

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VANESSA FERREIRA SEHABER

**ABORDAGEM TEÓRICA DE AUTOVALORES E AUTOVETORES:  
ESTUDO DE CASO DE QUÁDRICAS NA SEGUNDA E TERCEIRA  
DIMENSÃO**

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2011

VANESSA FERREIRA SEHABER

**ABORDAGEM TEÓRICA DE AUTOVALORES E AUTOVETORES:  
ESTUDO DE CASO DE QUÁDRICAS NA SEGUNDA E TERCEIRA  
DIMENSÃO**

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Sara Coelho da Silva

**CAMPO MOURÃO**

**2011**

## TERMO DE APROVAÇÃO

VANESSA FERREIRA SEHABER

### ABORDAGEM TEÓRICA DE AUTOVALORES E AUTOVETORES: ESTUDO DE CASO DE QUÁDRICAS NA SEGUNDA E TERCEIRA DIMENSÃO

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

---

Orientadora: Prof. Msc. Sara Coelho da Silva

---

Prof. Msc. Priscila Amara Patricio de Melo

---

Prof. Msc. Magda Cardoso Montovani

Campo Mourão, 2011

À minha família e ao Maiko.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por me abençoar em todos os momentos e ter me dado forças para enfrentar as dificuldades sem desistir dos meus objetivos.

Agradeço a minha família que sempre me incentivou a estar estudando.

Aos meus amigos do curso de pós-graduação, o meu muito obrigado pela amizade compartilhada, cada qual com uma intensidade, as risadas, e dizer que todos os momentos ficarão guardados ‘só de um lado’, o lado esquerdo do peito.

Agradeço a Tatiane Cazarin da Silva e a Marina Vargas R. de P. G. Ferreira, as quais me ensinaram lidar com alguns dos softwares matemáticos utilizados para construir as ilustrações desta monografia.

Agradeço a minha orientadora Sara Coelho da Silva pela atenção e paciência dedicada para comigo e no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao professor Adilandri pelo seu empenho, dedicação, paciência (muita paciência) e todo seu esforço para estar conosco em cada sábado, assim como agradecer ao Edilson por sempre aparecer com o cafezinho nos intervalos das aulas além de nos atender com prontidão quando necessitávamos de algo.

Agradeço à Copel, local onde trabalhei durante a especialização, por ter contribuído com este curso de pós-graduação, o qual foi de grande importância para meu crescimento universitário.

De maneira geral, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento desta monografia.

‘Seja qual for o seu sonho - comece. Ousadia tem genialidade, poder e magia.’ - Goethe.

## RESUMO

SEHABER, Vanessa. ABORDAGEM TEÓRICA DE AUTOVALORES E AUTOVETORES: ESTUDO DE CASO DE QUÁDRICAS NA SEGUNDA E TERCEIRA DIMENSÃO. 82 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

Este trabalho aborda conceitos algébricos referentes a autovalores e autovetores de uma transformação  $T : V \rightarrow V$ ,  $V \subset \mathbb{R}$ .

Primeiramente, foi introduzido o assunto expondo a razão de se pesquisar sobre autovalores e autovetores e a aplicação destes nas quádricas, além de trazer o motivo e os objetivos do trabalho.

Em seguida, na seção Prólogo, foram lembrados conceitos essenciais sobre espaço vetorial e transformação linear, para então definirmos o elemento principal do nosso estudo.

Na seção Autovalores e Autovetores apresentou-se embasamento teórico sobre subespaços invariantes, autoespaço de  $T : V \rightarrow V$  além das relações pertinentes a autovalores e autovetores, e a diagonalização da matriz de transformação  $T$ .

Após esta seção, foi levantado todo um contexto algébrico para podermos realizar demonstração do Teorema Espectral e apresentar as Formas bilineares, em especial a forma bilinear quadrática.

A seção posterior evidenciamos a aplicação teórica dos autovalores e autovetores nas quádricas no  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  e apresentar a influência que os mesmos exercem na análise das mesmas no ponto de vista algébrico.

Finalizando, segue a última seção a qual traz a conclusão deste trabalho.

**Palavras-chave:** Autovalor, Autovetor, Quádricas

## ABSTRACT

SEHABER, Vanessa. THEORETICAL APPROACH OF EIGENVALUES AND EIGENVECTORS: A CASE STUDY OF QUADRICS IN THE SECOND AND THIRD DIMENSION. 82 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

This work deals with algebraic concepts relating to eigenvalues and eigenvectors of a transformation  $T : V \rightarrow V$ ,  $V \subset \mathbb{R}$ .

First, was introduced the subject stating the reason for researching and applying eigenvalues and eigenvectors of the quadric, and bring the motives and objectives of the work.

Then, in the prologue section, key concepts were reminded about vector spaces and linear transformation, then to define the main object of our study.

In the Eigenvalues and Eigenvectors section bring the theoretical basis on invariant subspaces, autoespace of  $T : V \rightarrow V$  besides the relevant relations about eigenvalues and eigenvectors, and diagonalization transformation matrix  $T$ .

After this section, was raised a whole context to algebraic demonstration of the Spectral Theorem and present the bilinear forms, in particular the bilinear quadratic form.

After this section, was presented the theoretical application of the eigenvalues and eigenvectors in quadrics in  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$  and shown as important the eigenvalues and eigenvectors are to analysis the algebrics classification of quadrics.

Finally, following the last section which brings the conclusion of this work.

**Keywords:** Eeigenvalue, Eigenvector, Quadrics



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>7</b>
1.1	MOTIVAÇÃO	8
1.2	OBJETIVOS	8
1.2.1	Objetivo Geral	8
1.2.2	Objetivos Específicos	8
<b>2</b>	<b>PRÓLOGO</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>AUTOVALORES E AUTOVETORES</b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>FORMAS BILINEARES E TEOREMA ESPECTRAL</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>FORMAS QUÁDRICAS</b>	<b>43</b>
5.1	FORMA QUÁDRICA NO PLANO	43
5.1.1	Redução da Forma Quadrática à Forma Canônica	44
5.2	CÔNICAS NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL	47
5.2.1	Equação Reduzida de uma Cônica	47
5.3	CÔNICAS NÃO DEGENERADAS E DEGENERADAS NA POSIÇÃO PADRÃO	51
5.3.1	Classificação das Cônicas	51
5.4	FORMA QUADRÁTICA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL	66
5.4.1	Redução da Forma Quadrática à Forma Canônica	67
5.5	QUÁDRICAS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL	68
5.5.1	Equação Reduzida de Uma Quádrica	69
5.5.2	Classificação das Quádricas no Espaço Tridimensional	72
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>80</b>
	REFERÊNCIAS	82

## 1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa será analítica e terá âmbito bibliográfico. A mesma insere-se no campo da Álgebra Linear e visa a abordagem de autovalores e autovetores os quais contém informações importantes sobre a natureza dos espaços vetoriais e são bastante utilizados pela facilidade que proporcionam ao lidar com espaços vetoriais de dimensão  $n$ .

De acordo com (NOBLE; DANIEL, 1986), na Álgebra Linear, muitos problemas se reduzem freqüentemente ao estudo de transformações lineares e de seus efeitos. Há fenômenos que podem ser descritos pela variável  $v$  em um certo espaço vetorial  $V$ , enquanto a transformação linear  $T$  transforma o estado  $v$  em  $V$  no estado  $T(v)$  em  $V$ . Como  $V$  é frequentemente de dimensão finita  $n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , torna-se difícil compreender seu funcionamento. Para compreender o sistema, procuram-se subsistemas de dimensão menores, ou seja, certos conjuntos de variáveis ou combinação de variáveis, tais que o estado transformado resultante possa também ser expresso em termos destas variáveis ou combinações. Algebricamente, isso corresponde a achar um subespaço  $W$  de  $V$ , de dimensão  $j$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$ ,  $j < n$ , e tal que  $T(v)$  esteja em  $W$  sempre que  $v$  estiver em  $W$ . Pode-se então estudar o problema mais simples da natureza da transformação neste espaço menor. Idealmente, pode-se achar um tal subespaço de dimensão  $n = 1$ . Isso significa que deve-se achar um vetor não-nulo  $v$  (um autovetor) e um escalar  $\lambda$  (um autovalor) para o qual  $T(v) = \lambda v$ , de maneira que  $T$  transforma um subespaço  $W$  de dimensão um gerado por  $v$  nele próprio.

Interpretando a transformação linear  $T$  matricialmente observa-se que se  $T$  é uma matriz  $n \times n$  então um autovalor de  $T$  é um número  $\lambda$  tal que existe um vetor não-nulo  $v$  (chamado autovalor de  $T$  associado a  $\lambda$ ) tal que  $T(v) = \lambda v$  associado a cada autovalor  $\lambda$ , existe seu subespaço

$$V(\lambda) = \{v \in V | T(v) = \lambda v\} = \{v \in V | (T - \lambda I)v\} = \ker(T - \lambda I)$$

Assim, o problema de autovalor para  $T$  consiste em determinar todos os autovetores  $v$  para  $T$ . E o interesse na determinação destes autovalores  $\lambda$  e autovetores  $v$  é muito aplicativo na

Matemática.

O estudo de autovalores e autovetores de uma dada transformação  $T : V \rightarrow V$  vem ocorrendo frequentemente pelos pesquisadores, pois estes elementos algébricos tratam com simplicidade as informações sobre  $T$ . É em função disso que, para quem pesquisa, é importante conhecer este assunto.

Nas quádricas, os autovalores e os autovetores de  $T$  carregam informações essenciais para se trabalhar com quádricas rotacionadas e transladadas, além da própria classificação.

As quádricas advém da forma bilinear onde  $D = P^tAP$ , onde  $P^t$  e  $P$  são semelhantes e  $D$  e  $A$  são simétricas. Se  $A$  for diagonalizável, logo existe uma base formada por autovetores de  $T$  para os quais os autovalores são reais e geram a matriz diagonal. Isso acaba sendo provado pelo Teorema Espectral o qual garante a existência de  $D = P^tAP$ , onde  $P^t = P^{-1}$ .

## 1.1 MOTIVAÇÃO

Nos cursos de graduação em matemática, é comum termos uma carga horária pequena para a disciplina Álgebra Linear, que muitas das vezes é ofertada juntamente com a disciplina Geometria Analítica no primeiro semestre, quando o aluno ainda não possui um amadurecimento necessário para compreensão de assuntos mais abstratos da Álgebra Linear. Assim, é comum não haver uma abordagem aprofundada em alguns tópicos de Álgebra Linear, como as Transformações Lineares e os Autovalores e Autovetores. Mais ainda, embora os autovalores e autovetores sejam de grande aplicação nas Ciências e Engenharias, há falta de apresentação de aplicações deste assunto, tornando-os mais complexos e abstratos para o graduando em matemática.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Geral

Abordar os aspectos teóricos envolvidos nos autoespaços e como estes estão envolvidos no estudo das formas quádricas, especificamente nas segunda e terceira dimensão.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Especificar o autoespaço da  $T : V \rightarrow V$  e como encontrar autovalores e autovetores de  $T$ ;

- Demonstrar que para cada autovalor distinto existe um autovetor distinto, assim como as suas implicações;
- Utilizar a diagonalização na classificação geométrica das cônicas por meio dos autovalores;
- Utilizar de autovalores e autovetores para simplificar o trabalho com as cônicas, quando as mesmas estão ou rotacionadas, ou transladadas ou até mesmo ambas as situações.

## 2 PRÓLOGO

Esta seção abordará brevemente alguns conceitos iniciais sobre espaços vetoriais, subespaços, combinação linear, bases, transformações lineares, dimensão, núcleo e imagem, mudança de base. Estes conceitos algébricos são fundamentais para o desenvolvimento das próximas seções (LIMA, 2008; BOLDRINI et al., 1980; KOLMAN; HILL, 2006; HOFFMAN; KUNZE, 1976; ANTON; RORRES, 2001).

**Definição 2.1 (Corpo)** *Seja  $K \neq \emptyset$  um conjunto e  $x, y \in K$ , defina:*

$$\begin{aligned} + & := K \times K \rightarrow K & \cdot & := K \times K \rightarrow K \\ (x, y) & \mapsto x + y & (x, y) & \mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

*diz-se que  $(K, +, \cdot)$  é um **corpo** se satisfaz às seguintes propriedades:*

1.  $x + y = y + x$ ;
2.  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ;
3. *Existe um único elemento  $0 \in K$  tal que  $x + 0 = x$ ;*
4. *Para cada  $x \in K$  existe um  $y \in K$  tal que  $x + y = 0$ , ou seja,  $y = -x$ ;*
5.  $xy = yx$ ;
6.  $x(yz) = (xy)z$ ;
7. *Existe um único elemento  $1 \in K$  tal que  $x \cdot 1 = x$ ;*
8. *Para cada elemento  $x \in K$ ,  $x \neq 0$ , existe um único  $y \in K$  tal que  $xy = 1$ , ou seja,  $y = x^{-1}$ ;*
9.  $x(y + z) = xy + xz$ .

**Definição 2.2 (Espaço vetorial)** *Seja  $K$  um corpo qualquer e  $V$  um conjunto não-vazio onde está definido duas operações com  $u, v \in V$ , sejam elas respectivamente a adição e a multiplicação por escalar:*

$$\begin{aligned} + & := V \times V \rightarrow V & \cdot & := K \times V \rightarrow V \\ (u, v) & \mapsto u + v & (\alpha, u) & \mapsto \alpha u \end{aligned}$$

*diz-se que  $(V, +, \cdot)$  é um  $K$ -espaço vetorial (ou  $V$  é um  $K$ -e.v.) se as seguintes propriedades são válidas:*

*Considere  $u, v, w \in V$  e  $\alpha, \beta \in K$ .*

1.  $u + (v + w) = (u + v) + w$ ;
2.  $\exists 0 \in V$  tal que  $v + 0 = v$ ;
3.  $\exists -v \in V$  tal que  $v + (-v) = 0$ ;
4.  $u + v = v + u$ ;
5.  $1 \cdot v = v$ ;
6.  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ ;
7.  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ ;
8.  $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ .

*onde os elementos de  $V$  são chamados de vetores.*

*São  $K$ -espaços vetoriais  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathbb{M}_{m \times n}(K), \mathbb{F}(S, K), \mathbb{P}_n(K)$ .*

**Definição 2.3 (Subespaço vetorial)** *Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial. Um subconjunto  $W = \emptyset$  onde  $W \subset V$  é um **subespaço vetorial** de  $V$  se*

$$\begin{aligned} u \in W, v \in W & \Rightarrow u + v \in W \\ \alpha \in K, u \in W & \Rightarrow \alpha u \in W \end{aligned}$$

**Teorema 2.1 (Interseção de subespaços vetoriais)** *Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial e  $W_1, W_2$  subespaços vetoriais de  $V$ . Então,  $W_1 \cap W_2$  é subespaço vetorial de  $V$ .*

Demonstração:

Sejam  $u, v \in W_1 \cap W_2$ .

1) Deve-se mostrar que  $u + v \in W_1 \cap W_2$  :

$$u \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow u \in W_1 \text{ e } u \in W_2$$

$$v \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow v \in W_1 \text{ e } v \in W_2$$

Como  $W_1$  é subespaço vetorial, logo

$$u + v \in W_1$$

$$u + v \in W_1 \cap W_2$$

da mesma forma,  $W_2$  é subespaço vetorial, então

$$u + v \in W_2$$

$$u + v \in W_1 \cap W_2$$

2) Seja  $\lambda \in K$  e  $u \in W_1 \cap W_2$ , onde  $u \in W_1$  e  $u \in W_2$ , assim

$$u \in W_1 \Rightarrow \lambda u \in W_1$$

$$u \in W_2 \Rightarrow \lambda u \in W_2$$

logo,

$$\lambda u \in W_1 \cap W_2$$

Portanto,  $\lambda u \in W_1 \cap W_2$  é um subespaço vetorial de  $V$ .

**Definição 2.4** *Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial e  $W_1, W_2$  subespaços vetoriais de  $V$ . Defina*

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2; w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

**Teorema 2.2** *Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial e  $W_1, W_2$  subespaços vetoriais de  $V$ . Então,  $W_1 + W_2$  é subespaço vetorial de  $V$ .*

Demonstração:

Sejam  $u, v \in W_1 + W_2$ , tais que

$$u \in W_1 + W_2 \Rightarrow u = w_1 + w_2, \text{ onde } w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2$$

$$v \in W_1 + W_2 \Rightarrow v = w'_1 + w'_2, \text{ onde } w'_1 \in W_1 \text{ e } w'_2 \in W_2$$

1) Deve-se mostrar que  $u + v \in W_1 + W_2$  :

$$\begin{aligned} u + v &= w_1 + w_2 + w'_1 + w'_2 \\ u + v &= \underbrace{(w_1 + w'_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(w_2 + w'_2)}_{\in W_2} \end{aligned}$$

isto é,  $u + v \in W_1 + W_2$ .

2) Seja  $\lambda \in K$  e  $u \in W_1 + W_2$ , segue que

$$\lambda u = \lambda(w_1 + w_2) = \underbrace{\lambda w_1}_{\in W_1} + \underbrace{\lambda w_2}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$$

Portanto,  $W_1 + W_2$  é um subespaço vetorial de  $V$ .

