

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ROSIRENE RICO DE LIMA

GEOMETRIA DO TAXISTA

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2012

ROSIRENE RICO DE LIMA

GEOMETRIA DO TAXISTA

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Wellington José Corrêa

CAMPO MOURÃO

2012

TERMO DE APROVAÇÃO

ROSIRENE RICO DE LIMA

GEOMETRIA DO TAXISTA

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Wellington José Corrêa

Prof. Msc. Thelma Pretel Brandão Vecchi

Prof. Msc. Diogo Heron Macowski

Campo Mourão, 2012

Dedico este trabalho ao meu pai José, minha mãe Maria e em especial ao Rogério, que me deram carinho e amor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por estar sempre do meu lado dando força e coragem de vencer. Aos meus colegas de especialização que muito me ensinaram. Meu agradecimento especial ao meu orientador, professor Wellington José Corrêa, minha admiração e gratidão, pela paciência, disponibilidade e competência. Ao amigo Oilson Alberto Gonzatto Júnior, na sua importante contribuição neste trabalho. Ademais, quero agradecer aos professores Msc. Thelma Pretel Brandão Vecchi e Msc. Diogo Heron Macowski que compuseram a minha banca e apresentam relevantes sugestões e correções sobre este trabalho.

“A mente humana, uma vez ampliada por uma nova ideia, nunca mais volta ao seu tamanho original.”

(Oliver Wendell Holmes)

RESUMO

RICO DE LIMA, Rosirene. GEOMETRIA DO TAXISTA. 100 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

Este trabalho explora a Geometria do Taxista, que devido a sua maneira peculiar de medir distâncias, ao qual difere da Geometria Euclidiana que estamos habituados, alguns problemas de lugares geométricos foram explorados, bem como aplicações de como a Geometria do Taxista se mostra relevante.

Palavras-chave: Geometria do Taxista, Geometria Euclidiana, Métrica, Distância, Lugares Geométricos, Engenharia Urbana.

ABSTRACT

RICO DE LIMA, Rosirene. TAXICAB GEOMETRY. 100 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

This monograph explores the Taxicab Geometry that due to its peculiar way of measuring distances, which differs from Euclidean geometry that we used, some problems loci were explored, as well as applications such as the Taxicab Geometry shown relevant.

Keywords: Taxicab Geometry, Euclidean Geometry, Metric, Distance, Geometric Places, Urban Engineering.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – TRIÂNGULO DE PASCAL	13
FIGURA 2 – 3° LINHA DO TRIÂNGULO DE PASCAL	14
FIGURA 3 – 5° LINHA DO TRIÂNGULO DE PASCAL	14
FIGURA 4 – RELAÇÃO DE STIFEL	15
FIGURA 5 – SOMAS RELACIONADAS À CADA LINHA DO TRIÂNGULO	15
FIGURA 6 – DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS	16
FIGURA 7 – MEDIATRIZ DE UM TRIÂNGULO	17
FIGURA 8 – CIRCUNCENTRO 1	18
FIGURA 9 – CIRCUNCENTRO 2	19
FIGURA 10 – PONTOS A , B E C NA CIDADE DE ALTÔNIA -PR	20
FIGURA 11 – QUADRA ACBD	22
FIGURA 12 – DISTÂNCIA DE A ATÉ B NA GEOMETRIA DO TAXISTA	23
FIGURA 13 – DISTÂNCIA DE $AB+AC=BC$	27
FIGURA 14 – CIRCUNFERÊNCIA DE RAIO 3	31
FIGURA 15 – PONTOS DE C QUE DISTAM 3 DA ORIGEM	31
FIGURA 16 – CIRCUNFERÊNCIA DO TAXISTA DE RAIO 3	32
FIGURA 17 – CONTRA - EXEMPLO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA DO TAXISTA .	32
FIGURA 18 – CIRCUNFERÊNCIA UNITÁRIA DO TAXISTA	33
FIGURA 19 – TRIÂNGULOS ISÓSCELES CONGRUENTES NA CIRCUNF.	34
FIGURA 20 – ELIPSE	35
FIGURA 21 – ELIPSE DO TAXISTA	36
FIGURA 22 – PARÁBOLA	36
FIGURA 23 – PARÁBOLA COM DIRETRIZ HORIZONTAL	37
FIGURA 24 – PARÁBOLA COM DIRETRIZ VERTICAL	37
FIGURA 25 – PARÁBOLA COM DIRETRIZ DIAGONAL	38
FIGURA 26 – HIPÉRBOLE	38
FIGURA 27 – HIPÉRBOLE DO TAXISTA	39
FIGURA 28 – PONTOS DA MEDIATRIZ SEM A DIREÇÃO DA QUADRÍCULA	40
FIGURA 29 – MEDIATRIZ SEM A DIREÇÃO DA QUADRÍCULA	41
FIGURA 30 – CORDAS QUE SE CRUZAM NO CENTRO	42
FIGURA 31 – CORDAS QUE PASSAM PELO CENTRO, MAS NÃO SE CRUZAM ..	42
FIGURA 32 – CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA	43
FIGURA 33 – UM ÂNGULO T-RADIANO	44
FIGURA 34 – UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO QUE NÃO É EQUIANGULAR	45
FIGURA 35 – ÂNGULOS DA BASE NÃO CONGRUENTES × TRIÂNG. ISÓSCELES	45
FIGURA 36 – SEGMENTOS CONGRUENTES NA GEOMETRIA DO TAXISTA	46
FIGURA 37 – TRIÂNGULOS SATISFAZENDO ALALA SÃO CONGRUENTES	47
FIGURA 38 – TRIÂNGULOS SATISFAZENDO LLL E LLLA NÃO CONGRUENTES	47
FIGURA 39 – ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE 1	48
FIGURA 40 – ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE 2	49
FIGURA 41 – ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE 3	49
FIGURA 42 – UMA LINHA DE BASE PASSANDO PELO VÉRTICE A	50

FIGURA 43 – DUAS LINHA DE BASE PASSANDO PELO VÉRTICE A	51
FIGURA 44 – GRÁFICO DO SENO E COSSENO DO TÁXI	55
FIGURA 45 – GRÁFICO DO FUNÇÃO TANGENTE DO TAXISTA	56
FIGURA 46 – GRÁFICO DO COSSENO E FUNÇÃO SECANTE	57
FIGURA 47 – GRÁFICO DO SENO E FUNÇÃO COSECANTE	57
FIGURA 48 – GRÁFICO DO FUNÇÃO COTANGENTE DO TAXISTA	58
FIGURA 49 – JANELA DO ARQUIVO “MAPLET_GEOMETRIA_DO_TAXI.MW” ..	69
FIGURA 50 – CIRCUNFERÊNCIA DE CENTRO $C = (-1, 2)$ E RAIOS $R = 3$	70

LISTA DE SIGLAS

UTFPR Universidade Tecnológica Federal do Paraná

FECILCAM Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão

LISTA DE SÍMBOLOS

C_n^p	combinação simples
$\binom{n}{p}$	coeficiente binomial
$d(P, Q)$	distância euclidiana entre os pontos P e Q
$ x $	valor absoluto ou módulo de x
$d_t(A, B)$	distância do taxista entre os pontos A e B
π_t	O número π na Geometria do Taxista
C_t	Comprimento da circunferência do Taxista
A_t	Área da circunferência na Geometria do Taxista
θ_e	Ângulo θ , na Geometria Euclidiana
θ_t	Ângulo θ na Geometria do Taxista
\cong	Congruência

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	13
3	DESENVOLVIMENTO	20
3.1	DISTÂNCIA EUCLIDIANA X DISTÂNCIA DO TAXISTA	20
3.2	A CIRCUNFERÊNCIA NA GEOMETRIA DO TAXISTA	30
3.3	ELIPSE, PARÁBOLA E HIPÉRBOLE NA GEOMETRIA DO TAXISTA	35
3.4	A GEOMETRIA DO TAXISTA E A MEDIATRIZ	39
3.5	ÂNGULOS NA GEOMETRIA DO TAXISTA	44
3.6	TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS E A GEOMETRIA DO TAXISTA	45
3.7	CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS NA GEOMETRIA DO TAXISTA	46
3.8	O TRIÂNGULO DE PITÁGORAS NA GEOMETRIA DO TAXISTA	50
3.9	A TRIGONOMETRIA NA GEOMETRIA DO TAXISTA	54
3.10	A GEOMETRIA DO TAXISTA E O TRIÂNGULO DE PASCAL	61
3.11	EQUAÇÃO GERAL PARA CÔNICAS NA GEOMETRIA DO TAXISTA	63
3.12	GEOMETRIA DO TAXISTA E O MAPLE	69
3.13	APLICAÇÕES	74
4	CONCLUSÃO	99
	REFERÊNCIAS	100

1 INTRODUÇÃO

Vivemos em um mundo euclidiano e tridimensional, por isso os conceitos de Geometria Euclidiana regem o nosso modo de ver o mundo. Em particular, se pararmos as pessoas na rua e pedirmos para que completem a seguinte frase: “A menor distância entre dois pontos é uma——”. É quase certo que elas responderão “linha reta” (POOLE, 2005). Entretanto existem outras noções de distância.

O presente trabalho visa divulgar a Geometria do Taxista, pelo fato de ser uma geometria um pouco diferente daquela que estamos adaptados.

De acordo com (REINHARDT, 2012), a Geometria do Taxista surge, primeiramente, na topologia com base teórica nas definições de espaços métricos. Hermann Minkowski (1884-1909) foi o responsável pelo surgimento da métrica do táxi. Ele nasceu na Rússia e foi um dos professores de Albert Einstein, escreveu e publicou um trabalho sobre um conjunto de métricas diferentes, incluindo o que agora é conhecido como a métrica da Geometria do Taxista.

Foi em uma exibição de um Museu da Ciência e indústria de Chicago, em 1952, quando um livreto com o título “Você vai gostar de Geometria” foi distribuído no evento que a Geometria de Minkowski foi chamada de “Taxicab Geometry” pela primeira vez, ou seja, foi quando se usou o termo Geometria do Taxista pela primeira vez.

Há vários trabalhos e livros sobre o assunto. Citaremos por exemplo, o livro clássico, no qual versa nossas aplicações que é o (KRAUSE, 1985) que traz uma simpática apresentação do tema. Temos o autor (KEVIN, 2012) que abrange vários temas sobre a Geometria do Taxista.

Esta monografia, tem como objetivo apresentar a Geometria do Taxista comparando com os conceitos da Geometria Euclidiana, dentre os quais podemos citar distância, figuras geométricas e aplicações de situações do dia a dia em que esta geometria pode ser aplicada. Veremos como a geometria não-euclidiana é interessante e em certo momentos, chega a ser surpreendente as descobertas que obteremos ao discorrer tal geometria. No decorrer deste trabalho, ora referimos os elementos a Geometria do Taxista, ou simplesmente, Geometria do Táxi.

O trabalho está organizado como segue: No Capítulo 2, encontra-se as preliminares de

alguns conceitos e resultados úteis no decorrer deste trabalho.

Já no Capítulo seguinte, que é o desenvolvimento desta monografia, o mesmo se divide em dez seções: a primeira, faz a saudável comparação entre a Geometria do Taxista e a Geometria Euclidiana, em que por exemplo, inspirados no trabalho de (JANSSEN, 2007), mostramos que a distância do taxista, dada por

$$d_t(P, Q) = |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|, P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q)$$

é uma métrica. A seção seguinte versa a circunferência na Geometria do Taxista apresentando neste contexto, sua equação, gráfico, comprimento, área e o valor de π , com base em (KRAUSE, 1985) e (JANSSEN, 2007). A terceira seção, mostra as chamadas cônicas do táxi, no qual tomamos como referência os autores acima. Já, na seção que trata da mediatriz na geometria do taxista, recorremos ao trabalho de (RESENDE, 2006). Em seguida, trataremos de ângulos e triângulos, o quão interessante será examinar ângulos euclidianos, congruência de triângulos, triângulos equiláteros e isósceles e, como se traduz a soma dos ângulos internos de um triângulo na geometria do táxi, baseando neste caso, em (JANSSEN, 2007), (KAYA; ÇOLAKOGLU, 2006) e (KAYA; ÇOLAKOGLU, 2008). Posteriormente, à luz de (KAYA; ÇOLAKOGLU, 2006), veremos como se comporta o Teorema de Pitágoras neste contexto. Ao falar de Trigonometria na Geometria do Taxista, veremos como caracterizar as funções trigonométricas, seus gráficos e identidades, amparados em (KEVIN; TEVIAN, 2000), (BRISBIN; ARTOLA, 1985) e (AKÇA; KAYA, 1997). Mais uma vez, (JANSSEN, 2007) é citado para apresentar a bela relação entre o Triângulo de Pascal e a Geometria do Taxista. A próxima seção, a mais algébrica de todo este trabalho, visa detalhar o artigo de (KAYA et al., 2000), o qual apresenta uma equação geral e uma classificação para as cônicas do táxi. A penúltima seção, teve a ímpar colaboração de Oilson Alberto Gonzatto Junior, aluno do quinto período do curso de Engenharia Ambiental da UTFPR campus Campo Mourão e comitadamente aluno do terceiro ano do curso de Matemática da FECILCAM que com o auxílio do software *Maple* 16, nos ajudou na elaboração de uma *Maplet*, que nos fornece uma alternativa motivadora de como plotar os gráficos das cônicas e da mediatriz na Geometria do Taxista. Na última seção, apresentamos algumas interessantes aplicações da Geometria do Taxista na Engenharia Urbana extraídas do clássico livro de (KRAUSE, 1985).

Finalmente, concluímos o trabalho propondo o uso da Geometria do Taxista com o objetivo de motivar o processo ensino aprendizagem do aluno e incentivar os educadores para uma abordagem diferenciada de um conteúdo curricular tradicional ao abordar Geometrias Não-Euclidianas.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo enunciaremos alguns conceitos que nos serão úteis no decorrer deste trabalho.

Definição 2.1 *Uma combinação simples de p elementos, tirados de um conjunto de n elementos ($p \leq n$), é qualquer subconjunto de p elementos desse conjunto, de modo que a mudança de ordem desses elementos determina a mesma combinação. A combinação simples, no qual denotaremos por C_n^p ou $\binom{n}{p}$ é calculada pela fórmula*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (2.0.1)$$

Demonstração: Ver (HAZZAN, 2004)

Definição 2.2 *O triângulo de Pascal que também é conhecido como Triângulo de Tartaglia, é um triângulo numérico infinito formado pelos coeficientes binomiais $\binom{n}{p}$, onde n representa o número da linha (posição vertical) e p representa o número da coluna (posição horizontal)*

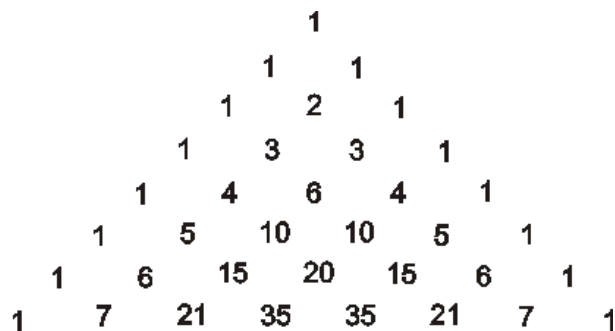


Figura 1: Triângulo de Pascal

Observando o Triângulo de Pascal é possível perceber algumas características que são consideradas suas propriedades. Dentre elas destacam-se:

1. Primeiro e último elemento de uma linha

Todas as linhas do Triângulo de Pascal terão seu primeiro e último elementos iguais a 1. Isso decorre do fato de que o primeiro elemento de uma linha é dado por $\binom{n}{0} = 1$ e o último é dado por $\binom{n}{n} = 1$. Sendo que n deve ser um número natural.

2. Elementos proporcionais

Esta propriedade afirma que elementos (coeficientes binomiais) equidistantes pertencentes a uma mesma linha, possuem valores numéricos iguais. Veja exemplos:

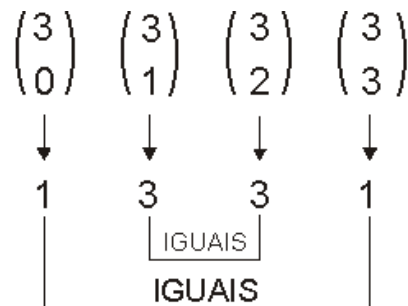


Figura 2: 3ª linha do Triângulo de Pascal

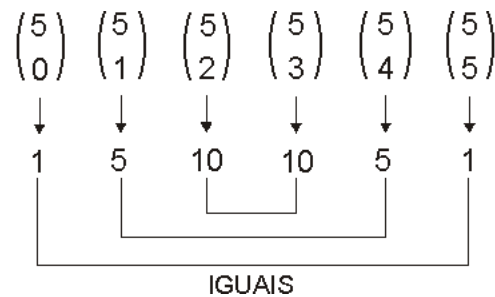


Figura 3: 5ª linha do Triângulo de Pascal

3. Relação de Stifel

Considerando o triângulo de Pascal representado pelos valores numéricos dos seus elementos (coeficientes binomiais), iremos perceber que a soma de dois elementos de cada linha será igual ao elemento abaixo dele como mostra a figura seguinte.

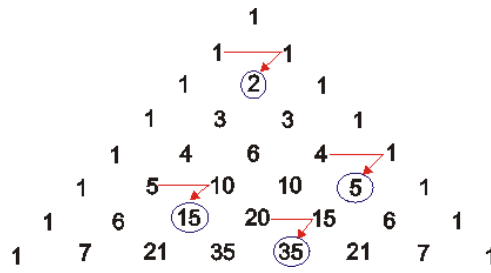


Figura 4: Relação de Stifel

Essa propriedade pode ser representada em forma de equação:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}, \tag{2.0.2}$$

levando em consideração que n é maior ou igual a p .

4. Soma dos elementos de uma linha

$$\begin{aligned}
 \binom{0}{0} &= 2^0 \\
 \binom{1}{0} + \binom{1}{1} &= 2^1 \\
 \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} &= 2^2 \\
 \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} &= 2^3 \\
 \vdots & \\
 \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} &= 2^n
 \end{aligned}$$

Figura 5: Somas relacionadas à cada linha do triângulo

Demonstração: Ver (HAZZAN, 2004)

Definição 2.3 (*Desigualdade Triangular*) *Em um triângulo o comprimento de qualquer lado é menor que a soma dos outros dois.*

Demonstração: Ver (REIS; SILVA, 2012)

Proposição 2.1 *A distância euclidiana, entre os pontos $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$, denotada por $d(P, Q)$ é dada por*

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \tag{2.0.3}$$

Demonstração: Sejam dois pontos distintos $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$, conforme a figura:

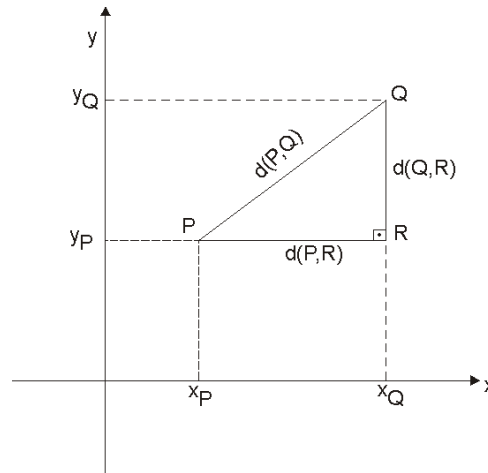


Figura 6: Distância entre dois pontos

No triângulo retângulo PQR , aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$d(P, Q)^2 = d(P, R)^2 + d(Q, R)^2,$$

onde $d(P, R) = |x_Q - x_P|$ e $d(R, Q) = |y_Q - y_P|$.

Logo, $d(P, Q)^2 = |x_Q - x_P|^2 + |y_Q - y_P|^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2$, ou seja,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

□

As definições (2.4)–(2.8) foram extraídas de (REIS; SILVA, 2012).

Definição 2.4 Uma circunferência é o conjunto de pontos de um plano que estão a uma mesma distância r de um ponto C fixado, chamado centro da circunferência. Denotando o centro por $C = (a, b)$, a equação da circunferência de raio r é dada por

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (2.0.4)$$

Definição 2.5 Uma elipse é o conjunto de pontos $P(x, y)$ do plano, tal que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2c$, onde F_1 e F_2 , são dois pontos fixos situados no mesmo plano e c é uma constante. Os pontos F_1 e F_2 são os focos da elipse. A equação da elipse com centro (h, k) e eixos maior e menor de comprimentos $2a$ e $2b$, respectivamente, onde $a > b$ é dada por:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (2.0.5)$$

quando o eixo horizontal é o principal. Quando o eixo vertical é o principal, temos a equação

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad (2.0.6)$$

Definição 2.6 Uma hipérbole é o conjunto de pontos $P(x,y)$ do plano, tal que $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2c$, onde F_1 e F_2 , são dois pontos fixos situados no mesmo plano e c uma é constante. Os pontos F_1 e F_2 são os focos da hipérbole. A equação da hipérbole com centro (h,k) e eixos maior e menor de comprimentos $2a$ e $2b$, respectivamente, onde $a > b$ é dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (2.0.7)$$

quando o eixo horizontal é o principal ou quando o eixo vertical é o principal, temos a equação

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad (2.0.8)$$

Definição 2.7 Dados um ponto F e uma reta d no plano, é denominada Parábola de foco F e diretriz d o lugar geométrico dos pontos P tais que $d(P,d) = d(P,F)$.

Definição 2.8 Fixado um sistema ortogonal de coordenadas, chama-se cônica o lugar geométrico dos pontos $X = (x,y)$ que satisfazem uma equação de segundo grau $g(x,y) = 0$, em que

$$g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \quad (2.0.9)$$

Definição 2.9 Denomina-se mediatriz por definição, o conjunto de todos os pontos do plano que equidistam das extremidades A e B do segmento.

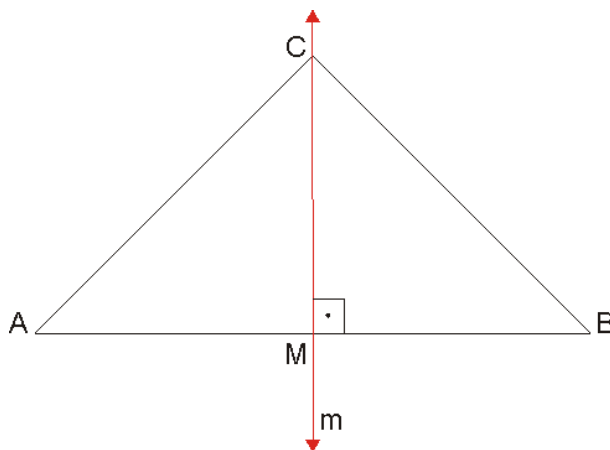


Figura 7: Mediatriz de um triângulo

Tal conjunto é formado por pontos do plano que cumprem as seguintes propriedades:

1. C pertence à mediatriz m de um segmento \overline{AB} se e somente se os segmentos \overline{CA} e \overline{CB} são congruentes.
2. A mediatriz m de um segmento \overline{AB} é a reta perpendicular ao segmento passando por seu ponto médio M .

Observação 2.1 Em um triângulo qualquer, existem 3 mediatrizes, uma para cada lado.

Definição 2.10 O Circuncentro de um triângulo é o ponto de intersecção das mediatrizes dos seus lados.

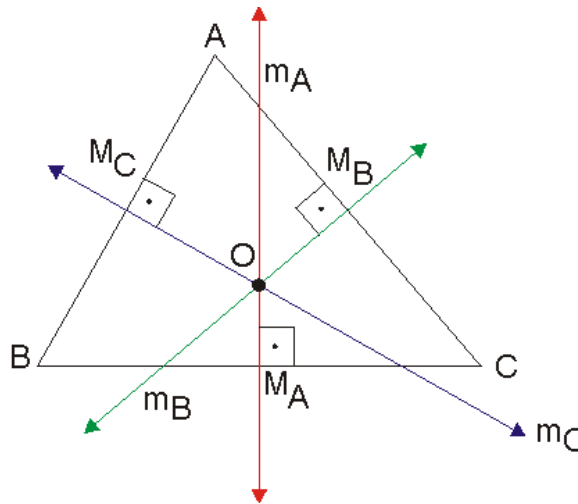


Figura 8: Note que $m_A \cap m_B \cap m_C = \{O\}$

O é o circuncentro do triângulo ABC . As retas m_A , m_B e m_C são as mediatrizes do triângulo ABC .

Proposição 2.2 O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita a um triângulo.

Demonstração: De fato, como o circuncentro goza da propriedade $\{O\} = m_A \cap m_B \cap m_C$, por definição, então:

$$\begin{aligned}
 O \in m_A &\Rightarrow \overline{OB} \equiv \overline{OC} \\
 O \in m_B &\Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC} \\
 O \in m_C &\Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OB} \\
 &\Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} \\
 &\Rightarrow R = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}
 \end{aligned}$$

Portanto, temos uma circunferência de centro O e raio R que passa por A, B, C e circunscreve o triângulo ABC , o que ilustra figura a seguir.

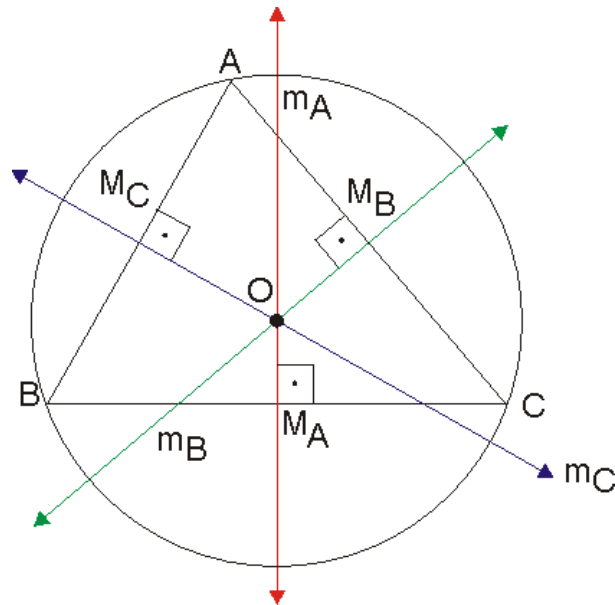


Figura 9: O é o centro da circunferência que contém A, B e C e $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$

□

Definição 2.11 O valor absoluto ou módulo de x , denotado por $|x|$ é uma função definida como segue:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (2.0.10)$$

Demonstração: ver (REIS; SILVA, 2012)

3 DESENVOLVIMENTO

3.1 DISTÂNCIA EUCLIDIANA X DISTÂNCIA DO TAXISTA

A Geometria do Taxista é uma geometria não-euclidiana onde a menor distância entre dois pontos de um plano não é a linha reta. A distância não é medida como o voo de um pássaro, mas como a viagem de um táxi numa cidade, cujas ruas estendem-se vertical e horizontalmente em uma quadra ou malha urbana.

Exercício 3.1 De acordo com mapa abaixo , suponhamos que um motorista de táxi pegue um cliente no ponto *A* e leve até o ponto *B*. Investigue a Geometria Euclidiana e a Geometria do Taxista neste caso.

