se fizermos $A = kt$ e $B = (t-\tau)k$, podemos calcular a integral 5.2.6

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} &= \frac{1}{2k^2}\int_0^t \left[\cos k(2\tau - t) - \cos kt\right] d\tau \\ &= \frac{1}{2k^2}\int_0^t \cos k(2\tau-t)d\tau - \cos kt \int_0^t d\tau \\ &= \frac{1}{2k^2}\left[\frac{1}{2k}\operatorname{sen} kt - t\cos kt + \frac{1}{2k}\operatorname{sen} kt\right] \\ &= \frac{1}{2k^3}(\operatorname{sen} kt - kt\cos kt) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.3 TRANSFORMADA DE UMA FUNÇÃO PERIÓDICA

É possível calcularmos a TL de uma função periódica, desde que esta tenha um período T, onde $T > 0$. Obtemos a transformada por meio de uma integração sobre o intervalo $[0, T]$.

Teorema 5.3 (Transformada de uma Função Periódica) *Seja $f(t)$ contínua por partes no intervalo $[0,\infty)$ e de ordem exponencial. Se $f(t)$ for periódica de período T, então*

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

Prova: Escrevendo a TL com duas integrais temos

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{5.3.7}$$

Se fizermos $t = u + T$, a última integral torna-se

$$\int_T^{\infty} e^{-st} f(t)dt \quad = \quad \int_0^{\infty} e^{-s(u+T)} f(u+T)du \quad = \quad e^{-sT} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u)du \quad = \quad e^{-sT} \mathscr{L}\{f(t)\}$$

Voltando em 5.3.7, temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \int_0^T e^{-st} f(t)dt + e^{-sT} \mathscr{L}\{f(t)\} \\
\mathscr{L}\{f(t)\} - e^{-sT} \mathscr{L}\{f(t)\} &= \int_0^T e^{-st} f(t)dt \\
(1 - e^{-sT}) \mathscr{L}\{f(t)\} &= \int_0^T e^{-st} f(t)dt \\
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 5.5 *Encontre a TL da função periódica representada pelo gráfico abaixo*

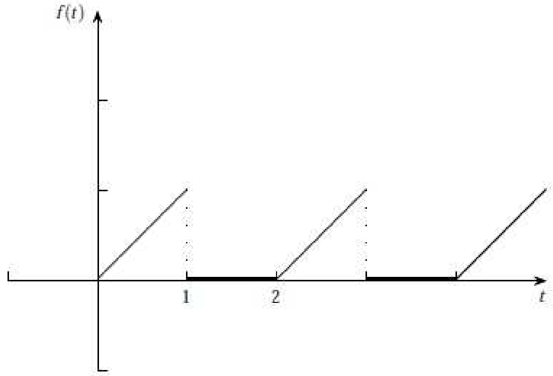


Figura 5: Função Periódica

Solução: Podemos definir a função, no intervalo $0 \leq t < 2$, da seguinte forma

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

e fora do intervalo por $f(t+2) = f(t)$. Como $T = 2$, usamos o teorema 5.3 e a integração por partes temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st} f(t)dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 e^{-st}tdt + \int_1^2 e^{-st}0dt\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 e^{-st}tdt\right)
\end{aligned}$$

Fazendo $u = t \Rightarrow du = dt$ e $dv = e^{-st} \Rightarrow v = -e^{-st}/s$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(-t\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s}dt\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\bigg|_0^1\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{-se^{-s} - e^{-s} + 1}{s^2}\right) \\
&= \frac{1-e^{-s}(s+1)}{s^2(1-e^{-2s})} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

6 RESOLVENDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM TL

6.1 PROCEDIMENTO

A TL nos possibilita calcular equações diferenciais lineares que apresentam problemas de valor inicial com coeficientes constantes, "o método consiste em resolver equações diferenciais como se fossem equações algébricas"(FIGUEIREDO; NEVES, 2012, p. 180). Veja por exemplo o seguinte problema de valor inicial

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \quad = \quad g(t),$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)},$$

Onde a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ e $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ são constantes. Usando a linearidade da TL, escrevemos

$$a_n \mathscr{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1}\mathscr{L}\left\{\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\} + \ldots + a_1 \mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + a_0 \mathscr{L}\{y\} \quad = \quad \mathscr{L}\{g(t)\} \qquad (6.1.1)$$

