UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

VIVIANE GOMES

UTILIZANDO O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS PARA RESOLVER UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL HIPERBÓLICA

MONOGRAFRIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2013

VIVIANE GOMES

UTILIZANDO O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS PARA RESOLVER UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL HIPERBÓLICA

Monografria apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Adilandri Mércio Lobeiro

CAMPO MOURÃO

2013

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo carinho e compreensão.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, que com sua infinita sabedoria me dando forças e capacidade para terminar este trabalho, estando sempre junto comigo nos momento mais difíceis.

Aos meus pais Viriato e Matilde que nem sempre compreendendo porque tanto empenho em viajar tão distante para fazer uma pós, me apoiaram e deram forças para continuar.

Ao meu filho Marcel e a minha irmã Liliane que sempre quando precisei de algo ou ajuda nos estudo estavam dispostos a fazê-lo sem recriminações.

Ao meu orientador Adilandri Mércio Lobeiro, que foi um excelente amigo, sempre prestativo e me incentivando a não desistir, agradeço pela sua paciência que foi essencial para conseguir hoje estar aqui com o trabalho terminado.

RESUMO

GOMES, Viviane.. Utilizando o Método das Características Para Resolver uma Equação Diferencial Parcial Hiperbólica. 47 f. Monografria – Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

Estudo aprofundado sobre a Equação da Onda onde houve uma preocupação com a dedução da equação da onda em vibrações longitudinais com uma dimensão, trazendo sua demonstração detalhada através da Segunda Lei de Newton, aplicando o método numérico das características na resolução de onda homogênea com equações diferenciais parciais lineares, examina as equações de segunda ordem em duas variáveis e finalmente a obtenção da Solução Analítica das equações hiperbólicas via método das características comparando com a Solução Numérica.

Palavras-chave: Onda, Hiperbólica, Características

ABSTRACT

GOMES, Viviane.. Using the Method of Characteristics To Settle a partial differential equation Hyperbolic. 47 f. Monografria – Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

Depth study of the Wave Equation where there was a concern with the deduction of the wave equation for longitudinal vibrations with a dimension, bringing his detailed demonstration by Newton's Second Law, applying the numerical method of characteristics to solve differential equations with homogeneous wave linear partial examines the second-order equations in two variables, and finally obtaining the Analytical Solution of hyperbolic equations via the method of characteristics comparing with the Numerical Solution.

Keywords: Wave, Hyperbolic, Characteristics

“O sábio nunca diz tudo o que pensa, mas pensa sempre tudo o que diz”.

“Nós somos o que fazemos repetidamente. Excelência, então, não é um modo de agir, mas um hábito”.

(Aristóteles)

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Onda não é um conceito novo, estamos continuamente em contato com diversos tipos, como é o caso das ondas sonoras, impossíveis de serem observadas diretamente, mas após alguns experimentos e análises detalhadas podemos perceber que é um fenômeno do tipo ondulatório, outras podemos observar a olho nu, que é o caso das ondas na superfície da água ou o movimento de um perturbação ao longo de uma corda, após o movimento repentino, e outras não podemos ver e nem ouvir mas nem por isso deixam de existir ou ter menor importância.

Apesar de terem origens e natureza diferentes como é o caso da luz que é uma onda eletromagnética e do som que é uma onda mecânica, todas essas possuem uma mesma característica que é a energia transferida através do meio. Sendo assim o estudo das ondas é relevante não só pela beleza de conhecer os mecanismos que produzem o pôr-do-sol ou o arco-íris, mas pelos benefícios de conhecer melhor seus movimentos, já que no mundo físico, como nos entendemos em que há três dimensões espacias e uma dimensão de tempo, e que as quantidades físicas variam continuamente no espaço e no tempo, em geral são necessárias todas as quatro coordenadas para especificar um ponto vetorial, que constituem o espaço-tempo, no entanto a utilização de todas as quatro coordenadas para analisar o movimento das ondas tende a obscurecer a relação entre tempo e variação de espaço, que é a característica do movimento, no entanto, no decorrer deste estudo tentaremos descrever o movimento da onda com uma abordagem usual e investigaremos o movimento unidimensional em que apenas uma coordenada espacial é utilizada.

Sendo efetuado um estudo sobre a Equação da Onda onde nos preocuparemos com a dedução da equação da onda em vibrações longitudinais em uma dimensão, o método numérico das características na solução da equação da onda homogênea, examinaremos as equações de segunda ordem em duas variáveis e finalmente a obtenção das soluções numérica e algébricas de uma equação hiperbólica.

2 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA

O estudo da equação da onda teve uma importância histórica, pois foi amplamente estudado pelos matemáticos Leonard Euler $(1709-1783)$, Jean d'Alambert $(1736-1783)$, Daniel Bernoulli $(1700-1782)$ e Joseph - Louis Lagrange $(1736-1813)$, dando origem ao tema de Equações Diferenciais Parciais (EDPs).

2.1 EQUAÇÃO DA ONDA EM UMA CORDA

Para a dedução da equação da onda, aplicaremos as leis de Newton a um movimento de um segmento de corda. Para isto devemos utilizar a segunda lei de Newton, em um pequenos deslocamentos vertical. O comprimento do segmento é aproximadamente Δx e a massa desse segmento é $\Delta m = \mu A \Delta x$, sendo μ a massa específica e A, a área de seção transversal da corda. Desta forma, o segmento desloca-se verticalmente e a força resultante nesse caso é dada por

$$\sum F \;=\; F\sin\phi_2 - F\sin\phi_1 \ , \tag{2.1}$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são os ângulos e $F = \sigma A$ representa a tensão na corda. Como os ângulos são pequenos, pode-se adotar a aproximação $\sin\phi \approx \tan\phi$; a equação (2.1) é reescrita como

$$\sum F \;=\; F(\sin\phi_2 - \sin\phi_1) \approx F(\tan\phi_2 - \tan\phi_1) \ . \tag{2.2}$$

A tangente do ângulo entre a corda e a horizontal é a inclinação S (coeficiente angular) da curva descrita pela corda. A inclinação é a derivada parcial de $y = v(x,t)$ em relação a x. Assim, tem-se

$$S \;=\; \tan\phi = \frac{\partial y}{\partial x} \ , \tag{2.3}$$

e, para o segmento

$$S_1 \;=\; \tan\phi_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x \tag{2.4}$$

e

$$S_2 = \tan\phi_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{(x+\Delta x)} . \tag{2.5}$$

Portanto, substituindo as equações (2.4) e (2.5) em (2.1), temos

$$\sum F = F(S_1 - S_2) = F\Delta S , \tag{2.6}$$

onde ΔS é a variação da inclinação. Igualando a resultante das forças ao produto da massa $\mu A\Delta x$ pela aceleração, dada por $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, ficamos com

$$\sigma A\Delta S = \mu A\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} . \tag{2.7}$$

Da equação (2.7), obtemos

$$\sigma\frac{\Delta S}{\Delta x} = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} . \tag{2.8}$$

Calculando o limite da equação (2.8) quando $\Delta x \to 0$, temos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} . \tag{2.9}$$

Substituindo (2.8) em (2.9), resulta

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\sigma}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} . \tag{2.10}$$

A equação (2.10) representa a equação da onda em uma corda tencionada. A equação da onda tem como solução qualquer função do tipo $y(x-vt)$. Seja a função da onda dada por

$$y = y(x-vt) . \tag{2.11}$$

Considerando $\alpha = x - vt$ e substituindo na equação (2.11), obtemos

$$y = y(\alpha) . \tag{2.12}$$

Representando por $\partial y/\partial x$ a derivada de y em relação a x, $\partial y/\partial t$ a derivada de y em relação a t, derivada de y em relação a α por y', temos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y'\frac{\partial \alpha}{\partial x} \tag{2.13}$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial t} \;=\; \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = y'\frac{\partial \alpha}{\partial t} \;\; . \tag{2.14}$$

Como $\partial\alpha/\partial x = 1$ e $\partial\alpha/\partial t = -v$, temos

$$\frac{\partial y}{\alpha x} \;=\; y' \tag{2.15}$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial t} \;=\; -vy' \;\; . \tag{2.16}$$

Tomando as derivadas de segunda ordem, obtemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \;=\; y'' \tag{2.17}$$

e

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \;=\; -v\frac{\partial y'}{\partial t} = -v\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = v^2 y'' \;\; . \tag{2.18}$$

Assim

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \;=\; \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \;\; . \tag{2.19}$$

A partir deste ponto, a velocidade da onda será representada pela letra c. Logo, a equação de propagação toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \;=\; \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \;\; , \tag{2.20}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}c^2 - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \;=\; 0 \;\; . \tag{2.21}$$

Esta equação é denominada Equação da Onda descrevendo o movimento ondulatório como a superposição de dois movimentos que se propagam em sentidos opostos.

3 MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

3.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto. Consideremos os seguintes espaços vetoriais:

- $C^0(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ u \text{ é contínua }\}$;
- $C^2(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ u \text{ é duas vezes continuamente diferenciável }\}$.

Definimos o seguinte operador diferencial

$$\begin{array}{rcrcl} L & : & C^2(\Omega) & \longrightarrow & C^0(\Omega) \\ & & u & \longmapsto & Lu = A(x,t)u_{xx} + B(x,t)u_{xt} + C(x,t)u_{tt} \end{array}, \tag{3.1}$$

onde $A, B, C : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções reais que dependem das variáveis independentes x e t. Além disso, para todo $(x,t) \in \Omega$ pelo menos um dos coeficientes, A, B ou C é não nulo, ou seja, $A^2(x,t) + B^2(x,t) + C^2(x,t) > 0$.

Teorema 3.1 *L é um operador linear. Vamos prova que L é um operador linear, ou seja, dados $u, v \in C^2(\Omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se $L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv$.*

Demonstração:

$$\begin{array}{rcl} L(\alpha u + \beta v) & = & A(x,t)(\alpha u + \beta v)_{xx} + B(x,t)(\alpha u + \beta v)_{xt} + C(x,t)(\alpha u + \beta v)_{tt} \\ & = & A(x,t)(\alpha u_x + \beta v_x)_x + B(x,t)(\alpha u_t + \beta v_t)_x + C(x,t)(\alpha u_t + \beta v_t)_t \\ & = & A(x,t)(\alpha u_{xx} + \beta v_{xx}) + B(x,t)(\alpha u_{xt} + \beta v_{xt}) + C(x,t)(\alpha u_{tt} + \beta v_{tt}) \\ & = & \alpha\,(A(x,t)u_{xx} + B(x,t)u_{xt} + C(x,t)u_{tt}) + \beta\,(A(x,t)v_{xx} + B(x,t)v_{xt} + C(x,t)v_{tt}) \\ & = & \alpha Lu + \beta Lv \end{array} \tag{3.2}$$

Definimos a função

$$\begin{array}{rcrcl} F & : & \Omega \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t,\xi,\eta,\varsigma) & \longmapsto & F(x,t,\xi,\eta,\varsigma) \end{array}. \tag{3.3}$$

Definição 3.1 (EDP de Segunda Ordem Quase Linear) *Denomina-se equação diferencial parcial de segunda ordem, quase linear, na incógnita $u(x,t)$, a uma equação do tipo*

$$Lu = F\left(x,t,u,u_x,u_t\right), \tag{3.4}$$

sendo L e F definidas anteriormente, onde os coeficientes A , B e C das derivadas se segunda ordem devem, somente depender das variáveis independentes x e t, isto é,

$$A{=}A\left(x,t\right), B{=}B\left(x,t\right), C{=}\left(x,t\right) \tag{3.5}$$

e para todo $(x,t) \in \Omega$ pelo menos um dos coeficientes A, B e C é não nulo, isto é,

$$A^2(x,t)+B^2(x,t)+C^2(x,t) > 0 \tag{3.6}$$

(MEDEIROS; FERREL; BIAZUTTI, 1999).