Solução: Como o motorista não pode andar em linha reta de *A* até *B*, ele precisa ir até o ponto *C* e depois seguir para *B*. Sendo assim a distância não é euclidiana e é dada pela soma de duas distância em direções perpendiculares, neste caso a $AC + CB$.

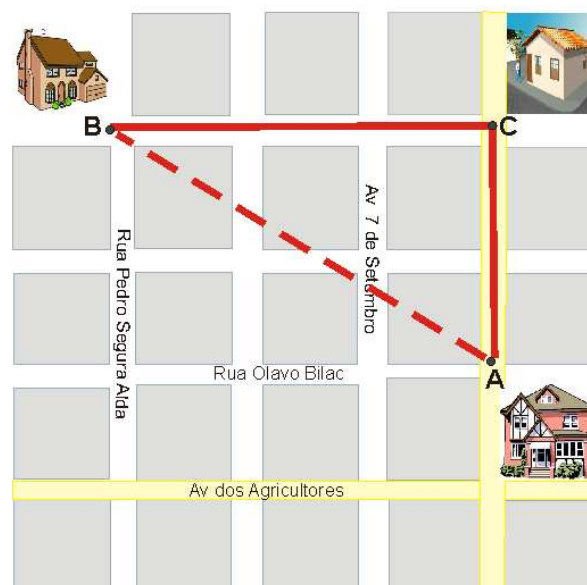


Figura 10: Pontos *A* , *B* e *C* na cidade de Altônia -PR

Vamos considerar A e B dois pontos no plano e $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ suas coordenadas respectivamente.

A distância euclidiana, é dada pela fórmula (2. 0. 3), ou seja:

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \quad (3. 1. 1)$$

A distância do taxista entre os pontos A e B , denotada por $d_t(A, B)$ é dada por :

$$d_t(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \quad (3. 1. 2)$$

Na figura 11, tomando cada lado da quadrícula (quarteirão) como valor unitário, temos:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3,61 \\ d_t(A, B) &= |AC| + |BC| = 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

Qualquer outro caminho direto que una A a B , na figura 11, dará o mesmo valor para d_t .

Na Geometria Euclidiana apenas um processo entre A e B , precisamente o segmento AB , corresponde à respectiva distância. Na Geometria do Taxista existem vários outros caminhos que correspondem à $d_t(A, B)$ que é um problema de contagem e pode ser explorado de forma simples ou até em situações mais complexas, por de fórmula (2. 0. 1) mais sofisticada, isto é,

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

de modo que, neste contexto:

1. Quadra é a distância $ACBD$ de acordo com a figura seguinte:

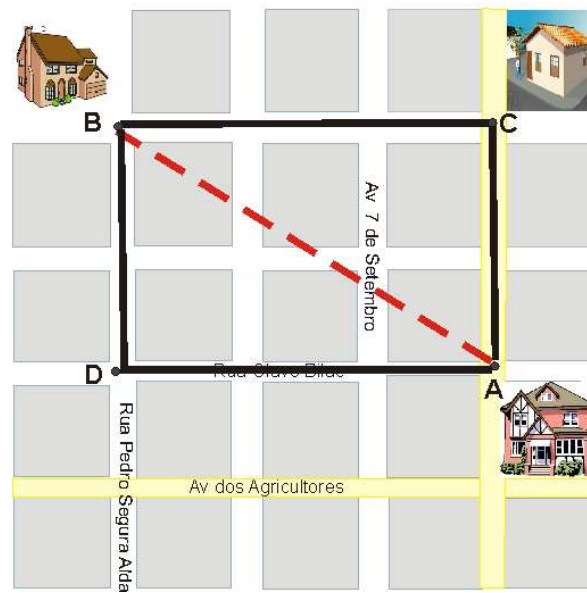


Figura 11: Quadra ACBD

2. n = número de unidades do semiperímetro da “quadra”.
3. p = número de unidades do lado menor da “quadra”.

Logo, no caso da figura 11 :

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!3!} = \frac{20}{2} = 10$$

Portanto, há 10 caminhos diretos de A a B na figura 11, como indica a figura a seguir:

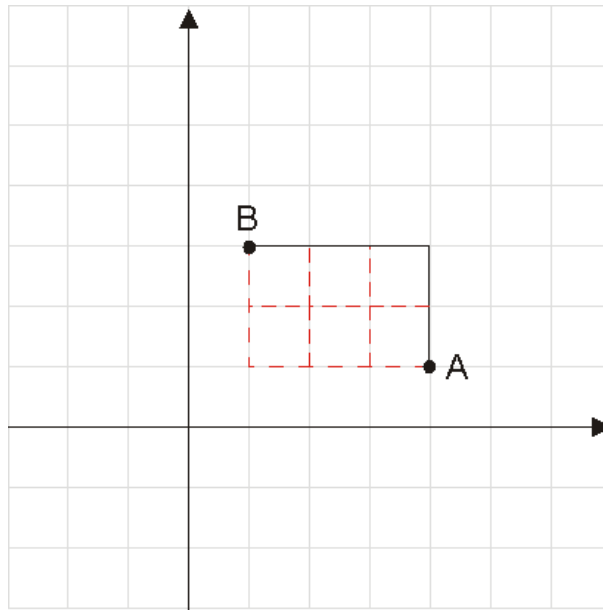


Figura 12: Distância de A até B na geometria do taxista

Observação 3.1 *Embora se tenha utilizado uma malha quadriculada, isto não significa que na Geometria do Taxista os pontos devem ter necessariamente coordenadas inteiras. Este recurso foi utilizado com objetivo de simplificar a medição da nova distância e, a menos que se diga o contrário, adotaremos tal procedimento.*

Métrica

Uma métrica é uma função matemática que mede a distância. É importante notar que tanto a fórmula de distância euclidiana quanto a fórmula de distância do taxista cumprem as exigências de ser uma métrica. Dados P , Q e R pontos, e $d(P, Q)$ a distância de P a Q , os três axiomas para o espaço de métrica são:

- (1) $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0$ se, e somente se, $P = Q$
- (2) $d(P, Q) = d(Q, P)$
- (3) $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$

Em termos simples, isto significa que a distância entre dois pontos é sempre maior do que zero e apenas igual a zero se os dois pontos são coincidentes. A distância entre dois pontos é a mesma, indiferente do ponto que comece a medida. A distância entre um primeiro ponto a um ponto intermediário e, em seguida, a partir do ponto intermediário a um ponto final deve ser maior ou igual à distância que você percorreria se fosse diretamente a partir do primeiro até um ponto

final. Ambas as fórmulas de distância, euclidiana e taxista, satisfazem esses axiomas. A prova é mostrada abaixo.

A seguir, provaremos que a fórmula da distância euclidiana e da distância do taxista são métricas:

Proposição 3.1 *Sejam $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$ e $R(x_R, y_R) \in \mathbb{R}^2$. A distância euclidiana, cuja fórmula é dada por (2. 0. 3), é uma métrica.*

Demonstração: Provaremos a validade dos três axiomas para uma métrica.

De fato,

(1) $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0$ se e somente se $P = Q$.

Se $P = Q$ então $d(P, Q) = d(P, P)$. Assim,

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(x_P - x_P)^2 + (y_P - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(0)^2 + (0)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 0 &= d(P, Q) \\ &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \\ &\Rightarrow (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 = 0 \\ &\Rightarrow x_P = x_Q \text{ e } y_P = y_Q \\ &\therefore P = Q \end{aligned}$$

Em seguida, mostremos que $d(P, Q) \geq 0$. Se $P \neq Q$, então $x_P \neq x_Q$ ou $y_P \neq y_Q$.

Neste caso, note que temos $(x_P - x_Q)^2 > 0$ ou $(y_P - y_Q)^2 > 0$.

Sem perda de generalidade, suponha que $x_P \neq x_Q$. Logo, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} &\geq \sqrt{(x_P - x_Q)^2} \\ &= |x_P - x_Q| \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto, $d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} > 0$.

$$(2) \quad d(P, Q) = d(Q, P)$$

Note que

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \\ &= \sqrt{((-1)(-x_P + x_Q))^2 + ((-1)(-y_P + y_Q))^2} \\ &= \sqrt{((-1)(x_Q - x_P))^2 + ((-1)(y_Q - y_P))^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2(x_Q - x_P)^2 + (-1)^2(y_Q - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \\ &= d(Q, P) \end{aligned}$$

$$(3) \quad d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R).$$

Sejam P, Q, R pontos não colineares, formando assim um triângulo. Perceba que

$$d(P, Q) + d(Q, R) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} + \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2}$$

e

$$d(P, R) = \sqrt{(x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2}$$

De acordo com o teorema de desigualdade triangular, dado na definição (2.3), obtemos que

$$\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} + \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2} \geq \sqrt{(x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2},$$

em outras palavras, $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$.

Estudaremos agora o caso em que P, Q, R são pontos colineares. Quando três pontos são colineares, um ponto deve estar entre os outros dois. Se Q está entre P e R , então $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$, ou seja, $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$.

□

Proposição 3.2 *Sejam $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$ e $R(x_R, y_R) \in \mathbb{R}^2$. A distância do taxista, cuja fórmula é dada por (3.1.2), é uma métrica.*

Demonstração: Com efeito, considere $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$ e $R(x_R, y_R) \in \mathbb{R}^2$.

(1) $d_t(P, Q) \geq 0$ e $d_t(P, Q) = 0$ se e somente se $P = Q$.

Se $P = Q$, então, $d_t(P, Q) = d_t(P, P)$

Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} d_t(P, Q) &= |x_P - x_P| + |y_P - y_P| \\ &= |0| + |0| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $d_t(P, Q) = d_t(P, P)$, por definição, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= d_t(P, Q) \\ &= |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q| \\ &\Rightarrow x_P = x_Q \text{ e } y_P = y_Q \\ &\therefore P = Q \end{aligned}$$

A seguir, mostremos que $d_t(P, Q) \geq 0$. Em verdade, se $P \neq Q$, então, $x_P \neq x_Q$ ou $y_P \neq y_Q$, de modo que, pela definição de $d_t(P, Q)$, resulta em $|x_P - x_Q| > 0$ ou $|y_P - y_Q| > 0$.

Se $x_P \neq x_Q$ (caso análogo para $y_P \neq y_Q$), observe que

$$\begin{aligned} |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q| &\geq |x_P - x_Q| \\ &> 0, \end{aligned}$$

ou seja, $d_t(P, Q) = |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q| \geq 0$.

(2) $d_t(P, Q) = d_t(Q, P)$.

Basta observar que

$$\begin{aligned} d_t(P, Q) &= |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q| \\ &= |(-1)(-x_P + x_Q)| + |(-1)(-y_P + y_Q)| \\ &= |(-1)(x_Q - x_P)| + |(-1)(y_Q - y_P)| \\ &= |(-1)||x_Q - x_P| + |(-1)||y_Q - y_P| \\ &= |x_Q - x_P| + |y_Q - y_P| \\ &= d_t(Q, P). \end{aligned}$$

$$(3) \ d_t(P, Q) + d_t(Q, R) \geq d_t(P, R)$$

Como considerado na proposição anterior, sejam P, Q, R pontos não colineares, formando um triângulo. Veja que

$$\begin{aligned} d_t(P, Q) + d_t(Q, R) &= |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q| + |x_Q - x_R| + |y_Q - y_R| \\ &= (|x_P - x_Q| + |x_Q - x_R|) + (|y_P - y_Q| + |y_Q - y_R|) \\ &\stackrel{(*)}{\geq} (|x_P - x_Q + x_Q - x_R|) + (|y_P - y_Q + y_Q - y_R|) \\ &= |x_P - x_R| + |y_P - y_R| \\ &= d_t(P, R). \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Portanto, $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$

Note que a desigualdade triangular não foi utilizada na passagem $(*)$ na prova do item (3), como na prova da distância euclidiana. Em vez disso, usamos uma propriedade de valor absoluto, que é $|A| + |B| \geq |A + B|$.

A Desigualdade Triangular, que é estritamente maior do que, não se sustenta verdadeira na geometria do táxi. A figura a seguir mostra um contra-exemplo onde a soma de dois lados de um triângulo não é maior que o terceiro lado, tal como seria medido com a métrica do taxista.

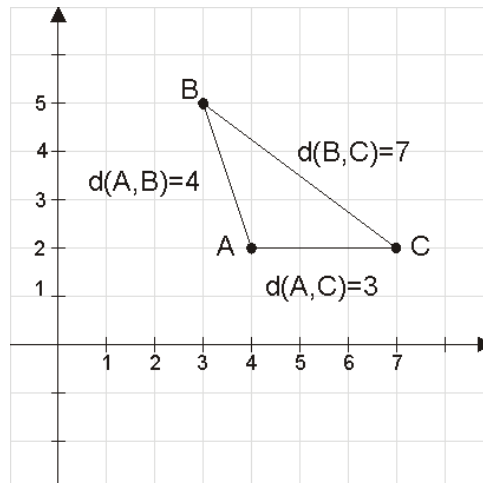


Figura 13: Distância de $AB+AC=BC$

Felizmente nosso axioma da métrica requer que a soma de duas distâncias sejam \geq que a terceira distância e, certamente, a métrica do taxista faz cumprir esse axioma.

Sejam P, Q e R pontos colineares. Permitindo que Q possa estar entre P e R , é verdade que $d_t(P, Q) + d_t(Q, R) = d_t(P, R)$.

□

A distância do taxista é, em algumas situações, igual a distância euclidiana, mas caso contrário, é maior que a distância euclidiana.

Proposição 3.3 *A distância euclidiana é menor ou igual a distância do taxista.*

Demonstração: Com efeito, note que

$$0 \leq 2|x_P - x_Q||y_P - y_Q|$$

Somando em ambos os lados da desigualdade acima, a parcela $(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2$, temos:

$$\begin{aligned} (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + 0 &\leq |x_P - x_Q|^2 + |y_P - y_Q|^2 + 2|x_P - x_Q||y_P - y_Q| \\ \Rightarrow (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + 0 &\leq (|x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|)^2 \end{aligned}$$

Elevando ambos os lados da desigualdade a $\frac{1}{2}$, e simplificando, obtemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} &\leq \sqrt{(|x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|)^2} \\ \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} &\leq |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q| \\ d &\leq d_t \end{aligned}$$

Somente quando $x_P = x_Q$ ou $y_P = y_Q$ (eles não podem ser ambos iguais ao mesmo tempo ou não temos dois pontos distintos) a métrica do taxista será igual a métrica euclidiana ou, em termos simples, os nossos pontos (x_P, y_P) e (x_Q, y_Q) estão verticalmente ou horizontalmente sobre a mesma reta. Caso contrário, se $x_P \neq x_Q$ ou $y_P \neq y_Q$ a distância do taxista é maior do que a distância euclidiana. Vale ressaltar, a facilidade com que a prova seguinte pode ser feita com uma substituição simples. Por exemplo, $A = x_P - x_Q$ e $B = y_P - y_Q$, a prova pode ser escrita assim :

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2|A||B| \\ |A|^2 + |B|^2 &\leq |A|^2 + 2|A||B| + |B|^2 \\ A^2 + B^2 + 0 &\leq (|A| + |B|)^2 \\ \sqrt{A^2 + B^2} &\leq |A| + |B| \end{aligned}$$

□

Neste momento, dada uma reta $y = mx + b$, podemos escrever dois pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ sobre esta reta da forma $P(x_P, mx_P + b)$ e $Q(x_Q, mx_Q + b)$.

Deste modo,

$$\begin{aligned}
 d(P, Q) &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \\
 &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + ((mx_P + b) - (mx_Q + b))^2} \\
 &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + m^2 (x_P - x_Q)^2} \\
 &= \sqrt{(1 + m^2) (x_P - x_Q)^2} \\
 &= \sqrt{1 + m^2} |x_P - x_Q|
 \end{aligned} \tag{3. 1. 4}$$

Agora, voltando nossa atenção para a Geometria do Taxista, que é medida horizontalmente e verticalmente como a distância calculada em um táxi, note que nas retas, pontos e inclinações, estes, preservam os mesmos conceitos que foram tratados na Geometria Euclidiana.

Assim,

$$\begin{aligned}
 d_t(P, Q) &= |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q| \\
 &= |x_P - x_Q| + |(mx_P + b) - (mx_Q + b)| \\
 &= |x_P - x_Q| + |m| |x_P - x_Q| \\
 &= (1 + |m|) |x_P - x_Q|
 \end{aligned} \tag{3. 1. 5}$$

Combinando (3. 1. 4) e (3. 1. 5), obtemos uma identidade que relaciona a distância euclidiana e distância do taxista.

$$d(P, Q) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + |m|} d_t(P, Q), \tag{3. 1. 6}$$

onde $m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$.

Note que se $x_P = x_Q$, isto é, $m \rightarrow +\infty$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{m^2}{m^2}}}{\frac{1}{\sqrt{m^2}} + \frac{|m|}{\sqrt{m^2}}} \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{m^2}{m^2}}}{\frac{1}{\sqrt{m^2}} + \frac{|m|}{|m|}} \\ &= \frac{\sqrt{0+1}}{0+1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

donde neste caso, resulta que $d(P, Q) = d_t(P, Q)$.

Exemplo 3.1 Verifique a identidade acima para $P(1, 2)$ e $Q(3, 5)$.

Solução: Note inicialmente que

$$m = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$$

e

$$d_t(P, Q) = |3-1| + |5-2| = 5.$$

Logo, recorrendo a (3. 1. 6), vem que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}}{1 + \left|\frac{3}{2}\right|} d_t(P, Q) &= \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{\frac{5}{2}} 5 \\ &= \sqrt{13} \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2} \\ &= d(P, Q), \end{aligned}$$

o que mostra o desejado.

□

3.2 A CIRCUNFERÊNCIA NA GEOMETRIA DO TAXISTA

Conforme definição (2.4), na Geometria Euclidiana, circunferência é um lugar geométrico dos pontos de um plano, equidistantes de um ponto fixo chamado centro. Abaixo temos o gráfico de uma circunferência de raio três:

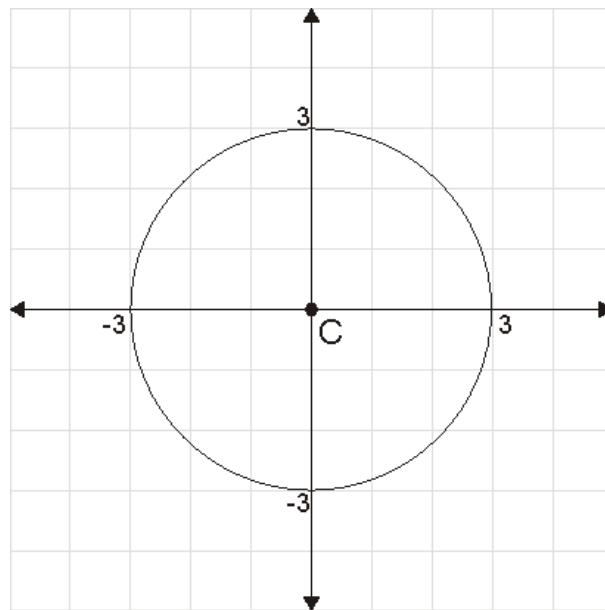


Figura 14: Circunferência de raio 3

Na Geometria do Taxista, suponhamos um ponto C e investiguemos qual é o lugar geométrico dos pontos cuja distância ao ponto C é igual a 3, por exemplo.

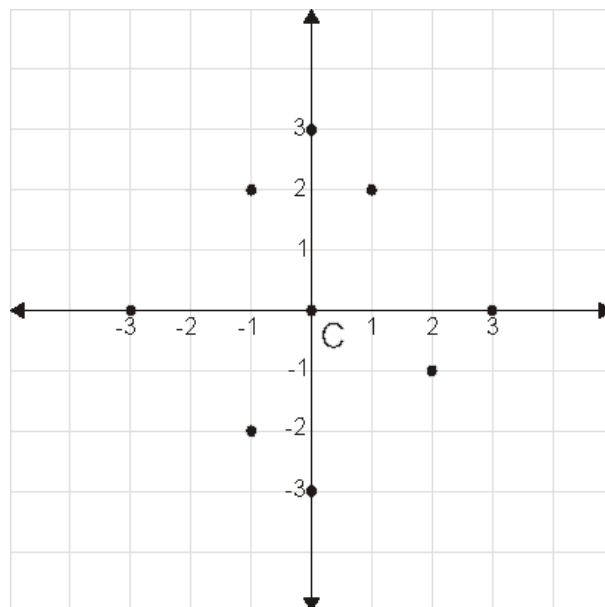


Figura 15: Pontos da circunferência do taxista que distam 3 de C

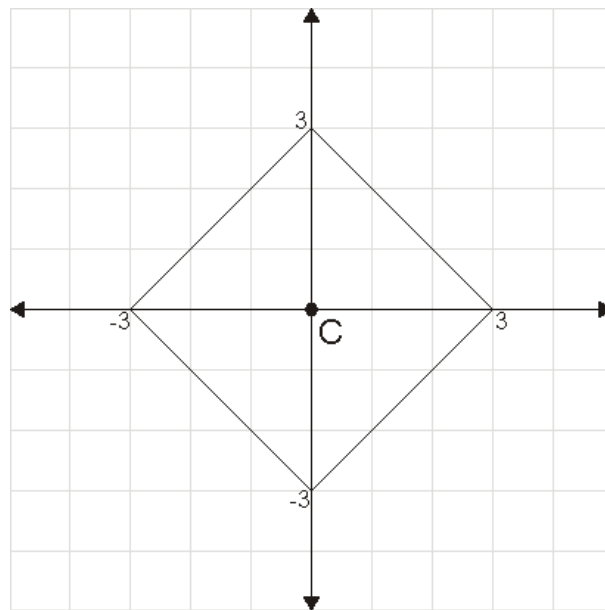


Figura 16: Circunferência do taxista de raio 3

Na figura 15 , alguns pontos que distam 3 quadrículas do ponto C foram marcados, na figura 16 unindo estes pontos foi construída a circunferência de centro C que na Geometria do Taxista tem a forma de um quadrado da Geometria Euclidiana centrado em C e com as diagonais dirigidas segundo as duas direções da quadrícula utilizada. O exemplo a seguir, não é um circunferência.

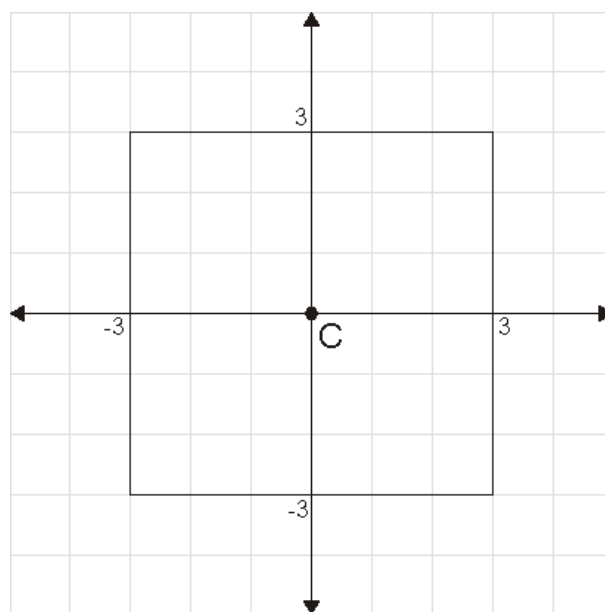


Figura 17: Contra - exemplo de uma circunferência do taxista

Considere agora, a circunferência unitária dada na seguinte figura:

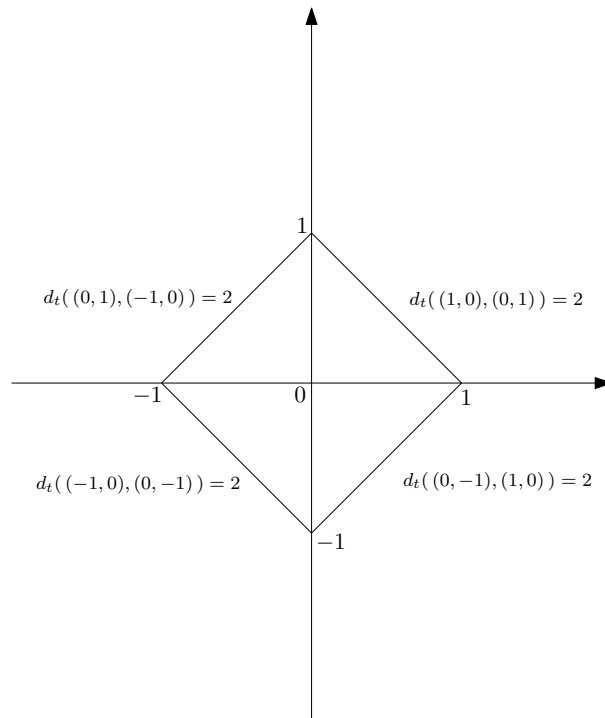


Figura 18: Circunferência unitária do taxista

Na figura acima, perceba que estão destacadas as distâncias entre os pontos $(0, 1)$ e $(1, 0)$, $(-1, 0)$ e $(0, 1)$, $(0, -1)$ e $(-1, 0)$ e $(0, -1)$ e $(1, 0)$, cujas todas estas distâncias medem 2.

Assim, o comprimento da circunferência unitária do taxista é $2 + 2 + 2 + 2 = 8$.

Antes de apresentar uma fórmula geral para o comprimento de circunferência do taxista de raio r , analisemos o valor de π na Geometria do Taxista, que denotaremos por π_t .

Com efeito, sabemos que na Geometria Euclidiana, o valor do π é a razão entre a circunferência e o seu diâmetro. Sendo assim, o valor de π_t é dado por:

$$\pi_t = \frac{8}{2} = 4. \quad (3.2.7)$$

Deste modo, se o raio do círculo é r , temos a fórmula geral para a o comprimento da circunferência do Taxista que chamaremos de C_t , e é notavelmente semelhante à forma Euclidiana do comprimento da circunferência dada por

$$C_t = 8r = 2\pi_t r \quad (3.2.8)$$

A seguir, faremos uma analogia da área da circunferência entre a Geometria do Taxista e Euclidiana, esta cujo valor é notório que é $A = \pi r^2$.