Pelo teorema 5.1, então 6.1.1 torna-se

$$\begin{aligned} G(s) &= a_n \left[s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0)\right] \\ &+ a_{n-1}\left[s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0) - \ldots - y^{(n-2)}\right] + \ldots + a_0 Y(s) \end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned} \left[a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0\right] Y(s) &= a_n \left[s^{n-1} y_0 + \ldots + y_0^{(n-1)}\right] \\ &+ a_{n-1}\left[s^{n-2} y_0 + \ldots + y_0^{(n-2)}\right] + \ldots + G(s) \end{aligned} \qquad (6.1.2)$$

Onde $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$ e $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}$. Isolando $Y(s)$ em 6.1.2 e por intermédio da TL inversa, obtemos $y(t)$

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$$

Veja que a figura 6 esquematiza o procedimento usado para calcular uma equação diferencial com a TL. Primeiro calculamos a TL da equação diferencial, assim obteremos uma equação algébrica, depois resolvemos a equação obtida. Após resolve-lá aplicamos a TL inversa, assim obtendo a solução da equação diferencial.

Figura 6: Esquema TL

Exemplo 6.1 *Resolva* $\dfrac{dy}{dt} - y = 1, y(0) = 0$

Solução: Primeiro calculamos a TL de cada membro da equação

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - \mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{1\} \\ sY(s) - y(0) - Y(s) &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Aplicando valor de $y(0)$ e resolvendo, temos

$$\begin{aligned} sY(s) - 0 - Y(s) &= \frac{1}{s} \\ Y(s)(s-1) &= \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \frac{1}{s(s-1)} \end{aligned}$$

Com o auxílio de frações parciais, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s(s-1)} &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}\\
&= \frac{A(s-1)+Bs}{s(s-1)}\\
&= \frac{As-A+Bs}{s(s-1)}
\end{aligned}$$

Usando igualdade de frações, temos

$$1 = As+Bs-A$$

Através da igualdade de polinômios temos

$$\begin{cases} A+B = 0\\ -A = 1\end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações temos que $A=1$ e $B=-1$. Então

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s-1}+\left(\frac{-1}{s}\right)\\
\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}
\end{aligned}$$

Pelos itens $a)$ e $c)$ do teorema 3.3 concluímos que

$$y(t) = e^t-1 \quad \blacksquare$$

Exemplo 6.2 *Resolva* $x''-x'-6x=0$, $x(0)=2$ *e* $x'(0)=-1$

Solução: Calculamos primeiro a TL de cada membro da equação

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{x''\}-\mathscr{L}\{x'\}-6\mathscr{L}\{x\} &= 0\\
s^2X(s)-sx(0)-x'(0)-sX(s)+x(0)-6X(s) &= 0
\end{aligned}$$

Aplicando os valores de $x(0)$ e $x'(0)$, temos

$$\begin{aligned}
s^2X(s)-2s+1-sX(s)+2-6X(s) &= 0\\
X(s)(s^2-s-6)-2s+3 &= 0\\
X(s)(s-3)(s+2) &= 2s-3\\
X(s) &= \frac{2s-3}{(s-3)(s+2)}
\end{aligned}$$

Com a ajuda de frações parciais, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{2s-3}{(s-3)(s+2)} &= \frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2)+B(s-3)}{(s-3)(s+2)}\\ \frac{2s-3}{(s-3)(s+2)} &= \frac{As+Bs+2A-3B}{(s-3)(s+2)}\end{aligned}$$

Usando igualdade de frações temos

$$2s-3 = As+Bs+2A-3B$$

Por igualdade polinômios podemos dizer que

$$\begin{cases} A+B = 2 \\ 2A-3B = -3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações acima temos que $A = 3/5$ e $B = 7/5$. Então

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{\frac{3}{5}}{s-3}+\frac{\frac{7}{5}}{s+2}\\ X(s) &= \frac{3}{5(s-3)}+\frac{7}{5(s+2)}\end{aligned}$$

Aplicando a TL inversa, temos

$$\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{3}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}+\frac{7}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

Usando o item $c)$ do teorema 3.3, concluímos que

$$x(t) = \frac{3e^{3t}+7e^{-2t}}{5} \quad \blacksquare$$

6.2 APLICAÇÕES

Equações diferenciais lineares com coeficientes constantes podem descrever eventos físicos, por exemplo, o fluxo de corrente elétrica em um circuito simples em série, o movimento de uma massa presa a uma mola, entre outros problemas. Podemos usar a TL como ferramenta para chegarmos as soluções destes problemas, desde que eles tenham condições iniciais.

