

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RODRIGO AMARAL CALISTO

GEOMETRIA FRACTAL

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2013

RODRIGO AMARAL CALISTO

GEOMETRIA FRACTAL

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Viviane Colucci

CAMPO MOURÃO

2013

TERMO DE APROVAÇÃO

Rodrigo Amaral Calisto

Geometria Fractal

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Viviane Colucci

Prof. Msc. Lilian Caroline Candido

Prof. Msc. Tatiane Cazarin da Silva

Campo Mourão, 2013

“Este trabalho é dedicado aos meus familiares, que sempre dispensaram muito carinho sem medir esforços em ajudar, para que chegasse ao final de mais esta etapa de minha vida. A aqueles que colocaram parte de seu tempo a minha disposição para trabalhos e estudos, pois sem elas não seria possível o termino desta jornada.”

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por iluminar o meu caminho na conquista desta etapa. Agradeço à professora orientadora Viviane Colucci pelo acompanhamento e revisão do estudo. Meu especial agradecimento as pessoas que amo e aos amigos que me acompanharam durante todos os momentos deste estudo. E a todos que, diretamente e indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

“Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, um latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta.”
Benoit Mandelbrot

RESUMO

CALISTO, Rodrigo. Geometria Fractal. 49 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

Neste trabalho será abordada a Geometria Fractal nomeada no início dos anos 80 por Benoit Mandelbrot, considerado por muitos o pai dessa geometria. Essa nova geometria ficou caracterizada por conter figuras que possuem dimensão fracionária e pela autossimilaridade destas figuras, que são muito irregulares para serem descritas na tradicional linguagem da geometria Euclidiana. Sem rigor matemático pode-se definir fractais como objetos que apresentam autossemelhança, ou seja, um fractal é um objeto cuja geometria se repete infinitamente em porções menores, semelhantes ao próprio objeto. Serão apresentadas diferentes definições de fractais que surgiram com o aprimoramento de sua teoria. Tendo uma melhor compreensão da Geometria Fractal será explorado um dos principais aspectos que a distinguem da Euclidiana, as dimensões fracionárias. Neste trabalho apresenta-se uma breve discussão sobre algumas definições relacionadas à Geometria Fractal, tida como a matemática do futuro.

Palavras-chave: Geometria, Geometria Fractal, dimensão de Hausdorff

ABSTRACT

CALISTO, Rodrigo. Fractal Geometry. 49 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

This work will be addressed Fractal Geometry named in the early 80s by Benoit Mandelbrot, considered by many the father of this geometry. This new geometry was characterized by containing figures which have fractional dimension and the self-similarity of these figures, which are very irregular to be described in traditional Euclidean geometric language. Without mathematical rigor, Fractal Geometry can be defined as objects that exhibit fractal self similarity, ie, a fractal is an object whose geometry is repeated infinitely in smaller portions, similar to the object itself. It will be presented different definitions of fractals that have emerged with the improvement of his theory. Having a better understanding of fractal geometry, it will be explored one of the main aspects that distinguish Fractal and Euclidean geometry fractional dimensions. This paper presents a brief discussion of some definitions related to fractal geometry, considered the future of mathematics.

Keywords: Geometry, fractal geometry, Hausdorff dimension.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – COBERTURA DE UM CONJUNTO \mathcal{C}	21
FIGURA 2 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE $H^S(F)$, COMO FUNÇÃO DE S	23
FIGURA 3 – SEGMENTO DE RETA DIVIDIDA EM N PARTES	23
FIGURA 4 – QUADRADO DIVIDIDO EM N^2 PARTES	24
FIGURA 5 – QUADRADO DE LADO L DIVIDIDO NO SEU PONTO MÉDIO N VEZES	25
FIGURA 6 – CUBO DIVIDIDO EM N^3 PARTES	27
FIGURA 7 – EVOLUÇÃO CURVA DE KOUCH	32
FIGURA 8 – OS QUATRO PRIMEIROS NÍVEIS PARA A CONSTRUÇÃO DA CURVA DE KOCH E SEUS CORRESPONDENTES COMPRIMENTOS.	32
FIGURA 9 – ILHA DE KOCH	34
FIGURA 10 – CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DE CANTOR	34
FIGURA 11 – CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI	36
FIGURA 12 – CONSTRUÇÃO ESPONJA, CONSIDERANDO UM DOS LADOS DO CUBO QUE RESULTARÁ MA ESPONJA DE MENGER	38
FIGURA 13 – ESPONJA DE MENGER	39
FIGURA 14 – BRÓCOLIS	40
FIGURA 15 – GIRASSOL	40
FIGURA 16 – FOLHAS	40
FIGURA 17 – FOLHAS	40
FIGURA 18 – FRACTAIS ALEATÓRIOS	41
FIGURA 19 – FRACTAIS ALEATÓRIOS	41
FIGURA 20 – CARAMUJO	41
FIGURA 21 – $C = -1,25 + 0I$	42
FIGURA 22 – $C = 0,3 + 0,5I$	42
FIGURA 23 – $C = 0,5 - 0,6I$	42
FIGURA 24 – $C = 0,3 + 0I$	43
FIGURA 25 – $C = 0,3 + 0,1I$	43
FIGURA 26 – $C = 0$	43
FIGURA 27 – CONJUNTO DE JULIA	43
FIGURA 28 – CONJUNTO DE MANDELBROT COMO UM CATÁLOGO DE CONJUNTOS DE JULIA	45
FIGURA 29 – ALGUMAS AMPLIAÇÕES DO CONJUNTO DE MANDELBROT	45

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– N ITERAÇÕES NO QUADRADO	25
TABELA 2	– N ITERAÇÕES DA ILHA DE KOCH	33
TABELA 3	– N ITERAÇÕES NO CONJUNTO DE CANTOR	35
TABELA 4	– N ITERAÇÕES NO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI	37

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	HISTÓRICO DE BENOIT MANDELBROT	11
3	CARACTERÍSTICA DOS FRACTAIS	13
3.1	ESPAÇO MÉTRICO	13
3.2	DIMENSÃO	17
3.2.1	Dimensão Euclidiana	18
3.2.2	Dimensão topológica	18
3.2.3	Dimensão Hausdorff	21
3.2.4	Dimensão Fractal	27
4	FRACTAIS	29
4.1	FRACTAIS GEOMÉTRICOS	31
4.1.1	Curvas de Koch	31
4.1.2	Conjunto de Cantor	34
4.1.3	Triângulo de Sierpinski	36
4.1.4	Esponja de Menger	37
4.2	FRACTAIS DA NATUREZA	39
4.3	FRACTAIS COMPUTACIONAIS	41
4.3.1	Conjunto de Julia	42
4.3.2	Conjunto de Mandelbrot	43
4.4	APLICAÇÕES	45
5	CONCLUSÃO	48
	REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

A geometria é uma área da matemática responsável pelo estudo das formas e de suas propriedades. Com ela, o homem pôde organizar e sistematizar áreas. Os postulados de Euclides deram origem a Geometria Euclidiana. Os estudos geométricos fazem parte da vida cotidiana e são amplamente empregados em diversas situações: seja na medição de uma simples parede ou no planejamento de uma cidade.

A Geometria Euclidiana difundida durante vários séculos, é a mais conhecida dentre as geometrias estudadas. Contudo, há outros tipos de geometria que surgiram nos últimos séculos como, por exemplo, a Geometria Fractal que não está embasada nos postulados de Euclides e por isso é considerada uma geometria não-euclidiana.

A Geometria Fractal expõe o traçado de formas irregulares e fragmentadas que a Geometria Euclidiana não apresenta, por meio de procedimentos sistematizados e lógicos. Apresenta estruturas geométricas de grande complexidade e beleza infinita.

De acordo com (FRAME; MANDELBROT, 2004), “os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões completos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita.” O autor constatou ainda que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza. A intenção de Mandelbrot ao usar a palavra Fractal para nomear a teoria que estava descrevendo foi juntar em uma só palavra uma extensa classe de objetos conhecidos anteriormente como curvas monstros e acrescentar outras que ele estudou e desenvolveu.

Neste trabalho estudaremos a teoria iniciada por Mandelbrot sobre Geometria Fractal, sendo que no Capítulo 2 faremos um breve estudo sobre a vida de Benoit Mandelbrot, matemático polonês considerado por muitos o criador da Geometria Fractal.

Na sequência, apresentaremos conceitos e as principais características de um fractal, as definições de dimensão Euclidiana, Hausdorff e Fractal.

O capítulo 4 será dedicado à apresentação dos fractais, uma classe de conjuntos que têm

sido identificados, frequentemente, cujo estudo motivou o desenvolvimento da geometria fractal, algumas imagens considerada fractais da natureza e alguns fractais gerados por meio de sistemas de computador como o conjunto de Julia e o conjunto de Mandelbrot. Para exemplificar a aplicação dos fractais nas mais variadas áreas escolhemos uma aplicação que mostra o estudo da construção de uma usina hidrelétrica e a drástica alteração na dinâmica biológica que causa nos rios.

2 HISTÓRICO DE BENOIT MANDELBROT

O surgimento da Geometria Fractal confunde-se com a história de seu próprio criador, Benoit Mandelbrot. Inicialmente ele não tinha o domínio da tabuada e não aprendeu corretamente o alfabeto, mas tinha uma incrível mente visual. Com aptidão geométrica acentuada, Mandelbrot não via com bons olhos a crescente algebrização da Matemática promovida pelo grupo Bourbaki na primeira metade do século XX, na França, onde morava na época.

Benoit Mandelbrot nasceu na Polônia em 1924. Sua família migrou para à França, devido à 2ª Guerra Mundial. Sua educação foi responsabilidade de seu tio Szolem Mandelbrot, que era professor de Matemática no College de France. Em 1944 Benoit frequentou o Lycée du Parc, de 1945 a 1947 estudou na École Polytechnique. De 1947 a 1949, estudou no California Institute of Technology. Por fim retornou à França, e com isso sua carreira acadêmica dividiu-se entre França e Estados Unidos da América.

Até 1958 Mandelbrot era membro do Centro Nacional de la Recherche Scientifique, passou um ano no Instituto de Estudos Avançados em Princeton, Nova Jersey. Em 1955 casou-se e mudou-se para Genebra, na Suíça, onde trabalhou para a Université Lille Nord de France.

Em 1958, mudou-se para os Estados Unidos, para trabalhar no Instituto de Pesquisa James Watson da IBM (International Business Machines Corporation), onde trabalhou até se tornar professor.

Segundo (BARBOSA, 2005, p.11) Na IBM deparou-se com questões de ruídos nas linhas telefônicas utilizadas em rede entre os computadores. Mandelbrot soube dos engenheiros que algum ruído não podia ser eliminado e interferia nos sinais; a aleatoriedade e a irregularidade dos ruídos afastavam os engenheiros da busca de soluções. Resolveu o problema empregando um trabalho de Georg Cantor chamado Poeira de Cantor.

Mandelbrot estava insatisfeito com a Geometria Clássica. Como tinha se tornado pesquisador após concluir seu doutorado, notou que ao explorar e resolver diversos problemas, os pontos, as retas, os círculos, não apresentavam abstrações para compreender a complexidade da natureza. Trabalhou em vários problemas que aparentemente não tinham qualquer relação entre

si. Dentre eles estão as enchentes do rio Nilo, as cotações da Bolsa de Valores e outros.