Vamos considerar a área medida a partir de comprimentos estritamente horizontais e verticais. Definamos área como sendo o “número de quadrados unitários iguais na medida para a superfície,” que no nosso caso é um plano. Perceba que a circunferência do Taxista pode ser dividida em quatro triângulos isósceles congruentes de acordo com a Geometria Euclidiana, cada um com base e altura de medida r . É importante notar que a fórmula para a área do triângulo conhecida na Geometria Euclidiana ainda permanece verdadeira neste caso, pois, temos que a base e a altura são medidas horizontalmente e verticalmente e, portanto, os comprimentos dos segmentos são os mesmos para a métrica do Táxi e Euclidiana, como ilustra figura a seguir:

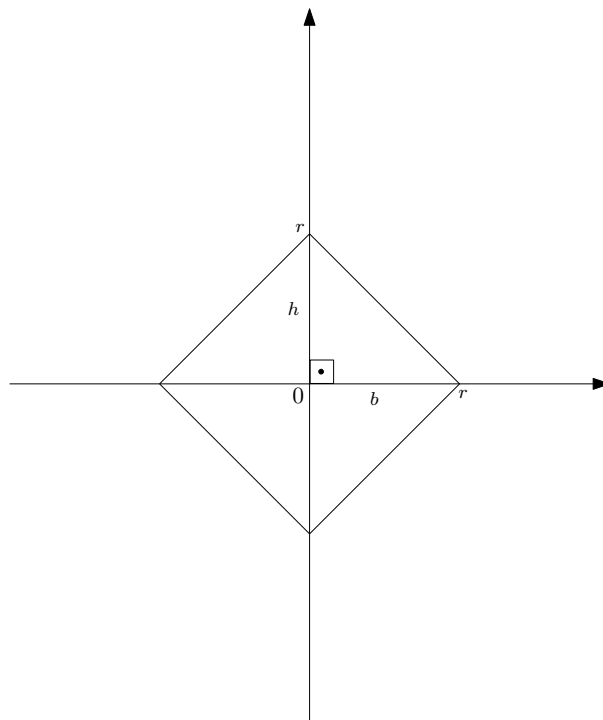


Figura 19: Quatro triângulos isósceles congruentes na circunferência do taxista de raio r .

Amparados neste fato, a área de cada triângulo é

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot r \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \\ &= \frac{1}{2} \cdot r^2 \end{aligned}$$

Como há quatro triângulos isósceles congruentes, resulta que a área da circunferência na Geometria do Taxista de raio r , que denotaremos por A_t é dada por

$$\begin{aligned} A_t &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \\ &= 2 \cdot r^2 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

É interessante que a conclusão acima é a mesma se considerarmos as medições baseadas sobre a métrica Euclidiana da área de um quadrado com lados medindo $r\sqrt{2}$, pois $(r\sqrt{2})^2 = 2r^2$.

Se for conveniente persistir em uma analogia com a fórmula da Circunferência na Geometria Euclidiana, a saber, $A = \pi r^2$, note que (3. 2. 9), pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} A_t &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \\ &= \frac{\pi_t}{2} \cdot r^2 \end{aligned} \quad (3. 2. 10)$$

Finalmente, vejamos um exemplo:

Exercício 3.2 Considere uma circunferência de raio 3 na Geometria do Taxista. Temos que

$$C_t = 2 \cdot \pi_t \cdot 3 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$$

e

$$A_t = \frac{\pi_t}{2} \cdot r^2 = \frac{4}{2} \cdot 3^2 = 18$$

3.3 ELIPSE, PARÁBOLA E HIPÉRBOLE NA GEOMETRIA DO TAXISTA

Noções de elipse:

De acordo com o que vimos na definição (2.5), na Geometria Euclidiana, uma elipse é definida como o conjunto de todos os pontos cuja soma das distâncias, a partir de dois pontos fixos, é constante. A seguir, temos o gráfico de uma elipse cujo eixo principal é o horizontal:

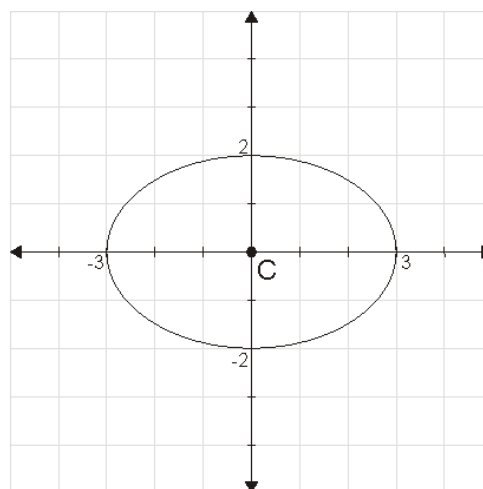


Figura 20: Elipse

Na Geometria do Taxista, a aplicação da definição produz uma elipse interessante, como por exemplo, dado os pontos $(-2,1)$ e $(2,2)$, o gráfico da soma da distância a partir destes pontos que é nove está descrito abaixo.

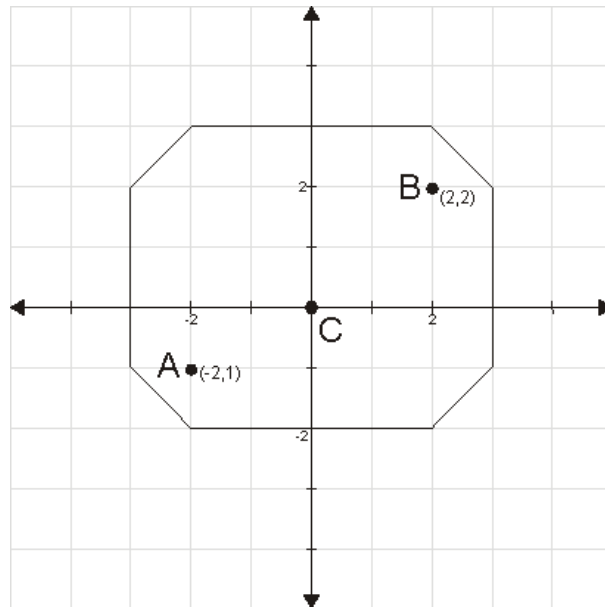


Figura 21: Elipse do taxista

Noções de parábola:

Conforme vimos na definição 2.7, na Geometria Euclidiana, uma parábola é o conjunto de todos os pontos do plano equidistantes de um ponto fixo e de uma reta, que não contém o ponto. Ao ponto fixo chama-se foco e reta chama-se diretriz.

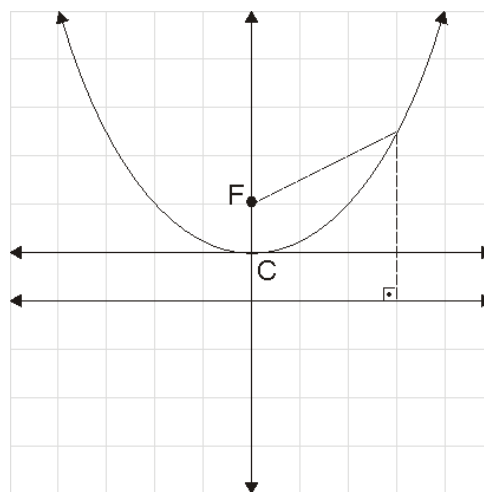


Figura 22: Parábola

Agora vamos considerar parábolas a partir da métrica do taxista. Para começar a investigação, vários tipos de parábolas foram esboçadas:

Caso 1: Quando a diretriz da parábola é horizontal.

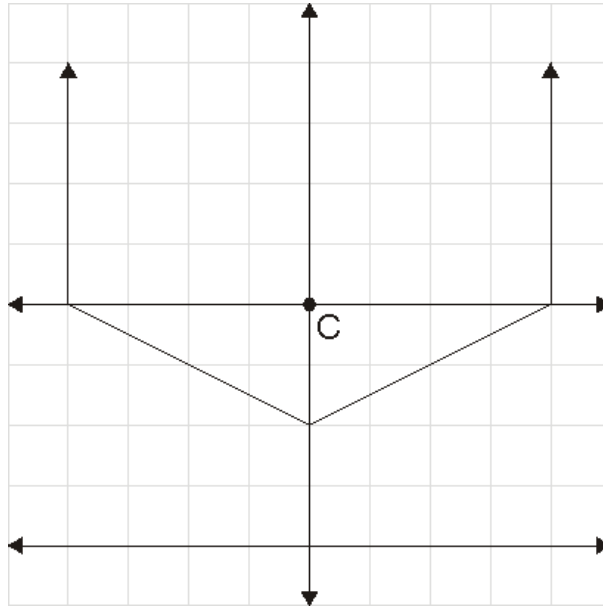


Figura 23: Parábola com diretriz horizontal

Caso 2: A diretriz da parábola é vertical.

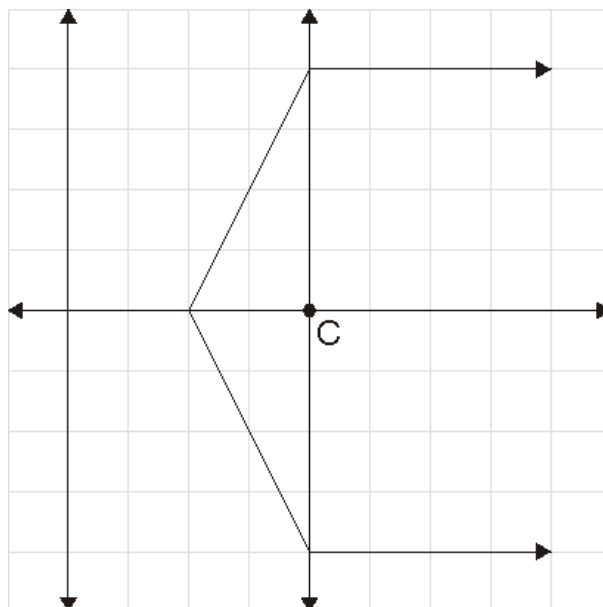


Figura 24: Parábola com diretriz vertical

Caso 3: A diretriz da parábola é diagonal.

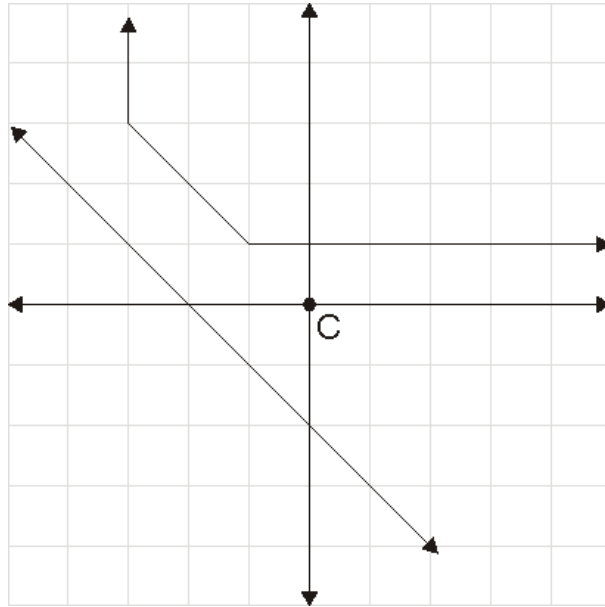


Figura 25: Parábola com diretriz diagonal

Noções de hipérbole:

Vimos na definição (2.6), que uma hipérbole na Geometria Euclidiana é o lugar geométrico dos pontos num plano cujas distâncias a outros dois pontos fixos, chamados focos, é constante. Para ilustrar, apresentamos o gráfico de uma hipérbole cujo eixo principal é o vertical.

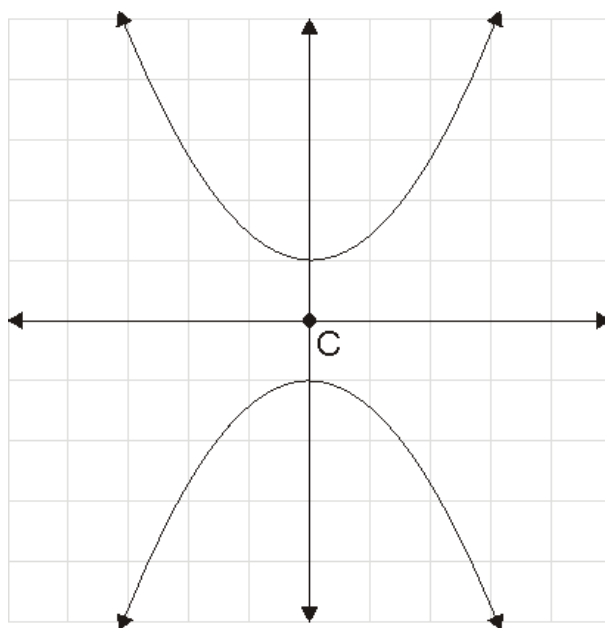


Figura 26: Hipérbole

Abaixo um gráfico da hipérbole do taxista:

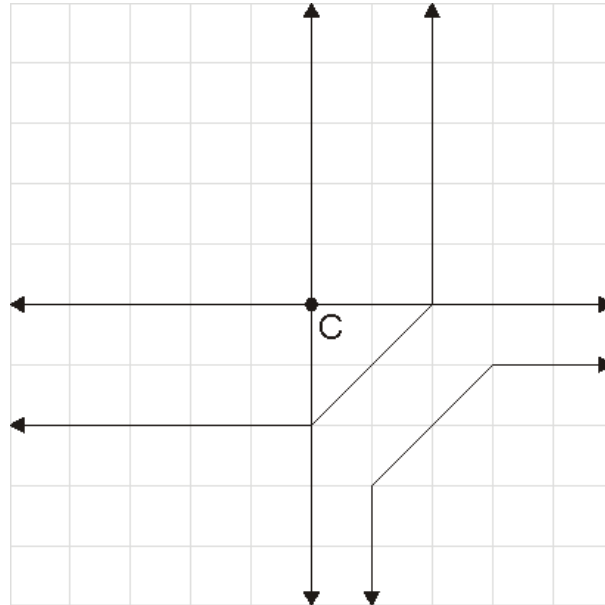


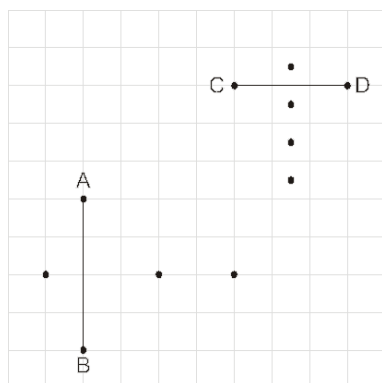
Figura 27: Hipérbole do taxista

Na seção 2, voltaremos a falar sobre as cônicas do taxista, isto é, as cônicas na Geometria do Taxista.

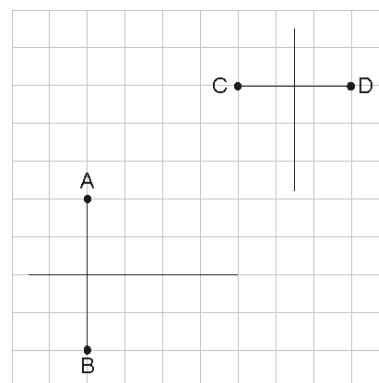
3.4 A GEOMETRIA DO TAXISTA E A MEDIATRIZ

De acordo com a definição 2.9, a mediatriz m de um segmento AB é a reta perpendicular ao segmento, passando por seu ponto médio M .

Na Geometria do Taxista, a mediatriz de um segmento é definida como sendo o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos do segmento. As figuras (a) e (b) a seguir, ilustram pontos da mediatriz e a própria mediatriz.



(a) Pontos da mediatriz



(b) Mediatriz

Quando o segmento tem qualquer das direções da quadrícula, tanto na Geometria Euclidiana quanto na Geometria do Taxista, a mediatriz se confunde com a perpendicular ao segmento passando pelo ponto médio.

Na figura a seguir, as regiões retangulares associadas a cada segmento são um indicador do tipo de figura que a mediatriz vai ser. Para estas posições dos segmentos AB e CD , a mediatriz torna-se uma linha poligonal (p para o segmento AB e q para o segmento CD) que contém um segmento “a 45°” e unindo dois pontos dos lados do retângulo associado a cada segmento e ainda duas semi-retas tendo como direção de uma das direções da quadrícula.

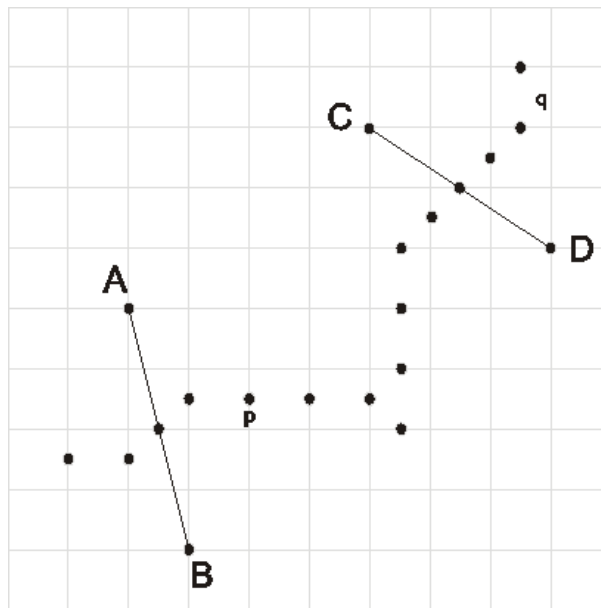


Figura 28: Pontos da mediatriz sem a direção da quadrícula

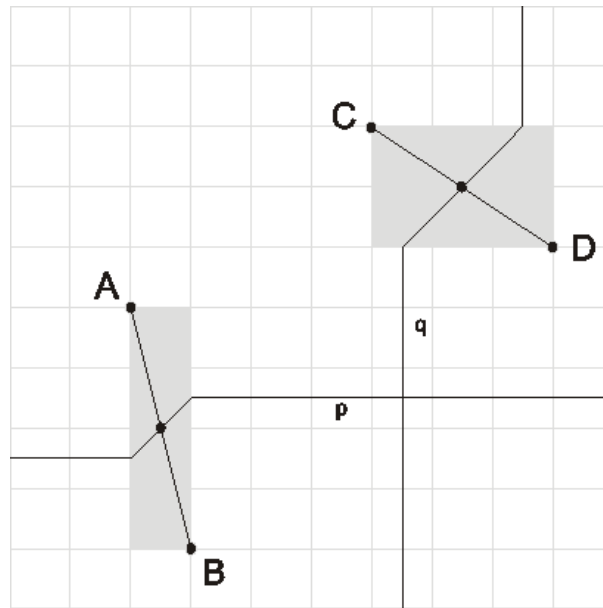
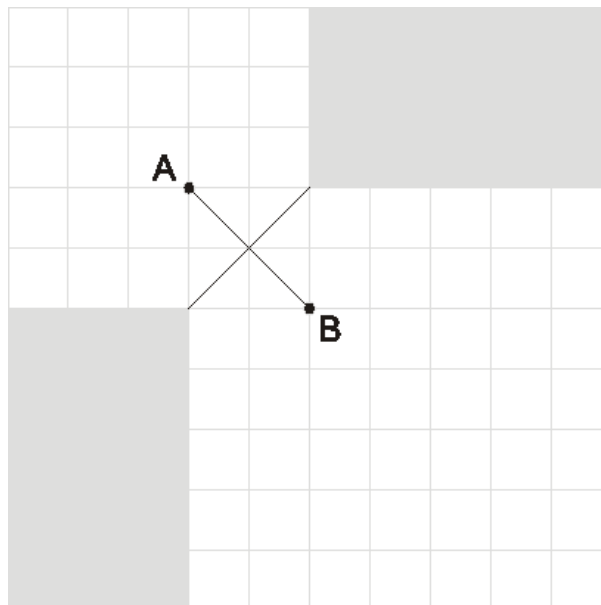


Figura 29: Mediatriz sem a direção da quadrícula

Quando o segmento faz ângulos iguais com as duas direções da quadrícula, a mediatriz é formada por um segmento e por duas regiões ilimitadas, como mostra a figura a seguir:



Supondo agora uma circunferência de centro desconhecido. Na Geometria Euclidiana basta construir a mediatriz de duas cordas da circunferência, encontrando a sua intersecção, que é o centro. No entanto, na Geometria do Taxista isso nem sempre acontece.

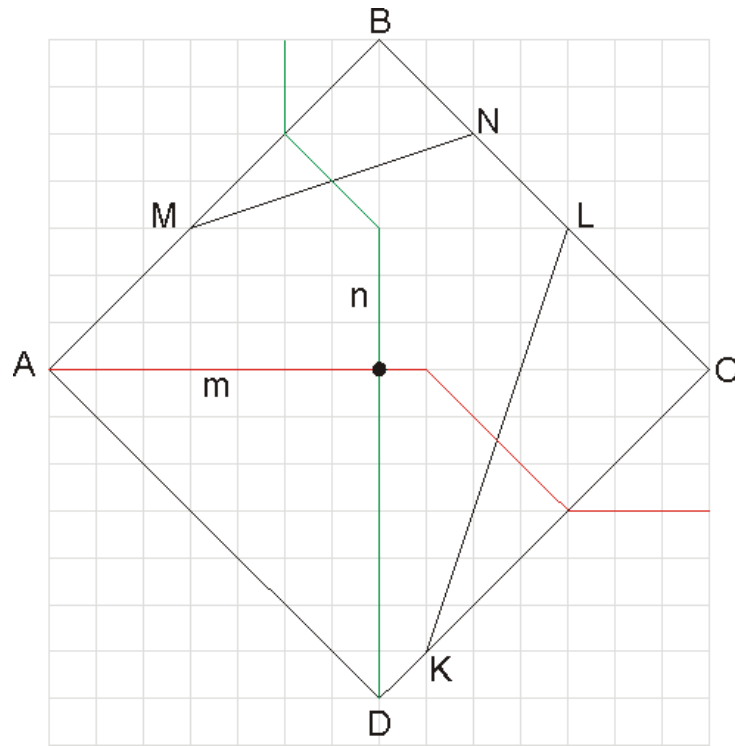


Figura 30: Cordas que se cruzam no centro

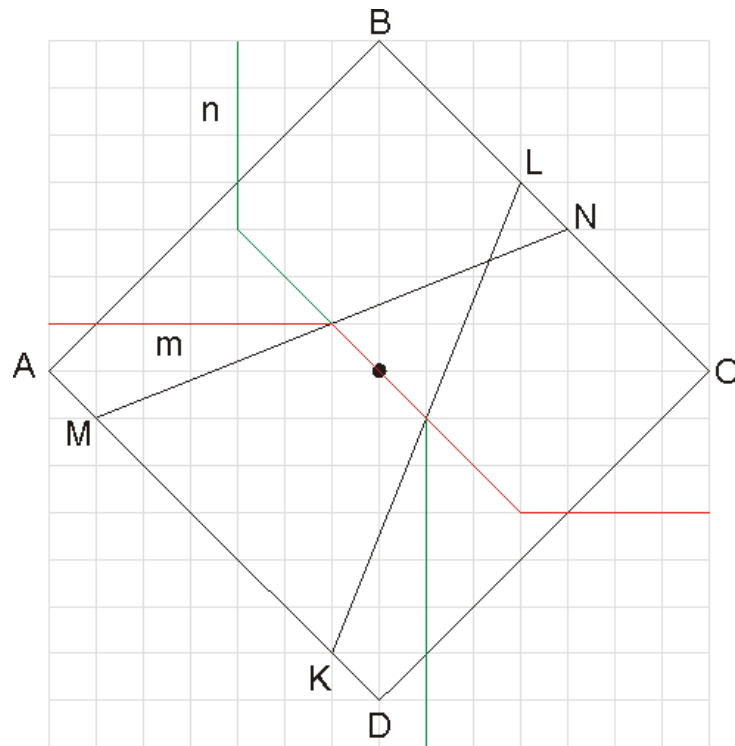


Figura 31: Cordas que passam pelo centro, mas não se cruzam

No caso da figura 30, as cordas MN e KL têm mediatrizes que se cruzam no centro da cir-

cunferência; no caso da figura 31, as mediatrizes m e n das cordas escolhidas passam pelo centro da circunferência, mas não se cruzam e assim não serve para definir o centro; teríamos então que escolher outra corda mais conveniente para este fim. Dois segmentos diferentes podem ter mediatrizes que estejam sobrepostas, pelo menos em parte; veja que nada disto acontece na euclidiana.

Circunferência Circunscrita:

Na Geometria Euclidiana, demonstra-se que as mediatrizes dos lados de qualquer triângulo se encontram num ponto, e esse ponto é o centro da circunferência circunscrita, conforme demonstrado na proposição (2.10).

Na Geometria do Taxista, utilizando os mesmos aspectos das mediatrizes e construção do gráfico correspondente a uma circunferência, a partir de um triângulo qualquer, são traçadas as mediatrizes de acordo com a figura 31. Elas se encontram num ponto C . Calculando a distância entre C e um dos vértices e traçando a circunferência de centro em C , com um raio de comprimento igual a essa distância; a circunferência resulta circunscrita ao triângulo.

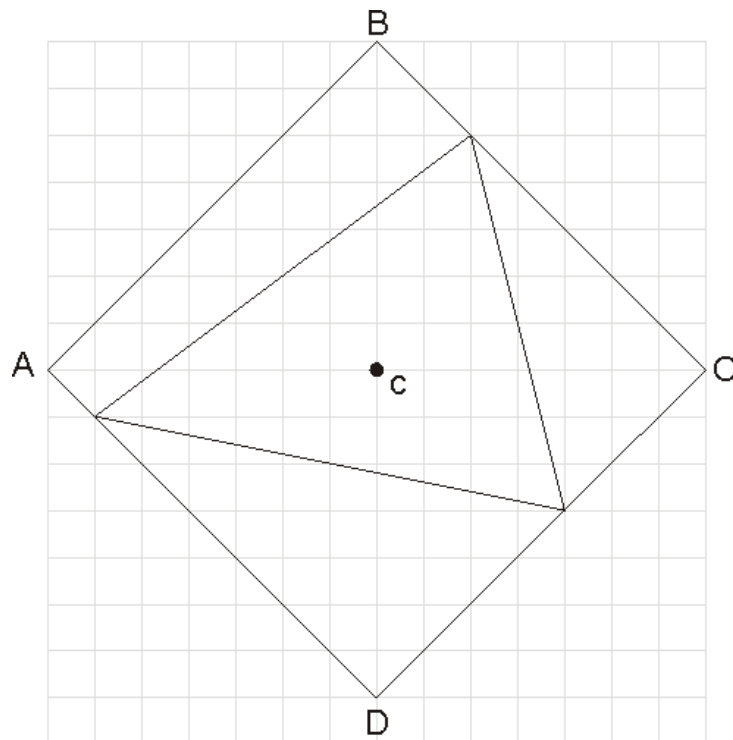


Figura 32: Circunferência circunscrita

3.5 ÂNGULOS NA GEOMETRIA DO TAXISTA

Iniciemos esta seção pela definição de unidade de medida de ângulo.

Definição 3.1 Um *t-radiano* é um ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência unitária do taxista e intercepta um arco de unidade de comprimento (do táxi), isto é, comprimento 1 na Geometria do Taxista. A medida de um ângulo do táxi é o número de *t-radianos* subentendido pelo ângulo sobre o vértice, como mostra figura abaixo:

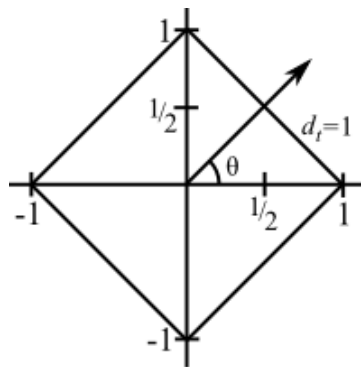


Figura 33: Um *t-radiano* é medido como o comprimento ao longo da circunferência unitária do taxista.