**Definição 2.5 (Soma direta)** *Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial e  $W_1, W_2$  subespaços vetoriais de  $V$ . Se*

1.  $V = W_1 + W_2$

2.  $W_1 \cap W_2 = 0$

*diz-se que  $V$  é a soma direta de  $W_1$  e  $W_2$  e escreve-se assim*

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

**Definição 2.6 (Combinação linear)** *Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vetores de  $V$  e  $a_1, a_2, \dots, a_n$  escalares pertencentes a  $K$ . Qualquer vetor  $v \in V$  da forma*

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

*é uma combinação linear dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .*

**Definição 2.7 (Dependência e independência linear)** *Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vetores de  $V$ . Diz-se que o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é **linearmente independente (LI)** se a equação*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$$

*admite a solução trivial  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .*



Caso exista algum  $a_i \neq 0$ , com  $1 \leq i \leq n$ , que satisfaz

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$$

diz-se então que o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é **linearmente dependente** (LD).

**Definição 2.8 (Base)** Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vetores de  $V$  não nulos, tais que:

1.  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é LI
2.  $[v_1, v_2, \dots, v_n] = V$

então, o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma **base** de  $V$ .

**Teorema 2.3** Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial e  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$ . Então, todo vetor de  $V$  se escreve de modo único como combinação linear de  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

Demonstração:

Seja  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  base de  $V$ , então, por definição, segue que:

- 1)  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é LI.
- 2)  $[v_1, v_2, \dots, v_n]$  o conjunto de todas as combinações lineares de  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

Seja  $v \in V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  tal que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

com  $a_i \in K$ ,  $v_i \in V$  e  $1 \leq i \leq n$ .

Supõe-se que

$$\begin{aligned} v &= b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n \\ b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n - a_1v_1 - a_2v_2 - \dots - a_nv_n &= 0 \\ (b_1 - a_1)v_1 + (b_2 - a_2)v_2 + \dots + (b_n - a_n)v_n &= 0 \end{aligned}$$

Como  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é LI, então

$$(b_1 - a_1) = (b_2 - a_2) = \dots = (b_n - a_n)v_n = 0$$

o que implica

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 \\ a_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ a_n &= b_n \end{aligned}$$

Assim, verificou-se que todo vetor  $v \in V$  se escreve de modo único como combinação linear de  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

**Definição 2.9** *Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial,  $\dim(V) = n$  e  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  base de  $V$ . Então, se  $v \in V$  é tal que*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

*os escalares  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são chamados de coordenadas de  $V$  na base  $\beta$ , representado por*

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

*Seja  $\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  base de  $V$ . Então, se  $w \in V$  é tal que*

$$w = b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_nw_n$$

*os escalares  $b_1, b_2, \dots, b_n$  são chamados de coordenadas de  $V$  na base  $\beta'$ , representado por*

$$[w]_{\beta'} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

*Assim, será analisado a relação de  $[v]_{\beta}$  e  $[w]_{\beta'}$  na definição seguinte.*

**Definição 2.10 (Mudança de base)** *Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial,  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  bases de  $V$ .*

*Seja  $v \in V$ . Escreve-se  $v$  como combinação linear na base  $\beta$  e  $\beta'$ :*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

$$v = b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_nw_n \tag{1}$$

Cada  $w_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , pode ser escrito de maneira única como combinação linear da base  $\beta$ , assim

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n \\ w_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n \\ &\dots\dots\dots \\ w_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n \end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo em (2) em (1), tem-se

$$\begin{aligned} v &= b_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n) + b_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n) + \\ &\quad + \dots + b_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n) = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n \\ &(a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + \dots + a_{n1}b_n)v_1 + (a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{n2}b_n)v_2 + \\ &\quad + \dots + (a_{1n}b_1 + a_{2n}b_2 + \dots + a_{nn}b_n)v_n = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n \\ &(a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + \dots + a_{n1}b_n - a_1)v_1 + (a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{n2}b_n - a_2)v_2 + \\ &\quad + \dots + (a_{1n}b_1 + a_{2n}b_2 + \dots + a_{nn}b_n - a_n)v_n = 0 \end{aligned}$$

Como  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é LI, porque é base de  $V$ , então

$$\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + \dots + a_{n1}b_n - a_1 = 0 \\ a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{n2}b_n - a_2 = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}b_1 + a_{2n}b_2 + \dots + a_{nn}b_n - a_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + \dots + a_{n1}b_n = a_1 \\ a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{n2}b_n = a_2 \\ \vdots \\ a_{1n}b_1 + a_{2n}b_2 + \dots + a_{nn}b_n = a_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

Assim, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é chamada de **matriz mudança de base da base  $\beta'$  para a base  $\beta$**  e denota-se  $A = [I]_{\beta}^{\beta'}$ .

$$\text{Portanto, } [v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} \cdot [v]_{\beta'}.$$

$$\text{Analogamente, } [v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} \cdot [v]_{\beta}.$$

**Teorema 2.4** *Sejam  $V$  um  $K$ -espaço vetorial,  $\dim(V) = n$ ,  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ . Então,*

$$[I]_{\beta}^{\beta'} \quad e \quad [I]_{\beta'}^{\beta}$$

são invertíveis. Ainda mais,

$$\left([I]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} = [I]_{\beta'}^{\beta} \quad e \quad \left([I]_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1} = [I]_{\beta}^{\beta'}$$

**Demonstração:**

Seja  $[I]_{\beta}^{\beta'} = A$  e  $[I]_{\beta'}^{\beta} = B$ ,  $[v]_{\beta} = X$  e  $[v]_{\beta'} = Y$ . logo, as expressões  $[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} \cdot [v]_{\beta'}$  e  $[v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} \cdot [v]_{\beta}$  podem ser escritas da seguinte maneira:

$$X = AY \tag{4}$$

$$Y = BX \tag{5}$$

Substituindo

$$(5) \rightarrow (4) \quad X = AY \Rightarrow X = ABX \Rightarrow AB = [I]_{n \times n}$$

$$(4) \rightarrow (5) \quad Y = AX \Rightarrow Y = BAY \Rightarrow BA = [I]_{n \times n}$$

Portanto,  $A = [I]_{\beta}^{\beta'}$  e  $B = [I]_{\beta'}^{\beta}$  são invertíveis  $A = B^{-1}$  e  $B = A^{-1}$ , ou seja,

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \left([I]_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1}$$

ou

$$[I]_{\beta'}^{\beta} = \left([I]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1}.$$

**Definição 2.11 (Transformação linear)** *Sejam  $V$  e  $W$   $K$ -espaços vetoriais. Considera-se que  $T$  é uma **transformação** (ou uma função)*

$$T : V \rightarrow W$$

é linear se:

$$1) T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2), \quad v_1, v_2 \in V;$$

$$2) T(\alpha v) = \alpha T(v), \quad \forall \alpha \in K, \quad \forall v \in V.$$

Se  $T : V \rightarrow W$  é linear, tem-se que  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  e quando  $V = W$ , tem-se apenas  $T \in \mathcal{L}(V)$ , e, neste caso, considera-se que  $T$  é um **operador linear**. Como consequência da definição, tem-se que  $T$  é linear,  $T : V \rightarrow W$ , então

$$T(0_V) = 0_W$$

De fato:

$$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$$

$$T(0) = w \in W$$

Seja a equivalência

$$w = w + w$$

$$w + (-w) = w + (w + (-w))$$

$$0 = w + 0$$

$$w = 0 = T(0)$$

Portanto,  $T(0) = 0$ .

**Definição 2.12** *Sejam  $V$  e  $W$   $K$ -espaços vetoriais e  $T : V \rightarrow W$  linear. A **imagem de  $T$**  é o subconjunto  $Im(T) \subseteq W$ , definido assim*

$$Im(T) = \{w \in W \mid w = T(v), \text{ para algum } v \in V\}$$

**Definição 2.13** *Sejam  $V$  e  $W$   $K$ -espaços vetoriais e  $T : V \rightarrow W$  linear. O **núcleo de  $T$**  é o subconjunto  $ker^1(T) \subseteq V$ , definido por*

$$ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

**Proposição 2.1** *Seja  $T : V \rightarrow W$  linear, onde  $V$  e  $W$  são  $K$ -espaços vetoriais. Então:*

---

<sup>1</sup>ker vem da língua inglesa *kernel*, que quer dizer núcleo.

1)  $Im(T)$  é um subespaço vetorial de  $W$ ;

2)  $ker(T)$  é um subespaço vetorial de  $V$ .

Demonstração:

1)  $Im(T)$  é um subespaço vetorial de  $W$ , pois

i) Seja  $w_1 \in Im(T), w_2 \in Im(T)$

$$\bullet w_1 \in Im(T) \Rightarrow \exists v_1 \in V | T(v_1) = w_1$$

$$\bullet w_2 \in Im(T) \Rightarrow \exists v_2 \in V | T(v_2) = w_2$$

logo,

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$$

pois  $T$  é linear. Portanto,

$$w_1 + w_2 \in Im(T)$$

ii) Seja  $w \in Im(T)$  e  $\alpha \in K$ , onde  $w = T(v)$  para algum  $v \in V$ , assim

$$\alpha w = \alpha T(v) = T(\alpha v)$$

pois  $T$  é linear. Portanto,

$$\alpha w \in Im(T)$$

Logo, verificou-se que  $Im(T) \subseteq W$  é um subespaço vetorial de  $W$ .

2)  $ker(T)$  é um subespaço vetorial de  $V$ , pois

i) Sejam  $v_1, v_2 \in ker(T)$  deve-se mostrar que  $v_1 + v_2 \in ker(T)$ . Calculando

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0$$

portanto,  $v_1 + v_2 \in ker(T)$ .

ii) Seja  $\alpha \in K$  e  $v \in ker(T)$ . Deve-se mostrar que  $\alpha v \in ker(T)$ . Calculando

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha \cdot 0 = 0$$

então  $\alpha v \in ker(T)$ .

Portanto,  $ker(T) \subseteq V$  é um subespaço vetorial de  $V$ .

**Propriedade 2.1** *Sejam  $V, W$  e  $U$   $K$ -espaços vetoriais;  $T_1 \in \mathcal{L}(V, W)$  e  $T_2 \in \mathcal{L}(W, U)$ . Então  $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(V, U)$ .*

Demonstração:

1)

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(v_1 + v_2) &= T_2(T_1(v_1 + v_2)) \\ (T_2 \circ T_1)(v_1 + v_2) &= T_2(T_1(v_1) + T_1(v_2)) \\ (T_2 \circ T_1)(v_1 + v_2) &= T_2(T_1(v_1)) + T_2(T_1(v_2)) \\ (T_2 \circ T_1)(v_1 + v_2) &= (T_2 \circ T_1)(v_1) + (T_2 \circ T_1)(v_2) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(\lambda v) &= T_2(T_1(\lambda v)) \\ (T_2 \circ T_1)(\lambda v) &= T_2(\lambda T_1(v)) \\ (T_2 \circ T_1)(\lambda v) &= \lambda T_2(T_1(v)) \\ (T_2 \circ T_1)(\lambda v) &= \lambda (T_2 \circ T_1)(v) \end{aligned}$$

**Definição 2.14** *Sejam  $V$  e  $W$   $K$ -espaços vetoriais,  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  base de  $V$ ,  $\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  base de  $W$  e  $T : V \rightarrow W$ , onde*

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

Definindo

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

*a matriz mudança de base de  $T$  da base  $\beta$  para a base  $\beta'$ .*

**Teorema 2.5** *Sejam  $V$  e  $W$   $K$ -espaços vetoriais,  $\dim(V) = n$ ,  $\dim(W) = m$ ,  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  base de  $V$ ,  $\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  base de  $W$  e  $T : V \rightarrow W$  linear. Então,  $\forall v \in V$ , tem-se*

$$[T(v)]_{\beta'} = [T]_{\beta'}^{\beta} \cdot [v]_{\beta}$$

Demonstração:

Sejam

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{cases} T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m \\ \vdots \\ T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m \end{cases} \quad (6)$$

ainda,  $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$ ,  $T(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + \dots + y_nw_n$ ,

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } [T(v)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Partindo de que  $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$  e utilizando o fato que  $T$  é linear, tem-se

$$T(v) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2) + \dots + x_nT(v_n)$$

ora, mas  $T(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + \dots + y_nw_n$ , logo,

$$T(v) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2) + \dots + x_nT(v_n) = y_1w_1 + y_2w_2 + \dots + y_nw_n$$

Substituindo (6) nesta expressão, dessa maneira obtém-se

$$\begin{aligned} T(v) &= x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m) + x_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m) + \\ &\quad + \dots + x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m) = y_1w_1 + y_2w_2 + \dots + y_nw_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(v) &= w_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m) + w_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m) + \\ &\quad + \dots + w_n(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m) = y_1w_1 + y_2w_2 + \dots + y_nw_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(v) &= w_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m - y_1) + w_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m - y_2) + \\ &\quad + \dots + w_n(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m - y_n) = 0 \end{aligned}$$



como  $w_1, w_2, \dots, w_m$  é base de  $W$ , obtém-se

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m - y_1 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m - y_2 = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m - y_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \\ y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \\ \vdots \\ y_n = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$[T(v)]_{\beta'} = [T]_{\beta'}^{\beta} \cdot [v]_{\beta}$$

Seja  $T : V \rightarrow W$  linear e inversível,  $\alpha$  base de  $V$  e  $\beta$  base de  $W$ , onde a ilustração a seguir mostra o comportamento da transformação dessas bases:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathbf{T}} & W \\ \alpha & \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \beta \end{bmatrix} & \beta \end{array} & \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathbf{T}^{-1}} & V \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \\ \alpha \end{bmatrix} & \alpha \end{array} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{T}^{-1} \circ \mathbf{T}} \end{array}$$

**Figura 1:** Comportamento da transformação  $T : V \rightarrow W$  linear e inversível em bases diferentes, respectivamente,  $\alpha$  e  $\beta$ .

$$[T^{-1} \circ T]_{\alpha}^{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\alpha} = I$$

Então,

$$[I]_{\alpha}^{\alpha} = [T^{-1}]_{\alpha}^{\beta} \cdot [T]_{\beta}^{\alpha} \tag{7}$$

Mas quem é  $[I]_{\alpha}^{\alpha}$ ?

Seja  $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , tem-se então que

$$\begin{cases} I(v_1) = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = v_1 \\ I(v_2) = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = v_2 \\ \vdots \\ I(v_n) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_n = v_n \end{cases}$$

e

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

e analogamente,

$$[T]_{\beta}^{\alpha} \cdot [T^{-1}]_{\alpha}^{\beta} = [I]_{\alpha}^{\alpha} \quad (8)$$

Portanto,  $[T]_{\beta}^{\alpha}$  é inversível e  $\left([T]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1} = [T^{-1}]_{\alpha}^{\beta}$

De (7) e (8), tem-se

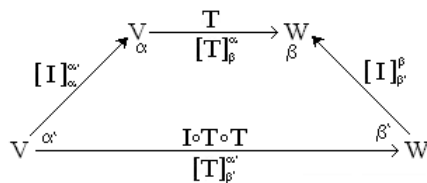
$$[T]_{\beta}^{\alpha} \cdot [T^{-1}]_{\alpha}^{\beta} = I \quad (9)$$

Utilizando propriedade de determinantes em (9), obtém-se

$$\det\left([T]_{\beta}^{\alpha} \cdot [T^{-1}]_{\alpha}^{\beta}\right) = \det(I) = 1$$

$$\underbrace{\det\left([T]_{\beta}^{\alpha}\right)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det\left([T^{-1}]_{\alpha}^{\beta}\right)}_{\neq 0} = 1$$

Portanto,  $T : V \rightarrow W$  linear é inversível se, e somente se,  $\det\left([T]_{\beta}^{\alpha}\right) \neq 0$ , onde  $\alpha$  base de  $V$  e  $\beta$  base de  $W$ .

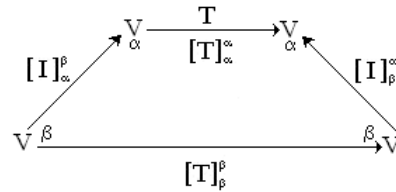


**Figura 2:**  $T : V \rightarrow W$  linear é inversível.

**Observação 2.1** Então, tem-se

$$[T]_{\beta'}^{\alpha'} = [I]_{\beta'}^{\beta} \cdot [I]_{\alpha}^{\alpha'}$$

Caso particular:  $W = V$



**Figura 3:**  $T : V \rightarrow V$  linear é inversível.

Então, tem-se

$$[T]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{\beta}$$

Seja  $A = [I]_{\beta}^{\alpha}$ , tem-se que  $A^{-1} = [I]_{\alpha}^{\beta}$ . Portanto,

$$[T]_{\beta}^{\beta} = A [T]_{\alpha}^{\alpha} A^{-1}$$

então  $[T]_{\alpha}^{\alpha}$  e  $[T]_{\beta}^{\beta}$  são **matrizes semelhantes**, ou seja, matrizes que possuem o mesmo determinante.

**Observação 2.2** Sejam  $P$  e  $Q$  matrizes quadradas. Diz-se que  $P$  e  $Q$  são matrizes semelhantes se existir  $C$  invertível tal que  $P = CQC^{-1}$ .

### 3 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Frequentemente, o espaço vetorial  $V$  pode assumir dimensões diversas, ocorrendo casos onde é difícil compreender alguns sistemas de dimensão finita  $n$ . Assim, é necessário encontrar um subespaço  $W$  de  $V$ , em que  $\dim(W) < \dim(V)$ , e que contenha as características de  $V$ . Algebricamente, isso corresponde a achar  $W$  de  $V$ , tal que a transformação  $T(v)$  esteja em  $W$  sempre que  $v$  estiver em  $W$ .