Vejamos um exemplo em que podemos usar a TL para determinar a corrente em um circuito em série L-R-C. Para isso consideremos a segunda lei de Kircchhoff. “A soma da queda de tensão em um indutor, resistor e capacitor é igual à voltagem impressa $E(t)$”(ZILL; CULLEN, 2007, p.401). Temos que a queda da tensão através do indutor é $L\dfrac{di}{dt}$, através do resistor é $Ri(t)$ e do capacitor é $\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau$, onde L,R e C são contantes e $i(t)$ é a corrente. Então um circuito do tipo satistaz a equação abaixo:

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \quad = \quad E(t) \tag{6.2.3}$$

Exemplo 6.3 *Determine a corrente $i(t)$ em um circuito em série L-C-R quando $L = 0,1$ henry, $R = 20$ ohms, $C = 10^{-3}$ farad, $i(0) = 0$ e a voltagem impressa em $E(t)$ é dada na figura 7.*

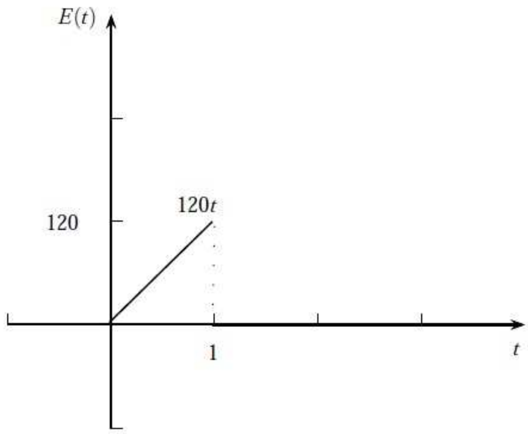


Figura 7: Voltagem

Solução: A equação de um circuito é dada pela equação 6.2.3. Veja na figura 7 que a voltagem está desligada para $t \geq 1$, então temos

$$E(t) \quad = \quad 120t - 120t\mu(t-1) \tag{6.2.4}$$

Veja que ainda não podemos aplicar o segundo teorema de translação na equação 6.2.4, então rescrevemos ela como

$$E(t) \quad = \quad 120t - 120(t-1)\mu(t-1) - 120\mu(t-1)$$

Agora a equação 6.2.3 torna-se

$$0,1\frac{di}{dt} + 20i + 10^3\int_0^t i(\tau)d\tau \quad = \quad 120t - 120(t-1)\mu(t-1) - 120\mu(t-1) \tag{6.2.5}$$

Aplicando a TL na equação 6.2.5, obtemos

$$0,1sI(s) + 20I(s) + 10^3\frac{I(s)}{s} \quad = \quad 120\left[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}\right]$$

Multiplicando por $10s$ podemos reescrever assim

$$\begin{aligned}(s+100)^2 I(s) &= 1200\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - e^{-s}\right]\\ I(s) &= 1200\left[\frac{1}{s(s+100)^2} - \frac{e^{-s}}{s(s+100)^2} - \frac{e^{-s}}{(s+100)^2}\right]\end{aligned}$$

Com a ajuda das frações parciais podemos escrever

$$\begin{aligned}I(s) = 1200 \Bigg[&\frac{1/10000}{s} - \frac{1/10000}{s+100} - \frac{1/100}{(s+100)^2} - \frac{1/10000}{s}e^{-s}\\ &+\frac{1/10000}{s+100}e^{-s} + \frac{1/100}{(s+100)^2}e^{-s} - \frac{1}{(s+100)^2 e^{-s}}\Bigg]\end{aligned}$$

Usando a TL inversa do segundo teorema de translação, temos

$$\begin{aligned}i(s) &= \frac{3}{25}[1-\mu(t-1)] - \frac{3}{25}[e^{-100t} - e^{-100(t-1)}\mu(t-1)]\\ &-12te^{-100t} - 1188(t-1)e^{-100(t-1)}\mu(t-1) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Agora estudaremos um sistema de massa-mola amortecido com movimento forçado. Isso acontece quando uma força externa $f(t)$ age sobre uma massa vibrante em uma mola. Para encontrarmos a equação diferencial do movimento forçado, ao adicionarmos $f(t)$ na equação diferencial do movimento livre amortecido, temos

$$my'' + \beta y' + ky = f(t) \tag{6.2.6}$$

onde m, β e k são respectivamente: a massa, o coeficiente de amortecimento e a constante da mola.