Observação 3.2 Como registro, os ângulos euclidianos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ e π , se observarmos a figura 33, temos que estes tem valores 1, 2 e 4 *t-radianos* na Geometria do Taxista.

A seguir, um teorema que nos mostra uma fórmula de como calcular um ângulo *t-radiano*, dado um ângulo agudo na Geometria Euclidiana.

Teorema 3.1 Um ângulo agudo euclidiano, no qual denotaremos por θ_e tem ângulo táxi, denotado por θ_t dado pela seguinte fórmula

$$\theta_t = 2 - \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \theta_e} \quad (3.5.11)$$

$$= \frac{2 \cos \theta_e}{\operatorname{sen} \theta_e + \cos \theta_e} \quad (3.5.12)$$

onde as funções trigonométricas relatadas, são àquelas tratadas na Geometria Euclidiana.

Demonstração: Com efeito, a medida de θ_t do ângulo euclidiano θ_e é a mesma para a distância do taxista de (1,0) para a interseção das retas $y = -x + 1$ e $y = x \tan \theta_e$.

Seja P este ponto de interseção. A coordenada x desta interseção é

$$x_P = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \theta_e}$$

e a coordenada y de P é $y_P = -x_P + 1$. Assim, a distância a partir do ponto $(1, 0)$ a P é

$$\begin{aligned} \theta_t &= 1 - x_P + y_P \\ &= 2 - \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \theta_e} \end{aligned}$$

□

3.6 TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS E A GEOMETRIA DO TAXISTA

Algumas características muito familiares dos triângulos euclidianos deixam de transitar, no entanto, no ambiente do táxi. Por exemplo, o triângulo mostrado na figura abaixo é um triângulo equilátero (todos os lados têm o mesmo comprimento). Mas, os ângulos deste triângulo são 2 t-radianos, 1 t-radiano, e 1 t-radiano, respectivamente. Portanto, triângulos equiláteros de táxi não são necessariamente equiangular (possuem todos os ângulos iguais).

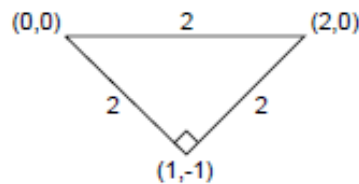


Figura 34: Um triângulo equilátero do táxi que não é equiangular

Além disso, os ângulos da base de um triângulo isósceles do táxi não precisam ser congruentes, como ilustrado na figura seguinte

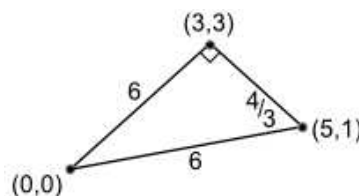


Figura 35: Um triângulo isósceles do táxi cujos ângulos da base não são congruentes

A base tem medidas 2 t-radianos (um ângulo reto) e $\frac{4}{3}$ t-radianos.

3.7 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS NA GEOMETRIA DO TAXISTA

Na Geometria Euclidiana, sabemos que dois segmentos AB e CD são congruentes, isto é $AB \cong CD$, se estes possuem o mesmo comprimento. Contudo, isto não é verdadeiro na Geometria do Taxista. A seguinte figura exhibe exemplos cujas distâncias do táxi valem 10.

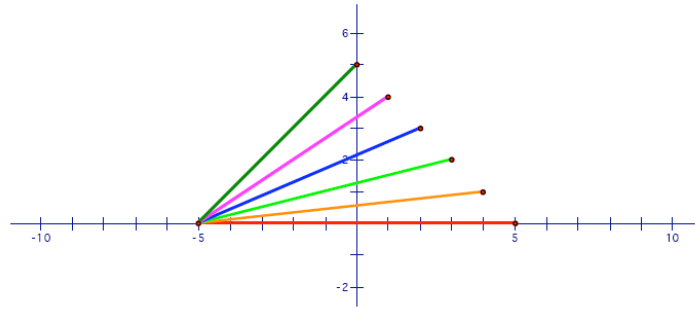


Figura 36: Segmentos congruentes na Geometria do Taxista

Embora todos tenham distâncias iguais, o comprimento de cada segmento não é o mesmo. Assim, na Geometria do Taxista, o tamanho e a forma devem ser ambos tomados em consideração. Deste modo, os segmentos nesta geometria devem ser congruentes se a seguinte relação for verdadeira:

$$|x_P - x_Q| = |y_P - y_Q|.$$

A igualdade acima onde os segmentos são de mesma forma e a soma deles para $d_t(P, Q) = |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|$ também será verdadeira resultando em mesma distância. Isto vem como uma grande revelação para os alunos, que em um primeiro momento, se perguntam o porquê congruência e comprimentos iguais não são a mesma coisa.

É notório que, na Geometria Euclidiana, temos muitas condições familiares que garantem que dois triângulos são congruentes. Entre eles estão LAL, ALA, e AAL. Na Geometria do taxista, a única condição que garante dois triângulos congruentes é LALAL. Um exemplo a seguir, elimina quase todas as outras condições.

Exemplo 3.2 *Considere os dois triângulos mostrados na figura abaixo.*

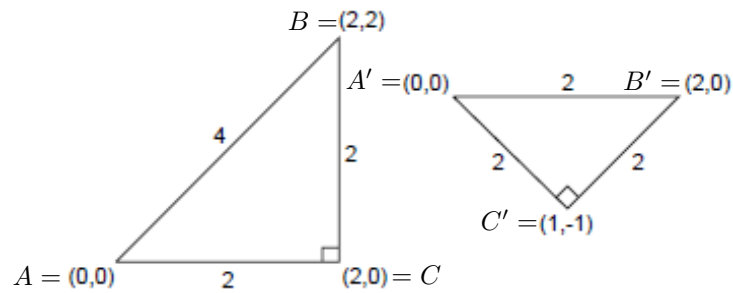


Figura 37: Triângulos satisfazendo ALALA são congruentes

O triângulo formado pelos pontos $A = (0,0)$, $B = (2,2)$ e $C = (2,0)$, tem lados de comprimentos de 2, 2, e 4 e os ângulos de medidas 1, 1, 2 t -radianos, respectivamente. O triângulo formado pelos pontos $A' = (0,0)$, $B' = (2,0)$, e $C' = (1,-1)$ tem lados de comprimento 2 e ângulos de medida 1, 1, e 2, respectivamente. Estes dois triângulos satisfazem a condição ALALA, mas não são congruentes. Vejamos como a condição ALA não é satisfeita.

De fato,

$$\overline{AC} = \overline{A'C'} = 2$$

$$\angle BAC = \angle B'A'C' = 2 \text{ } t\text{-radianos}$$

$$\overline{BC} = \overline{B'C'} = 2$$

$$\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$$

De modo análogo, devemos ver LAL, e as condições de AAL, e ainda, a possibilidade de uma condição de LLA ou AAA.

Exemplo 3.3 Na figura a seguir, o triângulo à direita é formado pelos pontos $(0,0)$, $(0.5,1.5)$ e $(1.5, 0.5)$ e tem lados de comprimento 2 e ângulos 1, 1.5, e 1.5 t -radianos. Então, este satisfaz a condição LLL com o segundo triângulo do exemplo precedente, como também pode se constatar abaixo. Contudo, os ângulos deste triângulos não são congruentes, o que nos diz que as condições LLL e LLLA falham.

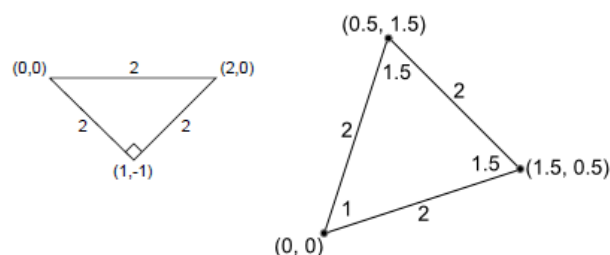


Figura 38: Triângulos satisfazendo LLL e LLLA que não são congruentes

□

A última condição remanescente, LALAL é verdadeira, como afirmamos. Sua prova consiste no fato que ainda nesta geometria, como veremos posteriormente, a soma dos ângulos internos de um triângulo é $4t$ -radianos, que decorre no fato que dadas retas paralelas e uma transversal, os ângulos alternos internos são congruentes. Começamos esta discussão, ao notar que a distância do taxista é invariante sobre translações, rotações por ângulos retos e invariante à reflexão sobre uma reta vertical ou horizontal, ou combinações destas transformações (para tanto, consulte (KAYA; ÇOLAKOGLU, 2008)). Desde que ângulos do táxi são medidos usando simplesmente distância do taxista (definição (3.1)), estes são também invariantes sobre estas transformações. De posse disto, temos que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Isto segue imediatamente do seguinte resultado:

Lema 3.1 *Na Geometria do Taxista, ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

Demonstração: Usando a figura a seguir como guia, note que um ângulo em um par de ângulos opostos pelo vértice pode ser obtido de outro por uma reflexão sobre seu ponto de interseção (uma composição de reflexões sobre uma reta horizontal e uma reta vertical). Portanto, na Geometria do Taxista, ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

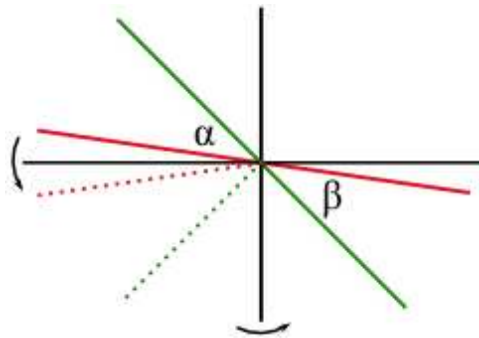


Figura 39: Ângulos opostos pelo vértice formados pela interseção de retas são congruentes

□

Teorema 3.2 *Dadas duas retas paralelas e uma transversal, os ângulos internos são congruentes.*

Demonstração: usando a figura a seguir, faça uma translação do ângulo α por uma transversal para se tornar um ângulo oposto a β . Esta translação de ângulo, tem a mesma medida que

α . Desde que ângulos opostos pelos vértices são congruentes pelo lema anterior, α e β são congruentes.

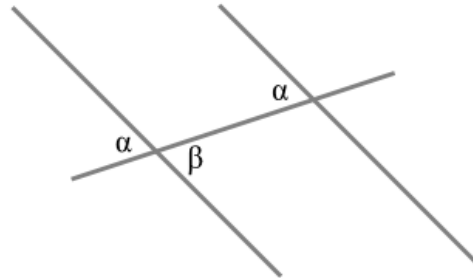


Figura 40: Ângulos opostos pelo vértice formados pela interseção de retas são congruentes

□

Teorema 3.3 *A soma dos ângulos de um triângulo na Geometria do Taxista é $4t$ -radianos.*

Demonstração: Dado o triângulo na próxima figura, nós podemos transladar o ângulo γ de Q para R e pela congruência de ângulos alternos internos dada no teorema anterior. Logo, note pela figura que $\widehat{R} + \gamma + \theta = \pi$ na Geometria Euclidiana.

Portanto, pela observação (3.2), concluímos que a soma dos ângulos de um triângulo na Geometria do Taxista é $4t$ -radianos.

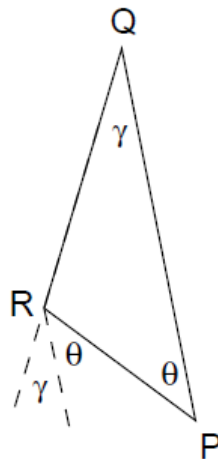


Figura 41: Ângulos opostos pelo vértice formados pela interseção de retas são congruentes

□

3.8 O TRIÂNGULO DE PITÁGORAS NA GEOMETRIA DO TAXISTA

É bem conhecido que, para qualquer triângulo ABC no plano euclidiano, se \overline{BC} é a hipotenusa e $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ e $c = d(A, B)$, têm-se:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

que é conhecido como Teorema de Pitágoras. Uma versão deste teorema do Taxista pode ser definido como segue:

Teorema 3.4 Usando a para denotar a hipotenusa, b e c para denotar o comprimento dos lados do triângulo ABC , com ângulo reto em A na Geometria do Taxista, então

$$a = \begin{cases} b + c - 2\gamma, & \text{se existe apenas uma linha de base pelo vértice } A \\ b + c, & \text{se existem duas linhas de base através do vértice } A \end{cases}$$

onde $\gamma = d_t(A, H)$ e $H =$ o ponto de projeção ortogonal de B ou C para o segmento da base através de A .

Demonstração: Note de antemão, que se A é um vértice de base quando ABC é um triângulo com ângulo reto A . Isso é, esse triângulo tem sempre uma ou duas linhas de base passando por A . Dividamos nossa prova em dois casos.

Caso 1. Sejam $b_1 = d(A, C')$, $b_2 = d(C, C')$, $c_1 = d(B, B')$ e $c_2 = d(A, B')$ dados na figura a seguir.

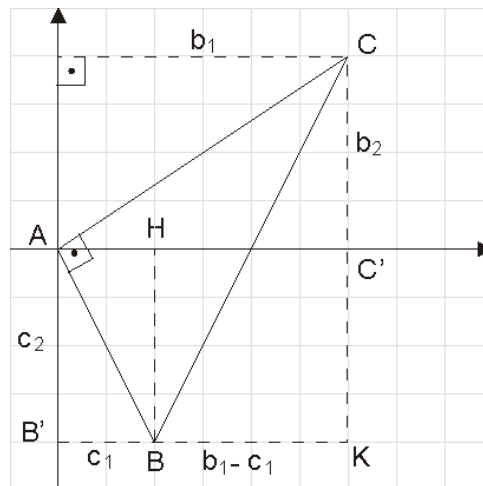


Figura 42: Quando existe apenas uma linha de base passando pelo vértice A

Se existe apenas uma linha de base pelo vértice A e em virtude de (3. 1. 3), temos que $b = d(A, C') + d(C, C') = b_1 + b_2$ e $c = d(A, B') + d(B, B') = c_2 + c_1$. Assim,

$$\begin{aligned} a &= b_1 - c_1 + b_2 + c_2 \\ &= (b_1 + b_2) + (c_2 + c_1) - c_1 - c_1 \\ &= b + c - 2c_1 \\ &= b + c - 2\gamma, \end{aligned}$$

de modo que $c_1 := \gamma = d(B, B') = d(A, H)$.

Caso 2. Se existem duas linhas de base através do vértice A , então a base de linhas coincidem com os lados perpendiculares do triângulo ABC como na figura a seguir. Assim, uma vez mais por (3. 1. 3), vem que $a = b + c$, que completa a prova.

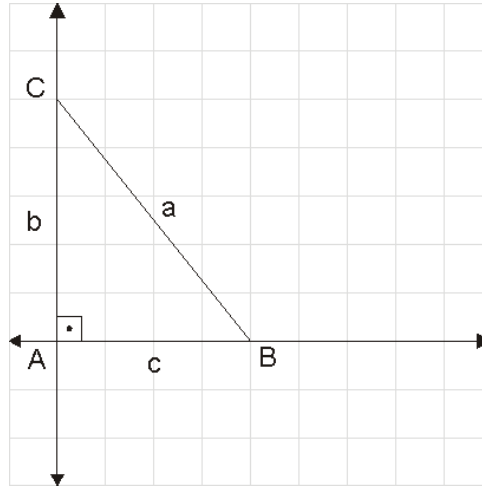


Figura 43: Quando existem duas linhas de base passando pelo vértice A

□

Outra versão do Teorema Taxista de Pitágoras:

No Teorema (3.4) foi dado uma versão do Teorema Taxista de Pitágoras, utilizando um parâmetro que é o comprimento de uma parte do segmento da base. Nesta seção, usaremos inclinações da hipotenusa e um lado do triângulo para dar outra versão do Teorema.

Teorema 3.5 *Usando a para denotar o comprimento da hipotenusa, b e c para denotar os comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo no plano taxista, então se a inclinação da hipotenusa é m_1 e a inclinação de qualquer um dos catetos do triângulo é m_2 , temos*

$$a^2 = \rho(m_1, m_2) \cdot (b^2 + c^2), \quad (3. 8. 13)$$

onde

$$\rho(m_1, m_2) = \begin{cases} \left(\frac{1+m_2^2}{1+m_1^2} \right) \left(\frac{1+|m_1|}{1+|m_2|} \right)^2, & \text{se } m_1, m_2 \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{1+m_2^2}{(1+|m_2|)^2} \right), & \text{se } m_1 \rightarrow \infty \\ \left(\frac{(1+|m_1|)^2}{1+m_1^2} \right), & \text{se } m_2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.8.14)$$

Demonstração: Inicialmente, recordemos por (3. 1. 6) que, para quaisquer dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ no plano taxista, se $x_1 \neq x_2$ então,

$$d(P, Q) = \left[\frac{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}{1+|m|} \right] \cdot d_t(P, Q),$$

$$\text{donde } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Se $x_1 = x_2$, isto é, $m \rightarrow \infty$ resulta que

$$d(P, Q) = d_t(P, Q)$$

o que permite converter uma distância do taxista com a distância Euclidiana.

Tomando a, b e c como os comprimentos euclidianos correspondentes dos lados do triângulo, consideremos m_1 a inclinação da hipotenusa, e m_2 a inclinação de qualquer um das catetos. Para fixar as ideias, separamos nossa prova em três casos.

1. Caso em que $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, isto é, $m_1, m_2 \rightarrow \infty$.

Se $m_2 \neq 0$ então, como os catetos de um triângulo retângulo são perpendiculares, vem que a inclinação de outro cateto é $-\frac{1}{m_2}$ e por (3. 1. 6) recordado acima, obtemos:

$$\begin{aligned} a &= \left[\frac{(1+m_1^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+|m_1|)} \right] \cdot a \\ b &= \left[\frac{(1+m_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+|m_2|)} \right] \cdot b \\ c &= \left[\frac{\left(1 + \left(-\frac{1}{m_2}\right)^2\right)}{\left(1 + \left|-\frac{1}{m_2}\right|\right)} \right] \cdot c = \left[\frac{(1+m_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+|m_2|)} \right] \cdot c \end{aligned}$$

Utilizando estes valores de a, b e c no Teorema de Pitágoras Euclidiano obtemos

$$\left[\frac{(1+m_1^2)}{(1+|m_1|)^2} \right] a^2 = \left[\frac{1+m_2^2}{(1+|m_2|)^2} \right] \cdot (b^2+c^2)$$

$$\therefore a^2 = \left(\frac{1+m_2^2}{1+m_1^2} \right) \left(\frac{1+|m_1|}{1+|m_2|} \right)^2 \cdot (b^2+c^2)$$

2. Caso em que $m_2 \rightarrow \infty$.

Se $m_2 = 0$, então a inclinação do outro cateto é $\left(-\frac{1}{m_2}\right) \rightarrow \infty$ ou

se $m_2 \rightarrow \infty$, então a inclinação do outro cateto é $\left(-\frac{1}{m_2}\right) \rightarrow 0$ e com isso

$$a = \left[\frac{(1+m_1^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+|m_1|)} \right] \cdot a$$

$$b = b$$

$$c = c$$

Novamente, recorrendo ao Teorema de Pitágoras Euclidiano para estes valores de a, b e c , vem que

$$\left[\frac{(1+m_1^2)}{(1+|m_1|)^2} \right] a^2 = b^2+c^2$$

$$\therefore a^2 = \left(\frac{(1+|m_1|)^2}{1+m_1^2} \right) \cdot (b^2+c^2)$$

3. Se $m_1 \rightarrow \infty$ então,

$$a = a$$

$$b = \left[\frac{(1+m_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+|m_2|)} \right] \cdot b$$

$$c = \left[\frac{(1+m_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+|m_2|)} \right] \cdot c$$

Uma vez mais, aplicando o Teorema de Pitágoras Euclidiano para os valores de a, b e c precedentes, temos que

$$a^2 = b^2+c^2$$

$$\therefore a^2 = \left(\frac{1+m_2^2}{(1+|m_2|)^2} \right) \cdot (b^2+c^2)$$

Por fim, os três casos acima nos dizem que

$$a^2 = \rho(m_1, m_2) \cdot (b^2+c^2),$$

onde

$$\rho(m_1, m_2) = \begin{cases} \left(\frac{1+m_2^2}{1+m_1^2} \right) \left(\frac{1+|m_1|}{1+|m_2|} \right)^2, & \text{se } m_1, m_2 \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{1+m_2^2}{(1+|m_2|)^2} \right), & \text{se } m_1 \rightarrow \infty \\ \left(\frac{(1+|m_1|)^2}{1+m_1^2} \right), & \text{se } m_2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.8.15)$$

o que completa a prova.

□

3.9 A TRIGONOMETRIA NA GEOMETRIA DO TAXISTA

Iniciemos com a seguinte definição.

Definição 3.2 *O ponto de intersecção do lado final de um ângulo de táxi θ_t na posição usual com o círculo unitário do taxista é o ponto $(\cos \theta_t, \sen \theta_t)$.*

É importante notar que o seno de um ângulo do taxista e os valores de cosseno de um ângulo do taxista não concordam com o seno euclidiano e os valores de cosseno do ângulo correspondente euclidiano. Por exemplo, o ângulo 1 t-radiano, que é equivalente a $\frac{\pi_t}{4}$ (veja seção “Circunferência na Geometria do Taxista”), tem valores do seno e cosseno do taxista da mesma forma que o ângulo euclidiano “equivalente”.

Todavia, os valores de seno e cosseno do taxista são 0,5 em vez $\frac{\sqrt{2}}{2}$ como na Geometria Euclidiana. A imagem das funções seno e cosseno permanece $[-1, 1]$, mas o período destas funções fundamentais com centro na origem é $8 = 2\pi_t$.

Recordemos que se (x, y) é algum ponto sobre a circunferência unitária euclidiana, então $x^2 + y^2 = 1$. Neste caso, como $x = \cos \theta_e$ e $y = \sen \theta_e$, temos que

$$\sen^2 \theta_e + \cos^2 \theta_e = 1.$$

Agora, na Geometria do Taxista, uma vez que a equação da circunferência unitária é dada por $|x| + |y| = 1$, à luz da definição (3.2), resulta que

$$|\sen \theta_t| + |\cos \theta_t| = 1. \quad (3.9.16)$$

Além disso, os valores de seno e cosseno podem variar (como uma função definida por partes) linearmente com o ângulo θ_t :

$$\cos \theta_t = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\theta_t, & 0 \leq \theta_t < 4 \\ -3 + \frac{1}{2}\theta_t, & 4 \leq \theta_t < 8 \end{cases} \quad (3.9.17)$$

$$\text{sen} \theta_t = \begin{cases} \frac{1}{2}\theta_t, & 0 \leq \theta_t < 2 \\ 2 - \frac{1}{2}\theta_t, & 2 \leq \theta_t < 6 \\ -4 + \frac{1}{2}\theta_t, & 6 \leq \theta_t < 8 \end{cases} \quad (3.9.18)$$

A Tabela a seguir nos oferta úteis relações simples prontamente derivadas a partir dos gráficos da funções seno e cosseno que são mostrados na figura seguinte.

Tabela 1: Relações trigonométricas básicas do taxista

$\text{sen}(-\theta_t) = -\text{sen} \theta_t$	$\text{sen}(\theta_t + 2) = \cos \theta_t$
$\cos(-\theta_t) = \cos \theta_t$	$\cos(\theta_t - 2) = \text{sen} \theta_t$
$\text{sen}(\theta_t - 4) = -\text{sen} \theta_t$	$\text{sen}(\theta_t + 8\kappa) = \text{sen} \theta_t, \kappa \in \mathbb{Z}$
$\cos(\theta_t - 4) = -\cos \theta_t$	$\cos(\theta_t + 8\kappa) = \cos \theta_t, \kappa \in \mathbb{Z}$

Fonte: (KEVIN; TEVIAN, 2000)

A estrutura dos gráficos dessas funções é semelhante ao dos gráficos euclidianos de seno e de cosseno. Note-se que a transição suave de aumentar para diminuição no extremos da função foi substituído por um bico. Este é o mesmo efeito visto ao se comparar circunferências euclidianas com circunferências do taxista.

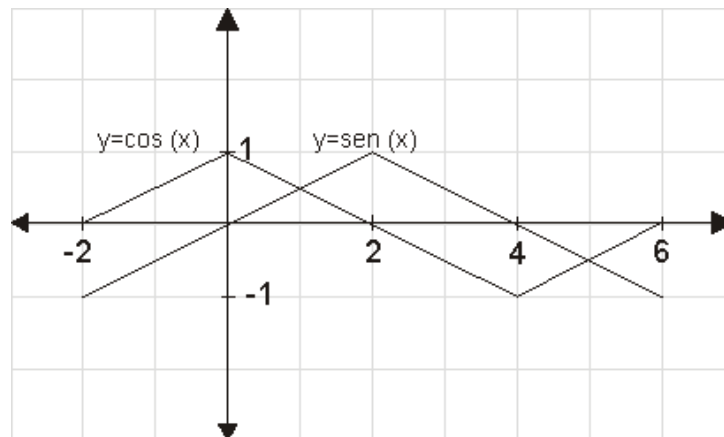


Figura 44: Gráfico do seno e cosseno de ângulos na Geometria do Taxista

Tangente:

Definimos tangente na Geometria do Taxista de forma semelhante à definida na Geometria Euclidiana, ou seja, como a razão entre o seno e o cosseno. Então temos novamente uma função definida por partes. O gráfico da função tangente do taxista é muito semelhante à função de tangente euclidiana com assíntotas ímpares $\frac{\pi}{2}$ e os valores de um período que corresponde a metade daquele dado ao seno e cosseno:

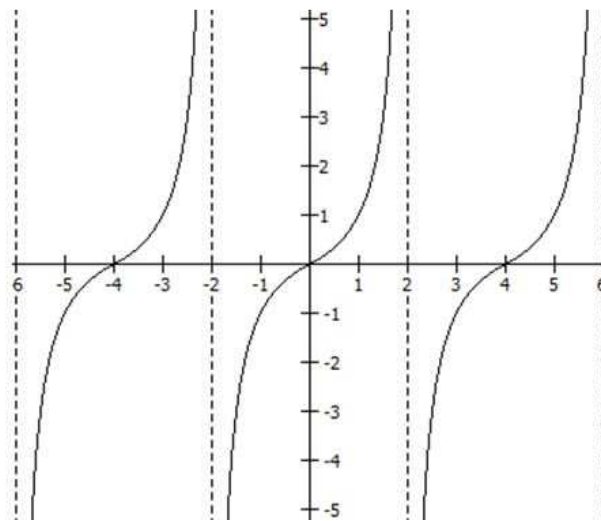


Figura 45: Gráfico do função tangente do Taxista

A função tangente do taxista é diferenciável nos pontos de “inflexão” com uma inclinação de 0,5.