Na verdade, encontra-se que achar um vetor não-nulo  $v$  (um autovetor<sup>1</sup>) e um escalar  $\lambda$  (um autovalor) para o qual  $T(v) = \lambda v$ , de maneira que  $T$  transforma o subespaço  $W$  de dimensão gerada por  $v$  nele próprio. Isso motiva o estudo de autoespaços (ou seja, conjuntos pares de autovetores e autovalores) relacionando-os aos subespaços  $W$  de uma transformação linear  $T$ , mantendo as características de  $V$  (LIMA, 2008; BOLDRINI et al., 1980; BARSOTI, 1976; HOFFMAN; KUNZE, 1976; LEON, 2008; LIPSCHUTZ; LIPSON, 2004).

Assim, segue a seguinte definição de subespaço invariante.

**Definição 3.1 (Subespaço Invariante)** *Seja  $T : V \rightarrow W$  linear. Um subespaço  $W$  é chamado invariante sob  $T$  se  $T(w) \in W$ , isto é,*

$$w \in W \Rightarrow T(w) \in W$$

Ressalta-se que os subespaços  $0_V$  e  $V$  são invariantes por qualquer operador linear  $T : V \rightarrow V$ . O núcleo  $\ker(V)$  e a imagem  $\text{Im}(V)$  são também subespaços invariantes.

A partir da **Definição (3.1)**, pode-se fazer a seguinte definição.

**Definição 3.2 (Autovalor e autovetor)** *Seja  $T : V \rightarrow V$  linear,  $V$  um  $K$ -espaço vetorial. Defina*

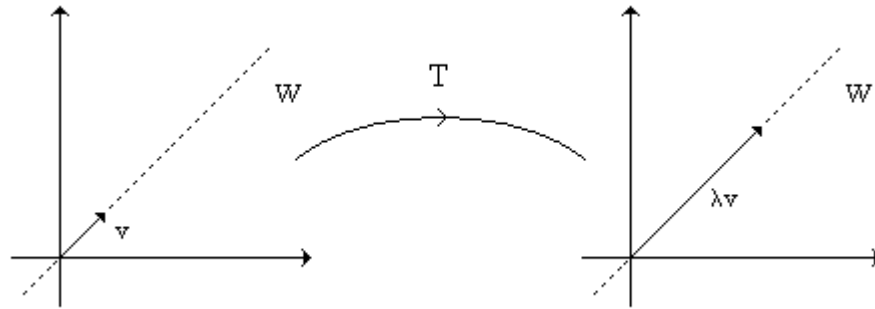
---

<sup>1</sup>Outras denominações para autovalores e autovetores: valores e vetores característicos, valores e vetores próprios, raízes características ou latentes, valores espectrais, etc.

$\lambda \in K$  é **autovalor** de  $T$  se, e somente se,  $\exists v \neq 0$  tal que

$$T(v) = \lambda v,$$

onde  $v$  é chamado **autovetor** associado ao autovalor  $\lambda$ . Se existe  $v \neq 0$  tal que  $T(v) = \lambda v$ , como mostra a figura 4.



**Figura 4: Representação de subespaço invariante.**

Assim,  $v \in W \subset V \Rightarrow T(v) = \lambda v \in W$ . E portanto,  $W$  é invariante sob  $T$ .

**Observação 3.1** Segue dessa definição que um vetor  $v \neq 0_V$  é vetor próprio se a imagem  $T(v)$  for um múltiplo escalar de  $v$ . No  $\mathbb{R}^2$  e no  $\mathbb{R}^3$  defina que  $v$  e  $T(v)$  têm a mesma direção. Assim, dependendo do valor de  $\lambda$ , o operador  $T$  dilata  $v$ , contrai  $v$ , inverte o sentido de  $v$ , ou anula no caso de  $\lambda = 0$ .

**Proposição 3.1** Seja  $T : V \rightarrow V$  linear. Então, são equivalentes:

- 1)  $\lambda$  é autovalor de  $T$ ;
- 2)  $\ker(T - \lambda I) \neq 0$ ;
- 3)  $\det(T - \lambda I) = 0$ .

Demonstração:

$$(1) \Rightarrow (2)$$

Seja  $T \in L(V)$  e  $\lambda$  autovalor de  $T$ . Então, existe  $v \neq 0$ , tal que

$$\begin{aligned} T(v) &= \lambda v \\ T(v) - \lambda v &= 0 \\ T(v) - \lambda I(v) &= 0 \\ (T - \lambda I)(v) &= 0 \end{aligned}$$

Assim

$$v \in \ker(T - \lambda I)$$

e

$$\ker(T - \lambda I) \neq 0$$

$$(2) \Rightarrow (3)$$

Tem-se por hipótese que  $\ker(T - \lambda I) \neq 0$ , assim  $(T - \lambda I)$  é não inversível pois

$$\det(T - \lambda I) = 0$$

$$(3) \Rightarrow (1)$$

Se  $\det(T - \lambda I) = 0$  então  $(T - \lambda I)$  é não inversível. Se  $\ker(T - \lambda I) \neq 0$  então existe  $v \neq 0$  tal que

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)(v) &= 0 \\ T(v) - \lambda I(v) &= 0 \\ T(v) - \lambda v &= 0 \\ T(v) &= \lambda v \end{aligned}$$

Portanto, segue que  $\lambda$  é autovalor de  $T$ .

**Definição 3.3** Seja  $T : V \rightarrow V$  linear e  $\beta$  uma base de  $V$  e  $v \neq 0$  tal que  $v \in V$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$ . Então,

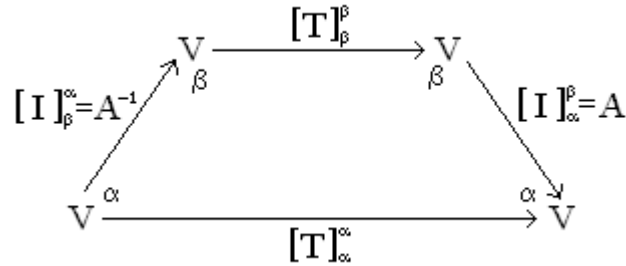
$$\begin{aligned} T(v) &= \lambda v \\ [T(v)]_\beta &= [\lambda v]_\beta \\ [T]_\beta^\beta [v]_\beta &= \lambda [v]_\beta \\ [T]_\beta^\beta [v]_\beta - \lambda [v]_\beta &= 0 \\ \det \left( [T]_\beta^\beta [v]_\beta - \lambda [v]_\beta \right) &= \det 0 \end{aligned}$$

como  $v \neq 0$ , logo

$$\det \left( [T]_\beta^\beta - \lambda I \right) = 0.$$

Assim, a equação  $\det \left( [T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I \right) = 0$  é denominada **equação característica** do operador  $T$  e suas raízes são os autovalores do operador  $T$ . O determinante  $\det \left( [T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I \right)$  é um polinômio em  $\lambda$  denominado **polinômio característico**.

**Observação 3.2** O polinômio característico de  $T$  independe da base escolhida em  $V$ .



**Figura 5:**  $T : V \rightarrow V$  linear independe da base escolhida.

Seja  $\alpha$  uma outra base de  $V$ , logo

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = A [T]_{\beta}^{\beta} A^{-1}$$

Segue

$$\begin{aligned} \det ([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) &= \det \left( A [T]_{\beta}^{\beta} A^{-1} - \lambda I \right) \\ \det ([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) &= \det \left( A [T]_{\beta}^{\beta} A^{-1} - \lambda A I A^{-1} \right) \\ \det ([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) &= \det \left( A \left( [T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I \right) A^{-1} \right) \\ \det ([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) &= \det (A) \det \left( [T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I \right) \det (A^{-1}) \\ \det ([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) &= \det (A A^{-1}) \det \left( [T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I \right) \\ \det ([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) &= \det (I) \det \left( [T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I \right) \\ \det ([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) &= 1 \cdot \det \left( [T]_{\beta}^{\beta} - \lambda I \right) \\ \det ([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) &= p_T(\lambda) \end{aligned}$$

Logo, o polinômio característico pode ser dado por

$$p_T(\lambda) = \det \left( [T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I \right).$$

**Definição 3.4** Seja  $T : V \rightarrow V$  linear e  $v \neq 0$  autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ . O conjunto

$$V_{\lambda} = \{v \in V | T(v) = \lambda v\}$$

é chamado de **autoespaço associado ao autovalor  $\lambda$** .

**Proposição 3.2** *Seja  $T : V \rightarrow V$  linear.  $V_\lambda$  é um autoespaço vetorial de  $V$ .*

Demonstração:

1) Sejam

$$\begin{aligned} v_1 \in V_\lambda &\Rightarrow T(v_1) = \lambda v_1 \\ v_2 \in V_\lambda &\Rightarrow T(v_2) = \lambda v_2 \end{aligned}$$

Deve-se verificar se a soma  $v_1 + v_2 \in V_\lambda$ , assim

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T(v_1) + T(v_2) \\ T(v_1 + v_2) &= \lambda v_1 + \lambda v_2 \\ T(v_1 + v_2) &= \lambda \underbrace{(v_1 + v_2)}_{\in V_\lambda} \end{aligned}$$

2) Seja  $\alpha \in K$ ,  $v \in V_\lambda$  então  $T(v) = \lambda v$ . Tem-se que

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) = \alpha \lambda v = \lambda \underbrace{(\alpha v)}_{\in V_\lambda}$$

Assim,  $V_\lambda$  é subespaço vetorial de  $V$ .

**Proposição 3.3** *Seja  $T : V \rightarrow V$  linear e  $v \neq 0$  autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$ . Assim,  $V_\lambda$  é invariante sob  $T$ .*

Demonstração:

Seja  $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$ .

Seja  $v \in V_\lambda$  de modo que  $T(v) = \lambda v \in V$ .

Dessa forma,  $T_\lambda$  é  $T$  invariante, ou seja, qualquer vetor de  $V$  pela transformação  $T$  cai em  $V$ , por isso  $V_\lambda$  é invariante sob  $T$ .

**Teorema 3.1** *Autovetores associados a autovalores distintos são LI.*

Seja  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  o conjunto dos autovetores  $v_i$  associados aos autovalores  $\lambda_i$ .

Provaremos que  $\beta$  é um conjunto L.I, utilizando o Princípio da Indução Finita:

a) para  $n = 1$ , tem-se

$$\alpha_1 v_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0; \quad \{v_1\} \text{ é LI.}$$



b) supondo a validade para  $n - 1$ ,

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} = 0$$

hipótese  $\beta_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

c) Mostremos que é válido para  $n$ .

Considere a combinação linear nula entre os autovetores

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \quad (10)$$

Aplicando a transformação linear, tem-se

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) &= T(0) = 0 \\ \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) &= 0 \end{aligned}$$

como  $T(v_i) = \lambda_i v_i$ , logo

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n = 0 \quad (11)$$

Assim, se for multiplicado (10) por  $\lambda_n$  e subtraindo de (11), vem

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n) v_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_n) v_2 + \dots + \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) v_{n-1} = 0$$

Utilizando a hipótese da indução, os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  são LI, logo

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n) = \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_n) = \dots = \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) = 0$$

usando a hipótese de que os  $\lambda$ 's são distintos, então,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ . Como

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}}_{=0} + \alpha_n v_n = 0$$

assim,  $\alpha_n = 0$ , pois  $v_n \neq 0$ . Portanto, a expressão (11) só pode ocorrer quando todos os coeficientes  $\alpha_i$  são nulos.

**Corolário 3.1** *Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial com  $\dim(V) = n$  tal que  $T : V \rightarrow V$  possui  $n$  autovalores diferentes. Então,  $T$  possui  $n$  autovetores LI e portanto, o conjunto dos autovetores é uma base de  $V$ .*

**Corolário 3.2 (Diagonalização de operadores)** *Se  $\dim(V) = n$  e  $T \in \mathcal{L}(V)$  têm  $n$  autovalores distintos, então  $V$  possui uma base formada por autovetores.*

Demonstração:

Seja  $v_1, v_2, \dots, v_n$  autovetores associados aos autovalores distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Pelo **teorema 3.1**,  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é LI, e como  $\dim(V) = n$  tem-se que  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma formada por autovetores.

**Corolário 3.3 (Decomposição de  $V$  como subespaços invariantes de dimensão 1)** *Seja  $T : V \rightarrow V$  tal que  $T(v) = \lambda v$ . Se  $V$  é um  $K$ -espaço vetorial,  $\dim(V) = n$ , com  $n$  autovalores distintos, então há uma base de autovetores tal que  $V_{\lambda_i}$  é o autoespaço associado ao autovalor  $\lambda_i$ , assim*

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$$

onde cada  $\dim(V_{\lambda_i})$  possui dimensão 1.

**Definição 3.5** *Sejam  $V$  um  $K$ -espaço vetorial,  $\dim(K) < \infty$  e  $T : V \rightarrow V$  linear. Defina  $T$  **diagonalizável** se, e somente se,  $V$  possui uma base formada por autovetores.*

**Observação 3.3** *Seja  $T : V \rightarrow V$  diagonalizável e  $\dim(V) = n$ . Então, existe  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  base de  $V$  formada por autovetores. Então:*

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= \lambda_1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = v_1 \\
T(v_2) &= 0 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = v_2 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
T(v_n) &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = v_n
\end{aligned}$$

e

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

onde  $[T]_{\beta}^{\beta}$  é uma matriz diagonal.

**Observação 3.4** *Por outro lado, suponha que existe  $\alpha = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  base se  $V$  tal que  $[T]_{\alpha}^{\alpha}$  seja uma diagonal.*

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \dim(V) = n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(w_1) &= a_1 w_1 \\ T(w_2) &= a_2 w_2 \\ &\vdots \\ T(w_n) &= a_n w_n \end{aligned}$$

Logo,  $\alpha$  é formada por autovetores.

Assim, a definição de  $T : V \rightarrow V$  ser diagonalizável (Definição 3.5) foi motivada por estas duas observações anteriores.

**Definição 3.6** *Seja  $T : V \rightarrow V$  linear, diz-se que  $T$  é diagonalizável se existe  $\beta$  base de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .*

Como calcular os autovalores?

$$p(\lambda) = \det([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I)$$

Lembrando que os autovalores são as raízes de  $p(\lambda)$ , isto é,  $p(\lambda) = 0$ , logo o grau de  $p(\lambda)$ , expresso por  $\partial p(\lambda)$ ,

$$\partial p(\lambda) = \dim(V) = n$$

Como calcula-se os autovetores correspondentes?

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} v = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

## 4 FORMAS BILINEARES E TEOREMA ESPECTRAL

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos necessários para a demonstração do Teorema Espectral além de introduzir o conceito de quádricas por meio de formas bilineares (MAGALHAES, 2004; AXLER; GEHRING; HALNROS, 2010; COELHO; LOURENCO, 2010; LANG, 1971; HOFFMAN; KUNZE, 1976; BOLDRINI et al., 1980).

**Definição 4.1** *Um produto interno sobre  $V$  é uma função*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$$

*que satisfaz às propriedades:*

- 1)  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- 2)  $\langle \lambda u, v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$
- 3)  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- 4)  $\langle u, u \rangle \geq 0$  e  $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$

**Definição 4.2** *Seja  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Defina que dois vetores  $v$  e  $w$  são **ortogonais** (em relação ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) se, e somente se,  $\langle v, w \rangle = 0$ , ou ainda,  $(v \perp w)$ .*

**Definição 4.3** *Seja  $V$  um  $K$ -espaço vetorial com produto interno e  $W$  um subespaço vetorial de  $V$ . O conjunto*

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$$

*é um subespaço de  $V$ , chamado de complemento ortogonal de  $W$ .*

**Teorema 4.1 (Relaciona ortogonalidade e independência linear)** *Seja  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  e seja a base  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  um conjunto de vetores não-nulos, ortogonais dois a dois (isto é,  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ ;  $i \neq j$ ). Então  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é LI.*

Demonstração:

Seja  $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$ . Deve-se mostrar que  $a_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

$$\begin{aligned} \langle a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n, v_i \rangle &= \langle 0, v_i \rangle = 0 \\ \langle a_1v_1, v_i \rangle + \langle a_2v_2, v_i \rangle + \dots + \langle a_iv_i, v_i \rangle + \dots + \langle a_nv_n, v_i \rangle &= 0 \\ a_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\neq 0} &= 0 \end{aligned}$$

portanto,  $a_i = 0$ . E isso vale para todo  $1 \leq i \leq n$ . Assim,  $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$  é LI.

**Definição 4.4** Seja  $(V \langle \cdot, \cdot \rangle)$  a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \end{aligned}$$

é uma **norma** em  $V$ .

**Definição 4.5** Seja  $(V \langle \cdot, \cdot \rangle)$  e  $S \subset V$  um subconjunto de  $V$ . Defina que  $S$  é **ortonormal** se  $S$  é ortogonal e  $\|x\| = 1$ ,  $\forall x \in S$ .