Definição 3.2 (Solução de uma EDP de Segunda Ordem Quase Linear) *Denomina-se solução da equação (3.4) uma função $u(x,t)$, de classe $C^2(\Omega)$, tal que a igualdade (3.4) seja verificada pontualmente em Ω. Um dos métodos para encontrar a solução para (**??**) é o método das características, sendo a função $u(x,t)$ também conhecida como solução clássica da equação (3.4) (MEDEIROS; FERREL; BIAZUTTI, 1999).*

3.1.1 Parametrização

Definição 3.3 *Seja I um intervalo da reta $\mathbb{R}$. Uma parametrização plana é uma aplicação contínua $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$. A variável $s \in I$ é chamada de parâmetro de γ. A imagem de γ, $Im\gamma = \{q \in \mathbb{R}^2, q = \gamma(s), s \in I\}$ é chamada de arco parametrizado plano. Arcos parametrizados são também chamados de traços. Diz-se que $g \in Im\gamma$ é simples se existe um único $s \in I$ tal que $\gamma(s) = g$. Um arco parametrizado simples é constituído de pontos simples.*

Definição 3.4 *Diz que um ponto $q \in Im\gamma$ é duplo se existem dois parâmetros s_1 e s_2 em I, com $s_1 \neq s_2$, tais que $\gamma(s_1) = \gamma(s_2) = q$. Um ponto triplo é um ponto q tal que $\gamma(s_1) = \gamma(s_2) = \gamma(s_3) = q$, com $s_1 \neq s_2 \neq s_3$ e assim sucessivamente. Portanto um ponto de multiplicidade finita é um ponto $q \in Im\gamma$ caracterizado por um conjunto finito de parâmetros distintos nos quais γ assume o valor q. Diz-se que $q \in Im\gamma$ é simples se existe um único $s \in I$ talque $\gamma(s) = q$.*

Um arco parametrizado simples é constituído de pontos simples. Isto ocorre se γ for uma parametrização injetora (e portanto $\gamma : I \longrightarrow Im\gamma$ é bijetora). Diz-se que γ é uma parametrização simples ou sem multiplicidade.

O domínio $I \subset \mathbb{R}$ pode ser um intervalo fechado $I = [a,b]$. Neste caso, $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ são as extremidades o arco. O arco é dito fechado se possui somente um ponto duplo definido pela extremidade $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Exemplo 3.1 *1. Suponha que a posição de um objeto movendo-se no plano $\mathbb{R}^2$ seja descrita pela curva parametrizada*

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longmapsto & \alpha(s) = (1+s, 3-2s) \end{array} \tag{3.7}$$

(a) Qual a posição inicial (s $= 0$) do objeto?

(b) Qual a posição do objeto no instante de tempo s $= 1$?

(c) O objeto passa pela origem $(0,0)$?

(d) Faça um esboço da trajetória do objeto?

Solução:

(a) Quando $\alpha(0)$ temos os seguinte valores $\alpha(0) = (1+0, 3-2.0) = (1,3)$.

(b) Quando $\alpha(1)$ temos os seguintes valores $\alpha(1) = (1+1, 3-2.1) = (2,1)$.

(c) Verificando se o objeto passe pela origem, teremos o seguinte sistema.

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 + s = 0 \Rightarrow s = -1 \\ 3-2s = 0 \Rightarrow 3 = 2s \Rightarrow s = \frac{3}{2} \end{array} \right. . \tag{3.8}$$

Logo o sistema é impossível de resolver e portanto o objeto não passa pela origem.

(d) Esboço da trajetória do gráfico.

Temos:

$$\left\{ \begin{array}{c} x(s) = 1+s \\ t(s) = 3-2s \end{array} \right. . \tag{3.9}$$

Equação Paramétrica

Vetor diretor : $\vec{r} = (1,-2)$

Ponto : $P(1,3)$

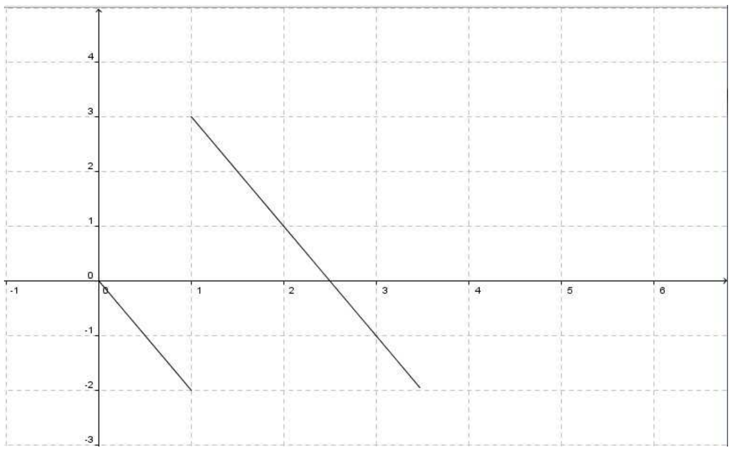

Figura 3.1: Gráfico

Equação Geral da Reta

$$\begin{aligned} x(s) &= 1+s \Rightarrow s = x(s)-1 \\ t(s) &= 3-2s \end{aligned} \tag{3.10}$$

Daí

$$\begin{aligned} t(s) &= 3-2(x(s)-1) \\ t(s) &= 3-2(x(s)+2 \\ t(s) &= 5-2(x(s)) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Portanto, o traço da curva α é a reta $t = 5-2x$. Desta maneira, a trajetória do objeto pode ser escrita de duas maneiras diferentes:

- *como o traço da curva parametrizada $\alpha(t) = (1+t, 3-2t)$*

- *como a curva de nível da função $f(x,t) = 2x+t-5$ associada ao nível 0.*

No primeiro caso, dizemos que estamos descrevendo a curva parametricamente e, no segundo caso, implicitamente.

2. *Faça um esboço do traço da curva parametrizada*

$$\begin{aligned} \beta \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \beta(s) = (\cos(s), \sin(s)) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Solução:

Temos,

$$\begin{array}{lclcl} \beta(0) & = & (\cos 0, \sin 0) & = & (1,0) \\ \beta(\frac{\pi}{4}) & = & \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) & = & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \beta\left(\frac{\pi}{2}\right) & = & \left(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right) & = & (0,1) \end{array} . \qquad (3.13)$$

Fazendo $x = \cos(s)$ *e* $t = \sin(s)$ *temos*

$$x^2 + t^2 \;=\; [\cos(s)]^2 + [\sin(s)]^2 = 1 \Rightarrow x^2 + t^2 = 1 \;. \qquad (3.14)$$

Desta forma, o traço da curva β *é a circunferência de centro na origem* $(0,0)$ *e raio 1.*

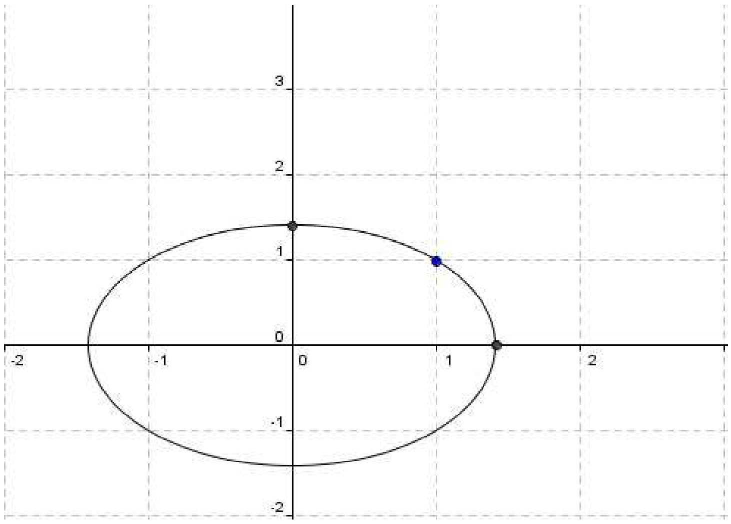

Figura 3.2: Gráfico Circunferência

3. *Faça um esboço do traço da curva parametrizada*

$$\begin{array}{rcl} \gamma \quad \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \longmapsto & \gamma(s) = (\cos(2s), \sin(2s)) \end{array} \qquad (3.15)$$

Solução:

Vamos, novamente, tentar obter uma parametrização implícita para os pontos $\gamma(s)$*, com* $S \in \mathbb{R}$*. Escrevendo,*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos(2s) \\ t = \sin(2s) \end{array} \right. . \qquad (3.16)$$

Observe que $x^2 + t^2 = [\cos(2s)]^2 + [\sin(2s)]^2 = 1.$

Observação 3.1 *Desta maneira, o traço da curva γ, como o traço da curva β do item anterior anterior também é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1. Então as curvas β e γ são iguais? A resposta é não! No intervalo de tempo 0 até 2π, um móvel locomovendo-se segundo a curva β daria uma única volta em torno da origem, enquanto que um móvel locomovendo-se segundo a curva parametrizada γ daria duas voltas completas. A diferença está na velocidade!*

Definição 3.5 *Uma parametrização diferenciável plana é uma aplicação $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, diferenciável em todo ponto de I. Neste caso diz-se que seu traço é um arco diferenciável. Um ponto $s_0 \in I$ é dito regular se*

$$\gamma'(s_0) \quad = \quad \frac{d\gamma}{ds}(s_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{h} \neq 0 \tag{3.17}$$

Um ponto é dito não regular ou crítico, se não for regular. Uma parametrização diferenciável é dita regular se $\gamma'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$.

