UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ROSANGELA CARLINE SCHEMMER

MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO POLINÔMIAL

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2013

ROSANGELA CARLINE SCHEMMER

MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO POLINÔMIAL

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Adilandri Mércio Lobeiro

CAMPO MOURÃO

2013

TERMO DE APROVAÇÃO

Rosangela Carline Schemmer

MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO POLINÔMIAL

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adilandri Mércio Lobeiro

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino

Prof. Msc. Magda Cardoso Mantovani

Campo Mourão, 2012

AGRADECIMENTOS

A Deus, o que seria de mim sem a fé que eu tenho nele. A meus pais Romeu e Bernardete pela educação, formação, ternura e pelo amor incondicional.

Ao meu irmão Bernardo Schemmer, ao meu namorado Tiago Pieniz e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chega se até esta etapa de minha vida.

Ao meu orientador, Adilandri Mércio Lobeiro pelo desafio assumido e pela orientação perpassada pelo enorme preocupação de tornar as ideias e discussões ao longo dessa trajetória em um trabalho verdadeiramente científico. A todas as pessoas que contribuíram e participaram da realização deste trabalho.

RESUMO

SCHEMMER, Rosangela. MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO POLINÔMIAL. 93 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

Neste trabalho apresentamos alguns métodos de interpolação polinomial dentre eles temos, Interpolação de Lagrange, Newton, Hermite, Inversa, Spline Linear, Spline Quadrático e Spline Cúbico a utilização destes métodos consiste em determinar um único polinômio de grau n que passa pelos $n+1$ pontos dados. Este polinômio então, fornece uma fórmula para se calcular valores intermediários.Sendo apresentados definições e aplicações de exercícios com o auxílio de programas computacionais como Visual Cálculo Numérico-VCN, Maple e Geogebra.

Palavras-chave: spline, interpolação, Visual Cálculo Numérico - VCN

ABSTRACT

SCHEMMER, Rosangela. Title in English. 93 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

We present some methods of polynomial interpolation among them have, interpolation Lagrange, Newton, Hermite, Reverse, Spline Linear, Quadratic and Cubic Spline Spline using these methods is to determine a single polynomial of degree n passing through $n+1$-point data.This polynomial then provides a formula to calculate values intermediários.Sendo presented definitions and applications with exercises aid of computer programs such as Visual Numerical-VCN, Maple and GeoGebra.

Keywords: spline interpolation, Visual Numerical Calculus - VCN

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A interpolação é uma técnica antiga e básica do cálculo numérico. Antes do advento da computação, a interpolação era largamente utilizada para o cálculo dos valores de funções transcendentes. Em geral possuímos só uma tabela com valores de tais funções par certo conjunto de argumentos e quando era necessário o cálculo de algum valor não tabelado, recorríamos à interpolação. Hoje a interpolação de função não é utilizada para estes fins, pois mesmo as calculadoras mais simples nos dão os valores dentro do domínio de definição de tais funções.

Entre tanto, a teoria da interpolação não perdeu sua importância por que é a base de vários algoritmos numéricos, entre os quais o da diferenciação, da quadratura, da integração de equações diferenciais e do cálculo das raízes de equações.

Atualmente a interpolação é muito utilizada para outros casos onde é realmente fácil calcular o valor da função ou ainda quando não conhecemos a expressão da função, mas possuímos um conjunto de valores que em geral são obtidos através de experimentos. Neste trabalho trataremos somente da interpolação com polinômios, isto é, do problema de aproximar uma função $f(x)$ por um polinômio $P_n(x)$ de grau menor ou igual a n, tal que $P_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$, onde os $(n+1)$ pontos $(x_k, f(x_k))$ são conhecidos. A aproximação de funções por polinômios é uma das idéias mais antigas da análise numérica, e ainda uma das mais usadas. É bastante fácil de entender por que razão isso acontece. Os polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são novamente polinômios, suas raízes podem ser encontradas com relativa facilidade. Portanto é vantajoso substituir uma função complicada por um polinômio que apresente. Alem disso temos o teorema de Weiertrass, que afirma "toda função continua pode ser arbitrariamente aproximada por um polinômio". A simplicidade dos polinômios permite que a aproximação polinomial seja obtida de vários modos, entre os quais podemos citar: interpolação, método dos mínimos quadrados osculação, mínimo-máximo. Veremos neste trabalho como aproximar uma função usando métodos de interpolação polinomial. Tais métodos são usados como uma aproximação para uma função $f(x)$, principalmente nas seguintes situações

a) não conhecemos a expressão analítica de $f(x)$, isto é sabemos apenas seus valores em alguns pontos $x_0, x_1, x_2, \cdots$ (está situação ocorre muito frequentemente na prática, quando se trabalha com dados experimentais) e necessitamos manipular $f(x)$, como por exemplo, calcular seu valor num ponto, sua integral num determinado intervalo.

b) $f(x)$ extremamente complicada e de difícil manejo. Então, às vezes é interessante sacrificar a precisão em benefício da simplificação dos cálculos.

2 INTERPOLAÇÃO LAGRANGE

Dados $n+1$ pontos distintos queremos determinar um polinômio interpolador de grau menor ou igual a n.

Teorema 2.1 *Seja (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, ..., n$, $n+1$ pontos distintos, isto é $x_i \neq x_j$. Existe um único polinômio $P(x)$ de grau menor ou igual a n, tal que $P(x_i) = y_i$, para todo i. O polinômio $P(x)$ pode ser descrito na forma:*

$$\begin{array}{rcl} P_n(x) & = & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n \\ \Rightarrow\; P_n(x) & = & \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \end{array} . \tag{2.0.1}$$

O polinômio $P(x)$ é no máximo, de grau n, se $a_n \neq 0$ e, para determiná-lo, deve se conhecer os valores de $a_o, a_1, ..., a_n$. Como $P_n(x)$ contém os pontos (x_i, y_i), onde $i = 0, 1, 2, 3, ..., n$ pode-se escrever que $P_n(x_i) = y_i$. Com isso temos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n & = & y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n & = & y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n & = & y_2 \\ & \vdots & \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n & = & y_n \end{array} \right. . \tag{2.0.2}$$

Resolvendo o sistema (2.0.2), determinamos o polinômio $P_n(x)$. Para provar que tal polinômio é único, basta que mostrar que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ . & ... & ..... & ... & ...... \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}, \tag{2.0.3}$$

dos coeficientes das incógnitas do sistema, é diferente de zero. Mas o determinante da matriz A *é conhecida como **Determinante de Vandermonde**, da Álgebra Linear, sabe se que seu valor é dado por:*

$$\det A = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \ . \tag{2.0.4}$$

Como $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$ vem que:

$$\det A \neq 0 \ . \tag{2.0.5}$$

Portanto, $P(x)$ é único.

2.1 FÓRMULA DE LAGRANGE

Seja $P_n(x)$ o polinômio de grau menor ou igual a n que interpola $f(x)$ em x_0, x_1, ..., x_n. Podemos representar o polimômio interpolador por

$$P_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) + \ldots + y_nL_n(x) \ , \tag{2.1.6}$$

onde os polinômios $L_k(x)$ são de grau n. Para cada i, queremos que $P_n(x_i) = y_i$, ou seja

$$P_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) + \ldots + y_nL_n(x) = y_i \ . \tag{2.1.7}$$

A forma mais simples de satisfazer esta condição é

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \neq i \\ 1 & \text{se} \quad k = i \end{cases} \ . \tag{2.1.8}$$

Para isso, definimos $L_k(x)$ por

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)(x_k-x_3)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} . \tag{2.1.9}$$

É fácil verificar que

$$\begin{cases} L_k(x_i) = 0 & \text{se} \quad k \neq i \\ L_k(x_k) = 1 & \text{se} \quad k = i \end{cases} . . \tag{2.1.10}$$

Como o numerador de $L_k(x)$ é um produto de n fatores da forma

$$(x - x_i) \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n \quad , \quad i \neq k \ , \tag{2.1.11}$$

então $L_k(x)$ é um polinômio de grau n e, assim ,$P_n(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a

n. Além disso, para $x = x_i$, tal que $i = 0, \ldots, n$ temos

$$P_n(x_i) \;=\; \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i) \;=\; y_i L_i \;=\; y_i \;. \tag{2.1.12}$$

Portanto, a fórmula de Lagrange para o polinômio interpolador é dado por

$$P_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x) \;, \tag{2.1.13}$$

onde

$$L_k(x) \;=\; \frac{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)} \;. \tag{2.1.14}$$

Exemplo 2.1 *Dados os pontos* $(x_0, f(x_0))$ *e* $(x_1, f(x_1))$ *use a fórmula de Lagrange para obter o polinômio interpolador. A interpolação por dois pontos é chamada Interpolação Linear.*

Solução: *Usando a fórmula de Lagrange, temos*

$$P_1(x) \;=\; y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) \;, \tag{2.1.15}$$

onde

$$L_0(x) \;=\; \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \tag{2.1.16}$$

e

$$L_1(x) \;=\; \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \;. \tag{2.1.17}$$

Substituindo na equação (2.1.15), obtemos

$$P_1(x) \;=\; y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \;, \tag{2.1.18}$$

ou ainda,

$$P_1(x) \;=\; \frac{y_0(x - x_1) + y_1(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \;. \tag{2.1.19}$$

que é exatamente a equação da reta que passa por $(x_0, f(x_0))$ *e* $(x_1, f(x_1))$.

Exemplo 2.2 *Dada a função* $f(x_i) = \operatorname{sen}(x_i)$. *Determine o valor aproximado para* $f(\pi/2)$ *a partir da interpolação de Lagrange no intervalo* $[1, 2]$, *observando a Tabela 2.2*

Tabela 1:

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	0,8415
1	2	0,9093

Fonte: Autoria própria.

Solução: *Pela forma de Lagrange, temos*

$$P_1(x) = y_0L_0(x)+y_1L_1(x), \tag{2.1.20}$$

onde

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} = \frac{(x-2)}{(1-2)} = -x+2 \tag{2.1.21}$$

e

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} = \frac{(x-1)}{(2-1)} = x-1\ . \tag{2.1.22}$$

Substituindo (2.1.21) e (2.1.22) no polinômio de Lagrange dado pela equação (2.1.20), obtemos

$$\begin{array}{rcl} P_1(x) & = & y_0L_0(x)+y_1L_1(x) \\ \Rightarrow\ P_1(x) & = & 0,8415(-x+2)+0,9093(x-1) \\ \Rightarrow\ P_1(x) & = & -0,8415x+1,683+0,9093x-0,9093 \\ \Rightarrow\ P_1(x) & = & 0,0678x+0,7743 \end{array}. \tag{2.1.23}$$

Para calcular o valor aproximado de $f(\pi/2)$ *iremos substituir* $x=\pi/2$ *em* $P_1(x)$. *Temos*

$$\begin{array}{rcl} P_1(x) & = & 0,0678x+0,7743 \\ \Rightarrow\ P_1(\pi/2) & = & 0,0678(\pi/2)+0,7743\ . \\ \Rightarrow\ P_1(\pi/2) & = & 0,881 \end{array} \tag{2.1.24}$$

Concluímos que $P_1(\pi/2)=0,881$.

Utilizando o aplicativo VCN podemos encontrar o valor no ponto $(\pi/2)$ *e o polinômio interpolador de grau um, onde o programa calcula pela fórmula de Lagrange.*

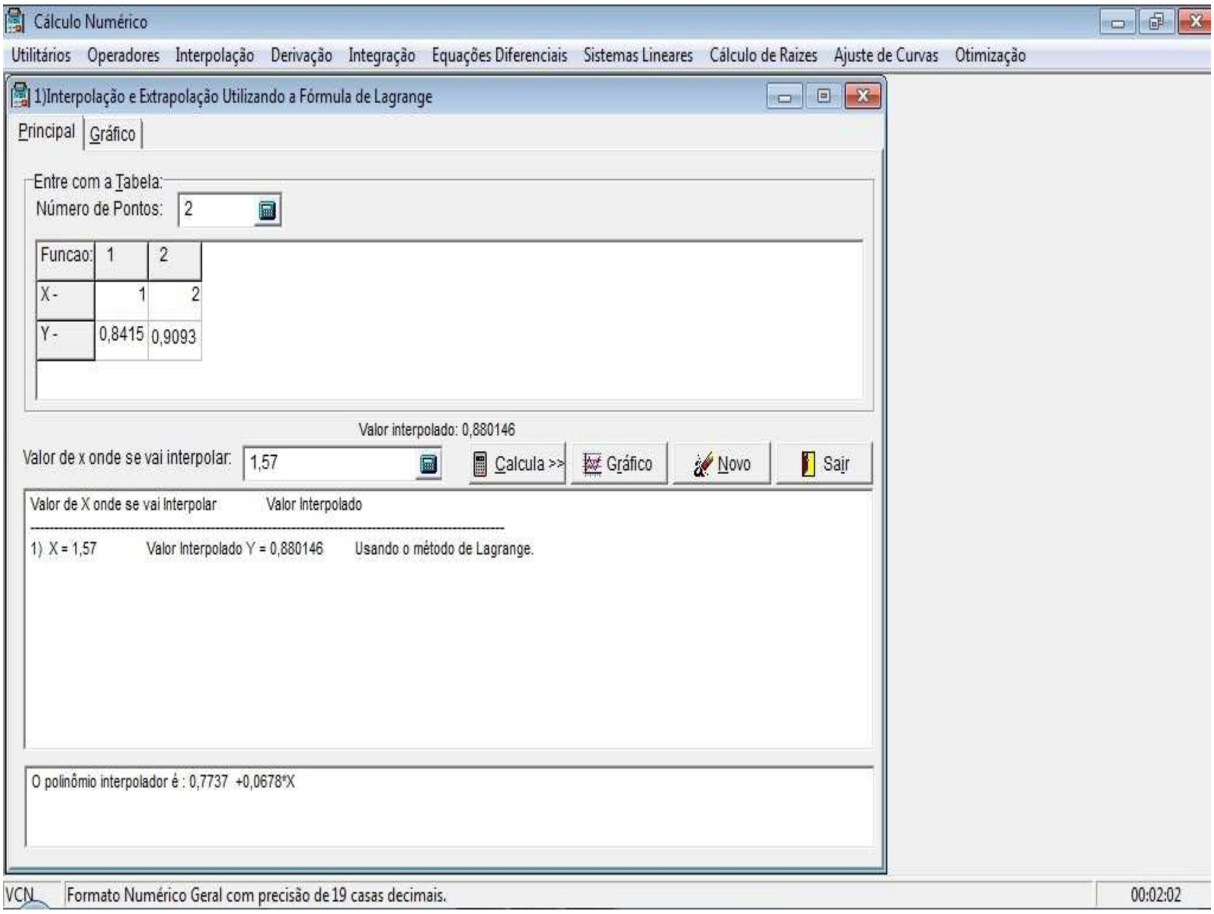


Figura 1: Aplicativo VCN utilizando a fórmula de Lagrange

Fonte: Autoria própria.

Exemplo 2.3 *Sabendo o alongamento de uma mola em* (mm) *em função da carga* $P(kgf)$ *que sobre ela atua, dado por*

Tabela 2:

x_i	10	15	20	25	30	35
P	105	172	253	352	473	619

Fonte: Autoria própria.

Use a interpolação por meio de polinômios de segundo grau, encontrando as cargas que produzem os seguintes alongamentos na mola:

a) $22mm$

b) $18mm$

Solução: *Temos pela fórmula de Lagrange*

$$P_2(x) \quad = \quad y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_2L_2(x).\ . \tag{2.1.25}$$

Como queremos avaliar em $x = 22$ mm usando polinômio de interpolação de segundo grau, devemos escolher três pontos consecutivos na vizinhança de $x = 22$. Assim, temos duas opções $x_0 = 15$, $x_1 = 20$ e $x_2 = 25$, ou então $x_0 = 20$, $x_1 = 25$ e $x_2 = 30$. Em ambos os casos, o erro na aproximação será da mesma ordem de grandeza. Seja então $x_0 = 15$, $x_1 = 20$ e $x_2 = 25$. Podemos agora construir os polinômios $L_k(x)$ com $k = 0,1,2$. Assim

$$L_0(x) \quad = \quad \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad = \quad \frac{(x-20)(x-25)}{(15-20)(15-25)} \quad = \quad \frac{x^2-45+500}{50}\ , \tag{2.1.26}$$

$$L_1(x) \quad = \quad \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad = \quad \frac{(x-15)(x-25)}{(20-15)(20-25)} \quad = \quad \frac{x^2-40x+275}{-25}\ , \tag{2.1.27}$$

$$L_2(x) \quad = \quad \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad = \quad \frac{(x-15)(x-20)}{(25-15)(25-20)} \quad = \quad \frac{x^2-35x+300}{50}\ . \tag{2.1.28}$$

Portanto,

$$P_2(x) \quad = \quad y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_2L_2(x),\ . \tag{2.1.29}$$

Substituindo os polinômios $L_k(x)$ calculados

$$P_2(x) \quad = \quad (172)\frac{x^2-45x+500}{50}+(253)\frac{x^2-40x+275}{-25}+(352)\frac{x^2-35x+300}{50}\ , \tag{2.1.30}$$

ou ainda,

$$P_2(x) \quad = \quad 0,36x^2+3,6x+37\ . \tag{2.1.31}$$

Para calcular o valor da carga peso precisamos calcular o valor de $P(x)$ em $x = 22$. Temos

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 0,36x^2+3,6x+37 \\ \Rightarrow\ P_2(22) &= 0,36(22)^2+3,6(22)+37\ . \\ \Rightarrow\ P_2(22) &= 290,44 \end{aligned} \tag{2.1.32}$$

Para calcular o valor da carga peso precisamos substituir o valor de $x = 18$ no mesmo *polinômio, pois* $18 \in (15,20)$, *então*

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 0,36x^2+3,6x+37 \\ \Rightarrow P_2(18) &= 0,36(18)^2+3,6(18)+37 \\ \Rightarrow P_2(18) &= 218,44 \end{aligned} \quad . \tag{2.1.33}$$

Utilizando o aplicativo VCN podemos encontrar o valor nos pontos $x = 22$ *e* $x = 18$*, aplicando o polinômio interpolador do segundo grau, onde o programa calcula pela fórmula de Lagrange:*

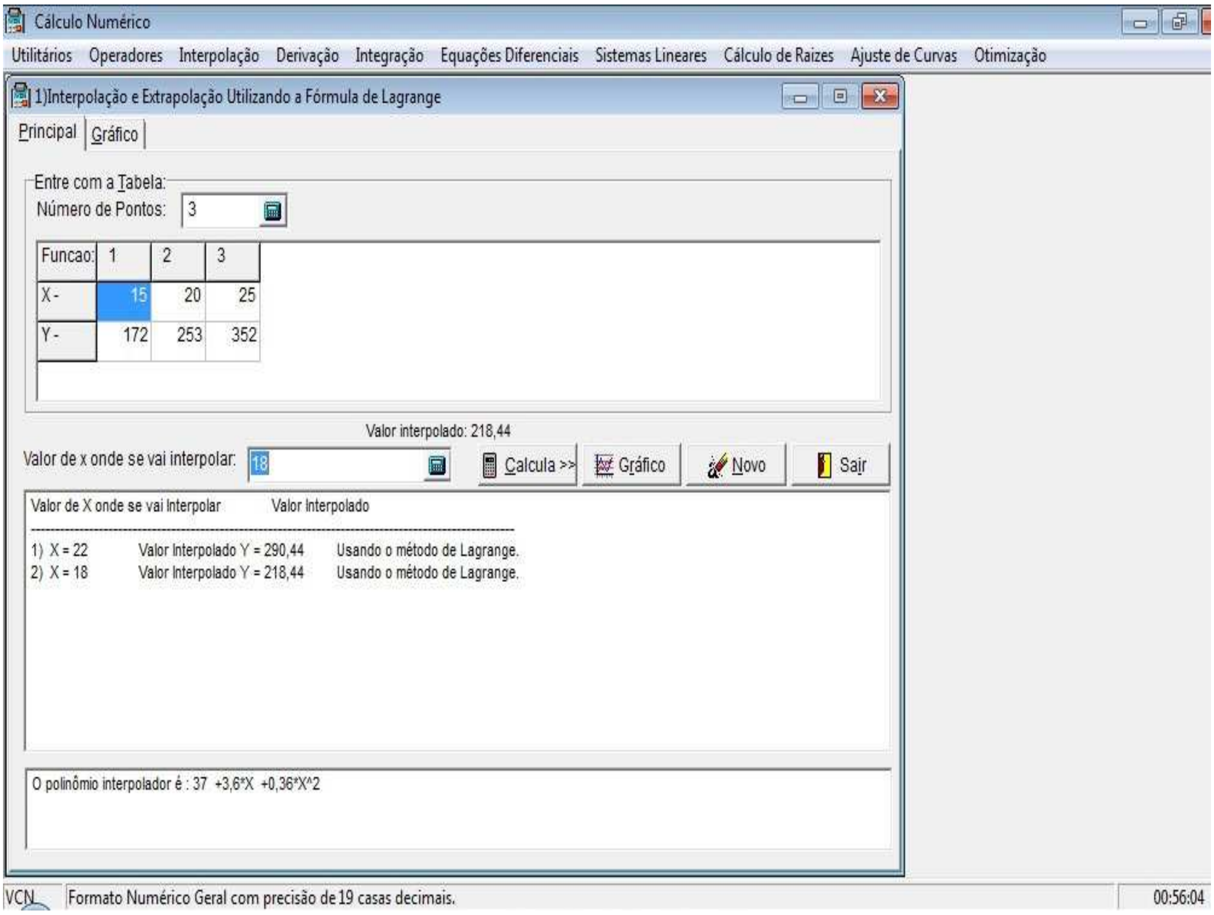


Figura 2: Polinômio interpolador do 2º grau

Fonte: Autoria Própria

Exemplo 2.4 *A resistência de um certo fio de metal,* $f(x)$*, varia com o diâmetro desse fio,* x*. Foram medidas as resistências de cinco fios de diversos diâmetros, conforme Tabela 3.*

Figura 3: Fio de metal

Fonte:

Tabela 3: Exemplo diâmetros x resistências:

x_i	1,5	2,0	2,2	3,0	3,8
$f(x_i)$	4,9	3,3	3,0	2,0	1,75

Fonte: Autoria própria.

Use o método de Lagrange para estimar a resistência de um fio de diâmetro $1,75$*, utilizando todos os pontos.*

Solução: *Utilizando todos os pontos teremos um polinômio da forma*

$$P_4(x) = y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_2L_2(x)+y_3L_3(x)+y_4L_4(x) \ . \tag{2.1.34}$$

Podemos agora construir os polinômios $L_k(x)$*, onde* $k=0,1,2,3,4$*. Assim*

k=0

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \\ &= \frac{(x-2,0)(x-2,2)(x-3,0)(x-3,8)}{(1,5-2,0)(1,5-2,2)(1,5-3,0)(1,5-3,8)} \ , \\ &= \frac{x^4-11x^3+44,36x^2-77,8x+50,16}{1,2075} \end{aligned} \tag{2.1.35}$$

k=1

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \\ &= \frac{(x-1,5)(x-2,2)(x-3,0)(x-3,8)}{(2,0-1,5)(2,0-2,2)(2,0-3,0)(2,0-3,8)} \ , \qquad (2.1.36) \\ &= \frac{x^4-10,5x^3+39,86x^2-64,62x+37,62}{-0,18} \end{aligned}$$

k=2

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\ &= \frac{(x-1,5)(x-2,0)(x-3,0)(x-3,8)}{(2,2-1,5)(2,2-2,0)(2,2-3,0)(2,2-3,8)} \ , \qquad (2.1.37) \\ &= \frac{x^4-10,3x^3+38,2x^2-60,3x+34,2}{0,1792} \end{aligned}$$

k=3

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \\ &= \frac{(x-1,5)(x-2,0)(x-2,2)(x-3,8)}{(3,0-1,5)(3,0-2,0)(3,0-2,2)(3,0-3,8)} \ , \qquad (2.1.38) \\ &= \frac{x^4-9,5x^3+32,36x^2-47,26x+25,08}{-0,96} \end{aligned}$$

k=4

$$\begin{aligned} L_4(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \\ &= \frac{(x-1,5)(x-2,0)(x-2,2)(x-3,0)}{(3,8-1,5)(3,8-2,0)(3,8-2,2)(3,8-3,0)} \ . \qquad (2.1.39) \\ &= \frac{x^4-8,7x^3+27,8x^2-38,7x+19,8}{5,2992} \end{aligned}$$

Substituindo os valores y_k e $L_k(x)$ na fórmula do polinômio

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_2L_2(x)+y_3L_3(x)+y_4L_4(x) \\
&= (4,9)\left(\frac{x^4-11x^3+44,36x^2-77,8x+50,16}{1,2075}\right) \\
&\quad +(3,3)\left(\frac{x^4-10,5x^3+39,86x^2-64,62x+37,62}{-0,18}\right) \\
&\quad +(3,0)\left(\frac{x^4-10,3x^3+38,2x^2-60,3x+34,2}{0,1792}\right) \\
&\quad +(2,0)\left(\frac{x^4-9,5x^3+32,36x^2-47,26x+25,08}{-0,96}\right) \\
&\quad +(1,75)\left(\frac{x^4-8,7x^3+27,8x^2-38,7x+19,8}{5,2992}\right) .
\end{aligned} \tag{2.1.40}$$

ou ainda,

$$P_4(x) = 40,681-54,819x+30,518x^2-7,6521x^3+0,71261x^4 . \tag{2.1.41}$$

Para obter a resistência do fio, precisamos substituir $x = 1,75$ no polinômio encontrado.

$$\begin{aligned}
P_4(1,75) &= 40,681-54,819(1,75)+30,518(1,75)^2-7,6521(1,75)^3+0,71261(1,75)^4 \\
P_4(1,75) &= 3,8823
\end{aligned} \tag{2.1.42}$$

Portanto, o fio de diâmetro $1,75$ tem uma resistência de aproximadamente $3,8823$.