Dividindo 6.2.6 por m,

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = F(t) \tag{6.2.7}$$

onde $F(t) = f(t)/m$, $2\delta = \beta/m$ e $\omega^2 = k/m$.

Exemplo 6.4 *Um sistema de amortecimento de massa-mola, com uma externa força atuando no intervalo* $0 < t < \pi$*, é representado pelas seguintes equações:*

$$\begin{aligned}y'' + 2y' + 2y &= r(t),\\ r(t) &= \begin{cases} 10\,\mathrm{sen}\,2t & se \quad 0 < t < \pi \\ 0 & se \quad t > \pi\end{cases}\end{aligned}$$

com $y(0) = 1, y'(0) = -5.$

Solução: Usando 4.2.2 e 4.2.3, podemos rescrevemos $r(t)$ da seguinte forma

$$r(t) = 10\,\text{sen}\,2t - 10\,\text{sen}\,2(t-\pi)\mu(t-\pi)$$

assim, temos

$$y'' + 2y' + 2y = 10\,\text{sen}\,2t - 10\,\text{sen}\,2(t-\pi)\mu(t-\pi)$$

para resolver esta equação diferencial, aplicamos a TL em ambos os lados da igualdade

$$\mathscr{L}\{y''\} + \mathscr{L}\{2y'\} + \mathscr{L}\{2y\} = \mathscr{L}\{10\,\text{sen}\,2t\} - \mathscr{L}\{10\,\text{sen}\,2(t-\pi)\mu(t-\pi)\}$$

agora usando o item $e)$ do teorema 3.2 e os teoremas 4.2 e 5.1, temos

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{20}{s^2+4} - \frac{20e^{s\pi}}{s^2+4}$$

aplicando os valores $y(0)$ e $y'(0)$,

$$\begin{aligned}
s^2Y(s) - s + 5 + 2sY(s) - 2 + 2Y(s) &= \frac{20}{s^2+4} - \frac{20e^{s\pi}}{s^2+4}\\
Y(s)(s^2+2s+2) - s + 3 &= \frac{20}{s^2+4} - \frac{20e^{s\pi}}{s^2+4}\\
Y(s) &= \frac{20}{(s^2+4)(s^2+2s+2)} - \frac{20e^{s\pi}}{(s^2+3)(s^2+2s+2)} + \frac{s-4}{s^2+2s+2}
\end{aligned}$$

agora podemos usar a TL inversa,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{20}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{20e^{s\pi}}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}\right\}\\
&+ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-4}{s^2+2s+2}\right\}
\end{aligned}$$

resolveremos separadamente as transformadas inversas da equação acima, primeiramente faremos a TL inversa da primeira fração, para isso temos que usar as frações parciais, então

$$\begin{aligned}
\frac{20}{(s^2+4)(s^2+2s+2)} &= \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2}\\
\frac{20}{(s^2+4)(s^2+2s+2)} &= \frac{(As+B)(s^2+2s+2)+(Cs+D)(s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}
\end{aligned}$$

pela igualdade de frações, podemos escrever

$$\begin{aligned}
20 &= (As+B)(s^2+2s+2)+(Cs+D)(s^2+4)\\
20 &= As^3 + 2As^2 + 2As + Bs^2 + 2Bs + 2B + Cs^3 + 4Cs + Ds^2 + 4D
\end{aligned}$$

agora pela igualdade de polinômios, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} A+C &= 0 \\ 2A+B+D &= 0 \\ 2A+2B+4C &= 0 \\ 2B+4D &= 20 \end{cases}$$

resolvendo esse sistema, temos que $A=-2$, $B=-2$, $C=2$ e $D=6$, então

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{20}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s-2}{s^2+4}+\frac{2s+6}{s^2+2s+2}\right\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s-2}{s^2+4}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+6}{s^2+2s+2}\right\} \end{aligned}$$

veja que ainda não podemos aplicar a TL inversa, para isso precisamos ajustar as frações, da seguinte forma

$$\begin{aligned} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+4}-\frac{2}{s^2+4}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+2+4}{s^2+2s+1+1}\right\} \\ &= -2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+2+4}{(s+1)^2+1}\right\} \\ &= -2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1}+\frac{4}{(s+1)^2+1}\right\} \\ &= -2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}+2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}+4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} \end{aligned}$$

nas duas últimas transformadas, podemos usar a inversa do primeiro teorema de translação, então podemos escrever

$$= -2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}+2\mathscr{L}^{-1}\left\{\left.\frac{s}{s^2+1}\right|_{s\to s+1}\right\}+4\mathscr{L}^{-1}\left\{\left.\frac{1}{s^2+1}\right|_{s\to s+1}\right\}$$