Se $\gamma(s) = (x(s), t(s))$, $s \in I$, é diferenciável então as funções coordenadas $x(s)$ e $t(s)$ são diferenciáveis. Logo γ é regular se e somente se aos menos uma função coordenada tem derivada não nula, qualquer que seja s, ou seja

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 > 0.$$

3.1.2 Equações no plano $\mathbb{R}^2$ - Características

Considere as equações paramétricas da curva γ dada por

$$\gamma \ : \ x = \varphi(s) \ \text{ e } \ t = \psi(s) \ , \ 0 \leq s \leq 1 \ , \tag{3.18}$$

onde γ é sem auto interseções e regular, ou seja, γ é constituída de pontos simples e $(dx/ds)^2 + (dt/ds)^2 > 0$ em $[0,1]$.

O Problema de Cauchy, para a equação diferencial quase linear $Lu = F(x,t,u,u_x,u_t)$, consiste em determinar uma solução $u(x,t)$ para esta equação, conhecendo-se os valores de u e das derivadas u_x, u_t sobre γ. Simbolicamente, escreve

$$\left| \begin{array}{l} Lu = F(x,t,u,u_x,u_t) \ \text{ em } \ \Omega \\ u, u_x, u_t \ \text{ conhecidas sobre } \ \gamma \end{array} \right. . \tag{3.19}$$

Introduz uma notação, para tornar mais simples o texto. Assim, representando por m, p, q

as seguintes funções definidas sobre γ:

$$\left| \begin{array}{rcl} m(s) & = & u(x,t) \ \text{ com } \ (x,t) \in \gamma \\ p(s) & = & u_x(x,t) \ \text{ com } \ (x,t) \in \gamma \\ q(s) & = & u_t(x,t) \ \text{ com } \ (x,t) \in \gamma \end{array} \right. . \tag{3.20}$$

Considere u uma solução do problema de Cauchy (3.19). São conhecidas sobre γ as funções u, u_x e u_t, consequentemente, $m(s)$, $p(s)$, $q(s)$ e $F(\varphi(s), \psi(s), m(s), p(s), q(s))$. Essas funções dependem de s, isso quer dizer que x e t dependem de s. Derivando p e q em relação a s, tem-se

$$\frac{dp}{ds} = u_{xx}\frac{dx}{ds} + u_{xt}\frac{dt}{ds} \tag{3.21}$$

e

$$\frac{dq}{ds} = u_{xt}\frac{dx}{ds} + u_{tt}\frac{dt}{ds} \tag{3.22}$$

Assim, as derivadas segundas u_{xx}, u_{xt} e u_{tt} são determinadas, sobre γ, por meio do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{ds}u_{xx}(x,t) + \frac{dt}{ds}u_{xt}(x,t) + 0\,u_{tt}(x,t) & = & \frac{dp}{ds} \\ 0\,u_{xx}(x,t) + \frac{dx}{ds}u_{xt}(x,t) + \frac{dt}{ds}u_{tt}(x,t) & = & \frac{dq}{ds} \\ A(x,t)\,u_{xx}(x,t) + B(x,t)\,u_{xt}(x,t) + C(x,t)\,u_{tt}(x,t) & = & F \end{array} \right. . \tag{3.23}$$

Observe, uma vez mais, que (3.23) está sendo considerado sobre a curva γ, isto é, para $x = \varphi(s)$ e $t = \psi(s)$. Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dt}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dt}{ds} \\ A(x,t) & B(x,t) & C(x,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx}(x,t) \\ u_{xt}(x,t) \\ u_{tt}(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dp}{ds} \\ \frac{dq}{ds} \\ F \end{bmatrix} . \tag{3.24}$$

A matriz ampliada do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dt}{ds} & 0 & \dfrac{dp}{ds} \\ \\ 0 & \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dt}{ds} & \dfrac{dq}{ds} \\ \\ A(x,t) & B(x,t) & C(x,t) & F \\ \\ \end{bmatrix} = 0, \tag{3.25}$$

onde o determinante da matriz dos coeficientes é

$$\delta \;=\; C(x,t)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - B(x,t)\left(\frac{dt}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right) + A(x,t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \;. \tag{3.26}$$

Do estudo de sistema de equações lineares, conclui-se:

- Se $\delta \neq 0$ o sistema linear (3.23) é determinado e sua solução $u_{xx}(x,t)$, $u_{xt}(x,t)$, $u_{tt}(x,t)$, sobre γ, é obtida por meio da regra de Cramer (MEDEIROS; FERREL; BIAZUTTI, 1999).
- Quando $\delta = 0$ o sistema (3.23) é indeterminado ou impossível.

Definição 3.6 (Curvas Características) **i)** *Denomina-se curva característica para a equação $Lu = F$, a curva γ sobre a qual $\delta = 0$, isto é,*

$$C(x,t)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - B(x,t)\left(\frac{dt}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right) + A(x,t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \;=\; 0 \;. \tag{3.27}$$

ii) *As curvas γ tais que $\delta \neq 0$ denominam-se não características.*

A seguir serão apresentados alguns resultados que permitem o cálculo das curvas características de $Lu = F$ ou de L.

Teorema 3.2 *Se*

i) *Se $A(x,t) \neq 0$ sobre γ, as curvas características de L são as soluções da equação diferencial ordinária:*

$$A(x,t)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - B(x,t)\left(\frac{dt}{dx}\right) + C(x,t) \;=\; 0 \;. \tag{3.28}$$

ii) *Se $C(x,t) \neq 0$ sobre γ, as curvas características de L são as soluções da equação diferencial ordinária:*

$$C(x,t)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - B(x,t)\left(\frac{dx}{dt}\right) + A(x,t) \quad = \quad 0 \ . \tag{3.29}$$

iii) *Se $A(x,t) = C(x,t) = 0$ sobre γ, as curvas características de L são as retas $x =$ constante , $t =$ constante , isto é, a dupla família de retas paralelas aos eixos coordenados.*

Demonstração:

i) *Temos por hipótese que γ é uma curva característica para a equação $Lu = F$ onde $A(x,t) = A(\varphi(s), \psi(s)) \neq 0$ em uma vizinhança de s_0.*

Afirma-se que $dx/ds(s) \neq 0$ em uma vizinhança de s_0.

Suponha por absurdo que $dx/ds(s) = 0$ em uma vizinhança de s_0. Obtém-se da equação (3.27) que

$$\begin{aligned} C(x,t)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - B(x,t)\left(\frac{dt}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right) + A(x,t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 &= 0 \\ C(x,t)\,(0)^2 - B(x,t)\,(0)\left(\frac{dx}{ds}\right) + A(x,t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 &= 0 \\ \underbrace{A(x,t)}_{\neq 0}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 &= 0 \\ \frac{dt}{ds} &= 0 \end{aligned} \ , \tag{3.30}$$

ou seja, $(dt/ds)(s) = 0$ na vizinhança de s_0, o que é uma contradição, visto que $(dx/ds)^2 + (dx/ds)^2 > 0$ em γ para $0 \leq s \leq 1$.

Concluímos que $(dt/ds)(s) \neq 0$ em todo ponto s onde γ é definida.

Sendo $x = \varphi(s)$ e $t = \psi(s)$ tem-se que o coeficiente angular da reta tangente a γ é dado por

$$\frac{dt}{dx} \quad = \quad \frac{\frac{dt}{ds}}{\frac{dx}{ds}} \ , \tag{3.31}$$

e como $dx/ds \neq 0$ deduz-se que γ não possui tangente vertical em cada um dos seus pontos. Resulta daí, que γ é definida por uma função $t = f(x)$ e suas equações paramétricas podem ser escritas sob a forma

$$\gamma \ : \ x = s \ \text{ e } \ t = f(s) \ , \tag{3.32}$$

isto é, φ é a identidade e ψ é igual a f, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} x=\varphi(s)=s & \Rightarrow & \dfrac{dx}{ds}=\dfrac{d\varphi}{ds}=1 \\ t=\psi(s)=f(s) & \Rightarrow & \dfrac{dt}{ds}=\dfrac{d\psi}{ds}=\dfrac{dt}{dx} \end{array}, \tag{3.33}$$

e ao substituir na equação (3.27), tem-se

$$\begin{array}{rcl} C(x,t)\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2-B(x,t)\left(\dfrac{dt}{ds}\right)\left(\dfrac{dx}{ds}\right)+A(x,t)\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2 & = & 0 \\ C(x,t)\,(1)^2-B(x,t)\,(1)\left(\dfrac{dx}{ds}\right)+A(x,t)\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2 & = & 0 \\ A(x,t)\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2-B(x,t)\,(1)\left(\dfrac{dx}{ds}\right)+C(x,t) & = & 0 \end{array}, \tag{3.34}$$

ii) *Semelhante ao caso i.*

iii) *Se $A(x,t)=C(x,t)=0$ sobre γ temos da equação (3.27) que*

$$\begin{array}{rcl} C(x,t)\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2-B(x,t)\left(\dfrac{dt}{ds}\right)\left(\dfrac{dx}{ds}\right)+A(x,t)\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2 & = & 0 \\ 0\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2-B(x,t)\left(\dfrac{dt}{ds}\right)\left(\dfrac{dx}{ds}\right)+0\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2 & = & 0 \\ B(x,t)\left(\dfrac{dt}{ds}\right)\left(\dfrac{dx}{ds}\right) & = & 0 \end{array}. \tag{3.35}$$

Devemos ter $B(x,t)\neq 0$ pois se não for, o operador L será nulo, o que não pode ocorrer. Daí

$$\begin{array}{c} \left(\dfrac{dt}{ds}\right)\left(\dfrac{dx}{ds}\right) = 0 \\ \left(\dfrac{dt}{ds}\right)=0 \quad ou \quad \left(\dfrac{dx}{ds}\right)=0 \\ t(s)=\text{ constante} \quad ou \quad x(s)=\text{ constante} \end{array}. \tag{3.36}$$

Exemplo 3.2 *Obtenha as curvas características dos seguintes operadores:*

1. $Lu=u_{tt}-u_{xx}$.

2. $Lu=u_{xx}+u_{tt}$.

3. $Lu=u_{xx}$.

Demonstração:

1. $Lu = u_{tt} - u_{xx}$;

   Temos

$$A(x,t) = 1 \neq 0 \quad , \quad B(x,t) = 0 \quad e \quad C(x,t) = 1 \ . \tag{3.37}$$

   Substituindo na equação

$$\begin{array}{rrcl} & A(x,t)\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 - B(x,t)\dfrac{dt}{dx} + C(x,t) & = & 0 \\ \Rightarrow & -1\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 - 0\dfrac{dt}{dx} + 1 & = & 0 \\ \Rightarrow & -1\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 - 0\dfrac{dt}{dx} + 1 & = & 0 \\ \Rightarrow & \left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 & = & 1 \\ \Rightarrow & \dfrac{dt}{dx} & = & \pm 1 \\ \Rightarrow & t & = & \pm x + k \end{array} \ . \tag{3.38}$$

   Obtém-se duas familias de curvas características reais

$$t(x) = x + k \quad ou \quad t(x) = -x + k \ . \tag{3.39}$$

2. $Lu = u_{xx} + u_{tt}$.