Utilizando o aplicativo VCN podemos encontrar o valor no ponto $(1,75)$, aplicando o polinômio interpolador do quarto grau, onde o programa calcula pela fórmula de Lagrange, temos

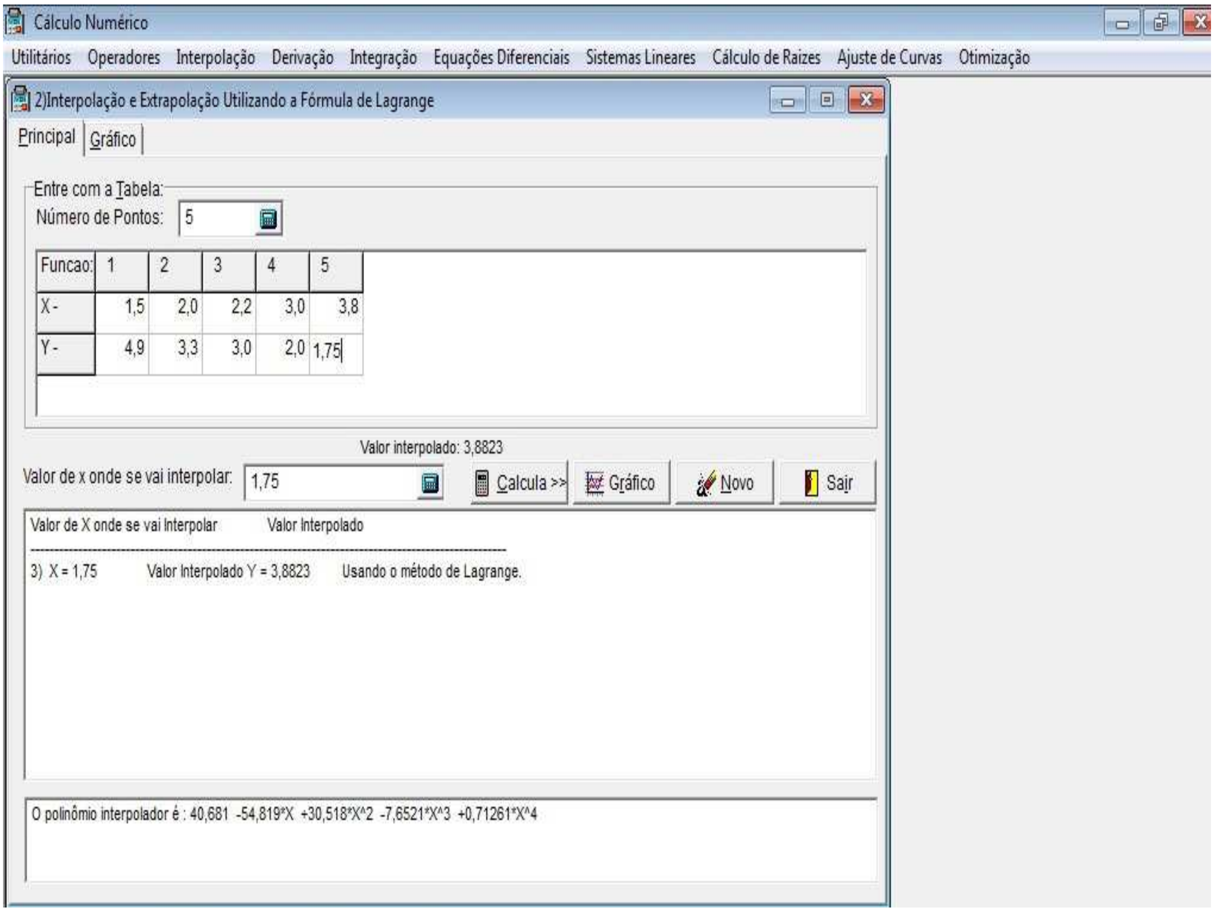


Figura 4: VCN polinômio de 4^{o} **grau aplicação do Método de Lagrange**

Fonte: Autoria Própria

2.1.1 Vantagem e Desvantagem no Método de Lagrange

- **Vantagem:** Quando é feita somente uma interpolação, este método é tão eficiente quanto o método de Newton (próxima sessão)e mais prático, por não ser necessário armazenar as tabelas de diferenças divididas.

- **Desvantagem:** Quando é necessário fazer várias interpolações, este método fica com uma quantidade de cálculos excessivos. Quando um novo termo é adicionado é necessário recalcular todos os valores de $L_i(x)$, o que não acontece no método de Newton.

3 INTERPOLAÇÃO COM DIFERENÇAS DIVIDIDAS (NEWTON)

O método de Lagrange para determinação do polinômio de interpolação de uma função $y = f(x)$ sobre um conjunto de pontos x_0,x_1,...,x_n possui um inconveniente. Sempre que se deseja passar de um polinômio de grau k (construído sobre $k+1$ pontos) para um polinômio de grau $k+1$ (construído sobre $k+2$ pontos), todo o trabalho tem que ser praticamente refeito. Seria interessante se houvesse possibilidade, conhecido o polinômio de grau k, passar para o de grau $k+1$ apenas acrescentando mais um termo ao polinômio de grau k. Vamos ver, agora, que tal objetivo é alcançado através da fórmula de Newton do polinômio de interpolação. Para a construção do polinômio de interpolação por esse método, precisamos da noção de divididas de uma função.

Definição 3.1 *Sejam x_0, x_1, $\cdots$, x_n, os $n+1$ pontos distintos no intervalo $[a,b]$. Considere também,$f(x_0)$, $f(x_1)$, $\cdots$, $f(x_n)$, os $n+1$ valores de uma função $y = f(x)$ sobre $x = x_k$, $k = 0,1,\cdots,n$. Definimos*

$$f[x_k] = f(x_k) \ , \tag{3.0.1}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n] = \frac{f[x_1,x_2\ldots,x_n] - f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_n - x_0} \ , \tag{3.0.2}$$

onde $f[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n]$ é a diferença dividida de ordem n da função $f(x)$ sobre os pontos x_0, x_1, $\cdots$, x_n. Assim, usando a definição,temos:

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_n - x_0} \ , \tag{3.0.3}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0} \ , \tag{3.0.4}$$

$$\begin{aligned} f[x_0,x_1,x_2,x_3] &= \frac{f[x_1,x_2,x_3] - f[x_0,x_1,x_2]}{x_3 - x_0} \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \end{aligned} \ , \tag{3.0.5}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1}] = \frac{f[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1}] - f[x_0,x_1,x_3,\ldots,x_{n-2}]}{x_{n-1}-x_0}\ , \tag{3.0.6}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n] = \frac{f[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n] - f[x_0,x_1,x_3,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}\ . \tag{3.0.7}$$

Observe que do lado direito de cada uma das igualdades anteriores devemos aplicar sucessivamente a definição de diferenças dividida até que os cálculos envolvam apenas o valor da função nos pontos, isto é

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}\ , \tag{3.0.8}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} - \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}\ . \tag{3.0.9}$$

Entretanto podemos calcular as diferenças divididas de uma função, de uma maneira mais simples, como mostra a seguir.

3.1 CÁLCULO SISTEMÁTICO DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Para calcular as diferenças divididas de uma função $f(x)$ sobre os pontos x_0, $\cdots$, x_n, construímos a tabela de diferenças divididas.

Tabela 4: Tabela de Diferenças Divididas

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i,x_j,x_k]$	$\ldots$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$\ldots$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	$\ldots$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	$\ldots$
x_3	$f[x_3]$	$f[x_3,x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		
x_4	$f[x_4]$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] = \frac{f[x_{n-1},x_n]-f[x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n-x_{n-2}}$	
$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-1},x_n] = \frac{f[x_n]-f[x_{n-1}]}{x_n-x_{n-1}}$	———	
x_n	$f[x_n]$	———	———	

Fonte: (BURDEN; FAURES, 2003)

A tabela das Diferenças Divididas é construída da seguinte maneira:

a) A primeira coluna é construída dos pontos $x_k = 0, 1....n$;

b) A segunda coluna contem os valores de $f(x)$ nos pontos x_k, $k = 0, 1, 2, ...n$;

c) Nas colunas $3, 4, 5, \ldots$ estão as diferenças divididas de ordem $1, 2, 3, \ldots$ cada uma destas diferenças é uma fração cujo numerador é sempre a diferenças entre duas diferenças divididas consecutivas e de ordem imediatamente inferior, e cujo denominador é a diferença entre os dois extremos dos pontos envolvidos.

Exemplo 3.1 *Com base na função tabelada*

Tabela 5:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

Fonte: Autoria própria.

Construa a tabela de diferenças divididas.

Solução: *Construímos a seguinte tabela*

Tabela 6:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
-1	4	$\frac{4-1}{0-(-1)} = 3$	$\frac{-1-3}{2-(-1)} = \frac{-4}{3}$
0	1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$	—

Fonte: Autoria própria.

Assim, o elemento $-4/3$ corresponde a diferença dividida $f[x_1, x_2, x_3]$. Portanto, usando a definição, segue que

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-1-3}{2-(-1)} = \frac{-4}{3} \quad . \tag{3.1.10}$$

Como veremos adiante, os resultados a serem utilizados na construção do polinômio de interpolação na forma de Newton são os primeiros valores em cada coluna de diferenças, embora tenhamos que construir toda a tabela, pois os valores não são independentes dos outros.

3.2 RESULTADO SOBRE DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Teorema 3.1 *As diferenças divididas de ordem k de uma função $f(x)$ satisfazem:*

$$f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_k)}. \tag{3.2.11}$$

Corolário 3.1 *As diferenças divididas de ordem k de uma função $f(x)$ satisfazem:*

$$f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_k] = f[x_{j0},x_{j1},x_{j2},\dots,x_{jk}], \tag{3.2.12}$$

onde $(j_0, j_1, \cdots, j_k)$ é qualquer permutação dos inteiros $(0,1,\cdots,k)$. Por este resultado, vemos que a diferença dividida de $f(x)$ é uma função simétrica de seus argumentos, isto é, independente da ordem dos pontos $x_0,x_1,\cdots,k$.

Corolário 3.2 *As diferenças divididas de ordem k de uma função $f(x)$ satisfazem:*

$$f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_k] = \frac{f[x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_k] - f[x_0,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_k]}{x_j - x_i}, \tag{3.2.13}$$

onde $i \neq j$.

Por este resultado, vemos que podemos tirar quaisquer dois pontos distintos para construir a diferença dividida de uma função, e não necessariamente o primeiro e o ultimo.

3.3 FÓRMULA DE NEWTON

Para obtermos a fórmula de Newton do polinômio de interpolação precisamos,inicialmente, definir algumas funções. Para tanto, consideremos que $f(x)$ seja contínua e que possua derivadas contínuas em $[a,b]$ e, além disso, que os pontos $x_0,x_1,\cdots,x_n$ sejam distintos em $[a,b]$. Definimos então as funções

(1) $f[x_0,x] = \dfrac{f[x]-f[x_0]}{x-x_0}$, definida em$[a,b]$, para $x \neq x_0$.

(2) $f[x_0,x_1,x] = \dfrac{f[x_0,x]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$, definida em $[a,b]$, para $x \neq x_0$ e $x \neq x_1$.

$\vdots$

(n+1) $f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x] = \dfrac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x]-f[x_0,x_1,\cdots,x_n]}{x-x_n}$, definida em $[a,b]$, para $x \neq x_k$, $k = 0,1,2,\cdots,n$.

Observe que nesta funções acrescentamos, sucessivamente, na diferença dividida, o próximo ponto da tabela. Em todas estamos aplicando o Corolário 3.2. Nosso objetivo agora é encontrar uma fórmula de recorrência para $f(x)$. Assim, de **(1)**, temos

$$f(x) \;=\; f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x]. \tag{3.3.14}$$

De (2),(usando (1)), obtemos:

$$\begin{array}{rrcl} & f[x_0,x_1,x](x-x_1) & = & f[x_0,x]-f[x_0,x_1] \\ \Rightarrow & f[x_0,x_1,x](x-x_1) & = & \dfrac{f[x]-f[x_0]}{x-x_0}-f[x_0,x_1] \\ \Rightarrow & f(x) & = & f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x] \end{array} . \tag{3.3.15}$$

De maneira análoga, (n+1), segue que

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \{f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\ & & +(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]+\ldots \\ & & +(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\ldots,x_n]\}_1 \\ & & +\{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]\}_2 \end{array} . \tag{3.3.16}$$

Obtivemos, assim, uma fórmula de recorrência para $f(x)$. Vejamos o que significam $\{\ldots\}_1$ e $\{\ldots\}_2$.

Teorema 3.2 *O polinômio*

$$\begin{array}{r} P_n(x) = f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\ +(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]+\ldots \\ +(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\{\ldots\}_1 \end{array} , \tag{3.3.17}$$

é o polinômio de interpolação da função $y=f(x)$ sobre os pontos $x_0,x_1,\cdots,x_n$, isto é,

$$P_n(x) \;=\; f(x)\ , \tag{3.3.18}$$

onde $k=0,1,\cdots,n$.

Demonstração: *Provaremos por indução em n*

a) *Para $n=1$, temos*

$$\begin{array}{rcl} P_1(x) & = & f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1] \\ & = & f[x_0]+(x-x_0)\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} \end{array} . \tag{3.3.19}$$

Logo para $x = x_0$,

$$
\begin{aligned}
P_1(x_0) &= f[x_0] + (x_0 - x_0)\frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \\
&= f(x_0)
\end{aligned}
\tag{3.3.20}
$$

Para $x = x_1$

$$
\begin{aligned}
P_1(x_1) &= f[x_0] + (x_1 - x_0)\frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \\
&= f(x_1).
\end{aligned}
\tag{3.3.21}
$$

b) *Suponhamos válido para $n = k-1$, isto é,*

$$P_{k-1}(x_i) = f(x_i) \tag{3.3.22}$$

onde $i = 0, 1, \cdots, k-1$.

c) *Provemos para $n = k$. Dividiremos a prova em duas partes.*

- *Para $i < k$, temos*

  $$P_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) + (x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{k-1})f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = P_{k-1}(x_i) = f(x_i),$$

  usando a hipótese de indução.

- *Para $i = k$, temos*

  $$P_k(x_k) = f[x_0] + (x_k - x_0)f[x_0, x_1] + \cdots + (x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_k].$$

  *Fazendo $x = x_k$ em 3.3.16(lembrando que $n = k$) e comparando com a expressão obtida anteriormente para $P_k(x_k)$, vemos que $P_k(x_k) = f(x_k)$, o que completa a prova do teorema. A fórmula 3.3.17 é chamada **Fórmula de Newton do Polinômio de Interpolação**.*

Teorema 3.3 *Para $x \in [a,b]$,$x \neq x_k$, $k = 0, \ldots, n$,*

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \;;\varepsilon \in (x_0, x_n) \tag{3.3.23}$$

Prova: *Usando o Teorema 3.2,em 3.3.16,podemos escrever:*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x) + \{(x - x_0)\ldots(x - x_n)f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\}_2 \\
\Rightarrow \quad f(x) - P_n(x) &= \{(x - x_0)\ldots(x - x_n)f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\}_2
\end{aligned}
\quad . \tag{3.3.24}
$$

Por,outro lado,temos:

$$f(x)-P_n(x) \quad = \quad E_n(x) \quad = \quad (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \quad , \tag{3.3.25}$$

onde $\varepsilon \in (x_0,x_n)$*.Assim,comparando a equação3.3.24 com a equação 3.3.25,segue:*

$$f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,x] \quad = \quad \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \;\; ;\varepsilon \in (x_0,x_n) \tag{3.3.26}$$

desde que $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \neq 0$*,pois os pontos tabelados são distintos.Portanto:*

$$E_n(x) \quad = \quad \{(x-x_0)\ldots(x-x_n)f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]\}_2 \quad = \quad \{\ldots\}_2 \;. \tag{3.3.27}$$

*é o **termo do erro** ou **erro de truncamento**.Observe que o tratamento do erro de truncamento é, portanto,o mesmo da forma de Lagrange.*

Exemplo 3.2 *Dada a tabela,calcular* $f(1)$*,usando a fórmula de Newton do polinômio de interpolação.*
Solução:*Temos;*

Tabela 7:

x_i	-1	0	3
$f(x_i)$	15	8	-1

Fonte: Autoria própria.

Portanto $n=2$*.Assim, o polinômio de interpolação na forma de Newton é dado por:*

$$P_2(x) \quad = \quad f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \tag{3.3.28}$$

Em primeiro lugar, construímos a tabela de diferenças divididas.Assim;

Tabela 8:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i,x_j,x_k]$
-1	15	$\frac{8-15}{0-(-1)}=-7$	$\frac{-3-(-7)}{3-(-1)}=\frac{4}{4}=1$
0	8	$\frac{-1-8}{3-0}=-3$	—
3	-1	———-	—

Fonte: Autoria própria.

Temos: $f[x_0]=15, f[x_0,x_1]=-7$ *e* $f[x_0,x_1,x_2]=1$*.Logo:*

$$P_2(x) \quad = \quad 15+(x-x_0)(-7)+(x-x_0)(x-x_1)(1) \tag{3.3.29}$$

Substituindo os valores de $x_0 = -1$ e $x_1 = 0$:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 15 + (x-(-1))(-7) + (x-(-1))(x-0)(1) \\ \Rightarrow \quad P_2(x) &= 15 - 7x - 7 + x^2 + x \\ \Rightarrow \quad P_2(x) &= x^2 - 6x + 8 \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

O valor de $f(1)$ é dado por $P_2(1)$,lembrando que este é um valor aproximado.Assim:
$P_2(1) = 3 \approx f(1)$.

Exemplo 3.3 *Dada a tabela ,$f(x) = sen(x)$,calcular $f(\pi/2)$,usando a fórmula de Newton do polinômio de interpolação:*

Tabela 9:

x_i	1	1,25	1,5	1,75	2
$f(x_i)$	0,8415	0,949	0,9975	0,984	0,9093

Fonte: Autoria própria.

Solução:*Temos*

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 & \Rightarrow f(x_0) &= 0,8415 \\ x_1 &= 1,25 & \Rightarrow f(x_1) &= 0,949 \\ x_2 &= 1,5 & \Rightarrow f(x_2) &= 0,9975 \\ x_3 &= 1,75 & \Rightarrow f(x_3) &= 0,984 \\ x_4 &= 2 & \Rightarrow f(x_4) &= 0,9093 \end{aligned} \tag{3.3.31}$$

Portanto $n = 4$.Assim o polinômio de interpolação na fórmula de Newton é dada por;

$$\begin{aligned} P_4(x) &= f[x_0] + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\ &\quad + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\ &\quad + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] \end{aligned} \tag{3.3.32}$$

Em primeiro lugar, construímos a tabela de diferenças divididas.Assim:

Tabela 10:

x_i	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem4
1	0,8415	$\frac{0,949-0,8415}{1,25-1} = 0,43$	$\frac{0,194-0,43}{1,5-1} = -0,472$	$\frac{-0,496-(-0,472)}{1,75-1} = -0,032$	$\frac{0,008533-(-0,032)}{2-1} = 0,04053$
1,25	0,949	$\frac{0,9975-0,949}{1,5-1,25} = 0,194$	$\frac{-0,054-0,194}{1,75-1,25} = -0,496$	$\frac{-0,4896-(-0,496)}{2-1,25} = -0,008533$	—
1,5	0,9975	$\frac{0,984-0,9975}{1,75-1,5} = -0,054$	$\frac{-0,2988-(-0,054)}{2-1,5} = -0,4896$	—	—
1,75	0,984	$\frac{0,9093-0,984}{2-1,75} = -0,2988$	—	—	—
2	0,9093	——-	—	—	—

Fonte: Autoria própria.

Podemos calcular diretamente o polinômio do 4^ograu aplicando na fórmula de Newton (3.3.32).

Mas queremos mostrar que a partir da tabela podemos também encontrar o polinômio do 1^o *grau,*2^o *grau,*3^o *grau, apenas acrescentando mais um termo a partir do polinômio do* 1^o*grau . Então:*

$$\begin{array}{rcl} P_1(x) & = & a_0 + a_1(x-x_0) \\ \Rightarrow\ P_1(x) & = & f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) \\ \Rightarrow\ P_1(x) & = & 0,8415 + 0,43(x-1) \\ \Rightarrow\ P_1(x) & = & 0,4115 + 0,43x \end{array} . \quad (3.3.33)$$

Calculando $P_2(x)$ *acrescentando mais um termo:*

$$\begin{array}{rcl} P_2(x) & = & P_1(x) + a_2(x-x_0)(x-x_1) \\ \Rightarrow\ P_2(x) & = & a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) \\ \Rightarrow\ P_2(x) & = & f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ \Rightarrow\ P_2(x) & = & 0,8415 + 0,43(x-1) + (-0,472)(x-1)(x-1,25) \\ \Rightarrow\ P_2(x) & = & -0,1785 + 1,492x - 0,472x^2 \end{array} . \quad (3.3.34)$$

Calculando $P_3(x)$ *acrescentando mais um termo:*

$$\begin{array}{rcl} P_3(x) & = & P_2(x) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ \Rightarrow P_3(x) & = & a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ \Rightarrow P_3(x) & = & f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ & & + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ \Rightarrow P_3(x) & = & 0,8415 + 0,43(x-1) + (-0,472)(x-1)(x-1,25) \\ & & +(-0,032)(x-1)(x-1,25)(x-1,5) \\ \Rightarrow P_3(x) & = & -0,1185 + 1,344x - 0,352x^2 - 0,032x^3 \end{array} . \quad (3.3.35)$$

Calculando $P_4(x)$ *acrescentando mais um termo:*

$$\begin{array}{rcl} P_4(x) & = & P_3(x) + a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ \Rightarrow P_4(x) & = & a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ & & + a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ \Rightarrow P_4(x) & = & P_3(x) + f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ \Rightarrow P_4(x) & = & (-0,1185 + 1,344x - 0,352x^2 - 0,032x^3) \\ & & +0,04053(x-1)(x-1,25)(x-1,5)(x-1,75) \\ \Rightarrow P_4(x) & = & 0,0145 + 0,9399x + 0,1015x^2 - 0,2549x^3 + 0,04053x^4 \end{array} . \quad (3.3.36)$$

Para calcular $f(\pi/2)$ *precisamos substituir o valor de* $(\pi/2)$ *no polinômio* $P_4(x)$*:*

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 0,0145+0,9399x+0,1015x^2-0,2549x^3+0,04053x^4 \\ \Rightarrow P_4(\frac{\pi}{2}) &= 0,0145+0,9399(\frac{\pi}{2})+0,1015(\frac{\pi}{2})^2-0,2549(\frac{\pi}{2})^3+0,04053(\frac{\pi}{2})^4 \quad (3.3.37) \\ \Rightarrow P_4(\frac{\pi}{2}) &= 1 \end{aligned}$$

Utilizando o aplicativo VCN podemos encontrar o valor no ponto $(\pi/2)$*, aplicando o polinômio interpolador do* 4^o *grau , onde o programa calcula pela fórmula de Diferenças Divididas:*

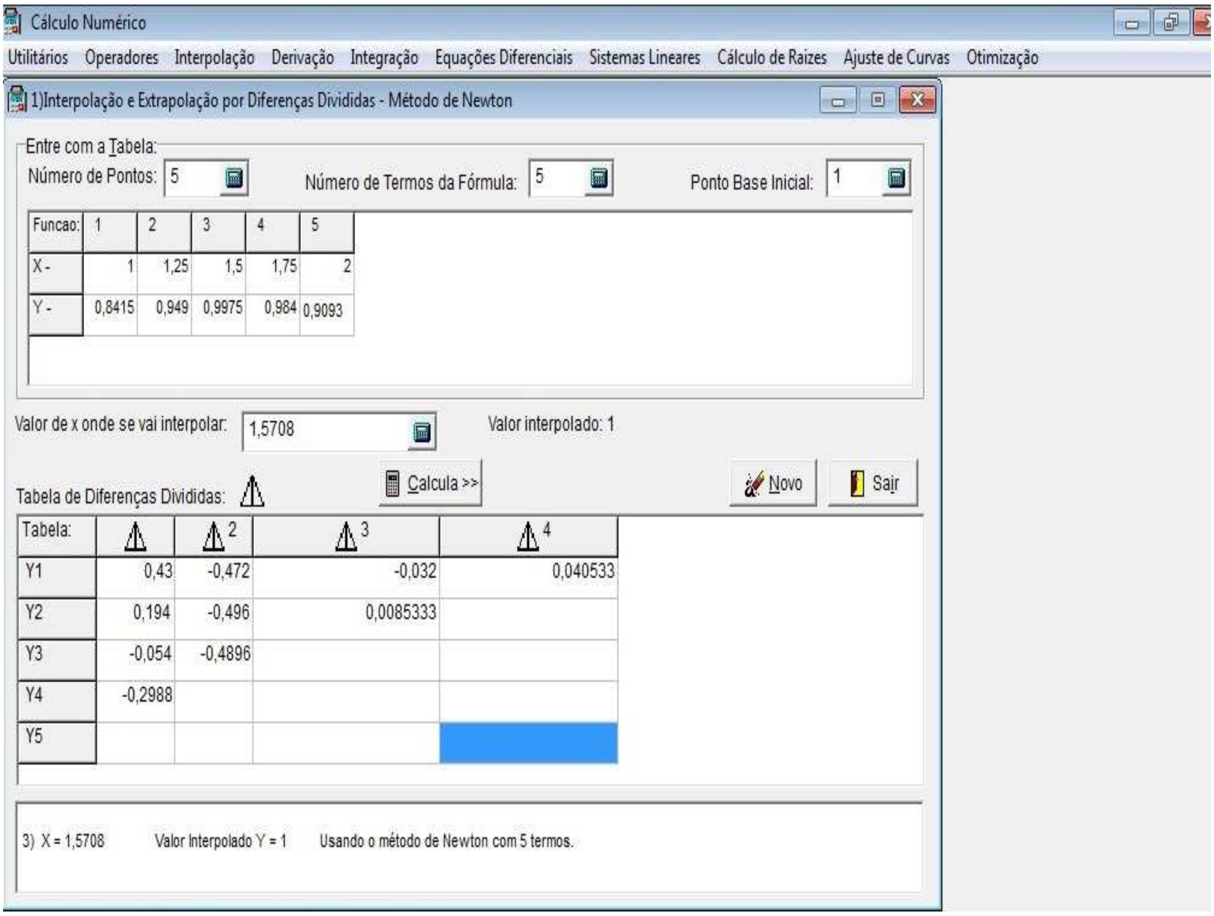


Figura 5: DIFERENÇAS DIVIDIDAS $P_4(x)$ APLICADO NO PONTO $(\pi/2)$.