Sua pesquisa forneceu teorias matemáticas para o fenômeno da probabilidade errática e métodos de autossemelhanças em probabilidades, termodinâmica, linguagens naturais, astronomia, geomorfologia, gráficos e arte com a ajuda do computador. Mandelbrot foi o primeiro que fez cálculos repetitivos em computadores que deram origem às famosas imagens dos fractais.

Este matemático contemporâneo ficou conhecido mundialmente como sendo o responsável pelo enorme interesse nos chamados Objetos Fractais. Sua geometria é conhecida através de bonitas gravuras coloridas que enriqueceram tanto a matemática moderna como a arte, e recebeu várias honrarias e prêmios, pelos seus feitos. Foi professor em Harvard e professor de Fisiologia na Faculdade Einstein de Medicina. Sua principal obra foi “The Fractal Geometry of Nature”, 1977, mas publicou muitos trabalhos e livros.

3 CARACTERÍSTICA DOS FRACTAIS

Os fractais são objetos que podem ser obtidos geometricamente ou aleatoriamente por meio de processos recursivos apresentando determinadas características: autossemelhança, escala, complexidade e dimensão.

Uma das principais características dos fractais é a autossemelhança nas formas. Ao se dividir o todo em partes, por menores que sejam, a parte reflete a estrutura apresentando sempre o mesmo aspecto visual em qualquer escala que seja, ampliada ou reduzida, ou seja, se parte de uma figura se assemelha à figura vista como um todo consideramos uma figura autossemelhante.

Segundo (TAYLOR, 2003) existem dois tipos de autossimilaridade: exata e estatística. “Na exata, as partes são a cópia exata dos padrões em diferentes ampliações. Na autossimilaridade estatística, os padrões não se repetem com exatidão, em vez disso, as qualidades estatísticas dos padrões é que se diferem.”

Porém, “[...] nem todos os objetos autossemelhantes são fractais. Uma linha Euclidiana, por exemplo, é exatamente autossemelhante, mas o argumento de que objetos Euclidianos são fractais é defendido por poucos” (FERNANDES, 2007, p.19).

3.1 ESPAÇO MÉTRICO

Para definirmos um espaço métrico X é necessário definir em X uma métrica.

Definição 3.1 *Uma métrica é uma aplicação $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que tem as seguintes propriedades:*

- i) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
- ii) $0 < d(x, y) < \infty, \forall x, y \in X, x \neq y$
- iii) $d(x, x) = 0, \forall x \in X$
- iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$

Tendo uma aplicação deste tipo definida em X , dizemos que X , juntamente com essa aplicação, formam um espaço métrico (*e.m.*) e denotaremos por (X, d) .

Um subconjunto S de X é compacto se toda sequência tem uma subsequência com limite em S . Sendo (X, d) um *e.m.* completo, isto é, toda a sequência de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X tem limite $x \in X$, então $H(X)$ representa o espaço formado por subconjuntos compactos X .

Definição 3.2 *Seja (X, d) um e.m. completo, $x \in X$ e $A, B \in H(X)$.*

Define-se distância de um ponto x de X a um subconjunto compacto B de X como:

$$d(x, B) = \min \{d(x, y) | y \in B\}$$

Sabemos que este valor existe devido ao fato de B ser compacto e não vazio, então

$$\exists x' \in B : d(x, B) = d(x, x').$$

Definição 3.3 *Seja (X, d) um e.m. completo, $x \in X$ e $A, B \in H(X)$.*

Define-se a distância entre dois subconjuntos compactos A e B de X da seguinte forma:

$$d(A, B) = \max \{d(x, B) | x \in A\}$$

Devido ao fato de A e B serem compactos e não vazios, sabemos que

$$\exists x \in A, \exists x' \in B | d(A, B) = d(x, x').$$

Esta definição de distância entre subconjuntos A e B de X não pode ser encarada como métrica em $H(X)$ pois nem sempre se tem

$$d(A, B) = d(B, A)$$

Definição 3.4 *A distância de Hausdorff é dada por $h(A, B) = \max \{d(A, B), d(B, A)\}$, em que (X, d) é um e.m. completo.*

Proposição 3.1 *A distância de Hausdorff é uma métrica em $H(X)$.*

Demonstração:

Seja (X, d) um *e.m.* completo e $A, B \in H(X)$.

a) $h(A, B) = h(B, A), \forall A, B \in H(X)$?

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} = \max\{d(B, A), d(A, B)\} = h(B, A), \forall A, B \in H(X).$$

b) $0 < h(A, B) < \infty, \forall A, B \in H(X), A \neq B$?

Sejam $A, B \in H(X)$, tal que $A \neq B$.

Assim, $\exists x \in A, \exists x' \in B$ tal que $d(A, B) = d(x, x')$ porque A e B são compactos não vazios.

Como d é uma métrica em X , então

$$0 \leq d(x, x') < \infty$$

e, portanto,

$$0 \leq d(A, B), \forall A, B \in H(X).$$

Se $A \neq B$, então $\exists x \in A$ tal que $x \notin B$, donde $d(A, B) \neq 0 \Rightarrow d(A, B) > 0, \forall A, B \in H(X)$.

Assim, $0 < d(A, B) < \infty$ e também, $0 < d(A, B) \leq h(A, B) < \infty, \forall A, B \in H(X), A \neq B$.

c) $h(A, A) = 0, \forall A \in H(X)$?

$$h(A, A) = \max\{d(A, A), d(A, A)\} = d(A, A) = \max\{d(a, A) | a \in A\} = \max\{\min\{d(a, a') | a' \in A\}\} = 0$$

porque

$$d(a, a) = 0, \forall a \in A \text{ e } A \neq \emptyset, \text{ e também}$$

$$d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in A.$$

d) $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B), \forall A, B, C \in H(X)$?

Vejamos primeiro que como (X, d) é *e.m.* completo, então $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \forall A, B, C \in H(X)$.

Como A, B e C são compactos e não vazios, sabemos que:

$$\exists a \in A, \exists b \in B | d(A, B) = d(a, b);$$

$$\begin{aligned} \exists a' \in A, \exists c \in C | d(A, C) = d(a', c); \\ \exists b' \in B, \exists c' \in C | d(C, B) = d(c', b'). \end{aligned}$$

Sabemos que $d(a', c) = d(A, C) \geq d(x, C), \forall x \in A$.

Em particular, $d(A, C) \geq d(a, C)$

Seja $c'' \in C$ tal que $d(a, C) = d(a, c'') = \min \{d(a, z) | z \in C\}$.

Analogamente:

$$d(c', b') = d(C, B) \geq d(z, B), \forall z \in C.$$

Em particular, $d(C, B) \geq d(c'', B)$.

Seja $b'' \in B$ tal que $d(c'', B) = d(c'', b'') = \min \{d(c'', y) | y \in B\}$.

Então, temos:

$$\begin{aligned} d(A, C) + d(C, B) &\geq d(a, C) + d(c'', B) = \\ &= d(a, c'') + d(a, c'') + d(c'', b'') \geq d(a, b'') \geq \\ &\geq \min \{d(a, y) | y \in B\} = d(a, b) = d(A, B) \\ \therefore d(A, B) &\leq d(A, C) + d(C, B), \forall A, B, C \in H(X). \end{aligned}$$

E, de forma análoga, também podemos provar que

$$d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A), \forall A, B, C \in H(X).$$

Então,

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max \{d(A, B), d(B, A)\} \leq \\ &\leq \max \{d(A, C), d(C, A)\} + \max \{d(C, B), d(B, C)\} = \\ &= h(A, C) + h(C, B) \end{aligned}$$

$$\therefore h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B), \forall A, B, C \in H(X)$$

\therefore A distância de Hausdorff é uma métrica em $H(X)$. ■

Definição 3.5 (Ponto fixo) Seja $f: X \rightarrow X$ uma aplicação de um e.m. nele próprio.

$x_f \in X$ é um ponto fixo de f se $f(x_f) = x_f$.

Entre as transformações de X tem-se aquelas que são contrações.

Definição 3.6 (*Fator de contrações*) Uma transformação $f: X \rightarrow X$ num e.m. (X, d) diz-se uma contração se existe uma constante s , com $0 \leq s < 1$, tal que: $d(f(x), f(y)) \leq s.d(x, y), \forall x, y \in X$.

O valor s chamamos de fator de contração.

Proposição 3.2 Se $f, g: X \rightarrow X$ são contrações de fatores de contração s e t respectivamente, então $f \circ g$ é uma contração de fator de contração st .

Demonstração:

$$f \text{ é contração de fator de contração } s \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq s.d(x, y), \forall x, y \in X$$

$$g \text{ é contração de fator de contração } t \Rightarrow d(g(x), g(y)) \leq t.d(x, y), \forall x, y \in X$$

$$d(f \circ g(x), f \circ g(y)) = d(f(g(x)), f(g(y))) \leq s.d(g(x), g(y)) \leq st.d(x, y), \forall x, y \in X$$

$$0 \leq s < 1 \text{ e } 0 \leq t < 1 \Rightarrow 0 \leq st < 1$$

$\therefore st$ é fator de contração de $f \circ g$. ■

Definição 3.7 (*Funções Iteradas*) Seja $f: X \rightarrow X$ uma transformação num e.m.. As iteradas sucessivas de f são transformações $f^n: X \rightarrow X$ definidas por:

$$f^0(x) = x$$

$$f^1(x) = f(x)$$

$$f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x) = f(f^n(x)), n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Se agora pensarmos em iteradas sucessivas de uma contração, podemos provar que:

Proposição 3.3 Se $f: X \rightarrow X$ é uma contração de fator de contração s , então $f^n: X \rightarrow X$ é uma contração de fator de contração s^n .

Demonstração:

Basta aplicarmos a proposição anterior $n - 1$ vezes. ■

3.2 DIMENSÃO

Dimensão descreve a quantidade de espaço que um certo conjunto ocupa. É um meio de quantificar as irregularidades de um conjunto, quando vistas em escalas muito pequenas.

Assim, uma dimensão contém bastante informação sobre as propriedades geométricas de um conjunto. A geometria euclidiana ensinada nas escolas apresenta dimensões bem definidas, ou seja, um ponto tem dimensão 0; uma linha reta dimensão 1; um plano, dimensão 2; e um volume, dimensão 3.

No entanto, a Geometria Fractal apresenta infinitas possibilidades de dimensões, associada ao formato do objeto em questão que corresponde ao grau de irregularidade em diferentes escalas, podendo ser representada por um número racional. Em um material poroso, por exemplo, levando em conta os vazios, reentrâncias e rugosidades, sua dimensão é tão ampla quanto a quantidade de números fracionários.

3.2.1 Dimensão Euclidiana

A dimensão euclidiana representa o número de coordenadas necessárias para descrever uma forma euclidiana. Por exemplo, uma coordenada (chamada comprimento) descreve uma linha. Duas coordenadas (comprimento e largura) são necessárias para descrever um plano e três coordenadas (comprimento, altura e largura) descrevem um volume. É simples então perceber que desse ponto de vista um ponto tem dimensão zero. Usualmente, a dimensão euclidiana está associada a eixos perpendiculares, especificando portanto, em uma, duas ou três dimensões, respectivamente algum ponto pertencente a uma linha, área ou volume. Por indução, podemos ampliar o raciocínio, sucessivamente, até n dimensões, ainda que seja impossível perceber além da terceira dimensão. Vale salientar que as dimensões associadas à geometria euclidiana são sempre números inteiros.