A Secante é definida como a recíproca da cosseno. Usando os inversos dos vários ramos definidos por partes da função cosseno, podemos construir um gráfico da secante (como indica a função cosseno a seguir).

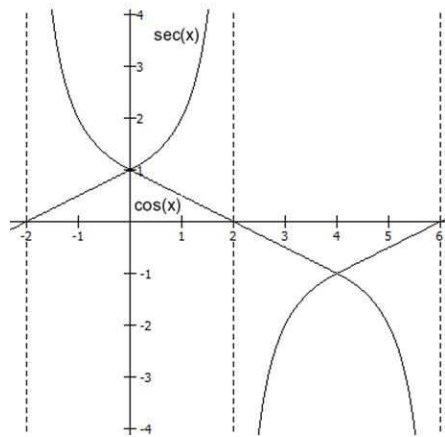


Figura 46: Gráfico do função cosseno do taxista e funções secantes

O gráfico secante do taxista exibe as mesmas características que o gráfico da secante euclidiana: um período igual ao do cosseno; assíntotas onde cosseno é zero, e, um mínimo ou máximo, onde o cosseno tem um máximo ou mínimo. Tal como acontece com a tangente, o gráfico secante é curvo. Mas, ao contrário da função secante Euclidiana, a função secante do taxista não é diferenciável no seu extremo (na verdade, os ramos se encontram num ponto, que é uma singularidade com o declive das linhas tangentes a partir da esquerda e direita, sendo 0,5 e -0,5). Isto é para ser esperado uma vez que este é o local onde o cosseno não é diferenciável.

A Cossecante é definida como a recíproca do seno. Usando os inversos dos vários ramos definidos por partes da função seno, podemos construir um gráfico da cossecante dado a seguir:

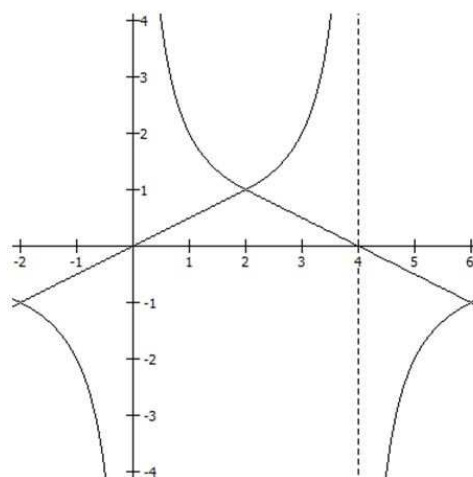


Figura 47: Gráfico do função seno do Taxista e funções cossecantes

O gráfico da função cossecante do taxista exibe as mesmas características que o gráfico secante do taxista em termos de período, diferenciabilidade no extremos, e assíntotas onde seno

é igual a zero.

A Cotangente é simplesmente a recíproca da tangente. As diferenças entre os gráficos da tangente e da cotangente do taxista e gráficos serão semelhantes aos observados na Geometria Euclidiana.

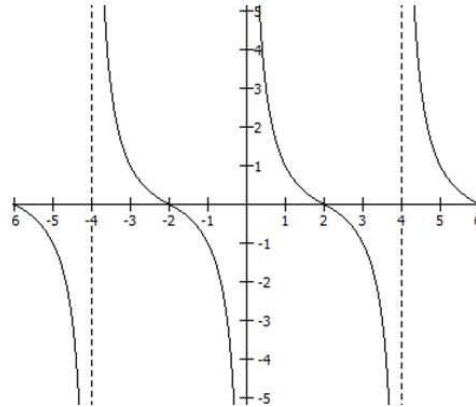


Figura 48: Gráfico do função cotangente do Taxista

Soma e diferença de seno e cosseno do taxista:

A congruência de triângulos não se sustenta na geometria do taxista (para tal fato, veja (KEVIN, 2012)). Assim, as provas habituais de fórmulas de soma e diferença para seno e cosseno não são as mesmas na Geometria do Taxista. O primeiro resultado que vamos provar é para o cosseno da soma dos dois ângulos. A fórmula dada para o cosseno da soma dos dois ângulos resulta apenas em duas formas: a forma utilizada para uma dada situação depende das localizações dos α_t e β_t . A notação $\alpha_t \in I$ será usado para indicar que α_t é um ângulo no quadrante *I* e similarmente para quadrantes *II*, *III* e *IV*.

Teorema 3.6 *Temos que $\cos(\alpha_t + \beta_t) = \pm(-1 + |\cos \alpha_t \pm \cos \beta_t|)$ onde os sinais são escolhidos para serem negativos quando α_t e β_t estão em lados diferentes do caso contrário eixo $-x$ e positivo.*

Demonstração: sem perda de generalidade, assuma $\alpha_t, \beta_t \in [0, 8)$, se um ângulo θ_t encontra-se fora de $[0, 8)$, então, existe $k \in \mathbb{Z}$ de tal modo que $(\theta_t + 8k) \in [0, 8)$ e utilizando da identidade $\cos(\theta_t + 8\kappa) = \cos \theta_t$ dada na tabela (1), obtemos o resultado desejado mediante a seguinte prova. Todos os outros casos são análogos. Vamos provar que se $\alpha_t \in II, \beta_t \in III$, e assim temos o resultado desejado.

De fato, nesta situação note que $6 \leq \alpha_t + \beta_t \leq 10$ e tomamos os sinais negativos sobre o

lado direito da equação. Assim,

$$\begin{aligned}
 1 - |\cos \alpha_t - \cos \beta_t| &= 1 - \left| 1 - \frac{1}{2}\alpha_t - \left(-3 + \frac{1}{2}\beta_t\right) \right| \\
 &= 1 - \left| 4 - \frac{1}{2}(\alpha_t + \beta_t) \right| \\
 &= \begin{cases} -3 + \frac{1}{2}(\alpha_t + \beta_t), & 6 \leq \alpha_t + \beta_t < 8 \\ 5 - \frac{1}{2}(\alpha_t + \beta_t), & 8 \leq \theta_t < 8 \end{cases} \\
 &= \cos(\alpha_t + \beta_t)
 \end{aligned} \tag{3.9.19}$$

□

Como consequência,

Corolário 3.1 *Temos a seguinte identidade trigonométrica* $\cos(2\alpha_t) = -1 + 2|\cos \alpha_t|$.

□

A próxima tabela, resume todas as possibilidades do teorema (3.6).

Tabela 2: Formas de $\cos(\alpha_t + \beta_t)$ e regiões de validade

	α_t	β_t
$\cos(\alpha_t + \beta_t) = -1 + \cos \alpha_t + \cos \beta_t $	I	II
	III	IV
$\cos(\alpha_t + \beta_t) = 1 - \cos \alpha_t - \cos \beta_t $	I	III
	I	IV
	II	III
	II	IV

Fonte: (KEVIN; TEVIAN, 2000)

A estrutura curiosa do Teorema (3.6) é devido às combinações estranhas de quadrantes que determinam que sinais podemos escolher. A razão para a mudança de sinal quando α_t e β_t estão em lados diferentes do eixo x reside no fato de que um bico da função cosseno está cruzado (isto é, diferentes partes da função cosseno estão sendo utilizadas) para se obter os valores de cosseno de α_t e β_t . A tabela seguinte resume qual forma de $\cos(\alpha_t + \beta_t)$ deve ser usado. Podemos usar o Teorema (3.6) e as relações na Tabela (1) para estabelecer diversos corolários.

A seguir, provaremos uma fórmula para $\sin(\alpha_t + \beta_t)$.

Corolário 3.2 Temos que $\text{sen}(\alpha_t + \beta_t) = \pm(-1 + |\text{sen} \alpha_t \pm \cos \beta_t|)$, onde os sinais são escolhidos de acordo com a Tabela (3).

Demonstração: note, primeiro que $\text{sen} \theta_t = \cos(\theta_t - 2)$ pela tabela (1). Tal como acontece com a fórmula de adição de cosseno, todos os casos se prova de forma semelhante.

Vamos assumir que $\alpha_t \in I$ e $\beta_t \in IV$. Temos que $\alpha_t - 2$ e β_t no mesmo quadrante, e assim

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha_t + \beta_t) &= \cos((\alpha_t + \beta_t) - 2) \\ &= \cos((\alpha_t - 2) + \beta_t) \\ &= -1 + |\cos(\alpha_t - 2) + \cos \beta_t| \\ &= -1 + |\text{sen} \alpha_t + \cos \beta_t| \end{aligned} \quad (3.9.20)$$

□

Corolário 3.3 Temos a seguinte identidade trigonométrica $\text{sen}(2\alpha_t) = -1 + 2|\cos(\alpha_t - 1)|$.

Demonstração: é uma mera aplicação do corolário (3.3), pois,

$$\begin{aligned} \text{sen}(2\alpha_t) &= \cos(2\alpha_t - 2) \\ &= \cos(2(\alpha_t - 1)) \\ &= -1 + 2|\cos(\alpha_t - 1)| \end{aligned}$$

□

Em seguida, uma tabela que exprime formas de $\text{sen}(\alpha_t + \beta_t)$ e suas regiões de validade.

Tabela 3: Formas de $\sin(\alpha_t + \beta_t)$ e regiões de validade

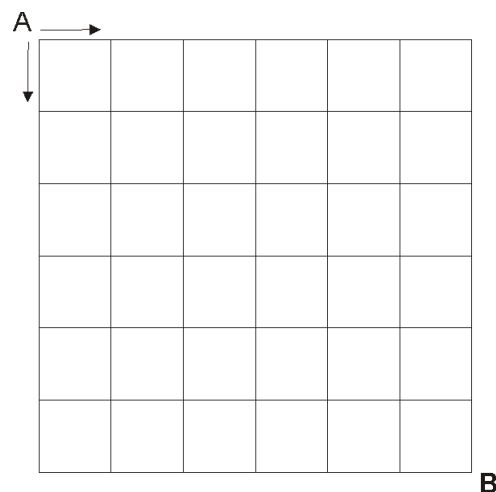
	α_t	β_t
$\sin(\alpha_t + \beta_t) = -1 + \sin \alpha_t + \cos \beta_t $	I	III
	I	IV
	II	II
	IV	IV
$\sin(\alpha_t + \beta_t) = 1 - \sin \alpha_t - \cos \beta_t $	I	I
	I	II
	II	III
	II	IV
	III	III
	III	IV

Fonte: (KEVIN; TEVIAN, 2000)

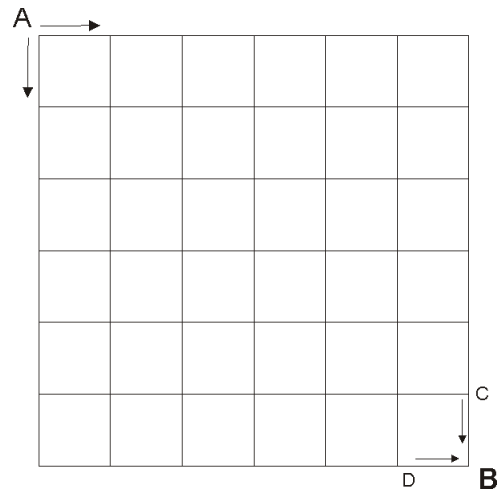
3.10 A GEOMETRIA DO TAXISTA E O TRIÂNGULO DE PASCAL

Vimos no exemplo (3.1), como a combinação simples pode nos ajudar a encontrar o número de caminhos que o motorista de táxi leve seu cliente do ponto A até um ponto B . Faremos isto, de modo geral.

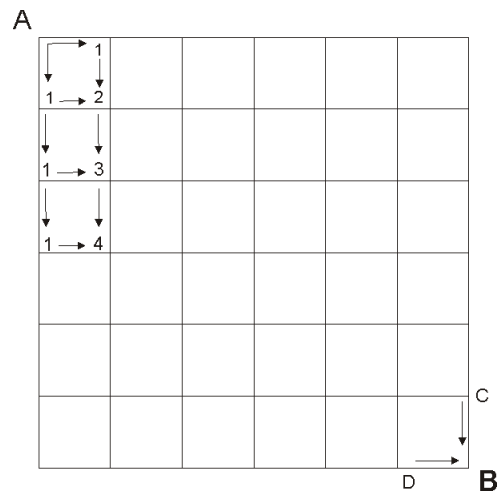
Se você só pode mover nas direções das setas (direita e para baixo, não para cima ou para a esquerda), quantos caminhos existem de A para B ? Isso é chamado de Geometria do Táxi, porque espelha a situação da vida real de um carro, ou táxi, navegando ruas de mão única.



Sabemos que, para encontrar o ponto B , é preciso primeiro encontrar o ponto C ou D .



Assim, o número de maneiras de chegar a B é igual a soma (maneiras de atingir C) + (maneiras de chegar a D), o número de t segmentos de linhas sobre um cruzamento é sempre a soma dos segmentos nas passagens anteriores.



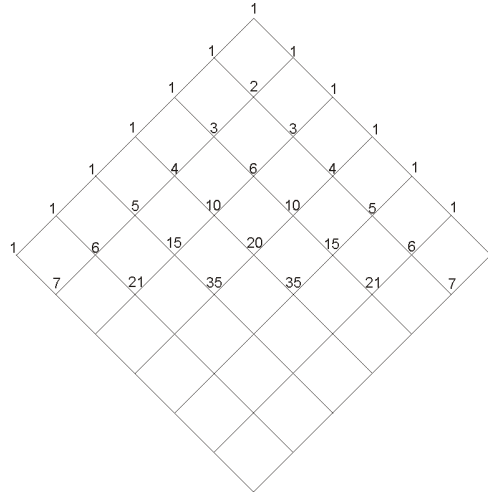
E assim é para cada ponto.

A

	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	
1	3	6	10	15	21	28	
1	4	10	20	35	56	84	
1	5	15	35	70	126	210	
1	6	21	56	126	252	462	
1	7	28	84	210	462	924	

B

Se girar a grade 45° , surge um olhar familiar conforme definição 2.2, o Triângulo de Pascal.



3.11 EQUAÇÃO GERAL PARA CÔNICAS NA GEOMETRIA DO TAXISTA

Vimos na definição (2.8), que o conjunto de todas as cônicas no plano ao considerar a Geometria Euclidiana é dada por uma equação quadrática de duas variáveis. Nesta seção, veremos que na Geometria do Taxista, há um resultado análogo desta representação.

Para tanto, iniciemos nossa discussão com o seguinte lema:

Lema 3.2 *Na Geometria do Taxista, a distância do ponto $P = (x_P, y_P)$ à reta $l : ax + by + c = 0$ é*

$$d_t(P, l) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\max\{|a|, |b|\}} \quad (3.11.21)$$

Demonstração: Na Geometria do Taxista, a distância do ponto P à reta l é definida como

$$\begin{aligned} d_t(P, l) &= \text{A menor de todas as } d_t(P, X) \text{ onde } X \in l \\ &= \min_{X \in l} d_t(P, X). \end{aligned}$$

Desde que P é o ponto de interseção de l com as retas $x = x_P$ e $y = y_P$, nós temos

$$d_t(P, l) = \begin{cases} \min \left\{ \left| \frac{ax_P + by_P + c}{b} \right|, \left| \frac{ax_P + by_P + c}{a} \right| \right\} & \text{se } a, b \neq 0 \\ \left| \frac{by_P + c}{b} \right| & \text{se } a = 0 \\ \left| \frac{ax_P + c}{a} \right| & \text{se } b = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{|ax_P + by_P + c|}{\max\{|a|, |b|\}},$$

já que $\min \left\{ \frac{1}{|a|}, \frac{1}{|b|} \right\} = (\max\{|a|, |b|\})^{-1}$.

□

Exemplo 3.4 Calcule a distância do ponto $P = (1, 2)$ à reta $l : -2x + 3y + 5 = 0$ na Geometria do Taxista.

Solução: É uma mera aplicação do lema (3.2). Com efeito,

$$\begin{aligned} d_t(P, l) &= \frac{|(-2) \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5|}{\max\{|-2|, |3|\}} \\ &= \frac{9}{\max\{2, 3\}} \\ &= \frac{9}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Como na Geometria Euclidiana, temos uma definição análoga de excentricidade de uma cônica.

Definição 3.3 Seja F um ponto fixo, no qual chamamos de foco e l uma reta fixa que não contém F dita diretriz. A excentricidade de uma cônica é o número real positivo dado por

$$e = \frac{d_t(P, F)}{d_t(P, l)}. \quad (3.11.22)$$

Agora, dados os pontos $C = (x_C, y_C)$, $P = (x, y)$ e focos $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$, à luz das definições (2.4), (2.5), (2.6) e (2.7), respectivamente, na Geometria do Taxista, temos as seguintes equações:

1. Equação da Circunferência:

$$\begin{aligned}d_t(P, C) &= r \\ \Rightarrow |x - x_C| + |y - y_C| &= r\end{aligned}\quad (3. 11. 23)$$

2. Equação da Elipse:

$$\begin{aligned}d_t(P, F_1) + d_t(P, F_2) &= 2c \\ |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| &= 2c\end{aligned}\quad (3. 11. 24)$$

3. Equação da Hipérbole:

$$\begin{aligned}|d_t(P, F_1) - d_t(P, F_2)| &= 2c \\ ||x - x_1| + |y - y_1| - (|x - x_2| + |y - y_2|)| &= 2c \\ |x - x_1| + |y - y_1| - (|x - x_2| + |y - y_2|) &= \pm 2c\end{aligned}\quad (3. 11. 25)$$

4. Equação da Parábola:

Seja $d : ax + by + c = 0$ a reta diretriz, temos que

$$\begin{aligned}d_t(P, F_1) &= d_t(P, d) \\ |x - x_1| + |y - y_1| &= \frac{|ax + by + c|}{\max\{|a|, |b|\}} \\ \Rightarrow |x - x_1| + |y - y_1| + r|ax + by + c| &= 0\end{aligned}\quad (3. 11. 26)$$

$$\text{onde } r := \frac{1}{\max\{|a|, |b|\}} < 0.$$

Veja que de (3. 11. 23), (3. 11. 24), (3. 11. 25), temos que uma cônica do taxista com focos $F_1 = (x_1, y_1)$ e $F_2 = (x_2, y_2)$ tem a forma

$$|x - x_1| + |y - y_1| + p(|x - x_2| + |y - y_2|) = \mp q, \quad p \in \{-1, 1\}, q \geq 0. \quad (3. 11. 27)$$

Então, ao denotar $a_2 = p, a_3 = r$ e $a_4 = q$, a combinação linear de (3. 11. 26) e (3. 11. 27) é

$$a_1(|x - x_1| + |y - y_1|) + a_2(|x - x_2| + |y - y_2|) + a_3|ax + by + c| \mp a_4 = 0 \quad (3. 11. 28)$$

A equação acima, representa todas as cônicas do taxista. Graças as equações (3. 11. 26) e (3. 11. 27), temos que $a_1 \neq 0$, no qual sem perda de generalidade, podemos considerar $a_1 = 1$.

Note que a equação (3. 11. 28) inclui a equação (3. 11. 27) se, e somente se, $a_2 \in \{-1, 1\}$, $a_3 = 0$ e $a_4 \leq 0$. Disto, vem que

$$a_3 = (a_2^2 - 1) \cdot s, s \in \mathbb{R}. \quad (3. 11. 29)$$

Por outro lado, a equação (3. 11. 28) contém a equação (3. 11. 26) se, e somente se, $a_2 = 0$, $a_3 < 0$ e $a_4 = 0$, o que nos diz que

$$a_4 = \gamma a_2, s > 0, \gamma \leq 0. \quad (3. 11. 30)$$

Para suavizar a notação, seja $a_2 = \alpha$. Combinando (3. 11. 29), (3. 11. 30) com (3. 11. 28) vem que

$$\begin{aligned} |x - x_1| + |y - y_1| + \alpha (|x - x_2| + |y - y_2|) + (a_2^2 - 1) \cdot s, \\ |ax + by + c| \mp \alpha \gamma = 0, \end{aligned} \quad (3. 11. 31)$$

com $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $s > 0$ e $\gamma \leq 0$.

Perceba que no caso que $\alpha = 0$, a equação precedente nos dá

$$\frac{|x - x_1| + |y - y_1|}{|ax + by + c|} = s$$

Desta equação, de (3. 11. 22) e do lema (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} e &:= \frac{d_t(P, F_1)}{d_t(P, d)} \\ &= (|x - x_1| + |y - y_1|) \cdot \frac{\max\{|a|, |b|\}}{|ax + by + c|} \\ &= \max\{|a|, |b|\} \cdot \frac{|x - x_1| + |y - y_1|}{|ax + by + c|} \\ &= \max\{|a|, |b|\} \cdot s. \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$s = e \cdot (\max\{|a|, |b|\})^{-1}. \quad (3. 11. 32)$$

Sendo assim, temos também que

$$(\alpha^2 - 1) \cdot s = e \cdot (\max\{|a|, |b|\})^{-1} := \beta. \quad (3. 11. 33)$$

Finalmente, de (3. 11. 32), (3. 11. 33), obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.7 *A equação de uma cônica do taxista com focos $F_1 = (x_1, y_1)$ e $F_2 = (x_2, y_2)$ ou*

com foco $F_1(x_1, y_1)$ e reta diretriz $d : ax + by + c = 0$, tem a seguinte forma

$$|x - x_1| + |y - y_1| + \alpha (|x - x_2| + |y - y_2|) + \beta |ax + by + c| \mp \alpha \gamma = 0, \quad (3.11.34)$$

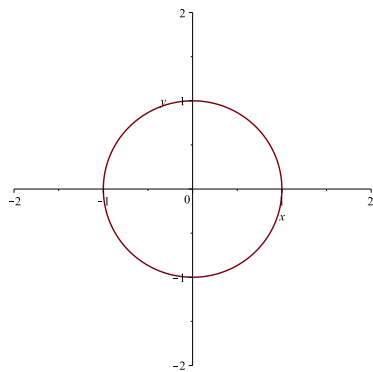
com $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $\beta = e \cdot (\max\{|a|, |b|\})^{-1}$, $\gamma \leq 0$ e, e é a excentricidade da cônica relacionada.

□

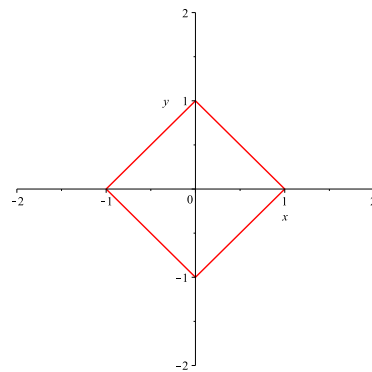
Para uma classificação detalhada das cônicas, o leitor pode consultar (KAYA et al., 2000).

A seguir, alguns exemplos de cônicas e suas equações na Geometria Euclidiana e Geometria do Taxista.

1. Circunferência.

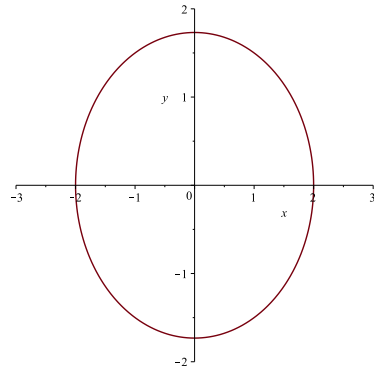


(a) Circunferência de centro na origem de equação $x^2 + y^2 = 1$ na Geometria Euclidiana

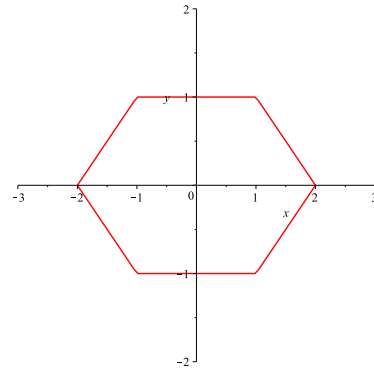


(b) Circunferência de centro na origem equação $|x| + |y| = 1$ na Geometria do Taxista

2. Elipse

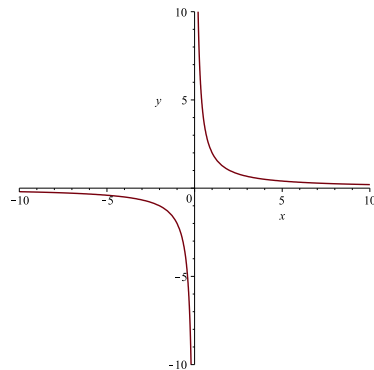


(c) Elipse de focos $F_1 = (-1, 0)$ e $F_2 = (1, 0)$ de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ na Geometria Euclidiana

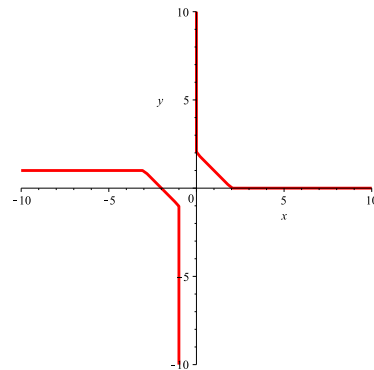


(d) Elipse de focos $F_1 = (-1, 0)$ e $F_2 = (1, 0)$ de equação $|x-1| + 2|y| + |x+1| - 4 = 0$ na Geometria do Taxista

3. Hipérbole

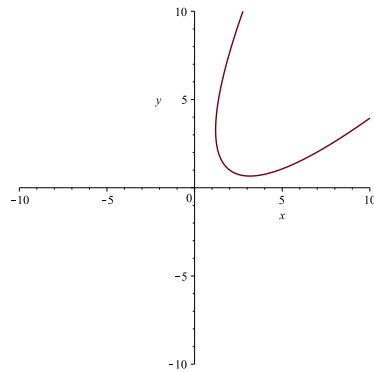


(e) Hipérbole de Equação $x \cdot y = 2$ na Geometria Euclidiana

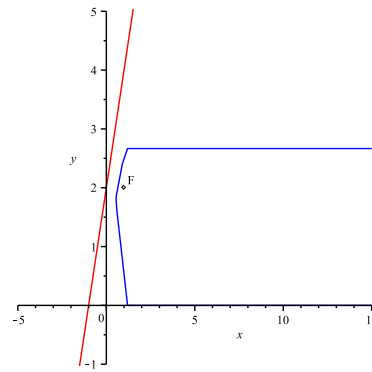


(f) Hipérbole de focos $F_1 = (-3, -1)$ e $F_2 = (2, 2)$ de equação $|x-1| + 2|y| + |x+1| - 4 = 0$ na Geometria do Taxista

4. Parábola



(g) Parábola de Equação $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 85x - 30y + 175 = 0$ na Geometria Euclidiana



(h) Parábola de foco $F = (1, 2)$ e reta diretriz $y = \frac{1}{2}x + 2$ na Geometria do Taxista

3.12 GEOMETRIA DO TAXISTA E O MAPLE

Nesta seção teve a ímpar contribuição de Oilson Alberto Gonzatto Junior, que por meio do software *Maple 16*, obteve uma *maplet* para esboçar algumas figuras geométricas na Geometria do Taxista. A aplicação *maplet* é uma interface gráfica do usuário contendo janelas, as regiões de caixa de texto, e outras interfaces visuais, o que dá ao usuário um acesso de “aponte-e-clique”, recorrendo a todo poderio do Maple. Os usuários podem executar cálculos, gráficos de funções, ou os diálogos de exibição sem utilizar a interface planilha habitual do Maple, que é o arquivo *.mw*.