Fonte:

Exemplo 3.4 *A velocidade do som na água varia com a temperatura. Usando os valores da tabela, determinar o valor aproximado da velocidade do som na água a* $100°C$*.*

Solução: *Temos 5 pontos calculados portanto* $n = 4$*.Assim o polinômio de interpolação na*

Tabela 11:

Temperatura(^oC)	Velocidade(m/s)
86,0	1552
93,3	1548
98,9	1544
104,4	1538
110,0	1532

Fonte: Autoria própria.

fórmula de Newton é dada por:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\ &+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\ &+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] \end{aligned} \quad . \tag{3.3.38}$$

Em primeiro lugar construímos a tabela de diferenças divididas.Assim:

Tabela 12:

x_i	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem4
86,0	1552	$\frac{1548-1552}{93,3-86,0}=-0,54795$	$\frac{-0,71429+0,54795}{98,9-86}=-0,012895$	$\frac{-0,03393+0,012895}{104,4-86,0}=-0,0011432$	$\frac{0,0021368+0,0011432}{110,0-86,0}=0,000137$
93,3	1548	$\frac{1544-1548}{98,9-93,3}=-0,71429$	$\frac{-1,0909+0,71429}{104,4-93,3}=-0,03393$	$\frac{0,001755+0,03393}{110-93,3}=0,0021368$	—
98,9	15445	$\frac{1538-1544}{104,4-98,9}=-1,0909$	$\frac{-1,0714+1,0909}{110-98,9}=0,001755$	—	—
104,4	1538	$\frac{1532-1538}{110-104,4}=-1,0714$	—	—	—
110,0	1532	——-	—	—	—

Fonte: Autoria própria.

A partir da tabela das Diferenças Divididas encontramos os valores:

$$\begin{aligned} f[x_0] &= 1552 \\ f[x_0,x_1] &= -0,54795 \\ f[x_0,x_1,x_2] &= -0,012895 \\ f[x_0,x_1,x_2,x_3] &= -0,0011432 \\ f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] &= 0,00013667 \end{aligned} \tag{3.3.39}$$

Calculamos agora o polinômio de Newton, aplicando no valor de $x = 100$. *Substituindo na fórmula (3.3.38).*

$$\begin{aligned} P_4(100) &= 1552+(100-86)(-0,54785)+(100-86)(100-93,3)(-0,012895) \\ &+(100-86)(100-93,3)(100-98,9)(-0,0011432) \\ &+(100-86)(100-93,3)(100-98,9)(100-104,4)(0,00013667) \quad (3.3.40) \\ \Rightarrow P_4(100) &= 1552-7,6713-1,2096-0,1180-0,0620 \\ \Rightarrow P_4(100) &= 1542,93 \end{aligned}$$

Portanto o valor aproximado da velocidade do som na água a 100^oC *é* $1542,93m/s$. *Utilizando o aplicativo VCN podemos encontrar o valor no ponto* (100), *aplicando o polinômio interpolador do* 4^o *grau , onde o programa calcula pela fórmula de Diferenças Divididas:*

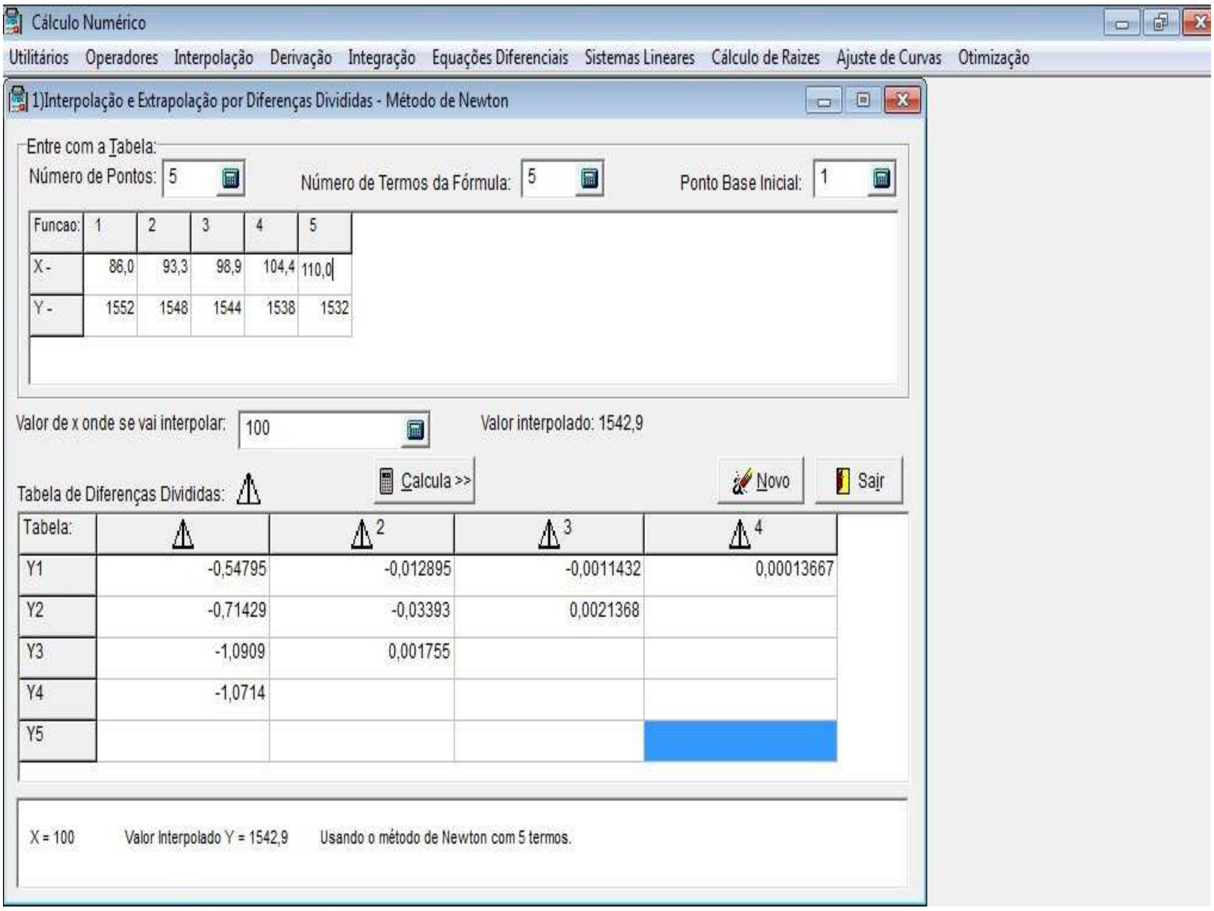


Figura 6: DIFERENÇAS DIVIDIDAS $P_4(x)$ **APLICADO NO PONTO** (100)**.**

Fonte:

4 INTERPOLAÇÃO COM DIFERENÇAS ORDINÁRIAS

4.1 CONCEITO DE DIFERENÇAS FINITAS

Do mesmo modo que no caso de Lagrange, existe uma fórmula mais simples para o polinômio de interpolação quando os pontos x_i são igualmente espaçados. Além disso, a fórmula de Newton - Gregory do polinômio de interpolação permite, como no caso da fórmula de Newton, passar de um polinômio de grau p, para um polinômio de grau $p+1$ acrescentando se um termo ao polinômio de grau p.Consideramos então a construção deste polinômio de interpolação quando os argumentos x_i são igualmente espaçados sendo $h \neq 0$. Muitas vezes são encontrados problemas de interpolação cuja tabela de valores conhecidos tem, de certa forma, características especiais, ou seja os valores conhecidos tem de certa forma características especiais, ou seja os valores de xi, $(i = 0, 1, 2, ...n)$ são igualmente espaçados

$$x_1 - x_0 \quad = \quad x_2 - x_1 \quad = \quad x_3 - x_2 \quad = \quad x_4 - x_3 \quad = \quad \cdots \quad = \quad x_n - x_{n-1} \quad = \quad h \ .$$

Assim $x_{i+1} - x_i = h$ e $x_i = x_0 + ih$, para todo i, sendo h uma constante.

Exemplo 4.1 *Seja a função $f(x)$ definida pela tabela:*

Tabela 13:

x_i	y_i
0,01	1,01
0,03	1,09
0,05	1,25
0,07	1,49

Fonte: Autoria própria.

Os valores de x são igualmente espaçados

$$\begin{array}{rcccccccc} & h & = & x_1 - x_0 & = & x_2 - x_1 & = & x_3 - x_2 & = & x_4 - x_3 \\ \Rightarrow & h & = & 0,03 - 0,01 & = & 0,05 - 0,03 & = & 0,07 - 0,05 & = & 0,02 \\ \Rightarrow & h & = & 0,02 & & & & & & \end{array} \tag{4.1.1}$$

Caso fosse pedido para se determinar $f(0,02)$, $f(0,04)$ e $f(0,065)$, conhecendo-se os valores de função $f(x)$, que constam da Tabela 13, sem duvida alguma seria possível encontrar uma aproximação para cada valor perdido usando se fórmula de interpolação de Lagrange ou de Newton. Contudo, deve se, aproveitar o fato que tais pontos possuem abscissas com espaçamento constante, o que simplifica a fórmula de Newton.

Definição 4.1 *Seja $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$,$n+1$ pontos distintos, igualmente espaçados em $[a,b]$, isto é: $x_{i+1} - x_i = h$,$i = 0,1,2,\ldots,n-1$, e sejam $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$,$n+1$ valores de uma função $y = f(x)$ sobre $x = x_k$, $k = 0,1,2,\ldots,n$. Definimos*

$$\begin{array}{rcl} \Delta^0 f(x_k) & = & f(x_k) \\ \Delta^r f(x_k) & = & \Delta^{r-1} f(x_k + h) - \Delta^{r-1} f(x_k) \end{array} . \tag{4.1.2}$$

*onde $\Delta^r f(x_k)$ é a **diferença ordinária** de $f(x)$ de ordem r em $x = x_k$. Assim, usando a definição, temos*

$$\begin{array}{rcl} \Delta^0 f(x_k) & = & f(x_k) \\ \Delta^1 f(x_k) & = & \Delta^1 f(x_k + h) - \Delta^0 f(x_k) \\ & = & f(x_k + h) - f(x_k) \\ \Delta^2 f(x_k) & = & \Delta^1 f(x_k + h) - \Delta^1 f(x_k) \\ & = & \Delta^0 f(x_k + 2h) - \Delta^0 f(x_k + h) - \Delta^0 f(x_k + h) + \Delta^0 f(x_k) \\ & = & f(x_k + 2h) - 2f(x_k + h) + f(x_k) \\ \Delta^3 f(x_k) & = & f(x_k + 3h) - 3f(x_k + 2h) + 3f(x_k + h) - f(x_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^r f(x_k) & = & \binom{r}{0} f(x_k + rh) - \binom{r}{1} f(x_k + (r-1)h) + \ldots + (-1)^r \binom{r}{0} f(x_k). \end{array} . \tag{4.1.3}$$

Portanto

$$\Delta^r f(x_k) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^r \binom{r}{i} f(x_k + (r-i)h), \text{ onde } \binom{r}{p} = \frac{r!}{p!(r-p)!} . \tag{4.1.4}$$

Entretanto, podemos calcular as diferenças ordinárias de uma função de uma maneira mais simples, como mostrado a seguir.

4.2 CÁLCULO SISTEMÁTICO DAS DIFERENÇAS ORDINÁRIAS

Para calcular as diferenças ordinárias de uma função $f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ (igualmente espaçados de h) construímos a tabela de diferenças ordinárias, como mostra na Tabela 14, da seguinte maneira

a) A primeira coluna é constituída dos pontos x_i, $i = 0, 1, ..., n$;

b) A segunda coluna contem os valores de $f(x_i)$ nos pontos x_i, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$;

c) Nas colunas $3, 4, 5, \cdots$ estão as diferenças de ordem $1, 2, 3, \ldots$ cada uma destas diferenças é simplesmente a diferença entre duas diferenças ordinárias consecutivas e de ordem imediatamente inferior.

Observando na Tabela 14 temos

Tabela 14: Tabela de Diferenças Divididas

x_i	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	$\ldots$	Ordem n
x_0	$\Delta^0 f(x_0)$	$\Delta^1 f(x_0)$	$\Delta^2 f(x_0)$	$\ldots$	$\Delta^n f(x_0)$
x_1	$\Delta^0 f(x_1)$	$\Delta^1 f(x_1)$	$\Delta^2 f(x_1)$	$\ldots$	——
x_2	$\Delta^0 f(x_2)$	$\Delta^1 f(x_2)$	$\Delta^2 f(x_2)$	$\ldots$	——
x_3	$\Delta^0 f(x_3)$	$\Delta^1 f(x_3)$	$\Delta^2 f(x_3)$	$\ldots$	——
x_4	$\Delta^0 f(x_4)$	$\Delta^1 f(x_4)$	$\Delta^2 f(x_4)$	$\ldots$	——
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	——
x_{n-2}	$\Delta^0 f(x_{n-2})$	$\Delta^1 f(x_{n-2})$	$\Delta^2 f(x_{n-2})$	$\ldots$	——
x_{n-1}	$\Delta^0 f(x_{n-1})$	$\Delta^1 f(x_{n-1})$	——	——	——
x_n	$\Delta^0 f(x_n)$	——	——	——	——

Fonte: Autoria própria.

Definimos

$$\begin{array}{rcl}
\Delta^0 f(x_0) & = & f(x_0) \\
\Delta^0 f(x_1) & = & f(x_1) \\
\Delta^1 f(x_0) & = & \Delta^0 f(x_1) - \Delta^0 f(x_0) \\
\Delta^1 f(x_1) & = & \Delta^0 f(x_2) - \Delta^0 f(x_1) \\
\Delta^2 f(x_0) & = & \Delta^1 f(x_1) - \Delta^1 f(x_0) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Delta^n f(x_0) & = & \Delta^{n-1} f(x_1) - \Delta^{n-1} f(x_0)
\end{array} \quad , \tag{4.2.5}$$

onde $\Delta^0 f(x)$ é a diferença ordinária de ordem zero e $\Delta^n f(x)$ é a diferença ordinária(ou diferença finita progressiva) de ordem n, da função $f(x)$ sobre $n+1$ pontos $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$.

Exemplo 4.2 *Para a seguinte função tabelada*

Tabela 15:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-2	29	30	31	62

Fonte: Autoria Própria

construa a tabela de diferenças ordinárias.

Solução: *Usando a Tabela 14 construímos uma nova Tabela 16*

Tabela 16: Tabela de Diferenças Divididas

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
-2	-2	29-(-2)= 31	1-31= -30	0-(-30)=30	30-30=0
-1	29	30-29= 1	1-1= 0	30-0= 30	——
0	30	31-30= 1	31-1=30	——	——
1	31	62-31=31	——	——	——
2	62	——	——	——	——

Fonte: Autoria própria.

Assim, o elemento 0 *corresponde à diferença ordinária* $\Delta^2 f(x_1)$*. Portanto, usando a definição, segue que*

$$\Delta^2 f(x_1) \quad = \quad \Delta^1 f(x_2) - \Delta^1 f(x_1) \ . \tag{4.2.6}$$

Usando o item ***c)*** *anterior temos:*

$$\Delta^2 f(x_1) \quad = \quad 1-1 \quad = \quad 0 \ . \tag{4.2.7}$$

Como no caso das diferenças divididas, os resultados a serem utilizados na construção do polinômio de interpolação, para pontos igualmente espaçados de h, são os primeiros valores em cada coluna de diferenças, embora tenhamos que construir toda a tabela, pois novamente os valores não são independentes um dos outros. A relação entre as diferenças divididas de ordem n e as diferenças ordinárias de ordem n de de uma função $f(x)$ é dada pelo seguinte resultado.

4.3 FÓRMULA DE GREGORY-NEWTON

Teorema 4.1 *Se $x_k = x_0 + kh$, $k = 0,1,\cdots,n$ então*

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!}$$

Demonstração: *(Provaremos por indução em n). Assim*

a) *Para $n = 1$.Temos, por definição,que:*

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\Delta^1 f(x_0)}{h}$$

desde que $x_1 = x_0 + h$,$f(x_1) = \Delta^0 f(x_1)$ e $f(x_0) = \Delta^0 f(x_0)$.

b) *Suponhamos válido para $n = k-1$.*

c) *Provaremos para $n = k$.Usando a definição e a seguir a hipótese de indução, obtemos:*

$$\begin{aligned}
f[x_0,x_1,\ldots,x_k] &= \frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_k]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}\\
\Rightarrow\ f[x_0,x_1,\ldots,x_k] &= \frac{1}{kh}\left[\frac{\Delta^{k-1}f(x_1)}{h^{k-1}(k-1)!}-\frac{\Delta^{k-1}f(x_0)}{h^{k-1}(k-1)!}\right]\\
\Rightarrow\ f[x_0,x_1,\ldots,x_k] &= \frac{1}{h^k k!}\left[\Delta^{k-1}f(x_0+h)-\Delta^{k-1}f(x_0)\right]\\
\Rightarrow\ f[x_0,x_1,\ldots,x_k] &= \frac{\Delta^k f(x_0)}{h^k k!}
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que o polinômio de interpolação na forma de Newton, para uma função $y = f(x)$, no intervalo $[x_0,x_n]$, pode ser escrito, no caso de argumentos x_i igualmente espaçados de h, da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f(x_0)+(x-x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{h}+(x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2 2!}+\ldots\\
&\quad +(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})\frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!}
\end{aligned} \quad . \qquad (4.3.8)$$

*Esta forma do polinômio de interpolação é conhecida como **Fórmula de Newton-Gregory do Polinômio de Interpolação**.*

Observe que as diferenças ordinárias de ordem n de um polinômio de grau n na forma $P_n(x) = a_n x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ são iguais a $n!h^n a_n$. As diferenças de ordem maior que n são todas nulas.

Exemplo 4.3 *Dada a função tabelada*

Tabela 17:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	3	1	-1	0

Fonte: Autoria própria.

Determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton-Gregory.

Solução: *Temos*

$$\begin{array}{rclcrcl} x_0 & = & -1 & \Rightarrow f(x_0) & = & 3 \\ x_1 & = & 0 & \Rightarrow f(x_1) & = & 1 \\ x_2 & = & 1 & \Rightarrow f(x_2) & = & -1 \\ x_3 & = & 2 & \Rightarrow f(x_3) & = & 0 \end{array}. \tag{4.3.9}$$

Portanto $n = 3$. *Assim, devemos construir o polinômio*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2 2!} \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{h^3 3!} \end{aligned}. \tag{4.3.10}$$

Construímos, inicialmente, a tabela de diferença ordinária.

Tabela 18: Tabela de Diferenças Divididas

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
-1	3	1-3= -2	-2-(-2)= 0	3-0= 3
0	1	-1-1= -2	1-(-2)=3	——
1	-1	0-(-1)= 1	——	——
2	0	——	——	——

Fonte: Autoria própria.

Temos $\Delta^0 f(x_i) = 3$, $\Delta^1 f(x_i) = -2$, $\Delta^2 f(x_i) = 0$ *e* $\Delta^3 f(x_i) = 3$ *onde* $h = 1$. *Substituindo os valores de* $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ *e* $x_3 - 2$. *Aplicando na fórmula de Newton-Gregory para* $n = 3$.

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 3 + (x - (-1))(-2) + (x - (-1))(x - 0)\frac{(0)}{2!} + (x - (-1))(x - 0)(x - 1)\frac{(3)}{3!} \\ \Rightarrow\ P_3(x) &= 3 - 2x - 2 + (x^3 - x)\frac{1}{2} \\ \Rightarrow\ P_3(x) &= \frac{x^3}{2} - \frac{5}{2}x + 1 \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Exemplo 4.4 *Determine a que temperatura a água entra em ebulição no Pico da Bandeira* *com altitude de* 2890*m, sabendo que o ponto de ebulição da água varia com altitude, conforme mostra a Tabela 19. Use os cinco pontos mais próximos de* 2890*m.*

Tabela 19:

Atitude(m)	Ponto de Ebulição da água (^{o}C)
850	97,18
950	96,84
1050	96,51
1150	96,18
1250	95,84
$\vdots$	$\vdots$
2600	91,34
2700	91,01
2800	90,67
2900	90,34
3000	90,00

Fonte: Autoria Própria

Solução: *Podemos utilizar a fórmula de Newton-Gregory, pois os pontos são igualmente espaçados. Iremos construir inicialmente a Tabela 19 de diferença ordinária. Como precisamos* 5 *pontos próximos de* 2890*, temos* $x_0 = 2600$*,* $x_1 = 2700$*,* $x_2 = 2800$*,* $x_3 = 2900$*,* $x_4 = 3000$ *onde* $h = 100$*.*

Tabela 20: Tabela de Diferenças Divididas

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
2600	91,34	91,01-91,34= -0,33	-0,34-(-0,33)= -0,01	0,01-(-0,01)= 0,02	-0,02-0,02= -0,04
2700	91,01	90,67-91,01= -0,34	-0,33-(-0,34)= 0,01	-0,01-0,01= -0,02	——
2800	90,67	90,34-90,67= -0,33	-0,34-(-0,33)= -0,01	——	——
2900	0	90,34	90-90,34= -0,34	——	——
3000	0	90,0	——	——	——

Fonte: Autoria própria.

Definimos o polinômio $n = 4$

$$\begin{aligned} P_4(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2 2!} \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{h^3 3!} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\frac{\Delta^4 f(x_0)}{h^4 4!} \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Aplicamos os valores encontrados no polinômio

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 91,34+(x-2600)\frac{(-0,33)}{100}+(x-2600)(x-2700)\frac{(-0,01)}{(100)^2 2!} \\ &+(x-2600)(x-2700)(x-2800)\frac{(0,02)}{(100)^3 3!} \\ &+(x-2600)(x-2700)(x-2800)(x-2900)\frac{(-0,04)}{(100)^4 4!} \end{aligned} \quad . \tag{4.3.13}$$

Substituímos $x = 2890$ *referente a altitude, pois queremos encontrar a temperatura correspondente*

$$\begin{aligned} P_4(2890) &= 91,34+(2890-2600)\frac{(-0,33)}{100}+(2890-2600)(2890-2700)\frac{(-0,01)}{(100)^2 2!} \\ &+(2890-2600)(2890-2700)(2890-2800)\frac{(0,02)}{(100)^3 3!} \\ &+(2890-2600)(2890-2700)(2890-2800)(2890-2900)\frac{(-0,04)}{(100)^4 4!} \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

$$\Rightarrow \quad P_4(2890) = 90,37$$

Portanto a temperatura de $90,37^oC$ *corresponde a ebulição da água no Pico da Bandeira. Utilizando o aplicativo VCN podemos encontrar o valor no ponto* (2890), *aplicando o polinômio interpolador de Newton-Gregory com a tabela de Diferenças Ordinárias*

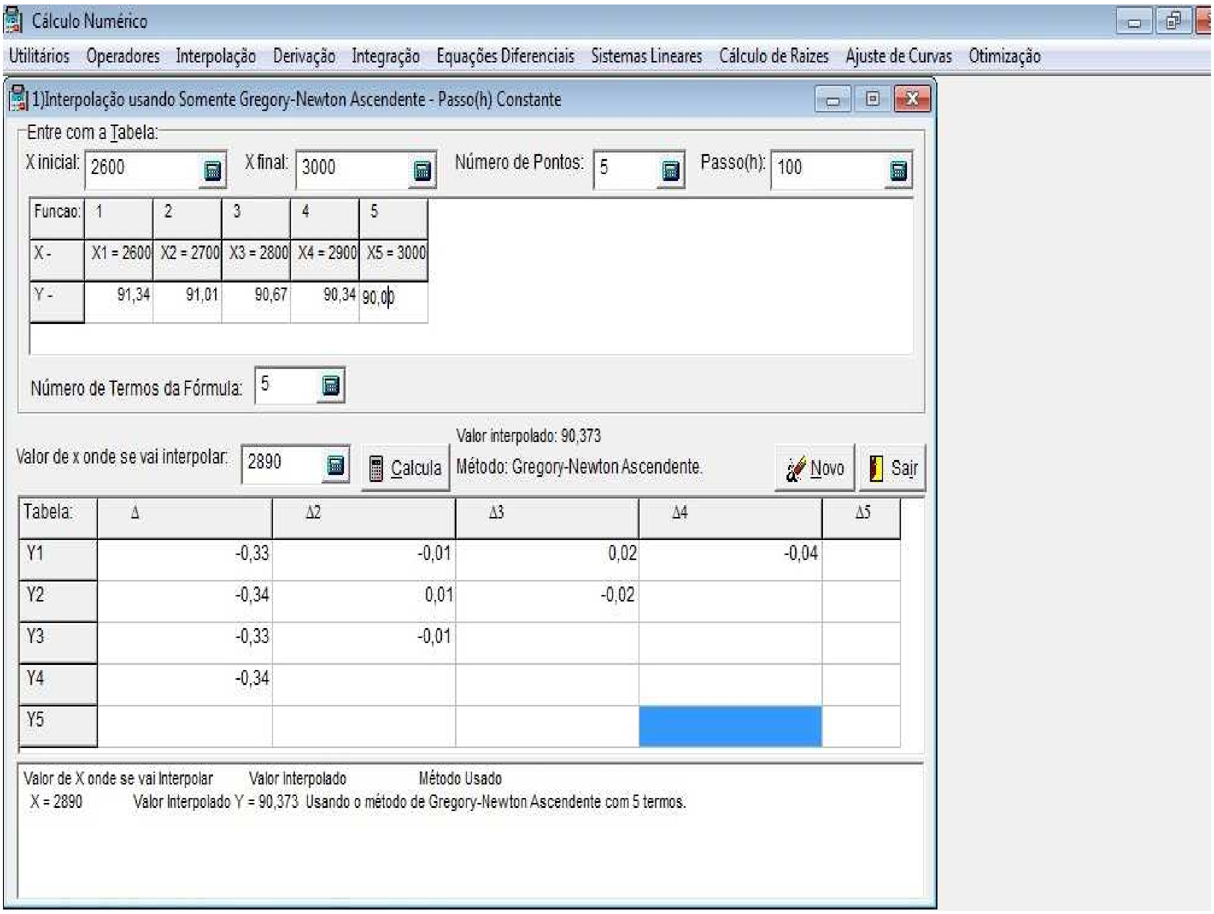


Figura 7: VCN aplicando o polinômio interpolador de Newton-Gregory

Fonte:

5 INTERPOLAÇÃO DE HERMITE

Existem outras técnicas de interpolação. Uma modificação comum à interpolação de Lagrange é interpolar ambos os valores da função e da sua derivada em um conjunto de pontos. Isto da origem a chamada interpolação de Hermite.