3.2.2 Dimensão topológica

A dimensão topológica D_t pode ser definida iterativamente a partir de um ponto como sendo zero. A dimensão topológica de outros objetos é dada pelo valor de D_t do elemento que o torna desconexo.

Uma cisão de subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$, onde $A \cap B \neq \emptyset$, e os conjuntos A e B são ambos abertos em X .

Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ admite pelo menos uma cisão trivial $X = X \cup \emptyset$. Um exemplo de cisão não trivial é $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Definição 3.8 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se conexo quando não admite outra cisão além da trivial. Assim, se X é conexo, $X = A \cup B$ com A, B disjuntos e abertos em $X \Rightarrow A = \emptyset$ ou*

$$B = \emptyset$$

Quando existir uma cisão não trivial $X = A \cup B$, diremos que X é desconexo.

O conjunto vazio e um ponto $\{x\}$ são exemplos triviais de conjuntos conexos. E o conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ é desconexo.

Definição 3.9 Dois conjuntos são disjuntos quando a intersecção dos conjuntos é o conjunto vazio, ou seja, quando seus elementos são distintos. Ou ainda sejam dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ se, $A \cap B = \emptyset$ então A, B são disjuntos.

Definição 3.10 Um conjunto X é compacto se, qualquer cobertura de X por conjuntos abertos admitir uma subcobertura finita. Tecnicamente, a compacidade é uma propriedade extremamente útil que permite reduzir conjuntos infinitos de condições a um número finito destas. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se é limitado e fechado.

Definição 3.11 Uma coleção \mathcal{C} de subconjuntos do espaço X é de ordem $m + 1$ se algum ponto de X encontra-se em $m + 1$ elementos de \mathcal{C} , e nenhum ponto de X encontra-se em mais do que $m + 1$ elementos em \mathcal{C} .

Dadas duas coberturas $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ numa superfície X , dizemos que \mathcal{C} é mais fina que \mathcal{C}' , ou que \mathcal{C} refina \mathcal{C}' , ou \mathcal{C} é um refinamento de \mathcal{C}' , quando, para todo $c \in \mathcal{C}$ existe algum $c' \in \mathcal{C}'$ tal que $c \subset c'$.

Definição 3.12 Um espaço X tem dimensão finita, se existe algum inteiro m tal que, para cada cobertura aberta \mathcal{C} de X , há uma cobertura aberta \mathcal{C}' de X que refina \mathcal{C} e tem como ordem no máximo $m + 1$. A dimensão topológica de X é definida como sendo o menor valor de m para o qual esta afirmação é verdadeira.

Teorema 3.1 Se Y é um subconjunto fechado de X , e se X tem dimensão finita, então o mesmo acontece com Y , e $\dim Y \leq \dim X$.

Demonstração:

Considere $\dim X = m$. Seja \mathcal{C} uma cobertura de Y por conjuntos abertos em Y .

Seja \mathcal{C}' um refinamento desta cobertura que é uma cobertura aberta de X e tem ordem no máximo $m + 1$. Então a coleção $\{B \cap Y | B \in \mathcal{C}'\}$ é uma cobertura de Y por conjuntos abertos em Y , esta tem ordem no máximo $m + 1$, e refina \mathcal{C} .

Exemplo 3.1 O intervalo $[a, b]$ tem dimensão topológica 1. Dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de tal modo que $t_i - t_{i-1} < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada i . Então, a coleção $\mathcal{C} = \{[a, t_1), (t_0, t_2), (t_1, t_3), (t_2, t_4), \dots, (t_{n-2}, t_{n-1}), (t_{n-1}, b]\}$ é uma cobertura aberta por conjuntos de diâmetro inferior a ε , e \mathcal{C} tem ordem 2. Daí $\dim[a, b] \leq 1$.

Por outro lado como $\varepsilon \leq b - a$, seja \mathcal{C} uma cobertura aberta de $[a, b]$ por conjuntos de diâmetro inferior a ε . Afirmamos que \mathcal{C} tem ordem pelo menos 2. Suponha por absurdo que \mathcal{C} tem ordem 1, logo não há dois elementos na intersecção. Uma vez que os elementos de \mathcal{C} têm diâmetro inferior a ε , a coleção \mathcal{C} deve conter mais do que um elemento, seja U um elemento de \mathcal{C} , e seja V a união de todos os outros. Então, U e V formam uma separação (cisão) de $[a, b]$, contrariamente ao fato de que este intervalo é conexo.

Exemplo 3.2 Qualquer subconjunto compacto \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 tem dimensão topológica no máximo 2.

Para provar este fato, construímos uma certa cobertura aberta \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 que tem ordem 3. Começamos definindo uma coleção \mathcal{C}_2 formadas por todas as unidades quadradas abertas (Figura 1) em \mathbb{R}^2 da seguinte forma:

$$\mathcal{C}_2 = \{(n, n+1) \times (m, m+1) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Note que os elementos de \mathcal{C}_2 são disjuntos. Além disso, definimos \mathcal{C}_1 uma coleção tomando cada borda e de um desses quadrados abertos, $e = \{n\} \times (m, m+1)$ ou $e = (n, n+1) \times \{m\}$, e expandindo-o ligeiramente para um conjunto U aberto de \mathbb{R}^2 , tendo o cuidado de garantir que, se $e \neq e'$, os conjuntos U_e e $U_{e'}$ são disjuntos. Também escolhemos cada U_e de modo que o seu diâmetro é de no máximo 2. Finalmente, definimos \mathcal{C}_0 como sendo uma coleção constituída por todas as bolas abertas de raio $\frac{1}{2}$ sobre os pontos $n \times m$. (Figura 1)

A coleção de conjuntos abertos $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_0$ cobre \mathbb{R}^2 . Cada um dos elementos tem diâmetro de no máximo 2. E tem ordem 3, uma vez que nenhum ponto de \mathbb{R}^2 pode estar em mais do que um conjunto de cada α .

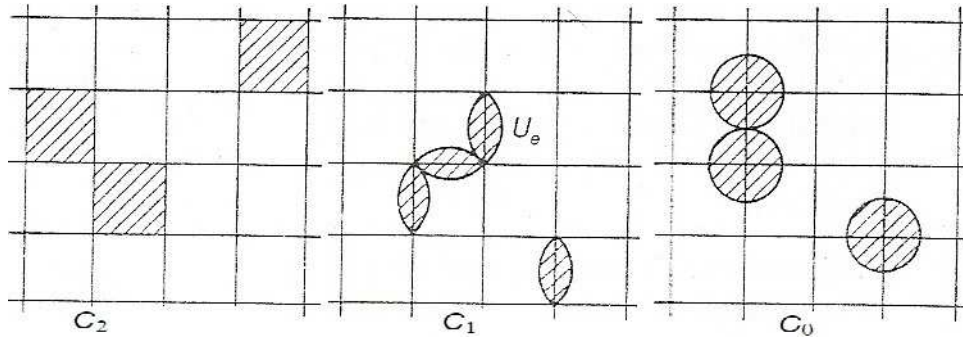


Figura 1: Cobertura de um Conjunto \mathcal{C}

3.2.3 Dimensão Hausdorff

A definição de dimensão de Hausdorff refina o conceito de dimensão topológica. A dimensão de Hausdorff de um conjunto X pode ser definida a partir do número de $N(r)$ de bolas de raio menor ou igual a r que são necessárias para cobrir X por completo. Se fizermos r menor, $N(r)$ será cada vez maior, podemos dizer que, se o modo como $N(r)$ cresce à medida que r tende para zero, então dizemos que X tem uma dimensão d .

A dimensão de Hausdorff é uma dimensão que pode assumir valores não inteiros, é igual à dimensão topológica para os conjuntos bem comportados por exemplo, o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Mas é aplicável a muitos outros conjuntos considerados menos comportados, como os fractais, que nem sempre possuem como dimensão um número natural.

Definição 3.13 Uma δ -cobertura de um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$, é uma coleção contável (finita ou numerável) de subconjuntos, $\{U_i\}$, de \mathbb{R}^n , com diâmetro no máximo δ , que cobrem F , isto é, $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ com $0 < |U_i| \leq \delta$ para cada i .

Seja F um subconjunto de \mathbb{R}^n e $s \geq 0$. Para qualquer $\delta > 0$, definimos:

$$H_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} = \delta(F) \right\} \quad (3.2.1)$$

Ou seja, tomamos todas as δ -coberturas de F e procuramos minimizar a soma das potências de ordem s dos diâmetros. Quando o δ diminui, a classe de coberturas de (F) admissíveis em (3.2.1) é reduzida. Consequentemente, o ínfimo, $H_{\delta}^s(F)$, aumenta e aproxima-se de um limite quando $\delta \rightarrow 0$. Assim, definimos:

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) = \sup_{\delta \geq 0} H_\delta^s(F) \quad (3.2.2)$$

Este limite existe para qualquer subconjunto F de \mathbb{R}^n , embora o seu valor possa ser ∞ ou 0. $H^s(F)$ chamamos de *media de Hausdorff s -dimensional* de F . Em particular, $H^s(\emptyset) = 0$ se $E \subset F$ então $H^s(E) \leq H^s(F)$; $H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H^s(F_i)$, para qualquer coleção enumerável de conjuntos $\{F_i\}$, verificando a igualdade se os F_i forem conjuntos Borel disjuntos. As medidas de Hausdorff generalizam os conceitos familiares de comprimento, área, volume.

Definição 3.14 *Seja (X, τ) um espaço topológico e G a coleção dos conjuntos abertos em Ω . A σ álgebra de Borel de Ω é o $\sigma(G)$. O conjunto $\sigma(G)$ chamamos de conjuntos borelianos em Ω .*

Observação 3.1 *Quando a topologia estiver subentendida, será dito simplesmente conjunto de Borel de X ou boreliano de X .*

Definição 3.15 *A classe dos conjuntos de Borel (ou conjuntos borelianos) é a mais pequena coleção de subconjuntos de \mathbb{R}^n que satisfaz as propriedades seguintes:*

- (a) *Os conjuntos abertos ou fechados são conjuntos de Borel.*
- (b) *A união ou intersecção, de qualquer coleção finita ou numerável de conjuntos de Borel, é um conjunto de Borel.*

Para definirmos a dimensão de Hausdorff recorreremos à equação (3.3.1), onde, para qualquer conjunto F e qualquer $\delta < 1$, $H^s(F)$ não é crescente com s . Assim por (3.3.2), $H^s(F)$ também não cresce com s . Mas temos que, se $t > s$ e $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F , então

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

Assim, se tomarmos os ínfimos sobre as δ -coberturas, obtemos $H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F)$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$ verificamos que, se $H^s(F) < \infty$, então $H^t(F) = 0$ para $t > s$. Por outro lado, daqui decorre também que, se $H^t(F) > 0$, não podemos ter $H^s(F) < \infty$, logo $H^s(F) = \infty$.

Assim, a representação gráfica de $H^s(F)$, como função de s mostra que existe um valor crítico de s , no qual $H^s(F)$ salta de ∞ para 0. Este valor crítico chama-se *dimensão de Hausdorff* de F , e escreve-se $\dim_H F$.