Ao executar o arquivo “Maplet_Geometria_Do_Taxi.mw”, aparecerá a seguinte janela:

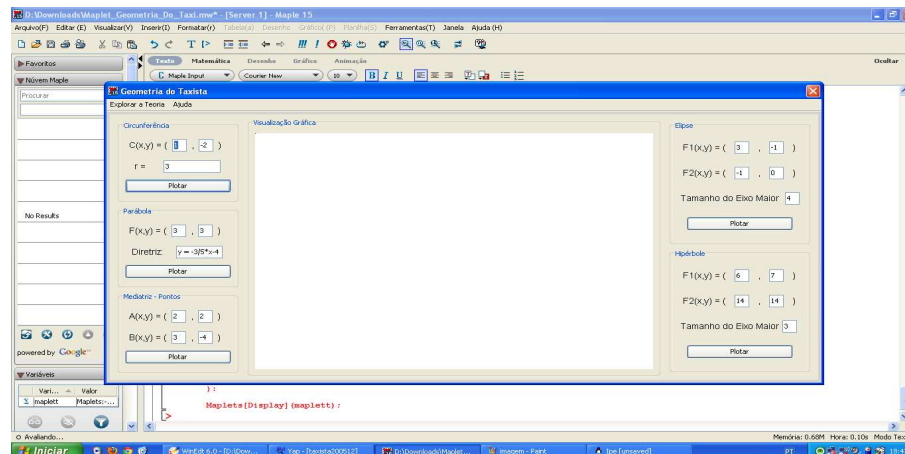


Figura 49: Janela do arquivo “Maplet_Geometria_Do_Taxi.mw”

Note na figura acima que, no canto superior esquerdo, há duas opções: explorar a teoria e ajuda. Na primeira, aparece uma lista das seguintes figuras: circunferência, elipse, hipérbole, parábola e mediatriz, de modo que ao clicar em cada um deles, aparece uma rápida explicação teórica dos mesmos. No campo ajuda, oferece uma explicação de como usar a maplet.

A maplet, como se vê na figura, se apresenta da seguinte forma: na coluna do lado esquerdo, se encontram os campos de preenchimento para circunferência, parábola e mediatriz. No lado da maplet, estão os campos de preenchimento para elipse e hipérbole.

Suponhamos que queiramos plotar o gráfico da circunferência de centro $C = (-1, 2)$ e raio 3. Para tanto, no campo $C(x, y) = (\square, \square)$, colocamos as coordenadas x e y do centro desejado e no raio $r = \square$, colocamos o valor 3. Feito isto, basta clicar em plotar para obter o seguinte resultado:

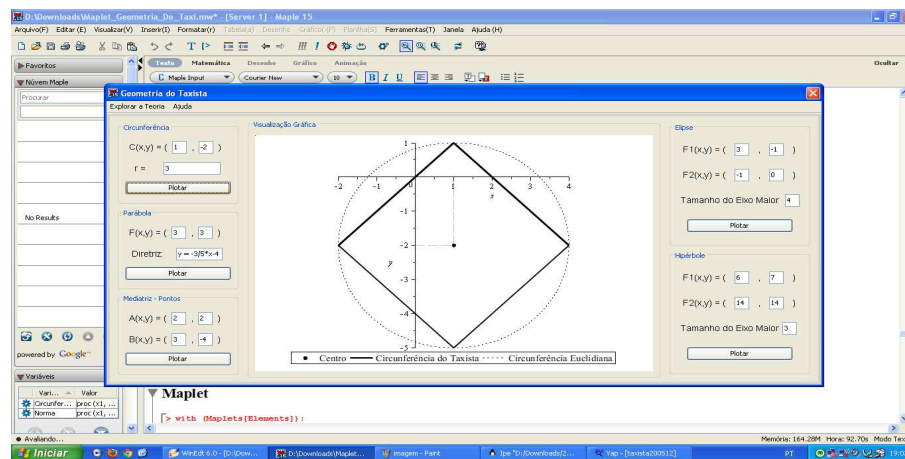
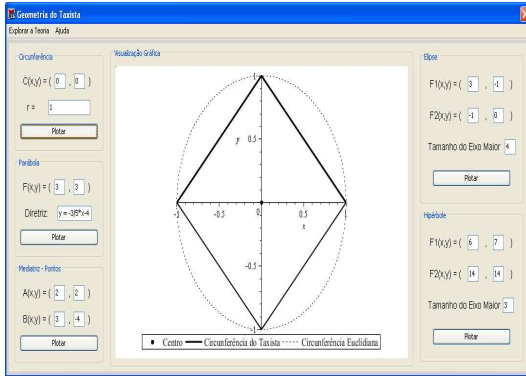


Figura 50: Circunferência de centro $C = (-1, 2)$ e raio $r = 3$.

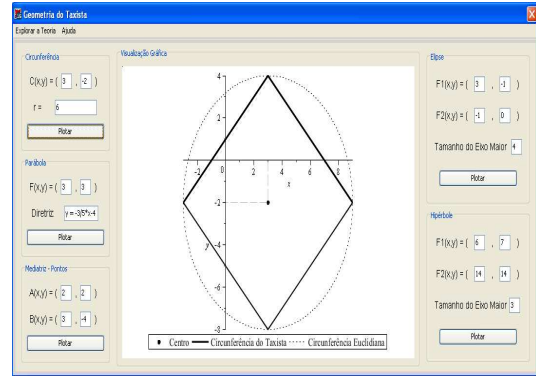
Perceba que em visualização gráfica, obtemos a circunferência na Geometria Euclidiana e na Geometria do Taxista, bem como o centro das mesmas. Uma legenda, caracteriza as circunferências nesta visualização.

Para obter o gráfico das outras figuras, o procedimento é análogo: basta preencher os campos solicitados em cada situação. A seguir, apresentaremos algumas visualizações de outras figuras na Geometria do Taxista.

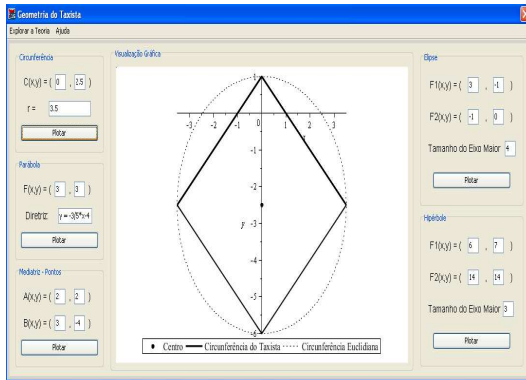
1. Circunferência



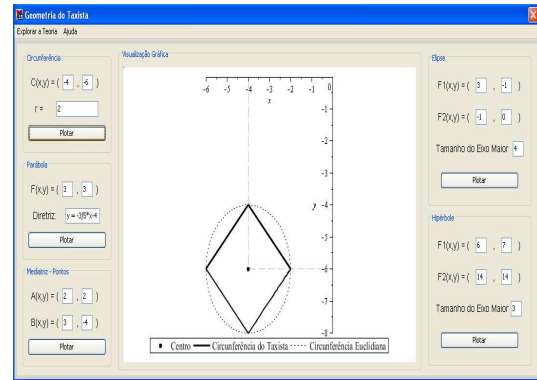
(a) Circunferência de centro $C = (0, 0)$ e raio $r = 1$



(b) Circunferência de centro $C = (3, -2)$ e raio $r = 6$

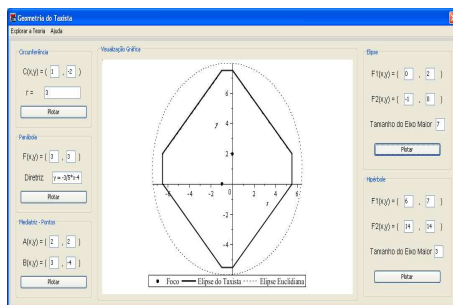


(c) Circunferência de centro $C = (0, -2,5)$ e raio $r = 3,5$

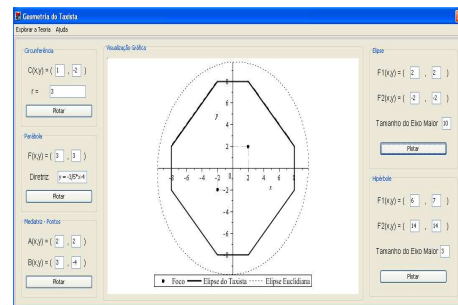


(d) Circunferência de centro $C = (-4, -6)$ e raio $r = 2$

2. Elipses

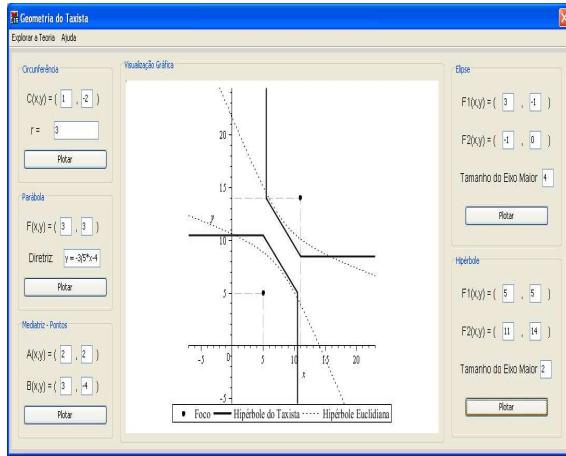


(a) Elipse se focos $F_1 = (0, -2)$ e $F_2 = (-1, 0)$ de tamanho de eixo maior 7

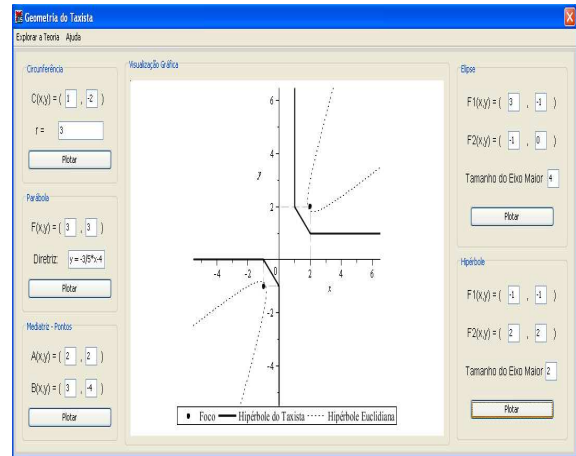


(b) Elipse se focos $F_1 = (2, -2)$ e $F_2 = (-2, 2)$ de tamanho de eixo maior 10

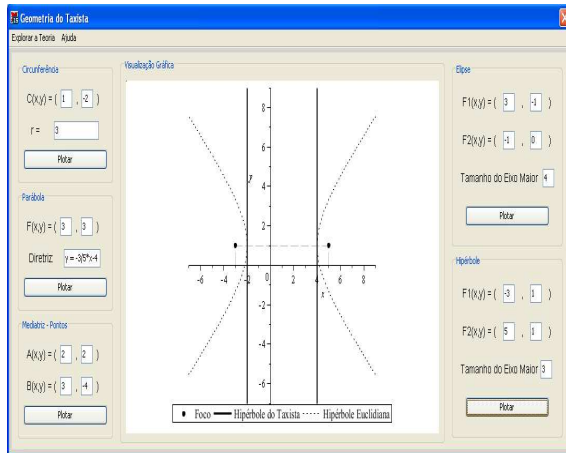
3. Hipérbole



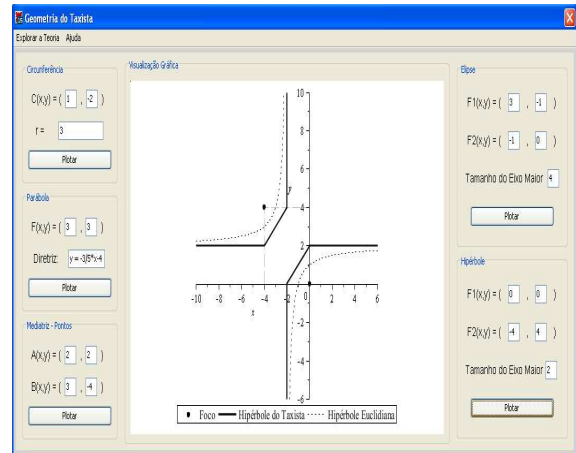
(a) Hipérbole de focos $F_1 = (5, 5)$ e $F_2 = (11, 14)$ de tamanho de eixo maior 2



(b) Hipérbole de focos $F_1 = (-1, -1)$ e $F_2 = (2, 2)$ de tamanho de eixo maior 2

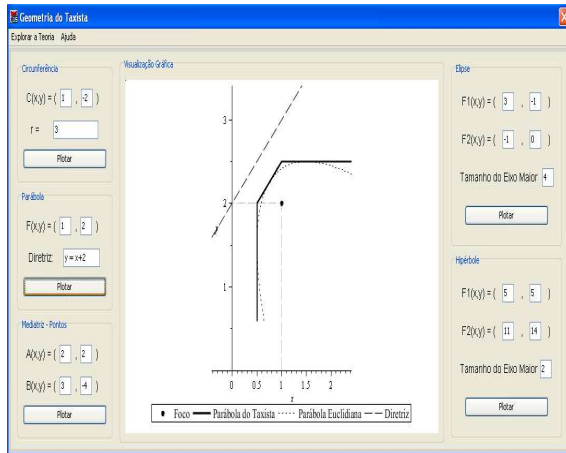
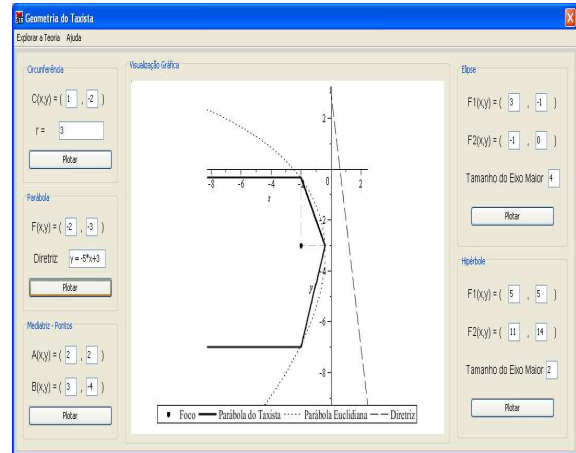
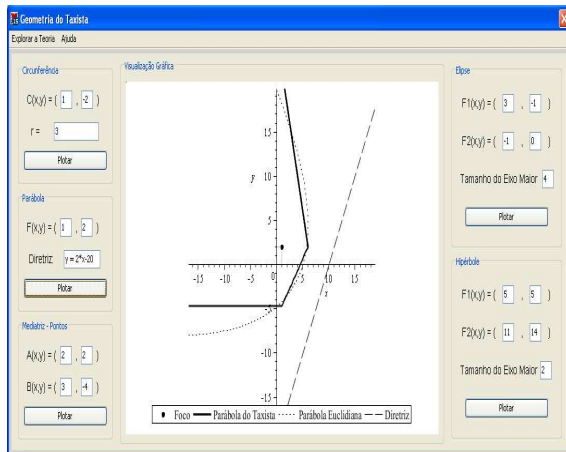
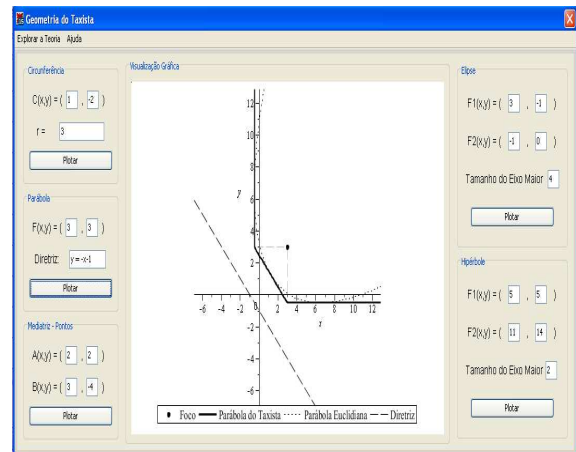


(c) Hipérbole de focos $F_1 = (-3, 1)$ e $F_2 = (5, 1)$ de tamanho de eixo maior 3

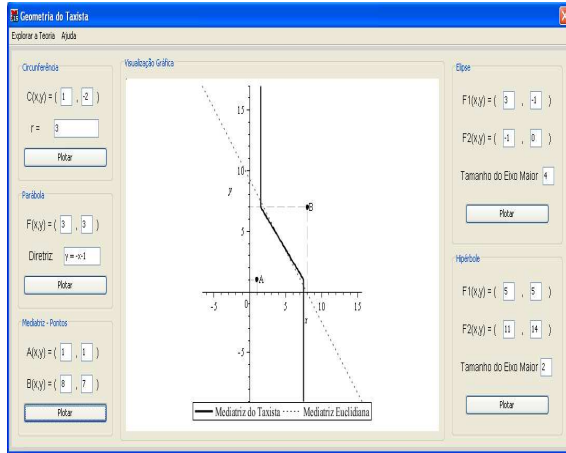


(d) Hipérbole de focos $F_1 = (0, 0)$ e $F_2 = (-4, 4)$ de tamanho de eixo maior 2

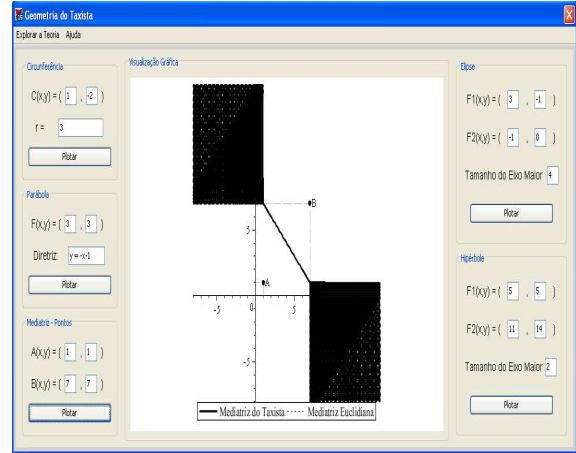
4. Parábola

(a) Parábola de foco $F = (1, 2)$ e reta diretriz $y = x + 2$ (b) Parábola de foco $F = (-2, -3)$ e reta diretriz $y = -5x + 3$ (c) Parábola de foco $F = (1, 2)$ e reta diretriz $y = 2x - 20$ (d) Parábola de foco $F = (3, 3)$ e reta diretriz $y = -x - 1$

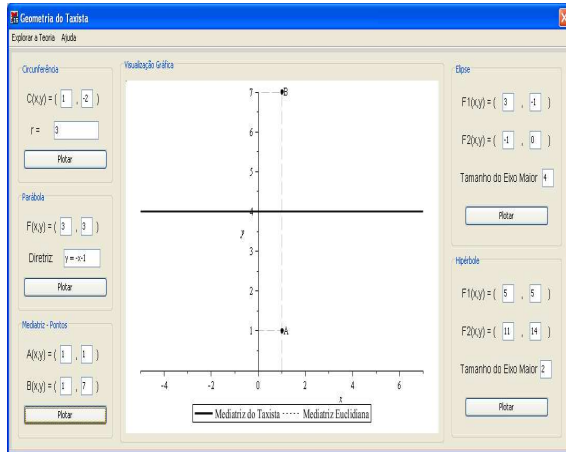
5. Mediatriz



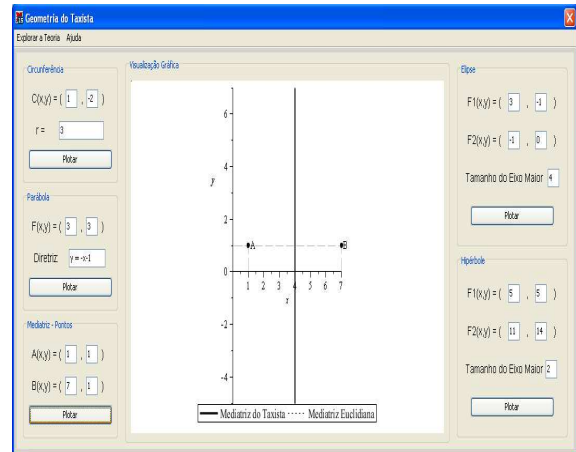
(a) Mediatriz de pontos $A = (1, 1)$ e $B = (8, 7)$



(b) Mediatriz de pontos $A = (1, 1)$ e $B = (7, 7)$



(c) Mediatriz de pontos $A = (1, 1)$ e $B = (1, 7)$



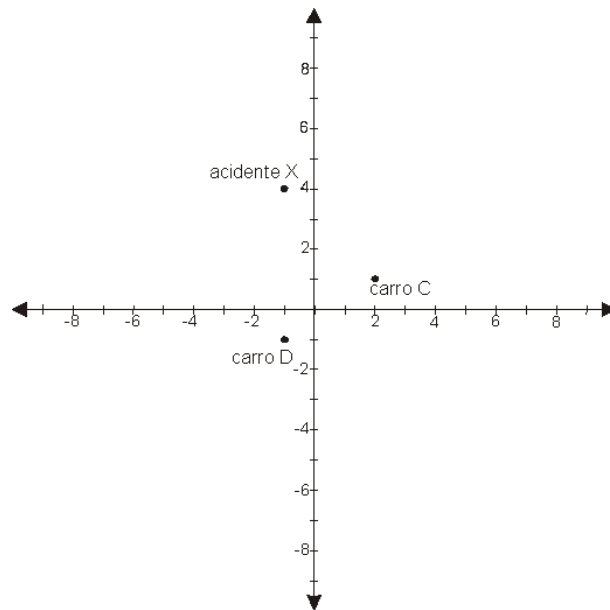
(d) Mediatriz de pontos $A = (1, 1)$ e $B = (7, 1)$

3.13 APLICAÇÕES

Vamos explorar três situações da vida real propostas no livro clássico de (KRAUSE, 1985).

Problema 3.1 *Um despachante da polícia recebe um relatório de um acidente ocorrido em $X = (-1, 4)$. Existem dois carros de polícia localizados na área. O carro C está no ponto $(2, 1)$ e o carro D está no ponto $(-1, -1)$. Qual carro deve ser enviado?*

Solução: Primeiro vamos ao gráfico do problema:



A Geometria do Taxista será a melhor opção para resolver este problema, simplesmente precisa comparar a distância do despachante para cada carro da patrulha.

A distância entre o acidente X e o carro C é:

$$\begin{aligned}
 d_t(X, C) &= |-1 - 2| + |4 - 1| \\
 &= |-3| + |3| \\
 &= 3 + 3 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

A distância entre o acidente X e o carro D é:

$$\begin{aligned}
 d_t(X, D) &= |-1 - (-1)| + |4 - (-1)| \\
 &= |-1 + 1| + |4 + 1| \\
 &= |0| + |5| \\
 &= 0 + 5 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

Assim, podemos ver claramente que o carro D está a um quarteirão mais próximo ao acidente X .

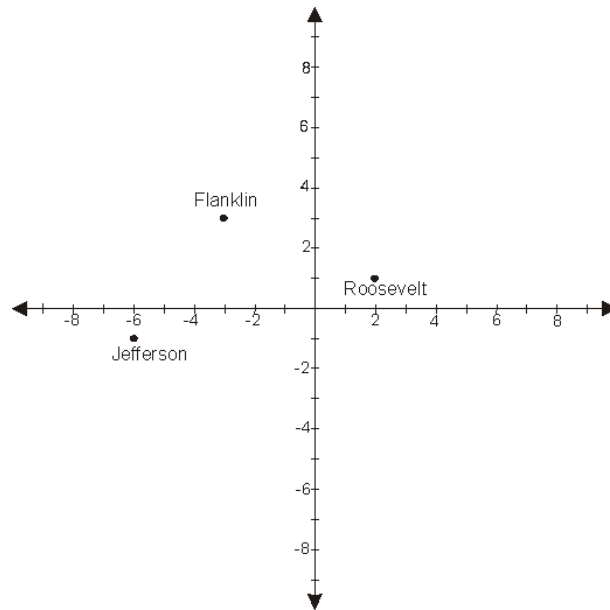
□

Problema 3.2 *Queremos traçar limites do distrito escolar de tal forma que cada estudante vá à escola mais próxima. Há três escolas: Jefferson em $(-6, -1)$, Franklin em $(-3, 3)$, e Roosevelt*

em $(2,1)$.

Solução: A Geometria do Taxista será uma escolha lógica para encontrar a solução, porque os alunos terão que se manter nas ruas enquanto vão para a escola.

Vejamos inicialmente, o gráfico deste problema.



Contudo, a solução para este problema não pode ser encontrada imediatamente. O problema precisa ser dividido em três situações.

Situação 1

Primeiro encontraremos um limite entre as escola Franklin e Jefferson. A linha de limite precisa estar nos pontos onde a distância entre Jefferson e Franklin é a mesma. Assim precisamos calcular:

$$\begin{aligned}d_t(\text{ Jefferson }) &= d_t(\text{ Franklin }) \\d_t[(-6, -1), (x, y)] &= d_t[(-3, 3), (x, y)] \\|x + 6| + |y + 1| &= |x + 3| + |y - 3|\end{aligned}$$

Resolver x e y se torna mais difícil com valores absolutos. Precisamos olhar os casos

$$\begin{aligned}x + 6 < 0 &\Rightarrow x < -6; & y + 1 < 0 &\Rightarrow y < -1 \\x + 3 < 0 &\Rightarrow x < -3; & y - 3 < 0 &\Rightarrow y < 3\end{aligned}$$

Isto traduz-se em nove casos diferentes:

Tabela 4: Nove casos onde $d(\text{Jefferson}) = d(\text{Franklin})$

	$-1 \leq y \leq 3$	$y < -1$	$y > 3$
$-6 \leq x \leq -3$	caso I	caso IV	caso VII
$x < -6$	caso II	caso V	caso VIII
$x > -3$	caso III	caso VI	caso IX

Fonte: Chip Reinhardt (REINHARDT, 2012)

É necessário considerar estes casos pois os valores absolutos mudarão as soluções.