   Temos

$$A(x,t) = 1 \neq 0 \quad , \quad B(x,t) = 0 \quad e \quad C(x,t) = 1 \ . \tag{3.40}$$

   Substituindo na equação

$$\begin{array}{rrcl} & A(x,t)\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 - B(x,t)\dfrac{dt}{dx} + C(x,t) & = & 0 \\ \Rightarrow & 1\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 - 0\dfrac{dt}{dx} + 1 & = & 0 \\ \Rightarrow & \left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 & = & -1 \\ \Rightarrow & \dfrac{dt}{dx} & = & \pm i \\ \Rightarrow & t(x) & = & \pm ix + k \end{array} \ , \tag{3.41}$$

   logo L não possui famílias de curvas características reais.

3. $Lu = u_{xx}$.

Temos

$$A(x,t) = 1 \neq 0 \quad , \quad B(x,t) = 0 \quad e \quad C(x,t) = 0 \ . \tag{3.42}$$

Substituindo na equação

$$\begin{array}{rrcl} & A(x,t)\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 - B(x,t)\dfrac{dt}{dx} + C(x,t) & = & 0 \\ \Rightarrow & 1\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 - 0\dfrac{dt}{dx} + 0 & = & 0 \\ \Rightarrow & \left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 & = & 0 \\ \Rightarrow & \dfrac{dt}{dx} & = & 0 \\ \Rightarrow & t(x) & = & k \end{array} \ . \tag{3.43}$$

logo L possui uma única família de curvas características reais.

Observação 3.2 *Do exemplo (3.2) observa-se o seguinte:*

1. $Lu = u_{tt} - u_{xx} = F$, *possui duas famílias de curvas características reais;*

2. $Lu = u_{xx} + u_{tt} = F$, *não possui famílias de curvas características reais;*

3. $Lu = u_{xx} = F$, *possui uma única família de curvas características reais.*

Por meio de convergentes mudanças de variáveis demonstra-se que a equação $Lu = F$, transforma-se em $Lu = (s)$ sendo L um dos operadores da observação (3.2), razão porque eles são denominados formas canônicas do operador de segundo a ordem no plano $\mathbb{R}^2$.

Definição 3.7 *Considere a equação*

$$A(x,t)u_{xx}(x,t) + B(x,t)u_{xt}(x,t) + C(x,t)u_{tt}(x,t) \quad = \quad F(x,t,u,u_x,u_t) \ . \tag{3.44}$$

Diz-se que ela é:

i) *Hiperbólica em* Ω, *quando* $B^2(x,t) - 4A(x,t)C(x,t) > 0$ *em* Ω.

ii) *Parabólica em* Ω, *quando* $B^2(x,t) - 4A(x,t)C(x,t) = 0$ *em* Ω.

iii) *Elítica em* Ω, *quando* $B^2(x,t) - 4A(x,t)C(x,t) < 0$ *em* Ω.

Observação 3.3 *Note-se que sendo Lu o operador da equação (3.4) diz-se também que ele é hiperbólico, parabólico ou elítico como no caso da equação.*

Exemplo 3.3 *Aplique a definição 3.7 as equações da observação 3.2.*

1. $Lu = u_{tt} - u_{xx} = F$;

   Temos

$$A(x,t) = -1 \quad , \quad B(x,t) = 0 \quad e \quad C(x,t) = 1 \ . \tag{3.45}$$

   Daí

$$B^2(x,t) - 4A(x,t)C(x,t) \quad = \quad 0 - 4(-1)(1) = 4 > 0 \ . \tag{3.46}$$

   Logo o operador é hiperbólico em $\Omega = \mathbb{R}^2$.

2. $Lu = u_{xx} + u_{tt} = F$

   Temos

$$A(x,t) = 1 \quad , \quad B(x,t) = 0 \quad e \quad C(x,t) = 1 \ . \tag{3.47}$$

   Daí

$$B^2(x,t) - 4A(x,t)C(x,t) \quad = \quad 0 - 4(1)(1) = -4 < 0 \ . \tag{3.48}$$

   Logo o operador é elítico em $\Omega = \mathbb{R}^2$.

3. $Lu = u_{xx} = F$. *Temos*

$$A(x,t) = 1 \quad , \quad B(x,t) = 0 \quad e \quad C(x,t) = 0 \ . \tag{3.49}$$

   Daí

$$B^2(x,t) - 4A(x,t)C(x,t) \quad = \quad 0 - 4(1)(0) = 0 \ . \tag{3.50}$$

   Logo o operador é parabólico em $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Observação 3.4 *Da definição (3.7) e da observação (3.3), conclui-se que no caso hiperbólico há duas famílias distintas de características; no caso parabólico uma única e no caso elítico não há características reais (MEDEIROS; FERREL; BIAZUTTI, 1999).*

Para obter as invariantes de Riemann, calcula-se o determinante obtido da matriz ampliada,

$$det \left(\begin{bmatrix} \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dp}{ds} & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{dq}{ds} & \dfrac{dt}{ds} \\ \\ A(x,t) & F & C(x,t) \end{bmatrix} \right) = 0, \tag{3.51}$$

o que fornece

$$C(x,t)\left(\frac{dq}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right) + A(x,t)\left(\frac{dt}{ds}\right)\left(\frac{dp}{ds}\right) - F\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right) = 0 \ . \tag{3.52}$$

Se $dt/ds \neq 0$ ao longo da curva, obtém-se

$$C(x,t)\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dq}{ds}\right) + A(x,t)\left(\frac{dp}{ds}\right) - F\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0 \ . \tag{3.53}$$

Para equações hiperbólicas obtém-se pelo Teorema (3.2) dois valores distintos para dx/dt. Assim a equação (3.53) dá origem a duas equações a partir das quais obtêm-se dp/ds e dq/ds, o que pode ser aproximado por diferenças finitas para obter p e q.

Por meio de convenientes mudanças de variáveis demonstra-se que a equação $Lu = F$, transforma-se em $\overline{L}u = G$ sendo $\overline{L}$ um dos operadores da observação 3.2, razão porque eles são denominados formas canônicas do operador de segunda ordem no plano $\mathbb{R}^2$.

Para redução de $Lu = F$ às formas canônicas da observação 3.2, inicia-se com uma mudança de coordenadas. De fato, considera

$$\xi \quad = \quad \varphi(x,t) \quad \Rightarrow \quad \xi_x = \varphi_x \quad \text{e} \quad \xi_t = \varphi_t \tag{3.54}$$

e

$$\eta \quad = \quad \psi(x,t) \quad \Rightarrow \quad \eta_x = \psi_x \quad \text{e} \quad \eta_t = \psi_t \ , \tag{3.55}$$

onde φ e ψ de classe $C^1\Omega$ com Jacobiano não nulo, isto é,

$$J(\xi,\eta) \quad = \quad \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_t \\ \psi_x & \psi_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} \neq 0 \ . \tag{3.56}$$

Precisa-se encontrar u, u_x, u_t,u_{xt}, u_{xx} e u_{tt} em função das novas coordenadas. Têm-se pela regra da cadeia que

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x \tag{3.57}$$

e

$$u_t = u_\xi \cdot \xi_t + u_\eta \cdot \eta_t \ . \tag{3.58}$$

Da mesma maneira que encontrou (3.57) e (3.58), têm-se

$$(u_\xi)_x = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x \ , \tag{3.59}$$

$$(u_\eta)_x = u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x \ , \tag{3.60}$$

$$(u_\xi)_t = u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t \tag{3.61}$$

e

$$(u_\eta)_t = u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t \ . \tag{3.62}$$

Derivando as equações (3.57) e (3.58) em relação a x e t e substituindo as equações (3.60), (3.59), (3.62) e (3.61) respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& u_{xx} = (u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x)_x \\
\Rightarrow\ & u_{xx} = (u_\xi \cdot \xi_x)_x + (u_\eta \cdot \eta_x)_x \\
\Rightarrow\ & u_{xx} = (u_\xi)_x \cdot \xi_x + u_\xi \cdot (\xi_x)_x + (u_\eta)_x \cdot \eta_x + u_\eta \cdot (\eta_x)_x \quad , \\
\Rightarrow\ & u_{xx} = \left(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x\right)\xi_x + u_\xi \xi_{xx} + \left(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\right)\eta_x + u_\eta \eta_{xx} \\
\Rightarrow\ & u_{xx} = u_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta}\eta_x\xi_x + u_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
& u_{xt} = (u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x)_t \\
\Rightarrow\ & u_{xt} = (u_\xi \cdot \xi_x)_t + (u_\eta \cdot \eta_x)_t \\
\Rightarrow\ & u_{xt} = (u_\xi)_t \cdot \xi_x + u_\xi \cdot (\xi_x)_t + (u_\eta)_t \cdot \eta_x + u_\eta \cdot (\eta_x)_t \\
\Rightarrow\ & u_{xt} = \left(u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t\right)\xi_x + u_\xi \xi_{xt} + \left(u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t\right)\eta_t + u_\eta \eta_{xt} \\
\Rightarrow\ & u_{xt} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t\xi_x + u_\xi \xi_{xt} + u_{\eta\xi}\xi_t\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_t + u_\eta \eta_{xt}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

e

$$\begin{aligned} u_{tt} &= (u_\xi \cdot \xi_t + u_\eta \cdot \eta_t)_t \\ \Rightarrow\ u_{tt} &= (u_\xi \cdot \xi_t)_t + (u_\eta \cdot \eta_t)_t \\ \Rightarrow\ u_{tt} &= (u_\xi)_t \cdot \xi_t + u_\xi \cdot (\xi_t)_t + (u_\eta)_t \cdot \eta_t + u_\eta \cdot (\eta_t)_t \\ \Rightarrow\ u_{tt} &= \left(u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t\right)\xi_t + u_\xi \xi_{tt} + \left(u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t\right)\eta_t + u_\eta \eta_{tt} \\ \Rightarrow\ u_{tt} &= u_{\xi\xi}(\xi_t)^2 + 2u_{\xi\eta}\eta_t\xi_t + u_{\eta\eta}(\eta_t)^2 + u_\xi\xi_{tt} + u_\eta\eta_{tt} \end{aligned} \quad , \qquad (3.65)$$