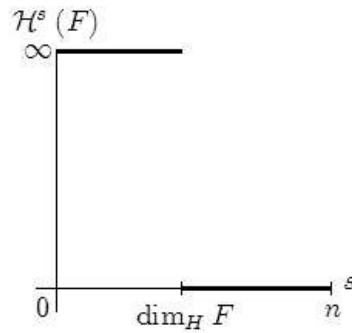


Figura 2: Representação gráfica de $H^s(F)$, como função de s .

O método de cálculo da dimensão de Hausdorff permite calcular a dimensão dos polígonos e dos fractais, com o aumento da escala, percebe-se que em seu interior existem partes exatamente autossemelhantes a todo o conjunto fractal. Para dimensão fractal usamos a definição de Hausdorff-Besicovitch que segundo (MANDELBROT, 1991, p.177)

Todavia, essa aproximação é muito arbitrária. Para tornar intrínseca é razoável, numa primeira etapa, fixar um raio máximo p e considerar todas as coberturas tais que $p_m < p$. A aproximação é tanto mais econômica quanto mais a soma $\gamma(d) \sum p_m^d$ se aproximar do limite inferior $\inf_{p_m < p} \gamma(d) \sum p_m^d$. A segunda etapa consiste em fazer p tender para 0. Ao fazê-lo, a restrição imposta aos p_m torna-se progressivamente mais estrita, tendo então o nosso $\inf_{p_m < p}$ forçosamente que aumentar. A expressão $\gamma(d) \liminf_{p \rightarrow 0} \sum p_m^d$ é bem determinada. Esta expressão, muito importante, chama-se medida de Hausdorff de p na dimensão d .

Demonstra-se, finalmente, que existe um valor D de d , tal que, para $d < D$, $\liminf_{p \rightarrow 0} \sum p_m^d < p = \infty$ e, para $d > D$, $\liminf_{p \rightarrow 0} \sum p_m^d < p = 0$. Na verdade, neste último caso tem-se $\sum p_m^d < p = 0$ para todo o p pois a melhor cobertura, qualquer que seja o p , é feita por bolas de raio muito inferior a p . Ao D assim definido chama-se *Dimensão de Hausdorff-Besicovitch*.

Tomando-se um segmento de reta de comprimento L e dividindo-o em N partes pelo ponto médio, obtém-se $N = (1; 2; 4; \dots)$. Seja U o comprimento de cada segmento obtido pela divisão deste mesmo segmento de reta. É possível observar que cada segmento de reta formada após a divisão tem comprimento $U = \frac{L}{N}$ do comprimento da reta inicial, logo $N = \frac{L}{U}$.



Fonte: Autoria própria

Figura 3: Segmento de reta dividida em N partes

Aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação dada temos:

$$D = \log N = \log \frac{L}{U}$$

observando assim que a dimensão do segmento de reta é

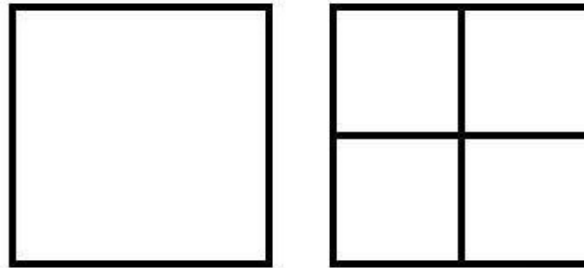
$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}} = 1$$

Para um quadrado de lado L aplicamos o mesmo processo citado anteriormente, observa-se que para obter quadrados semelhantes ao inicialmente tomado, o lado de cada quadrado formado tem que ter como medida $U = \frac{L}{N}$, podemos escrever que $N = \left(\frac{L}{U}\right)$ logo, $\left(\frac{L}{U}\right) \cdot \left(\frac{L}{U}\right)$ então $N = \left(\frac{L}{U}\right)^2$. Sabe-se que quadrados são figuras bidimensionais. Assim, aplicando o logaritmo na equação anterior, temos:

$$D = \log N = \log \left(\frac{L}{U}\right)^2$$

$$D = \log N = 2 \cdot \log \frac{L}{U}$$

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}} = 2$$



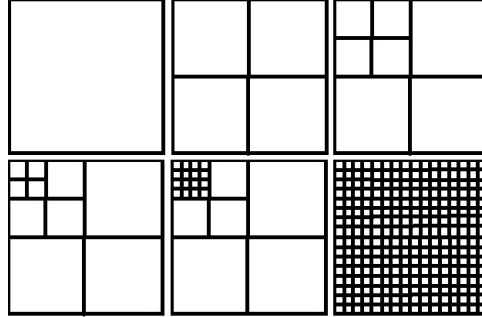
Fonte: Autoria própria

Figura 4: Quadrado dividido em N^2 partes

Depois de calcularmos o comprimento de cada figura, podemos calcular a área de uma figura irregular qualquer, basta cobrir por pequenas figurinhas ou quadradinhos de lado (comprimento) conhecidos d . Sabemos que a área de cada quadradinho é d^2 e, para cobrir a figura precisaremos de N quadradinhos. A área da figura é dada por $A = Nd^2$. Considera-se para um fractal qualquer o tamanho como $M_D = N(d^D)$, onde d^D representa a área de cada quadradinho, D representa a dimensão do fractal e N depende do número n de iterações realizadas. Deve-se levar em conta que o número M_D não pode ser 1, caso em que o tamanho é a própria figura

inicial e nem infinito.

Considerando n a quantidade de vezes que cada lado do quadrado será dividido no seu ponto médio, cada novo quadradinho construído terá lado d e área $A_n = d^D$. Então denotamos a área total por A_T .



Fonte: Autoria própria

Figura 5: Quadrado de lado L dividido no seu ponto médio n vezes

A tabela a seguir mostra a recorrência de cada divisão feita no quadrado anterior.

n	nº de quadradinho $N(n)$	d	A_n
1	4	$\frac{L}{2}$	$A_1 = \left(\frac{L}{2}\right)^D$
2	16	$\frac{L}{2^2}$	$A_2 = \left(\frac{L}{2^2}\right)^D$
3	64	$\frac{L}{2^3}$	$A_3 = \left(\frac{L}{2^3}\right)^D$
...
n	$N(n) = 4^n$	$\frac{L}{2^n}$	$A_n = \left(\frac{L}{2^n}\right)^D$

Tabela 1: n iterações no quadrado

A área total será $A_T = N(n) \cdot A(n) = 4^n \cdot \left(\frac{L}{2^n}\right)^D = \left(\frac{4}{2^D}\right)^n \cdot L^D$.

Mas essa medida de área não deve ser nula e nem infinita para qualquer nível de iteração. Assim, se $\left(\frac{4}{2^D}\right)$ for um número maior que 1, isso implica que a área é um número infinito.

Observe que fizemos n iterações, e que este n tende para o infinito.

Se

$$\left(\frac{4}{2^D}\right) > 1$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{2^D} \right)^n = \infty$$

e assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{2^D} \right)^n L^D = \infty,$$

essa área não nos interessa. E ainda se

$$\frac{4}{2^D} < 1,$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{2^D} \right)^n = 0$$

e assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{2^D} \right)^n L^D = 0.$$

Desta forma, para a área poder ser calculada é necessário que

$$\frac{4}{2^D} = 1$$

ou seja, que

$$4 = 2^D$$

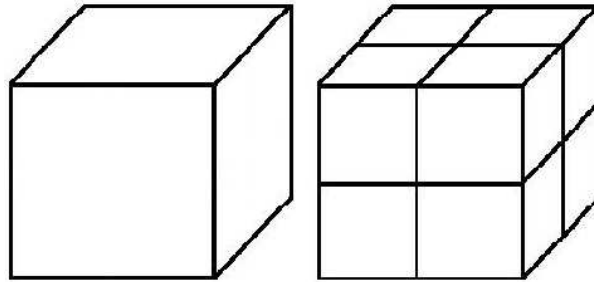
e assim $D = 2$, confirmando que a dimensão de um quadrado é 2.

Agora, tomamos um cubo de lado L e o dividindo em N partes iguais, para que os cubos formados a partir da divisão sejam semelhantes ao tomado inicialmente o lado de cada um deles tem que ter $U = \frac{L}{N}$. Podemos escrever que $N = \left(\frac{L}{U}\right)$ logo, $\left(\frac{L}{U}\right) \cdot \left(\frac{L}{U}\right) \cdot \frac{L}{U}$ então $N = \left(\frac{L}{U}\right)^3$. Um cubo é tridimensional. Assim aplicando logaritmo como demonstrado anteriormente temos:

$$D = \log N = \log \left(\frac{L}{U} \right)^3$$

$$D = \log N = 3 \cdot \log \frac{L}{U}$$

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}} = 3$$



Fonte: Autoria própria

Figura 6: Cubo dividido em N^3 partes

Por meio do processo feito anteriormente podemos concluir que a dimensão de um conjunto C qualquer, incluindo os fractais, pode ser expressa através da fórmula

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}}$$

onde D é a dimensão; N é o número de partes em cada etapa da divisão; L é o comprimento inicial (ou lado) do objeto ou figura que foi dividido em N partes iguais e U é o comprimento de cada segmento obtido por meio da divisão.

3.2.4 Dimensão Fractal

Na Geometria fractal o conceito de dimensão está associado ao formato do objeto em questão que corresponde ao grau de irregularidade em diferentes escalas, aspereza e fragmentação, o que explica o fato de terem dimensão fracionária e serem objetos ditos imperfeitos, Segundo (MANDELROT, 1991, p.176).

De entre as numerosas definições de dimensão fractal, historicamente, a primeira a ser proposta foi a de Hausdorff (Hausdorff 1919). Aplica-se a figuras muito gerais, que não têm necessariamente homotetia interna. Para a clarificar convém decompô-la em etapas.

A dimensão fractal D tem como conceito o preenchimento do espaço e para (MANDELROT, 1977) “Um dado conjunto A constitui um fractal se, em $A, D_i > D > D_t$, sendo D a dimensão fractal e D_t a dimensão topológica do conjunto A ”.

Façamos $d = D$ na expressão $\gamma(d) \liminf_{p \rightarrow 0} p_m < p \sum p_m^d$ da medida de Hausdorff. O valor que se obtém, tanto pode ser degenerado (nulo ou infinito), como não degenerado. Só este último caso, que cobre nomeadamente o conjunto de Cantor, a curva de von Koch e o universo de Fournier, tem algum interesse. Quando a medida de Hausdorff é degenerada, a expressão p^D mede

o conteúdo intrínseco de \mathbf{P} de forma imperfeita. Tal é tipicamente o caso quando \mathbf{P} é um conjunto aleatório, como, por exemplo, a trajetória do movimento browniano ou do de Cauchy ou do de Lévy. Em todos esses casos, o conceito de dimensão já é conhecido, sendo porém conveniente aprofundar um pouco mais o de conteúdo. Besicovitch teve a idéia, para levar em conta as medidas degeneradas, de substituir $\gamma(d)p^D$ por uma função $h(p)$ mais geral, satisfazendo $h(0) = 0$. Pode existir uma função-calibre $h(p)$ tal que a quantidade $\liminf_{p \rightarrow 0} p_m < p \sum h(p_m)$ é positiva e finita. Nesse caso, essa quantidade chama-se *medida de Hausdorff-Besicovitch segundo o calibre $h(p)$* , e diz-se que $h(p)$ mede o conteúdo do conjunto \mathbf{P} de forma exata. (MANDELBROT, 1991, p.178)

A dimensão de um fractal é o valor D tal que $N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$ em que r é o fator de contração do Sistemas de Funções Iteradas que gera e N é o número total de contrações que constituem o sistemas de funções iteradas. Então

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Outro processo para determinarmos a dimensão fractal é o de *Box Counting* que consta em dividir a imagem em quadradinhos de um determinado comprimento de lado e contamos quantos destes quadradinhos contêm o contorno. Depois repetimos este processo com diferentes tamanhos de lado para os quadradinhos.