Caso I: $-1 \leq y \leq 3$ e $-6 \leq x \leq -3$

$$\text{Como } |x+6| \geq 0 \quad \text{quando } -6 \leq x \leq -3, |x+6| = x+6$$

$$|y+1| \geq 0 \quad \text{quando } -1 \leq y \leq 3, |y+1| = y+1$$

$$|y-3| \leq 0 \quad \text{quando } -1 \leq y \leq 3, |y-3| = -y+3$$

Agora nas condições $-1 \leq y \leq 3$ e $-6 \leq x \leq -3$, temos

$$x+6+y+1 = -x-3-y+3$$

$$x+y+7 = -x-y$$

$$y = -x - \frac{7}{2}$$

Quando fazemos a tabela de valores vemos que:

Tabela 5: Mesma distância entre Jefferson e Franklin - caso I

x	y
-6	5/2
-5	3/2
-4	1/2
-3	-1/2

Fonte: Chip Reinhardt (REINHARDT, 2012)

Caso II: $-1 \leq y \leq 3$ e $x < -6$

$$\text{Como } |x+6| < 0 \quad \text{quando } x < -6, |x+6| = -x-6$$

$$|y+1| \geq 0 \quad \text{quando } -1 \leq y \leq 3, |y+1| = y+1$$

$$|x+3| < 0 \quad \text{quando } x < -6, |x+3| = -x-3$$

$$|y-3| \leq 0 \quad \text{quando } -1 \leq y \leq 3, |y-3| = -y+3$$

Agora, sob as condições $-1 \leq y \leq 3$ e $x < -6$

$$\begin{aligned} -x - 6 + y + 1 &= -x - 3 - y + 3 \\ -x + y - 5 &= -x - y \\ y &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Quando fazemos a tabela de valores temos que :

Tabela 6: Mesma distância entre Jefferson e Franklin - caso II

x	y
-7	5/2
-8	5/2
-9	5/2
-10	5/2
.	.
.	.
.	.

Fonte: Chip Reinhardt (REINHARDT, 2012)

Caso III: $-1 \leq y \leq 3$ e $x > -3$

$$\begin{aligned} \text{Como } |x+6| > 0 & \text{ quando } x > -3, |x+6| = x+6 \\ |y+1| \geq 0 & \text{ quando } -1 \leq y \leq 3, |y+1| = y+1 \\ |x+3| \geq 0 & \text{ quando } x > -3, |x+3| = x+3 \\ |y-3| < 0 & \text{ quando } -1 \leq y \leq 3, |y-3| = -y+3 \end{aligned}$$

Agora, sob as condições $-1 \leq y \leq 3$ e $x > -3$

$$\begin{aligned} x + 6 + y + 1 &= -x + 3 - y + 3 \\ x + y + 7 &= x - y + 6 \\ 2y &= -1 \\ y &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

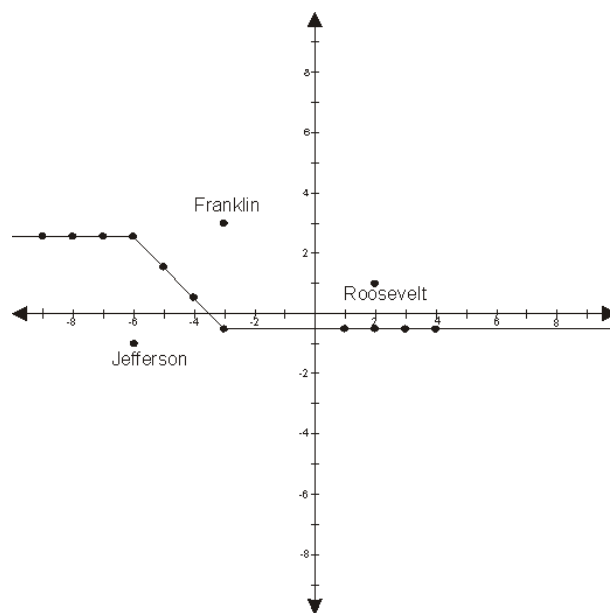
Quando fazemos a tabela de valores temos que :

Abaixo o gráfico dos pontos e linhas que seguem até agora a situação onde $d_t(\text{Jefferson}) = d_t(\text{Franklin})$

Tabela 7: Mesma distância entre Jefferson e Franklin - caso III

x	y
-3	-1/2
-2	-1/2
-1	-1/2
0	-1/2
.	.
.	.
.	.

Fonte: Chip Reinhardt (REINHARDT, 2012)



Caso IV - IX: Não existem soluções quando olhamos para esses casos. Ao olhar o gráfico é possível ver que não haverá mais soluções. Olhando para o quadrante III e IV, qualquer um que vive na área externa estará mais próximo da escola Jefferson. Igualmente olhando nos quadrantes I e II, qualquer um que vive nestes limites exteriores estará mais perto da escola Franklin.

Situação 2

Agora vamos olhar para a fronteira entre a escola Franklin e Roosevelt. Outra vez queremos encontrar os pontos que estão a uma mesma distância das duas escolas para criar nosso limite.

Estamos procurando:

$$\begin{aligned}d_t(\text{Franklin}) &= d_t(\text{Roosevelt}) \\d_t[(-3,3), (x,y)] &= d_t[(2,1), (x,y)] \\|x+3| + |y-3| &= |x-2| + |y-1|\end{aligned}$$

Mais uma vez, haverá casos diferentes, no qual precisamos olhá-los:

Tabela 8: Nove casos onde $d_t(\text{Franklin}) = d_t(\text{Roosevelt})$

	$-1 \leq y \leq 3$	$y < -1$	$y > 3$
$-3 \leq x \leq 2$	caso I	caso IV	caso VII
$x > 2$	caso II	caso V	caso VIII
$x < -3$	caso III	caso VI	caso IX

Fonte: Chip Reinhardt (REINHARDT, 2012)

Caso I: $1 \leq y \leq 3$ e $-3 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned}\text{Como } |x+3| &\geq 0 \text{ quando } -3 \leq x \leq 2, |x+3| = x+3 \\|y-3| &\leq 0 \text{ quando } 1 \leq y \leq 3, |y-3| = -y+3 \\|x-2| &\leq 0 \text{ quando } -3 \leq x \leq 2, |x-2| = -x+2 \\|y-1| &\geq 0 \text{ quando } -1 \leq y \leq 3, |y-1| = y-1\end{aligned}$$

Sob as condições $1 \leq y \leq 3$ e $-3 \leq x \leq 2$, temos:

$$\begin{aligned}x+3-y+3 &= -x+2+y-1 \\x-y+6 &= -x+y+1 \\-2y &= -2x-5 \\y &= x+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Substituindo para uma tabela de valores:

Tabela 9: Mesma distância entre Franklin e Roosevelt - caso I

0	5/2
-1	3/2

Fonte: Chip Reinhardt (REINHARDT, 2012)

Caso II: $x < -3$ e $y < 1$

Observe que $|x+3| < 0$ quando $x < -3, |x+3| = -x-3$

$|y-3| < 0$ quando $y < 1, |y-3| = -y+3$

$|x-2| < 0$ quando $x < -3, |x-2| = -x+2$

$|y-1| < 0$ quando $y < 1, |y-1| = -y+1$

Sob as condições $x < -3$ e $y < 1$,

$$-x-3-y+3 = -x+2-y+1$$

$$-x-y = -x-y+3$$

$$0 = 3$$

Mas $0 \neq 3$, então não há solução para $x < -3$ e $y < 1$

Caso III: $-3 \leq x \leq 2$ e $y < 1$

Observe que $|x+3| \geq 0$ quando $-3 \leq x \leq 2, |x+3| = x+3$

$|y-3| < 0$ quando $y < 1, |y-3| = -y+3$

$|x-2| \leq 0$ quando $x < -3, |x-2| = -x+2$

$|y-1| < 0$ quando $y < 1, |y-1| = -y+1$

Mediante as desigualdades $-3 \leq x \leq 2$ e $y < 1$,

$$x+3-y+3 = -x+2-y+1$$

$$x-y+6 = -x-y+3$$

$$2x = -3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Combinando tais valores numa tabela:

Caso IV: $-3 \leq x \leq 2$ e $y \geq 3$

Observe que $|x+3| \geq 0$ quando $-3 \leq x \leq 2, |x+3| = x+3$

$|y-3| \geq 0$ quando $y \geq 3, |y-3| = y-3$

$|x-2| \leq 0$ quando $x < -3, |x-2| = -x+2$

$|y-1| > 0$ quando $y \geq 3, |y-1| = y-1$

Tabela 10: Mesma distância entre Franklin e Roosevelt - caso III

x	y
-3/2	1
-3/2	0
-3/2	-1
-3/2	-2
.	.
.	.
.	.

Fonte: Chip Reinhardt (REINHARDT, 2012)

Nas condições $-3 \leq x \leq 2$ e $y \geq 3$

$$x + 3 + y - 3 = -x + 2 + y - 1$$

$$x + y = -x + y + 1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

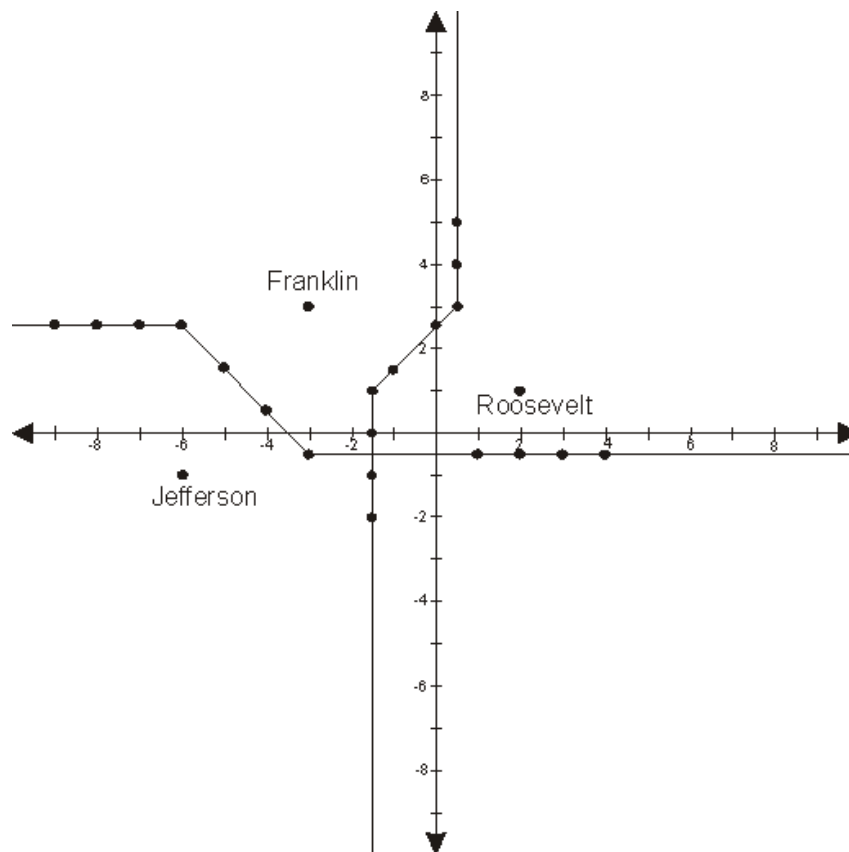
Substituindo os valores numa tabela:

Tabela 11: Mesma distância entre Franklin e Roosevelt - caso IV

x	y
1/2	3
1/2	4
1/2	5
.	.
.	.
.	.

Fonte: Chip Reinhardt (REINHARDT, 2012)

Abaixo o gráfico dos pontos e linhas que seguem até agora onde $d_t(\text{Franklin}) = d_t(\text{Roosevelt})$.



Caso V - IX:

Não existem soluções quando olhamos para esses casos. Ao olhar o gráfico é possível ver que não haverá mais soluções. Olhando para o quadrante I e IV, qualquer um que vive na área externa estará mais próximo da escola Roosevelt. Igualmente olhando nos quadrantes II e III, quem vive nestas fronteiras externas estará mais próxima da escola Franklin.

Situação 3

Vamos agora encontrar um limite entre a escola Roosevelt e Jefferson. A linha limite precisa estar nos pontos onde a distância entre Jefferson e Roosevelt é a mesma. Assim precisamos:

$$\begin{aligned}
 d_t(\text{Jefferson}) &= d_t(\text{Roosevelt}) \\
 d[(-6, -1), (x, y)] &= d[(2, 1), (x, y)] \\
 |x + 6| + |y + 1| &= |x - 2| + |y - 1|
 \end{aligned}$$

Novamente haverá alguns casos diferentes que precisamos analisar:

Tabela 12: Nove casos onde $d_t(\text{Jefferson}) = d_t(\text{Roosevelt})$

	$-1 \leq y \leq 1$	$y < -1$	$y > 1$
$-6 \leq x \leq 2$	caso I	caso IV	caso VII
$x > 2$	caso II	caso V	caso VIII
$x < -6$	caso III	caso VI	caso IX

Fonte: Chip Reinhardt (REINHARDT, 2012)

Caso I: $-6 \leq x \leq 2$ e $y < -1$

Como $|x+6| \geq 0$ quando $-6 \leq x \leq 2$, $|x+6| = x+6$

$|y+1| < 0$ quando $y < -1$, $|y+1| = -y+1$

$|x-2| \leq 0$ quando $-6 \leq x < 2$, $|x-2| = -x+2$

$|y-1| < 0$ quando $y < -1$, $|y-1| = -y+1$

De acordo com as imposições $-6 \leq x \leq 2$ e $y < -1$,

$$x+6-y-1 = -x+2-y+1$$

$$x-y+5 = -x-y+3$$

$$2x = 2$$

$$x = -1$$

Substituindo os valores numa tabela:

Tabela 13: Mesma distância entre Jefferson e Roosevelt - caso I

x	y
-1	-2
-1	-3
-1	-4
.	.
.	.
.	.

Fonte: Chip Reinhardt (REINHARDT, 2012)

Caso II: $-6 \leq x \leq 2$ e $-1 \leq y \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{Como } |x+6| \geq 0 & \text{ quando } -6 \leq x \leq 2, |x+6| = x+6 \\ |y+1| \geq 0 & \text{ quando } -1 < y \leq -1, |y+1| = y+1 \\ |x-2| \leq 0 & \text{ quando } -6 \leq x \leq 2, |x-2| = -x+2 \\ |y-1| > 0 & \text{ quando } -1 \leq y \leq -1, |y-1| = -y+1 \end{aligned}$$

Nas condições $-6 \leq x \leq 2$ e $-1 \leq y \leq 1$

$$\begin{aligned} x+6+y+1 &= -x+2-y+1 \\ x+y+7 &= -x-y+3 \\ x+y &= -x-y-4 \\ y &= -x-2 \end{aligned}$$

Substituindo numa tabela de valores, temos:

Tabela 14: Mesma distância entre Jefferson e Roosevelt - caso II

x	y
-1	-1
-2	0
-3	1

Fonte: Chip Reinhardt (REINHARDT, 2012)

Caso III: $-6 \leq x \leq 2$ e $y > 1$

$$\begin{aligned} \text{Como } |x+6| \geq 0 & \text{ quando } -6 \leq x \leq 2, |x+6| = x+6 \\ |y+1| > 0 & \text{ quando } y > 1, |y+1| = y+1 \\ |x-2| \leq 0 & \text{ quando } -6 \leq x \leq 2, |x-2| = -x+2 \\ |y-1| > 0 & \text{ quando } y > 1, |y-1| = y-1 \end{aligned}$$

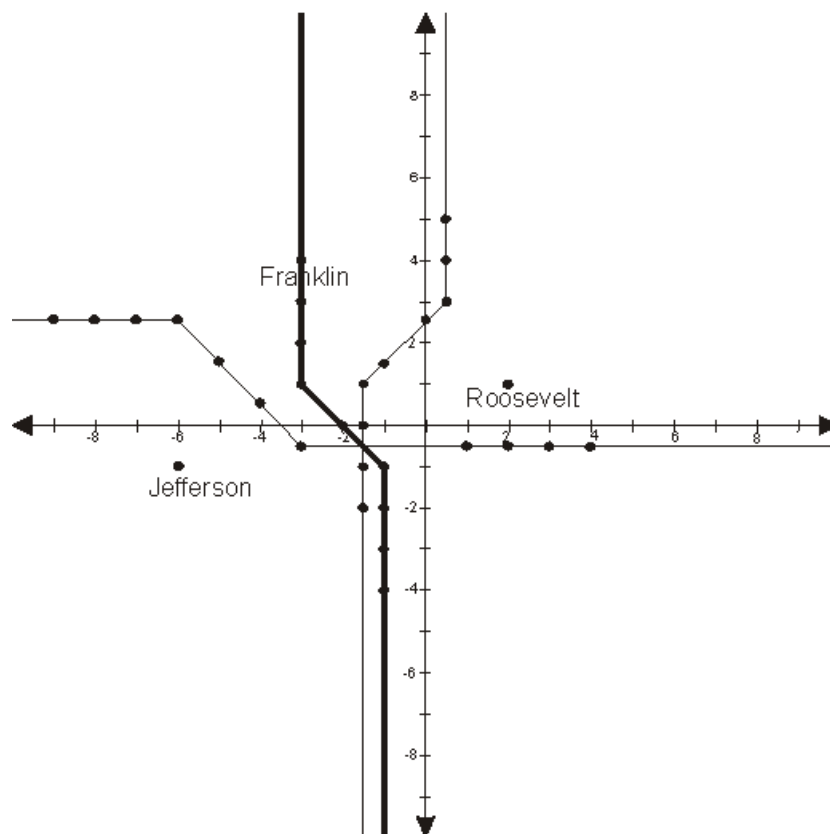
Substituindo na tabela:

Tabela 15: Mesma distância entre Jefferson e Roosevelt - caso III

x	y
-3	2
-3	3
-3	4
.	.
.	.
.	.

Fonte: Chip Reinhardt (REINHARDT, 2012)

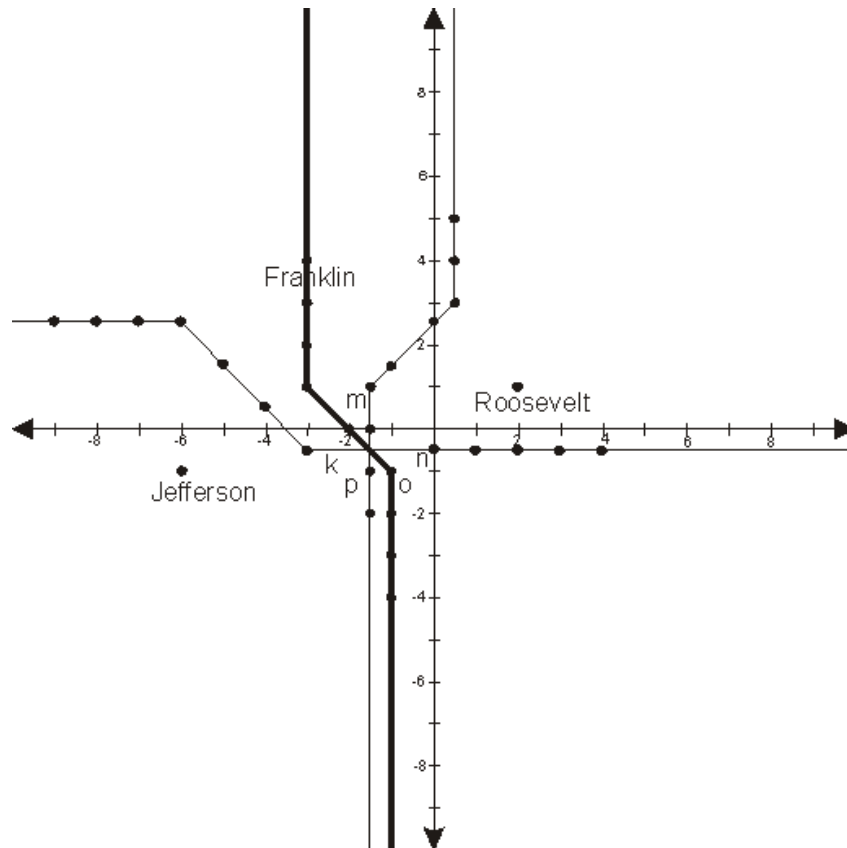
Segue abaixo, o gráfico que contém os pontos e as linhas das distâncias $d_t(\text{Jefferson}) = d_t(\text{Roosevelt})$ com uma linha grossa.



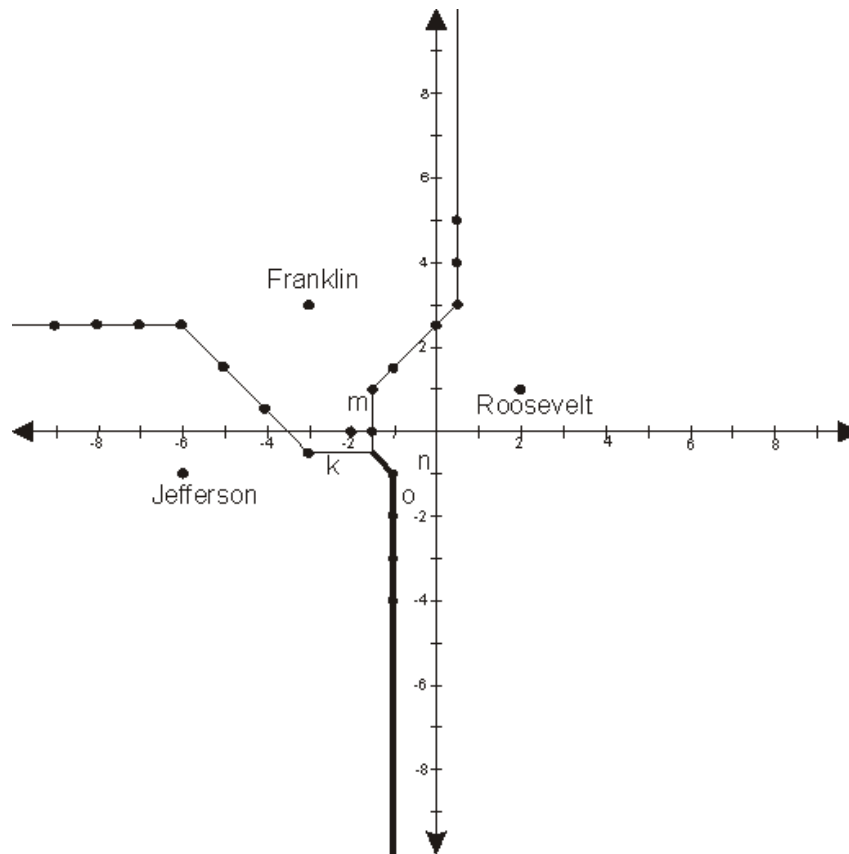
Caso IV - IX: Não existem soluções quando olhamos para esses casos. Ao olhar para o gráfico acima, pode-se ver que não haverá mais soluções. Se olharmos no quadrante I e IV, qualquer ser vivo na área externa estará mais próximo da escola Roosevelt. Também olhando no quadrante II e III, qualquer pessoa que vive nestes limites exteriores estará mais perto da escola Jefferson.

Situação 4

Agora precisamos olhar a informação e usar alguma lógica básica para interpretá-la. A figura anterior tem todos os limites entre dois distritos escolares. Devemos primeiramente encontrar o ponto em que os três limites se cruzam. Isto ocorre em $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e agora examinaremos cada limite e a partir deste ponto marcaremos os limites para facilitar a explicação:



Primeiro vamos olhar para o limite k , é obviamente um limite correto, porque não há outro que dividiria corretamente Franklin e Jefferson. O limite que destina-se a dividir Jefferson e Roosevelt, este não é necessário porque há pontos nesta linha que está mais próximo da escola Franklin. Uma vez removido l , m deve permanecer para manter uma fronteira entre Roosevelt e Franklin. Agora o limite n não é necessário porque é a fronteira entre Jefferson e Franklin e a escola Roosevelt está mais próxima, assim podemos remover o n . O limite p é para Franklin e Roosevelt, mas estamos mais perto da escola Jefferson do que Roosevelt e por isso vamos ignorar esse limite. Como p foi removido, o deve permanecer para manter o limite entre Jefferson e Roosevelt. Depois de retirar alguns dos limites, temos a solução final para um distrito escolar de tal forma que todo mundo está frequentando a escola mais próxima de onde vive. Abaixo é o gráfico da solução almejada:



□

Problema 3.3 *A companhia telefônica deseja colocar cabines de telefone público, de modo que todos aqueles que vivem a 12 quarteirões do centro da cidade tenham uma cabine de telefone com distância de quatro quadras cada telefone. O dinheiro está apertado, a empresa de telefonia quer colocar a menor quantidade possível de tal forma que isto seja verdadeiro.*

Solução: A Geometria do Taxista é a escolha lógica para resolver este problema, pois as pessoas não podem andar por quintais ou saltar por cima dos prédios para usar o telefone, eles devem manter-se nas ruas. Como no precedente problema, precisamos dividi-lo em diferentes situações.

Situação 1

Primeiro devemos encontrar as linhas de fronteira que estão a doze quarteirões do centro da cidade, para isso teremos de encontrar as áreas que estão menores que 12 blocos. Precisamos olhar para as linhas que estão a uma distância de 12 quarteirões do centro da cidade. Para isso

resolveremos a equação:

$$d_t[(0,0), (x,y)] = 12$$

$$|x-0| + |y-0| = 12$$

Devemos avaliar estas equações em casos diferentes devido aos valores absolutos. Devemos olhar para os seguintes casos:

Tabela 16: Linhas distantes 12 quadras do centro da cidade

	$-12 = x \leq 0$	$12 = x \geq 0$
$-12 = y \leq 0$	caso I	caso III
$12 = y \geq 0$	caso II	caso IV

Fonte: Chip Reinhardt (REINHARDT, 2012)

Caso I: $12 = x \geq 0$ e $12 = y \geq 0$

$$\text{Como } |x-0| \geq 0 \quad \text{quando } 12 = x \geq 0, |x-0| = x-0$$

$$|y-0| = 0 \quad \text{quando } 12 = y \geq 0, |y-0| = y-0$$

Quando $x = 12$ e $y = 12$, temos que

$$x-0+y-0 = 12$$

$$y = -x+12$$

Caso II: $12 = x \geq 0$ e $-12 = y \leq 0$

$$\text{Como } |x-0| \geq 0 \quad \text{quando } 12 = x \geq 0, |x-0| = x-0$$

$$|y-0| = 0 \quad \text{quando } -12 = y \leq 0, |y-0| = -y+0$$

Se $x = 12$ e $y = -12$, obtemos a equação

$$x-0-y+0 = 12$$

$$x-12 = y$$

Caso III: $-12 = x \leq 0$ e $-12 = y \leq 0$

Como $|x - 0| = 0$ quando $-12 = x \leq 0$, $|x - 0| = -x + 0$

$|y - 0| = 0$ quando $-12 = y \leq 0$, $|y - 0| = -y + 0$

Sendo $x = -12$ e $y = -12$, resulta que

$$x + 0 - y + 0 = 12$$

$$-x - 12 = y$$

Caso IV: $-12 = x \leq 0$ e $12 = y \geq 0$

Como $|x - 0| = 0$ quando $-12 = x \leq 0$, $|x - 0| = -x + 0$

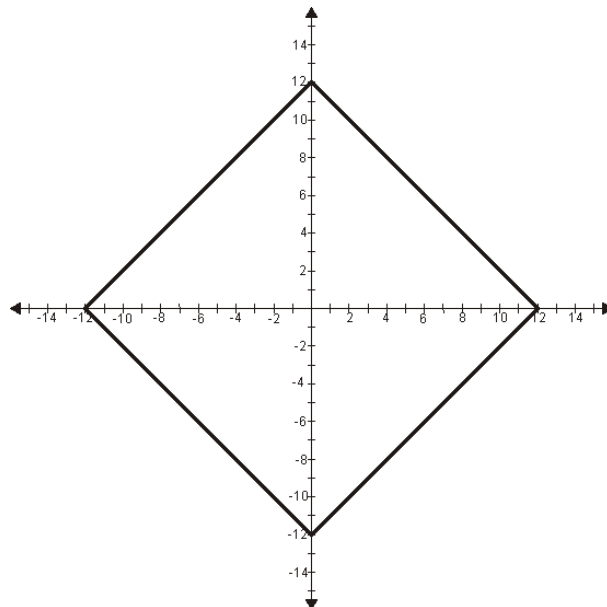
$|y - 0| = 0$ quando $12 = y \geq 0$, $|y - 0| = y - 0$

Agora, como $x = -12$ e $y = 12$, vem que

$$-x + 0 + y - 0 = 12$$

$$y = x + 12$$

Encontramos quatro linhas, cada uma em um quadrante diferente, que têm uma distância de 12 quadras para a origem. Abaixo, temos o gráfico de nossos quatro casos.