O objetivo da interpolação de Hermite é o de representar uma função f por um polinômio que seja interpolador de f em alguns pontos do seu domínio e que a sua derivada seja interpolador da derivada de f nesses mesmos pontos. Isto é, supondo que f é diferenciável, vamos procurar um polinômio H tal que:

$$\begin{array}{rcl} f(x_i) & = & H(x_i) \\ f'(x_i) & = & H'(x_i) \end{array}, \; i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{5.0.1}$$

Quando tal situação acontece dizemos que f e H são funções que **2-osculam** (osculam 2 vezes) os pontos x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, ou que é um polinômio 2-osculador de f pontos x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

A palavra latina ***osculum***, literalmente traduzida como ”boca pequena”ou “beijo”, quando aplicada a uma curva indica que ela apenas toca e tem a mesma forma. A interpolação de Hermite tem essa propriedade osculadora, pois ajustando uma curva dada e sua derivada força a curva da interpolação a “beijar”a curva.

5.1 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

O Teorema 5.1 estabelece a existência e unicidade do polinômio de grau inferior ou igual a $2n+1$ que verifica 5.1.2. Além disso iniciamos um processo que permite sua determinação.

Teorema 5.1 *Seja $f \in C^{2n+2}([a,b])$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pontos distintos em $[a,b]$. Existe um e um só polinômio H_{2n+1} de grau menor ou igual a $2n+1$ que verifica*

$$\begin{array}{rcl} f(x_i) & = & H(x_i) \\ f'(x_i) & = & H'(x_i) \end{array}, \; i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{5.1.2}$$

A obtenção do polinômio interpolador de Hermite pode ser feita de várias maneiras. Uma *delas é calcular utilizando os polinômios de Lagrange e suas derivadas o que torna o processo, tedioso mesmo para pequenos valores de n. Um outro método alternativo para gerar a aproximação de Hermite tem suas bases fórmula de interpolação de Newton das diferenças divididas o que será aplicado neste trabalho.*

Consideramos os $2n+2$ *pontos* $x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n$*. Podemos verificar que o polinômio de grau* $2n+1$ *dado por*

$$\begin{aligned} H(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_0](x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2 + f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1) + \ldots \\ &\quad + f[x_0,x_0,\ldots,x_n,x_n](x-x_0)^2(x-x_1)^2 \ldots (x-x_{n-1})^2(x-x_n) \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Verifica as condições 5.1.2onde as diferença divididas representadas estão generalizadas para pontos não distintos de acordo com o seguinte resultado.

$$f[x_i, x_i, \ldots, x_i] = \frac{f^{(r)}(x_i)}{r!} \text{ , onde } x_i, x_i, \ldots, x_i \text{ corresponde a } r+1 \text{ pontos.} \tag{5.1.4}$$

Note que:

$$\begin{aligned} f[x_i,x_i] &= \lim_{x\to x_i} f[x,x_i] \\ \Rightarrow \quad f[x_i,x_i] &= \lim_{x\to x_i} \frac{f(x)-f(x_i)}{x-x_i} \ . \\ \Rightarrow \quad f[x_i,x_i] &= f'(x_i) \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Com esta notação pode verificar-se facilmente que o polinômio interpolador de Hermite de grau $2n+1$ *nos pontos* $x_0, \ldots, x_n$ *é dado por:*

$$\begin{aligned} H_{2n+1} &= f[x_0] + f[x_0,x_0](x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2 + f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1) + \\ &\quad \ldots + f[x_0,x_0,x_1,x_1,\ldots .x_n,x_n](x-x_0)^2(x-x_1)^2 \ldots (x-x_{n-1})^2(x-x_n) \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

O polinômio pode assim ser determinado recorrendo a tabela das diferenças divididas generalizadas, tabela onde cada ponto aparece repetido duas vezes.

Exemplo 5.1 *Determine o polinômio interpolador de Hermite do* 3^o *grau para a função* $f(x) = sen(x)$*, onde* $x \in [0, \pi/2]$*.Temos que* $f(0) = 0, f'(0) = 1, f(\pi/2) = 1$ *e* $f'(\pi/2) = 0$*.A tabela das diferenças generalizadas é dada por:*

Tabela 21: Tabela de Diferenças Divididas

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_0] = f'(x_0)$	$f[x_0,x_0,x_1] = \frac{f[x_1,x_0]-f[x_0-x_0]}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_0,x_1,x_1] = \frac{f[x_0,x_1,x_1]-f[x_0-x_0,x_1]}{x_1-x_0}$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_1] = \frac{f[x_1,x_1]-f[x_0-x_1]}{x_1-x_0}$	—
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_1] = f'(x_1)$	—	—
x_1	$f[x_1]$	—	—	—

Fonte: Autoria própria.

Solução: *Substituindo os valores de x_0 e x_1 na tabela, temos*

Tabela 22: Tabela de Diferenças Divididas

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
0	0	1	$(4-2\pi)/(\pi^2)$	$(-16+4\pi)/(\pi^3)$
0	0	$(2)/(\pi)$	$(-4)/(\pi^2)$	—
$\pi/2$	0	—	—	—
$\pi/2$	—	—	—	—

Fonte: Autoria própria.

- *Para encontrar os valores da tabela 22 onde $f(x) = senx$ e $f'(x) = cosx$, temos na **ordem 1** ($\Delta^1 f(x_i)$):*

$$
\begin{aligned}
f[x_0,x_0] &= f'(x_0) = cos(0) = 1\\
f[x_0,x_1] &= \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{2}{\pi}\\
f[x_1,x_1] &= f'(x_1) = cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}
$$

- *Na **ordem 2**($\Delta^2 f(x_i)$):*

$$
\begin{aligned}
f[x_0,x_0,x_1] &= \frac{f[x_1,x_0]-f[x_0-x_0]}{x_1-x_0} = \frac{\frac{2}{\pi}-1}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{4-2\pi}{\pi^2}\\
f[x_0,x_1,x_1] &= \frac{f[x_1,x_1]-f[x_0-x_1]}{x_1-x_0} = \frac{0-\frac{2}{\pi}}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{-4}{\pi^2}
\end{aligned}
$$

- *Na **ordem 3**($\Delta^3 f(x_i)$):*

$$
f[x_0,x_0,x_1,x_1] = \frac{f[x_0,x_1,x_1]-f[x_0-x_0,x_1]}{x_1-x_0} = \frac{\frac{-4}{\pi^2}-(\frac{4-2\pi}{\pi^2})}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{-16+4\pi}{\pi^3}
$$

Aplicando a fórmula do polinômio interpolador de Hermite temos:

$$
H_3 = f[x_0] + f[x_0,x_0](x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2 + f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)
$$

Substituindo os valores encontrados:

$$H_3 = 0+1(x-0)+\left(\frac{4-2\pi}{\pi^2}\right)(x-0)^2+\left(\frac{-16+4\pi}{\pi^3}\right)(x-0)^2(x-0)$$

$$H_3 = x+\left(\frac{4-2\pi}{\pi^2}\right)x^2+\left(\frac{-16+4\pi}{\pi^3}\right)x^3$$

Como o polinômio é $2n+2$ pontos sendo $n=1$ temos 4 pontos e o grau é $2n+1$ portanto $P_3(x)=H_3(x)$, ou seja um polinômio de 3^o grau.

Exemplo 5.2 *Use os seguintes valores e a aritmética com arredondamento de cinco dígitos para construir o polinômio interpolador de Hermite que aproxima no ponto $0,34$ aplicada a função $f(x)=sen(x)$.A parir da Tabela 23:*

Tabela 23: Tabela de Diferenças Divididas

x_i	$f(x_i)=sen(x_i)$	$f'(x_i)=cos(x_i)$
0,30	0,29552	0,95534
0,32	0,31457	0,94924
0,35	0,34290	0,93937

Fonte: Autoria própria.

Vamos construir a tabela das diferenças generalizadas (onde cada ponto aparece repetido duas vezes na tabela).

Tabela 24: Tabela de Diferenças Divididas

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$	$\Delta^5 f(x_i)$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_0]=f'(x_0)$	$f[x_0,x_0,x_1]$	$f[x_0,x_0,x_1,x_1]$	$f[x_0,x_0,x_1,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_0,x_1,x_1,x_2,x_2]$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_1,x_2,x_2]$	—
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_1]=f'(x_1)$	$f[x_1,x_1,x_2]$	$f[x_1,x_1,x_2,x_2]$	—	—
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_2]$	—	—	—
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_2]=f'(x_2)$	—	—	—	—
x_2	$f[x_2]$	—	—	—	—	—

Fonte: Autoria Própria

Aplicando os valores iniciais de x_0, x_1 e x_2

Tabela 25: Tabela de Diferenças Divididas

x_i	$\Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$	$\Delta^5 f(x_i)$
0,30	0,29552	0,95534	$\frac{0{,}95250-0{,}95534}{0{,}32-0{,}30} = -0,14200$	$\frac{-0{,}163+0{,}142}{0{,}32-0{,}30} = -1,05$	$\frac{-0{,}0134+1{,}05}{0{,}35-0{,}30} = 20,732$	$\frac{-0{,}8386-20{,}732}{0{,}35-0{,}30} = -431,412$
0,30	0,29552	$\frac{0{,}31457-0{,}29552}{0{,}32-0{,}30} = 0,95250$	$\frac{0{,}94924-0{,}95250}{0{,}32-0{,}30} = -0,16300$	$\frac{-0{,}16367+0{,}163}{0{,}35-0{,}30} = -0,01340$	$\frac{-0{,}05533+0{,}0134}{0{,}35-0{,}30} = -0,83860$	—
0,32	0,31457	0,94924	$\frac{0{,}94433-0{,}94924}{0{,}35-0{,}32} = -0,16367$	$\frac{-0{,}16533+0{,}16367}{0{,}35-0{,}32} = -0,05533$	—	—
0,32	0,31457	$\frac{0{,}34290-0{,}31457}{0{,}35-0{,}32} = 0,94433$		$\frac{0{,}93937-0{,}94433}{0{,}35-0{,}32} = -0,16533$	—	
0,35	0,34290	0,93937	—	—	—	—
0,35	0,34290	—	—	—	—	—

Fonte: Autoria própria.

Como temos $n = 2$ teremos um polinômio de grau $2n+1$, portanto 5^o grau, assim definimos o polinômio;

$$\begin{aligned} H_5 &= f[x_0] + f[x_0,x_0](x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2 + f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1) \\ &\quad + f[x_0,x_0,x_1,x_1,x_2](x-x_0)^2(x-x_1)^2 + f[x_0,x_0,x_1,x_1,x_2,x_2](x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2) \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Substituindo os valores encontrados, temos

$$\begin{aligned} H_5(x) &= 0,29552 + 0,95534(x-0,3) + (-0,142)(x-0,3)^2 + (-1,05)(x-0,3)^2(x-0,3) \\ &\quad +(20,732)(x-0,3)^2(x-0,3)^2 + (-431,412)(x-0,3)^2(x-0,3)^2(x-0,32) \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Aplicando $x = 0,34$

$$\begin{aligned} H_5(0,34) &= 0,29552 + 0,95534(0,34-0,3) + (-0,142)(0,34-0,3)^2 \\ &\quad +(-1,05)(0,34-0,3)^2(0,34-0,3) + (20,732)(0,34-0,3)^2(0,34-0,3)^2 \\ &\quad +(-431,412)(0,34-0,3)^2(0,34-0,3)^2(0,34-0,32) \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

$$H_5(0,34) \Rightarrow 0,33347$$

6 INTERPOLAÇÃO INVERSA

Dada a tabela

Tabela 26:

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$

Fonte: Autoria própria.

O problema da interpolação inversa consiste em: dado $\bar{y} \in (f(x_0), f(x_n))$, obter $\bar{x}$, tal que $f(\bar{x}) = \bar{y}$. Temos duas formas de se resolver este problema.

A primeira solução:

i) Obter $P_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ e em seguida encontrar $\bar{x}$ tal que $P_n(\bar{x}) = \bar{y}$(como mostra o exemplo que segue).

Exemplo 6.1 *Dada a tabela abaixo, encontrar $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 2$*

Tabela 27: Exemplo de uma tabela

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(x)$	1,65	1,82	2,01	2,23	2,46	2,72

Fonte: Autoria própria.

Como $2 \in (1,82; 2,01)$, *usaremos interpolação linear sobre* $x_0 = 0,6$ *e* $x_1 = 0,7$. *Assim,*

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(x_0)\frac{x - x_0}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ P_1(x) &\Rightarrow 1,82\frac{x - 0,7}{-0,1} + 2,01\frac{x - 0,6}{0,1} \\ P_1(x) &\Rightarrow -1,82x + 12,74 + 20,1x - 12,06 \\ P_1(x) &\Rightarrow 1,9x + 0,68 \end{aligned} \quad . \tag{6.0.1}$$

Então $P_1(\overline{x}) = 2 \Leftrightarrow 1,9\overline{x} + 0,68 = 2 \Leftrightarrow \overline{x} = \dfrac{2-0,68}{1,9} = 0,6947368$. *Neste caso, não conseguimos nem mesmo fazer uma estimativa do erro cometido, pois o que sabemos é medir o erro em se aproximar* $f(x)$ *por* $P_n(x)$*, e aqui queremos medir o erro cometido sobre x e não sobre* $f(x)$

ii) Interpolação inversa: Se $f(x)$ for inversível num intervalo contendo$\overline{y}$, então faremos a interpolação de $x = f^{-1}(y) = g(y)$. Uma condição para que uma função contínua num intervalo $[a,b]$ seja inversível é que seja monótona crescente (ou decrescente)neste intervalo.

Se $f(x)$ for dada na forma de tabela, supondo que $f(x)$ é contínua em (x_0, x_n), então $f(x)$ será admitida como monótona crescente se $f(x_0) < f(x_1) < \ldots < f(x_n)$ e decrescente se $f(x_0) > f(x_1) > \ldots > f(x_n)$.

Conforme dissemos acima, se a condição anterior for satisfeita, o problema de se obter $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{y}$ será facilmente resolvido, se for obtido o polinômio $P_n(y)$ que interpola $g(y) = f^{-1}(x)$ sobre $[y_0, y_n]$.

Para isto, basta considerar x como função de y e aplicar um método de interpolação: $x = f^{-1}(y) = g(y) \approx P_n(y)$.

Exemplo 6.2 *Dada a tabela*

Tabela 28:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y = e^{x_i}$	1	1,1052	1,2214	1,3499	1,4918	1,6487

Fonte: Autoria própria.

Obter x, tal que $e^x = 1,3165$*, usando um processo de interpolação quadrática.Usar a forma de Newton para obter* $P_2(y)$ *que interpola* $f^{-1}(y)$*.Construir a tabela de diferenças divididas.* ***Solução:*** *Primeiro passo é inverter os valores da tabela para calcular as diferenças divididas:*

Tabela 29: Tabela de Diferenças Divididas

y_i	$\Delta^0 g(y_i)$	$\Delta^1 g(y_i)$	$\Delta^2 g(y_i)$
1,2214	0,2	$\dfrac{0,3-0,2}{1,3499-1,2214} = 0,7782$	$\dfrac{0,7047-0,7782}{1,4918-1,2214} = -0,2718$
1,3499	0,3	$\dfrac{0,4-0,3}{1,4918-1,3499} = 0,7047$	——
1,4918	0,4	——	——

Fonte: Autoria própria.

Assim o polinômio interpolador na forma de Newton é dado por

$$P_2(y) \quad = \quad g[y_0] + g[y_0, y_1](y - y_0) + g[y_0, y_1, y_2](y - y_0)(y - y_1) \tag{6.0.2}$$

Substituindo os valores calculados na tabela das diferenças divididas e os valores já existentes são eles $y_0 = 1,2214$ *e* $y_1 = 1,3499$ *, temos:*

$$\begin{aligned} P_2(y) &= 0,2 + 0,7782(y - 1,2214) + (-0,2718)(y - 1,2214)(y - 1,3499) \\ P_2(y) &\Rightarrow 0,2 + 0,7782y - 0,9504 + (-0,2718)(y^2 - 2,5713y + 1,6487) \\ P_2(y) &\Rightarrow 0,7782y - 0,7504 - 0,2718y^2 + 0,6988y - 0,4481 \\ P_2(y) &\Rightarrow -1,1985 + 1,477y - 0,2718y^2 \end{aligned} \tag{6.0.3}$$

Aplicamos o valor de $y = 1,3165$*, obtemos:*

$$\begin{aligned} P_2(y) &= -1,1985 + 1,477y - 0,2718y^2 \\ P_2(1,3165) &= -1,1985 + 1,4779(1,3165) - 0,2718(1,3165)^2 \\ P_2(1,3165) &= 0,2748 \end{aligned} \tag{6.0.4}$$

Exemplo 6.3 *A tabela seguinte apresenta a velocidade de queda de um paraquedista em função do tempo:*

Figura 8:

Fonte:

a) *Estime em que instante **(tempo)** temos a velocidade igual a* $5245,80 cm/s$*, utilizando um polinômio interpolador de grau 3:*

Tabela 30: Tabela

$tempo(s)$	1	3	5	7	20
$velocidade(cm/s)$	800	2310	3090	3940	8000

Fonte: Autoria própria.

Solução: *Utilizando* ***ii)*** *iremos inverter a tabela para calcular as diferenças divididas, lembrando como o polinômio a ser calculado é 3ºgrau, teremos que utilizar somente quatro pontos da tabela sendo os mais próximos de 5245,80:*

Tabela 31: Tabela de Diferenças Divididas

y_i	$\Delta^0 g(y_i)$	$\Delta^1 g(y_i)$	$\Delta^2 g(y_i)$	$\Delta^3 g(y_i)$
2310	3	$\frac{5-3}{3090-2310} = 2,5641.10^{-3}$	$\frac{2,3529.10^{-3} - 2,5641.10^{-3}}{3940-2310} = -1,2955.10^{-7}$	$\frac{1,7292.10^{-7} - (-1,2955.10^{-7})}{8000-2310} = 5,3157.10^{-11}$
3090	5	$\frac{7-5}{3940-3090} = 2,3529.10^{-3}$	$\frac{3,2019.10^{-3} - 2,3529.10^{-3}}{8000-3090} = 1,7292.10^{-7}$	—
3940	7	$\frac{20-7}{8000-3940} = 3,2019.10^{-3}$	—	—
8000	20	—	—	—

Fonte: Autoria própria.

Assim o polinômio interpolador na forma de Newton é dado por:

$$\begin{aligned} P_3(y) &= g[y_0] + g[y_0,y_1](y-y_0) + g[y_0,y_1,y_2](y-y_0)(y-y_1) \\ &\quad + g[y_0,y_1,y_2,y_3](y-y_0)(y-y_1)(y-y_2) \end{aligned} \tag{6.0.5}$$

Aplicando os valores encontrado na tabela da diferença dividida temos:

$$\begin{aligned} P_3(y) &= 3 + 2,5641.10^{-3}(y-2310) + (-1,2955.10^{-7})(y-2310)(y-3090) \\ &\quad + (5,3157.10^{-11})(y-2310)(y-3090)(y-3940) \\ P_3(y) &= -5,3427 + 0,0047741y - 6,2604.10^{-7}y^2 + 5,3157.10^{-11}y^3 \end{aligned} \tag{6.0.6}$$

Aplicamos o valor de $y = 5245,8$, *obtemos:*

$$\begin{aligned} P_3(y) &= -5,3427 + 0,0047741y - 6,2604.10^{-7}y^2 + 5,3157.10^{-11}y^3 \\ P_3(5245,8) &= -5,3427 + 0,0047741(5245,8) - 6,2604.10^{-7}(5245,8)^2 \\ &\quad + 5,3157.10^{-11}(5245,8)^3 \\ P_3(5245,8) &= 10,147 \end{aligned} \tag{6.0.7}$$

Portanto no instante aproximado de $10,147$ *segundos temos a velocidade igual a* $5245,80cm/s$, *ou seja* $P_3(5245,8) \approx 10,147$. *Utilizando o aplicativo VCN, podemos encontrar o valor de* $y = 5245,8$ *no polinômio de* 3^o *grau:*

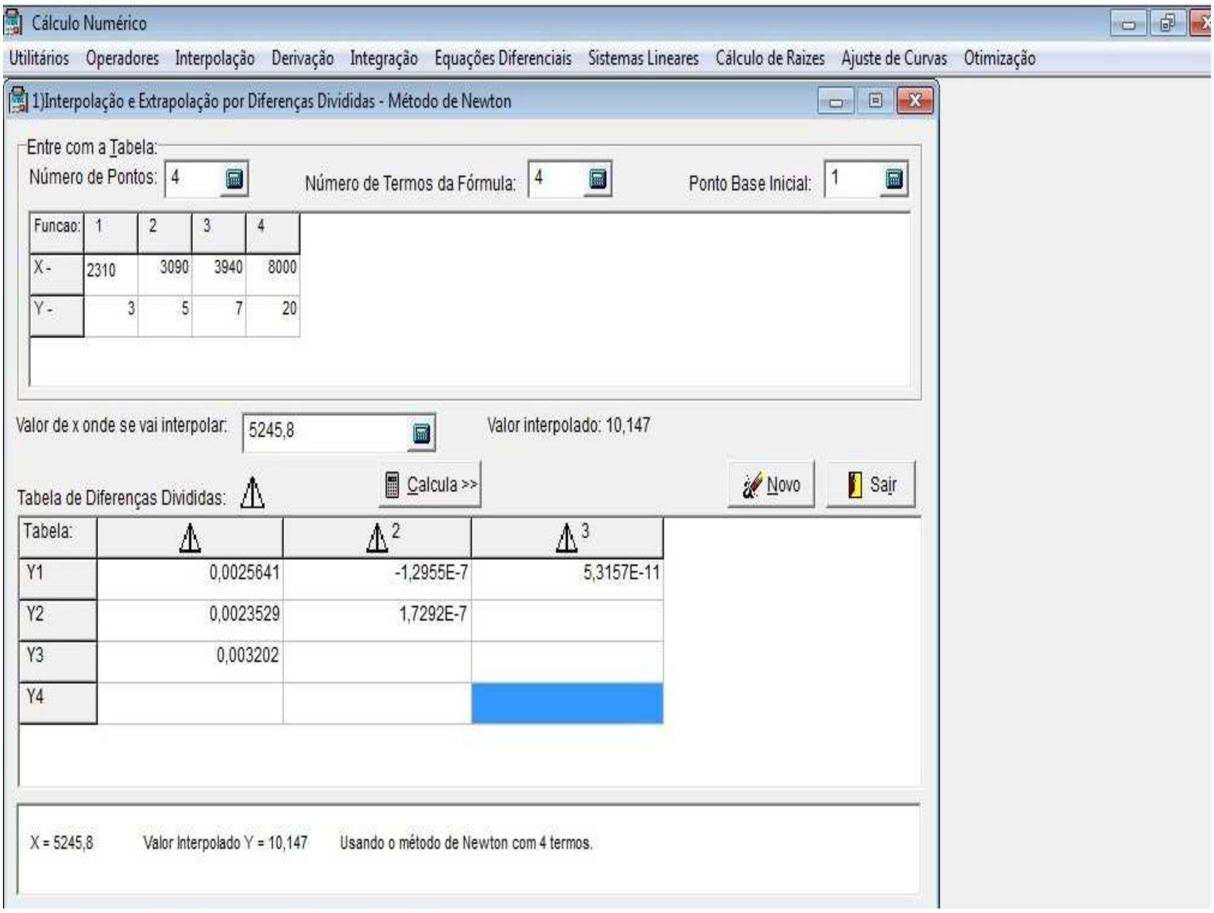


Figura 9:

Fonte:

Exemplo 6.4 *As estacas de madeira são empregadas nas edificações desde a antiguidade. Atualmente, diante das dificuldades de se obter madeiras de boa qualidade, sua utilização é bem mais reduzida. As estacas de madeira nada mais são do que troncos de árvores, bem retos e regulares, cravados normalmente por percussão, isto é golpeando-se o topo da estaca com pilões geralmente de queda livre. No Brasil a madeira mais empregada é o eucalipto, principalmente como fundação de obras provisórias. Para obras definitivas tem-se usado as denominadas ”madeiras de lei”como, por exemplo, a peroba, a aroeira, a maçaranduba e o ipê.Observe a tabela a seguir: Dada a tabela :*

Tabela 32:

Diâmetro(cm)	Carga(kN)
20	150
25	200
30	300
35	400
40	500

Fonte: Autoria Própria

a) *Determinar a função polinômial que melhor se ajusta a tabela de dados, aplicando o polinômio interpolador de* 4^o *grau .Sabendo que a carga admissível adotadas nas estacas de madeira é 483,3KN qual será o diâmetro ?*

Solução: *Utilizando* ***ii)*** *iremos inverter a tabela para calcular as diferenças divididas, lembrando como o polinômio a ser calculado é 4ºgrau, teremos que utilizar somente cinco pontos da tabela sendo os mais próximos de 483,3:*

Tabela 33: Tabela de Diferenças Divididas

y_i	$\Delta^0 g(y_i)$	$\Delta^1 g(y_i)$	$\Delta^2 g(y_i)$	$\Delta^3 g(y_i)$	$\Delta^4 g(y_i)$
150	20	$\frac{25-20}{200-150}=0,1$	$\frac{0,05-0,1}{300-150}=-0,000333$	$1,333310^{-6}$	$-3,809510^{-9}$
200	25	$\frac{30-25}{300-200}=0,05$	$\frac{0,05-0,05}{400-200}=0$	0	—
300	30	$\frac{35-30}{400-300}=0,05$	$\frac{0,05-0,05}{500-300}=0$	—	—
400	35	$\frac{40-35}{500-400}=0,05$	—	—	—
500	40	—	—	—	—

Fonte: Autoria própria.