4 FRACTAIS

Como conta a tradição, o matemático grego chamado Euclides notou enquanto caminhava na praia, que a areia, vista como um todo se assemelhava a uma superfície contínua e uniforme, mas também era composta de pequenos pontos visíveis. Euclides empenhou-se em provar que todas as formas da natureza podiam ser reduzidas à formas geométricas simples.

Como estava concentrado nas formas não se deu conta que a dimensão era a chave para o seu pensamento inicial. Porém, Mandelbrot apenas acrescentou a questão da dimensão e começou a desenvolver conceitos que mais tarde foram relacionados à denominação Fractal. Diante disso surgiu a comparação entre a sua geometria fractal e a geometria tradicional euclidiana.

Introduzida por Mandelbrot em 1975 através do neologismo “Fractal”, a palavra Fractal surgiu do adjetivo latino *fractus*, que significa irregular ou quebrado, como ele próprio disse: “Eu cunhei a palavra fractal do adjetivo em latim *fractus*. O verbo em latim correspondente *frangere* significa quebrar, criar fragmentos irregulares, também significa irregular. Os dois significados estão preservados em fragmento.” (MANDELBROT, 1983, p. 4). Embora existam várias definições para o termo fractal essa serviu de fio condutor para todas as outras definições.

A primeira definição, segundo Mandelbrot, diz que: “Um conjunto é dito fractal se a dimensão Hausdorff deste conjunto for maior do que a sua dimensão topológica”(GLEICK, 1990) apud (MANDELBROT, 1983) A dimensão topológica de um conjunto é sempre um número inteiro, sendo 0 se o conjunto é totalmente desconexo, 1 se cada ponto tem vizinhanças arbitrariamente pequenas com fronteira de dimensão 0 e assim sucessivamente. Em geral, mostra-se que a dimensão topológica é, no máximo, igual à dimensão Hausdorff. A dimensão Hausdorff deve ser diferente da dimensão topológica ou do espaço em que o fractal está inserido, isto quer dizer que ela deve ser diferente da dimensão de objetos Euclidianos como o ponto, a reta ou o plano, devem estar entre tais. Contudo, no decorrer do tempo ficou bastante claro que esta definição era muito restrita, embora apresentasse algumas motivações pertinentes.

Dentre muitos trabalhos publicados por Mandelbrot em relação aos fractais, encontramos uma definição dada por Maldelbrot em (BARBOSA, 2005, p.18): “Um fractal é uma forma

cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos.”

Os fractais são formas geométricas abstratas, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita. Mandelbrot constatou que todas estas formas e padrões possuíam algumas características comuns e que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza, as quais apresentam padrões irregulares.

Segundo (STEWART, 1996, p.12). “Os fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores”. Um fractal é gerado a partir de uma fórmula matemática, muitas vezes simples, mas que aplicada de forma iterativa produz resultados fascinantes e impressionantes, não perdendo sua definição formal à medida que é ampliado inúmeras vezes mantendo a sua estrutura idêntica à original.

Por isso a mente não pode visualizar toda a capacidade infinita que a complexidade tem de auto embutir-se. “Mas para alguém que pense como um geômetra sobre a forma, esse tipo de repetição da estrutura em escalas cada vez menores pode abrir todo um mundo”.(GLEICK, 1990, p.95)

Definição 4.1 (*Fractal*) *Seja (X, d) um e.m. completo.*

Seja $\{X; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ um Sistemas de Funções Iteradas em X , constituído de N contrações, cada uma com fator de contração S_n respectivamente o fator de contração do sistema é $s = \max \{S_n : n = 1, 2, \dots, N\}$.

Cada contração $w_n : X \rightarrow X$ induz uma contração $\tilde{w}_n : H(X) \rightarrow H(X)$ com igual fator de contração tal que $\tilde{w}(B) = \{w(x) : x \in B\}, \forall B \in H(X)$.

Em conjunto, estas formam uma nova contração $W : H(X) \rightarrow H(X)$ com fator de contração $s = \max \{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ definida por:

$$W(B) = \tilde{w}_1(B) \cup \tilde{w}_2(B) \cup \dots \cup \tilde{w}_n(B) = \sum_{n=1}^N \tilde{w}_n(B), \forall B \in H(X).$$

Como W é uma contração em $(H(X), h(d))$ que é um espaço métrico completo, então sabemos que esta terá um único ponto fixo $A \in H(X)$ e que a sucessão $\{w^n(B)\}_{n=1}^{\infty}$ converge para $A, \forall B \in H(X)$. Também se diz que A é o ponto fixo do Sistema de Funções Iteradas.

$$A = W(A) = \sum_{n=1}^N w_n(A)$$

e

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B), \forall B \in H(X).$$

A este subconjunto de A de X chamamos Fractal. Os fractais só existem em estado puro na nossa mente pois é impossível em tempo e em espaço concretizá-los graficamente, já que não podemos determinar um número infinito de iteradas de uma função.

4.1 FRACTAIS GEOMÉTRICOS

De acordo com TAYLOR(2003) os fractais geométricos estão classificados como autossemeelhantes exatos, por terem suas formas idênticas em diferentes escalas, figuras geradas por processos matemáticos em que o conjunto total é formado por pequenas réplicas perfeitas delas mesmas, ou seja, formado através de um processo iterativo. Esta característica resulta do fato das figuras serem construídas pela iteração da mesma regra de construção.

A iteração é a repetição de um procedimento. O processo iterativo consiste em aplicar a mesma regra a cada um dos resultados do processo anterior. Assim, o objeto(figura) que resulta da passagem ao limite deste processo recursivo é exatamente autossemeilhante, ou seja, é igual a uma cópia ampliada dos elementos que o constituem.

As primeiras figuras que hoje são chamadas de fractais foram desenvolvidas por matemáticos que não tiveram o auxílio dos computadores e eram chamadas de curvas monstros, a seguir serão apresentados alguns desses conjuntos.

4.1.1 Curvas de Koch

Um dos primeiros fractais a ser conhecido é a curva de Koch, apresentado em 1904 pelo sueco Helge von Koch e nomeado de Curvas de Koch como homenagem a seu criador.

A forma como se constrói esta curva mostra-nos uma das características comuns nos fractais: a sua estrutura autossemeilhante. Cada parcela, por menor que seja, é obtida da forma similar às maiores parcelas, fazendo com que o fractal seja invariante à escala na qual se o observa. Se usássemos um microscópio para olhar as ranhuras menores da curva de Koch, não conseguiríamos adivinhar qual seria o grau de ampliação usado no microscópio.

Como se constrói esta curva? Primeiro considera-se uma figura inicial, neste caso, um triângulo equilátero, mas para melhor compreensão vamos tomar como base inicialmente apenas um lado do triângulo (Figura7).

Depois, em cada passo, divide-se cada lado do triângulo em três partes e substitui-se a parte do meio por duas partes de igual tamanho, obtendo um segmento de reta composto por quatro segmentos iguais, ou seja, o terço médio de um segmento reto é substituído por dois segmentos retos de igual tamanho que formariam um novo triângulo equilátero com o segmento retirado.

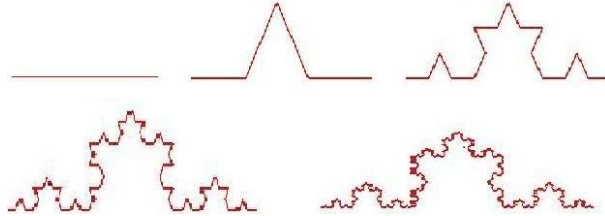


Figura 7: Evolução Curva de Koch

Considerando-se cada passo nota-se que, de um nível para o seguinte, substituem-se três segmentos por quatro de igual comprimento, ou seja, o comprimento total é multiplicado por $4/3$ correlacionando-se níveis sucessivos. O limite de uma sucessão geométrica de razão $4/3$ é infinito, o que significa que a figura final, aquela para a qual tende a sucessão descrita, terá um comprimento infinito. Este limite foi denominado por Mandelbrot como infinito interno. Portanto, no n -ésimo nível, o comprimento da curva de Koch será dado por:

$$S_n = S_{n-1} + \frac{S_{n-1}}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

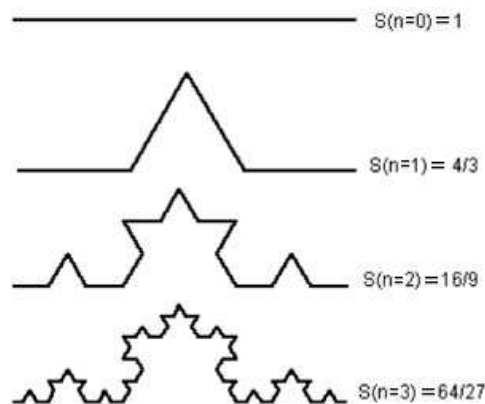


Figura 8: Os quatro primeiros níveis para a construção da Curva de Koch e seus correspondentes comprimentos.

Em seguida determinaremos a dimensão da Ilha de Koch. Para isso consideramos o comprimento inicial de um dos lados de cada triângulo como L . Em cada etapa os novos comprimentos serão $\frac{L}{3}$ e 4 novos segmentos de retas serão criados e cada lado, dessa forma completando a tabela abaixo.

n	nº de segmentos N(n)	d	A_n
1	3×4	$\frac{L}{3}$	$A_1 = \left(\frac{L}{3}\right)^D$
2	3×4^2	$\frac{L}{3^2}$	$A_2 = \left(\frac{L}{3^2}\right)^D$
3	3×4^3	$\frac{L}{3^3}$	$A_3 = \left(\frac{L}{3^3}\right)^D$
...
n	$N(n) = 3 \times 4^n$	$\frac{L}{3^n}$	$A_n = \left(\frac{L}{3^n}\right)^D$

Tabela 2: n iterações da Ilha de Koch

A área total será $A_{TK} = N(n) \cdot A(n) = 3 \times 4^n \cdot \left(\frac{L}{3^n}\right)^D = \left(\frac{4}{3^D}\right)^n \cdot 3L^D$.

Como anteriormente deduzido, para que ela não seja 0 ou infinita deve-se ter

$$\left(\frac{4}{3^D}\right) = 1$$

$$4 = 3^D$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados temos:

$$\log 4 = \log 3^D$$

$$\log 4 = D \log 3$$

$$D = \frac{\log 4}{\log 3}$$

$$= 1,261859\dots,$$

mostrando assim, um objeto construído no mundo real cuja dimensão é um número entre 1 e 2.

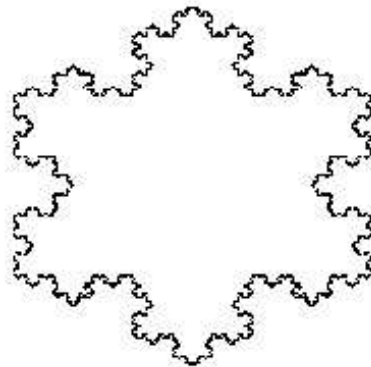


Figura 9: Ilha de Koch

4.1.2 Conjunto de Cantor

A figura conhecida como Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor foi difundida pelo matemático Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, que dedicou parte de seus estudos sobre a teoria dos conjuntos.