**Definição 4.6** Seja  $(V \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , onde  $V$  é um  $K$ -espaço vetorial com  $\dim(V) = n$ . Defina que uma base  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é **ortonormal** se  $\beta$  é ortogonal e  $\|v_i\| = 1$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ou  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  base ortonormal se, e somente se,

$$\begin{cases} \langle v_i, v_j \rangle = 0, & i \neq j \\ \langle v_i, v_i \rangle = 1, \end{cases}$$

**Definição 4.7** Sejam  $V$  e  $W$   $K$ -espaços vetoriais com produto interno ( $\dim(V) = \dim(W)$ ). Tem-se que  $T \in \mathcal{L}(V)$  é uma **isometria** se  $\|T(x)\| = \|x\|$ . Quando  $V = W$ ,  $\dim(V) < \infty$ , onde  $V$  é um espaço euclidiano, então  $T : V \rightarrow V$  isometria é chamada uma **transformação ortogonal**.

**Proposição 4.1** Seja  $T : V \rightarrow V$ .  $T$  é isometria se, e somente se, existe  $T^*$  e  $T^* = T^{-1}$ .

Demonstração:

( $\Rightarrow$ )

$$\begin{aligned}\langle T(x), y \rangle &= \langle T(x), T \circ T^{-1}(y) \rangle \\ \langle T(x), y \rangle &= \langle T(x), T(T^{-1}(y)) \rangle \\ \langle T(x), y \rangle &= \langle x, T^{-1}(y) \rangle \\ \langle T(x), y \rangle &= \langle x, T^*(y) \rangle\end{aligned}$$

como  $T$  é único, então  $T^* = T^{-1}$ .

( $\Leftarrow$ )

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle x, T^{-1} \circ T(y) \rangle \\ \langle x, y \rangle &= \langle x, T^*(T(y)) \rangle \\ \langle x, y \rangle &= \langle T(x), T(y) \rangle\end{aligned}$$

Assim, tem-se que  $T$  é isometria.

**Definição 4.8** Seja  $T \in M_n(K)$ .

- 1)  $T$  é simétrica se, e somente se,  $T = T^t$ ;
- 2)  $T$  é ortogonal se, e somente se,  $T \cdot T^t = T^t \cdot T = I$ .

Assim,

$$T^{-1} = T^t.$$

**Definição 4.9** Seja  $T \in \mathcal{L}(V)$  onde  $\dim(V) < \infty$  e seja  $\beta$  base ortonormal de  $V$ .

- 1)  $T$  é simétrica se, e somente se,  $[T]_{\beta}^{\beta}$  é simétrica.
- 2)  $T$  é ortogonal se, e somente se,  $[T]_{\beta}^{\beta}$  é ortogonal.

**Proposição 4.2** Seja  $(V \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , onde  $\dim(V) = n$ , e sejam  $\alpha$  e  $\beta$  bases ortonormais de  $V$ . Então, a matriz  $[T]_{\beta}^{\alpha}$  é uma matriz ortogonal (ou seja, as linhas ou as colunas são vetores ortonormais).

Demonstração:

Sejam as bases  $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  bases ortonormais de  $V$  e seja

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{n1}w_n \\ v_2 &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{n2}w_n \\ &\dots\dots\dots \\ v_n &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{nn}w_n \end{aligned}$$

Considerando o caso onde  $n = 2$ , logo

$$A = [I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como  $\alpha = \{v_1, v_2\}$  e  $\beta = \{w_1, w_2\}$ , tem-se

$$\langle v_1, v_1 \rangle = a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} = \|v\|^2 = 1 \text{ e } \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

Portanto,  $[I]_{\beta}^{\alpha}$  é uma matriz ortonormal.

**Definição 4.10 (Operador auto-adjunto)** Seja  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , onde  $T \in \mathcal{L}(V)$ ,  $V = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Assim,  $T \in \mathcal{L}(V)$  é *auto-adjunto* se  $\exists T^*$  e  $T^* = T$ . Se  $V$  é euclidiano, um operador auto-adjunto é chamado de *operador simétrico*.

**Definição 4.11** Seja  $A \in M_{n \times n}(K)$ .  $A$  é *hermitiana* ou *auto-adjunta* se  $A^* = A$ .

**Proposição 4.3** Seja  $T \in \mathcal{L}(V)$ , onde  $\dim(V) < \infty$  e  $\beta$  uma base ortonormal de  $V$ . Então,  $T$  é auto-adjunto se, e somente se,  $[T]_{\beta}^{\beta}$  é auto-adjunta.

Demonstração:

( $\Rightarrow$ )  $T$  é auto-adjunta, então, existe  $T^*$  e  $T^* = T$  se, e somente se,  $[T^*]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\beta}^{\beta}$ . Como  $\beta$  é ortonormal, então

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\beta}\right)^* = [T]_{\beta}^{\beta}$$

portanto,  $[T]_{\beta}^{\beta}$  é auto-adjunta.

( $\Leftarrow$ )  $[T]_{\beta}^{\beta}$  é auto-adjunta, isto é,

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\beta}\right)^*$$

como  $\beta$  é ortonormal, logo

$$[T]_{\beta}^{\beta} = [T^*]_{\beta}^{\beta}$$

portanto,  $T = T^*$ , ou seja,  $T$  é auto-adjunto.

**Observação 4.1** Se  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  é auto-adjunta, então  $A$  é simétrica, pois

$$A = A^* = A^{-t} = A^t$$

portanto,  $A$  é simétrica.

**Lema 4.1** Suponha  $T \in \mathcal{L}(V)$  é auto-adjunta. Então,  $T$  tem um autovalor.

Demonstração:

Assume-se que  $V$  é um espaço vetorial com produto interno. Seja  $n = \dim(V)$  e escolhendo  $v \in V$ , com  $v \neq 0$ . Então

$$(v, Tv, T^2v, \dots, T^n v)$$

não pode ser linearmente independente porque  $V$  tem dimensão  $n$  e tem-se  $n + 1$  vetores. Assim, existem números reais  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , não todos nulos, de maneira que

$$0 = a_0v + a_1Tv + a_2T^2v + \dots + a_nT^n v.$$

Tomando  $a_i$  como coeficientes de um polinômio do qual pode ser escrito na forma fatorada como

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = c(x^2 + \alpha_1x + \beta_1) \cdot \dots \cdot (x^2 + \alpha_Mx + \beta_M) \cdot (x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_m),$$

onde  $c$  é um número real não nulo, cada  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  e  $\lambda_j$  são reais, e  $\alpha_j^2 < 4\beta_j$ ,  $m + M \geq 1$ , para qualquer valor real de  $x$  na equação. Tem-se então

$$0 = a_0v + a_1Tv + \dots + a_nT^n v = (a_0I + a_1T + \dots + a_nT^n)v =$$

$$c(T^2 + \alpha_1T + \beta_1I) \cdot \dots \cdot (T^2 + \alpha_MT + \beta_MI) \cdot (T - \lambda_1I) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_mI)v$$



Cada  $T^2 + \alpha_j T + \beta_j I$  é invertível devido a  $T$  ser auto-adjunto assim como  $\alpha_j^2 < 4\beta_j$ , além de que  $c \neq 0$ . Então a equação acima implica que

$$0 = (T\lambda_1 I) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_m I)v.$$

Portanto,  $T - \lambda_j I$  não é injetiva para pelo menos um  $j$ . Em outras palavras,  $T$  tem autovalor.

**Proposição 4.4** *Seja  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,  $T \in \mathcal{L}(V)$  auto-adjunto. Então, os autovalores de  $T$  são reais e os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração:

1) Se  $\lambda$  é autovalor de  $T$  logo existe  $v \neq 0$  tal que  $T(v) = \lambda v$ . Então

$$\langle T(v), v \rangle = \langle v, T^*(v) \rangle$$

como  $T = T^*$ ,

$$\langle v, T(v) \rangle$$

assim,

$$\begin{aligned} \langle T(v), v \rangle &= \langle v, T(v) \rangle \\ \langle \lambda v, v \rangle &= \langle v, \lambda v \rangle \\ \lambda \langle v, v \rangle &= \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \\ \lambda \langle v, v \rangle - \bar{\lambda} \langle v, v \rangle &= 0 \\ (\lambda - \bar{\lambda}) \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\neq 0} &= 0 \end{aligned}$$

como  $\langle v, v \rangle \neq 0$ , tem-se que  $(\lambda - \bar{\lambda}) = 0$  se, e somente se,  $\lambda = \bar{\lambda}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2) Seja  $\lambda_1 = \lambda_2$  autovalores de  $T$ . Então

$$\begin{aligned} \exists v_1 \neq 0 | T(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\ \exists v_2 \neq 0 | T(v_2) &= \lambda_2 v_2 \end{aligned}$$

Tem-se que

$$\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T^*(v_2) \rangle$$

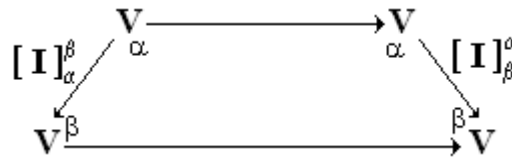
como  $T = T^*$

$$\begin{aligned}\langle T(v_1), v_2 \rangle &= \langle v_1, T(v_2) \rangle \\ \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle &= \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \\ \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle &= \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle \\ \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle &= \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \\ \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle v_1, v_2 \rangle &= 0 \\ \langle v_1, v_2 \rangle &= 0\end{aligned}$$

logo,  $v_1 \perp v_2$ .

**Proposição 4.5** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  bases ortonormais de  $V$  e  $T \in \mathcal{L}(V)$  tal que  $[T]_\alpha^\alpha$  é simétrica. Então  $[T]_\beta^\beta$  é simétrica.*

Demonstração:



**Figura 6:**

$[I]_\alpha^\alpha$  e  $[I]_\beta^\beta$  são simétricas.  $T : V \rightarrow V$ , onde  $[T]_\alpha^\alpha$  e  $[T]_\beta^\beta$  são simétricas.

Tem-se que

$$\begin{aligned}[T]_\beta^\beta &= [I]_\beta^\alpha \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot [T]_\alpha^\beta \\ [T]_\beta^\beta &= \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot [T]_\alpha^\beta \\ [T]_\beta^\beta &= \left([I]_\alpha^\beta\right)^t \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot [T]_\alpha^\beta\end{aligned}$$

aplicando a transposta em ambos os lados, obtém-se

$$\begin{aligned}\left([T]_\beta^\beta\right)^t &= \left(\left([I]_\alpha^\beta\right)^t \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot [T]_\alpha^\beta\right)^t \\ \left([T]_\beta^\beta\right)^t &= \left([T]_\alpha^\beta\right)^t \cdot \left([T]_\alpha^\alpha\right)^t \cdot \left(\left([I]_\alpha^\beta\right)^t\right)^t \\ \left([T]_\beta^\beta\right)^t &= \left([I]_\alpha^\beta\right)^t \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot [T]_\alpha^\beta \\ \left([T]_\beta^\beta\right)^t &= [T]_\beta^\beta\end{aligned}$$

**Teorema 4.2** *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador auto-adjunto. Se o subespaço  $V_{\lambda_i} \subset V$  é invariante por  $T$ , seu complemento ortogonal  $V_{\lambda_i}^\perp$  também é.*

Demonstração:

O **teorema 4.2** decorre imediatamente do

**Teorema 4.3** *Se o subespaço  $V_{\lambda_i} \subset V$  é invariante pelo operador linear  $T : V \rightarrow V$  então seu complemento ortogonal  $V_{\lambda_i}^\perp$  é invariante pelo operador adjunto  $T^* : V \rightarrow V$*

Demonstração:

Sejam  $u \in V_{\lambda_i}$  e  $v \in V_{\lambda_i}^\perp$ , tem-se então que  $Tu \in V_{\lambda_i}$  já que  $T$  é um operador invariante. Logo,

$$\langle u, T^*v \rangle = \langle Tu, v \rangle = 0$$

então

$$T^*v \in V_{\lambda_i}^\perp$$

, logo,  $V_{\lambda_i}^\perp$  é invariante por  $T^*$ .

**Teorema 4.4 (Teorema Espectral)** *Para todo operador autoadjunto  $T : V \rightarrow V$ , num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno, existe uma base ortonormal  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \in V$  formada por autovetores de  $T$ .*

Demonstração:

( $\Rightarrow$ ) Será utilizada indução na dimensão de  $V$ . O teorema é evidente se  $\dim(V) = 1$ . Supondo-o verdadeiro em dimensão  $n - 1$ , seja  $\dim(V) = n$ . Pela **Proposição 4.4**, existe um autovetor unitário  $u_n$ , portanto um subespaço  $V_{\lambda_i} \subset V$ , com  $i = 1, \dots, n$ , de dimensão 1, invariante por  $T$ . Pelo **Teorema 4.2**, o complemento ortogonal  $\dim(V_{\lambda_i}^\perp)$  também é invariante por  $T$ . Com  $\dim(V_{\lambda_i}^\perp) = n - 1$ , a hipótese de indução assegura a existência de uma base ortonormal  $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\} \subset V_{\lambda_i}^\perp$  formada por autovetores da restrição  $T : V_{\lambda_i}^\perp \rightarrow V_{\lambda_i}^\perp$ . Segue-se que  $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n\} \subset V$  é uma base ortonormal formada por autovetores de  $T$ .

( $\Leftarrow$ ) Se existe uma base ortonormal  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$  formada por autovetores do operador  $T : V \rightarrow V$  então este operador é auto-adjunto. Com efeito, para quaisquer  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , tem-se

$$\langle Tu_i, u_j \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} = \langle u_i, \lambda_j u_j \rangle = \langle u_i, Tu_j \rangle$$

e daí, resulta que  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$ , para quaisquer  $u, v \in V$ .

Assim, é consequência desse teorema  $D = P^t T P$ , onde  $D$  é a matriz diagonal,  $P$  a matriz ortonormal formada por autovetores associados aos autovalores de  $T$ ,  $P^t = P^{-1}$  é a matriz tranposta/inversa de  $P$  e  $T$  o operador auto-adjunto.

**Definição 4.12 (Formas bilineares)** *Seja  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial. Uma forma bilinear é uma aplicação bilinear*

$$\begin{aligned} B: V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto B(v, w) \end{aligned}$$

tal que

1) Para cada  $w$  fixado,  $B(v, w)$  é linear em  $v$ , isto é,

$$B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$$

$$B(\alpha v, w) = \alpha B(v, w); \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad \forall v, w \in V$$

2) Para cada  $v$  fixado,  $B(v, w)$  é linear em  $w$ , isto é,

$$B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2)$$

$$B(v, \alpha w) = \alpha B(v, w); \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad \forall v, w \in V$$

**Definição 4.13 (Matriz de uma forma bilinear)** *Seja  $V$  um espaço vetorial e  $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear. Dada uma base  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $V$ , deve-se associar a  $B$  uma matriz  $[B]_\beta^\beta$ , assim  $v, w \in V$ , tem-se*

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

$$w = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n$$

logo

$$B(v, w) = B\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right)$$

$$B(v, w) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j B(v_i, v_j) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t [B]_\beta^\beta \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } [v]_{\beta} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t \text{ e } [w]_{\beta} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \text{ Assim,}$$

$$[B]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & B(v_1, v_2) & \dots & B(v_1, v_n) \\ B(v_2, v_1) & B(v_2, v_2) & \dots & B(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B(v_n, v_1) & B(v_n, v_2) & \dots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

é chamada de **matriz da forma bilinear**  $B$  (em relação à base  $\beta$ ).

No caso de  $n = 2$ ,  $\dim(V) = 2$ , temos  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear e  $\beta = \{v_1, v_2\}$  base de  $V$ .

Sejam  $v, w \in V$  tais que

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

$$w = y_1 v_1 + y_2 v_2$$

Assim,

$$B(v, w) = B(x_1 v_1 + x_2 v_2, y_1 v_1 + y_2 v_2)$$

$$B(v, w) = B(x_1 v_1, y_1 v_1 + y_2 v_2) + B(x_2 v_2, y_1 v_1 + y_2 v_2)$$

$$B(v, w) = B(x_1 v_1, y_1 v_1) + B(x_1 v_1, y_2 v_2) + B(x_2 v_2, y_1 v_1) + B(x_2 v_2, y_2 v_2)$$

$$B(v, w) = x_1 y_1 B(v_1, v_1) + x_2 y_2 B(v_1, v_2) + x_1 y_2 B(v_2, v_1) + x_2 y_2 B(v_2, v_2)$$

$$B(v, w) = \sum_{i,j=1}^2 x_i y_j B(v_i, v_j)$$

$$B(v, w) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & B(v_1, v_2) \\ B(v_2, v_1) & B(v_2, v_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$B(v, w) = [v]_{\beta}^t [B]_{\beta}^{\beta} [w]_{\beta}$$

**Definição 4.14 (Forma bilinear simétrica)** A forma bilinear

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

é denominada **forma bilinear simétrica** se  $B(v, w) = B(w, v)$ .

**Definição 4.15 (Forma bilinear quadrática)** A forma bilinear

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

onde tem-se que  $q(v) = B(v, v)$  é denominada **forma bilinear quadrática** associada a  $B$ ,  $\forall v \in V$ .

## 5 FORMAS QUÁDRICAS

Esta seção trata das aplicações dos autovalores e autovetores nas formas quádricas e enfatiza a importância destas na classificação das quádricas na segunda e terceira dimensões (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987; LIMA, 2008; BOLDRINI et al., 1980; CAMARGO; BOULOS, 2005; POOLE, 2006).