Substituindo (3.63), (3.64) e (3.65) em (3.1), encontra-se

$$\begin{aligned} Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} &= F(x,t,u,u_x,u_t) \\ \Rightarrow\quad A\left(u_{\xi\xi}(\xi_t)^2 + 2u_{\xi\eta}\eta_t\xi_t + u_{\eta\eta}(\eta_t)^2 + u_\xi\xi_{tt} + u_\eta\eta_{tt}\right) & \\ +B\left(u_{\xi\xi}\xi_x\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t\xi_x + u_\xi\xi_{xt} + u_{\eta\xi}\xi_t\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_t + u_\eta\eta_{xt}\right) & \\ +C\left(u_{\xi\xi}(\xi_t)^2 + 2u_{\xi\eta}\eta_t\xi_t + u_{\eta\eta}(\eta_t)^2 + u_\xi\xi_{tt} + u_\eta\eta_{tt}\right) &= F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \\ \Rightarrow\quad u_{\xi\xi}\left(A(\xi_x)^2 + B\xi_x\xi_t + C(\eta_t)^2\right) & \\ u_{\xi\eta}\left(2A\eta_x\xi_x + B(\eta_t\xi_x + \xi_t\eta_x) + 2C\eta_t\xi_t\right) & \\ u_{\eta\eta}\left(A(\eta_x)^2 + B\eta_x\eta_t + C(\eta_t)^2\right) &= G(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \end{aligned} \qquad (3.66)$$

Tem-se

$$\bar{A}u_{\xi\xi} + \bar{B}u_{\xi\eta} + \bar{C}u_{\eta\eta} = G(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \ , \qquad (3.67)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A(\xi_x)^2 + B\xi_x\xi_t + C(\eta_t)^2 \\ \bar{B} &= 2A\eta_x\xi_x + B(\eta_t\xi_x + \xi_t\eta_x) + 2C\eta_t\xi_t \\ \bar{C} &= A(\eta_x)^2 + B\eta_x\eta_t + C(\eta_t)^2 \end{aligned} \ . \qquad (3.68)$$

Seja $\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C}$ o discriminante da equação 3.67. Mostra-se que o sinal de $B^2 - 4AC$ é igual ao sinal de $\bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C}$. De fato,

$$\begin{aligned} & \bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C} \\ =\ & [2A\eta_x\xi_x + B(\eta_t\xi_x + \xi_t\eta_x) + 2C\eta_t\xi_t]^2 \\ & -4\left[A(\xi_x)^2 + B\xi_x\xi_t + C(\eta_t)^2\right]\left[A(\eta_x)^2 + B\eta_x\eta_t + C(\eta_t)^2\right] \\ =\ & B^2\left[\xi_x^2\eta_t^2 - 2\xi_x\xi_t\eta_x\eta_t + \xi_t^2\eta_x^2\right] \\ & -4AC\left[\xi_x^2\eta_t^2 - 2\eta_x\eta_t\xi_x\xi_t + \eta_t^2\eta_x^2\right] \\ =\ & B^2[\xi_x\eta_t - \xi_t\eta_x]^2 - 4AC[\xi_x\eta_t - \xi_t\eta_x]^2 \\ =\ & \left(B^2 - 4AC\right)[\xi_x\eta_t - \xi_t\eta_x]^2 \end{aligned} \quad , \qquad (3.69)$$

então

$$\overline{B}^2 - 4\overline{A}\overline{C} = \left(B^2 - 4AC\right)[\xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x]^2 \ . \tag{3.70}$$

Como $[\xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x]^2 > 0$ tem-se que o sinal de $\overline{B}^2 - 4\overline{A}\overline{C}$ é igual ao sinal de $B^2 - 4AC$. Provando que a equação $\overline{L}u = \overline{G}$, que veio da mudança de coordenadas de $Lu = F$, é do mesmo tipo que $Lu = F$ nas coordenadas x e t, ou seja, a classificação de uma EDP (quase linear de segunda ordem com duas variáveis independentes) em elítica, parabólica ou hiperbólica é invariante sob mudanças de coordenadas locais.

Formas Canônicas de uma EDP Quase Linear de Segunda Ordem

Se a EDP

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} = F(x,t,u,u_x,u_t) \ , \tag{3.71}$$

é quase linear em um aberto Ω do $\mathbb{R}^2$, pode-se achar uma mudança de variável que a coloque em uma forma particularmente simples, chamada forma canônica de uma equação elítica dada por

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

e de uma equação parabólica

$$u_{\eta\eta} = G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

e uma equação hiperbólica tem duas formas canônicas

$$u_{\xi\eta} = G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

e

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA VIA MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

4.1 EQUAÇÃO DA ONDA EM UMA DIMENSÃO

Serão apresentados alguns métodos para encontrar as inclinações das curvas características, as invariantes de Riemann e a solução analítica da equação da onda em uma dimensão.

4.1.1 Solução Analítica Usando Mudança de Variável baseado no Método das Características

Será encontrado as inclinações das curvas características e as invariantes de Riemann da equação da onda em uma dimensão, como feito anteriormente, encontra-se também a solução analítica da equação baseado no método das características. Para isso, considere

$$-c_0^2 u_{xx} + 1 u_{tt} \quad = \quad 0 \ , \tag{4.1}$$

onde $u \ : \ \Omega \subset \mathbb{R}^{1+1} \ \rightarrow \ \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2(\Omega)$ e $c_0 = \sqrt{gh_0} > 0$. Ao observar a equação da onda, obtém-se $A(x,t) = -c_0^2 \neq 0$, $B(x,t) = 0$, $C(x,t) = 1$ e $D(x,t) = 0$. Calculando o discriminante

$$B^2 - 4AC \quad = \quad 0^2 - 4(-c_0^2)(1) = 4c_0^2 > 0 \ , \tag{4.2}$$

conclui-se que a equação da onda é uma EDP hiperbólica, portanto, pelo Teorema (3.2) e da equação (3.28) conclui-se que a EDP possui duas inclinações reais de curvas características dadas por

$$\begin{array}{rrcl} & A(x,t)\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 - B(x,t)\left(\dfrac{dt}{dx}\right) + C(x,t) & = & 0 \\ \Rightarrow & -c_0^2\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 - 0\left(\dfrac{dt}{dx}\right) + 1 & = & 0 \\ \Rightarrow & \left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 & = & \dfrac{1}{c_0^2} \\ \Rightarrow & \dfrac{dx}{dt} & = & \pm c_0 \end{array} . \tag{4.3}$$

Calculando a integral em relação a variável independente t, tem-se

$$x = \pm c_0 t + \text{ cte} \quad , \tag{4.4}$$

de onde, obtém-se as equações

$$x \mp c_0 t = \text{ cte} \quad , \tag{4.5}$$

que representam as curvas características.

Isolando a variável dependente t, obtêm-se

$$\begin{aligned} x - c_0 t &= \text{ cte} \\ \Rightarrow \quad x - \text{ cte} &= c_0 t \\ \Rightarrow \quad c_0 t &= x - \text{ cte} \\ \Rightarrow \quad t &= \frac{x}{c_0} - \frac{\text{cte}}{c_0} (\text{ função crescente, visto que, } c_0 > 0). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x + c_0 t &= \text{ cte} \\ \Rightarrow \quad c_0 t &= -x + \text{ cte} \\ \Rightarrow \quad t &= -\frac{x}{c_0} + \frac{\text{cte}}{c_0} (\text{ função decrescente, visto que, } c_0 > 0). \end{aligned}$$

Representando graficamente, tem-se

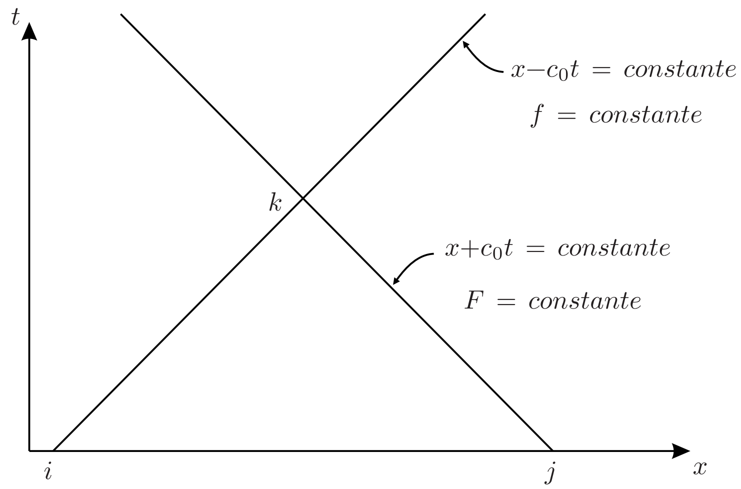

Figura 4.1: Curvas Características para equação da onda

Fonte:(ABBOTT, 1966)

As equações das curvas características são de extrema importância não só para obter a solução numérica como também para obter a solução analítica pois, mediante a mudança de variável

$$\xi \;=\; x + c_0 t \;\Rightarrow\; \xi_x = 1 \quad \text{e} \quad \xi_t = c_0 \tag{4.6}$$

e

$$\eta \;=\; x - c_0 t \;\Rightarrow\; \eta_x = 1 \quad \text{e} \quad \eta_t = -c_0 \ , \tag{4.7}$$

obtém-se a equação da onda na primeira forma canônica. Para isso, deve-se ter

$$J \;=\; \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c_0 \\ 1 & -c_0 \end{vmatrix} = -2c_0 \neq 0 \ . \tag{4.8}$$

Agora, substituindo na equação (4.1), as derivadas em relação as variáveis independentes x e t, pelas derivadas em relação as variáveis independentes ξ e η, ou seja, objetiva-se encontrar u_{tt} e u_{xx}. Têm-se pela regra da cadeia que

$$u_x \;=\; u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x \;\Rightarrow\; u_x \;=\; u_\xi \cdot (1) + u_\eta \cdot (1) \tag{4.9}$$

e

$$u_t \;=\; u_\xi \cdot \xi_t + u_\eta \cdot \eta_t \;\Rightarrow\; u_t \;=\; u_\xi \cdot (c) + u_\eta \cdot (-c) \ . \tag{4.10}$$

Da mesma maneira que encontrou (4.9) e (4.10), têm-se

$$\begin{aligned} (u_\xi)_x &= u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x \\ (u_\eta)_x &= u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x \end{aligned} \ , \tag{4.11}$$

e

$$\begin{aligned} (u_\xi)_t &= u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t \\ (u_\eta)_t &= u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t \end{aligned} \ . \tag{4.12}$$

Derivando as equações (4.9) e (4.10) em relação a x e t e substituindo as equação (4.11) e (4.12) respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} & u_{xx} = (u_\xi)_x + (u_\eta)_x \\ \Rightarrow\; & u_{xx} = (u_\xi)_x + (u_\eta)_x \\ \Rightarrow\; & u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x \\ \Rightarrow\; & u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot 1 + u_{\xi\eta} \cdot 1 + u_{\eta\xi} \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot 1 \\ \Rightarrow\; & u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{aligned} \tag{4.13}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} & u_{tt} & = & (u_\xi)_t \cdot (c_0) + (u_\eta)_t \cdot (-c_0) \\ \Rightarrow & u_{tt} & = & c_0(u_\xi)_t - c_0(u_\eta)_t \\ \Rightarrow & u_{tt} & = & c_0(u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t) - c_0(u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t) \\ \Rightarrow & u_{tt} & = & c_0(u_{\xi\xi} \cdot c_0 + u_{\xi\eta} \cdot (-c_0)) - c_0(u_{\eta\xi} \cdot c_0 + u_{\eta\eta} \cdot (-c_0)) \\ \Rightarrow & u_{tt} & = & c_0^2 u_{\xi\xi} - 2c_0^2 u_{\xi\eta} + c_0^2 u_{\eta\eta} \end{array} \tag{4.14}$$

Substituindo (4.13) e (4.14) em (4.1), encontra-se

$$\begin{array}{rrcl} & -c_0^2 u_{xx} + u_{tt} & = & 0 \\ \Rightarrow & -c_0^2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + c_0^2 u_{\xi\xi} - 2c_0^2 u_{\xi\eta} + c_0^2 u_{\eta\eta} & = & 0 \\ \Rightarrow & -4c_0^2 u_{\xi\eta} & = & 0 \\ \Rightarrow & u_{\xi\eta} & = & 0 \end{array} , \tag{4.15}$$

a equação da onda na Primeira Forma Canônica.