Assim o polinômio interpolador na forma de Newton é dado por:

$$\begin{aligned} P_4(y) &= g[y_0]+g[y_0,y_1](y-y_0)+g[y_0,y_1,y_2](y-y_0)(y-y_1) \\ &\quad +g[y_0,y_1,y_2,y_3](y-y_0)(y-y_1)(y-y_2) \\ &\quad +g[y_0,y_1,y_2,y_3,y_4](y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3) \end{aligned} \tag{6.0.8}$$

Aplicando os valores encontrado na tabela da diferença dividida temos:

$$\begin{aligned} P_4(y) &= 20+0,1(y-150)-0,000333(y-150)(y-200) \\ &\quad +1,333310^{-6}(y-150)(y-200)(y-300) \\ &\quad -3,809510^{-9}(y-150)(y-200)(y-300)(y-400) \\ \Rightarrow P_4(y) &= -30,714+0,63667y-0,0027048y^2+5,333310-6y^3-3,809510^{-9}y^4 \end{aligned} \tag{6.0.9}$$

Aplicamos o valor de $y = 483,3$, obtemos:

$$\begin{aligned} P_4(483,3) &= -30,714+0,63667(483,3)-0,0027048(483,3)^2+5,333310-6(483,3)^3 \\ &\quad -3,809510^{-9}(483,3)^4 \\ \Rightarrow P_4(483,3) &= 39,44 \end{aligned} \tag{6.0.10}$$

Portanto o diâmetro deve-ser $39,44cm$ para admitir uma carga de $483,3KN$. Utilizando o aplicativo VCN, podemos encontrar o valor de $y = 483,3$ no polinômio de 4^o grau:

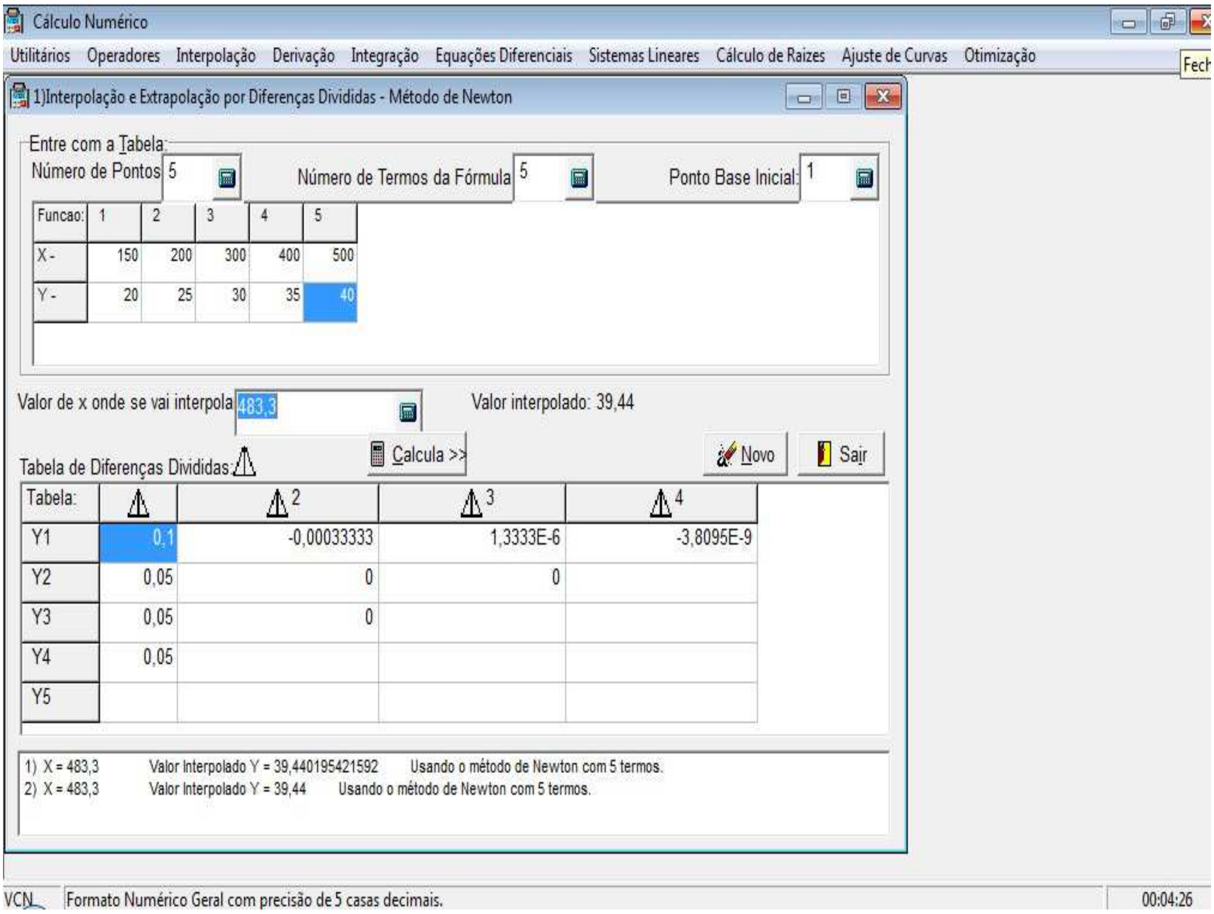


Figura 10:

Fonte: Autoria Própria

7 INTERPOLAÇÃO POR *SPLINE*

Na seção 6, polinômios de grau n foram usados para interpolar $n+1$ pontos dados. Por exemplo, para oito pontos, pode-se determinar exatamente um polinômio de grau sete. Essa curva captura todas as oscilações (pelo menos até a sétima derivada, inclusive) sugerida por esses pontos. Entretanto, há casos em que essas funções podem levar a resultados errôneos por causa de erros de arredondamento e de erros na estimativa. Uma abordagem alternativa é aplicar polinômios de grau mais baixo a subconjuntos dos pontos dados. Tais polinômios conectadores são chamados funções *splines*.

Por exemplo, curvas de terceiro grau usadas para conectar cada par de pontos dados são chamadas de *splines* cúbicos. Essas funções podem ser construídas de modo que as conexões entre equações cúbicas adjacentes sejam visualmente lisas. Superficialmente pareceria que a aproximação de terceiro grau por *splines* seria inferior a expressão de grau sete. Podemos nos perguntar em quais situações um *spline* seria preferível.

A Figura 11 ilustra uma situação na qual um *spline* funciona melhor do que um polinômio de grau mais alto. Esse é o caso quando uma função é lisa em geral, mas sofre uma mudança abrupta em algum ponto da região de interesse. O aumento em degrau mostrado na Figura 11 é um exemplo extremo de tal mudança e serve para ilustrar esse ponto.

As Figuras 11(a) a 11(c) ilustram como polinômios de grau mais alto tendem a passar por grandes oscilações na vizinhança de uma mudança abrupta. Em contraste o *spline* também liga os pontos, mas como é limitado as variações de grau mais baixo, as oscilações são mantidas em um mínimo. Dessa forma, os *splines*, em geral, fornecem uma aproximação superior do comportamento de funções que tem variações locais abruptas.

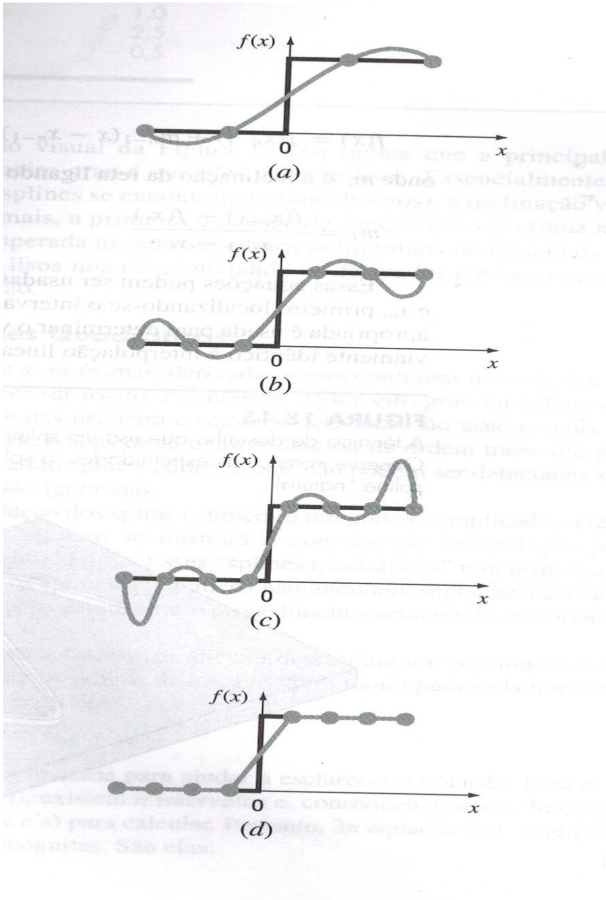


Figura 11: ***Splines* superiores aos polinômios interpoladores de grau mais alto**

Fonte: (CHAPRA; CANALE, 2008)

A Figura 11 é uma representação visual da situação na qual os splines são superiores aos polinômios interpoladores de grau mais alto. A função a ser ajustada sofre uma mudança brusca em $x = 0$. As Figuras 11(a) a 11(c) indicam que a variação abrupta induz oscilações nos polinômios interpoladores. Em contraste, como é limitado a segmentos de reta, um *spline* linear 11(d) fornece uma aproximação muito mais aceitável.

O conceito de *spline* originou-se de uma técnica de desenho na qual era usada uma faixa fina e flexível (chamada *spline*) para desenhar uma curva lisa passando por um conjunto de pontos. O processo é descrito na Figura 12 para uma série de 5 pinos (pontos dados). Nesta técnica, o desenhista coloca papel sobre uma tábua de madeira prega tachinhas, ou pinos no papel (e na tábua) nas posições dos pontos dados. Uma curva cúbica lisa resulta de intercalar a faixa entre os pinos. Assim, o nome (“*splines* cúbicos“) foi adotado para polinômios desse tipo.

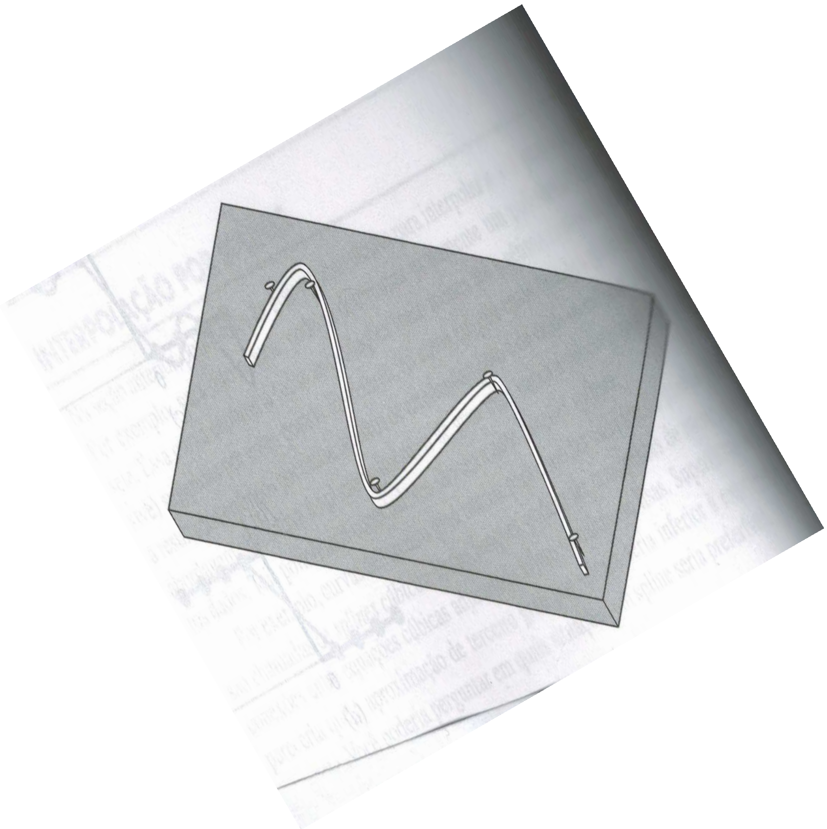


Figura 12: A técnica de desenho que usa um *spline* para desenhar curvas lisas por uma série de pontos.

Fonte: (CHAPRA; CANALE, 2008)

A Figura 12 é uma representação da técnica de desenho que usa um *spline* para desenhar curvas lisas por uma série de pontos. Observe como, nas extremidades, o spline se torna menos curvo. Isso é chamado de um *spline* natural.

7.1 *SPLINES* LINEARES

A ligação mais simples entre dois pontos é uma reta. Os *splines* de primeiro grau para um grupo de pontos ordenados podem ser definidos como um conjunto de funções lineares

$$\begin{array}{ccccccc} f(x) & = & f_1(x) & = & f(x_0)+m_0(x-x_0) & ; & x_0 \leq x \leq x_1 \\ f(x) & = & f_2(x) & = & f(x_1)+m_1(x-x_1) & ; & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ; & & \vdots & \\ f(x) & = & f_n(x) & = & f(x_{n-1})+m_{n-1}(x-x_{n-1}) & ; & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{array} , \qquad (7.1.1)$$

onde m_i é a inclinação da reta, dado por

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \ , \tag{7.1.2}$$

com $i = 0 \cdots n-1$. Essas equações podem ser usadas para calcular a função em qualquer ponto entre x_0 e x_n, para isso, primeiro localizamos o intervalo no qual o ponto se encontra. A seguir a equação apropriada é usada para determinar o valor da função dentro do intervalo. O método é obviamente à interpolação linear.

Exemplo 7.1 *Ajuste os dados da Tabela 34 com um spline de primeiro grau. Calcule a função em* $x = 5$.

Tabela 34:

x	f(x)
3,0	2,5
4,5	1,0
7,0	2,5
9,0	0,5

Fonte: (CHAPRA; CANALE, 2008)

Solução: *Para encontrarmos a spline de primeiro grau, encontraremos splines lineares para cada subintervalo.*

1. *No primeiro* $[3; 4,5]$, *temos*

$$f(x) = f_1(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) \quad ; \quad x_0 \leq x \leq x_1 \ , \tag{7.1.3}$$

onde $x_0 = 3$, $x_1 = 4,5$ *e*

$$m_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 2,5}{4,5 - 3} = -1 \ . \tag{7.1.4}$$

Portanto,

$$f(x) = f_1(x) = 2,5 - 1(x - 3) = -x + 5,5 \quad ; \quad 3 \leq x \leq 4,5 \ . \tag{7.1.5}$$

2. *No segundo* $[4,5; 7]$, *temos*

$$f(x) = f_2(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) \quad ; \quad x_1 \leq x \leq x_2 \ , \tag{7.1.6}$$

onde $x_1 = 4,5$, $x_2 = 7$ *e*

$$m_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2,5-1}{7-4,5} = 0,60 \ . \quad (7.1.7)$$

Portanto,

$$f(x) = f_2(x) = 1 + 0,60(x-4,5) = 0,60x - 1,7 \quad ; \quad 4,5 \leq x \leq 7,0 \ . \quad (7.1.8)$$

3. *No terceiro* $[7;9]$, *temos*

$$f(x) = f_3(x) = f(x_2) + m_2(x - x_2) \quad ; \quad x_2 \leq x \leq x_3 \ , \quad (7.1.9)$$

onde $x_2 = 7$, $x_3 = 9$ *e*

$$m_2 = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{0,5-2,5}{9-7} = -1 \ . \quad (7.1.10)$$

Portanto,

$$f(x) = f_3(x) = 2,5 - 1(x-7) = -1x + 9,5 \quad ; \quad 7 \leq x \leq 9 \ . \quad (7.1.11)$$

Portanto, o Spline Linear e dado por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -x + 5,5 & ; \quad 3 \leq x \leq 4,5 \\ f_2(x) = 0,60x - 1,7 & ; \quad 4,5 \leq x \leq 7,0 \\ f_3(x) = -1x + 9,5 & ; \quad 7,0 \leq x \leq 9,0 \end{cases} \ . \quad (7.1.12)$$

cujo gráfico é

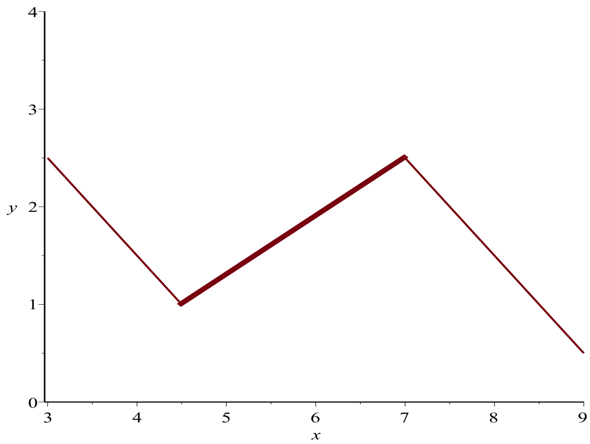


Figura 13: *Spline* Linear

Fonte: Autoria Própria

A inspeção visual da Figura 13 indica que a principal desvantagem dos splines de primeiro grau é que eles não são lisos. Essencialmente, nos pontos dados nos quais dois splines se encontram (chamados nós), a inclinação varia abruptamente. Em termos formais, a primeira derivada da função é descontínua nesses pontos. Essa deficiência é superada usando splines polinomiais de grau mais alto, que garantem que eles sejam lisos nos nós, igualando as derivadas em tais pontos.

Para encontrar a estimativa do valor em $x = 5$*, calculamos*

$$f(5) = f_2(5) \quad = \quad 0,6(5) - 1,7 \quad = \quad 1,3 \ , \tag{7.1.13}$$

pois $5 \in [4,5;7]$*. Concluímos que* $f(5) = 1,3$*. A spline de primeiro grau resultante está traçado na Figura* **??***(a).*

Utilizando o aplicativo VCN podemos calcular o spline linear definido no intervalo $[4,5;7]$*. Para este cálculo no VCN digitamos os valores de* x_1*,* x_2*,* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$*, sendo o número de pontos iguais a* $n+1 = 2$*. O grau do polinômio linear é* $n = d = 1$ *e não teremos nenhuma derivada igual a zero, pois a condição de spline linear é* $d-1 = 1-1 = 0$*.*

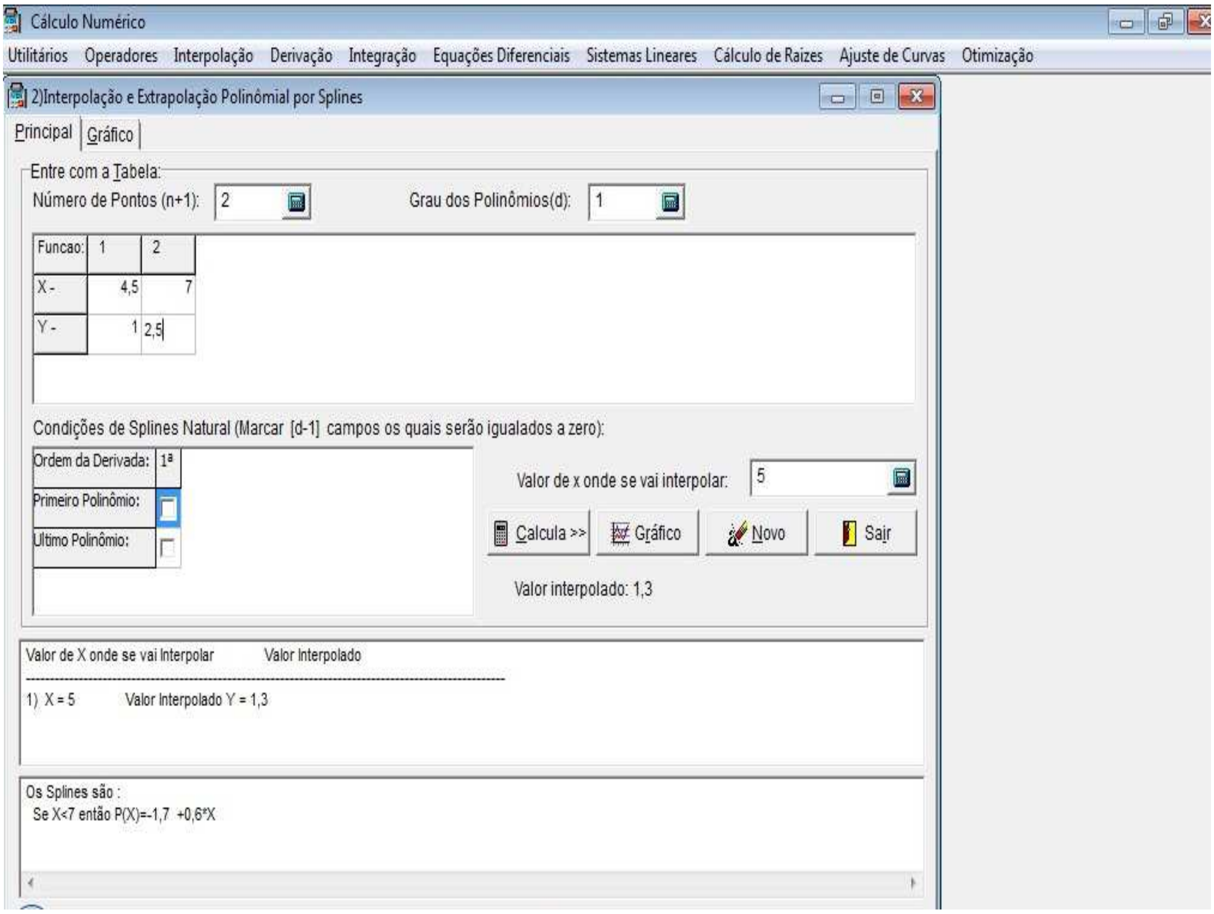


Figura 14: ***Spline*** **calculada com uso do VCN**

Fonte: Autoria Própria.

7.2 *SPLINES* QUADRÁTICOS

Para garantir que as m-ésimas derivadas sejam contínuas nos nós, um *spline* de grau pelo menos $m+1$ podem ser usado. Polinômios de terceiro grau ou *splines* cúbicos que garantam continuidade das primeira e segunda derivadas são usados mais frequentemente na prática. Embora derivadas de terceira ordem ou de ordem mais alta possam ser descontinuas quando usando *splines* cúbicos, elas não podem ser detectadas visualmente e, consequentemente, são ignoradas.

Como a dedução dos *splines* cúbicos é um pouco complicada, primeiro ilustraremos o conceito de interpolação por *spline* usando polinômios de segundo grau. Esses *splines* quadráticos tem primeira derivada contínua nos nós. Embora os *splines* quadráticos não garantam segundas derivadas iguais nos nós, eles servem bem para demonstrar o procedimento geral no desenvolvimento de *splines* de grau mais alto.

O objetivo dos *splines* quadráticos é determinar um polinômio de segundo grau para cada intervalo entre os pontos dados. Esse polinômio para cada intervalo pode ser representado por

$$f_i(x) \quad = \quad a_i x^2 + b_i x + c_i \ . \tag{7.2.14}$$

A Figura 15 foi incluída para ajudar a esclarecer a notação. Para $n+1$ pontos dados ($i = 0,1,2,\ldots,n$), existe n intervalos e, consequentemente, $3n$ constantes indeterminadas (os a's, b's e c's) para calcular. Portanto, $3n$ equações, ou condições são necessárias para calcular as incógnitas. São elas

1. Os valores da função e dos polinômios adjacentes devem ser iguais nos nós interiores. Essa condição pode ser representada por

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} \quad = \quad f(x_{i-1}) \ , \tag{7.2.15}$$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i \quad = \quad f(x_{i-1}) \ , \tag{7.2.16}$$

   para $i = 2,3,\ldots,n$. Como apenas os nós inferiores foram usados, as Equações (7.2.15) e (7.2.16) fornecem cada uma $n-1$ condições para um total de $2n-2$ condições.

2. As primeira e ultima funções devem passar pelos pontos extremos. Isso acrescenta duas equações adicionais:

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 \quad = \quad f(x_0) \ , \tag{7.2.17}$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n \quad = \quad f(x_n) \ , \tag{7.2.18}$$

   para um total de $2n-2+2 = 2n$ condições.

3. As primeiras derivadas nos nós interiores devem ser iguais. A primeira derivada da equação (7.2.14) é:

$$f'(x) \quad = \quad 2ax + b \ . \tag{7.2.19}$$

   Portanto, a condição pode ser representa de modo geral por

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} \quad = \quad 2a_i x_{i-1} + b_i \ , \tag{7.2.20}$$

   para $i = 2,3,\ldots,n$. Isso fornece outras $n-1$ condições para um total de $2n+n-1 = 3n-1$. Como temos $3n$ incógnitas, ainda falta uma condição. A menos que se tenha alguma informação adicional relativa ás funções ou suas derivadas, é preciso fazer uma escolha arbitrária para ter sucesso no calculo das constantes. Embora existam diversas escolhas diferentes possíveis, optamos pela seguinte:

4. Suponha que a segunda derivada seja nula no primeiro ponto. Como a segunda derivada da equação (7.2.14) é $2a_i$, essa condição pode ser expressa matematicamente como

$$a_1 = 0 \; . \tag{7.2.21}$$

A interpretação visual desta condição é que os primeiros dois pontos serão ligados por uma reta.