Sejam  $V = \mathbb{R}^n$  com produto interno canônico e  $B$  a forma bilinear de  $B(v, v) = q(v), \forall v, v \in V$ . Então a forma quadrática associada a  $B$  é dada por

$$q(v) = B(v, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} v_i v_j = v^t B v$$

onde  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são as componentes de  $v$  na base considerada.

Se  $B$  é uma matriz diagonalizável, então a soma na expressão anterior contém apenas quadrados das componentes,  $q(v) = \sum_{i=1}^n b_{ii} v_i^2$  e diz-se que  $q$  é uma forma quadrática diagonalizável.

### 5.1 FORMA QUÁDRICA NO PLANO

Seja a forma quádrica

$$v_S^t A v_S = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (12)$$

em que a matriz simétrica  $A$  é a matriz da forma quadrática e  $v_S$  e  $v_S^t$  referem-se à base canônica  $S = \{e_1, e_2\}$  tal que  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ .

O produto de (12) é o polinômio  $ax^2 + by^2 + 2cxy$  o qual é um polinômio homogêneo do segundo grau em  $x$  e  $y$  e é chamado **forma quadrática no plano**.

Assim, tem-se o seguinte exemplo para ilustrar o que já foi enunciado.

Seja a matriz simétrica real

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$$

define no  $\mathbb{R}^2$  a forma quadrática

$$p = 4x^2 - 3y^2 + 24xy$$

ou na forma matricial

$$p = \underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{v_S'} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{v_S}$$

Ao vetor  $v_S = (1, 2)$ , por exemplo, corresponde ao número real

$$p = 4 \cdot (1)^2 - 3 \cdot (2)^2 + 24 \cdot (1) \cdot (2) = 4 - 12 + 48 = 40$$

### 5.1.1 Redução da Forma Quadrática à Forma Canônica

A forma quadrática no plano  $v_S' A v_S$  pode ser expressa por

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores da matriz  $A$ , e  $x'$  e  $y'$  as componentes do vetor  $v$  na base  $P = \{u_1, u_2\}$ , isto é,  $v_P = (x', y')$ , sendo  $u_1$  e  $u_2$  os autovetores unitários associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

De fato, tendo em vista que a matriz  $P$  é a matriz mudança de base de  $P$  para  $S$ , pois

$$[I]_S^P = S^{-1}P = IP = P$$

e, portanto

$$v_S = P v_P$$

pode-se escrever

$$v_S' A v_S = (P v_P)' A (P v_P)$$

ou

$$v_S' A v_S = v_P' (P' A P) v_P$$

como  $P$  diagonaliza  $A$  ortogonalmente

$$P' A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

conclui-se que

$$v_S^t A v_S = v_P^t D v_P$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ou, ainda

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

A forma  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$  é denominada **forma canônica** da forma quadrática no plano ou também **forma quadrática diagonalizada**.

Por exemplo, seja a seguinte forma quadrática

$$4x^2 - 3y^2 + 24xy$$

pode ser expressa por

$$-12x'^2 + 13y'^2.$$

De fato, a forma quadrática

$$4x^2 - 3y^2 + 24xy$$

é definida pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$$

onde os autovalores são  $\lambda_1 = -12$  e  $\lambda_2 = 13$ . Logo, a forma canônica da forma quadrática é

$$-12x'^2 + 13y'^2$$

Por outro lado, os autovetores unitários associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são, respectivamente,  $u_1 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$  e  $u_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ . Logo

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Como  $v_S = P v_P$  equivale a  $v_P = P^{-1} v_S$ , ou

$$v_P = P^t = v_S$$

pois  $P^t = P^{-1}$  pelo fato de  $P$  ser matriz ortogonal, pode-se calcular  $v_P$  a partir de  $v_S$ . Supondo



que  $v_S = (x, y) = (1, 2)$ , vem

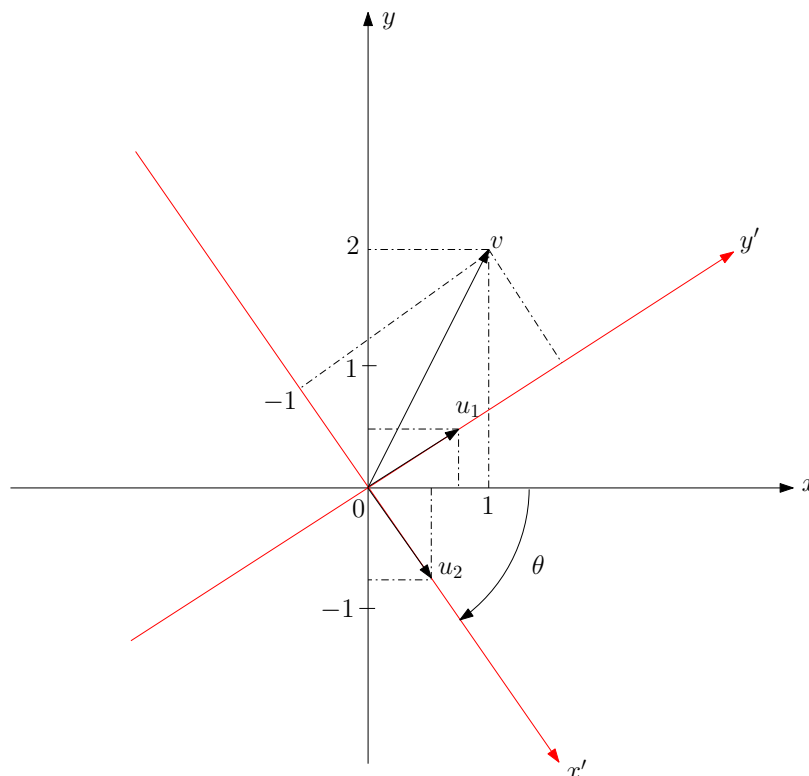
$$v_P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

isto é,  $v_P = (x', y') = (-1, 2)$ .

Assim,

$$\begin{aligned} 4x^2 - 3y^2 + 24xy &= -12x'^2 + 13y'^2 \\ 4(1)^2 - 3(2)^2 + 24(1)(2) &= -12(-1)^2 + 13(2)^2 \\ 4 - 12 + 48 &= -12 + 42 \\ 40 &= 40 \end{aligned}$$

O que ocorreu foi uma mudança de base ou uma mudança de referencial. O vetor  $v$ , que na base canônica  $S$  é  $v_S = (1, 2)$ , na base  $P$  dos vetores próprios unitários é  $v_P = (-1, 2)$ . Como a base canônica individualiza o sistema cartesiano retangular  $xOy$  e a base  $P$  o sistema retangular  $x'Oy'$ , pode-se dizer que um ponto que tem coordenadas  $(1, 2)$  em relação ao primeiro sistema tem coordenadas  $(-1, 2)$  em relação ao segundo sistema, conforme a figura (7) a seguir.



**Figura 7:**

$S_{S'}$ .]Representação de mudança de base de  $[T]_{S'}^S$ .

Essa mudança de referencial corresponde a uma rotação de um ângulo  $\theta$  do sistema  $xOy$

até o sistema  $x'Oy'$ . A matriz responsável por essa rotação é a matriz ortogonal  $P$ .

O ângulo de rotação pode ser dado pela seguinte definição.

**Definição 5.1** *Sejam  $T : V \rightarrow V$ , a base canônica  $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  e a base ortonormal dos autovetores  $\beta' = \{u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, \dots, u_{\lambda_n}\}$ , o ângulo  $\theta$  entre  $e_i$  e  $u_i$  é dado por*

$$\cos\theta = \frac{e_i \cdot u_{\lambda_i}}{\|e_i\| \cdot \|u_{\lambda_i}\|}, \quad -1 \leq \theta \leq 1$$

Se os autovetores unitários da matriz  $P$  forem dispostos de modo que  $\det(P) = 1$ , ela sempre representará uma rotação e a transformação de coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

que irá ocorrer no estudo das cônicas será sempre uma rotação.

## 5.2 CÔNICAS NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Chama-se **cônica** a todo conjunto de pontos  $M$  do plano cujas coordenadas  $x$  e  $y$ , em relação à base canônica, satisfazem à equação do segundo grau

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  não são todos nulos.

### 5.2.1 Equação Reduzida de uma Cônica

O reconhecimento e a análise da equação de uma cônica serão apresentados por meio de duas etapas, sendo a primeira constituída de três passos.

Seja a equação de uma cônica

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0 \quad (13)$$

**Etapa 1:** Eliminação do termo  $xy$

**Passo 1)** Escreve-se a equação na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0] \quad (14)$$

ou

$$v_S^t A v_S + N v_S + f = 0$$

onde

$$v_S = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \text{ e } N = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$$

**Passo 2)** Calculam-se os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e os autovetores unitários  $u_1 = (x_{11}, x_{12})$  e  $u_2 = (x_{21}, x_{22})$  da matriz simétrica  $A$ .

**Passo 3)** Substitui-se na equação (14) a forma quadrática

$$v_S^t A v_S = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

pela forma canônica

$$v_P^t D v_P = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

e

$$v_S = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

por

$$P v_P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

tendo sempre  $\det(P) = 1$ , a fim de que essa transformação seja uma rotação.

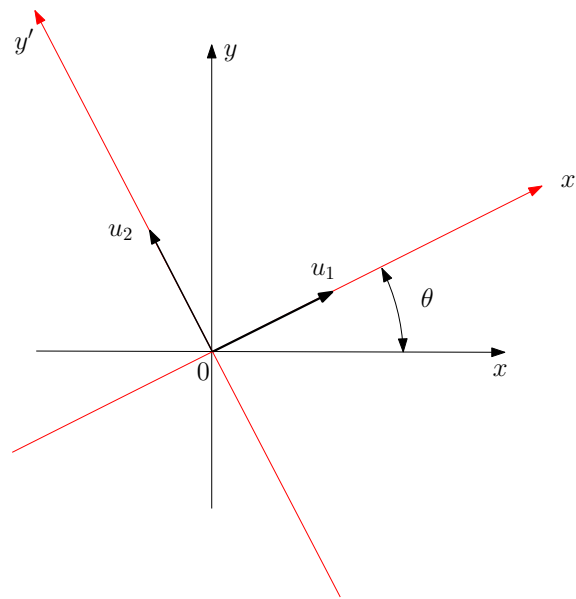
Assim, a equação (14) se transforma em

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

ou

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + p x' + q y' + f = 0 \quad (15)$$

que é a equação da cônica  $ax^2 + by^2 + 2cxy + dy + ey + f = 0$ , porém referida ao sistema  $x'Oy'$ , cujos eixos são determinados pela base  $P = \{u_1, u_2\}$ , conforme sugere a figura (8).



**Figura 8:**

$S_{S'}$  e do ângulo  $\theta$  da rotação do eixo  $xOy$  para o eixo  $x'Oy'$ .] Representação da mudança de base de  $[T]_{S'}^S$  e do ângulo  $\theta$  da rotação do eixo  $xOy$  para o eixo  $x'Oy'$ .

Observa-se que a equação  $ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$  apresenta o termo misto em  $xy$ , a equação  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + px' + qy' + f = 0$  é desprovida dele, ou seja, ocorreu uma simplificação.

### **Etapa 2:** Translação de eixos

Conhecida a equação da cônica

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + px' + qy' + f = 0 \quad (16)$$

para se obter a equação reduzida efetua-se uma nova mudança de coordenadas, que consiste na translação do último referencial  $x'Oy'$  para o novo, o qual será chamado  $XO'Y$ . A análise das duas possibilidades é feita a seguir.

1) Supondo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  diferentes de zero, pode-se escrever

$$\lambda_1 \left( x'^2 + \frac{p}{\lambda_1} x' \right) + \lambda_2 \left( y'^2 + \frac{q}{\lambda_2} y' \right) + f = 0$$

ou

$$\lambda_1 \left( x'^2 + \frac{p}{\lambda_1} x' + \frac{p^2}{4\lambda_1^2} \right) + \lambda_2 \left( y'^2 + \frac{q}{\lambda_2} y' + \frac{q^2}{4\lambda_2^2} \right) + f - \frac{p^2}{4\lambda_1^2} - \frac{q^2}{4\lambda_2^2} = 0$$

$$\lambda_1 \left( x' + \frac{p}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( y' + \frac{q}{2\lambda_2} \right)^2 + f - \frac{p^2}{4\lambda_1^2} - \frac{q^2}{4\lambda_2^2} = 0$$

Fazendo

$$f - \frac{p^2}{4\lambda_1^2} - \frac{q^2}{4\lambda_2^2} = -F$$

e, por meio de fórmulas de translação

$$\begin{aligned} X &= x' + \frac{p}{2\lambda_1} \\ Y &= y' + \frac{q}{2\lambda_2} \end{aligned}$$

segue que

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 - F = 0$$

e, finalmente

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F$$

a qual é a equação reduzida de uma **cônica de centro** e, assim, o primeiro membro é a forma canônica da forma quadrática no plano.

2) Se um dos autovalores for igual a zero, supondo  $\lambda_1 = 0$ , a equação (16) fica

$$\lambda_2 y'^2 + px' + qy' + f = 0$$

ou

$$\begin{aligned} \lambda_2 \left( y'^2 + \frac{q}{\lambda_2} y' \right) + px' + f &= 0 \\ \lambda_2 \left( y'^2 + \frac{q}{\lambda_2} y' + \frac{q^2}{4\lambda_2^2} \right) + px' + f - \frac{q^2}{4\lambda_2^2} &= 0 \end{aligned}$$

Fazendo, por meio de uma translação

$$\begin{aligned} X &= x' + \frac{f}{p} - \frac{q^2}{4p\lambda_2} \\ Y &= y' + \frac{q}{2\lambda_2} \end{aligned}$$

segue que

$$\lambda_2 Y^2 + pX = 0$$

onde esta é a equação reduzida de uma cônica sem centro. No caso de  $\lambda_2 = 0$ , segue o pensamento realizado para  $\lambda_1$ , e a equação reduzida da cônica sem centro quando  $\lambda_2 = 0$  seria então

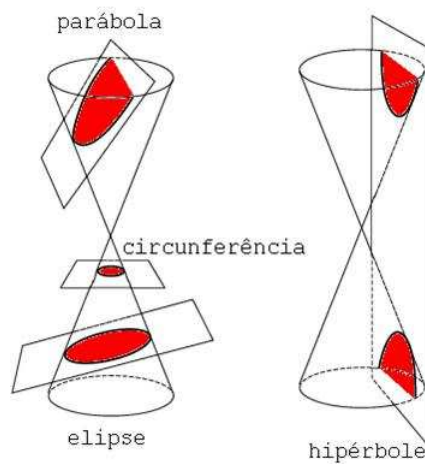
$$\lambda_1 X^2 + qX = 0.$$

### 5.3 CÔNICAS NÃO DEGENERADAS E DEGENERADAS NA POSIÇÃO PADRÃO

A forma geral de uma equação quadrática em  $x$  e  $y$  é

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

onde pelo menos  $a$ ,  $b$  ou  $c$  é não nulo. Os gráficos dessas equações quadráticas são chamados de **secções cônicas** (ou **cônicas**), pois podem ser obtidos tomando-se secções transversais de um cone (duplo), isto é, cortando-se com planos. Os exemplos mais importantes de secções cônicas são elipses (com círculos como casos particulares), hipérbolas e parábolas. Estas são chamadas de **cônicas não degeneradas**.



**Figura 9: Secções cônicas.**

#### 5.3.1 Classificação das Cônicas

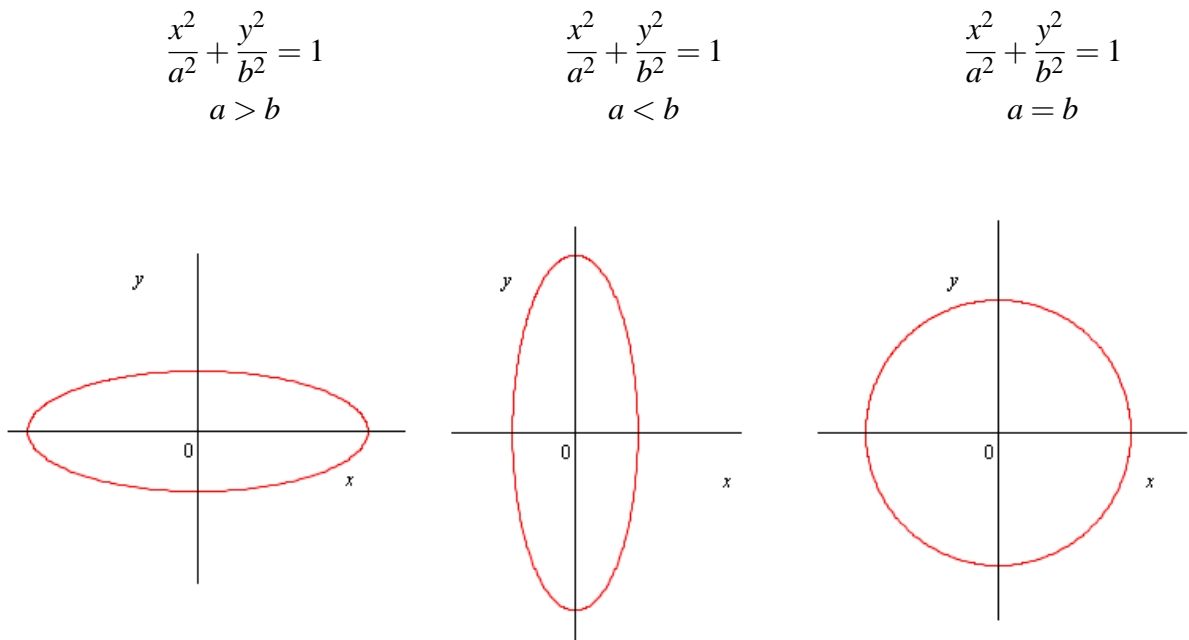
A classificação das cônicas pode ser influenciada pelos sinais dos autovalores, como vemos a seguir.