Para resolver a EDP (4.15) basta calcular a integral direta em relação a η e depois ξ,

$$\begin{array}{rrcl} & u_{\xi\eta} & = & 0 \\ \Rightarrow & \int u_{\xi\eta} d\eta & = & \int 0 d\eta \\ \Rightarrow & u_\xi & = & 0 + \theta(\xi) \\ \Rightarrow & \int u_\xi d\xi & = & \int \theta(\xi) d\xi \\ \Rightarrow & u(\xi,\eta) & = & \Theta(\xi) + \Psi(\eta) \end{array} \tag{4.16}$$

Substituindo as equações (4.6) e (4.7) em (4.16), ou ainda, retornando as variáveis independentes x e t, obtém-se

$$u(x,t) = \Theta(x + c_0 t) + \Psi(x - c_0 t) , \tag{4.17}$$

onde Θ e Ψ são funções arbitrárias de classe $C^2(\Omega)$ e $C^1(\Omega)$, respectivamente. A equação (4.17) representa a solução da equação (4.1).

Observação 4.1 *Se φ e ψ forem funções definidas na reta de classe $C^2(\mathbb{R})$ e $C^1(\mathbb{R})$, respectivamente. O problema de Cauchy para a equação da onda consiste em determinar uma função $u = u(x,t)$, tal que*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt}(x,t) - c_0^2 u_{xx}(x,t) & = & 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad -\infty < t < \infty. \\ u(x,0) & = & \varphi \\ u_t(x,0) & = & \psi \end{array} \right. \tag{4.18}$$

As funções φ e ψ são chamadas as condições iniciais em $t = 0$ para o problema (4.18).

Mostra-se que a solução do problema de Cauchy (4.18) é

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+c_0t)+\varphi(x-c_0t)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy \tag{4.19}$$

que é conhecida como a Fórmula de D'Alembert.

Considerando-se, por exemplo, $\varphi = \sin x$ e $\psi = \cos x$, e aplicando-se na fórmula de D'Alembert (4.19), têm-se que uma solução para o problema de cauchy é

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\sin(x+c_0t)+\sin(x-c_0t)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos(y)dy \\ \Rightarrow \quad u(x,t) &= \frac{\sin(x+c_0t)+\sin(x-c_0t)}{2} + \frac{1}{2c}\left[\sin(x+ct)-\sin(x-ct)\right] \qquad (4.20) \\ \Rightarrow \quad u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{c}\right)\sin(x+c_0t) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{c}\right)\sin(x-c_0t) \end{aligned}$$

4.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DE CAUCHY

Deseja-se obter a solução analítica do Problema de Cauchy

$$\left| \begin{array}{lll} u_{xx}+u_{xt}-2u_{tt} = -1 & \text{em} & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = x & \text{em} & 0 \leq x \leq 1, t = 0. \end{array} \right. . \tag{4.21}$$

4.2.1 Solução da EDP

Inicialmente encontra-se as curvas características. Tem-se

$$u_{xx}+u_{xt}-2u_{tt} = -1 \tag{4.22}$$

onde

$$A(x,t) = 1 \neq 0 \quad , \quad B(x,t) = 1 \quad \text{e} \quad C(x,t) = -2 \ . \tag{4.23}$$

Substituindo na equação

$$\begin{array}{rrcl} & A(x,t)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - B(x,t)\frac{dt}{dx} + C(x,t) & = & 0 \\ \Rightarrow & 1\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - 1\frac{dt}{dx} - 2 & = & 0 \\ \Rightarrow & \frac{dt}{dx} & = & \frac{1 \pm 3}{2} \\ \Rightarrow & \frac{dt}{dx} = 2 & \text{e} & \frac{dt}{dx} = -1 \end{array} . \tag{4.24}$$

Obtém-se duas curvas características

$$t(x) - 2x = k_1 \quad \text{e} \quad t(x) + x = k_2 \ . \tag{4.25}$$

As equações das curvas características são de extrema importância para obter a solução analítica pois, mediante a mudança de variável

$$\xi \ = \ t - 2x \ \Rightarrow \ \xi_x = -2 \quad \text{e} \quad \xi_t = 1 \tag{4.26}$$

e

$$\eta \ = \ t + x \ \Rightarrow \ \eta_x = 1 \quad \text{e} \quad \eta_t = 1 \ , \tag{4.27}$$

obtém-se a equação da onda na primeira forma canônica. Para isso, deve-se ter

$$J \ = \ \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ . \tag{4.28}$$

Agora, substituindo na equação (4.22), as derivadas em relação as variáveis independentes x e t, pelas derivadas em relação as variáveis independentes ξ e η, ou seja, objetiva-se encontrar u_{tt}, u_{xt} e u_{xx}. Têm-se pela regra da cadeia que

$$u_x \ = \ u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x \ \Rightarrow \ u_x \ = \ u_\xi \cdot (-2) + u_\eta \cdot (1) \tag{4.29}$$

e

$$u_t \ = \ u_\xi \cdot \xi_t + u_\eta \cdot \eta_t \ \Rightarrow \ u_t \ = \ u_\xi \cdot (1) + u_\eta \cdot (1) \ . \tag{4.30}$$

Da mesma maneira que encontrou (4.29) e (4.30), têm-se

$$\begin{array}{rcl} (u_\xi)_x & = & u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x \\ (u_\eta)_x & = & u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x \end{array} , \tag{4.31}$$

e

$$\begin{array}{rcl} (u_\xi)_t & = & u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t \\ (u_\eta)_t & = & u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t \end{array}. \tag{4.32}$$

Derivando as equações (4.29) e (4.30) em relação a x e t e substituindo as equação (4.31) e (4.32) respectivamente, obtém-se:

$$\begin{array}{rrcl} & u_{xx} & = & -2\cdot(u_\xi)_x + (u_\eta)_x \\ \Rightarrow & u_{xx} & = & -2\cdot(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x \\ \Rightarrow & u_{xx} & = & -2\cdot(u_{\xi\xi}\cdot(-2) + u_{\xi\eta}\cdot 1) + u_{\eta\xi}\cdot(-2) + u_{\eta\eta}\cdot 1 \\ \Rightarrow & u_{xx} & = & 4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{array}, \tag{4.33}$$

$$\begin{array}{rrcl} & u_{xt} & = & -2\cdot(u_\xi)_t + (u_\eta)_t \\ \Rightarrow & u_{xt} & = & -2\cdot(u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t) + u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t \\ \Rightarrow & u_{xt} & = & -2\cdot(u_{\xi\xi}\cdot(1) + u_{\xi\eta}\cdot 1) + u_{\eta\xi}\cdot(1) + u_{\eta\eta}\cdot 1 \\ \Rightarrow & u_{xt} & = & -2u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{array} \tag{4.34}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} & u_{tt} & = & (u_\xi)_t\cdot(1) + (u_\eta)_t\cdot(1) \\ \Rightarrow & u_{tt} & = & u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t + u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t \\ \Rightarrow & u_{tt} & = & u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{array} \tag{4.35}$$

Substituindo (4.33), (4.34) e (4.35) em (4.22), encontra-se

$$\begin{array}{rrcl} & u_{xx} + u_{xt} - 2u_{tt} & = & -1 \\ \Rightarrow & 4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - 2u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} & = & 0 \\ \Rightarrow & u_{\xi\eta} & = & \dfrac{1}{9} \end{array}, \tag{4.36}$$

a equação na Primeira Forma Canônica.

Para resolver a EDP (4.36) basta calcular a integral direta em relação a η e depois ξ,

$$\begin{array}{rrcl} & u_{\xi\eta} & = & \dfrac{1}{9} \\ \Rightarrow & \displaystyle\int u_{\xi\eta}d\eta & = & \int \frac{1}{9}d\eta \\ \Rightarrow & u_\xi & = & \frac{1}{9}\eta + \theta(\xi) \\ \Rightarrow & \displaystyle\int u_\xi d\xi & = & \displaystyle\int \frac{1}{9}\eta d\xi + \int \theta(\xi)d\xi \\ \Rightarrow & u(\xi,\eta) & = & \dfrac{1}{9}\eta\xi + \Theta(\xi) + \Psi(\eta) \end{array}, \tag{4.37}$$

onde $\Theta(\xi) = \int \theta(\xi)d\xi$.

Substituindo as equações (4.26) e (4.27) em (4.37), ou ainda, retornando as variáveis independentes x e t, obtém-se

$$u(x,t) = \frac{1}{9}(t-2x)(t+x) + \Theta(t-2x) + \Psi(t+x) \ , \tag{4.38}$$

onde Θ e Ψ são funções arbitrárias de classe $C^2(\Omega)$ e $C^1(\Omega)$, respectivamente.