usando os itens $d)$ e $e)$ do teorema 3.3 e a inversa do primeiro teorema de translação, temos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{20}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}\right\} = -2\cos 2t-\operatorname{sen} 2t+2e^{-t}\cos t+4e^{-t}\operatorname{sen} t \tag{6.2.8}$$

a segunda transformada inversa é

$$-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{20e^{-s\pi}}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}\right\}$$

observamos que podemos aplicar a inversa do segundo teorema de translação, então podemos escrever

$$-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{20}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}\right\}_{t\to t-\pi}\mu(t-\pi) \tag{6.2.9}$$

vejamos que a transformada 6.2.9 é parecida com a transformada 6.2.8, então de forma analoga a 6.2.8 temos

$$
\begin{aligned}
-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{20}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}\right\}_{t\to t-\pi}\mu(t-\pi) &= -\{-2\cos 2t-\operatorname{sen}2t\\
&+ 2e^{-t}\cos t+4e^{-t}\operatorname{sen}t\}_{t\to t-\pi}\mu(t-\pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\Big[-2\cos 2(t-\pi)-\operatorname{sen}2(t-\pi)+2e^{-(t-\pi)}\cos(t-\pi)\\
&+ 4e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi)\Big]\mu(t-\pi)
\end{aligned}
\tag{6.2.10}
$$

para resolver a terceira transformada, temos que ajustar a fração e usar a inversa do primeiro teorema de translação

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{s^2+2s+2}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1-4}{(s+1)^2+1}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}-4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\Big|_{s\to s+1}\right\}-4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\Big|_{s\to s+1}\right\}
\end{aligned}
$$

agora usando os itens $d)$ e $e)$ do teorema 3.3 e a inversa do primeiro teorema de translação, obtemos

$$
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{s^2+2s+2}\right\} = e^{-t}\cos t-4e^{-t}\operatorname{sen}t \tag{6.2.11}
$$

lembrando que

$$
\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)
$$

para encontrarmos $y(t)$ basta somarmos as equações 6.2.8, 6.2.10 e 6.2.11

$$
\begin{aligned}
y(t) &= -2\cos 2t-\operatorname{sen}2t+2e^{-t}\cos t+4e^{-t}\operatorname{sen}t-[-2\cos 2(t-\pi)-\operatorname{sen}2(t-\pi)\\
&+ 2e^{-(t-\pi)}\cos(t-\pi)+4e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi)\Big]\mu(t-\pi)+e^{-t}\cos t-4e^{-t}\operatorname{sen}t\\
y(t) &= -2\cos 2t-\operatorname{sen}2t+3e^{-t}\cos t-[-2\cos 2(t-\pi)-\operatorname{sen}2(t-\pi)\\
&+ 2e^{-(t-\pi)}\cos(t-\pi)+4e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi)\Big]\mu(t-\pi)
\end{aligned}
$$

é o mesmo que

$$
y(t) = \begin{cases} 3e^{-t}\cos t-2\cos 2t-\operatorname{sen}2t & , \quad 0<t<\pi\\ e^{-t}\left[(3+2e^{\pi})\cos t+4e^{\pi}\operatorname{sen}t\right] & , \quad t>\pi \end{cases} \qquad \blacksquare
$$

A função $y(t)$ representa o movimento da massa presa a mola, vejamos a figura 8

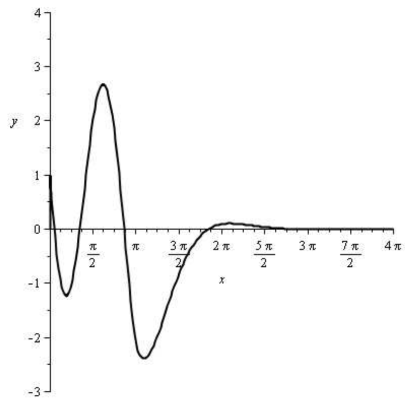


Figura 8: Gráfico $y(t)$

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho fizemos um estudo detalhado sobre a trasnsformada de Laplace, vimos que ela é uma transformada integral com o intervalo de integração de $[0,\infty)$, integrais deste tipo são conhecidas como integrais impróprias.