1) A equação de uma cônica de centro é

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F$$

Assim, se ocorrer

- $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem de mesmo sinal, a cônica será do gênero **elipse**.



**Figura 10: Representação de elipses ( $a, b > 0$ ). Primeiro caso  $a > b$ , segundo caso  $a < b$  e terceiro caso  $a = b$ .**

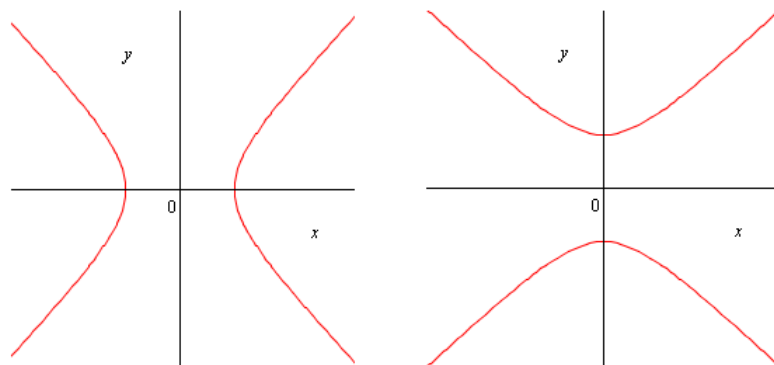
- $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem de sinais contrários, a cônica será do gênero **hipérbole**.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a, b > 0$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a, b > 0$$



**Figura 11: Representação de hipérbolas ( $a, b > 0$ ).**

2) A equação de uma cônica sem centro é

$$\lambda_2 Y^2 + pX = 0$$

e

$$\lambda_1 X^2 + qY = 0$$

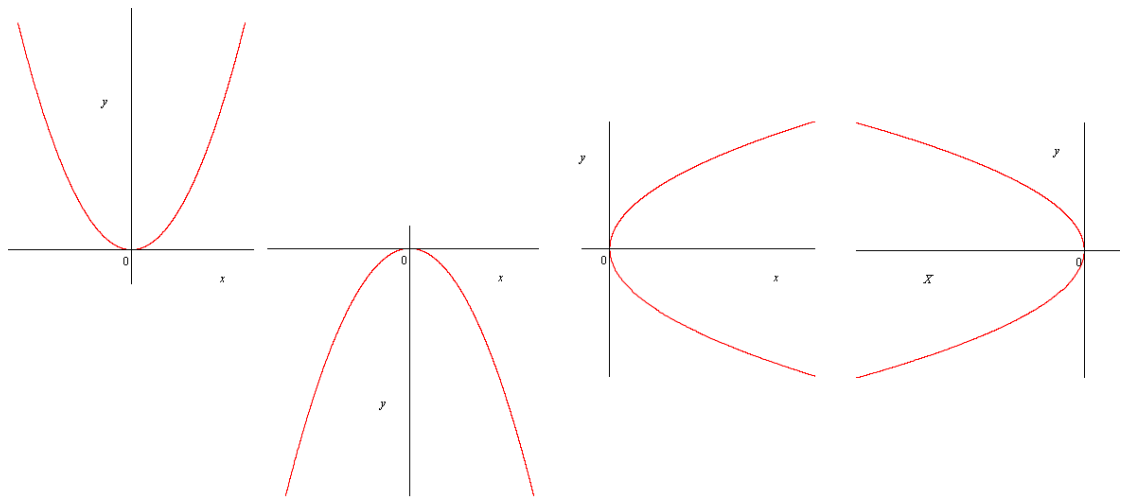
Uma cônica representada por qualquer uma dessas equações é do gênero **parábola**.

$$y = ax^2 \\ a > 0$$

$$y = ax^2 \\ a < 0$$

$$x = ay^2 \\ a > 0$$

$$x = ay^2 \\ a > 0$$



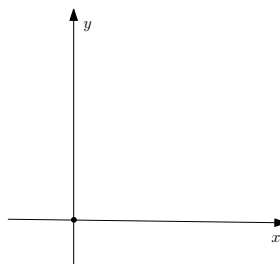
**Figura 12: Representação de parábolas.**

Também é possível que uma secção transversal de um cone dê como resultado um único ponto, uma linha ou um par de retas. Estas são chamadas de **cônicas degeneradas**.

Tem-se nos seguintes casos qual a influência dos sinais dos autovalores em relação às cônicas degeneradas.

**Caso 1)** Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  têm o mesmo sinal, a cônica será uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

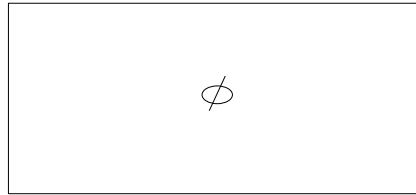
- a) A equação  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$  ou  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$  representa o ponto  $(-2, 1)$  (circunferência de raio igual a zero)



**Figura 13: Cônica degenerada que representa um ponto.**



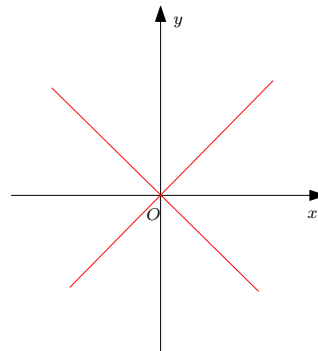
- b) A equação  $3x^2 + 2y^2 + 1 = 0$  representa o conjunto vazio. Essa equação não define nenhuma figura geométrica (o primeiro membro é sempre diferente de 0).



**Figura 14: Cônica degenerada que representa o vazio.**

**Caso 2)** Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tiverem sinais contrários, a cônica será uma hipérbole ou duas retas.

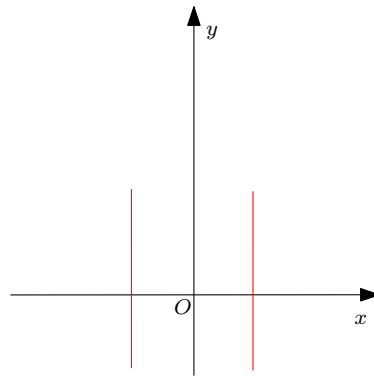
A equação  $9x^2 - y^2 = 0$  representa as retas  $y = -3x$  e  $y = 3x$ . De fato, fatorando o primeiro membro, obtém-se  $(3x + y) \cdot (3x - y) = 0$  e conclui-se que  $3x + y = 0$  ou  $3x - y = 0$ , ou seja,  $y = -3x$  e  $y = 3x$ .



**Figura 15: Cônica degenerada que representa duas retas congruentes.**

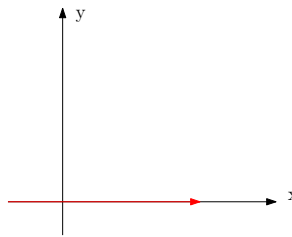
**Caso 3)** Se  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 0$  será uma parábola, duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

- a) A equação  $4x^2 = 9$ , onde  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = 0$ , representa duas retas paralelas. De fato, pode-se escrever  $x^2 = \frac{9}{4}$  ou  $x = \pm\frac{3}{2}$ , que são duas retas paralelas.



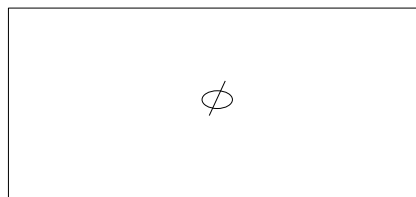
**Figura 16: Cônica degenerada que representa duas retas paralelas.**

- b) A equação  $y^2 = 0$ , onde  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 1$ , representa uma reta, no caso, o eixo dos  $x$ , isto é,  $y = 0$ .



**Figura 17: Cônica degenerada que representa uma reta coincidente ao eixo  $x$ .**

- c) A equação  $3x^2 = -5$ , onde  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = 0$ , representa o conjunto vazio.



**Figura 18: Cônica degenerada que representa o conjunto vazio.**

As cônicas (elipse, hipérbole e parábola) e suas degenerações (um par de retas, uma só reta e um ponto) constituem as possíveis intersecções de uma superfície cônica com um plano.

Seguem algumas aplicações nas quais são verificadas a aplicação dos autovalores e autovetores nas cônicas.

**Aplicação 5.1** Determinar o gênero da cônica e a equação reduzida representada pela equação

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy + 7\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y + 10 = 0 \quad (17)$$

Semelhante às cônicas, a análise das quádricas será dividida em duas etapas.

**Etapa 1)** Eliminação do termo em  $xy$

**Passo 1)** Escreve-se a equação dada na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 10I = 0 \quad (18)$$

**Passo 2)** Calculam-se os autovalores e os autovetores unitários da matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

Assim, os autovalores são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = 1$ .

Serão encontrados os respectivos autovetores para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  em  $Av = \lambda v$ . Para  $\lambda_1 = 3$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 3x \\ x - y = 3x \end{cases}$$

Efetuando operações elementares, encontram-se  $v_{\lambda_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$  e  $v_{\lambda_1} = [(1, 1)]$ . Normalizando  $v_{\lambda_1}$ , tem-se  $u_{\lambda_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

As operações para encontrar o autovetor relacionado a  $\lambda_1 = 3$  são análogas para  $\lambda_2 = 1$ . Assim, encontram-se  $v_{\lambda_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y\}$  e  $v_{\lambda_2} = [(-1, 1)]$ , consequentemente,  $u_{\lambda_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

Testando se a matriz  $P$  formada pelos vetores unitários  $u_{\lambda_1}$  e  $u_{\lambda_2}$  é ortogonal:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

tem-se que  $\det(P) = 1$  e que  $u_{\lambda_1} \cdot u_{\lambda_1} = 1$ ,  $u_{\lambda_2} \cdot u_{\lambda_2} = 1$ ,  $u_{\lambda_1} \cdot u_{\lambda_2} = 0$  e  $u_{\lambda_2} \cdot u_{\lambda_1} = 0$ .

Portando a matriz  $P$  composta por autovetores unitários é ortogonal, e como  $\det(P) = 1 \neq 0$ , consequentemente, existe matriz inversa  $P^{-1}$  e a matriz  $A$  será diagonalizável.

**Passo 3)** Substituindo em (18) a forma quadrática

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

pela forma canônica

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

e o vetor

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

por

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

em que os autovetores unitários foram dispostos de modo que  $\det(P) = 1$  para que essa transformação de coordenadas represente uma rotação.

Logo, a equação (18) fica

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 10 = 0$$

ou

$$3x'^2 + y'^2 + 12x' - 2y' + 10 = 0 \quad (19)$$

que é a equação da cônica (17), porém referida ao sistema  $x'Oy'$  cujos eixos são suportes de  $v_{\lambda_1}$  e  $v_{\lambda_2}$  (ou  $u_{\lambda_1}$  e  $u_{\lambda_2}$ ).

## **Etapa 2)** Translação de Eixos

Tomando a equação (19), faz-se uma translação do sistema  $x'Oy'$ . Assim,

$$\begin{aligned} 3x'^2 + y'^2 + 12x' - 2y' + 10 &= 0 \\ (3x'^2 + 12x') + (y'^2 - 2y') &= -10 \\ 3(x'^2 + 4x' + 4) + (y'^2 - 2y' + 1) &= -10 + 3 \cdot 4 + 1 \\ 3(x' + 2)^2 + (y' - 1)^2 &= 3 \end{aligned}$$

Utilizando, agora, as fórmulas de translação, chamam-se

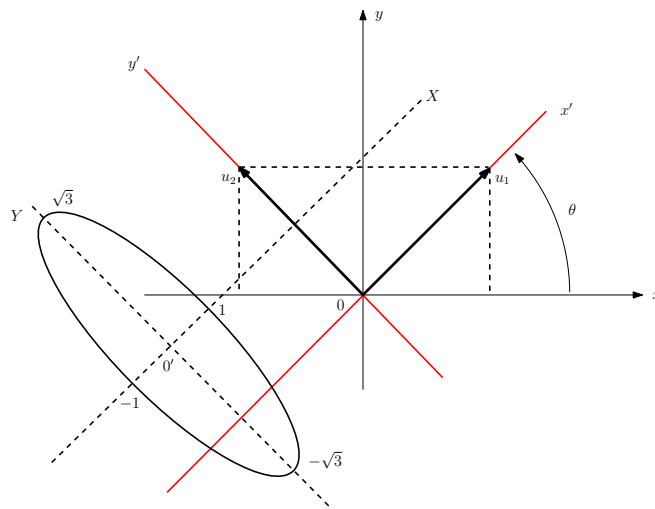
$$X = x' + 2 \quad \text{e} \quad Y = y' - 1$$

e, portanto, a equação  $3(x' + 2)^2 + (y' - 1)^2 = 3$  fica

$$3X^2 + Y^2 = 3 \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{X^2}{1}}_{a^2} + \underbrace{\frac{Y^2}{3}}_{b^2} = 1$$

que é a equação reduzida da cônica dada em (17), porém referida ao sistema  $XO'Y$ , onde  $O' = (-2, 1)$ .

Trata-se de uma elipse cujos semi-eixos medem 1 e  $\sqrt{3}$ , estando o eixo maior sobre o eixo da ordenada  $Y$ .



**Figura 19:** Observa-se que além da rotação do eixo  $x'O'y'$  ocorreu a translação do mesmo para o centro da elipse, formando o eixo  $XO'Y$ .

**Observação 5.1** Tendo em vista que  $e_1 = (1, 0)$  e  $u_{\lambda_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , o ângulo  $\theta$  correspondente à rotação é dado por:

$$\cos \theta = \frac{e_1 \cdot u_{\lambda_1}}{\|e_1\| \cdot \|u_{\lambda_1}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por outro lado, para confirmar,  $e_2 = (0, 1)$  e  $u_{\lambda_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , logo

$$\cos \theta = \frac{e_2 \cdot u_{\lambda_2}}{\|e_2\| \cdot \|u_{\lambda_2}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

isto é,  $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$ .

**Aplicação 5.2** Determinar a equação reduzida e o gênero da cônica representada pela equação

$$11x^2 - 24xy + 4y^2 + 20x - 40y - 20 = 0 \quad (20)$$

Essa aplicação será analisada semelhantemente a **Aplicação 5.1**.

**Etapa 1)** Eliminação do termo em  $xy$

**Passo 1)** Escreve-se a equação dada na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & -40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 20I = 0 \quad (21)$$

**Passo 2)** Calculam-se os autovalores e os autovetores unitários da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 11 - \lambda & -12 \\ -12 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (11 - \lambda)(4 - \lambda) - 144 = \lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0$$

Assim, os autovalores são  $\lambda_1 = 20$  e  $\lambda_2 = -5$ .

Encontrando os respectivos autovetores para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  em  $Av = \lambda v$ , tem-se

Para  $\lambda_1 = 20$ , segue

$$\begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20x \\ 20y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -9x - 12y = 20x \\ -12x - 16y = 20y \end{cases}$$

Efetuada operações elementares, encontram-se  $v_{\lambda_1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{3y}{4} \right\}$  e  $v_{\lambda_1} = \left[ \left( 1, -\frac{3}{4} \right) \right]$ . Normalizando  $v_{\lambda_1}$ , tem-se  $u_{\lambda_1} = \left( \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right)$ .

As operações para encontrar o autovetor relacionado a  $\lambda_1 = 20$  são análogas para  $\lambda_2 = -5$ . Assim, encontram-se  $v_{\lambda_2} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{4x}{3} \right\}$  e  $v_{\lambda_2} = \left[ \left( 1, \frac{4}{3} \right) \right]$ , consequentemente,  $u_{\lambda_2} = \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$ .

Testando se a matriz  $P$  formada pelos vetores unitários  $u_{\lambda_1}$  e  $u_{\lambda_2}$  é ortogonal

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

tem-se que  $\det(P) = 1$  e que  $u_{\lambda_1} \cdot u_{\lambda_1} = 1$ ,  $u_{\lambda_2} \cdot u_{\lambda_2} = 1$ ,  $u_{\lambda_1} \cdot u_{\lambda_2} = 0$  e  $u_{\lambda_2} \cdot u_{\lambda_1} = 0$ .

Portando a matriz  $P$  composta por autovetores unitários é ortogonal, e como  $\det(P) = 1 \neq 0$ , consequentemente, existe matriz inversa  $P^{-1}$  e a matriz  $A$  será diagonalizável.