O que temos aqui é um gráfico de um círculo com raio 12 na geometria do taxista.

Situação 2

Agora precisamos encontrar uma equação para uma linha tal que cada ser vivo no limite no quadrante I esteja dentro de quatro blocos. Podemos encontrar esta linha usando a equação:

$$\begin{aligned}d_t[(x, x - 12), (x_1, y_1)] &= 4 \\|x - x_1| + |(-x + 12) - y_1| &= 4\end{aligned}$$

Basta olhar para os casos que estão em sua fronteira original. Portanto $x_1 = x$ e $y_1 = y$. Logo, $|x - x_1| = x - x_1$ e $|(-x + 12) - y_1| = -x + 12 - y_1$

$$\begin{aligned}x - x_1 + (-x + 12) - y_1 &= 4 \\-x_1 + 8 &= y_1\end{aligned}$$

Vamos chamar a linha de l . A equação $-x_1 + 8 = y_1$ nos oferece uma linha para colocar possíveis telefones em condições ideais de distância do nosso limite exterior do quadrante I. A distância entre a linha l e limite exterior será igual a 4 blocos. Precisamos agora encontrar a linha limite, para que todos que vivem abaixo da linha l possam usar um telefone localizado na linha l com distância de quatro blocos. Para fazer isso, vamos olhar para a equação:

$$\begin{aligned}d_t[(x_1, x_1 - 8), (x_2, y_2)] &= 4 \\|x_2 - x_1| + |y_2 - (x_1 - 8)| &= 4\end{aligned}$$

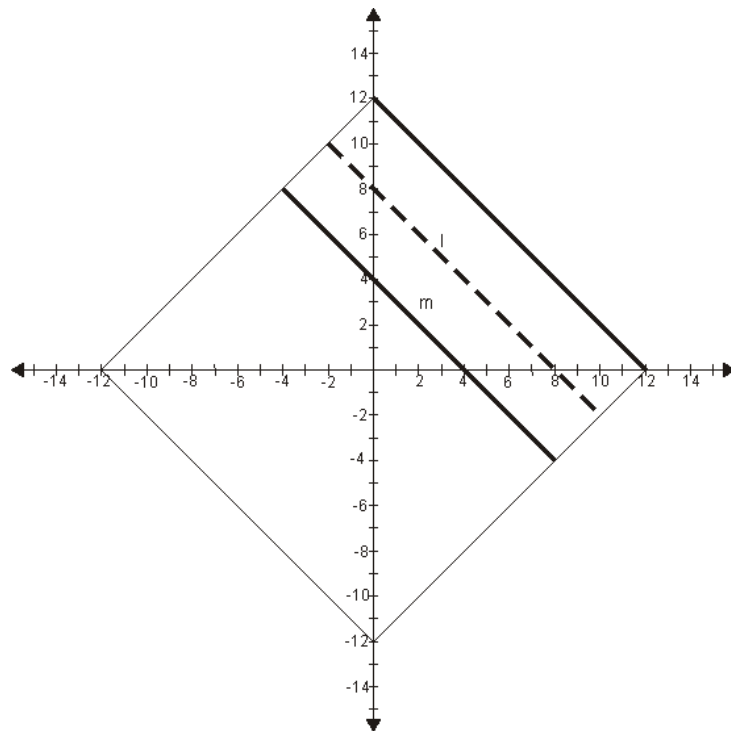
Novamente, basta olhar para os casos que estão em nosso limite. Portanto $x_2 = x_1$ e $y_2 = y_1$. Agora, uma vez mais, pela definição de valor absoluto, $|x_2 - x_1| = -x_2 + x_1$ e $|y_2 - (x_1 - 8)| = -y_2 + (-x_1 + 8)$.

Nossa equação torna-se:

$$\begin{aligned}-x_2 + x_1 - y_2 + (-x_1 + 8) &= 4 \\-x_2 - y_2 + 8 &= 4 \\-x_2 + 4 &= y_2\end{aligned}$$

Vamos chamar essa linha de m .

Agora vamos ao gráfico desta equação para vermos os limites da nossa possível colocação de telefones. Todos os que vivem entre as duas linhas grossas estarão a quatro blocos de telefones localizados sobre a linha pontilhada.



Como fizemos antes, devemos encontrar uma linha abaixo do nível de modo que as pessoas que vivem em ou abaixo deste limite (linha m) estará a quatro blocos. Para fazer isso, vamos usar a equação:

$$d[(x_2, -x_2 + 4), (x_3, y_3)] = 4$$

Novamente, precisamos olhar para os casos que estão em nosso limite. Como $x_3 = x_2$ e $y_3 = y_2$. Então $x_3 - x_2 = -x_3 + x_2$ e $y_3 - (-x_2 + 4) = -y_3 + (-x_2 + 4)$.

Nossa equação torna-se:

$$\begin{aligned} -x_3 + x_2 - y_3 + (-x_2 + 4) &= 4 \\ -x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

Vamos chamar essa linha de n .

Se os telefones são colocados ao longo desta linha, todos aqueles que vivem entre esta linha e o limite anterior estará a quatro blocos de um telefone. Agora precisamos encontrar o limite tal que as pessoas que vivem abaixo da nossa nova linha estarão a quatro blocos desses telefones. Usamos a equação:

$$d_t[(x_3, -x_3), (x_4, y_4)] = 4$$

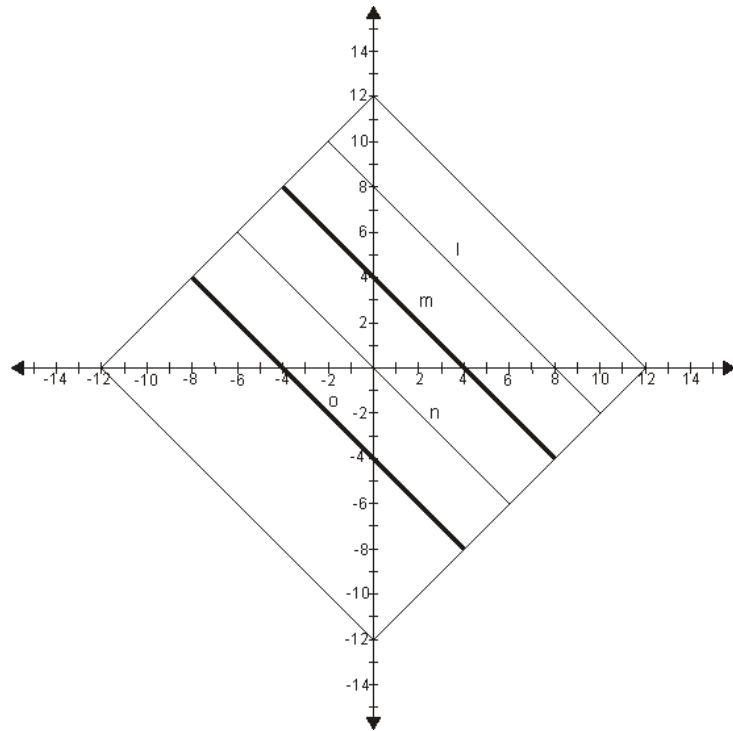
Novamente, basta olhar para os casos que estão no nosso limite. Portanto $x_4 = x_3$ e $y_4 = y_3$. Isto nos dá que $|x_4 - x_3| = -x_4 + x_3$ e $|y_4 - (-x_3)| = -y_4 + (-x_3)$

Agora nossa equação torna-se:

$$\begin{aligned} -x_4 + x_3 - y_4 + (-x_3) &= 4 \\ -x_4 - 4 &= y_4 \end{aligned}$$

Vamos chamar essa linha de o .

Quando representamos graficamente estas duas linhas vemos os limites (as linhas m e o) tais que todos que vivem entre os dois estarão a quatro blocos de telefones localizados na linha n .



Este processo precisa ser repetido mais uma vez. Como feito anteriormente, devemos encontrar uma linha abaixo da linha o tal que as pessoas que vivem no limite ou abaixo deste estarão a quatro blocos de um telefone. Para isso, vamos usar a equação:

$$d_t[(x_4, -x_4 - 4), (x_5, y_5)] = 4$$

Precisamos olhar para os casos que estão em nosso limite. Portanto $x_5 = x_4$ e $y_5 = y_4$. Assim, $|x_5 - x_4| = -x_5 + x_4$ e $|y_5 - (-x_4 - 4)| = -y_5 + (-x_4 - 4)$

Nossa equação fica do seguinte modo:

$$\begin{aligned} -x_5 + x_4 - y_5 + (-x_3 - 4) &= 4 \\ -x_5 - 8 &= y_5 \end{aligned}$$

Chamemos essa linha de p .

Se os telefones são colocados ao longo desta linha de p , todos os que vivem entre esta linha e o limite anterior estarão a quatro blocos de um telefone. Agora precisamos encontrar o limite de modo que pessoas que vivem abaixo a nova linha estarão a quatro blocos desses telefones. Usamos a equação:

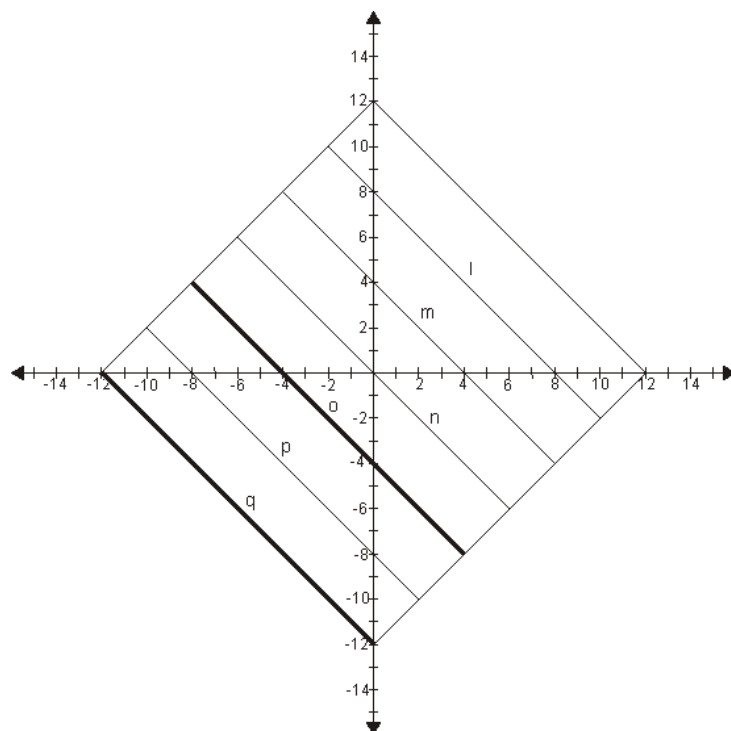
$$d[(x_5, -x_5 - 8), (x_6, y_6)] = 4$$

Precisamos olhar para os casos que estão no nosso limite. Portanto $x_6 = x_5$ e $y_6 = Y_5$. Resulta disto que $|x_6 - x_5| = -x_6 + x_5$ e $|y_6 - (-x_5 - 8)| = -y_6 + (-x_5 - 8)$. Neste caso, nossa equação torna-se:

$$\begin{aligned} -x_6 + x_5 - y_6 + (-x_5 - 8) &= 4 \\ -x_6 - 12 &= y_6 \end{aligned}$$

Vamos chamar esta linha de q .

A linha q é a mesma linha que o nosso limite exterior do quadrante III. Abaixo têm-se graficamente as fronteiras e as linhas que os telefones podem ser colocados.



Foram encontradas as linhas ideais para a colocação de cabines telefônicas, mas não sabemos onde colocá-las sob estas linhas. No entanto, vamos precisar de mais informação.

Situação 3

Vamos repetir o mesmo processo como na situação 2. Desta vez, vamos começar encontrando a linha de modo que todos aqueles que vivem na fronteira do quadrante II estarão a distância de quatro blocos. Sabemos que a equação para o nosso limite externo é $y = x_7 + 12$ (seção 1). Precisamos resolver a equação:

$$d_t[(x_7, x_7 + 12), (x_8, y_8)] = 4$$

As soluções aos problemas futuros estão nesta seção $x_n \geq x_{n+1}$ e $y_n \leq y_{n+1}$ porque só precisamos trabalhar dentro de nossos limites definidos. Então as linhas que estarão na solução sempre terão valores de x maiores do que a linha anterior e os valores de y menores do que a linha anterior. Deste modo,

$$\begin{aligned} d_t[(x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})] &= 4 \\ |x_{n+1} - x_n| \leq 0 &\text{ quando } x_n \leq x_{n+1}, \text{ de modo que } |x_{n+1} - x_n| = x_{n+1} - x_n \\ |y_{n+1} - y_n| \geq 0 &\text{ quando } y_n \geq y_{n+1}, \text{ de modo que } |y_{n+1} - y_n| = y_{n+1} - y_n \end{aligned}$$

Resolvemos a equação:

$$\begin{aligned} d_t[(x_7, x_7 + 12), (x_8, y_8)] &= 4 \\ x_8 - x_7 - y_8 + (x_7 + 12) &= 4 \\ x_8 + 8 &= y_8 \end{aligned}$$

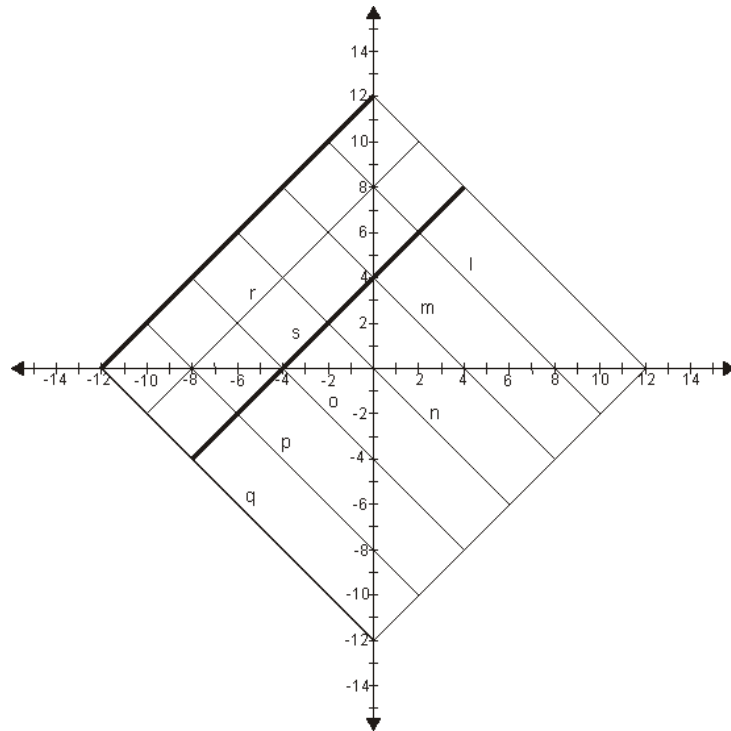
Vamos chamar esta linha de r .

Se os telefones são colocados ao longo da linha r , todos os que vivem entre esta linha e o limite anterior estarão a quatro blocos de um telefone. Agora precisamos encontrar o limite de tal forma que pessoas que vivem abaixo da nova linha estarão a quatro blocos desses telefones. Usaremos a equação:

$$\begin{aligned} d_t[(x_8, x_8 + 8), (x_9, y_9)] &= 4 \\ x_9 - x_8 - y_9 + (x_8 + 8) &= 4 \\ x_9 + 4 &= y_9 \end{aligned}$$

Vamos chamar esta linha de s .

Quando representamos o gráfico destas duas linhas, veremos que as linhas s e $y = x_7 + 12$ (nosso limite exterior) são os limites tais que todos os que vivem entre os dois estarão dentro dos quatro blocos de telefones situados na linha r . Segue o gráfico abaixo:



Como fizemos antes, devemos encontrar uma linha abaixo de s de tal forma que as pessoas que vivem nela ou abaixo desta estarão a quatro blocos. Para fazer isso vamos usar a equação:

$$\begin{aligned}d_t[(x_9, x_9 + 4), (x_{10}, y_{10})] &= 4 \\x_{10} - x_9 - y_{10} + (x_9 + 4) &= 4 \\x_{10} &= y_{10}\end{aligned}$$

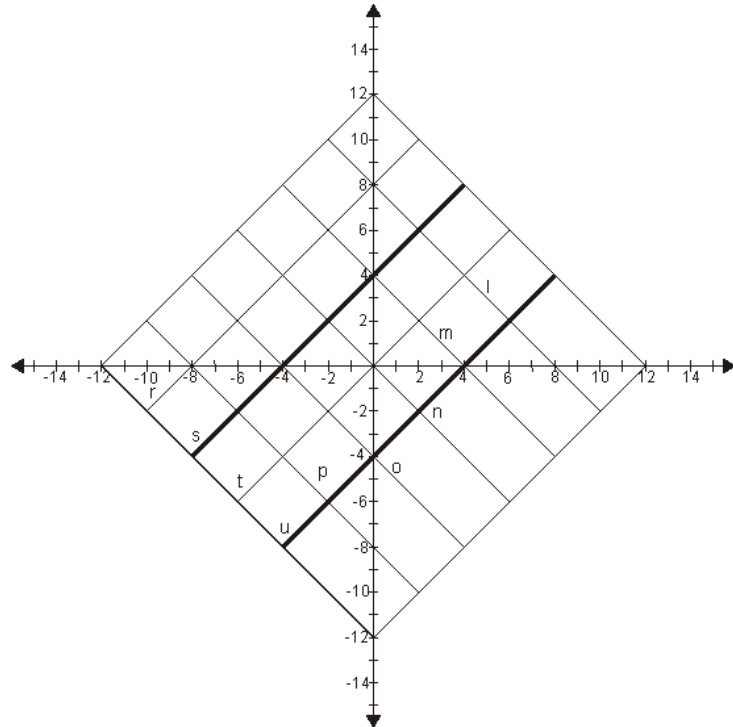
Chamemos esta linha de t .

Se os telefones são colocados ao longo da linha t , todos os que vivem entre esta linha e o limite anterior estarão a quatro blocos de um telefone. Agora precisamos encontrar o limite de tal forma que pessoas que vivem abaixo da nova linha estarão a quatro blocos desses telefones. Usamos a equação:

$$\begin{aligned}d_t[(x_{10}, x_{10}), (x_{11}, y_{11})] &= 4 \\x_{11} - x_{10} - y_{11} + x_{10} &= 4 \\x_{11} - 4 &= y_{11}\end{aligned}$$

Chamemos esta linha de u .

Ao representar o gráfico destas duas linhas, nós veremos que as linhas r e u são limites tais que todos os que vivem entre os dois estará dentro dos quatro blocos de telefones situados na linha t . Temos este gráfico abaixo:



Este processo precisa ser repetido mais uma vez. Como fizemos antes, devemos encontrar uma linha abaixo da linha u de tal forma que as pessoas que vivem nele ou abaixo deste limite estarão a quatro blocos de um telefone. Para fazer isso, vamos usar a equação:

$$\begin{aligned} d[(x_{11}, x_{11} - 4), (x_{12}, y_{12})] &= 4 \\ x_{12} - x_{11} - y_{12} + (x_{11} - 4) &= 4 \\ x_{12} - 8 &= y_{12} \end{aligned}$$

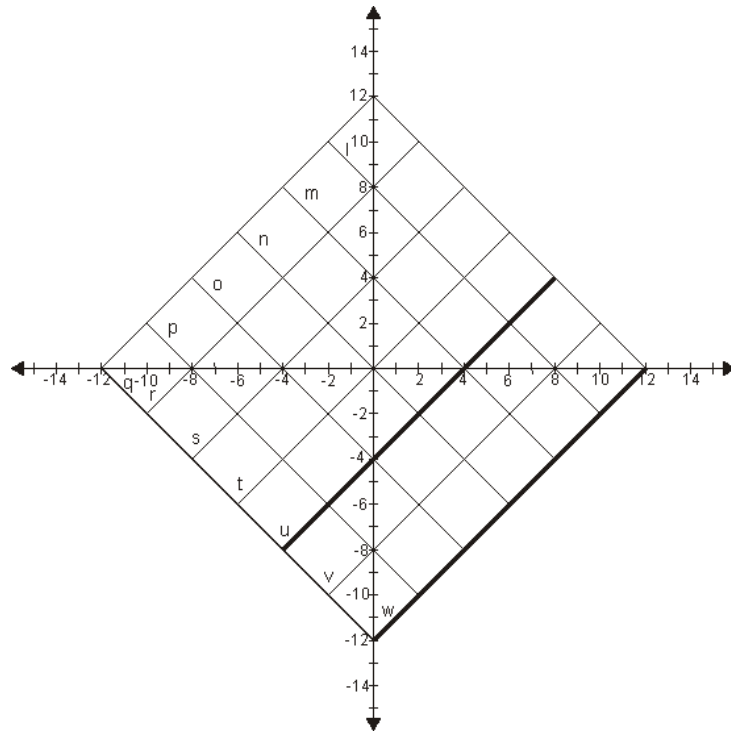
Vamos chamar esta linha de v .

Se os telefones são colocados ao longo da linha v todos os que vivem entre esta linha e o limite anterior estarão a quatro blocos de um telefone. Agora precisamos encontrar o limite tal que as pessoas que vivem abaixo da nova linha estarão a quatro blocos desses telefones. Usamos a equação:

$$\begin{aligned} d[(x_{12}, x_{12} - 4), (x_{13}, y_{13})] &= 4 \\ x_{13} - x_{12} - y_{13} + (x_{12} - 8) &= 4 \\ x_{13} - 12 &= y_{13} \end{aligned}$$

Vamos chamar esta linha de w .

Linha w é a mesma linha que nosso limite exterior no quadrante IV. A seguir, temos o gráfico dos limites e as linhas que os telefones podem ser colocados.



Situação 4

Agora precisamos apenas interpretar o nosso gráfico. As linhas em nosso gráfico acima representam lugares ideais para colocar as cabines de telefones. Até aqui não tivemos uma posição específica, simplesmente uma linha para que a cabine seja colocada. Observe que as linhas se cruzam. Estes são os pontos onde as cabines telefônicas devem ser colocadas. Todo o trabalho que fizemos resulta na colocação de 9 telefones públicos. Cada um desses 9 telefones em um cruzamento. Pela maneira que construímos o nosso gráfico, sabemos que esses cruzamentos são os locais ideais para colocarmos a menor quantidade de cabines telefônicas de tal forma que todos aqueles que vivem a 12 quarteirões do centro da cidade estarão a um distância de quatro blocos de um telefone público. Podemos ver que a geometria do taxista é um modelo muito útil de geografia urbana. Apenas um pombo iria se beneficiar do conhecimento que a distância entre dois edifícios, nos extremos opostos de uma cidade é uma linha reta. Para as pessoas, a distância de taxista é a distância “real”.

4 CONCLUSÃO

Este trabalho possibilitou analisar a matemática sobre outra perspectiva, observar que a matemática possui outros aspectos, características e propriedades que não estamos habituados. É bom que se diga que muita coisa referente a Geometria do Taxista não foi abordada neste trabalho, como por exemplo, a distância do taxista em três dimensões, comprimento de arco, área, volume, superfícies de revolução, paralelismo, derivadas de funções trigonométricas, seções cônicas, dentre outros. Para tanto, o leitor pode consultar (KEVIN, 2012).

E com o intuito de divulgar a geometria do taxista, acreditamos que mesmo não abordando os temas acima e discorrendo sobre os temas escolhidos, que concernem na apresentação da Geometria do Taxista neste trabalho, este possa beneficiar professores e futuros professores de matemática para que tenham contato com outro tipo de geometria que não seja a Geometria Euclidiana. O uso do software *Maple 16* tornou-se extremamente eficaz na obtenção do gráfico das cônicas e da mediatriz, o que vem de encontro a utilização cada vez mais frequentes de softwares matemáticos no ensino da matemática presente.

REFERÊNCIAS

- AKÇA, Z.; KAYA, R. **Taxicab Angles and Trigonometry**. Calcutta, Índia: Journal of Institute Of Mathematics and Computer Sciences, 1997.
- BRISBIN, R.; ARTOLA, P. **Taxicab Angles and Trigonometry**. Worcester: The Pi Mu Epsilon Journal, 1985.
- HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória, Probabilidade**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.
- JANSSEN, C. **Taxicab Geometry: Not the Shortest Ride Across Town (Exploring Conics with a Non-Euclidean Metric)**. 2007. Disponível em: <<http://www.taxicabgeometry.net/docs/mirror/JanssenMSMSS07.pdf>>. Acesso em: 9 de abril de 2012.
- KAYA, R. et al. **General Equation for Taxicab Conics and Their Classification**. Hamburg: Mitt. Math. Ges. Hamburg, 19, 2000.
- KAYA, R.; ÇOLAKOĞLU, H. B. **Taxicab Versions of some Euclidean Theorems**. New Delhi: Jour. of Pure and Appl. Math. (IJPAM) 26, 2006.
- KAYA, R.; ÇOLAKOĞLU, H. B. **Regular Polygons in the Taxicab Plane**. Zagreb , Croatia: Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics, 2008.
- KEVIN, T. **Taxicab Geometry**. 2012. Disponível em: <<http://taxicabgeometry.net/index.html>>. Acesso em: 12 de abril de 2012.
- KEVIN, T.; TEVIAN, D. **Taxicab Angles and Trigonometry**. Worcester: The Pi Mu Epsilon Journal, 2000.
- KRAUSE, E. F. **Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry**. Mineola, NY: Dover Publications, 1985.
- POOLE, D. **Álgebra Linear**. 1. ed. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2005.
- REINHARDT, C. **TaxiCab Geometry: History and Applications**. 2012. Disponível em: <<http://www.math.umt.edu/tmme/vol2no1/TMMEv2n1a5.pdf>>. Acesso em: 8 de abril de 2012.
- REIS, G. L. d.; SILVA, V. L. d. **Geometria Analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- RESENDE, E. Q. F. **Geometria do Taxista**. 2006. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/taxista.pdf>>. Acesso em: 12 de abril de 2012.