A lei de formação do Conjunto de Cantor é simples. Para construir geometricamente o Conjunto do Cantor vamos considerar o intervalo unitário $[0, 1]$, que será nosso conjunto K_0 . Em seguida dividimos esse intervalo em três partes iguais e retiramos o intervalo aberto central (ou terço médio) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, restando $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, e com isso obtemos o conjunto K_1 . Repetimos o processo em cada um dos segmentos, removendo-lhes o terço médio, e repetimos o processo sucessivamente fazendo-se o número de etapas k tenderem ao infinito. O conjunto K dos pontos que não foram retirados é o conjunto de Cantor.

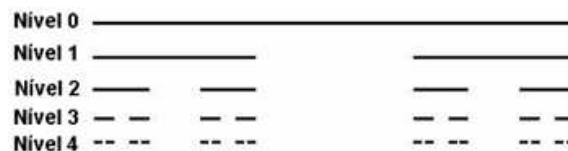


Figura 10: Construção do Conjunto de Cantor

Em seguida analisaremos o que acontece com o número de segmentos, N_n , com o comprimento de cada segmento, c_n , bem como com o comprimento total do conjunto, Ct_n , em cada iteração n de sua construção. Entende-se por comprimento total a soma dos comprimentos dos segmentos de um conjunto. No nível inicial, para $n = 0$, temos um segmento de modo que

$N_0 = 1$. No nível 1, têm-se 2 segmentos. No nível 2 são quatro segmentos, na geração 3 são oito segmentos. Assim, decorre imediatamente da construção, que no n -ésimo nível, o número de segmentos é 2^n .

Ao analisarmos o comprimento do Conjunto de Cantor Ct_n , podemos verificar uma característica visivelmente paradoxal com a afirmação anterior. Basta analisar o comprimento de cada segmento, c_n que compõe o Conjunto de Cantor no correspondente nível. No primeiro nível, $n = 0$, o comprimento do segmento é $c_0 = 1$; no segundo nível $c_2 = \frac{1}{3}$; no terceiro nível $c_3 = \frac{1}{9}$. Então, no n -ésimo nível, o comprimento de cada segmento é expresso por $c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Para saber qual é o comprimento dos segmentos formados em um número infinito de etapas basta calcular.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

Isso significa que em um número infinito de passos não haverá mais segmentos de reta mas, apenas pontos, o que explica o termo “Poeira de Cantor” utilizado por alguns autores. Em cada passo do processo de construção do conjunto de Cantor temos 2^n segmentos. Observe que se o número de etapas tende ao infinito, tem-se infinitos segmentos, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

Em seguida será apresentada a dimensão do Conjunto de Cantor, para isso considera-se o comprimento do segmento inicial AB medindo L unidades, na primeira iteração tem comprimento $d = \frac{L}{3}$. Assim

n	nº de segmentos N(n)	d	A_n
1	2	$\frac{L}{3}$	$A_1 = \left(\frac{L}{3}\right)^D$
2	4	$\frac{L}{3^2}$	$A_2 = \left(\frac{L}{3^2}\right)^D$
3	8	$\frac{L}{3^3}$	$A_3 = \left(\frac{L}{3^3}\right)^D$
...
n	$N(n) = 2^n$	$\frac{L}{3^n}$	$A_n = \left(\frac{L}{3^n}\right)^D$

Tabela 3: n iterações no Conjunto de Cantor

$$\text{A área total será } A_{TC} = N(n) \cdot A(n) = 2^n \cdot \left(\frac{L}{3^n}\right)^D = \left(\frac{2}{3^D}\right)^n \cdot L^D.$$

Mas para que haja significado deve-se ter $\left(\frac{2}{3^D}\right)^n = 1$ em quaisquer iterações, onde $2 = 3^D$, aplicando-se logaritmo de ambos os membros da igualdade e isolando D temos $D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309\dots$, mostrando assim um objeto construído no mundo real cuja dimensão é um número fracionário entre 0 e 1.

4.1.3 Triângulo de Sierpinski

Descrito pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski em 1915, este fractal é uma das exceções à definição de Mandelbrot. Neste caso a dimensão Hausdorff é menor do que a dimensão topológica. O Triângulo de Sierpinski é um objeto fractal de dimensão de Hausdorff $D = \log(3)/\log(2) = 1,58496$, enquanto que um triângulo tem dimensão 2.

Para a construção do triângulo consideramos a área compreendida por um triângulo equilátero, seus lados e os pontos médios de cada lado, traça-se três segmentos de reta cujas extremidades são os pontos médios de modo que o triângulo inicial fica dividido em quatro outros triângulos menores também equiláteros, e desconsidera-se a área do triângulo menor central. Marcam-se os pontos médios de cada lado dos outros três triângulos menores restantes e traça-se novamente os segmentos de reta que vão dividir os triângulos em quatro outros, e torna-se a desconsiderar a área triângulo central formado. A partir daí, aplica-se o mesmo procedimento aos triângulos restantes.

Ao final de cada etapa repete-se o mesmo procedimento com os triângulos resultantes. Desta maneira geram-se, sequencialmente, 3, 9, 27, 81, ..., triângulos, correspondentes aos níveis 1, 2, 3, 4, ... respectivamente representados. Basta aplicar esta mesma lei de formação sucessivamente, de modo que sua estrutura triangular é constituída por triângulos sequencialmente menores que são cópias perfeitas da forma inicial da figura. Deste modo, ao ampliar-se uma parte qualquer, teremos algo idêntico à figura como um todo.

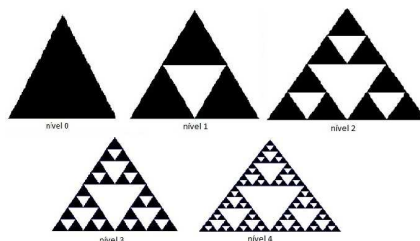


Figura 11: Construção do Triângulo de Sierpinski

No Triângulo de Sierpinski, após infinitas aplicações deste procedimento obtemos uma figura fractal autossimilar exata, ou simplesmente denominada de autossimilar.

Organizando os dados obtidos, temos a seguinte tabela:

n	nº de triângulos N(n)	d	A_n
1	3	$\frac{L}{2}$	$A_1 = \left(\frac{L}{2}\right)^D$
2	3^2	$\frac{L}{2^2}$	$A_2 = \left(\frac{L}{2^2}\right)^D$
3	3^3	$\frac{L}{2^3}$	$A_3 = \left(\frac{L}{2^3}\right)^D$
...
n	$N(n) = 3^n$	$\frac{L}{2^n}$	$A_n = \left(\frac{L}{2^n}\right)^D$

Tabela 4: n iterações no Triângulo de Sierpinski

Após iniciarmos o processo com um triângulo de lado L , obtemos três triângulos similares ao inicial, porém cada lado do novo triângulo é a metade do anterior, isto é, $\frac{L}{2}$. Assim,

$$A_{TS} = N(n) \cdot A_n(n) = 3^n \cdot \left(\frac{L}{2^n}\right)^D = \left(\frac{3}{2^D}\right)^n \cdot L^D$$

como

$$\left(\frac{3}{2^D}\right)^n = 1$$

vem que

$$2^D = 3$$

Logo, aplicando a propriedade do logaritmo em ambos os lados da igualdade temos:

$$D \log 2 = \log 3$$

ou

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,5849\dots,$$

mostrando assim mais um exemplo de dimensão fracionária.

4.1.4 Esponja de Menger

Criada pelo matemático austríaco Karl Menger, devido a um paradoxo incrível a Esponja de Menger é um dos fractais mais interessantes. Trata-se de um objeto geométrico onde seu volume é zero e sua área é infinita. Sua dimensão fractal é dada por: $D = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2,72$.

O processo de construção da Esponja de Menger também é simples, utiliza-se um cubo, dividindo-o em 27 cubinhos de arestas medindo $\frac{1}{3}$ do tamanho das arestas originais, retirando a

peça central do cubo e cada um dos 6 quadrados centrais de cada uma das faces.

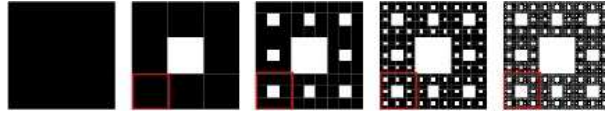


Figura 12: Construção Esponja, considerando um dos lados do cubo que resultará na esponja de Menger

Em seguida repete-se este processo para cada um dos cubos restantes. Nesse segundo processo o volume da Esponja, V_1 , é dado por:

$$V_1 = V_0 - 7\left(\frac{l}{3}\right)^3.$$

No terceiro nível, ou seja, $N = 2$, cada um dos 20 cubos restantes são divididos em mais 27 cubos iguais, dos quais 7 são retirados, cada um com volume $\frac{1}{9}$. Deste modo, o volume da Esponja, V_2 , seria dado pela expressão:

$$V_2 = V_0 - 7\left(\frac{l}{3}\right)^3 - 7\left(\frac{l}{9}\right)^3 20.$$

Reescrevendo a equação:

$$V_n = V_0 - 7l^3 \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{3N} 20^{N-1}$$

Deste modo, para o n-ésimo nível, fazendo N tender ao infinito, o volume da esponja será dado por:

$$V_n = V_0 - 7l^3 \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{3N} 20^{N-1} = 0$$

Observamos que o volume da Esponja de Menger tende a zero, quando o número de níveis tende ao infinito. Para determinar a área da superfície deste fractal, tem-se que para $N = 0$, $S_0 = 6l^2$. Para $N = 1$ tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 = S_0 + 6l^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 20$$

para o n-ésimo nível, com N tendendo ao infinito, a área da superfície associada à esponja será dada por:

$$S_n = S_0 + 6l^2 \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2N} 20^N = \infty.$$

Portanto a Esponja de Menger possui volume nulo e área infinita na medida em que o número de níveis tende ao infinito.

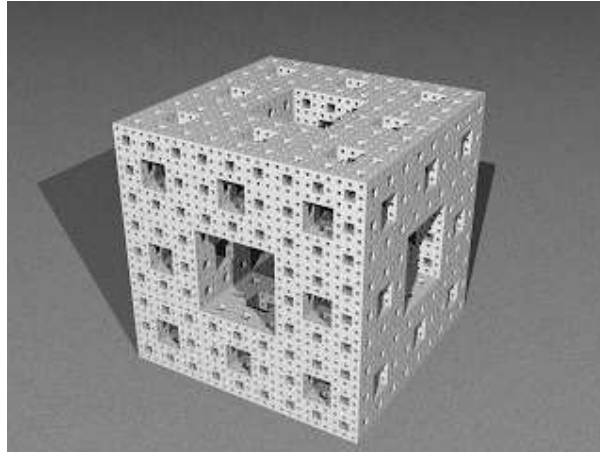


Figura 13: Esponja de Menger

4.2 FRACTAIS DA NATUREZA

A característica principal dos fractais da natureza é a autossemelhança, onde suas iterações ou gerações são semelhantes entre si e o original. De acordo com TAYLOR (2003) os fractais da natureza estão classificados como autossemelhantes estatísticos, por suas formas terem medidas numéricas ou estatísticas preservadas em diferentes escalas, medidas essas que encontramos nessa categoria de fractais.