4.2.2 Condição Inicial

Tem-se

$$u(x,0) = u_t(x,0) = x \quad \text{em} \quad t = 0\,,\, 0 \le x \le 1 \ . \tag{4.39}$$

e

$$u_x(x,0) = 1 \quad \text{em} \quad t = 0\,,\, 0 \le x \le 1 \ . \tag{4.40}$$

Observe que

$$u_x(x,t) = -2u_\xi(\xi,\eta) + u_\eta(\xi,\eta) \tag{4.41}$$

e

$$u_t(x,t) = u_\xi(\xi,\eta) + u_\eta(\xi,\eta) \tag{4.42}$$

Como $\xi = t-2x$ e $\eta = t+x$ obtém-se para $t=0$, $\xi = -2x$ e $\eta = x$ então

$$\xi = -2\eta \ . \tag{4.43}$$

De (4.39),(4.40),(4.41),(4.42) e (4.43), tem-se

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2u_\xi(\xi,\eta) + u_\eta(\xi,\eta) & = & u_x(x,0) = 1 \\ u_\xi(\xi,\eta) + u_\eta(\xi,\eta) & = & u_t(x,0) = -\dfrac{\xi}{2} \end{array} \right. \tag{4.44}$$

ou ainda,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_\xi + u_\eta & = & -\dfrac{\xi}{2} \\ -2u_\xi + u_\eta & = & 1 \end{array} \right. . \tag{4.45}$$

De (4.37) tem-se

$$u(\xi,\eta) \;=\; \frac{1}{9}\eta\xi + \Theta(\xi) + \Psi(\eta) \ , \tag{4.46}$$

daí

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad u_{\xi}(\xi,\eta) &= 1/9\eta + \Theta'(\xi) \\ \Rightarrow \quad u_{\xi}(\xi,\eta) &= 1/9\eta + \theta(\xi) \end{aligned} \ , \tag{4.47}$$

e

$$\Rightarrow \quad u_{\eta}(\xi,\eta) \;=\; \frac{1}{9}\xi + \Psi'(\eta) \ . \tag{4.48}$$

Substituindo (4.47) e (4.48) em (4.45), obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{9}\eta + \phi(\xi) + \frac{1}{9}\xi + \Psi'(\eta) = -\frac{\xi}{2} \\ -2(\frac{1}{9}\eta + \phi(\xi)) + \frac{1}{9}\xi + \Psi' = 1 \end{array} \right. . \tag{4.49}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} \phi(\xi) + \Psi'(\eta) = -\frac{\xi}{2} - \frac{1}{9}\xi - \frac{1}{9}\eta \\ -2\phi(\xi) + \Psi'(\eta) = 1 - \frac{1}{9}\xi + \frac{2}{9}\eta \end{array} \right. . \tag{4.50}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} \phi + \Psi'(\eta) = -\frac{11}{18}\xi - \frac{1}{9}\eta \\ -2\phi(\xi) + \Psi'(\eta) = 1 - \frac{1}{9}\xi + \frac{2}{9}\eta \end{array} \right. . \tag{4.51}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} \phi(\xi) + \Psi'(\eta) = -\frac{11}{18}\xi - \frac{1}{9}\eta \\ 3\Psi'(\eta) = 1 - \frac{1}{9}\xi + \frac{2}{9}\eta - \frac{22}{18}\xi - \frac{2}{9}\xi \end{array} \right. . \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3\Psi'(\eta) &= 1 - \frac{24}{18}\xi \\ \Rightarrow 3\Psi'(\eta) &= 1 - \frac{24}{18}(-2\eta) \\ \Rightarrow 3\Psi'(\eta) &= 1 + \frac{24}{9}\eta \end{aligned} \tag{4.53}$$

Portanto,

$$\Psi'(\eta) = \frac{1}{3} + \frac{8}{9}\eta \tag{4.54}$$

e daí

$$\Psi(\eta) = \frac{1}{3}\eta + \frac{4}{9}\eta^2 \ . \tag{4.55}$$

Como

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= -\frac{11}{18}\xi - \frac{1}{9}\eta - \Psi'(\eta) \\ \Rightarrow \phi(\xi) &= \frac{11}{18}\xi - \frac{1}{9}\eta - \frac{1}{3} - \frac{8}{9}\eta \\ \Rightarrow \phi(\xi) &= \frac{1}{3} - \frac{11}{18}\xi - \eta \\ \Rightarrow \phi(\xi) &= \frac{1}{3} - \frac{11}{18}\xi + \frac{\xi}{2}\frac{9}{9} \\ \Rightarrow \phi(\xi) &= -\frac{1}{3} - \frac{2}{18}\eta \end{aligned} \tag{4.56}$$

Também

$$\theta(\xi) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\xi \Rightarrow \Theta(\xi) = -\frac{1}{3}\xi - \frac{1}{9}\frac{\xi^2}{2} \ , \tag{4.57}$$

o que implica em

$$\Theta(\xi) = -\frac{1}{3}\xi - \frac{1}{18}\xi^2 \ . \tag{4.58}$$

Substituindo (4.55) e (4.58) em (4.46), obtém-se

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{9}\eta\xi - \frac{1}{3}\xi - \frac{1}{18}\xi^2 + \frac{1}{3}\eta + \frac{4}{9}\eta^2 \ . \tag{4.59}$$

Substituindo $\xi = t - 2x$ e $\eta = t + x$ em (4.59), tem-se

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{9}(t+x)(t-2x) - \frac{1}{3}(t-2x) - \frac{1}{18}(t-2x)^2 + \frac{1}{3}(t+x) + \frac{4}{9}(t+x)^2 \\ &= \tfrac{1}{9}(t^2 - 2xt + xt - 2x^2) - \frac{t}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{18}(t^2 - 4xt + 4x^2) + \frac{t}{3} + \frac{x}{3} + \frac{4}{9}(t^2 + 2xt + x^2) \\ &= \frac{t^2}{9} - \frac{t^2}{18} + \frac{4t^2}{9} - \frac{xt}{9} + \frac{4xt}{18} + \frac{8xt}{9} - \frac{2x^2}{9} - \frac{4}{18}x^2 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{t}{3} + \frac{t}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} \\ &= \frac{9t^2}{18} + \frac{18xt}{18} + \frac{3x}{3} \\ &= \frac{t^2}{2} + xt + x \end{aligned} \tag{4.60}$$

que corresponde a solução analítica do Problema de Cauchy.

4.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE CAUCHY

Deseja-se obter a solução numérica do Problema de Cauchy

$$\left|\begin{array}{lll} u_{xx}+u_{xt}-2u_{tt}=-1 & \text{em} & 0<x<1,\, t>0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=x & \text{em} & 0\leq x\leq 1,\, t=0. \end{array}\right. . \tag{4.61}$$

Use o método das características para calcular a solução nos pontos R, S e T. As coordenadas nos pontos iniciais P, Q e W são $(0.4,0)$, $(0.5,0)$ e $(0.6,0)$, respectivamente.

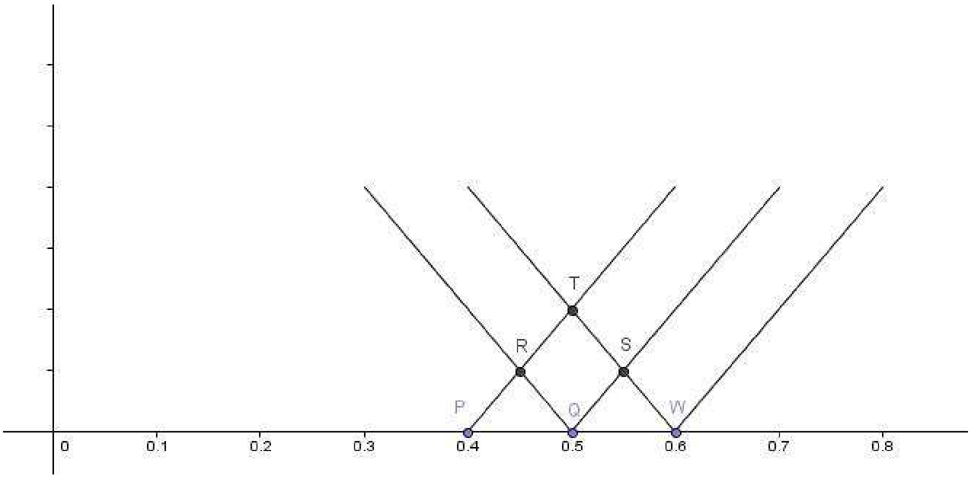

Figura 4.2: Diagrama de Pontos

4.3.1 Inclinações das Curvas Características

Inicialmente encontra-se as inclinações das curvas características. Tem-se

$$u_{xx}+u_{xt}-2u_{tt} \quad = \quad -1 \tag{4.62}$$

onde

$$A(x,t)=1\neq 0 \quad , \quad B(x,t)=1 \quad \text{e} \quad C(x,t)=-2 \ . \tag{4.63}$$

Substituindo na equação

$$\begin{aligned} A(x,t)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - B(x,t)\frac{dt}{dx} + C(x,t) &= 0 \\ \Rightarrow \quad 1\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - 1\frac{dt}{dx} - 2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} &= \frac{1\pm 3}{2} \\ \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = 2 \quad \text{e} \quad & \frac{dt}{dx} = -1 \end{aligned} \quad . \tag{4.64}$$

Obtém-se as inclinações das curvas características

$$\frac{dt}{dx} = 2 = f \quad \text{e} \quad \frac{dt}{dx} = -1 = g \ . \tag{4.65}$$

Calculando as integrais

$$\begin{aligned} \int_{x_P}^{x_R} \frac{dt}{dx}dx = \int_{x_P}^{x_R} 2dx \quad &\text{e} \quad \int_{x_Q}^{x_R} \frac{dt}{dx}dx = \int_{x_Q}^{x_R} -1dx \\ t(x)\int_{x_R}^{x_P} = 2x\int_{x_R}^{x_P} \quad &\text{e} \quad t(x)\int_{x_R}^{x_Q} = -1(x_R - x_Q) \\ \Rightarrow t(x_R) - t(x_P) = 2(x_R - x_P) \quad &\text{e} \quad t(x_R) - t(x_Q) = -x_R + x_Q \\ \Rightarrow t_R - t_P = 2(x_R - x_P) \quad &\text{e} \quad t_R - t_Q = -x_R + x_Q \\ \Rightarrow t_R - 0 = 2(x_R - 0,4) \quad &\text{e} \quad t_R - 0 = -x_R + 0,5 \\ \Rightarrow t_R - 2x_R = -0.8 \quad &\text{e} \quad t_R + x_R = 0.5 \end{aligned} \quad . \tag{4.66}$$

Ao resolver o sistema obtém-se

$$\begin{cases} t_R - 2x_R = -0,8 \\ t_R + 1x_R = 0,5(-1) \end{cases} \quad . \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned} t_R - 2x_R &= -0,8 \\ -t_R - 1x_R &= -0,5 \\ -3x_R &= -1,3 \\ x_R &= \frac{13}{30} \end{aligned} \quad \leftarrow \tag{4.68}$$

$$
\begin{aligned}
t_R &= 0,5 - x_R \\
t_R &= \frac{5}{10} - \frac{13}{30} \\
\Rightarrow t_R &= \frac{15-13}{30} \\
\Rightarrow t_R &= \frac{2}{30}
\end{aligned} \tag{4.69}
$$

$$
(x_R, t_R) = \left(\frac{13}{30}, \frac{2}{30}\right) . \tag{4.70}
$$

Analogamente, ao calcular as integrais

$$
\begin{aligned}
&\int_{0.5}^{x_S} \frac{dt}{dx} dx = \int_{0.5}^{x_S} 2dx \quad \text{e} \quad \int_{0.6}^{x_S} \frac{dt}{dx} dx = \int_{0.6}^{x_S} -1dx \\
\Rightarrow \quad & t_S - 2x_S = -1 \quad \text{e} \quad t_S + x_S = 0.5
\end{aligned} . \tag{4.71}
$$