**Passo 3)** Com as devidas substituições, a equação (21) fica

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & -40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 20 = 0$$

ou

$$20x'^2 - 5y'^2 + 40x' - 20y' - 20 = 0$$

que é a equação da cônica (20), porém referida ao sistema  $x'Oy'$  cujos eixos são suportes de  $v_{\lambda_1}$  e  $v_{\lambda_2}$  (ou  $u_{\lambda_1}$  e  $u_{\lambda_2}$ ),

**Etapa 2)** Translação de Eixos

$$20x'^2 - 5y'^2 + 40x' - 20y' - 20 = 0$$

dividindo por 5, tem-se

$$\begin{aligned} 4x'^2 - y'^2 + 8x' - 4y' - 4 &= 0 \\ (4x'^2 + 8x') - (y'^2 + 4y') &= 4 \\ 4(x'^2 + 2x' + 1) - (y'^2 + 4y' + 4) &= 4 + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \\ 4(x' + 1)^2 - (y' + 2)^2 &= 4 \end{aligned}$$

Utilizando, agora, as fórmulas de translação, segue

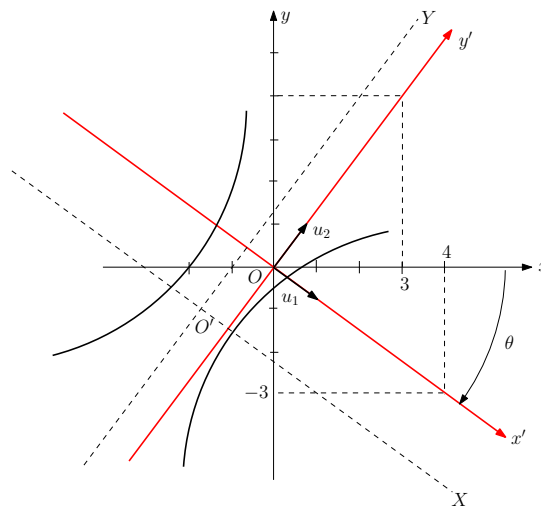
$$X = x' + 1 \quad \text{e} \quad Y = y' + 2$$

e, portanto, a equação  $4(x' + 1)^2 - (y' + 2)^2 = 4$  fica

$$4X^2 - Y^2 = 4 \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{X^2}{1}}_{a^2} - \underbrace{\frac{Y^2}{4}}_{b^2} = 1$$

que é a equação reduzida da cônica dada em (21), porém referida ao sistema  $XO'Y$ , onde  $O' = (-1, -2)$ .

Trata-se de uma hipérbole cujo eixo real, de medida 2, está sobre o eixo da abscissa  $X$ .



**Figura 20:** Observa-se que além da rotação do eixo  $x'Oy'$  ocorreu a translação do mesmo para o centro da hipérbole, formando o eixo  $XOY$ .

**Observação 5.2** Tendo em vista que  $e_1 = (1, 0)$  e  $u_{\lambda_1} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ , o ângulo  $\theta$  correspondente à rotação é dado por

$$\cos \theta = \frac{e_1 \cdot u_{\lambda_1}}{\|e_1\| \cdot \|u_{\lambda_1}\|} = \frac{4}{5}$$

Por outro lado, para confirmar,  $e_2 = (0, 1)$  e  $u_{\lambda_2} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ , logo

$$\cos \theta = \frac{e_2 \cdot u_{\lambda_2}}{\|e_2\| \cdot \|u_{\lambda_2}\|} = \frac{4}{5}$$

isto é,  $\theta = \arccos(\frac{4}{5}) \cong -37^\circ$ .

**Aplicação 5.3** Determina-se a equação reduzida e o gênero da cônica representada pela equação

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0 \quad (22)$$

Assim, segue como as aplicações anteriores.

**Etapa 1)** Eliminação do termo em  $xy$

**Passo 1)** A equação dada na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 4I = 0$$



**Passo 2)** Os autovalores e os autovetores unitários da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  são

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

Assim, os autovalores são  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 2$ .

Encontrando os respectivos autovetores para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  em  $Av = \lambda v$ , tem-se

Para  $\lambda_1 = 0$ , segue

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x \\ 0y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1x + 1y = 0 \\ 1x + 1y = 0 \end{cases}$$

Efetuada operações elementares, são encontrados  $v_{\lambda_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -x\}$  e  $v_{\lambda_1} = [(1, -1)]$ . Normalizando  $v_{\lambda_1}$ , tem-se  $u_{\lambda_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

As operações para encontrar o autovetor relacionado a  $\lambda_1 = 0$  são análogas para  $\lambda_2 = 2$ . Assim, são encontrados  $v_{\lambda_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x\}$  e  $v_{\lambda_2} = [(1, 1)]$ , consequentemente,  $u_{\lambda_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

Testando se a matriz  $P$  formada pelos vetores unitários  $u_{\lambda_1}$  e  $u_{\lambda_2}$  é ortogonal.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

tem-se que  $\det(P) = 1$  e que  $u_{\lambda_1} \cdot u_{\lambda_1} = 1$ ,  $u_{\lambda_2} \cdot u_{\lambda_2} = 1$ ,  $u_{\lambda_1} \cdot u_{\lambda_2} = 0$  e  $u_{\lambda_2} \cdot u_{\lambda_1} = 0$ .

Portando a matriz  $P$  composta por autovetores unitários é ortogonal, e como  $\det(P) = 1 \neq 0$ , consequentemente, existe matriz inversa  $P^{-1}$  e a matriz  $A$  será diagonalizável.

**Passo 3)** Com as devidas substituições, a equação (22) fica

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 4I = 0$$

ou

$$2y'^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}x' - \frac{8}{\sqrt{2}}y' + 4 = 0$$

que é a equação da cônica (22), porém referida ao sistema  $x'Oy'$  cujos eixos são suportes de  $v_{\lambda_1}$  e  $v_{\lambda_2}$  (ou  $u_{\lambda_1}$  e  $u_{\lambda_2}$ ),

**Etapa 2)** Translação de Eixos

$$2y'^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}x' - \frac{8}{\sqrt{2}}y' + 4 = 0$$

dividindo por 2, tem-se

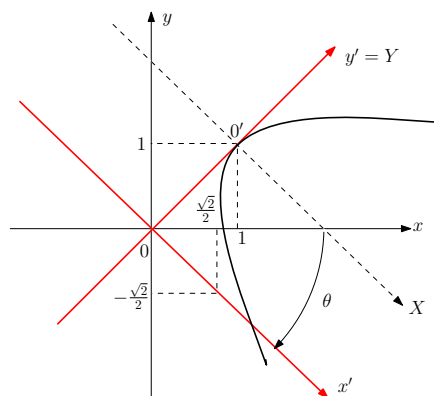
$$\begin{aligned} y'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' - \frac{4}{\sqrt{2}}y' + 2 &= 0 \\ \left(y'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}y'\right) &= \frac{4}{\sqrt{2}}x' - 2 \\ \left(y'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}y' + 2\right) &= \frac{4}{\sqrt{2}}x' - 2 + 2 \\ \left(y'^2 - \sqrt{2}\right)^2 &= \sqrt{2}x' \end{aligned}$$

Utilizando, agora, as fórmulas de translação, chama-se

$$X = x' \quad \text{e} \quad Y = y' - \sqrt{2}$$

e, portanto, tem-se  $Y^2 = 2\sqrt{2}X$  que é a equação reduzida da cônica dada em (22), porém referida ao sistema  $XO'Y$ , onde  $O' = (0, \sqrt{2})$ .

Trata-se de uma parábola de parâmetro igual a  $\sqrt{2}$ , tendo para eixo o eixo  $X$ , conforme mostra a figura 21.



**Figura 21:** Observa-se que além da rotação do eixo  $x'O'y'$  ocorreu a translação do mesmo para o vértice da parábola, formando o eixo  $XO'Y$ .

**Observação 5.3** Tendo em vista que  $e_1 = (1, 0)$  e  $u_{\lambda_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , o ângulo  $\theta$  correspondente à rotação é dado por

$$\cos \theta = \frac{e_1 \cdot u_{\lambda_1}}{\|e_1\| \cdot \|u_{\lambda_1}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por outro lado, para confirmar,  $e_2 = (0, 1)$  e  $u_{\lambda_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , logo

$$\cos \theta = \frac{e_2 \cdot u_{\lambda_2}}{\|e_2\| \cdot \|u_{\lambda_2}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

isto é,  $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -45^\circ$ .

**Aplicação 5.4** Determinar a equação reduzida e o gênero da cônica representada pela equação

$$4x^2 - 3y^2 + 24xy - 156 = 0 \quad (23)$$

Como essa equação não apresenta os termos de primeiro grau  $x$  e  $y$ , a resolução é constituída somente da **Etapa 1**).

**Etapa 1)** Eliminação do termo em  $xy$

**Passo 1)** A equação dada na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 156I = 0$$

**Passo 2)** Os autovalores e os autovetores unitários da matriz simétrica  $A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$  são os autovalores  $\lambda_1 = -12$  e  $\lambda_2 = 13$  e os correspondentes autovetores são  $v_{\lambda_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -\frac{4x}{3}\}$ , com  $v_{\lambda_1} = [(1, -\frac{4}{3})]$  e vetor unitário  $u_{\lambda_1} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ , e  $v_{\lambda_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = \frac{3x}{4}\}$ , com  $v_{\lambda_2} = [(1, \frac{3}{4})]$  e vetor unitário  $u_{\lambda_2} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ .

Testando se a matriz  $P$  formada pelos vetores unitários  $u_{\lambda_1}$  e  $u_{\lambda_2}$  é ortogonal

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

tem-se que  $\det(P) = 1$  e que  $u_{\lambda_1} \cdot u_{\lambda_1} = 1$ ,  $u_{\lambda_2} \cdot u_{\lambda_2} = 1$ ,  $u_{\lambda_1} \cdot u_{\lambda_2} = 0$  e  $u_{\lambda_2} \cdot u_{\lambda_1} = 0$ .

Portando a matriz  $P$  composta por autovetores unitários é ortogonal, e como  $\det(P) = 1 \neq 0$ , conseqüentemente, existe matriz inversa  $P^{-1}$  e a matriz  $A$  será diagonalizável.

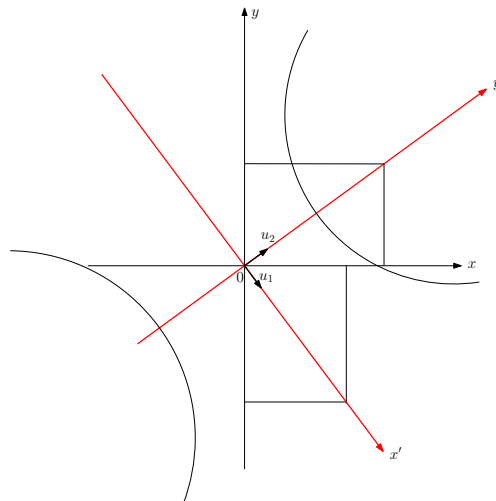
**Passo 3)** Com as devidas substituições, a equação (23) fica

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 156I = 0$$

ou

$$12x'^2 + 13y'^2 = 156 \text{ ou } \frac{y'^2}{12} - \frac{x'^2}{13} = 1$$

que representa a hipérbole com eixo real sobre o eixo da ordenada  $y'$ , conforme mostra a figura 22.



**Figura 22:** Observa-se que ocorreu apenas a rotação formando o eixo  $x'Oy'$ , pois a hipérbole já se encontra na origem.

**Observação 5.4** Tendo em vista que  $e_1 = (1, 0)$  e  $u_{\lambda_1} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ , o ângulo  $\theta$  correspondente à rotação é dado por

$$\cos \theta = \frac{e_1 \cdot u_{\lambda_1}}{\|e_1\| \cdot \|u_{\lambda_1}\|} = \frac{3}{5}$$

Por outro lado, para confirmar,  $e_2 = (0, 1)$  e  $u_{\lambda_2} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ , logo

$$\cos \theta = \frac{e_2 \cdot u_{\lambda_2}}{\|e_2\| \cdot \|u_{\lambda_2}\|} = \frac{3}{5}$$

isto é,  $\theta = \arccos(\frac{3}{5}) \cong -53^\circ$ .

**Aplicação 5.5** Determinada a equação reduzida e o gênero da cônica representada pela equação

$$x^2 - 6x + 8y - 7 = 0$$

Como essa equação não apresenta o termo  $xy$ , a resolução é constituída somente da **Etapa 2)**.

**Etapa 2)** Translação de Eixos

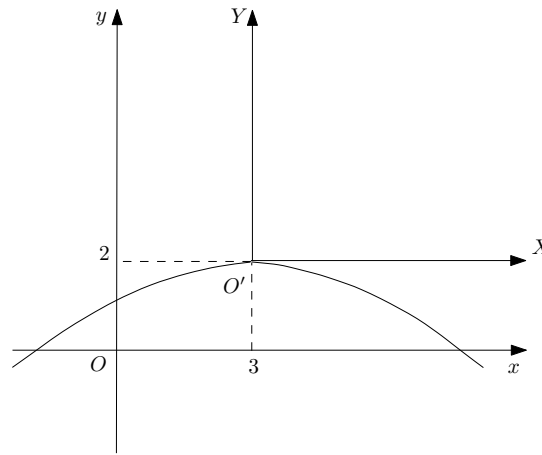
$$x^2 - 6x + 9 = 7 - 8y + 9$$

$$(x - 3)^2 = -8y + 16$$

$$(x - 3)^2 = -8(y - 2)$$

Fazendo  $X = x - 3$  e  $Y = y - 2$ , a equação anterior fica

$$X^2 = -8Y.$$



**Figura 23:** Observa-se ocorreu a translação do centro da hipérbole, formando o eixo  $XO'Y$ .

que representa uma parábola de vértice na origem do sistema  $XO'Y$ , com  $O' = (3, 2)$ , e com concavidade voltada para baixo, conforme o a Figura 23.

#### 5.4 FORMA QUADRÁTICA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Seja a forma quádrlica

$$v_S^t A v_S = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (24)$$

em que a matriz simétrica  $A$  é a matriz da forma quadrática e  $v_S$  e  $v_S^t$  referem-se à base canônica  $S = \{e_1, e_2, e_3\}$  tal que  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  e  $e_3 = (0, 0, 1)$ .

O produto de (24) é o polinômio  $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$  o qual é um polinômio homogêneo do segundo grau em  $x$  e  $y$  e é chamado **forma quadrática do espaço tridimensional**.

O seguinte exemplo para ilustrar os conceitos introduzidos.

Seja a matriz simétrica real

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

define no  $\mathbb{R}^3$  a forma quadrática

$$p = 3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2zy$$

ou, na forma matricial

$$p = \underbrace{\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}}_{v'_S} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{v_S}$$

Ao vetor  $v_S = (0, 1, 2)$ , por exemplo, corresponde ao número real

$$p = 3 \cdot (0)^2 + 5 \cdot (1)^2 + 3 \cdot (2)^2 - 2 \cdot (0) \cdot (1) + 2 \cdot (0) \cdot (2) - 2 \cdot (1) \cdot (2) = 13$$

#### 5.4.1 Redução da Forma Quadrática à Forma Canônica

A forma quadrática no plano  $v'_S A v_S$  pode ser expressa por

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são os autovalores da matriz  $A$ , e  $x', y'$  e  $z'$  as componentes do vetor  $v$  na base  $P = \{u_1, u_2, u_3\}$ , isto é,  $v_P = (x', y', z')$ , sendo  $u_1, u_2$  e  $u_3$  os autovetores unitários associados a  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ .

De fato:

Tendo em vista que a matriz  $P$  é a matriz mudança de base de  $P$  para  $S$ , pois:

$$[I]_S^P = S^{-1}P = IP = P$$

e, portanto

$$v_S = P v_P$$

pode-se escrever

$$v_S^t A v_S = (P v_P)^t A (P v_P)$$

ou

$$v_S^t A v_S = v_P^t (P^t A P) v_P$$

como  $P$  diagonaliza  $A$  ortogonalmente

$$P^t A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

conclui-se que

$$v_S^t A v_S = v_P^t D v_P$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

ou, ainda

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$$

A forma  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$  é denominada **forma canônica** da forma quadrática no espaço tridimensional.

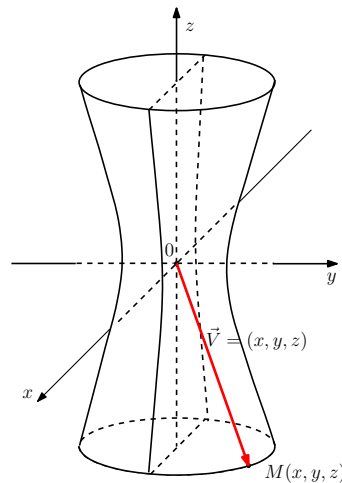
## 5.5 QUÁDRICAS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Chama-se quádrlica ou superfície quádrlica a todo conjunto de pontos  $M$  do espaço tridimensional cujas coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , em relação à base canônica, satisfazem a equação do 2º grau

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  e  $f$  não são todos nulos.

As coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  dos pontos  $M$  do espaço são as componentes dos vetores  $v \in \mathbb{R}^3$ , que satisfazem à equação de uma quádrlica.



**Figura 24:** Representação de uma quadrica na qual tomado um ponto qualquer  $M$  obtém-se um vetor que está contido nesta quadrica.

### 5.5.1 Equação Reduzida de Uma Quadrica

A seguir, serão utilizadas as etapas já abordadas anteriormente em cônicas para encontrar a equação reduzida de uma quadrica.

Seja a equação de uma quadrica

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0 \quad (25)$$

**Etapa 1)** Eliminação dos termos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$

**Passo 1)** Escreve-se a equação na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix} + [q] = [0] \quad (26)$$

ou

$$v_S^t A v_S + N v_S + q = 0$$

onde

$$v_S = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} m & n & p \end{bmatrix}$$

**Passo 2)** Calculam-se os autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  e os autovetores unitários  $u_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$ ,  $u_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})$  e  $u_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33})$  da matriz simétrica  $A$ .