Levando em consideração essa autossemelhança, a Geometria Fractal é considerada a que melhor descreve a natureza.

(MANDELBROT, 1983) já dizia: “Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, um latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta.”

A seguir alguns exemplos de objetos (figuras) fractais encontrados na natureza:

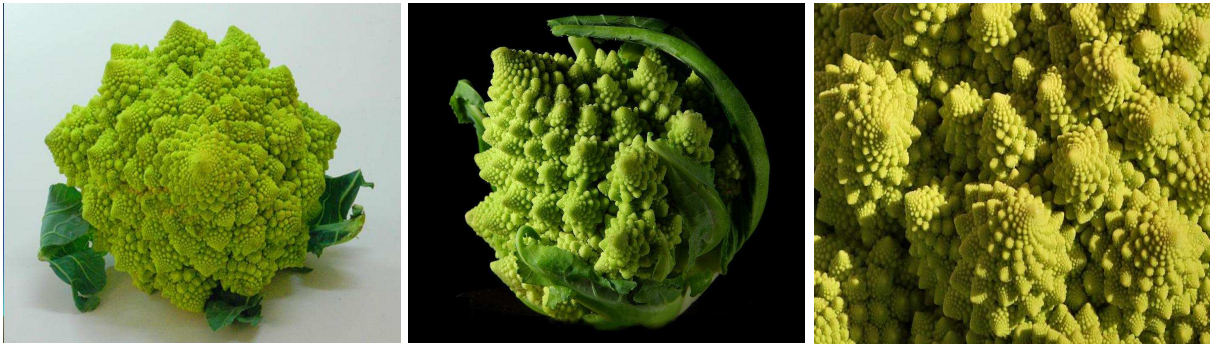


Figura 14: Brócolis



Figura 15: Girassol



Figura 16: Folhas



Figura 17: Folhas



Figura 18: Fractais aleatórios

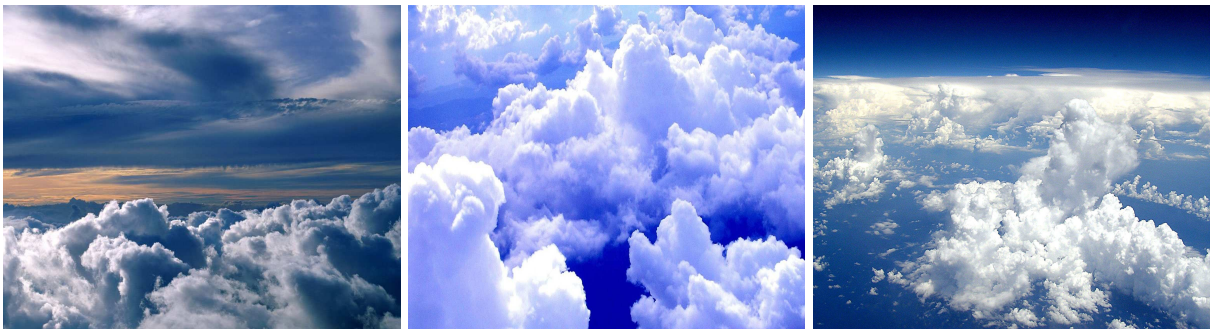


Figura 19: Fractais aleatórios



Figura 20: Caramujo

4.3 FRACTAIS COMPUTACIONAIS

Os Fractais gerados por computadores conhecidos, como fractais de fuga, são figuras tão complexas que seria impossível conhecê-las ao longo de uma vida inteira. Com uma forma mais solta apresenta ser aproximadamente, mas não exatamente, idêntico em escalas diferentes.

4.3.1 Conjunto de Julia

O conjunto de Julia surgiu após estudos acerca de processos iterativos envolvendo números complexos. Estes estudos foram apresentados no ano de 1918 por Gaston Julia e Pierre Fatou sem o recurso do computador, que nos dias de hoje é de grande utilidade para reproduzir detalhadamente o comportamento de funções iterativas.

Consideremos a função $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ em que c é um ponto fixo no plano complexo.

Para cada ponto Z_0 teremos a função gerando a seguinte sequência de números complexos (órbita de Z_0): $Z_0, Z_1 = Z_0^2 + c, Z_2 = Z_1^2 + c, \dots$

Se a órbita de Z_0 é atraída para infinito é ponto escape, então Z_0 não pertence a nenhum conjunto de Julia. O conjunto de todos estes pontos formam o conjunto escape de c .

Se a órbita de Z_0 é atraída para um círculo em torno da origem (Z_0 é ponto prisioneiro), então Z_0 pertence a algum conjunto de Julia. O conjunto de todos estes pontos formam o conjunto prisioneiro de c .

Ambos os conjuntos complementam-se e preenchem alguma parte do plano complexo. Assim, a fronteira do conjunto escape é simultaneamente a fronteira do conjunto prisioneiro e nesta fronteira temos o conjunto de Julia associado ao parâmetro c .

O valor do ponto c determina a formação dos conjuntos de Julia, sendo associado com um conjunto de Julia em particular, como mostram as figuras abaixo:

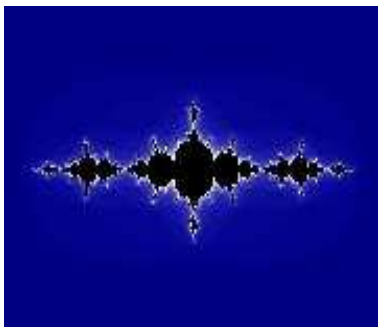


Figura 21: $c = -1,25 + 0i$

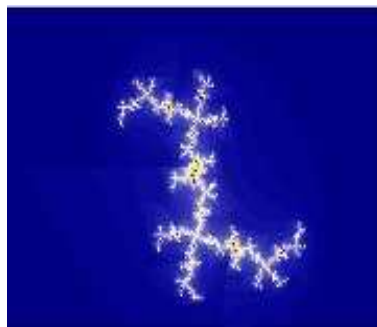


Figura 22: $c = 0,3 + 0,5i$

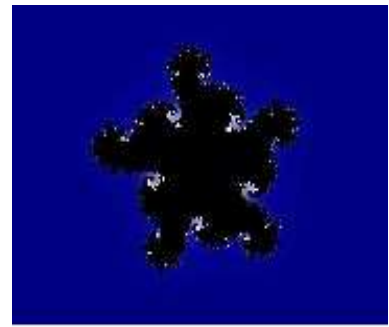


Figura 23: $c = 0,5 - 0,6i$

No início, o trabalho de Julia não despertou o interesse em Mandelbrot. Depois de ter se dedicado as mais diversas ciências, por volta de 1977 Mandelbrot demonstrou interesse e mostrou, com o auxílio de um computador que o trabalho de Julia é um dos mais belos fractais conhecidos hoje.

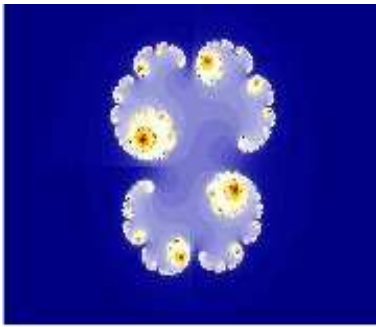


Figura 24: $c = 0,3 + 0i$

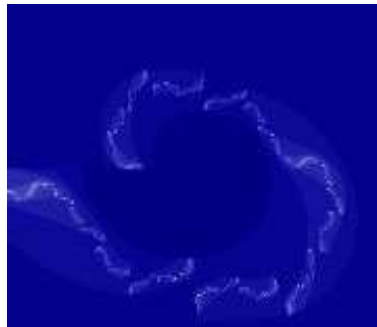


Figura 25: $c = 0,3 + 0,1i$

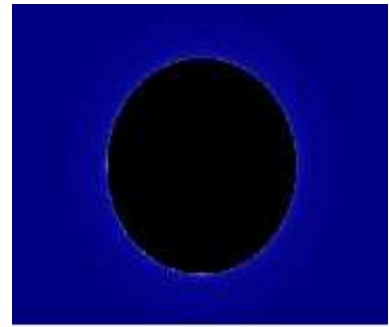


Figura 26: $c = 0$

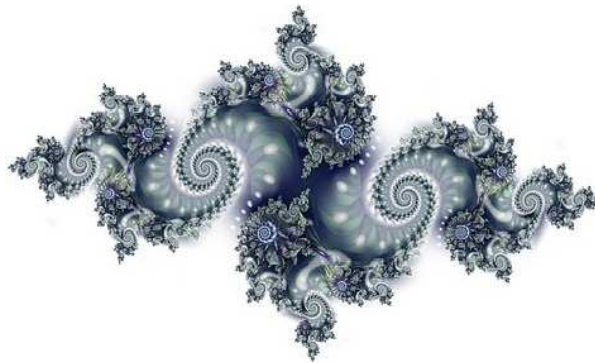


Figura 27: Conjunto de Julia

4.3.2 Conjunto de Mandelbrot

Mandelbrot, em 1979, ao tentar encontrar uma forma de generalizar os conjuntos de Julia, descobriu que poderia criar uma imagem no plano complexo que catalogava os conjuntos de Julia.

A sua construção baseia-se na função $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ onde $Z_n (n \in N_0)$ e c são números complexos e $Z_0 = 0$. O conjunto de Mandelbrot é um fractal definido como o conjunto de pontos no plano complexo para qual a sequência é definida iterativamente:

$$Z_0 = 0$$

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

A expansão da sequência é realizada da seguinte maneira:

$$Z_0 = 0$$

$$Z_1 = Z_0^2 + c$$

$$Z_2 = Z_1^2 + c$$

$$Z_3 = Z_2^2 + c \dots$$

Iterando a função para cada ponto c do plano complexo, temos a sequência de iterações:

$$c \rightarrow c^2 + \rightarrow (c^2 + c)^2 + c \rightarrow \dots$$

Tomando alguns valores para c , vem: para $c = 0$:

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

para $c = -1$

$$0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

para $c = i$

$$0 \rightarrow i \rightarrow i \rightarrow -1 \rightarrow -i \rightarrow i \rightarrow -1 \rightarrow -i \rightarrow i \rightarrow -1 \rightarrow \dots$$

Verificamos dois tipos de sequências (para $c = 0$ temos um ponto de convergência e para $c = -1$ e $c = i$, temos sequências periódicas) que são limitadas pois permanecem dentro de um círculo em que a distância à origem mantém-se finita. No entanto, para certos valores de c , a função é ilimitada, afastando-se cada vez mais da origem. Vejamos alguns exemplos: para $c = -3$

$$0 \rightarrow -3 \rightarrow 6 \rightarrow 33 \rightarrow 1086 \rightarrow \dots$$

para $c = 1$:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 26 \rightarrow 677 \rightarrow 458330 \rightarrow \dots$$

Os conjuntos formados pelas sequências limitadas e pelas sequências ilimitadas preenchem todo o plano complexo e delimitam o conjunto de Mandelbrot atribuindo-se uma cor, para o primeiro conjunto, isto é, se a sucessão de cada valor c permanece limitada, e outras cores para o segundo conjunto, isto é, se a sucessão de cada valor c é ilimitada.

Tal como dissemos anteriormente, podemos encontrar no conjunto de Mandelbrot os conjuntos de Julia, fazendo variar os valores do ponto c , como apresentamos na figura 28.