Se resolvermos a transformada de Laplace de funções generalizadas por meio da definição da transformada, obtemos fórmulas gerais, que facilitam os cálculos, por exemplo, ao resolver $\mathscr{L}\{\operatorname{sen} 10t\}$, usando apenas a fórmula geral da transformada de seno, chegamos ao resultado rapidamente, no entanto para resolvermos a mesma transformada usando a integral imprópria, os cálculos seriam mais difíceis e demorados.

Usar a transformada inversa é resolver o problema inverso da transformada de Laplace, isto é, primeiro tinhamos uma função $f(t)$ que ao aplicarmos a transformada de Laplace obtinhamos uma função do tipo $F(s)$, e com transformada inversa temos uma função do tipo $F(s)$ e ao usarmos essa transformada inversa obtemos uma função $f(t)$, intuitivamente o que a transformada de Laplace faz com uma função a transformada inversa desfaz. A transformada de Laplace inversa também é uma integral, porém para realizar seus cálculos é preciso o uso de conceitos de variáveis complexas e por esse motivo não realizamos as demonstrações das fórmulas gerais da transformadade de Laplace inversa, pois os conceitos de variáveis está além da finalidade do trabalho. O estudo de frações parciais se mostrou de suma importância para encontrarmos a transformada de Laplace inversa.

A apresentação dos teoremas de translação nos trouxe um bom suporte para resolvermos a transformada de Laplace de funções excessivamente difíceis.

Ao estudarmos a transformada de uma derivada, obtemos base suficiente para resolvermos equações diferenciais com o auxílio da transformada de Laplace, observamos que ao aplicar a transformada em uma derivada, ela transforma a derivada em uma equação algébrica, assim facilitando os cálculos. Porém também vimos que para chegarmos a essa equação algébrica, precisamos de condições iniciais dadas pelo problema a ser estudado e que podemos usar a transformada de Laplace apenas em equações diferenciais com coeficientes constantes.

Para encontrarmos a solução de uma equação diferencial usando a transformada de Laplace, vimos que a transformada inversa é importante, pois ao aplicarmos a transformada de Laplace na equação diferencial obtemos uma equação algébrica a qual temos que resolvê-lá, depois usamos a transformada inversa para obtemos a solução final.

Sabemos que as equações diferenciais são usadas para descrever eventos físicos, deste modo resolvemos duas situações diferentes, a primeira considerando um circuito em série o qual tínhamos que encontrar sua corrente e o segundo um sistema de massa-mola com movimento forçado, onde encontramos a função que representa o movimento da massa presa a mola.

Assim diante de todo o estudo que foi feito concluímos que a transformada de Laplace é uma excelente ferramenta para resolvermos equações diferenciais com coeficientes constantes e com condições iniciais.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

DINIZ, G. L. **História das Equações Diferenciais**. 2006. Disponível em: <http://www.ufmt.br/icet/matematica/geraldo/histed.htm>. Acesso em: 10 de dezembro de 2012.

FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3ª. ed. São Paulo: HARBRA, 1994.

TONIDANDEL, D. A. V.; ARAúJO, A. E. A. de. Transformada de laplace: uma obra de engenharia. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 2012. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/342601.pdf>. Acesso em: 16 de dezembro de 2012.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. 3ª. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2007.

ANEXO A – TRANSFORMADA DE LAPLACE: FÓRMULAS GERAIS

Fórmula	Nome, Comentários	Seção
$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$	Definição da Transformada Transformada Inversa	3.1 3.3
$\mathscr{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\alpha\mathscr{L}\{f(t)\}+\beta\mathscr{L}\{g(t)\}$	Linearidade	3.1
$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$ $\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)$	Primeiro Teorema de Translação	4.1
$\mathscr{L}\{f'\}=s\mathscr{L}\{f\}-f(0)$ $\mathscr{L}\{f''\}=s^2\mathscr{L}\{f\}-sf(0)-f'(0)$ $\mathscr{L}\left\{f^{(n)}\right\}=s^n\mathscr{L}\{f\}-s^{n-1}f(0)-\ldots-f^{n-1}(0)$ $\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}\mathscr{L}\{f\}$	Transformada de Derivadas Transformada de Integrais	5.1 5.2
$\mathscr{L}\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$ $\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=f(t-a)u(t-a)$	Segundo Teorema de Translação	4.2
$\mathscr{L}\{tf(t)\}=-F'(s)$ $\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(s)da$	Derivada da Transformada Integral da Transformada	4.3
$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ $\mathscr{L}\{f*g\}=\mathscr{L}\{f\}\mathscr{L}\{g\}$	Convolução	5.2
$\mathscr{L}\{f\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$	Transformada de Funções Periódicas	5.3