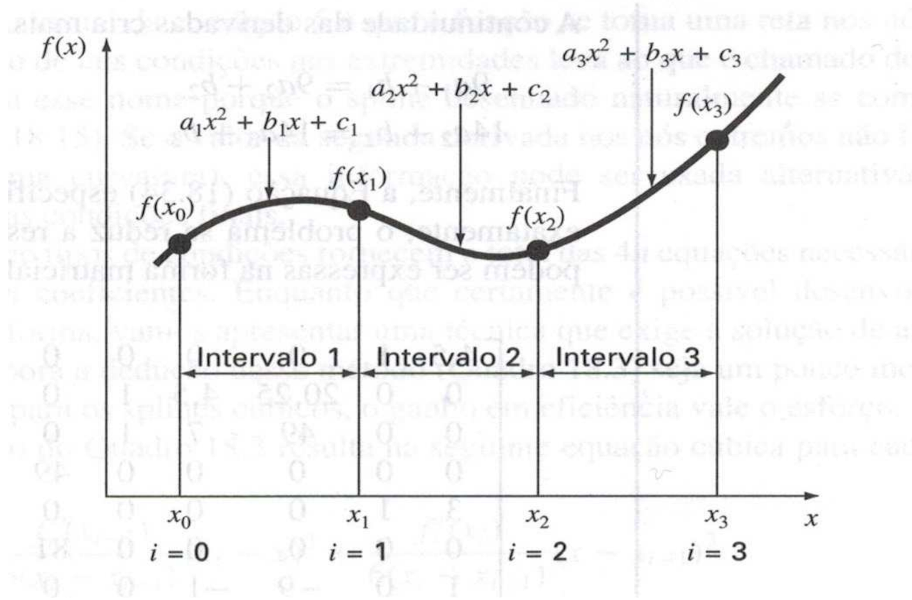


Figura 15: Notação usada para deduzir *splines* quadráticas.

Fonte: (CHAPRA; CANALE, 2008)

Exemplo 7.2 *Ajuste um spline quadrático aos mesmo dados usados no exemplo 7.1. Use os resultados para fazer uma estimativa do valor em* $x = 5$.

Solução: *Conforme podemos observar a Tabela 34, existem quatro pontos e* $n = 3$ *intervalos. Portanto,* $3n = 3(3) = 9$ *incógnitas devem ser determinadas. As Equações (7.2.15) e (7.2.16) fornecem* $2n-2 = 2(3)-2 = 4$ *condições, duas para* $i = 2$ *e duas para* $i = 3$.

$$\begin{aligned} a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 &= f(x_1) \\ a_2x_2^2 + b_2x_2 + c_2 &= f(x_2) \\ a_2x_1^2 + b_2x_1 + c_2 &= f(x_1) \\ a_3x_2^2 + b_3x_2 + c_3 &= f(x_2) \end{aligned} \; . \tag{7.2.22}$$

Substituindo $x_1 = 4,5$ e $x_2 = 7$ nas equações dadas em (7.2.22), obtemos

$$\begin{aligned} 20,25a_1 + 4,5b_1 + c_1 &= 1,0 \\ 20,25a_2 + 4,5b_2 + c_2 &= 1,0 \\ 49a_2 + 7b_2 + c_2 &= 2,5 \\ 49a_3 + 7b_3 + c_3 &= 2,5 \end{aligned} \quad . \tag{7.2.23}$$

Como as primeira e última funções passam pelos valores inicial e final, temos mais duas condições das equações (7.2.17) e (7.2.18), dadas por

$$a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = f(x_0) \tag{7.2.24}$$

e

$$a_3x_3^2 + b_3x_3 + c_3 = f(x_3) \ . \tag{7.2.25}$$

Ao substituirmos $x_0 = 3$ e $x_3 = 9$ nas equações (7.2.24) e (7.2.25), temos

$$9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2,5 \tag{7.2.26}$$

e

$$81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0,5 \ . \tag{7.2.27}$$

A continuidade das derivadas cria mais $n-1 = 3-1 = 2$ equações, dadas pela equação (7.2.20) com $i = 2,3$. Temos

$$2a_1x_1 + b_1 = 2a_2x_1 + b_2 \tag{7.2.28}$$

e

$$2a_2x_2 + b_2 = 2a_3x_2 + b_3 \ . \tag{7.2.29}$$

Ao substituirmos $x_1 = 4,5$ e $x_2 = 7$ nas equações (7.2.28) e (7.2.29), temos

$$9a_1 + b_1 = 9a_2 + b_2 \tag{7.2.30}$$

e

$$14a_2 + b_2 = 14a_3 + b_3 \ . \tag{7.2.31}$$

Finalmente, a equação (7.3.51) fornece $a_1 = 0$.

Portanto, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 20,25a_1+4,5b_1+c_1 &= 1,0 \\ 20,25a_2+4,5b_2+c_2 &= 1,0 \\ 49a_2+7b_2+c_2 &= 2,5 \\ 49a_3+7b_3+c_3 &= 2,5 \\ 9a_1+3b_1+c_1 &= 2,5 \\ 81a_3+9b_3+c_3 &= 0,5 \\ 9a_1+b_1-9a_2-b_2 &= 0 \\ 14a_2+b_2-14a_3-b_3 &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{cases}. \tag{7.2.32}$$

Observe que podemos reduzir o sistema para oito equações, visto que $a_1 = 0$*. De fato,*

$$\begin{cases} 4,5b_1+c_1 &= 1,0 \\ 20,25a_2+4,5b_2+c_2 &= 1,0 \\ 49a_2+7b_2+c_2 &= 2,5 \\ 49a_3+7b_3+c_3 &= 2,5 \\ +3b_1+c_1 &= 2,5 \\ 81a_3+9b_3+c_3 &= 0,5 \\ +b_1-9a_2-b_2 &= 0 \\ 14a_2+b_2-14a_3-b_3 &= 0 \end{cases}. \tag{7.2.33}$$

Tais condições podem ser expressas na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 4,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20,25 & 4,5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.2.34}$$

Esse sistema pode ser resolvido pelo método de Eliminação de Gauss. No entanto, por apresentar uma resolução extensa, usamos o aplicativo VCN para obter a solução do sistema, como indicado na Figura 16.

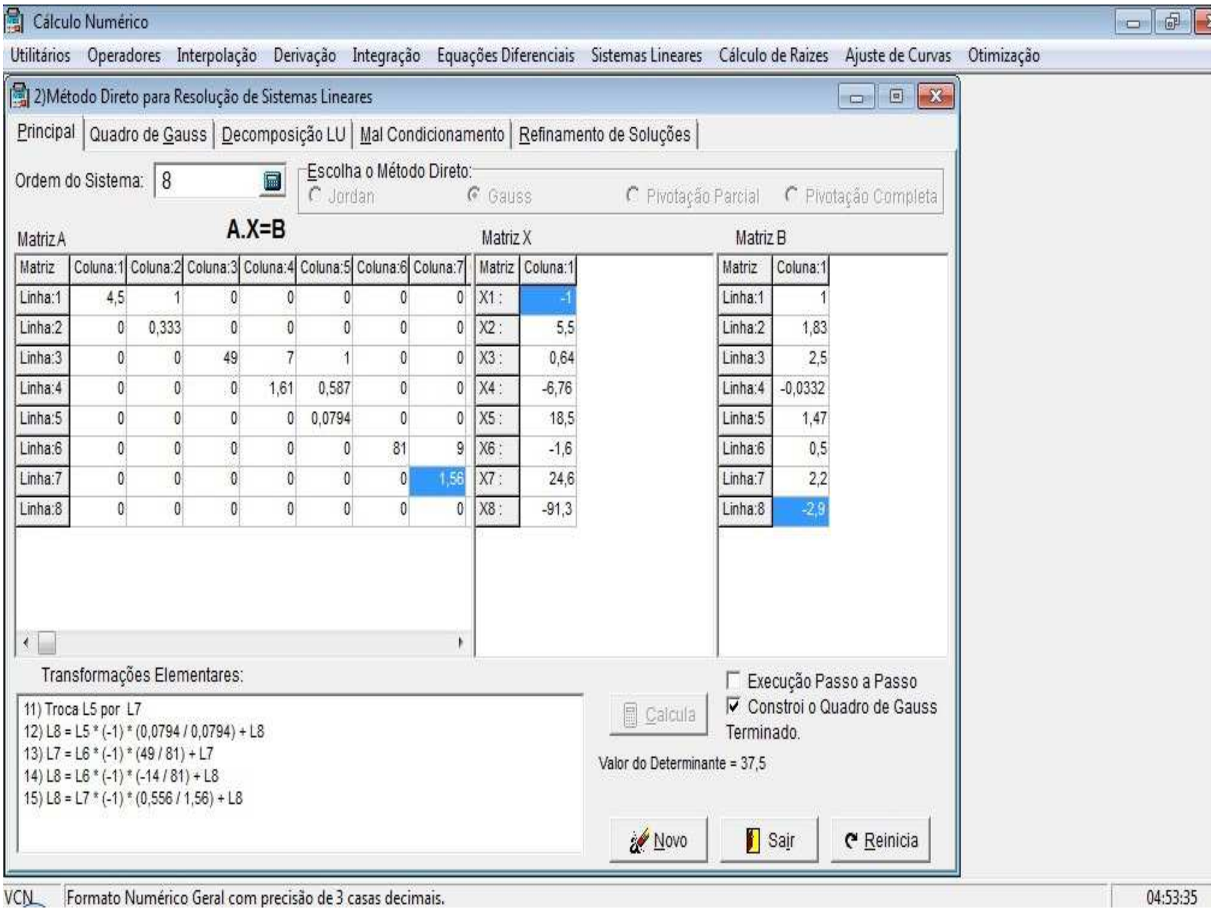


Figura 16: Solução do sistema via VCN para obter o *spline* quadrático

Ao observar a Figura 16, obtemos

$$\begin{array}{lllllllll} a_1 & = & 0 & ; & b_1 & = & -1 & ; & c_1 = 5,5 \\ a_2 & = & 0,64 & ; & b_2 & = & -6,76 & ; & c_2 = 18,46 \\ a_3 & = & -1,6 & ; & b_3 & = & 24,6 & ; & c_3 = -91,3 \end{array} . \qquad (7.2.35)$$

Substituindo esses valores na equação quadrática

$$f_i(x) \;=\; a_i x^2 + b_i x + c_i \quad ; \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \; , \qquad (7.2.36)$$

com $i = 1 \ldots 3$, *determinamos o Spline Quadrático. De fato,*

- *Para* $i = 1$, *obtemos*

$$f_1(x) \;=\; a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \quad ; \quad x_0 \leq x \leq x_1 \; . \qquad (7.2.37)$$

Sabendo que $a_1 = 0$, $b_1 = -1$, $c_1 = 5,5$, $x_0 = 3,0$ *e* $x_1 = 4,5$, *temos:*

$$f_1(x) \;=\; -x + 5,5 \quad ; \quad 3 \leq x \leq 4,5 \; . \qquad (7.2.38)$$

- *Para* $i = 2$, *temos*

$$f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \quad ; \quad x_1 \leq x \leq x_2 \ , \tag{7.2.39}$$

onde $a_2 = 0,64$, $b_2 = -6,76$ *e* $c_2 = 18,46$, $x_1 = 4,5$ *e* $x_2 = 7$. *Daí*

$$f_2(x) = 0,64x^2 - 6,76x + 18,46 \quad ; \quad 4,5 \leq x \leq 7,0 \ . \tag{7.2.40}$$

- *Para* $i = 3$, *temos*

$$f_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3 \quad ; \quad x_2 \leq x \leq x_3 \ , \tag{7.2.41}$$

onde $a_3 = -1,6$, $b_3 = 24,6$, $c_3 = -91,3$, $x_2 = 7$ *e* $x_3 = 9$. *Logo*

$$f_3(x) = -1,6x^2 + 24,6x - 91,3 \quad ; \quad 7,0 \leq x \leq 9,0 \ . \tag{7.2.42}$$

Portanto, o Spline Quadrático é

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -x + 5,5 & ; \quad 3 \leq x \leq 4,5 \\ f_2(x) = 0,64x^2 - 6,76x + 18,46 & ; \quad 4,5 \leq x \leq 7,0 \\ f_3(x) = -1,6x^2 + 24,6x - 91,3 & ; \quad 7,0 \leq x \leq 9,0 \end{cases} , \tag{7.2.43}$$

Para encontrar o valor em $x = 5$, *calculamos*

$$f(5) = f_2(5) = 0,64(5)^2 - 6,76(5) + 18,46 = 0,66 \ , \tag{7.2.44}$$

pois $5 \in [4,5;7]$.

o gráfico do Spline quadrático é dado por

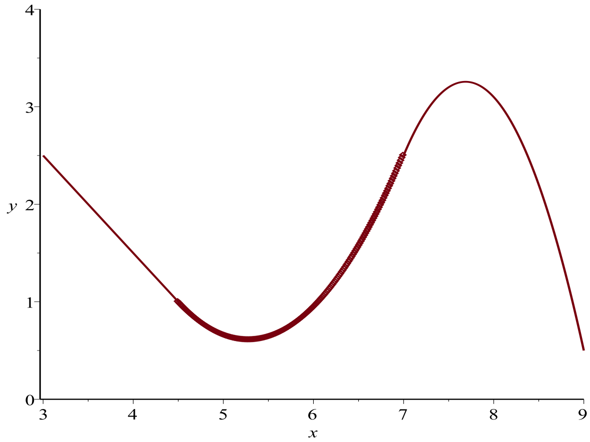


Figura 17: *Spline* Quadrático

Fonte: Autoria Própria

Observe que há duas desvantagens que prejudicam o ajuste:

1. *A reta ligando os dois primeiros pontos ;*
2. *O spline para o último intervalo parece ir muito alto;*

Os splines cúbicos da próxima seção 7.3 não exibem essas desvantagens e, como consequência, são métodos melhores para interpolação por splines.

7.3 *SPLINES* CÚBICOS

O objetivo nos splines cúbicos é determinar um polinômio de terceiro grau para cada intervalo entre os nós, como em

$$f_i(x) \quad = \quad a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \ . \tag{7.3.45}$$

onde $i = 1, 2, \cdots, n$. Logo, para $n+1$ pontos dados existem n intervalos e, consequentemente $4n$ constantes indeterminadas para calcular. Exatamente como para os *splines* quadráticos, $4n$ condições são necessárias para calcular as incógnitas. São elas:

1. Os valores da função e dos polinômios adjacentes devem ser iguais nos nós interiores ($2n-2$ condições).
2. A primeira e a última função devem passar pelos pontos extremos (2 condições).
3. As primeiras derivadas nos nós interiores devem ser iguais ($n-1$ condições).

4. As segundas derivadas nos nós interiores devem ser iguais ($n-1$ condições).

5. As segundas derivadas nos nós extremos são nulas (2 condições).

A interpretação visual da quinta condição é que a função se torna uma reta nos extremos. A especificação de tais condições nas extremidades leva ao que é chamado de *spline* natural, que tem este nome por que o *spline* desenhado naturalmente se comporta dessa forma Figura 34. Se o valor da segunda derivada nos nós extremos não for nula (isso é, existe alguma curvatura), essa informação pode ser usada alternativamente para fornecer as duas condições finais.

Esses cinco tipos de condições fornecem o total das $4n$ equações necessárias para determinar os $4n$ coeficientes. Enquanto que certamente é possivel desenvolver *splines* cúbicos dessa forma, vamos apresentar uma técnica que exige a solução de apenas $n-1$ equação. Embora a dedução deste método seja um pouco simples do que aquela para os *splines* cúbicos, o ganho em eficiência vale o esforço.

O primeiro passo na dedução é baseado na observação de que, como cada par de nós é ligado por um polinômino cúbico, a segunda derivada no interior de cada intervalo é uma reta. Para verificar isso, basta derivar duas vezes a equação (7.3.45). De fato,

$$f_i'(x) = 3a_ix^2 + 2b_ix + c_i \tag{7.3.46}$$

e

$$f_i''(x) = 6a_ix + 2b_i \ . \tag{7.3.47}$$

Com base nisso, as segundas derivadas podem ser representadas por um polinômino interpolador de Lagrange de primeiro grau

$$f_i''(x) = f_i''(x_{i-1})\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} + f_i''(x_i)\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \ . \tag{7.3.48}$$

onde $f''(x)$ é o valor da segunda derivada em um ponto qualquer x no i-ésimo intervalo. Logo, essa equação é uma reta ligando a segunda derivada no primeiro nó $f''(x_{i-1})$ com a segunda derivada no segundo nó $f''(x_i)$.

A seguir, a equação (7.3.48) pode ser integrada duas vezes para fornecer uma expressão para $f_i(x)$. Entretanto, essa expressão irá conter duas constantes de integração indeterminadas. Tais constantes podem ser determinadas invocando a condição de igualdade das funções: $f_i(x)$ deve ser igual a $f(x_{i-1})$ em x_{i-1} e $f_i(x)$ deve ser igual a $f(x_i)$ em x_i. Fazendo esses cálculos, obtém-se a seguinte equação cúbica

$$
\begin{aligned}
f_i(x) \;=\;& \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 \\
&+ \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) \quad . \qquad (7.3.49) \\
&+ \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1})
\end{aligned}
$$

Agora, sem dúvidas, essa relação é uma expressão muito mais complicada para o *spline* cúbico para o i-ésimo intervalo do que, por exemplo, a Equação(7.3.45). Entretanto, observe que ela contém apenas dois “coeficientes”indeterminados, as segundas derivadas no início e no final do intervalo $f''(x_{i-1})$ e $f''(x_i)$. Logo, se determinarmos as segundas derivadas adequadas em cada nó, a equação (7.3.49) será um polinômio de terceiro grau que pode ser usado para interpolar o intervalo.

As segundas derivadas podem ser calculadas usando a condição de que as primeiras derivadas nos nós devem ser contínuas:

$$
f_i'(x_i) \;=\; f_{i+1}'(x_i) \quad . \qquad (7.3.50)
$$

A equação (7.3.49) pode ser derivada para dar uma expressão para a primeira derivada. Se isso for feito para os i-ésimo e $(i-1)$-ésimo intervalos e se os dois resultados forem igualmente de acordo com a equação (7.3.50), resultam as seguintes relações

$$
\begin{aligned}
& (x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) \\
=\;& \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)] \quad . \qquad (7.3.51)
\end{aligned}
$$

Se a equação (7.3.51) for escrita para todos os nós interiores, teremos $n-1$ equação simultâneas com $n+1$ segundas derivadas. Contudo, como esse é um *spline* cúbico natural, as segundas derivadas nos nós extremos são nulas e o problema se reduz a $n-1$ equações com $n-1$ inógnitas. Além disso, observe que o sistema de equações será tridiagonal. Logo, não apenas reduzimos o números de equações, como também as colocamos em uma forma que é extremamente fácil de resolver.

A aplicação dessas equações pode ser observada no próximo exemplo.

Exemplo 7.3 *Ajuste splines cúbicos aos mesmos dados nos Exemplos 7.1 e 7.2 (Tabela 34). Utilize os resultados para fazer uma estimativa do valor em* $x = 5$.

Solução: *O primeiro passo é usar a equação (7.3.51) para gerar um conjunto de equações simultâneas que serão utilizadas para determinar as segundas derivadas nos nós. Para isso, escolhendo $i = 1$ e $i = 2$, na equação (7.3.51), temos*

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_0) f''(x_0) + 2(x_2 - x_0) f''(x_1) + (x_2 - x_1) f''(x_2) \\ = \; & \frac{6}{x_2 - x_1} [f(x_2) - f(x_1)] + \frac{6}{x_1 - x_0} [f(x_0) - f(x_1)] \end{aligned} \tag{7.3.52}$$

e

$$\begin{aligned} & (x_2 - x_1) f''(x_1) + 2(x_3 - x_1) f''(x_2) + (x_3 - x_2) f''(x_3) \\ = \; & \frac{6}{x_3 - x_2} [f(x_3) - f(x_2)] + \frac{6}{x_2 - x_1} [f(x_1) - f(x_2)] \end{aligned} . \tag{7.3.53}$$

Observando a Tabela 34, podemos retirar os dados necessários para os nós interiores:

$$\begin{array}{rcccrcc} x_0 & = & 3 & \Rightarrow & f(x_0) & = & 2,5 \\ x_1 & = & 4,5 & \Rightarrow & f(x_1) & = & 1 \\ x_2 & = & 7 & \Rightarrow & f(x_2) & = & 2,5 \\ x_3 & = & 9 & \Rightarrow & f(x_3) & = & 0,5 \end{array} . \tag{7.3.54}$$

Ao substituirmos esses valores nas equações (7.3.52) e (7.3.53), temos

$$\begin{aligned} & (4,5 - 3) f''(3) + 2(7 - 3) f''(4,5) + (7 - 4,5) f''(7) \\ = \; & \frac{6}{7 - 4,5} [f(7) - f(4,5)] + \frac{6}{4,5 - 3} [f(3) - f(4,5)] \end{aligned} \tag{7.3.55}$$

e

$$\begin{aligned} & (7 - 4,5) f''(4,5) + 2(9 - 4,5) f''(7) + (9 - 7) f''(9) \\ = \; & \frac{6}{9 - 7} [0,5 - 2,5] + \frac{6}{7 - 4.5} [1 - 2,5] \end{aligned} . \tag{7.3.56}$$

Utilizando a condição de Spline natural, $f''(3) = 0$ e $f''(9) = 0$, e substituindo esses valores nas equações (7.3.55) e (7.3.56), obtemos o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 8 f''(4,5) + 2,5 f''(7) & = & 9,6 \\ 2,5 f''(4,5) + 9 f''(7) & = & -9,6 \end{array} \right. , \tag{7.3.57}$$

cuja solução é dada por

$$f''(4,5) = 1,67909 \quad e \quad f''(7) = -1,53308 \; . \tag{7.3.58}$$

Considerando i igual a 1, 2 *e* 3 *na equação (7.3.49), encontramos*

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{f_1''(x_0)}{6(x_1-x_0)}(x_1-x)^3+\frac{f_1''(x_1)}{6(x_1-x_0)}(x-x_0)^3 \\
&+\left[\frac{f(x_0)}{x_1-x_0}-\frac{f''(x_0)(x_1-x_0)}{6}\right](x_1-x) \quad , \\
&+\left[\frac{f(x_1)}{x_i-x_0}-\frac{f''(x_1)(x_1-x_0)}{6}\right](x-x_0)
\end{aligned}
\tag{7.3.59}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{f_2''(x_1)}{6(x_2-x_1)}(x_2-x)^3+\frac{f_2''(x_2)}{6(x_2-x_1)}(x-x_1)^3 \\
&+\left[\frac{f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f''(x_1)(x_2-x_1)}{6}\right](x_2-x) \quad . \\
&+\left[\frac{f(x_2)}{x_2-x_1}-\frac{f''(x_2)(x_2-x_1)}{6}\right](x-x_1)
\end{aligned}
\tag{7.3.60}
$$

e

$$
\begin{aligned}
f_3(x) &= \frac{f_3''(x_2)}{6(x_3-x_2)}(x_3-x)^3+\frac{f_3''(x_3)}{6(x_3-x_2)}(x-x_2)^3 \\
&+\left[\frac{f(x_2)}{x_3-x_2}-\frac{f''(x_2)(x_3-x_2)}{6}\right](x_3-x) \quad . \\
&+\left[\frac{f(x_3)}{x_3-x_2}-\frac{f''(x_3)(x_3-x_2)}{6}\right](x-x_2)
\end{aligned}
\tag{7.3.61}
$$

Substituindos os valores dos x's e os $f(x)'$s e utilizando a ideia de ser uma Spline natural, obtemos

$$
f_1(x) = 0,186566(x-3)^3+1,666667(4,5-x)+0,246894(x-3) \ , \tag{7.3.62}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= 0,111939(7-x)^3-0,102205(x-4,5)^3-0,299621(7-x) \\
&+1,638783(x-4,5)
\end{aligned} \quad , \tag{7.3.63}
$$

e

$$
f_3(x) = -0,127757(9-x)^3+1,761027(9-x)+0,25(x-7) \ . \tag{7.3.64}
$$

Portanto, o Spline Cúbico é dado por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) &= \begin{array}{l} 0,186566(x-3)^3 + 1,666667(4,5-x) \\ +0,246894(x-3) \end{array} & ; \quad 3 \leq x \leq 4,5 \\ \\ f_2(x) &= \begin{array}{l} 0,111939(7-x)^3 - 0,102205(x-4,5)^3 \\ -0,299621(7-x) + 1,638783(x-4,5) \end{array} & ; \quad 4,5 \leq x \leq 7,0 \\ \\ f_3(x) &= \begin{array}{c} -0,127757(9-x)^3 + 1,761027(9-x) \\ +0,25(x-7) \end{array} & ; \quad 7,0 \leq x \leq 9,0 \end{cases} , \quad (7.3.65)$$

cujo gráfico é

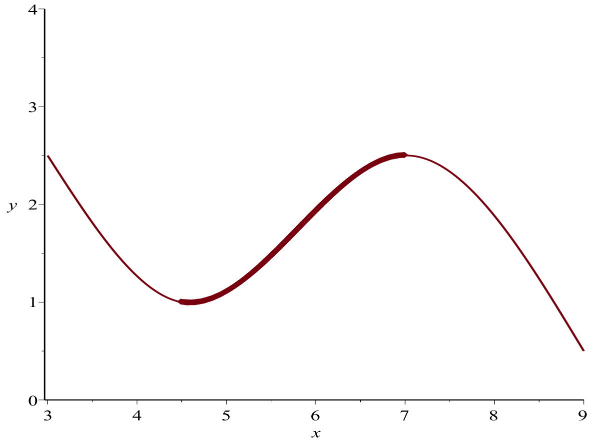


Figura 18: *Spline* Cúbico

Fonte: Autoria Própria

Para calcular o valor em $x = 5$*, que pertence ao segundo intervalo, temos*

$$\begin{aligned} f(5) = f_2(5) &= 0,111939(7-5)^3 - 0,102205(5-4,5)^3 - 0,299621(7-5) \\ &\quad +1,638783(5-4,5) \qquad (7.3.66) \\ \Rightarrow \qquad f(5) &= 1,102889 \end{aligned}$$

Utilizando o aplicativo VCN podemos encontrar os polinômios em cada intervalo e depois calcular o valor interpolado, neste caso $x = 5$*, conforme indicado na Figura 19.*