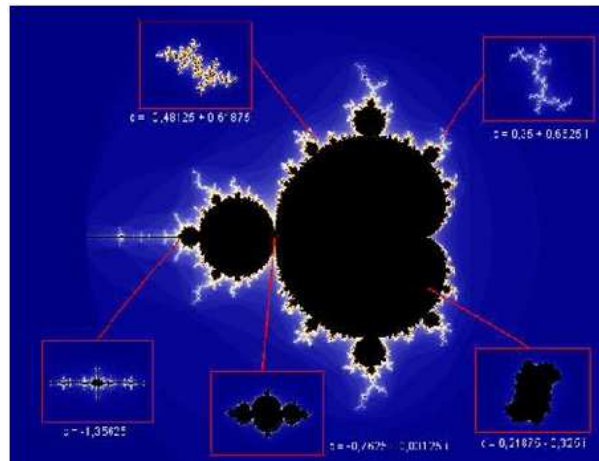


Figura 28: Conjunto de Mandelbrot como um catálogo de conjuntos de Julia

Podemos também verificar a autossemelhança aproximada, fazendo algumas ampliações do conjunto de Mandelbrot, verificando as várias formas que se lhe aproximam.

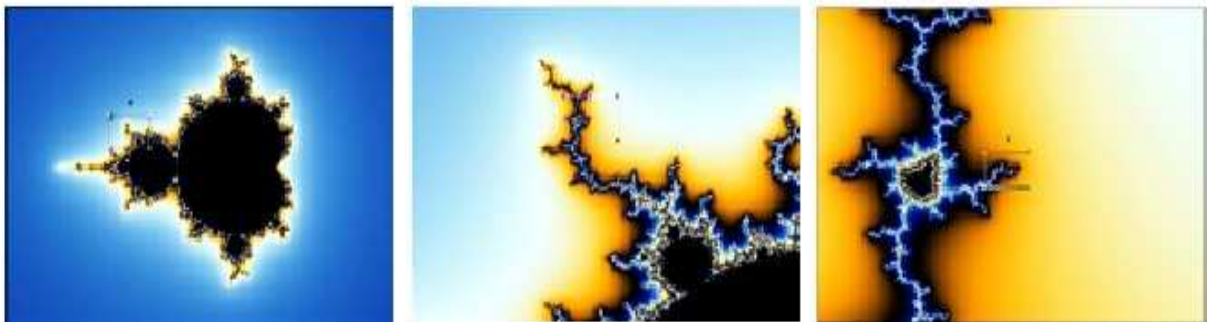


Figura 29: Algumas ampliações do conjunto de Mandelbrot

4.4 APLICAÇÕES

Os fractais têm sido usados para descrever muitos aspectos. Biólogos utilizam fractais para investigar a influência da superfície irregular de proteínas nas interações moleculares, matemáticos montam modelos de crescimento demográficos, modeladores gráficos os utilizam para a geração de terrenos e atmosferas. Mandelbrot já havia utilizado esta teoria nas cheias do rio Nilo e também nas cotações da bolsa de valores.

Com o objetivo de exemplificar a aplicação dos fractais, foi escolhido uma aplicação que mostra o estudo na construção de uma usina hidrelétrica e a drástica alteração biológica na dinâmica dos rios.

A aplicação “Análise de Campo Gradiente e Dimensão Hausdorff-Besicovitch aplicados na

dinâmica espaço-temporal de ecossistemas aquáticos impactados” foi retirado, dos Anais do X Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto SBSR, realizado em Foz do Iguaçu em 1991.

O estudo visa mostrar, que a construção de usinas hidrelétricas promove uma drástica alteração da dinâmica biológica de rios. Uma das principais consequências destes impactos é a proliferação de plantas aquáticas, e implicam em problemas de geração de energia, navegação, qualidade de água e formação de berçários de vetores de doenças. (LIMA, 2001, p.1301)

Para este estudo foram selecionadas as bandas TM3, TM4 e TM5 do Landsat-5 para o reservatório de Tucuruí, no Estado do Pará, formado em 1984. As imagens foram obtidas no período de máximo crescimento de plantas aquáticas, referentes ao período de junho à agosto. Os anos estudados foram 1986, 1988, 1990, 1992, 1994, 1999 e 2000.

Um modelo para esta dinâmica poderia ser uma equação com um componente de percolação, utilizada em modelos de epidemias, associadas a outra de difusão. Neste caso, foram aplicados dois métodos para a obtenção de parâmetros. O primeiro baseia-se na Análise de Campo Gradiente, através do operador de fragmentação assimétrica F_A . O operador F_A baseia-se na exclusão de vetores simétricos no campo gradiente e na geração de uma triangulação de Delaunay no ponto médio dos vetores resultantes L . O operador de fragmentação assimétrica é dado por:

$$F_A = \frac{C - L}{L}$$

onde C refere-se ao número de linhas de conectividade vetorial através da triangulação de Delaunay. Para matrizes aleatórias o operador F_A tende assintoticamente ao valor 2 quando L tende ao infinito. Este operador tem sido empregado no estudo da emergência de padrões espaço-temporais em sistemas dinâmicos complexos que operam longe do equilíbrio térmico, ou estruturas dissipativas, o que justifica sua aplicação, tendo em vista a complexidade da dinâmica de sistemas biológicos, os quais também são considerados estruturas dissipativas. Por outro lado, a aplicação do operador F_A tem a premissa de que o sistema seja extenso, isto é, sem influência das condições de contorno. Por este motivo as regiões selecionadas para análise situam-se relativamente distantes ds marges do reservatório.

Outro parâmetro avaliado é a Dimensão de Hausdorff-Besicovitch D , que se corresponde à dimensão fractal de formas no espaço n -dimensional. Esta dimensão é definida como aquela em que $D \geq D_T$, onde D_T refere-se à dimensão topológica (MANDELBROT, 1983). Como $D_T = 0$ ou 1, espera-se encontrar valores $0 \leq D < 2$. O método baseia-se no *box counting*, onde o número de elementos N que preenchem o espaço é computado para diferentes resoluções r e uma regressão linear do logaritmo de $N(r)$ e r fornece o valor de D , Os valores de D foram

obtidos através de uma adaptação do método *box counting* através da equações:

$$\ln(N_b(r)) = \ln(K_b) - D_b \ln(r),$$

$$\ln(N_w(r)) = \ln(K_w) - D_w \ln(r),$$

$$\ln(N_{bw}(r)) = \ln(K_{bw}) - D_{bw} \ln(r),$$

onde b e w referem-se à máscara e ao entorno da máscara criada através da seleção de números digitais ND , onde $ND \geq ND_{critico}$, K_D refere-se à medida fractal (MANDELROT, 1983). A dimensão fractal refere-se à fronteira entre b e w e é dada por $D = D_{bw}$.

Tendo em vista a geometria fractal e a multifractalidade observada em redes de drenagem e em outros tipos de fluxos, com lavas vulcânicas, sendo possível que a autossimilaridade ou invariância na escala do reservatório apresente uma influência espacial na dinâmica de ocupação das plantas.

Para ambos os métodos, imagens intensidade ou envelope de energia $I = 0,299TM5 + 0,587TM4 + 0,114TM3$ foram empregadas para três séries temporais em diferentes regiões do reservatório. Ambos parâmetros decrescem com o tempo, tendo em vista a redução na amplitude e número de estruturas. O parâmetro D apresentou sensibilidade às variações de grandes mudanças nas estruturas do padrão global. O operador F_A para as matrizes utilizadas apresenta um limiar de sensibilidade de $\approx 0,0016$ e permite a verificação da mudança de subpadrões que compõem o padrão global. A média das diferenças de F_A para as três séries foi de $0,0167$, evidenciando uma grande variabilidade temporal de picos assimétricos e de amplitudes laminares (paredes), bem como de uma quebra de simetria espaço-temporal, característica de sistemas dinâmicos complexos. Entre as datas existem variações inerentes na radiação eletromagnética refletida, na geometria de aquisição, da eletrônica do sensor e de registro espacial. Para minimizar parte desses efeitos, uma retificação radiométrica poderia ser testada no futuro. Apesar de resultados preliminares, aparentemente D e F_A são complementares na identificação das forçantes físicas e biológicas envolvidas na formação destes padrões e deverão corroborar na criação e análise de simulações deste fenômeno com equações de percolação-difusão.

5 CONCLUSÃO

A Geometria Fractal apresenta uma nova visão da geometria, do mundo, uma nova maneira de ver e caracterizar velhas coisas. Os fractais da natureza serviram de inspiração, por muitos séculos achava-se que essas formas naturais não possuíam formas geométricas. Muitas teorias foram criadas em cima dessas formas mas não conseguiram organiza-las a ponto de criar uma definição formal para o que viria se tornar a teoria dos fractais.

Mandelbrot foi o matemático que conseguiu unir todos os fragmentos de ideias e criar uma grande ideia, e esta deu origem à teoria dos fractais.

A construção dos fractais se dá através das muitas iterações de passos. Por isso, um dos pontos importantes de Mandelbrot foi o uso de computadores para fazer seus cálculos e simulações. Podemos dizer que esta tenha sido a chave de todos os seus estudos já que era praticamente impossível de ser feito de forma manual. Com isso, deu-se um passo importante para o estudo da Geometria Fractal.

Se formos falar em valores estéticos a Geometria Fractal pôs a ciência exata em harmonia com o sentimento característico moderno da natureza não domesticada, não civilizada, não domada. Além de se apresentar como formas geométricas, os fractais representam funções reais ou complexas e apresentam determinadas características: autossemelhança, dimensionalidade e a complexidade infinita.

Com a aplicação vimos que os fractais podem ser usados nos mais variados campos do conhecimento, tanto para geração de imagens coloridas quanto para desenhar terrenos complexos, nas áreas de pesquisa como medicina e física e explicar muitos fenômenos.

O propósito deste trabalho foi destacar a importância da geometria dos fractais, pensando como uma ferramenta para reduzir a resistência que ainda existe quando se fala em alguns conceitos matemáticos. Além de ressaltar a importância dos fractais e mostrar que é um assunto a ser muito explorado devido as suas inúmeras aplicações nas diferentes áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, R. M. **Descobrimdo a geometria fractal - para a sala de aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- FERNANDES, J. Fractais: Uma nova visão da matemática. **Centro Universitário de Lavras**, Trabalho de conclusão de Curso, p. 46, 2007.
- FRAME, M.; MANDELBROT, B. Introduction to fractals. 2004. Disponível em: <<http://www.classes.yale.edu/99-00/math190a/>>.
- GLEICK, J. **Caos - A Criação de uma nova ciência**. 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1990.
- LIMA, I. B. T. de. Análise de campo gradiente e dimensão de hausdorff-besicovitch aplicados na dinâmica espaço-temporal de ecossistemas aquáticos impactados. **Anais X SBSR, Foz do Iguaçu**, p. 1301–1303, 2001.
- MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: W. H. Freeman and Company, 1977.
- MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.
- MANDELBROT, B. **Objectos fractais: Forma, Acasos e Dimesão**. Portugal: Gradiva, 1991.
- STEWART, I. **Os Números da Natureza: a realidade irreal da imaginação matemática**. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.
- TAYLOR, R. P. **Ordem no caos de Jackson Pollock**. [S.l.]: Scientific American Brasi, 2003.