Ao resolver o sistema obtém-se

$$
(x_S, t_S) = \left(\frac{16}{30}, \frac{2}{30}\right) . \tag{4.72}
$$

Novamente, ao calcular as integrais

$$
\begin{aligned}
&\int_{x_R}^{x_T} \frac{dt}{dx} dx = \int_{x_R}^{x_T} 2dx \quad \text{e} \quad \int_{x_S}^{x_T} \frac{dt}{dx} dx = \int_{x_S}^{x_T} -1dx \\
\Rightarrow \quad & t_T - 2x_T = t_R - 2x_R \quad \text{e} \quad t_T + x_T = t_S + x_S
\end{aligned} . \tag{4.73}
$$

Ao resolver o sistema obtém-se

$$
(x_T, t_T) = \left(\frac{14}{30}, \frac{4}{30}\right) . \tag{4.74}
$$

4.3.2 Invariantes de Rieamann

Tem-se

$$
C(x,t)\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dq}{ds}\right) + A(x,t)\left(\frac{dp}{ds}\right) - F\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0 , \tag{4.75}
$$

onde

$$
A(x,t) = 1 \neq 0 \quad , \quad B(x,t) = 1 \quad , \quad C(x,t) = -2 \quad \text{e} \quad F = -1 . \tag{4.76}
$$

Obtém-se as Invariantes:

1. Invariante Positiva: Substituindo $dt/dx = 2$ na equação (4.75), tem-se:

$$\begin{aligned} -2\left(\frac{1}{2}\frac{dq}{ds}\right)+1\left(\frac{dp}{ds}\right)-\left((-1)\frac{dx}{ds}\right)=0 \\ -\left(\frac{dq}{ds}\right)+\left(\frac{dp}{ds}\right)+\left(\frac{dx}{ds}\right) &= 0 \end{aligned}. \tag{4.77}$$

2. Invariante Negativa: Substituindo $dt/dx = -1$ na equação (4.75), tem-se:

$$\begin{aligned} -2(-1)\left(\frac{dq}{ds}\right)+1\left(\frac{dp}{ds}\right)-\left((-1)\frac{dx}{ds}\right)=0 \\ 2\left(\frac{dq}{ds}\right)+\left(\frac{dp}{ds}\right)+\left(\frac{dx}{ds}\right) &= 0 \end{aligned}, \tag{4.78}$$

Os valores de p, q para P e Q são obtidos das condições iniciais:

1. $q(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x$ onde $0 \le x \le 1$.
2. $p(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x} = 1$ onde $0 \le x \le 1$.

Logo,

$q_P = q_P(x_P,0) = q_P(0.4,0) = 0.4;$

$q_Q = q_Q(x_Q,0) = q_P(0.5,0) = 0.5;$

$q_W = q_W(x_W,0) = q_W(0.6,0) = 0.6.$

e

$p_P = p_P(x_P,0) = p_P(0.4,0) = 1;$

$p_Q = p_Q(x_Q,0) = p_P(0.5,0) = 1;$

$p_W = p_W(x_W,0) = p_W(0.6,0) = 1.$

Trabalhando com as Invariantes de Riemann tem-se:

$\overline{PR}$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dq}{ds}\right)+\left(\frac{dp}{ds}\right)+\left(\frac{dx}{ds}\right) &= 0 \\ \Rightarrow\quad -(q_R-q_P)+(p_R-p_P)+(x_R-x_P) &= 0 \end{aligned}. \tag{4.79}$$

$\overline{QR}$

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{dq}{ds}\right)+\left(\frac{dp}{ds}\right)+\left(\frac{dx}{ds}\right) &= 0 \\ \Rightarrow\quad 2\left(q_R-q_Q\right)+\left(p_R-p_Q\right)+\left(x_R-x_Q\right) &= 0 \end{aligned} . \tag{4.80}$$

Obtém-se o sistema

$$\begin{cases} -q_R+p_R &= -q_P+p_P-x_R+x_P \\ -2q_R-p_R &= -2q_Q-p_Q+x_R-x_Q \end{cases} \tag{4.81}$$

Ao substituir os valores obtém-se

$$\left(q_R,p_R\right) = \left(\frac{15}{30},\frac{32}{30}\right) . \tag{4.82}$$

Analogamente,

$\overline{QS}$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dq}{ds}\right)+\left(\frac{dp}{ds}\right)+\left(\frac{dx}{ds}\right) &= 0 \\ \Rightarrow\quad -\left(q_S-q_Q\right)+\left(p_S-p_Q\right)+\left(x_S-x_Q\right) &= 0 \end{aligned} . \tag{4.83}$$

$\overline{WS}$

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{dq}{ds}\right)+\left(\frac{dp}{ds}\right)+\left(\frac{dx}{ds}\right) &= 0 \\ \Rightarrow\quad 2\left(q_S-q_W\right)+\left(p_S-p_W\right)+\left(x_S-x_W\right) &= 0 \end{aligned} . \tag{4.84}$$

Obtém-se o sistema

$$\begin{cases} -q_S+p_S &= -q_Q+p_Q-x_S+x_Q \\ -2q_S-p_S &= -2q_W-p_W+x_S-x_W \end{cases} \tag{4.85}$$

Ao substituir os valores obtém-se

$$\left(q_S,p_S\right) = \left(\frac{18}{30},\frac{32}{30}\right) . \tag{4.86}$$

Também,

$\overline{RT}$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dq}{ds}\right)+\left(\frac{dp}{ds}\right)+\left(\frac{dx}{ds}\right) &= 0 \\ \Rightarrow\quad -\left(q_T-q_R\right)+\left(p_T-p_R\right)+\left(x_T-x_R\right) &= 0 \end{aligned} . \tag{4.87}$$

$\overline{ST}$

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{dq}{ds}\right)+\left(\frac{dp}{ds}\right)+\left(\frac{dx}{ds}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \quad 2\left(q_T-q_S\right)+\left(p_T-p_S\right)+\left(x_T-x_S\right) &= 0 \end{aligned} \quad . \tag{4.88}$$

Obtém-se o sistema

$$\left\{ \begin{aligned} -q_T+p_T &= -q_R+p_R-x_T+x_R \\ -2q_T-p_T &= -2q_S-p_S+x_T-x_S \end{aligned} \right. \tag{4.89}$$

Ao substituir os valores obtém-se

$$\left(q_T\,,p_T\right) = \left(\frac{18}{30},\frac{34}{30}\right) \ . \tag{4.90}$$

Sabe-se que

$$u\left(x,0\right)=x \quad , \quad 0\leq x\leq 1 \ , \tag{4.91}$$

logo

- $u_P\left(0.4,0\right) = 0.4$,
- $u_Q\left(0.5,0\right) = 0.5$,
- $u_W\left(0.6,0\right) = 0.6$.

Deseja-se encontrar u_R, u_S e u_T. Sabe-se que

$$\begin{aligned} u_R &\cong u_P+\frac{1}{2}\Delta x(p_R+p_P)+\frac{1}{2}\Delta t(q_R+q_P) \\ \Rightarrow \quad u_R &\cong u_P+\frac{1}{2}(x_R-x_P)(p_R+p_P)+\frac{1}{2}(t_R-t_P)(q_R+q_P) \ , \\ \Rightarrow \quad u_R &\cong \frac{418}{900} \end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned} u_S &\cong u_W+\frac{1}{2}\Delta x(p_S+p_W)+\frac{1}{2}\Delta t(q_S+q_W) \\ \Rightarrow \quad u_S &\cong u_W+\frac{1}{2}(x_S-x_W)(p_S+p_W)+\frac{1}{2}(t_S-t_W)(q_S+q_W) \\ \Rightarrow \quad u_S &\cong \frac{514}{900} \end{aligned} \tag{4.93}$$

e

$$
\begin{aligned}
u_T &\cong u_R + \frac{1}{2}\Delta x(p_T + p_R) + \frac{1}{2}\Delta t(q_T + q_R) \\
\Rightarrow \quad u_T &\cong u_R + \frac{1}{2}(x_T - x_R)(p_T + p_R) + \frac{1}{2}(t_T - t_R)(q_T + q_R) \ . \\
\Rightarrow \quad u_T &\cong \frac{484}{900}
\end{aligned} \tag{4.94}
$$

A solução analítica é dada por

$$u(x,t) \quad = \quad \frac{t^2}{2} + xt + x \ . \tag{4.95}$$

Ao comparar a solução numérica com a analítica percebe-se as coincidências conforme demonstra a tabela abaixo.

	x	t	p	q	u	Valores de u
P	0,4	0	1	0,4	0,4	0,4
Q	0,5	0	1	0,5	0,5	0,5
W	0,6	0	1	0,6	0,6	0,6
R	13/30	2/30	32/30	15/30	418/900	418/900
S	16/30	2/30	32/30	18/30	514/900	514/900
T	14/30	4/30	34/30	18/30	484/900	484/900

Figura 4.3: Tabela Numérica Comparativa

5 CONCLUSÃO

O Estudo da Equação da Onda teve importância histórica entre os matemáticos, dando origem as Equações Diferencias Parcias apresentada como EDP, sendo que para sua demonstração utilizamos a Segunda Lei de Newton em um pequeno deslocamento vertical e chegando a Equação conhecida, neste trabalho também utilizou as EDP e apresentou a solução clássica a das Retas Parametrizadas, dando ênfase ao operador que pode gerar Equações Hiperbólicas, Parabólicas e Eliptícas.

Como motivação do estudo a Solução das Equações das Ondas através do Método das Características e as Invariantes de Riemann encontrando a Solução Analítica da Equação, e utilizando o mesmo método para encontrar a Solução Numérica da Equação, comparando os dois resultado observou que coincidem.

Importante destacar que o estudo foi idealizado nos casos de EDPs de Segunda Ordem e Sistema de Primeira Ordem Hiperbólico com até duas dimensões, os quais possuem duas famílias distintas de curvas características reais.

Conclui-se então que o estudo foi muito satisfatório já que conseguiu demonstrar os resultados obtidos na Solução Analítica da Equação coincidindo com a Solução Numérica, observando que este é um método pouco utilizado.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, M. B. **An Introduction to The Method of Characteristics**. 243 p: Thames and Hudson London, 1966.

MEDEIROS, L. A. J.; FERREL, J. L.; BIAZUTTI, A. C. **Métodos Clássicos em Equações Diferenciais Parciais**. 2. ed. Rio de Janeiro: UFRJ-IM, 1999. 163 p.