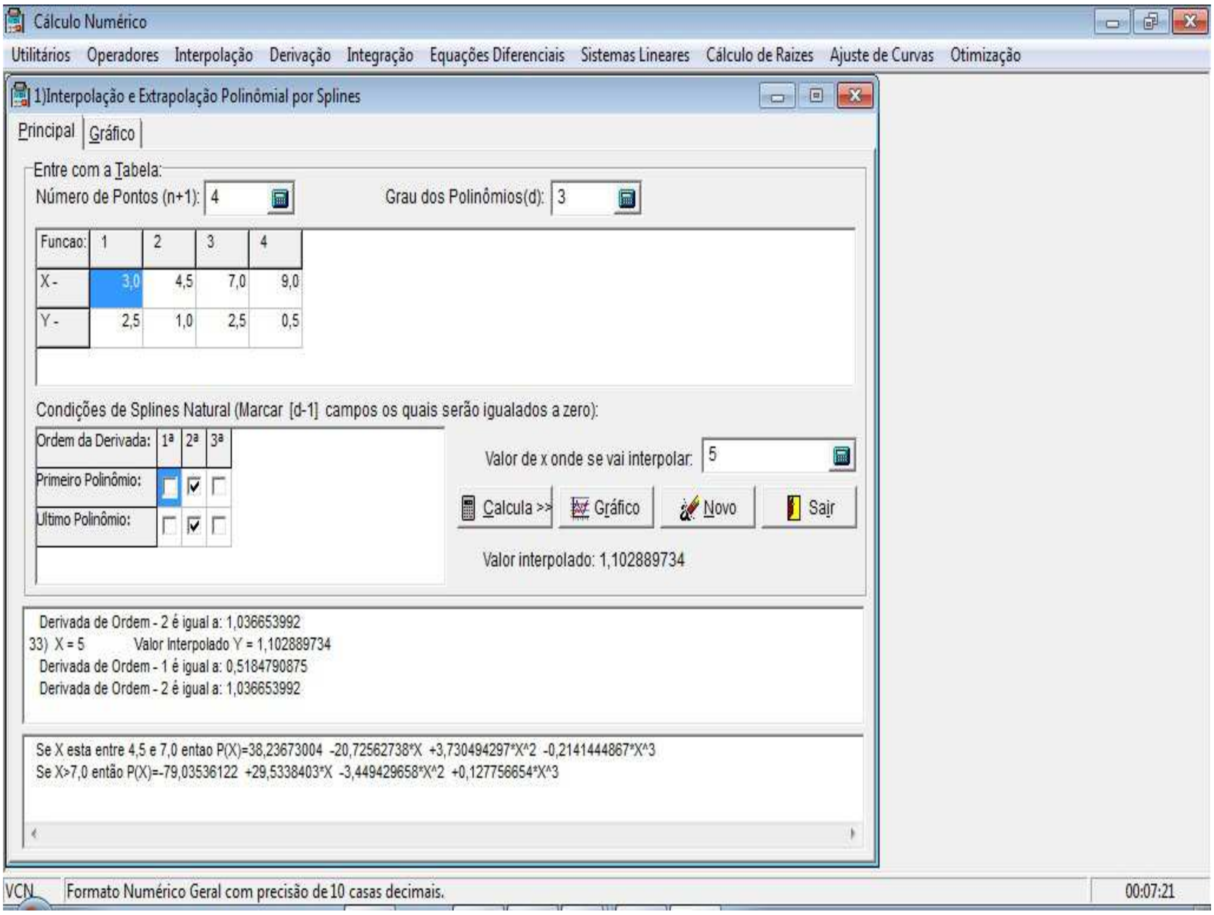
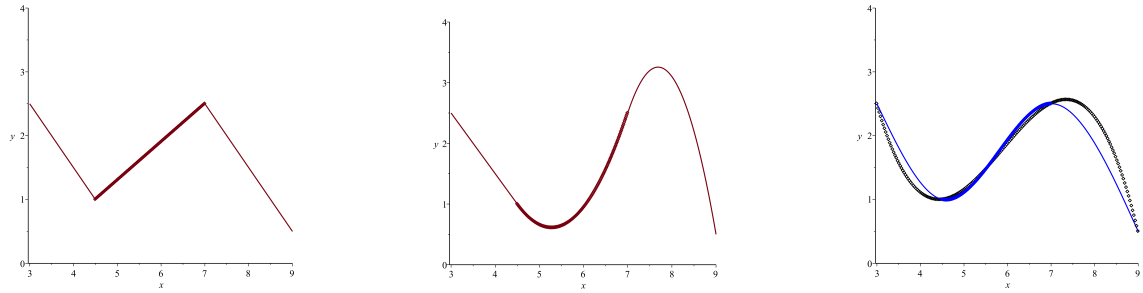


Figura 19: VCN *Spline* Cúbico

Fonte: Autoria Própria

Os resultados dos Exemplos 7.1 a 7.3 estão resumidos na Figura 20. Observe a melhora progressiva no ajuste a medida que nos movemos dos splines lineares para quadráticos para cúbicos. Foi superposto também na Figura 20(a) um polinômio interpolador cúbico, calculado no Exemplo 7.4. Embora o spline cúbico consista em uma série de curvas de terceiro grau, o ajuste resultante é diferente obtido usando um polinômio de terceiro grau, o que deve ao fato de que o *spline* natural exige segundas derivadas nulas nos extremos, enquanto o polinômio cúbico não tem tal restrição.



(a) n=1 (b) n=2 (c) n=3

Figura 20: Comparação entre as *splines*

Exemplo 7.4 *Utilizando os dados do Exemplo 7.1, vamos calcular o polinômio cúbico, usando a fórmula de Newton do polinômio de interpolação.*

Solução: *Temos*

$$\begin{array}{rclcrcl} x_0 & = & 3 & \Rightarrow & f(x_0) & = & 2,5 \\ x_1 & = & 4,5 & \Rightarrow & f(x_1) & = & 1 \\ x_2 & = & 7 & \Rightarrow & f(x_2) & = & 2,5 \\ x_3 & = & 9 & \Rightarrow & f(x_3) & = & 0,5 \end{array}. \tag{7.3.67}$$

Por possuímos quatro pontos temos que usar um polinômio de grau três. Assim, o polinômio de interpolação na forma de Newton é dado por

$$\begin{array}{rcl} P_3(x) & = & f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\ & & +(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3] \end{array}. \tag{7.3.68}$$

Em primeiro lugar, construímos a tabela de diferenças divididas

Tabela 35:

x_i	$Ordem0$	$Ordem1$	$Ordem2$	$Ordem3$
3,0	2,5	-1	0,4	-0,12593
4,5	1,0	0,6	-0,3556	——
7,0	2,5	-1	——	——
9,0	0,5	——	——	

Fonte: Autoria própria.

onde

$$\begin{array}{ccc} f[x_0] = 2,5 & , & f[x_0,x_1] = -1 \\ f[x_0,x_1,x_2] = 0,4 & , & f[x_0,x_1,x_2,X_3] = -0,12593 \end{array} . \tag{7.3.69}$$

Daí

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 2,5+(x-x_0)(-1)+(x-x_0)(x-x_1)(0,4) \\ &\quad +(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(-0,12593) \end{aligned} . \tag{7.3.70}$$

Substituindo os valores de $x_0 = 3,0$, $x_1 = 4,5$ *e* $x_2 = 7,0$, *encontramos*

$$P_3(x) = 22,8+12,311x+2,2259x^2-0,12593x^3 . \tag{7.3.71}$$

Para calcular o valor em $x = 5$, *que pertence ao intervalo* $[3,0;9,0]$, *temos*

$$\begin{aligned} P_3(5) &= 22,8+12,311(5)+2,2259(5)^2-0,12593(5)^3 \\ \Rightarrow P_3(5) &= 1,1519 \end{aligned} . \tag{7.3.72}$$

Exemplo 7.5 *A parte superior deste animal deve ser aproximada utilizando splines interpoladores cúbicos fixados. Os pontos da parte superior está tabelado na Tabela 36.*

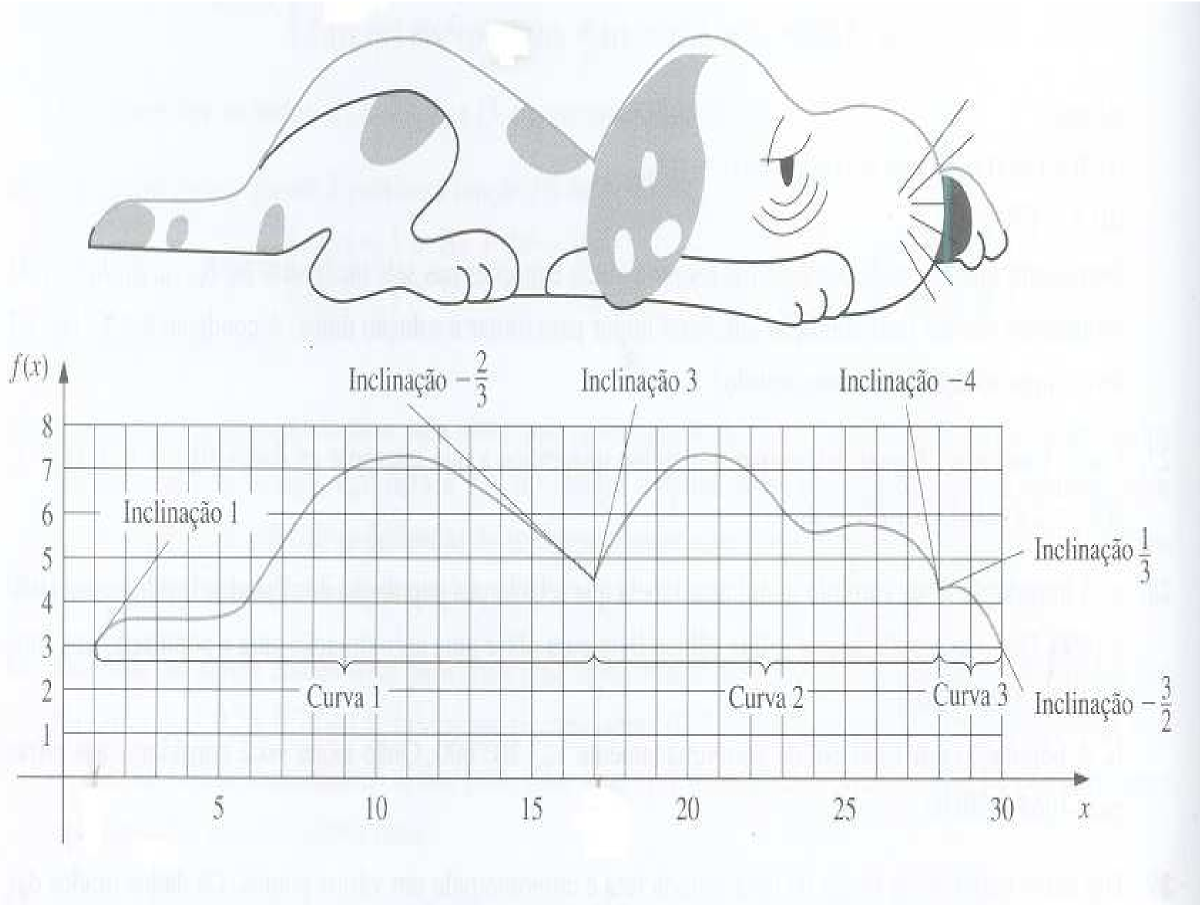


Figura 21:

Fonte: (BURDEN; FAURES, 2003)

Tabela 36:

*Curva*1				*Curva*2				*Curva*3			
j	x_j	$f(x_j)$	$f'(x_j)$	j	x_j	$f(x_j)$	$f'(x_j)$	j	x_j	$f(x_j)$	$f'(x_j)$
0	1	3,0	1,0	0	17	4,5	3,0	0	27,7	4,1	0,33
1	2	3,7	1	20	7,0	1	28	4,3			
2	5	3,9	2	23	6,1	2	29	4,1			
3	6	4,2	3	24	5,6	3	30	3,0	-1,5		
4	7	5,7	4	25	5,8						
5	8	6,6	5	27	5,2						
6	10	7,1	6	27,7	4,1	-4,0					
7	13	6,7									
8	17	4,5	-0,67								

Fonte: (BURDEN; FAURES, 2003)

Solução: *O primeiro passo é usar a equação (7.3.51) para gerar um conjunto de equações simultâneas que serão utilizadas para determinar as segundas derivadas nos nós. Para isso, escolhendo* $i = 1, \ldots, 8$, *na equação (7.3.51), temos*

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_0) f''(x_0) + 2(x_2 - x_0) f''(x_1) + (x_2 - x_1) f''(x_2) \\ = \; & \frac{6}{x_2 - x_1}\left[f(x_2) - f(x_1)\right] + \frac{6}{x_1 - x_0}\left[f(x_0) - f(x_1)\right] \end{aligned}, \tag{7.3.73}$$

$$\begin{aligned} & (x_2 - x_1) f''(x_1) + 2(x_3 - x_1) f''(x_2) + (x_3 - x_2) f''(x_3) \\ = \; & \frac{6}{x_3 - x_2}\left[f(x_3) - f(x_2)\right] + \frac{6}{x_2 - x_1}\left[f(x_1) - f(x_2)\right] \end{aligned}, \tag{7.3.74}$$

$$\begin{aligned} & (x_3 - x_2) f''(x_2) + 2(x_4 - x_2) f''(x_3) + (x_4 - x_3) f''(x_4) \\ = \; & \frac{6}{x_4 - x_3}\left[f(x_4) - f(x_3)\right] + \frac{6}{x_3 - x_2}\left[f(x_2) - f(x_3)\right] \end{aligned}, \tag{7.3.75}$$

$$\begin{aligned} & (x_4 - x_3) f''(x_3) + 2(x_5 - x_3) f''(x_4) + (x_5 - x_4) f''(x_5) \\ = \; & \frac{6}{x_5 - x_4}\left[f(x_5) - f(x_4)\right] + \frac{6}{x_4 - x_3}\left[f(x_3) - f(x_4)\right] \end{aligned}, \tag{7.3.76}$$

$$\begin{aligned} & (x_5 - x_4) f''(x_4) + 2(x_6 - x_4) f''(x_5) + (x_6 - x_5) f''(x_6) \\ = \; & \frac{6}{x_6 - x_5}\left[f(x_6) - f(x_5)\right] + \frac{6}{x_5 - x_4}\left[f(x_4) - f(x_5)\right] \end{aligned}, \tag{7.3.77}$$

$$\begin{aligned} & (x_6 - x_5) f''(x_5) + 2(x_7 - x_5) f''(x_6) + (x_7 - x_6) f''(x_7) \\ = \; & \frac{6}{x_7 - x_6}\left[f(x_7) - f(x_6)\right] + \frac{6}{x_6 - x_5}\left[f(x_5) - f(x_6)\right] \end{aligned}, \tag{7.3.78}$$

$$\begin{aligned} & (x_7 - x_6) f''(x_6) + 2(x_8 - x_6) f''(x_7) + (x_8 - x_7) f''(x_8) \\ = \; & \frac{6}{x_8 - x_7}\left[f(x_8) - f(x_7)\right] + \frac{6}{x_7 - x_6}\left[f(x_6) - f(x_7)\right] \end{aligned}. \tag{7.3.79}$$

Observando a Tabela 36, podemos retirar os dados necessários para os nós interiores.

Iremos calcular os valores para a primeira curva:

$$\begin{array}{rclclcl} x_0 & = & 1 & \Rightarrow & f(x_0) & = & 3,0 \\ x_1 & = & 2 & \Rightarrow & f(x_1) & = & 3,7 \\ x_2 & = & 5 & \Rightarrow & f(x_2) & = & 3,9 \\ x_3 & = & 6 & \Rightarrow & f(x_3) & = & 4,2 \\ x_4 & = & 7 & \Rightarrow & f(x_4) & = & 5,7 \\ x_5 & = & 8 & \Rightarrow & f(x_5) & = & 6,6 \\ x_6 & = & 10 & \Rightarrow & f(x_6) & = & 7,1 \\ x_7 & = & 13 & \Rightarrow & f(x_7) & = & 6,7 \\ x_8 & = & 17 & \Rightarrow & f(x_8) & = & 4,5 \end{array} . \tag{7.3.80}$$

Ao substituirmos esses valores nas equações (7.3.73), (7.3.74), (7.3.75), (7.3.76), (7.3.77), (7.3.78) e (7.3.79), temos:

$$\begin{array}{rl} & (2-1)f''(1)+2(5-1)f''(2)+(5-2)f''(5) \\ = & \dfrac{6}{5-2}[3,9-3,7]+\dfrac{6}{2-1}[3,0-3,7] \end{array} , \tag{7.3.81}$$

$$\begin{array}{rl} & (5-2)f''(2)+2(6-2)f''(5)+(6-5)f''(6) \\ = & \dfrac{6}{6-5}[4,2-3,9]+\dfrac{6}{5-2}[3,7-3,9] \end{array} , \tag{7.3.82}$$

$$\begin{array}{rl} & (6-5)f''(5)+2(7-5)f''(6)+(7-6)f''(7) \\ = & \dfrac{6}{7-6}[5,7-4,2]+\dfrac{6}{6-5}[3,9-4,2] \end{array} , \tag{7.3.83}$$

$$\begin{array}{rl} & (7-6)f''(6)+2(8-6)f''(7)+(8-7)f''(8) \\ = & \dfrac{6}{8-7}[6,6-5,7]+\dfrac{6}{7-6}[4,2-5,7] \end{array} , \tag{7.3.84}$$

$$\begin{array}{rl} & (8-7)f''(7)+2(10-7)f''(8)+(10-8)f''(10) \\ = & \dfrac{6}{10-8}[7,1-6,6]+\dfrac{6}{8-7}[5,7-6,6] \end{array} , \tag{7.3.85}$$

$$\begin{array}{rl} & (10-8)f''(8)+2(13-8)f''(10)+(13-10)f''(13) \\ = & \dfrac{6}{13-10}[6,7-7,1]+\dfrac{6}{10-8}[6,6-7,1] \end{array} , \tag{7.3.86}$$

$$= \frac{(13-10)f''(10)+2(17-10)f''(13)+(17-13)f''(17)}{\frac{6}{17-13}[4,5-6,7]+\frac{6}{13-10}[7,1-6,7]} \quad . \tag{7.3.87}$$

Utilizando a condição de Spline natural, $f''(1)=0$ *e* $f''(17)=0$*, e substituindo esses valores nas equações (7.3.81), (7.3.82), (7.3.83), (7.3.84), (7.3.85), (7.3.86) e (7.3.87), obtemos o sistema linear*

$$\begin{cases} 8f''(2)+3f''(5)+3,8 = 0 \\ 3f''(2)+8f''(5)+f''(6)-1,4 = 0 \\ f''(5)+4f''6)+f''(7)-7.2 = 0 \\ f''(6)+4f''(7)+f''(8)+3,6 = 0 \\ f''(7)+6f''(8)+2f''(10) + 3,9 = 0 \\ 2f''(8)+10f''(10)+3f''(13)+2,3 = 0 \\ 3f''(10)+14f''(13)+2,5 = 0 \end{cases} \quad . \tag{7.3.88}$$

Utilizando o aplicativo VCN resolvemos o sistema pelo método de Gaus, temos:

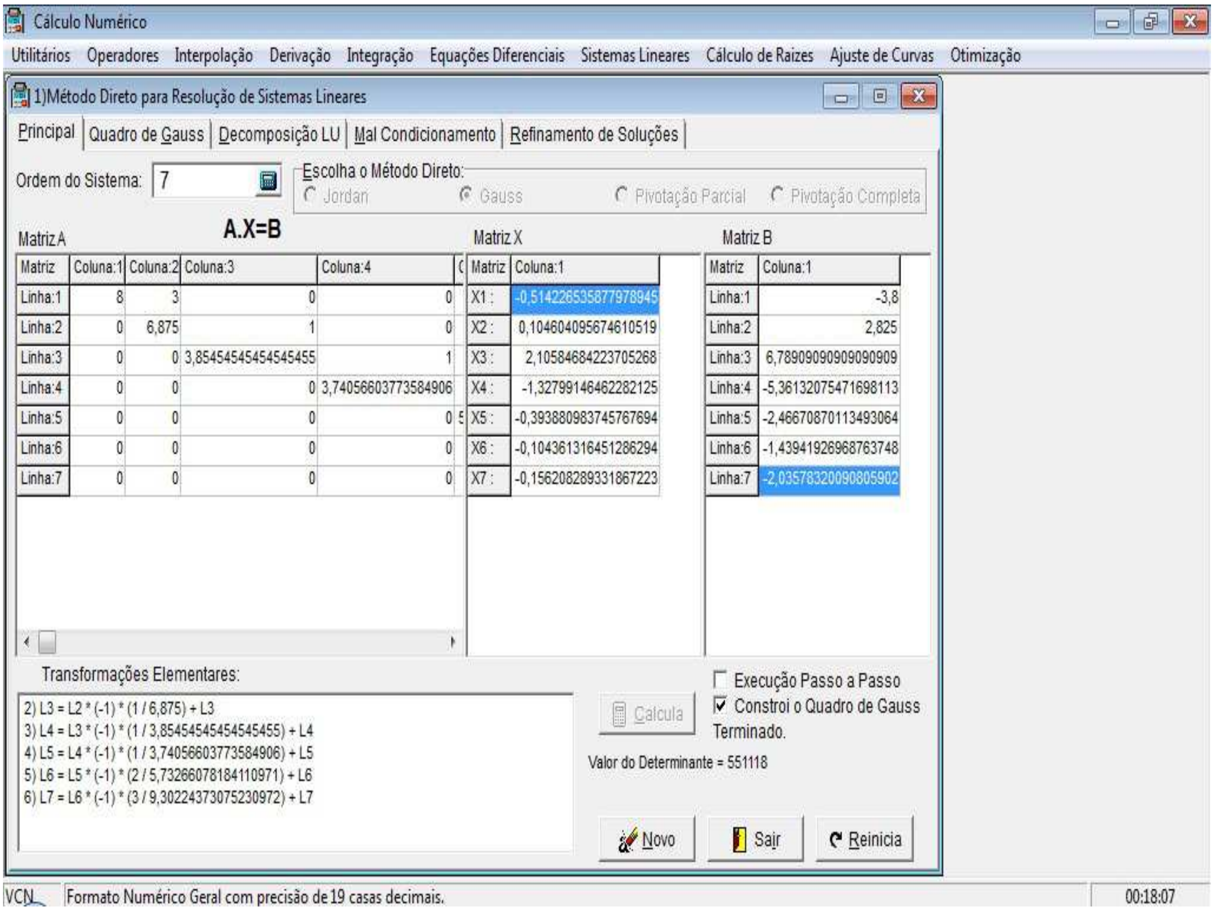


Figura 22:

Fonte: Autoria Própria

Cuja solução é dada por:

$$
\begin{array}{rcl}
f''(2) &=& -0.5142265359 \\
f''(5) &=& 0.1046040957 \\
f''(6) &=& 2.105846842 \\
f''(7) &=& -1.327991465 \\
f''(8) &=& -0.3938809837 \\
f''(10) &=& -0.1043613165 \\
f''(13) &=& -0.1562082893
\end{array} \quad . \qquad (7.3.89)
$$

Considerando $i = 1, \ldots, 8$ *na equação (7.3.49), encontramos*

$$
\begin{aligned}
f_1(x) \;=\;& \frac{f_1''(x_0)}{6(x_1-x_0)}(x_1-x)^3 + \frac{f_1''(x_1)}{6(x_1-x_0)}(x-x_0)^3 \\
&+ \left[\frac{f(x_0)}{x_1-x_0} - \frac{f''(x_0)(x_1-x_0)}{6}\right](x_1-x) \quad , \qquad (7.3.90) \\
&+ \left[\frac{f(x_1)}{x_i-x_0} - \frac{f''(x_1)(x_1-x_0)}{6}\right](x-x_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(x) \;=\;& \frac{f_2''(x_1)}{6(x_2-x_1)}(x_2-x)^3 + \frac{f_2''(x_2)}{6(x_2-x_1)}(x-x_1)^3 \\
&+ \left[\frac{f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f''(x_1)(x_2-x_1)}{6}\right](x_2-x) \quad , \qquad (7.3.91) \\
&+ \left[\frac{f(x_2)}{x_2-x_1} - \frac{f''(x_2)(x_2-x_1)}{6}\right](x-x_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3(x) \;=\;& \frac{f_3''(x_2)}{6(x_3-x_2)}(x_3-x)^3 + \frac{f_3''(x_3)}{6(x_3-x_2)}(x-x_2)^3 \\
&+ \left[\frac{f(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{f''(x_2)(x_3-x_2)}{6}\right](x_3-x) \quad , \qquad (7.3.92) \\
&+ \left[\frac{f(x_3)}{x_3-x_2} - \frac{f''(x_3)(x_3-x_2)}{6}\right](x-x_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4(x) &= \frac{f_4''(x_3)}{6(x_4-x_3)}(x_4-x)^3+\frac{f_4''(x_4)}{6(x_4-x_3)}(x-x_3)^3 \\
&+\left[\frac{f(x_3)}{x_4-x_3}-\frac{f''(x_3)(x_4-x_3)}{6}\right](x_4-x) \quad , \\
&+\left[\frac{f(x_4)}{x_4-x_3}-\frac{f''(x_4)(x_4-x_3)}{6}\right](x-x_3)
\end{aligned} \tag{7.3.93}
$$

$$
\begin{aligned}
f_5(x) &= \frac{f_5''(x_4)}{6(x_5-x_4)}(x_5-x)^3+\frac{f_5''(x_5)}{6(x_5-x_4)}(x-x_4)^3 \\
&+\left[\frac{f(x_4)}{x_5-x_4}-\frac{f''(x_4)(x_5-x_4)}{6}\right](x_5-x) \quad , \\
&+\left[\frac{f(x_5)}{x_5-x_4}-\frac{f''(x_5)(x_5-x_4)}{6}\right](x-x_4)
\end{aligned} \tag{7.3.94}
$$

$$
\begin{aligned}
f_6(x) &= \frac{f_6''(x_5)}{6(x_6-x_5)}(x_6-x)^3+\frac{f_6''(x_6)}{6(x_6-x_5)}(x-x_5)^3 \\
&+\left[\frac{f(x_5)}{x_6-x_5}-\frac{f''(x_5)(x_6-x_5)}{6}\right](x_6-x) \quad , \\
&+\left[\frac{f(x_6)}{x_6-x_5}-\frac{f''(x_6)(x_6-x_5)}{6}\right](x-x_5)
\end{aligned} \tag{7.3.95}
$$

$$
\begin{aligned}
f_7(x) &= \frac{f_7''(x_6)}{6(x_7-x_6)}(x_7-x)^3+\frac{f_6''(x_7)}{6(x_7-x_6)}(x-x_6)^3 \\
&+\left[\frac{f(x_6)}{x_7-x_6}-\frac{f''(x_6)(x_7-x_6)}{6}\right](x_7-x) \quad , \\
&+\left[\frac{f(x_7)}{x_7-x_6}-\frac{f''(x_7)(x_7-x_6)}{6}\right](x-x_6)
\end{aligned} \tag{7.3.96}
$$

e

$$\begin{aligned} f_8(x) &= \frac{f_8''(x_7)}{6(x_8-x_7)}(x_8-x)^3+\frac{f_7''(x_8)}{6(x_8-x_7)}(x-x_7)^3 \\ &+\left[\frac{f(x_7)}{x_8-x_7}-\frac{f''(x_7)(x_8-x_7)}{6}\right](x_8-x) \quad . \\ &+\left[\frac{f(x_8)}{x_8-x_7}-\frac{f''(x_8)(x_8-x_7)}{6}\right](x-x_7) \end{aligned} \tag{7.3.97}$$