**Passo 3)** Substitui-se na equação (26) a forma quadrática

$$v_S^t A v_S = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

pela forma canônica

$$v_P^t D v_P = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

e

$$v_S = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

por

$$P v_P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

verificando sempre que  $\det(P) = 1$ , a fim de que essa transformação seja uma rotação.

Assim, a equação (26) se transforma em

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [q] = [0]$$

ou

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + rx' + sy' + tz' + q = 0 \quad (27)$$

que é a equação da quádrlica dada em (26), porém referida ao sistema  $Ox'y'z'$ , cujos eixos são determinados pela base  $P = \{u_1, u_2, u_3\}$ .

Observando que enquanto a equação (26) apresenta os termos mistos em  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ , a equação (27) é desprovida deles. Portanto, na passagem da equação (26) para (27), ocorreu uma simplificação.

## Etapa 2 Translação de eixos

Conhecida a equação da cônica

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + rx' + sy' + tz' + q = 0 \quad (28)$$

para se obter a equação reduzida efetua-se uma nova mudança de coordenadas, que consiste na translação do último referencial  $x'y'z'$  para o novo, o qual será chamado  $O'XYZ$ . A análise das duas possibilidades é feita a seguir.

1) Supondo  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  diferentes de zero, pode-se escrever

$$\lambda_1 \left( x'^2 + \frac{r}{\lambda_1} x' \right) + \lambda_2 \left( y'^2 + \frac{s}{\lambda_2} y' \right) + \lambda_3 \left( z'^2 + \frac{t}{\lambda_2} z' \right) + q = 0$$

ou

$$\lambda_1 \left( x'^2 + \frac{r}{\lambda_1} x' + \frac{r^2}{4\lambda_1^2} \right) + \lambda_2 \left( y'^2 + \frac{s}{\lambda_2} y' + \frac{s^2}{4\lambda_2^2} \right) + \lambda_3 \left( z'^2 + \frac{t}{\lambda_2} z' + \frac{t^2}{4\lambda_2^2} \right) + q - \frac{r^2}{4\lambda_1^2} - \frac{s^2}{4\lambda_2^2} - \frac{t^2}{4\lambda_3^2} = 0$$

$$\lambda_1 \left( x' + \frac{r}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( y' + \frac{s}{2\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left( z' + \frac{t}{2\lambda_3} \right)^2 + q - \frac{r^2}{4\lambda_1^2} - \frac{s^2}{4\lambda_2^2} - \frac{t^2}{4\lambda_3^2} = 0$$

Fazendo

$$q - \frac{r^2}{4\lambda_1^2} - \frac{s^2}{4\lambda_2^2} - \frac{t^2}{4\lambda_3^2} = -Q$$

e, por meio de fórmulas de translação

$$\begin{aligned} X &= x' + \frac{r}{2\lambda_1} \\ Y &= y' + \frac{s}{2\lambda_2} \\ Z &= z' + \frac{t}{2\lambda_3} \end{aligned}$$

segue

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 - Q = 0$$

e, finalmente

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = Q \quad (29)$$

a equação (29) é a equação de uma **quádrlica de centro** e, assim, o primeiro membro é a forma canônica da forma quádrlica no espaço tridimensional.

2) Se um dos autovalores for igual a zero,  $\lambda_1 = 0$ , a equação (28) fica

$$\lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + rx' + sy' + tz' + q = 0$$

ou

$$\lambda_2 \left( y'^2 + \frac{s}{\lambda_2} y' + \frac{s^2}{4\lambda_2^2} \right) + \lambda_3 \left( z'^2 + \frac{t}{\lambda_2} z' + \frac{t^2}{4\lambda_2^2} \right) + rx'q - \frac{s^2}{4\lambda_2^2} - \frac{t^2}{4\lambda_3^2} = 0$$

$$\lambda_2 \left( y' + \frac{s}{2\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left( z' + \frac{t}{2\lambda_2} \right) + r \left( x' + \frac{q}{r} - \frac{s^2}{4r\lambda_2} - \frac{t^2}{4r\lambda_3} \right) = 0$$

Fazendo, por meio de uma translação

$$\begin{aligned} X &= x' + \frac{q}{r} - \frac{s^2}{4r\lambda_2} - \frac{t^2}{4r\lambda_3} \\ Y &= y' + \frac{s}{2\lambda_2} \\ Z &= z' + \frac{t}{2\lambda_3} \end{aligned}$$

segue

$$\lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + rX = 0$$

em que esta é a equação reduzida de uma quádrlica sem centro.

**Observação 5.5** Se em lugar de  $\lambda_1$  fosse  $\lambda_2 = 0$  ou  $\lambda_3 = 0$ , a equação reduzida de uma quádrlica sem centro seria

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_3 Z^2 + sY = 0$$

ou

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + tZ = 0$$

### 5.5.2 Classificação das Quádricas no Espaço Tridimensional

No espaço tridimensional, as superfícies quádrlicas de centro têm, num sistema de coordenadas ortogonais conveniente, uma equação do tipo

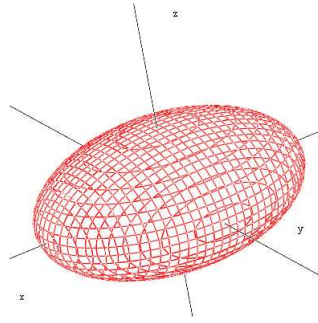
$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = Q.$$

Assim, as possibilidades são as seguintes

**I) Quando  $Q = 1$**

**1) Se  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  e  $\lambda_3 > 0$ , será uma quádrlica do gênero **elipsóide**.**

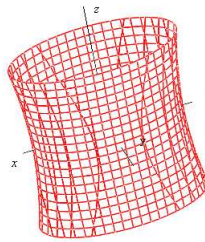
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



**Figura 25: Representação de um elipsóide.**

- 2) Se  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  e  $\lambda_3 < 0$ , será uma quádrlica do gênero **hiperbolóide de uma folha (ou de revolução)**.

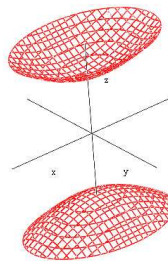
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



**Figura 26: Representação de um hiperbolóide de uma folha.**

- 3) Se  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  e  $\lambda_3 < 0$ , será uma quádrlica do gênero **hiperbolóide de duas folhas**.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

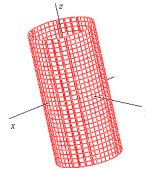


**Figura 27: Representação de um hiperbolóide de duas folhas.**

- 4) Se  $\lambda_1 \leq 0$ ,  $\lambda_2 \leq 0$  e  $\lambda_3 \leq 0$ , será um **conjunto vazio**.

- 5) Se  $\lambda_3 = 0$ ,  $Q = C \times \mathbb{R} = \{(v, t) | v \in C, t \in \mathbb{R}\}$ , onde  $C \subset \mathbb{R}^2$  é definido pela equação  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$ , neste caso,  $Q$  é um **cilindro de base C**.

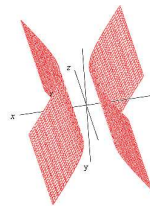
$$x^2 + y^2 = 1, \quad z \text{ constante}$$



**Figura 28: Representação de um cilindro.**

- 6) Se  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  e  $\lambda_3 = 0$ , será um **cilindro hiperbólico**, onde  $z = 0$ .

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

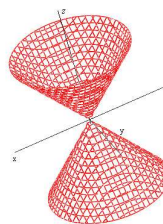


**Figura 29: Representação de um cilindro hiperbólico.**

II) Quando  $Q = 0$

- 7) Se  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  e  $\lambda_3 = -1$ , será um **cone elíptico**.

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



**Figura 30: Representação de um cone elíptico.**

A seguir, serão apresentadas as equações de quádricas sem centro. Temos que

$$\lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + rX = 0$$

ou

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_3 Z^2 + sY = 0$$

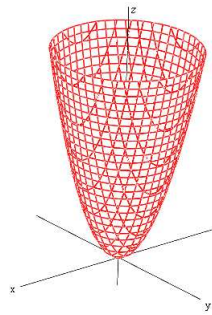
ou

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + tZ = 0$$

a quádrlica representada por uma dessas equações é do tipo **parabolóide**.

**8)** Se  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  e  $\lambda_3 = 0$ , será um **parabolóide elíptico**.

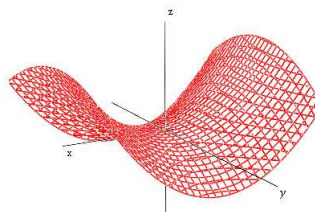
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



**Figura 31:** Representação de um parabolóide elíptico.

**9)** Se  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  e  $\lambda_3 = 0$ , será um **parabolóide hiperbólico**.

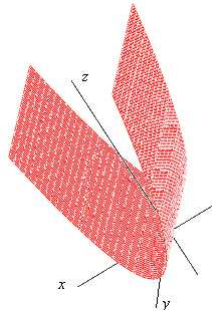
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



**Figura 32:** Representação de um parabolóide hiperbólico.

**10)** Se  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  ou  $\lambda_2 < 0$  e  $\lambda_3 = 0$ , será um **cilindro parabólico**.

$$x = ky^2, \quad k \in \mathbb{R}$$



**Figura 33: Representação de um cilindro parabólico.**

**Aplicação 5.6** Determinar a equação reduzida e o tipo da quádrlica representada pela equação

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + \sqrt{3}y - \frac{7}{12} = 0$$

**Etapa 1)** Eliminação dos termos  $xy$ ,  $xz$  e

**Passo 1)** A equação dada na forma matricial é  $yz$ .

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix} = [0] \quad (30)$$

**Passo 2)** Os autovalores e os autovetores unitários da matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

são

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2, & u_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \lambda_2 = 3, & u_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ \lambda_3 = 6, & u_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \end{cases}$$

**Passo 3)** Com as devidas substituições, a equação (30) fica

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 12 \end{bmatrix} = [0]$$

ou

$$2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 + y' - \sqrt{2}z' - \frac{7}{12} = 0$$

**Etapa 2) Translação de Eixos**

$$3\left(y'^2 + \frac{y'}{3}\right) + 2x'^2 + 6\left(z'^2 - \frac{\sqrt{2}}{6}z'\right) = \frac{7}{12}$$

$$2x'^2 + 3\left(y'^2 + \frac{y'}{3} + \frac{1}{36}\right) + 6\left(z'^2 - \frac{\sqrt{2}}{6}z' + \frac{1}{72}\right) = \frac{7}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$

$$2x'^2 + 3\left(y' + \frac{1}{6}\right)^2 + 6\left(z' - \frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

fazendo

$$X = x' \quad Y = y' + \frac{1}{6} \quad Z = z' - \frac{\sqrt{2}}{12}$$

a equação acima fica

$$2X^2 + 3Y^2 + 6Z^2 = \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{X^2}{\frac{3}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}} + \frac{Z^2}{\frac{1}{8}} = 1$$

que é a equação reduzida da quádrlica dada, porém, referida ao sistema  $O'XYZ$ , sendo  $O' = \left(0, -\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{12}\right)$ . Trata-se de um elipsóide.

**Aplicação 5.7** *Faça a identificação e os gráficos das seguintes quádrlicas*

a)  $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 - 144 = 0$

b)  $x^2 + z^2 - 4y = 0$

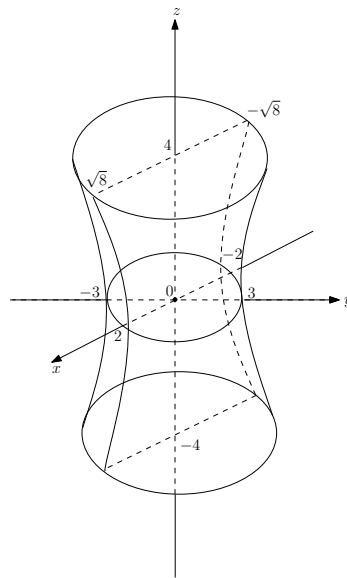
Solução:

a) Se dividir ambos os membros da equação por 144, vem

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{(2^2)} + \frac{y^2}{(3^2)} - \frac{z^2}{(4^2)} = 1$$

que é a forma canônica de um hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo  $z$ .





**Figura 34: Representação de um hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo  $z$ .**

O traço no plano  $xOy$  é a elipse

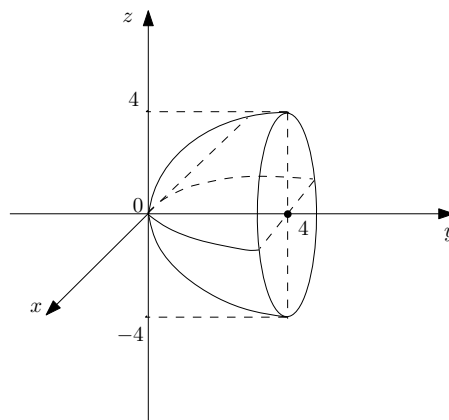
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad z = 0$$

Os traços nos planos  $xOz$  e  $yOz$  são as hipérbolas

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1 \quad y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1 \quad x = 0$$

respectivamente.

- b)  $x^2 + z^2 - 4y = 0$  ou  $\frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{1} = 4y$  é a forma canônica de um parabolóide elíptico ao longo do eixo dos  $y$ .



**Figura 35: Representação de um parabolóide elíptico ao longo do eixo  $y$ .**

O traço no plano  $xOz$  é a origem  $(0,0,0)$ .

Os traços nos planos  $xOz$  e  $yOz$  são as parábolas

$$x^2 = 4y, z = 0 \text{ e } z^2 = 4y, x = 0$$

respectivamente.

## 6 CONCLUSÃO

O estudo dos autoespaços só é possível quando há uma matriz de transformação  $T, T : V \rightarrow V$ , tal que  $Tv = \lambda v, v \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ , de maneira que  $T$  é invariante e transforma o espaço  $V$  em si próprio. Tem-se que  $\lambda$  é chamado de autovalor de  $T$  e  $v$  de autovetor de  $T$  correspondente ao autovalor  $\lambda$ .

Neste contexto, quando  $Tv = \lambda v, \lambda$  carrega de maneira simplificada as informações referentes a  $T$ , o que é conveniente em muitas situações devido a facilidade numérica que dispõe, em especial nas quádricas de segunda e terceira dimensões.

A equação das quádricas de segunda e terceira dimensões podem ser escritas matricialmente por matrizes auto-adjuntas (ou simétricas), garantindo a existência de autovalor e autovetor verificado pelo Teorema Espectral. Originalmente, as quádricas em questão podem estar rotacionadas ou transladadas, o que facilita a manipulação da equação inicial. Naturalmente, para simplificar a análise dessas quádricas, encontram-se os autovalores e, conseqüentemente, os autovetores correspondentes. Os autovetores indicarão uma base ortonormal para a translação/rotação do eixo original para o centro da quádrica e, assim, facilitar a análise da mesma gerando a equação reduzida, devido  $T : V \rightarrow V$  ser invariante.

Assim, o uso de autovalores e autovetores é empregado na mudança de base da transformação  $T$ , de forma mais eficiente, já que a mudança de base usual pode não preservar a diagonalização da matriz  $T$  para a nova base.

Como visto nas aplicações, os sinais dos autovalores podem determinar a forma da quádrica, desde conjunto vazio, ponto, retas paralelas, parábolas, elipses, hipérbolas, elipsóides, hiperbolóides de uma folha e duas folhas, parabolóides, dentre outros.

Requer ressaltar que esta pesquisa deteve-se apenas no caso de  $T : V \rightarrow V$  reais visto que o estudo de autoespaços não se restringe apenas aos reais, por exemplo o espaço complexo, se fosse considerado, esta pesquisa bibliográfica ficaria muito extensa. Ainda, ressalta-se que este trabalho procurou apresentar os aspectos algébricos referentes as quádricas nas segunda e terceira dimensões, não enfatizando os aspectos geométricos que estas quádricas dispõem.

Para realização das figuras, foram utilizados os softwares Maple 12 e IPE 7 para a construção das quádricas de segunda e terceira dimensões.

**REFERÊNCIAS**

- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- AXLER, S.; GEHRING, F. W.; HALNROS, P. R. **Linear algebra done right**. 2. ed. San Francisco: Springer the Language of Science, 2010.
- BARSOTI, L. **Álgebra linear**. 2. ed. Curitiba: A. M. Cavalcanti e Cia Ltda, 1976.
- BOLDRINI, J. et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.
- CAMARGO, I. d.; BOULOS, P. **Geometria analítica**. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall do Brasil, 2005.
- COELHO, F. U.; LOURENCO, M. L. **Um curso de álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2010.
- HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1976.
- KOLMAN, B.; HILL, D. R. **Introdução à álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- LANG, S. **Álgebra linear**. 1. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1971.
- LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- LIMA, E. L. **Álgebra linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. **Álgebra linear**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.
- MAGALHAES, L. T. **Álgebra linear como introdução a matemática aplicada**. Lisboa: Texto Editores, 2004.
- NOBLE, B.; DANIEL, J. W. **Álgebra linear aplicada**. 1. ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1986.
- POOLE, D. **Álgebra linear**. 1. ed. São Paulo: Thonson Learning, 2006.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1987.