Substituirmos os valores para os $x's$ e os $f(x)'s$ e utilizando a ideia de ser uma spline natural, obtemos

$$f_1(x) = 2.214295577-0.08570442265(x-1)^3+0.785704423x \ , \tag{7.3.98}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -0.02856814088(5-x)^3+0.005811338650(x-2)^3 \\ &\quad +4.956837101-0.242748649x \end{aligned} \ , \tag{7.3.99}$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= 0.01743401595(6-x)^3+0.3509744737(x-5)^3 \\ &\quad +4.05026827-0.033540458x \end{aligned} \ , \tag{7.3.100}$$

$$\begin{aligned} f_4(x) &= 0.3509744737(7-x)^3-0.2213319108(x-6)^3 \\ &\quad -8.58481279+2.072306385x \end{aligned} \ , \tag{7.3.101}$$

$$\begin{aligned} f_5(x) &= -0.2213319108(8-x)^3-0.06564683062(x-7)^3 \\ &\quad +0.71112747+0.744314920x \end{aligned} \ , \tag{7.3.102}$$

$$\begin{aligned} f_6(x) &= -0.03282341531(10-x)^3-0.008696776375(x-8)^3 \\ &\quad +5.63463976+0.153493445x \end{aligned} \ , \tag{7.3.103}$$

$$\begin{aligned} f_7(x) &= -0.005797850917(13-x)^3-0.008678238294(x-10)^3 \\ &\quad +8.33064044-0.107409847x \end{aligned} \ , \tag{7.3.104}$$

$$\begin{aligned} f_8(x) &= -0.006508678721(17-x)^3+15.62036062 \\ &\quad -0.654138860x \end{aligned} \ . \tag{7.3.105}$$

Portanto, o Spline Cúbico é dado por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2.214295577 - 0.08570442265(x-1)^3 + 0.785704423x & ; \quad 1 \le x \le 2 \\ f_2(x) = -0.02856814088(5-x)^3 + 0.005811338650(x-2)^3 + 4.956837101 - 0.242748649x & ; \quad 2 \le x \le 5 \\ f_3(x) = 0.01743401595(6-x)^3 + 0.3509744737(x-5)^3 + 4.05026827 - 0.033540458x & ; \quad 5 \le x \le 6 \\ f_4(x) = 0.3509744737(7-x)^3 - 0.2213319108(x-6)^3 - 8.58481279 + 2.072306385x & ; \quad 6 \le x \le 7 \\ f_5(x) = -0.2213319108(8-x)^3 - 0.06564683062(x-7)^3 + 0.71112747 + 0.744314920x & ; \quad 7 \le x \le 8 \\ f_6(x) = -0.03282341531(10-x)^3 - 0.008696776375(x-8)^3 + 5.63463976 + 0.153493445x & ; \quad 8 \le x \le 10 \\ f_7(x) = -0.005797850917(13-x)^3 - 0.008678238294(x-10)^3 + 8.33064044 - 0.107409847x & ; \quad 10 \le x \le 13 \\ f_8(x) = -0.006508678721(17-x)^3 + 15.62036062 - 0.654138860x & ; \quad 13 \le x \le 17 \end{cases} \quad (7.3.106)$$

cujo gráfico é

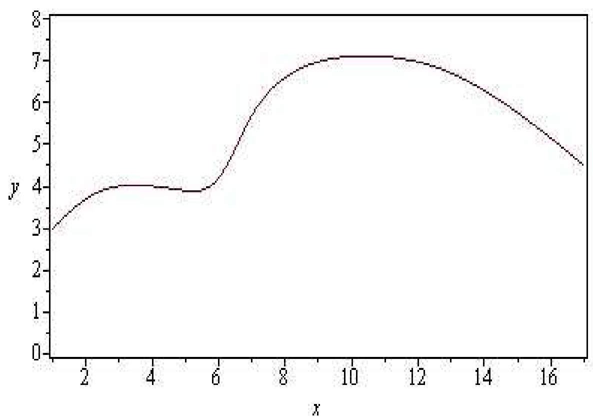


Figura 23:

Fonte: Autoria Própria

Para a segunda curva precisamos utilizar a equação (7.3.51) para gerar um conjunto de equações simultâneas que serão utilizadas para determinar as segundas derivadas nos nós. Para isso, escolhendo $i = 1,\ldots,6$, na equação (7.3.51), temos:

$$\begin{aligned} & (x_1-x_0)f''(x_0)+2(x_2-x_0)f''(x_1)+(x_2-x_1)f''(x_2) \\ = \;& \frac{6}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(x_1)]+\frac{6}{x_1-x_0}[f(x_0)-f(x_1)] \end{aligned}, \tag{7.3.107}$$

$$\begin{aligned} & (x_2-x_1)f''(x_1)+2(x_3-x_1)f''(x_2)+(x_3-x_2)f''(x_3) \\ = \;& \frac{6}{x_3-x_2}[f(x_3)-f(x_2)]+\frac{6}{x_2-x_1}[f(x_1)-f(x_2)] \end{aligned}, \tag{7.3.108}$$

$$\begin{aligned} & (x_3-x_2)f''(x_2)+2(x_4-x_2)f''(x_3)+(x_4-x_3)f''(x_4) \\ = \;& \frac{6}{x_4-x_3}[f(x_4)-f(x_3)]+\frac{6}{x_3-x_2}[f(x_2)-f(x_3)] \end{aligned}, \tag{7.3.109}$$

$$\begin{aligned} & (x_4-x_3)f''(x_3)+2(x_5-x_3)f''(x_4)+(x_5-x_4)f''(x_5) \\ = \;& \frac{6}{x_5-x_4}[f(x_5)-f(x_4)]+\frac{6}{x_4-x_3}[f(x_3)-f(x_4)] \end{aligned}, \tag{7.3.110}$$

$$\begin{aligned} & (x_5-x_4)f''(x_4)+2(x_6-x_4)f''(x_5)+(x_6-x_5)f''(x_6) \\ = \;& \frac{6}{x_6-x_5}[f(x_6)-f(x_5)]+\frac{6}{x_5-x_4}[f(x_4)-f(x_5)] \end{aligned}, \tag{7.3.111}$$

Observando a Tabela 36, podemos retirar os dados necessários para os nós interiores. Iremos calcular os valores para a segunda curva

$$\begin{array}{lcccccc} x_0 & = & 17 & \Rightarrow & f(x_0) & = & 4,5 \\ x_1 & = & 20 & \Rightarrow & f(x_1) & = & 7,0 \\ x_2 & = & 23 & \Rightarrow & f(x_2) & = & 6,1 \\ x_3 & = & 24 & \Rightarrow & f(x_3) & = & 5,6 \\ x_4 & = & 25 & \Rightarrow & f(x_4) & = & 5,8 \\ x_5 & = & 27 & \Rightarrow & f(x_5) & = & 5,2 \\ x_6 & = & 27,7 & \Rightarrow & f(x_6) & = & 4,1 \end{array}. \tag{7.3.112}$$

Ao substituirmos esses valores nas equações (7.3.107), (7.3.108), (7.3.109), (7.3.110) e

(7.3.111), temos:

$$\begin{array}{rl} & (20-17)f''(17)+2(23-17)f''(20)+(23-20)f''(23) \\ = & \dfrac{6}{23-20}[6,1-7,0]+\dfrac{6}{20-17}[4,5-7,0] \end{array}, \tag{7.3.113}$$

$$\begin{array}{rl} & (23-20)f''(20)+2(24-20)f''(23)+(24-23)f''(24) \\ = & \dfrac{6}{24-23}[5,6-6,1]+\dfrac{6}{23-20}[7,0-6,1] \end{array}, \tag{7.3.114}$$

$$\begin{array}{rl} & (24-23)f''(23)+2(25-23)f''(24)+(25-24)f''(25) \\ = & \dfrac{6}{25-24}[5,8-5,6]+\dfrac{6}{24-23}[6,1-5,6] \end{array}, \tag{7.3.115}$$

$$\begin{array}{rl} & (25-24)f''(24)+2(27-24)f''(25)+(27-25)f''(27) \\ = & \dfrac{6}{27-25}[5,2-5,8]+\dfrac{6}{25-24}[5,6-5,8] \end{array}, \tag{7.3.116}$$

$$\begin{array}{rl} & (27-25)f''(25)+2(27,7-25)f''(27)+(27,7-27)f''(27,7) \\ = & \dfrac{6}{27,7-27}[4,1-5,2]+\dfrac{6}{27-25}[5,8-5,2] \end{array}, \tag{7.3.117}$$

Utilizando a condição de Spline natural, $f''(17)=0$ e $f''(27,7)=0$, e substituindo esses valores nas equações (7.3.113), (7.3.114), (7.3.115), (7.3.116)e (7.3.117), obtemos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcl} 12f''(20)+3f''(23)+6,8 & = & 0 \\ 3f''(20)+8f''(23)+f''(24)+1,2 & = & 0 \\ f''(23)+4f''(24)+f''(25)-4.2 & = & 0 \\ f''(24)+6f''(25)+2f''(27)+3,0 & = & 0 \\ 2f''(25)+5,4f''(27)+7,628571432 & = & 0 \end{array}\right. , \tag{7.3.118}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{array}{rcl} f''(20) & = & -0.5448020886 \\ f''(23) & = & -0.08745831246 \\ f''(24) & = & 1.134072765 \\ f''(25) & = & -0.2488327489 \\ f''(27) & = & -1.320538136 \end{array}. \tag{7.3.119}$$

Considerando $i = 1, \ldots, 6$ *na equação (7.3.49), encontramos*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{f_1''(x_0)}{6(x_1-x_0)}(x_1-x)^3 + \frac{f_1''(x_1)}{6(x_1-x_0)}(x-x_0)^3 \\ &+ \left[\frac{f(x_0)}{x_1-x_0} - \frac{f''(x_0)(x_1-x_0)}{6}\right](x_1-x) \quad , \\ &+ \left[\frac{f(x_1)}{x_i-x_0} - \frac{f''(x_1)(x_1-x_0)}{6}\right](x-x_0) \end{aligned} \tag{7.3.120}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{f_2''(x_1)}{6(x_2-x_1)}(x_2-x)^3 + \frac{f_2''(x_2)}{6(x_2-x_1)}(x-x_1)^3 \\ &+ \left[\frac{f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f''(x_1)(x_2-x_1)}{6}\right](x_2-x) \quad , \\ &+ \left[\frac{f(x_2)}{x_2-x_1} - \frac{f''(x_2)(x_2-x_1)}{6}\right](x-x_1) \end{aligned} \tag{7.3.121}$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{f_3''(x_2)}{6(x_3-x_2)}(x_3-x)^3 + \frac{f_3''(x_3)}{6(x_3-x_2)}(x-x_2)^3 \\ &+ \left[\frac{f(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{f''(x_2)(x_3-x_2)}{6}\right](x_3-x) \quad , \\ &+ \left[\frac{f(x_3)}{x_3-x_2} - \frac{f''(x_3)(x_3-x_2)}{6}\right](x-x_2) \end{aligned} \tag{7.3.122}$$

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \frac{f_4''(x_3)}{6(x_4-x_3)}(x_4-x)^3 + \frac{f_4''(x_4)}{6(x_4-x_3)}(x-x_3)^3 \\ &+ \left[\frac{f(x_3)}{x_4-x_3} - \frac{f''(x_3)(x_4-x_3)}{6}\right](x_4-x) \quad , \\ &+ \left[\frac{f(x_4)}{x_4-x_3} - \frac{f''(x_4)(x_4-x_3)}{6}\right](x-x_3) \end{aligned} \tag{7.3.123}$$

$$f_5(x) = \frac{f_5''(x_4)}{6(x_5-x_4)}(x_5-x)^3+\frac{f_5''(x_5)}{6(x_5-x_4)}(x-x_4)^3$$
$$+\left[\frac{f(x_4)}{x_5-x_4}-\frac{f''(x_4)(x_5-x_4)}{6}\right](x_5-x) \quad , \tag{7.3.124}$$
$$+\left[\frac{f(x_5)}{x_5-x_4}-\frac{f''(x_5)(x_5-x_4)}{6}\right](x-x_4)$$

$$f_6(x) = \frac{f_6''(x_5)}{6(x_6-x_5)}(x_6-x)^3+\frac{f_6''(x_6)}{6(x_6-x_5)}(x-x_5)^3$$
$$+\left[\frac{f(x_5)}{x_6-x_5}-\frac{f''(x_5)(x_6-x_5)}{6}\right](x_6-x) \quad , \tag{7.3.125}$$
$$+\left[\frac{f(x_6)}{x_6-x_5}-\frac{f''(x_6)(x_6-x_5)}{6}\right](x-x_5)$$

Substituirmos os valores para os $x's$ e os $f(x)'s$ e utilizando a ideia de ser uma spline natural, obtemos

$$f_1(x) = -14.29748441-0.03026678270(x-17)^3+1.105734377x \ , \tag{7.3.126}$$

$$f_2(x) = -0.03026678270(23-x)^3-0.004858795137(x-20)^3 + 18.39064089-0.528671888x \ , \tag{7.3.127}$$

$$f_3(x) = -0.01457638541(24-x)^3+0.1890121275(x-23)^3 + 22.2971121-0.703588513x \ , \tag{7.3.128}$$

$$f_4(x) = 0.1890121275(25-x)^3-0.04147212482(x-24)^3 - 4.9206342+0.430484253x \ , \tag{7.3.129}$$

$$f_5(x) = -0.02073606241(27-x)^3-0.1100448447(x-25)^3 + 4.53501027+0.057235129x \ , \tag{7.3.130}$$

$$f_6(x) = -0.3144138419(27.7-x)+51.8961106 - 1.725491355x \ . \tag{7.3.131}$$

Portanto, o Spline Cúbico e dado por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -14.29748441 - 0.03026678270(x-17)^3 + 1.105734377x & ; \quad 17 \leq x \leq 20 \\ f_2(x) = -0.03026678270(23-x)^3 - 0.004858795137(x-20)^3 \\ \qquad +18.39064089 - 0.528671888x & ; \quad 20 \leq x \leq 23 \\ f_3(x) = -0.01457638541(24-x)^3 + 0.1890121275(x-23)^3 \\ \qquad +22.2971121 - 0.703588513x & ; \quad 23 \leq x \leq 24 \\ f_4(x) = 0.1890121275(25-x)^3 - 0.04147212482(x-24)^3 \\ \qquad -4.9206342 + 0.430484253x & ; \quad 24 \leq x \leq 25 \\ f_5(x) = -0.02073606241(27-x)^3 - 0.1100448447(x-25)^3 \\ \qquad +4.53501027 + 0.057235129x & ; \quad 25 \leq x \leq 27 \\ f_6(x) = -0.3144138419(27.7-x) + 51.8961106 \\ \qquad -1.725491355x & ; \quad 27 \leq x \leq 27,7 \end{cases} \tag{7.3.132}$$

cujo gráfico é

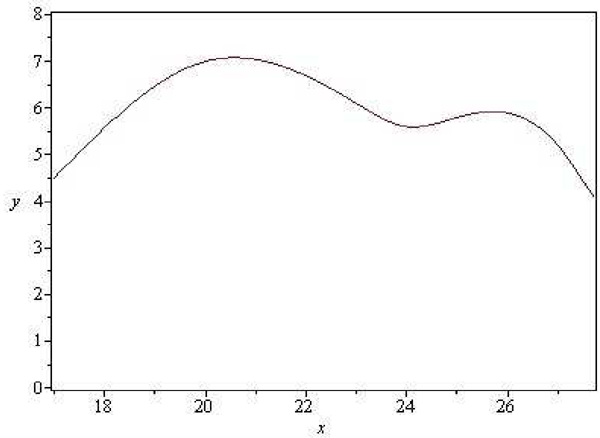


Figura 24:

Fonte: Autoria Própria

Para a terceira curva precisamos utilizar a equação (7.3.51) para gerar um conjunto de equações simultâneas que serão utilizadas para determinar as segundas derivadas nos nós. Para isso, escolhendo $i = 1, \ldots, 3$*, na equação (7.3.51), temos*

$$
\begin{aligned}
& (x_1-x_0)f''(x_0)+2(x_2-x_0)f''(x_1)+(x_2-x_1)f''(x_2) \\
= \quad & \frac{6}{x_2-x_1}\left[f(x_2)-f(x_1)\right]+\frac{6}{x_1-x_0}\left[f(x_0)-f(x_1)\right]
\end{aligned} \tag{7.3.133}
$$

e

$$
\begin{aligned}
& (x_2-x_1)f''(x_1)+2(x_3-x_1)f''(x_2)+(x_3-x_2)f''(x_3) \\
= \quad & \frac{6}{x_3-x_2}\left[f(x_3)-f(x_2)\right]+\frac{6}{x_2-x_1}\left[f(x_1)-f(x_2)\right]
\end{aligned}. \tag{7.3.134}
$$

Observando a Tabela 36, podemos retirar os dados necessários para os nós interiores. Iremos calcular os valores para a terceira curva

$$
\begin{array}{rclcrcl}
x_0 & = & 27,7 & \Rightarrow & f(x_0) & = & 4,1 \\
x_1 & = & 28 & \Rightarrow & f(x_1) & = & 4,3 \\
x_2 & = & 29 & \Rightarrow & f(x_2) & = & 4,1 \\
x_3 & = & 30 & \Rightarrow & f(x_3) & = & 3,0
\end{array}. \tag{7.3.135}
$$

Ao substituirmos esses valores nas equações (7.3.133) e (7.3.134), temos:

$$
\begin{aligned}
& (28-27,7)f''(27,7)+2(29-27,7)f''(28)+(29-28)f''(29) \\
= \quad & \frac{6}{29-28}[4,1-4,3]+\frac{6}{28-27,7}[4,1-4,3]
\end{aligned} \tag{7.3.136}
$$

e

$$
\begin{aligned}
& (29-28)f''(28)+2(30-28)f''(29)+(30-29)f''(30) \\
= \quad & \frac{6}{30-29}[3,0-4,1]+\frac{6}{29-28}[4,3-4,1]
\end{aligned}, \tag{7.3.137}
$$

Utilizando a condição de Spline natural, $f''(27,7)=0$ e $f''(30)=0$, e substituindo esses valores nas equações (7.3.136) e (7.3.137), obtemos o sistema linear

$$
\begin{cases}
2,6f''(28)+f''(29)+5.2 = 0 \\
f''(28)+4f''(29)+5.4 = 0
\end{cases}, \tag{7.3.138}
$$

cuja solução é dada por

$$
\begin{aligned}
f''(28) &= -1.638297872 \\
f''(29) &= -0.9404255319
\end{aligned}. \tag{7.3.139}
$$

Considerando $i = 1,\ldots,3$ na equação (7.3.49), encontramos

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{f_1''(x_0)}{6(x_1-x_0)}(x_1-x)^3 + \frac{f_1''(x_1)}{6(x_1-x_0)}(x-x_0)^3 \\ &+ \left[\frac{f(x_0)}{x_1-x_0} - \frac{f''(x_0)(x_1-x_0)}{6}\right](x_1-x) \quad , \\ &+ \left[\frac{f(x_1)}{x_i-x_0} - \frac{f''(x_1)(x_1-x_0)}{6}\right](x-x_0) \end{aligned} \tag{7.3.140}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{f_2''(x_1)}{6(x_2-x_1)}(x_2-x)^3 + \frac{f_2''(x_2)}{6(x_2-x_1)}(x-x_1)^3 \\ &+ \left[\frac{f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f''(x_1)(x_2-x_1)}{6}\right](x_2-x) \\ &+ \left[\frac{f(x_2)}{x_2-x_1} - \frac{f''(x_2)(x_2-x_1)}{6}\right](x-x_1) \end{aligned} \tag{7.3.141}$$

e

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{f_3''(x_2)}{6(x_3-x_2)}(x_3-x)^3 + \frac{f_3''(x_3)}{6(x_3-x_2)}(x-x_2)^3 \\ &+ \left[\frac{f(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{f''(x_2)(x_3-x_2)}{6}\right](x_3-x) \quad , \\ &+ \left[\frac{f(x_3)}{x_3-x_2} - \frac{f''(x_3)(x_3-x_2)}{6}\right](x-x_2) \end{aligned} \tag{7.3.142}$$

Substituindo os valores para os $x's$ e os $f(x)'s$ e utilizando a ideia de ser uma Spline natural, obtemos

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -16.6357089 - 0.9101654844(x-27.7)^3 \\ &\quad +0.74858155x \end{aligned} \quad , \tag{7.3.143}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -0.2730496453(29-x)^3 - 0.1567375886(x-28)^3 \\ &\quad +13.4297872 - 0.316312056x \end{aligned} \quad , \tag{7.3.144}$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -0.1567375886(30-x)^3 + 40.7021277 \\ &\quad -1.256737589x \end{aligned} \quad , \tag{7.3.145}$$

Portanto, o Spline Cúbico e dado por

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) &= \begin{array}{l} -16.6357089 - 0.9101654844(x-27.7)^3 \\ +0.74858155x \end{array} & ; \quad 27,7 \leq x \leq 28 \\ \\ f_2(x) &= \begin{array}{l} -0.2730496453(29-x)^3 - 0.1567375886(x-28)^3 \\ +13.4297872 - 0.316312056x \end{array} & ; \quad 28 \leq x \leq 29 \\ \\ f_3(x) &= \begin{array}{l} -0.1567375886(30-x)^3 + 40.7021277 \\ -1.256737589x \end{array} & ; \quad 29 \leq x \leq 30 \end{cases} \quad (7..3.146)$$

cujo gráfico é dado por

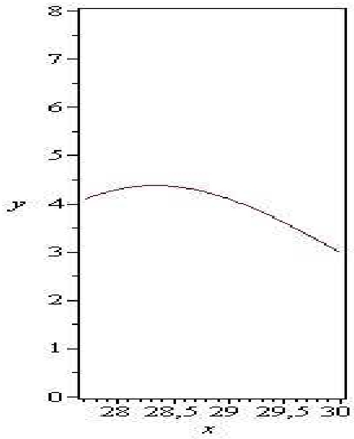


Figura 25:

Fonte: Autoria Própria

Ao juntarmos os gráficos das Figuras 23, 24 e 25, obtemos

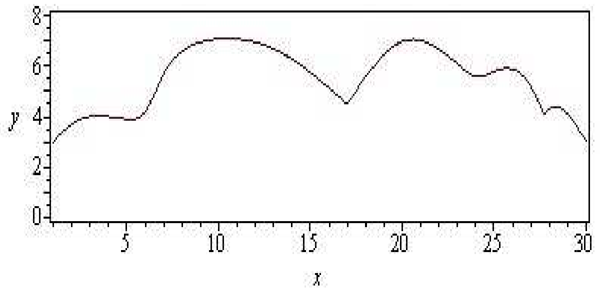


Figura 26:

Fonte: Autoria Própria

Para fins de comparação, a Figura 27 fornece uma ilustração da curva gerada usando um polinômio interpolador de Lagrange para ajustar os dados da Tabela 36. O polinômio interpolador, nesse caso, é de grau dezessete e oscila de forma desenfreada, produzindo uma ilustração que não se aproxima da parte superior do animal.

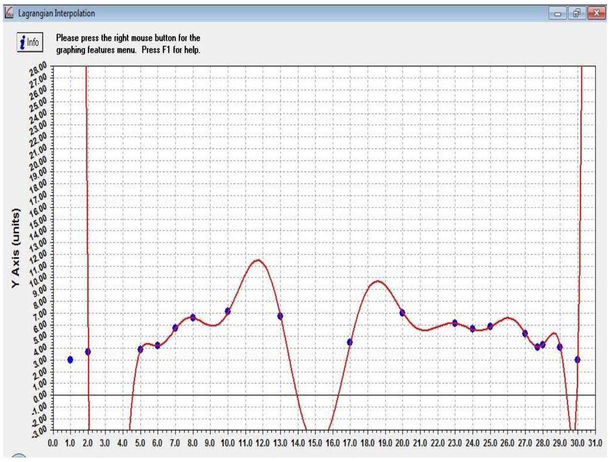


Figura 27:

Fonte: Autoria Própria

8 CONCLUSÃO

No estudo dos Métodos de interpolação polinomial dentre os métodos estudados o Spline Cúbico é o mais adequado a resolução de pontos tabelados e aproximações de funções, pois ao aproximarmos de cada ponto não temos picos e sim curvas suaves que se adaptam aos pontos, porem é extremamente trabalhoso e na maioria dos casos precisamos de auxílio computacional, oriundo do sofware Maple e VCN, para este estudo foi de grande valia, tanto para o entendimento das soluções quanto a comparação entre os resultados analíticos e gráficos.

REFERÊNCIAS

BURDEN, R. L.; FAURES, D. **Análise numérica**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. C. **Métodos numéricos para engenharia**. 5. ed. [S.l.]: McGraww-Hill, 2008.